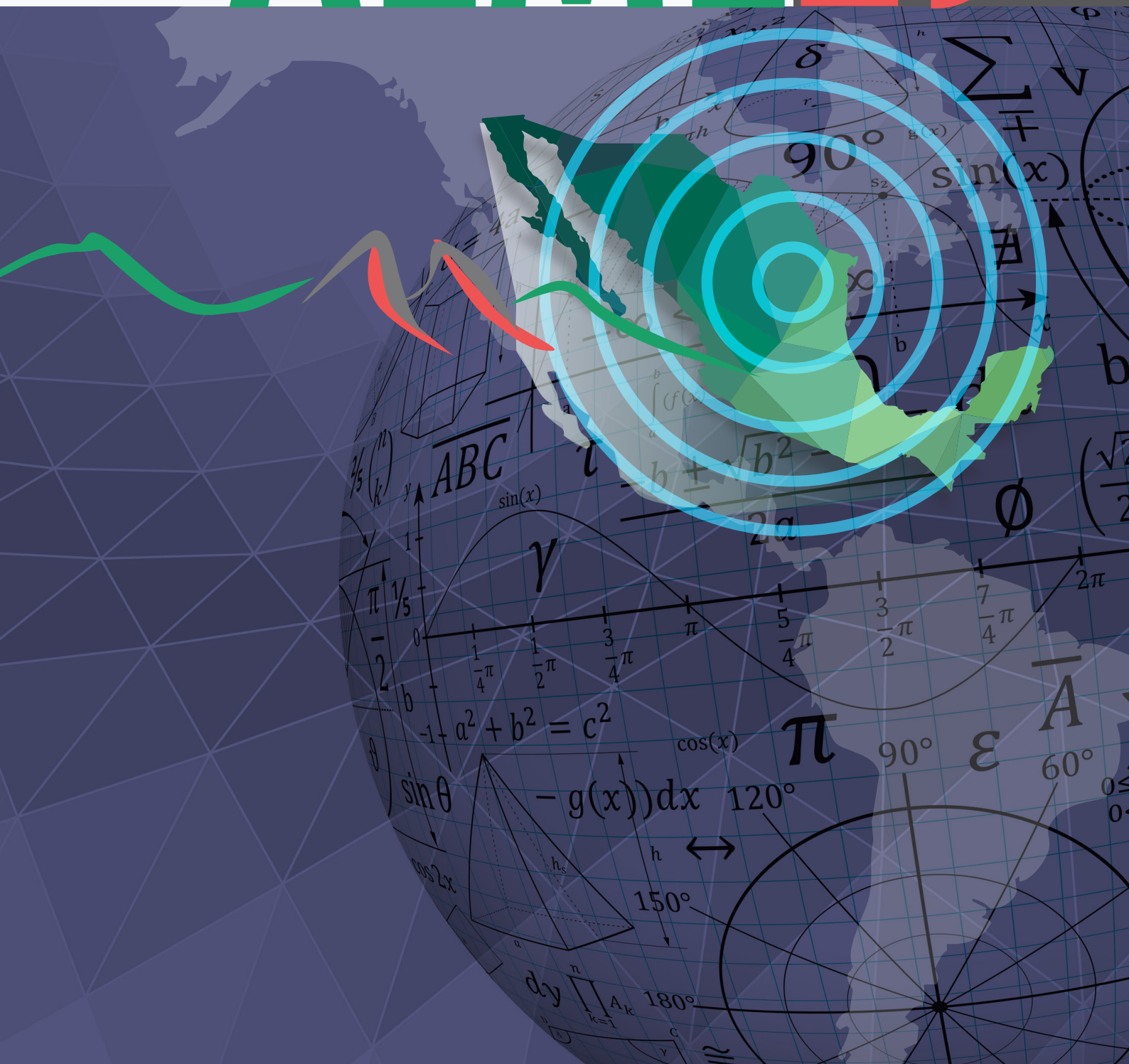
Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

VOLUMEN 29 » AÑO 2016 » ISSN 2448-6469

ALME 29



Coordinadora:

Eizabeth Mariscal (México)

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Comité Editorial:

Adriana Engler	(Argentina)	Lorenzo Contreras	(México)
Anabelle Castro	(Costa Rica)	Luis Arturo Serna	(México)
Analida Ardilla	(Panamá)	Luis Manuel Cabrera	(México)
Cariño Ruiz	(México)	María García	(México)
Carlos Oropeza	(México)	Mariangela Borelo	(Italia)
Claudia Flores	(México)	Mayra Murillo	(Panamá)
Claudia Lara	(Guatemala)	Milton Rosa	(Brasil)
Daniela Pagés	(Argentina)	Mónica Olave	(Uruguay)
Gabriela Buendía	(México)	Nora Inés Lerman	(Argentina)
Javier Lezama	(México)	Sandra Castillo	(Venezuela)
José David Zaldívar	(México)	Soledad Montoya	(Chile)
José Isaac Sánchez	(México)	Verónica Molfino	(Uruguay)

Diseño:

Gabriela Sánchez Téllez

Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, CLAME, A.C.
www.clame.org.mx

Derechos reservados © 2016. CLAME A.C.
Edición del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. – México
ISSN: 2448-6469

Se autoriza la reproducción total o parcial, previa cita a la fuente:

Autor(es) (2016). Nombre del artículo. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 29. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Consejo Directivo

Claudia M. Lara Galo - Presidente
Elizabeth Mariscal Vallarta - Tesorera
Cecilia R. Crespo Crespo - Secretaria
Ángela M. Martín - Vocal Caribe
Edison de Faria - Vocal Centroamérica
Marcela Ferrari Escolá - Vocal Norteamérica
Patricia Lestón - Vocal Sudamérica

Consejo consultivo

Egbert Agard
Ricardo Cantoral
Fernando Cajas
Guadalupe de Castillo
Evarista Matías
Rosa María Farfán
Teresita Peralta
Gustavo Martínez Sierra

Comisión de admisión

Santa Daysi Sánchez
Christiane Ponteville
Marger da Conceição Ventura Viana

Comisión de promoción académica

Edison de Faria
Yolanda Serres
Leonora Díaz Moreno
Mayra Castillo
Javier Lezama

Comité internacional de RELME

Analida Ardila (Panamá)
Blanca Peralta (Colombia)
Blanca Rosa Ruiz Hernández (México)
Claudia María Lara Galo (Guatemala)
Claudia Rodríguez Muñoz (México)
Luis Roberto Moreno (Panamá)
Ruth Rodríguez Gallegos (México)

Comité Científico de Evaluación

Ademir Basso	Brasil
Adlai Ralph Detoni	Brasil
Agustín Grijalva Monteverde	México
Alejandro Lois	Argentina
Alejandro Miguel Rosas Mendoza	México
Alfonso Escorza Morales	México
Alma Rosa Pérez Trujillo	México
Ana Rosa Corica	Argentina
Astrid Marlene Morales Soto	Chile
Bertha Ivonne Sánchez Luján	México
Blanca Ruiz Hernández	México
Catalina Navarro Sandoval	México
Cecilia Crespo Crespo	Argentina
Cecilia Elguero	México
Claudia Leticia Méndez Bello	México
Claudia Lisete Oliveira Groenwald	Brasil
Crisólogo Dolores Flores	México
Cristina Mercedes Camós	Argentina
Daniela Reyes–Gasperini	Argentina
Elena Nesterova	México
Elisa Silvia Oliva	Argentina
Elpidio López Arias	Cuba
Elsa Caridad Ramírez García	Cuba
Enrique Javier Gómez Otero	México
Eugenio Carlos Rodríguez	Cuba

Evelia Reséndiz Balderas	México
Flor Monserrat Rodríguez Vásquez	México
Francisco Cordero	México
Gisela Montiel Espinosa	México
Héctor Alejandro Silva Crocci	Chile
Hipólito Hernández Pérez	México
Isabel Tuyub Sánchez	México
Jaime Mena Lorca	Chile
Jorge Iván Ávila Contreras	Chile
Juan Adolfo Álvarez Martínez	México
Judith Alejandra Hernández Sánchez	México
Karla Margarita Gómez Osalde	México
Leopoldo Zúñiga Silva	México
Leticia Sosa Guerrero	México
Lianggi Luis Espinoza Ramírez	Chile
Lidia Beatriz Esper	Argentina
Lilia López Vera	México
Liliana Milevicich	Argentina
Liliana Suárez Téllez	México
Luis Roberto Moreno Chandler	Panamá
Luis Roberto Pino-Fan	Chile
Malva Alberto	Argentina
Marcela Ferrari Escolá	México
Marcela Parraguez González	Chile
Marcelino González Maitland	México
Marger da Conceição Ventura Viana	Brasil
Maria del Socorro Valero Cazarez	México
María Esther Magali Méndez Guevara	México
María Guadalupe Ordaz Arjona	México
María Inés Ciancio	Argentina
María Nubia Soler Álvarez	Colombia
María Patricia Colin Uribe	México
Mariana Talamonti Baldasarre	Argentina
Marlene Alves Dias	Brasil
Marta Inés Marcilla	Argentina

Mayra Anaharely Sarai Báez Melendres	México
Miriam Martínez Vázquez	México
Mirta Débora Chan	Argentina
Mónica García Zatti	Argentina
Mónica Lorena Micelli	Argentina
Patricia Lestón	Argentina
Rebeca Flores García	México
Ricardo Cantoral Uriza	México
Rosa Araceli Rotaeche Guerrero	México
Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre	Perú
Rosa Isela Vázquez Camacho	México
Rosa María Farfán Márquez	México
Silvia Guadalupe Maffey García	México
Susana Beatriz Mercau	Argentina
Teresa Claudia Braicovich	Argentina
Teresa Cristina Ochoviet Filgueiras	Uruguay
Víctor Larios Osorio	México
Yolanda Serres Voisin	Venezuela

TABLA DE CONTENIDOS

Presentación

Claudia María Lara Galo 21

Capítulo 1

ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR 23

RELACIÓN ENTRE EL DESARROLLO DE LAS COMPETENCIAS DE ANÁLISIS DIDÁCTICO, DIGITAL Y DE LA CIUDADANÍA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES EN EL PERÚ
Norma Violeta Rubio Goycochea, Silvia Carvajal Romero 24

MOTIVACIÓN DE LOS ESTUDIANTES EN LA ELECCIÓN DE LA CARRERA DE MATEMÁTICAS
Lorena Jiménez Sandoval 33

ANÁLISIS DIDÁCTICO A UN PROCESO DE ENSEÑANZA DEL MÉTODO "INTEGRACIÓN POR PARTES"
Enrique Mateus Nieves 42

ANÁLISIS DE LAS DIVERSAS TEORÍAS DESARROLLADAS EN MATEMÁTICA EDUCATIVA COMO FUNDAMENTO PARA MEJORAR LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE TIJUANA
Catalina Rodríguez Moreno 50

EL SENTIDO DE LA DISPERSIÓN Y SU DESARROLLO EN EL CURRICULO
Ignacio González-Ruiz, Carmen Batanero, M. Mar López-Martín y J. Miguel Contreras 56

HISTORIA Y CONCEPTOS MATEMÁTICOS EN LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS PARA LA EDUCACIÓN SECUNDARIA EN COSTA RICA (1949-2012)
Leonel Castro, Patricia Cortés, Roberto Guzmán, Noemí Lezcano, Grettel Mora, Natalia Rosales, Miguel Picado. 64

COMUNIDAD DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO: UN MARCO METODOLÓGICO
Claudia Leticia Méndez Bello, Claudio Enrique Opazo Arellano, Teresa Guadalupe Parra Fuentes, Rosario Pérez López, Francisco Cordero Osorio 74

EMERGENCIA DEL RAZONAMIENTO INFERENCIAL DESDE UN PRIMER ACERCAMIENTO A LOS DATOS
Blanca R. Ruiz Hernández, María Guadalupe Tobías Lara, Armando Albert 84

LOS SIGNIFICADOS DE FUNCIÓN Y FUNCIÓN DERIVADA DESARROLLADOS POR LOS ESTUDIANTES AL ESTUDIAR LA VARIACIÓN EN EL CONTEXTO DE LOS PROBLEMAS DE INGENIERÍA
Ramiro Ávila Godoy , Jesús Ávila Godoy, José María Bravo Tapia 93

TABLA DE CONTENIDOS

SOBRE LAS RAZONES Y LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: ¿QUÉ TRATAMIENTO HACEN LOS LIBROS DE TEXTO?
Ferney Tavera Acevedo, Jhony Alexander Villa-Ochoa 105

ÁLGEBRA Y EL ENFOQUE POR COMPETENCIAS EN EL BACHILLERATO MEXICANO
Dulce Yuridia Miranda Aragón, Silvia Elena Ibarra Olmos 115

ELEMENTOS ARTICULADORES PARA LOS MODOS DE COMPRENDER EL CONCEPTO DE DERIVADA
Irma Pinto Rojas, Marcela Parraguez González 124

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL EN EL BACHILLERATO
Luis López-Acosta, Gisela Montiel Espinosa, Ricardo Cantoral Uriza 130

PRELIMINARES AL MODELO DE ESTOCÁSTICOS PARA LA FORMACIÓN TECNOLÓGICA
Omar Pablo Torres Vargas, Ana María Ojeda Salazar 139

SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS
Silvia Carmen Morelos Escobar, Noelia Londoño Millán, Iris Arely Salazar Estrada 148

LA PROBABILIDAD CONDICIONAL COMO HERRAMIENTA PARA LA TOMA DE DECISIONES
Raimundo José Elicer Coopman, Eduardo Andrés Carrasco Henríquez 157

ANÁLISIS DE TEXTOS USANDO LA TEORÍA APOE: EL CASO DEL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN EN EL LIBRO DE GRIMALDI
Isabel García Martínez, Marcela Parraguez González 166

DIFICULTADES PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS ESTADÍSTICAS EN LA UNIVERSIDAD DE SONORA
Irma Nancy Larios Rodríguez, Enrique Hugues Galindo, Gerardo Gutiérrez Flores 173

ESTUDIO COMPARATIVO SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES: ANALISIS DE TAREAS EN LIBROS DE TEXTO DE CHILE, FRANCIA E ITALIA
Charlotte Derouet, Carolina Henríquez, Romina Menares, Monica Panero 182

A AS AVALIAÇÕES EXTERNAS E A ESCOLA: A ARTICULAÇÃO ENTRE RESULTADOS E AS PRÁTICAS NA SALA DE AULA DE MATEMÁTICA
Marger da Conceição Ventura Viana e Roberto Arlindo Pinto 191

CONTEXTO Y RENDIMIENTO EN ÁLGEBRA DE BACHILLERATO. UNA APROXIMACIÓN ESTADÍSTICA
Eddie Aparicio, Martha Jarero, Landy Sosa, Luis Reyna, Luis Rodríguez, Adriana Avilez 198

PRODUCCION DE SENTIDOS PARA LOS NUMEROS ENTEROS POR ALUMNOS DE PRIMARIA AL RESOLVER PROBLEMAS ELEMENTALES
José Luis Mejía Rodríguez y Aurora Gallardo Cabello 208

¿CUÁLES SON LAS CAUSAS DE LAS DIFICULTADES QUE PRESENTAN LOS ESTUDIANTES AL RESOLVER SITUACIONES PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN FRACCIONES?
Dayana Paola Escobar Álvarez, Lilian Carina Fuentes Monterroza, Moisés David Arcia Benavides y Tulio Rafael Amaya De Armas 217

TABLA DE CONTENIDOS

LA COMPRENSIÓN DE TEXTOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. UN ACERCAMIENTO COGNITIVO
Alma Alicia Benítez Pérez, Martha Leticia García Rodríguez y Alicia López Betancourt 225

UN ACERCAMIENTO AL RAZONAMIENTO INFERENCIAL DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS
Jesús Guadalupe Lugo Armenta, Enrique Hugues Galindo, Irma Nancy Larios Rodríguez 234

ARGUMENTACIONES EN EL AULA DE MATEMÁTICA. LA ESTRATEGIA DE INDUCCIÓN COMPLETA
Cecilia Crespo Crespo 243

LAS CONSTRUCCIONES GEOMETRICAS EN TORNO AL LUGAR GEOMETRICO DE LA PARÁBOLA INFLUENCIADO POR EL GEOGEBRA
José Carlos León Ríos 253

EDUCACIÓN ESTADÍSTICA EN LATINOAMÉRICA: SOBRE EL PENSAMIENTO INFERENCIAL
José Armando Albert Huerta, Blanca Ruiz Hernández, Ingrith Álvarez Alfonso, Enrique Hugues Galindo 262

Capítulo 2
PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS 270

HACIA LA INCORPORACIÓN DE ASPECTOS REGIONALES EN LA MATEMÁTICA EDUCATIVA
Adriana Atenea de la Cruz Ramos, Liliana Suárez Téllez, Hipólito Hernández Pérez 271

ANALISIS TAREAS EN EL LIBRO DE TEXTO DE MATEMÁTICA EN EL NIVEL PRIMARIO EN RELACIÓN AL TEMA DE PROBABILIDAD. ANÁLISIS DE UN CASO CHILENO
Nicolás Sánchez Acevedo 277

COMO MEJORAR EL USO DE OPERACIONES MENTALES A TRAVÉS DE UNA MEDIACION INTELIGENTE
Sandra Liliana Botello Suárez, Jesús David Villamizar Valencia, Rocío del Pilar León Martínez 287

ALGUNAS DIDÁCTICAS DE CAMPO EN LA ENSEÑANZA DE HERRAMIENTAS DE MODELAMIENTO MATEMÁTICO PARA INGENIERÍA
Luis Fernando Plaza Gálvez 296

FORTALECIMIENTO DEL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA, UNA EXPERIENCIA EN LA UNIVERSIDAD ESTATAL A DISTANCIA (UNED) COSTA RICA
Eric Ricardo Padilla Mora 306

MATEMÁTICA E PORTUGUÊS: A INTERDISCIPLINARIDADE ATRAVÉS DA POESIA
Renata Camacho Bezerra, José Ricardo Souza 315

ERRORES EN EL RAZONAMIENTO DEDUCTIVO SILOGÍSTICO
Rodolfo Eliseo D´Andrea, Graciela Rey y Patricia Sastre Vázquez 323

TABLA DE CONTENIDOS

ALTERNATIVA METODOLÓGICA PARA EL DESARROLLO DEL TRABAJO INDEPENDIENTE EN LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA, PARA LA MODALIDAD SEMIPRESENCIAL
María del Carmen Rodríguez Ponce, Gilda Vega Cruz, Paz Fernández Oliveras, María Luisa Oliveras 332

CÓMO LOS ALUMNOS PASAN DEL MODELO SITUACIONAL AL MODELO MATEMÁTICO EN UN PROBLEMA DE NIVEL MEDIO BÁSICO
Luis David Benítez Lara, Lidia Aurora Hernández Rebollar y Josip Slisko 342

LA CONTRIBUCIÓN DE LA MATEMÁTICA A LA FORMACIÓN SOCIO-HUMANISTA DE LOS FUTUROS ARQUITECTOS
Miriam Caridad Crespo Estrada, María de los Ángeles González Peñalver, Karen Sanabria Ortega 351

UN NUEVO PARADIGMA EN EDUCACION A DISTANCIA: EL APRENDIZAJE DE LAS FUNCIONES VECTORIALES EN UN AMBIENTE B-LEARNING
Martha Leticia García Rodríguez, Alma Alicia Benítez Pérez, Alicia López Betancourt 361

UNA PROPUESTA DE TEXTO PARA EL ESTUDIO DEL PRE CÁLCULO EN EL BACHILLERATO MEXICANO
Silvia Elena Ibarra Olmos; Agustín Grijalva Monteverde 368

UN ACERCAMIENTO AL ESPACIO TRIDIMENSIONAL A TRAVÉS DE LA MANIPULACIÓN DE OBJETOS FÍSICOS Y VISUALES
Karla Liliana Puga Nathal, Leopoldo Castillo Figueroa, Enrique Gómez Peralta, Eliseo Santoyo Teyes, Felipe Santoyo Telles 376

UNA EXPERIENCIA ACERCA DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DEL ÁLGEBRA VECTORIAL MEDIANTE TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS
Larissa Sbitneva, Nehemías Moreno Martínez 384

LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS Y EL TRACKER EN EL AJUSTE DE POLINOMIOS: UN ESTUDIO DE CASO
Sandra Minerva Valdivia Bautista, Rafael Pantoja Rangel 393

LAS REPRESENTACIONES SEMIOTICAS AYUDAN A DESARROLLAR EL PENSAMIENTO ALGEBRÁICO
Jairo Alberto Garcia Pereira, Eliecer Aldana Bermúdez 403

UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS TRANSFORMADA EM PRÁTICA DOCENTE
Cláudia Maria Pinotti de Almeida; Nielce Meneguelo Lobo da Costa; Rosana Jorge Monteiro Magni 411

COMPRENSIÓN DEL ENFOQUE FRECUENCIAL DE PROBABILIDAD AL INICIO DEL BACHILLERATO TECNOLÓGICO
Rogelio Martínez García, Ana María Ojeda Salazar 419

EL JUEGO COMO LÚDICA Y HERRAMIENTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE FRACTALES
Luz Amalia Acosta Morales, Sandra Peña Alonso, Blanca María Peralta Guachetá 428

UN AMBIENTE DE APRENDIZAJE COMO PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
Fermín Acosta Magallanes, Elvia Rosa Ruiz Ledezma 432

TABLA DE CONTENIDOS

PROPUESTA PARA EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN MEDIANTE ACTIVIDADES DE VISUALIZACIÓN
Juan Martín Casillas González, Ruth Jocabed Camacho Mosqueda, Marisol Radillo Enríquez 440

RAZONAMIENTO INDUCTIVO EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS
P. Sastre Vázquez, A. Cañibano, R.E D´Andrea 448

ÁLGEBRA BÁSICA: UM ESTUDO SOBRE A RELAÇÃO INSTITUCIONAL PARA SEU ENSINO NO BRASIL E NA ESPANHA
Marlene Alves Dias, Miriam do Rocio Guadagnini, Valdir Bezerra dos Santos Júnior 456

PERFIL DEL TUTOR UNA ESTRATEGIA EN MATEMÁTICAS PARA ABATIR REPROBACIÓN Y DESERCIÓN EN BACHILLERATO
Gadiel Recillas Miranda, María del Carmen Asseneth Velázquez López, María Leticia Rodríguez González 464

ESTUDIO DIAGNÓSTICO DE LA INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE LA PRIMERA, SEGUNDA Y TERCERA DERIVADA
Cynthia C. Castro, Lorenza Illanes 473

CONSTRUCCIÓN COGNITIVA DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL; UNA MIRADA DESDE LA TEORÍA APOE
Andrea Vergara Gómez, Marcela Parraguez González 481

ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS: DIFICULTAD O FORTALEZA EN EL APRENDIZAJE DE LOS ESTUDIANTES EN EL TRABAJO CON FRACCIONES ALGEBRAICAS
Miguel Fernández, Edwin Moreno, Karen Ortega, Wendy Tous y Tulio Amaya 490

INTEGRACIÓN DE LA ENSEÑANZA DE MATEMÁTICA Y PROGRAMACIÓN PARA RESIGNIFICAR CONCEPTOS Y REMODELAR SITUACIONES
Malva Alberto, Fernanda Golobisky, Marta Castellaro, Daniel Ambort 497

INTELIGENCIAS MÚLTIPLES EN EL APRENDIZAJE HÍBRIDO DE LOS PRODUCTOS NOTABLES: UN ESTUDIO DE CASO
Roberto Retes, Lorenza Illanes, Leopoldo Zúñiga 507

CONCEPTUALIZACIÓN: CURVAS B-SPLINE
Rogelio Ramos Carranza, Armando Aguilar Márquez, Frida María León Rodríguez, Omar García León, Juan Rafael Garibay Bermúdez 515

DIFICULTADES DE COMPRENSIÓN DEL DISEÑO INSTRUCCIONAL EN LOS LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Patricia Blásquez Morales, María Leticia Rodríguez González 524

CONOCIMIENTOS DE ESTOCÁSTICOS DE UN ESTUDIANTE DE NUEVO INGRESO AL BACHILLERATO TECNOLÓGICO
Jesús Salcedo Prado, Ana María Ojeda Salazar 531

PERSPECTIVA ONTOSEMIÓTICA DE LA VISUALIZACIÓN ESPACIAL Y EL RAZONAMIENTO DIAGRAMÁTICO
Juan D. Godino, Belén Giacomone, Miguel R. Wilhelmi, Teresa F. Blanco y Ángel Contreras 541

TABLA DE CONTENIDOS

DINAMIZACIÓN DE LA REGLA DE LOS CUATRO PASOS. UN CAMINO HACIA LA CONSTRUCCIÓN DE LA DERIVADA EN EL MARCO DE LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA
Adriana Engler 549

ACTIVIDADES CON MAPAS CONCEPTUALES EN LA CLASE DE MATEMATICAS
Mabel Susana Chrestia 558

LOS OBJETOS FRACTALES: UN RECURSO PARA EL ACERCAMIENTO INTUITIVO DEL ESTUDIO DEL LÍMITE
Noé Sanmartín Román 568

FORMACIÓN DE INGENIEROS DESDE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA
Ruth Rodríguez, Bertha Ivonne Sánchez, Alberto Camacho, Ismael Arcos, Hipólito Hernández 573

LA FUNCIÓN LINEAL EN EL BACHILLERATO TECNOLÓGICO: UN PUNTO DE VISTA DESDE EL CURRÍCULUM
Rebeca Flores García 582

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y LA ENSEÑANZA DE TENSIONES EN EL LABORATORIO DE FÍSICA EN EL BACHILLERATO TECNOLÓGICO
Pedro Javier Ubaldo Salinas, Liliana Flores Jiménez, Ana María Ojeda Salazar 591

EL MODELO SITUACIONAL, LA GENERALIZACIÓN Y EL RAZONAMIENTO CIENTÍFICO EN ESTUDIANTES DE NIVEL SUPERIOR
Lidia Aurora Hernández Rebollar, Josip Slisko Ignjatov, Ana Laura Pérez Castro, José Antonio Juárez López 600

ACERCAMIENTO INFORMAL A LA INFERENCIA ESTADÍSTICA
Gudelia Figueroa Preciado, Irma Nancy Larios Rodríguez, María Elena Parra Ramos 610

APOYANDO LOS PROCESOS DE APRENDIZAJE Y LA PERCEPCIÓN A TRAVES DE LA EXPLORACIÓN DE LOS SENTIDOS DE UNA POBLACIÓN EN CONDICION DE VULNERABILIDAD
Luz Elena Tinoco Robledo, Diana Pahola Suárez Mendoza 618

LA ESCALA, SUS ELEMENTOS Y LA FORMA EN QUE SE PERCIBEN
Asela Carlón Monroy, Sergio Cruz Contreras 626

MODELACIÓN MATEMÁTICA EN EL DESARROLLO DE FUNCIONES LINEALES Y VARIACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL
Guadalupe Xochitl Chávez Pérez, Ángel Homero Flores, Adriana Gómez Reyes 634

PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL AL ESTUDIAR FUNCIONES. TAREAS Y SITUACIONES PARA FAVORECER SU DESARROLLO
Silvia Vrancken, Maria Luciana Giampieri, Adriana Engler y Daniela Müller 643

EL PORTAFOLIO DE EVALUACIÓN EN UN AULA MATEMATICA UNIVERSITARIA
Marisa Digión, Leda Digión 653

TABLA DE CONTENIDOS

INTERPRETANDO LA CORRELACIÓN
Carmen Batanero, María M. Gea, Rafael Roa, Pedro Arteaga y Gustavo R. Cañadas 660

UN SISTEMA DE AUDIO ASOCIADO AL CONCEPTO DE COMBINACIÓN LINEAL
Carlos Oropeza Legorreta, Javier Lezama Andalón 668

Capítulo 3

ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR 679

MODELOS DE INVENTARIOS, UNA EXPERIENCIA CON ESTUDIANTES DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Rubén Darío Santiago Acosta 680

LA NO ESCOLARIZACIÓN DE LOS SABERES MATEMÁTICAS; UNA EXPERIENCIA CON NIÑOS DEL MEDIO RURAL
Jorge Hernández Márquez 688

DISEÑO DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA HOMOTECIA MEDIANTE LA METODOLOGÍA DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO
Yosenith González Flores, Ignacio Arias Gómez, Miguel Picado Alfaro y Gabriela Valverde Soto 696

SIGNIFICADO GLOBAL DE UN OBJETO MATEMÁTICO A PARTIR DE LA TRIADA DE CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS: GLOBAL, INTERMEDIA Y PUNTUAL
Enrique Mateus Nieves 705

LA CONSTRUCCIÓN DEL LENGUAJE SIMBÓLICO DESDE LAS PRÁCTICAS
Oscar Alejandro Cervantes Reyes 713

AS CONTRIBUIÇÕES DA ETNOMATEMÁTICA E DA PERSPECTIVA SOCIOCULTURAL DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA A FORMAÇÃO DA CIDADANIA DOS ALUNOS
Gelindo Martineli Alves, Milton Rosa, Marger da Conceição Ventura Viana 722

DECONSTRUCCIÓN DE LOS MODELOS ALOMÉTRICOS
José Trinidad Ulloa Ibarra, Jaime Lorenzo Arrieta Vera, Gessure Abisaí Espino Flores 731

MEDICIÓN DEL PH DEL SUELO CON SENSOR: UNA EXPERIENCIA ESCALONADA EN DOS NIVELES
Alicia López-Betancourt, Martha Leticia García Rodríguez, Alma Alicia Benítez Pérez 739

LA SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER: UN ACERCAMIENTO SOCIOEPISTEMOLÓGICO
Fabián Wilfrido Romero Fonseca, Rosa María Farfán Márquez 746

LAS CONEXIONES MATEMÁTICAS ENTRE LA DERIVADA E INTEGRAL: UNA REVISIÓN DE LA LITERATURA EDUCATIVA
Javier García-García; Crisólogo Dolores Flores 755

TABLA DE CONTENIDOS

ADQUISICIÓN DE LA NOCIÓN CUALITATIVA DE ÁREA MEDIADA POR LA LENGUA DE SEÑAS MEXICANA
Ignacio Garnica y Dovala, Héctor Gerardo Estrada García 764

UNA CARACTERIZACIÓN DE ACTITUDES HACIA LO PROPORCIONAL DESDE UNA PERSPECTIVA SOCIOEPISTEMOLÓGICA
María S. García González, Rosa María Farfán Márquez 774

EL DESARROLLO DE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA, SU EPISTEMOLOGÍA Y CARACTERÍSTICAS
Roberto Byas, Ramón Blanco Sánchez 784

LA RECTA TANGENTE VARIACIONAL: UNA EPISTEMOLOGIA DE PRÁCTICAS
Luis Arturo Serna Martínez, Gisela Montiel Espinosa y Apolo Castañeda Alonso 791

LA RELEVANCIA DE CONOCER EL LENGUAJE MATEMÁTICO
Patricia Sastre Vázquez y Rodolfo Eliseo D´Andrea 800

COMPLEJIDAD Y CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO
Eduardo Carrasco, J. Enrique Hernández, Vicente Carrión, Jaime Arrieta y Leonora Díaz-Moreno 808

UNA REFLEXIÓN SOBRE LA MODELACIÓN DESDE LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO
José David Zaldívar Rojas 817

AS AVALIAÇÕES OFICIAIS BRASILEIRAS E OS NÍVEIS DE CONHECIMENTO ESPERADO DOS ESTUDANTES
Sirlene Neves de Andrade, Marlene Alves Dias, José Valério Gomes da Silva 828

LA ESCUELA MULTIGRADO EN MÉXICO, RETOS Y PERSPECTIVAS DE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA
Antonio de Jesús Madriz Estrada, Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza, Gisela Montiel Espinosa, Luis Alberto López Acosta 836

RETOS EN LA INVESTIGACIÓN SOBRE DIDÁCTICA DE LA PROBABILIDAD
Carmen Batanero 844

TÍTERES: REPENSANDO EL AULA DE MATEMÁTICAS
Marcela Ferrari Escolá 852

Capítulo 4

EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL 860

RELAÇÕES ENTRE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA
José Fernandes da Silva, Ruy Pietropaolo, Vicenç Font Moll 861

TABLA DE CONTENIDOS

COMPETENCIAS PRESENTES EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS. UN ESTUDIO DESDE EL CURRÍCULUM OFICIAL
Claudia Yesenia Pérez Zamarripa, Judith Alejandra Hernández Sánchez 868

IDENTIDAD PROFESIONAL DE ESTUDIANTES DE LICENCIATURA DEL ÁREA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
Magdalena Rivera Abrajan, Gustavo Martínez Sierra 876

EVALUANDO LA COMPETENCIA DE ANÁLISIS EPISTÉMICO DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Juan D. Godino, Belén Giacomone, Miguel R. Wilhelmi, Teresa F. Blanco y Ángel Contreras 885

FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE DAS CONCEPÇÕES ACERCA DO ENSINO DA ÁLGEBRA
Maria Elisabette Brisola Brito Prado, Antonio Marcos Emiliano 894

INCLUSIÓN DE LOS ESTUDIANTES CON DISCAPACIDAD VISUAL A LAS LECCIONES DE MATEMÁTICA EN EDUCACIÓN SUPERIOR
Cynthia González Jiménez, Hellen Bolaños González, Michael Céspedes López 903

ESTUDO DE CASO SOBRE ANÁLISE EM DIDÁTICA REALIZADO EM UM TRABALHO FINAL DO MESTRADO PROFISSIONAL PROFMAT
Adriana Breda; Vicenç Font; Valderez Marina do Rosário Lima; Marcos Vilella Pereira; José Fernandes da Silva 911

ESTUDIO SOBRE EL USO DE SIGNOS PSICOLÓGICOS EN PROFESORES DE CIENCIAS NATURALES DURANTE LOS PROCESOS DE SIGNIFICACIÓN DE CONCEPTOS FÍSICOS
Jesús Salinas Herrera, Ulises Alfonso Salinas Hernández 920

ESTUDIO DE UN DISEÑO CURRICULAR PARA EL PROFESORADO DE EDUCACION SECUNDARIA EN MATEMATICA
Patricia M. Konic, Darío O. Reynoso 928

LOS PROFESORES DE MATEMÁTICA EN FORMACIÓN EN URUGUAY: UN ANÁLISIS DE LAS INTERACCIONES EN LA CLASE DE SU PRÁCTICA DOCENTE
Javier Lezama Andalón, Mónica Olave Baggi, Daniela Pagés 935

FORMACIÓN Y DESEMPEÑO DE LOS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA PARA PROVOCAR UNA ACTITUD POSITIVA EN SUS ESTUDIANTES HACIA LA MATEMÁTICA
Isidro Báez Suero, José Manuel Ruíz Socarras, María Legañoa Ferra 942

REPRESENTACIONES SOCIALES QUE ESTUDIANTES DE NIVEL MEDIO SUPERIOR POSEEN SOBRE EL BUEN PROFESOR, EL BUEN ALUMNO Y LA BUENA CLASE DE MATEMÁTICAS
María Patricia Colín Uribe, Celia Araceli Islas Salomón, Fernando Morales Téllez 949

UNA EXPERIENCIA DE FORMACIÓN DE PROFESORES EN MODELACIÓN MATEMÁTICA EN ENTORNOS MIXTOS DE APRENDIZAJE
Jhony Alexander Villa-Ochoa, Paula Rendón Mesa, Juan Fernando, Yadira Marcela Mesa 958

LA ACTITUD CRÍTICA Y LA INTERACCIÓN EN PROFESORES DE MATEMÁTICAS QUE INVESTIGAN SU PRÁCTICA. DESARROLLOS LOGRADOS A TRAVÉS DE UNA PROPUESTA DE FORMACIÓN
Ingrid Paola Cabezas Tenorio, Paola Alejandra Córdoba Villamil, José Torres Duarte 967

TABLA DE CONTENIDOS

ESTRATEGIAS QUE UTILIZAN LOS DOCENTES EN FORMACIÓN PARA RESOLVER PROBLEMAS DE CONTEO
Ana María Martínez Blancarte; Ana María Ojeda Salazar 973

LEITURA DE GRÁFICOS ESTATÍSTICOS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA
Eduardo Keidin Sera, Ruy César Pietropaolo 982

UNIVERSIDADE E ESCOLA EM COLABORAÇÃO PARA INVESTIGAR PRÁTICAS AVALIATIVAS SOBRE FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO
Nielce Meneguelo Lobo da Costa, Rosangela de Souza Jorge Ando, Rosana Jorge Monteiro Magni 990

ESTATÍSTICA NA FORMAÇÃO DO PEDAGOGO
Michel da Costa, Maria Elisabette Brisola Brito Prado 999

O PROFESSOR DE MATEMÁTICA E AS TECNOLOGIAS DIGITAIS MÓVEIS NO ENSINO DE FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU
Willian Rocha Padilha, Maria Elisabette Brisola Brito Prado 1007

CONCEPTUALIZACIÓN DE COMPETENCIA REFLEXIVA Y DIFICULTADES EN SU DESARROLLO
María José Seckel, Adriana Breda, Vicenç Font, Gemma Sala 1014

PROFESSORES DE MATEMÁTICA DISCUTINDO TEORIA E PRÁTICA SOBRE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
Rosana Jorge Monteiro Magni; Nielce Meneguelo Lobo da Costa; Rosangela de Souza Jorge Ando 1022

LAS NECESIDADES FORMATIVAS PEDAGÓGICAS DEL DOCENTE DE MATEMÁTICA DE LA FACULTAD INTRODUCTORIA DE LAS CIENCIAS INFORMÁTICAS
Ivonne Burguet Lago, José Benito Rodríguez Sosa, Anelys Vargas Ricardo 1030

NÚMEROS RACIONALES NEGATIVOS. INTERPRETACIONES FORMULADAS POR DOCENTES EN FORMACIÓN
Gil Arturo Saavedra Mercado, Aurora Gallardo Cabello 1039

VALORACIÓN DE LA EDUCACIÓN ESTADÍSTICA EN CARRERAS DE CIENCIAS SOCIALES: LA PERCEPCIÓN DEL PROFESOR
Enrique Hugues Galindo, Irma Nancy Larios Rodríguez, Gerardo Gutiérrez Flores 1046

FORTALECIMIENTO DE LOS CONOCIMIENTOS BÁSICOS EN ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD EN DOCENTES DE LA EDUCACIÓN BÁSICA REGULAR
Elizabeth Advíncula Clemente, Augusta Osorio Gonzales 1055

INVENCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS POR ALUMNOS DE LA LICENCIATURA DE PSICOLOGÍA EDUCATIVA DE LA UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Cuauhtémoc Gerardo Pérez López, Alba Yanalte Álvarez Mejía, Ana María Martínez Jiménez y Sonia Zúñiga Ibarra 1061

MODELACIÓN COMO PRÁCTICA GENERADORA DE SABERES. LECTURA Y CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICAS EN EDUCACIÓN SECUNDARIA
Santiago Ramiro Velázquez, Josip Slisko Ignjatov, René Santos Lozano 1071

TABLA DE CONTENIDOS

DOCENTES DEL ÁREA MATEMATICA FRENTE AL USO DE AULAS VIRTUALES EN LA FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE JUJUY (ARGENTINA)
Marisa Digión, Virginia Jure, Graciela Maldonado, Cecilia Rodriguez 1079

¿QUÉ PIENSA EL PROFESOR DE LA EVALUACION EN SU PRACTICA DOCENTE?
Ana Sofia Aparicio Pereda, Rosa Eulalia Cardoso Paredes 1088

ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS. UN ENFOQUE REGIONAL
Ángel Gabriel López Arens, Alma Rosa Pérez Trujillo, Leticia Pons Bonals, Rita Angulo Villanueva 1097

MUSEO DE HISTORIA Y FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS: EVOLUCIÓN Y ALCANCES PARA LA FORMACIÓN DOCENTE EN COSTA RICAMUSEO DE HISTORIA Y FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS: EVOLUCIÓN Y ALCANCES PARA LA FORMACIÓN DOCENTE EN COSTA RICA
Ma. Elena Gavarrete V., Jesennia Chavarría V., Margot Martínez R. 1107

EXPLORANDO LA FORMACIÓN INICIAL. REFLEXIÓN SOBRE EL DISEÑO Y APLICACIÓN DE UNA SITUACIÓN DE MODELACIÓN ESCOLAR
María Esther Magali Méndez Guevara 1114

DISCUTINDO ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS DA FORMAÇÃO DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMATICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL NO BRASIL
Renata Camacho Bezerra, Maria Raquel Miotto Morelatti 1122

LA FORMACIÓN INICIAL DE MAESTROS. EPISTEMOLOGÍA, CARACTERÍSTICAS Y PERSPECTIVAS
Roberto Byas, Ramón Blanco Sánchez 1130

LAS COMPETENCIAS DOCENTES COMO OBJETO DE ANÁLISIS: UNA EXPERIENCIA PARA REPENSAR LAS PRÁCTICAS EDUCATIVAS EN EL AULA DE MATEMÁTICA
Lilian Cadoche 1137

JOGO COM DADOS E A COMPREENSÃO DOS CONHECIMENTOS DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM FORMAÇÃO INICIAL SOBRE PROBABILIDADE
José Ivanildo Felisberto de Carvalho, Robson Macedo Candeias 1145

TRASPASO DE REDES DE APRENDIZAJE A PROFESORES QUE NO PARTICIPARON DE SU DISEÑO
Adriana Gómez Reyes, Claudia Flores Estrada 1154

UN ESTUDIO CUANTITATIVO DEL CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO DEL MAESTRO DE MATEMATICAS Y SU "SABER ACTUAR" EN EL AULA
María D. Cruz Quiñones, Mourat Tchoshanov, Osiel Ramírez, Sergio Flores 1163

LA GEOMETRÍA EN LA CONSTRUCCIÓN DE CAJAS DE REGALO Y LÁMPARA ARTESANALES
Magdalena Rivera Abrajan, Raúl Salas Vega 1170

NUDOS Y PATRONES: UNA FORMA DE EXPRESIÓN MATEMÁTICA DE GUATEMALA Y COSTA RICA
Ana Patricia Vásquez Hernández, Darwin Alexander Moreno Gatica 1177

TENDENCIAS EN LOS CRITERIOS DE SELECCIÓN DE CONTENIDOS EN MAESTROS DE MATEMÁTICA EDUCATIVA. UNA APROXIMACIÓN A LAS ECCD
Rita Angulo Villanueva, Alma Rosa Pérez Trujillo, Ángel Gabriel Arens, Agustín Grijalva Monteverde 1183

TABLA DE CONTENIDOS

CARACTERIZACIÓN DEL MTSK DE LOS DOCENTES EN FORMACIÓN: APROXIMACIÓN DESDE SUS CONCEPCIONES SOBRE EL KFLM Y EL KMLS
Francisco Javier Hernández Gutiérrez, Eugenio Lizarde Flores 1190

HACIA LA MODIFICACIÓN DE LAS PRÁCTICAS DOCENTES DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS DEL BACHILLERATO
Agustín Grijalva Monteverde, Silvia Elena Ibarra Olmos 1199

LAS FRACCIONES Y LAS EXPLICACIONES DE LOS PROFESORES DE PRIMARIA EN SITUACIÓN ESCOLAR
Evelia Reséndiz B., Sergio Correo G., Ramón J. Llanos P. 1207

CREENCIAS ACERCA DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN DOCENTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Evelia Reséndiz B., Perla E. Arredondo U., Sergio Correa G., Ramón J. Llanos P. 1215

EVALUACIÓN FORMATIVA DE PROBLEMAS CREADOS POR FUTUROS PROFESORES DE MATEMATICA
Lorena Salazar-Solórzano 1223

LAS PRUEBAS DE HIPÓTESIS EN LA VISIÓN DE DOCENTES DE ESTADÍSTICA
Christiane Ponteville, Cecilia Crespo Crespo 1232

ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA ENSEÑAR DE PROFESORES EN FORMACIÓN
Tulio R. Amaya De Armas, Juan Barboza Rodríguez 1239

DIFICULTADES DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICA AL INICIARSE EN LA INVESTIGACIÓN Y ESCRITURA CIENTÍFICA
Cecilia Crespo Crespo; Patricia Leston 1247

Capítulo 5

USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS 1256

EFECTOS QUE TIENE LA INCORPORACIÓN DE GRÁFICAS EN EL TRATAMIENTO DE ALGUNOS CONCEPTOS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR
María Patricia Colín Uribe, Celia Araceli Islas Salomón, Fernando Morales Téllez 1257

EL PROYECTO DE INTEGRACIÓN DE LAS TIC EN LOS CURSOS DE MATEMÁTICA DE LA UNIVERSODAD DE COSTA RICA. PERIODO 2014-2016
Edgardo Arita Dubón 1267

TABLA DE CONTENIDOS

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA DEFINICIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE LUGAR GEOMÉTRICO UTILIZANDO EL GEOGEBRA
Maritza Luna Valenzuela 1276

PENSAMIENTO TEÓRICO-PRÁCTICO PARA LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL
Maria Guadalupe Vera Soria, Marcela Parraguez González 1284

ALTERNATIVAS PARA EL CONTENIDO DE UN CURSO EN LINEA DE PRECÁLCULO
Juan Alberto Acosta Hernández, Anna Tarasenko, Arturo Curiel Anaya, Mariano Javier Pozas Cárdenas, Germán Reséndiz López 1295

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA INGENIERÍA POR PROYECTOS USANDO HOJA ELECTRÓNICA
Jorge Ávila Soria 1302

UNA PROPUESTA PARA ARTICULAR LAS FORMAS DE REPRESENTACIÓN DEL FENÓMENO A TRAVÉS DE LA MODELACIÓN DEL MOVIMIENTO
Fredy de la Cruz Urbina, Hipólito Hernández Pérez 1310

LAS ACTIVIDADES EN LÍNEA, UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
Elvia Rosa Ruiz Ledezma, Alejandro Miguel Rosas Mendoza 1317

EXMA: UN PROYECTO DE EVALUACIÓN DE APRENDIZAJES MATEMÁTICOS A DISTANCIA
Lorena Salazar-Solórzano 1326

TRANSFORMACIONES EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA NUMÉRICA EN LA CARRERA DE INGENIERÍA INFORMÁTICA
Esther Ansola Hazday, Eugenio Carlos Rodríguez, Teresa Carrasco Jiménez 1334

LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y LA COMUNICACIÓN (NTIC) Y LA EVALUACIÓN EN MATEMÁTICAS
Jorge Ávila Soria 1343

EXPERIENCIAS PEDAGÓGICAS SIGNIFICATIVAS EN MATEMÁTICA MEDIADAS POR RECURSOS TECNOLÓGICOS
Malva Alberto, Adriana Frausin 1354

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS CON EL MÉTODO DE POLYA MEDIANTE EL USO DE GEOGEBRA
Bellanith Aguilar Vásquez, Lorenza Illanes, Leopoldo Zúñiga 1363

USOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS DE LA PLATAFORMA ADAPTATIVA DE MATEMÁTICA: EL CASO DE LAS GRÁFICAS
Yacir Testa y Liliana Suárez Téllez 1372

USOS DEL PROGRAMA R EN LA ENSEÑANZA DE LA ESTADISTICA
Albeiro Enrique López Cervantes 1380

GEOGEBRA: DE ARTEFACTO A INSTRUMENTO PROCESO DE TRANSFORMACIÓN
Francisco Javier Córdoba Gómez, Pablo Felipe Ardila Rojo 1389

TABLA DE CONTENIDOS

EL CINE EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS
Marger da Conceição Ventura Viana, Roseana Moreira de Figueiredo Coelho 1396

EXPLORAÇÃO DE LUGARES GEOMÉTRICOS PLANOS COM O SOFTWARE GEOGEBRA
Elisabete Teresinha Guerato, Vera Helena Giusti de Souza 1404

ACTIVIDADES DIDÁCTICAS PARA PROFESORES DE MATEMÁTICAS, USANDO TECNOLOGÍA
José Luis Soto Munguía, Ana Guadalupe del Castillo Bojórquez 1413

USO DE TÉCNICAS DE MINERÍA DE DATOS EN LA ENSEÑANZA DEL ALGEBRA LINEAL
Lenniet Coello Blanco, Olga Lidia Perez Gonzalez, Ángela Mercedes Martín Sánchez 1420

PRESENTACIÓN

La invención de la escritura transformó la vida del ser humano al permitirle compartir con sus contemporáneos pero, sobretodo, con futuras generaciones, el bagaje de información, aprendizajes y experiencias adquiridas en un momento dado. Desde entonces, con símbolos cada vez más precisos, aunque diversos, existe la posibilidad de investigar lo que otros han pensado y experimentado sin necesidad de repetir todas las vivencia aprovechando aportes que acortan tiempo y dan la oportunidad para reflexionar y decidir contrastando con las ideas de otros que existen en el legado escrito que dejaron.

El publicar es tan importante como el investigar. Hoy en día hay tantos medios de comunicación que la información puede llegar a donde no nos proponemos ni imaginamos. Las comunidades educativas se fortalecen cuando comparten sus trabajos y propuestas.

La publicación periódica ALME (Actas Latinoamericanas de Matemática Educativa) contiene trabajos que se presentan en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME), la cual se lleva a cabo anualmente en diferentes países de Latinoamérica.

En cada RELME, investigadores, educadores, estudiantes y personas que se interesan por la Matemática Educativa se reúnen a compartir hallazgos, éxitos, dificultades y experiencias relacionadas con el aprendizaje, la enseñanza y la disciplina en si. Por medio de diferentes actividades como conferencias, exposiciones de resultados de investigación, cursos, talleres, grupos de trabajo, entre otras, interactúan para exponer ideas y dar y recibir retroalimentación con colegas de diferentes países. Muchas personas asisten a RELME y se benefician de dicha participación escuchando directamente a los colegas. Sin embargo, los investigadores y ponentes saben que escribir y publicar sus resultados permiten la permanencia dando acceso a más personas para cuestionar, aceptar, difundir o intentar aplicar sus ideas. Dado que una de las intenciones más importantes del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME), gestor de las RELME, es construir comunidades de investigación que se apoyen y se extiendan por toda Latinoamérica, la publicación de ALME es de suma importancia para el propio CLAME y para los participantes en las RELME.

El proceso para publicar en ALME es largo, demandante y complejo tanto para quienes publican como para todos los involucrados en el proceso de edición: desde que se convoca a la RELME y las personas envían sus propuestas que varios evaluadores reciben y aceptan o rechazan, hasta que (luego de presentar en RELME) los ponentes vuelven a enviar extensos para una nueva evaluación, cientos de personas escriben, leen, presentan, evalúan, acompañan y editan y diseñan hasta que este producto llega a las manos de todos los que asisten a una RELME y todos los que acceden a ella por medio del sitio de CLAME en http://www.clame.org.mx/.

La comunidad CLAME, a la que pertenecen los miembros del Comité pero también los asistentes a RELME y todos los que se identifican con sus metas y medios, se forma de la interrelación entre quienes buscan fomentar la investigación de calidad y el perfeccionamiento y profesionalización de los docentes. La comunidad CLAME es un referente regional en Matemática educativa, en el que un grupo de estudiosos, unidos por valores académicos y profesionales, trabajan con responsabilidad, dedicación y calidad. El compartir sus esfuerzos y trabajos, con fines comunes, los ha constituido en un singular grupo que, además, comparte la alegría del trabajo, una sensibilidad particular por la mejora en la enseñanza de la Matemática, y un sentimiento de amistad estrecha. Por ello, presentar y publicar trabajos en la comunidad CLAME es un experiencia personal y profesional muy enriquecedora.

En ALME 29 se incluyen trabajos que han sido revisados con disciplina y rigurosidad y que provienen de la RELME 29 que se llevó a cabo en la Ciudad de Panamá, en julio de 2015. Dichos trabajos se han organizado en las siguientes categorías

Capítulo 1: Análisis del discurso matemático escolar

Capítulo 2: Propuestas para la enseñanza de las matemáticas

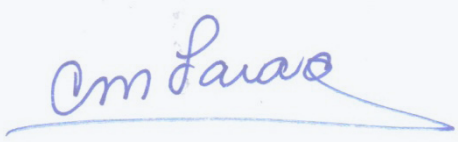
Capítulo 3: Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar

Capítulo 4: El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional

Capítulo 5: Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas

Esperamos que esta Vigesimonovena acta se utilice como carta de presentación de los aportes que, como profesionales de la Matemática educativa, hacemos a la sociedad.

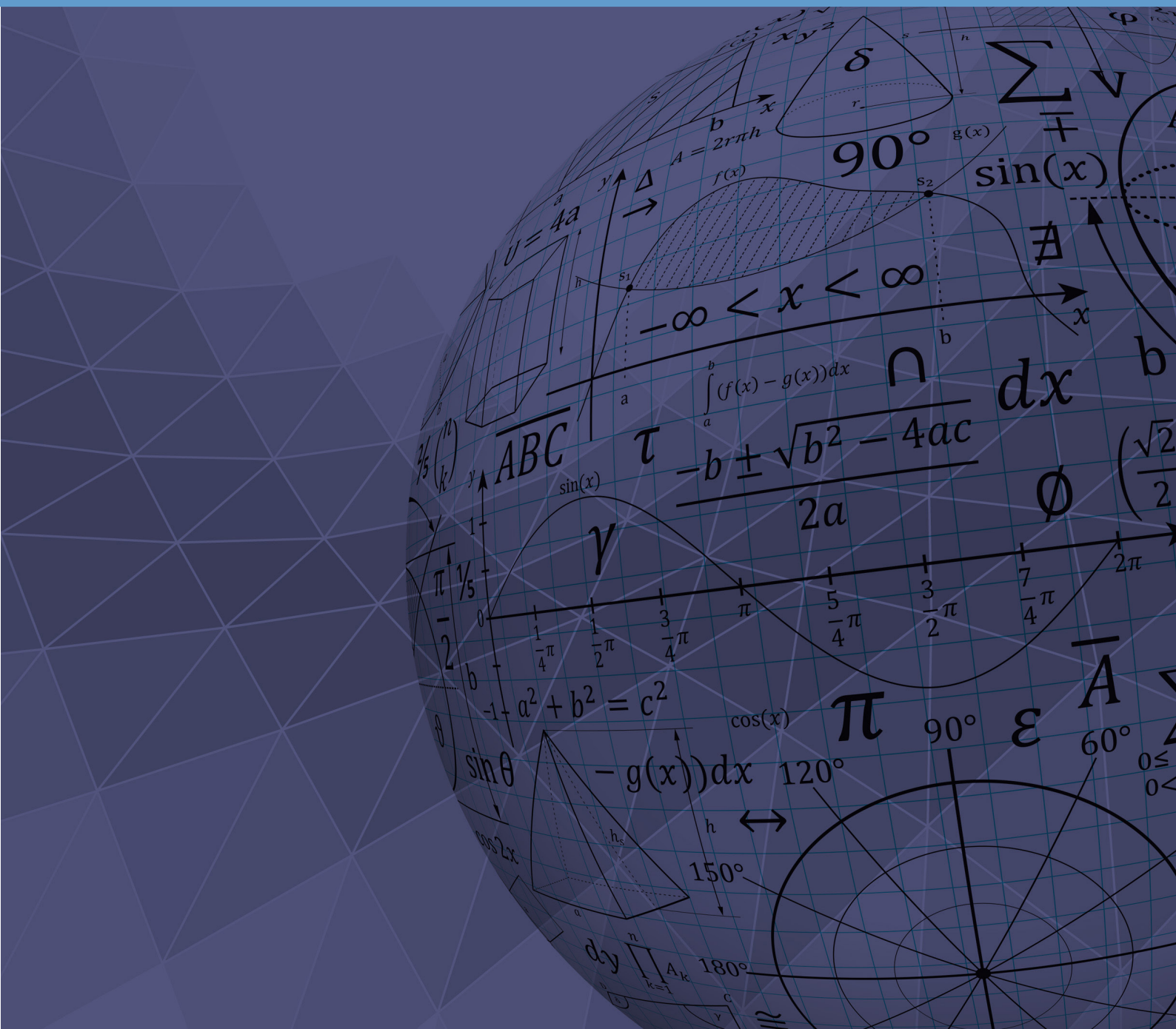
Aprovecho para agradecerle a los árbitros y, especialmente, a los editores de trabajos de ALME por su esfuerzo concienzudo y eficaz y, sobre todo, comprometido y muy responsable. Ellos son testimonio de la entrega desinteresada y valiosa que caracteriza a nuestra comunidad educativa, y se constituyen en ejemplos dignos de imitar por la importante labor que realizan.



Claudia María Lara Galo M.A.
Presidenta del Consejo Directivo
CLAME (2012-2016)

CAPÍTULO 1

ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR



RELACIÓN ENTRE EL DESARROLLO DE LAS COMPETENCIAS DE ANÁLISIS DIDÁCTICO, DIGITAL Y DE LA CIUDADANÍA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES EN EL PERÚ

Violeta Rubio Goycochea, Silvia Carvajal Romero
Universidad Pontificia Católica del Perú (Perú), Universidad de Barcelona (España)
nrubio@pucp.edu.pe, scarvajal@ub.edu

Palabras clave: Educación matemática, formación, competencias profesionales, análisis didáctico.

Key words: Mathematic education, training, professional skills, didactic analysis.

RESUMEN: El objetivo de este trabajo es relacionar la competencia en análisis didáctico y la competencia digital con el desarrollo de la competencia ciudadana.

Para conseguir este objetivo se diseñó e implementó una secuencia didáctica en la Maestría de Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP.

Los participantes de la Maestría resolvieron las tareas planteadas para luego ser analizadas sus prácticas y el conocimiento matemático-didáctico activado en las mismas, con el fin de encontrar indicadores que justifiquen la asignación de grados de desarrollo de la competencia ciudadana. Las tareas se resolvieron usando las TIC, fomentando la competencia digital, no discutida en este trabajo, a través del programa interactivo GeoGebra.

ABSTRACT: The purpose of this paper is to relate the didactic analysis skills and the digital skills with the development of citizenship skills.

To this end, a didactic sequence was designed and implemented at the Masters of Education in Mathematics from the PUCP.

Participants of the Master solved the tasks posed before being analyzed their practices and mathematical-didactic knowledge activated in the same. Key objective is to identify indicators that justify the allocation of level of development of the citizenship skills. Tasks resolved using ICT, encourage digital skills, not discussed in this paper, through the interactive program GeoGebra.

INTRODUCCIÓN

A partir de los años 80 en la enseñanza de las matemáticas comienza a tener una fuerte influencia la importancia de la justicia social y la formación de ciudadanos democráticos en el contexto escolar. No podemos olvidar que la sociedad democrática está basada en la participación responsable e informada de sus individuos, y que la mayoría de las decisiones se toman en base a datos cuantitativos. Por eso los contextos donde desarrollar la actividad matemática tendrían que ser escogidos teniendo en cuenta esta contribución a la educación global para formar ciudadanos más capaces de tomar decisiones fundamentadas en el ámbito personal y social fomentando la **ciudadanía**.

Otro factor que está provocando cambios significativos que influyen de manera substancial a la hora de explicar diversos contenidos educativos, incluido el matemático, es el uso de las TIC. Estos cambios introducen nuevas necesidades formativas así como nuevas posibilidades metodológicas que hacen que el profesor adquiera y desarrolle la competencia digital, la cual se enfoca en el uso de la tecnología digital en los ámbitos profesional y social como herramienta para un desempeño profesional adecuado y un desarrollo permanente.

Otra problemática que ha interesado en el área de la educación matemática es la de determinar cuál es el conocimiento didáctico-matemático del profesorado requerido para enseñar matemáticas. Muchos profesores coinciden en que una de las competencias profesionales que debe tener un profesor es la macro competencia en análisis didáctico.

SUJETOS

La mayoría de los estudiantes de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontifica Universidad Católica del Perú (PUCP) son profesores de educación secundaria o de los primeros años de educación superior.

Las diferentes asignaturas del plan de estudios de la Maestría se organizan en cursos de tres tipos: cursos de conocimientos matemáticos, cursos de didáctica de las matemáticas y cursos de investigación en educación matemática.

En este trabajo, nos centraremos en dos asignaturas: Teorías de Aprendizaje de las Matemáticas (dentro de los cursos de didáctica de las matemáticas) y Geometría Euclidiana en el Plano y en el Espacio (dentro de los cursos de conocimientos matemáticos).

De los 16 estudiantes que ingresaron al primer ciclo del semestre académico 2014-2015 solo 5 se matricularon conjuntamente en las asignaturas de Teorías de Aprendizaje de las Matemáticas y Geometría Euclidiana en el Plano y en el Espacio. Estos 5 alumnos forman la muestra de estudio.

MARCOS DE REFERENCIA

Para analizar las tareas de la secuencia didáctica implementada nos hemos centrado en el marco del Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción Matemática (EOS). En este enfoque se proponen cinco niveles para el análisis didáctico de procesos de instrucción (Font, Planas y Godino, 2010):

a) Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas.

b) Análisis de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.

c) Análisis de evoluciones cognitivas, trayectorias e interacciones didácticas.

d) Identificación del sistema de normas y metanormas.

e) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción para identificar y potenciar buenas prácticas.

Para analizar este ciclo formativo nos centraremos en el apartado b) Análisis de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.

Los niveles de análisis 1-4 son herramientas para una didáctica descriptiva explicativa (para comprender) que permite responder a la pregunta: ¿Qué está pasando (y por qué) aquí? El nivel de análisis 5 pretende ser una herramienta para una didáctica prescriptiva (para evaluar y para indicar el camino a seguir) que permite responder a la pregunta: ¿Qué se debería hacer?

Para caracterizar la competencia ciudadana nos centraremos en la caracterización de las competencias del profesor de matemáticas de secundaria y bachillerato (Font, Giménez, Zorrilla y Larios, 2012).

Tabla 1. Caracterización de la competencia ciudadana

Nivel 1: Identifica dilemas éticos en la vida cotidiana personal y social, describiendo sus causas y consecuencias así como los valores éticos en juego.	**Nivel 2:** Manifiesta juicios críticos sobre prácticas explícitas e implícitas de formación en ciudadanía.	**Nivel 3:** Actúa en concordancia con valores que promueven la dignidad de la persona humana, tales como justicia e igualdad, poniendo en práctica valores socialmente compartidos y demostrando un espíritu de servicio social en su desempeño profesional.
Nivel 1: Identifica los valores morales y los principios éticos en su acción personal y profesional.	**Nivel 2:** Conoce las características del profesor de educación media y la legislación docente.	**Nivel 3:** Conoce los espacios de participación profesional y reflexiona colaborativamente en ellos.

OBJETIVOS

El objetivo principal de esta investigación es reflexionar sobre el nivel de desarrollo de la competencia ciudadanía en los alumnos de la Maestría de Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP a partir del análisis de una secuencia didáctica implementada en la Maestría en la que se utilizaba el programa interactivo GeoGebra.

INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE DATOS

Para trabajar este objetivo hemos utilizado los siguientes instrumentos de recogida de datos:

I1) Elaboración y aplicación, en la asignatura Teorías de Aprendizaje, de un cuestionario inicial sobre conocimientos previos de competencia ciudadana.

Las preguntas planteadas fueron las siguientes:

1) ¿Qué aspectos se deben considerar al desarrollar prácticas matemáticas de manera que se promueva el aprendizaje de las matemáticas?
2) ¿Cuán importante son los contextos para promover el aprendizaje de las matemáticas?
3) ¿Cuán importante es la gestión del proceso de enseñanza para promover el aprendizaje de las matemáticas?
4) ¿Cuán importante son los objetos y procesos matemáticos para promover el aprendizaje de las matemáticas?
5) ¿Qué aspectos se deben considerar al desarrollar prácticas matemáticas de manera que se promueva la ciudadanía?
6) ¿Cuán importante son los contextos para promover la ciudadanía?
7) ¿Cuán importante es la gestión del proceso de enseñanza y aprendizaje para promover la ciudadanía?
8) ¿Cuán importantes son los objetos y procesos matemáticos para promover la ciudadanía?

I2) Lectura y análisis, en la asignatura Teorías de Aprendizaje, del marco curricular del Perú y del artículo *La educación matemática en la con-formación del ciudadano* (Rodríguez, 2013).

I3) Elaboración y resolución, en la asignatura Geometría Euclidiana en el plano y en el espacio, de una tarea matemática mediante cuatro métodos de resolución diferentes (dos de los métodos hacían uso de las TIC a través del programa GeoGebra) y argumentación a diferentes preguntas relacionadas con la con-formación del ciudadano.

El enunciado planteado era el siguiente: Un granjero desea cercar un terreno rectangular junto al río. El granjero dispone de una cerca de 15 cm lineales. ¿Qué dimensiones debe tener el terreno cercado para que su área sea la mayor posible teniendo en cuenta que no se debe cercar el lado que da al río?

Los alumnos implementaros los siguientes cuatro métodos de resolución:

a) Resolución a partir de la construcción animada del terreno rectangular mediante el programa interactivo GeoGebra.

b) Resolución a partir de la construcción de la gráfica de la función con área máxima mediante el programa interactivo GeoGebra y los resultados del apartado a).

c) Resolución mediante el uso apropiado de la media aritmética y la media geométrica de los datos involucrados en el problema.

d) Resolución mediante cualquier método distinto a los usados en los tres apartados anteriores.

A partir de la siguiente tabla, analizaron los objetos y procesos matemáticos presentes en los distintos métodos de resolución de la tarea mencionada:

Tabla 2. Procesos y objetos matemáticos

Objetos matemáticos / Procesos	Lenguaje	Situación Problema	Conceptos	Proposiciones	Procedimientos	Argumentos
Algoritmización						
Argumentación						
Particularización						
Generalización						
Idealización						
Materialización						
Representación						
Significación						
Reificación						
Descomposición						
Personalización						
Institucionalización						
Comunicación						
Definición						
Enunciación						
Problematización						

Fuente: Rubio (2012, p.113).

Por último, los alumnos justificaron si el problema planteado y la actividad en sí ayudaba a desarrollar la formación integral del individuo y en caso de que el problema o la actividad no contribuyera a su formación integral tenían que realizar las modificaciones pertinentes al problema inicial.

METODOLOGÍA

1) A partir de las respuestas de los alumnos al cuestionario inicial pudimos, además de conocer las ideas previas de los profesores sobre la relación entre prácticas matemáticas escolares y el desarrollo de la competencia ciudadana, inferir un nivel inicial en el grado del desarrollo de la competencia ciudadana.

Por ejemplo, al alumno A1 podemos caracterizar su competencia ciudadana en un nivel 1 con evidencias como su respuesta a la quinta pregunta del cuestionario.

PREGUNTA 5: *¿Qué aspectos se deben considerar al desarrollar prácticas matemáticas de manera que se promueva la ciudadanía?*

RESPUESTA A1: «Al realizar los trabajos de grupo cooperativo (al desarrollar cualquier tema), inculcar a los alumnos el saber escuchar y respetar a los demás. Cuando se realiza la discusión de un tema, siempre indicar a los alumnos que todos tenemos deberes y derechos, y si alguien levanta la mano respetar el orden, de esta manera estaremos practicando la democracia, buscar soluciones en forma pacífica y enseñarles a ponerse de acuerdo».

O, el alumno A2 parte con un nivel 2 de competencia ciudadana con evidencias como su respuesta a la sexta pregunta del cuestionario.

PREGUNTA 6: ¿Cuán importante son los contextos para promover la ciudadanía?

RESPUESTA A2: «Los conocimientos matemáticos debemos aplicarlos al contexto real de los educandos; por ejemplo: cuando va a hacer compras al mercado, cuando calcula el tiempo de viaje, cuando lee un cuadro estadístico en el periódico, o simplemente cuando realiza labores lúdicas. Ante semejante realidad los profesores de matemática no podemos permanecer pasivos, debemos replantear nuestra labor educativa teniendo en cuenta, fundamentalmente, los objetivos de la enseñanza de la matemática. Nuestra responsabilidad de formar individuos capaces de pensar y aplicar sus conocimientos en la escuela, en el trabajo y en la vida diaria nos debe impulsar a trabajar con visión de futuro y así promover un ambiente adecuado en la ciudadanía».

Completamos el resto de la tabla a partir de las respuestas de cada uno de los alumnos infiriendo el siguiente nivel de competencia ciudadana:

Tabla 3. Nivel de desarrollo de la competencia ciudadana una vez realizado el cuestionario

	Nivel de desarrollo de la competencia ciudadana después de la realización del cuestionario
Alumno 1	Nivel 1: Identifica los valores morales y los principios éticos en su acción personal y profesional.
Alumno 2	Nivel 2: Manifiesta juicios críticos sobre prácticas explícitas e implícitas de formación en ciudadanía.
Alumno 3	Nivel 1: Identifica dilemas éticos en la vida cotidiana personal y social, describiendo sus causas y consecuencias así como los valores éticos en juego.
Alumno 4	Nivel 0: No responde de forma concreta a las preguntas planteadas.
Alumno 5	Nivel 2: Manifiesta juicios críticos sobre prácticas explícitas e implícitas de formación en ciudadanía.

2) Una vez realizadas diversas lecturas sobre la con-formación del ciudadano en el uso de la matemática y resuelto el problema matemático expuesto en clase pudimos inferir, por segunda vez, el nivel de competencia ciudadana de los 5 alumnos que forman la muestra.

Por ejemplo, al alumno A1 podemos inferirle un nivel 3 de competencia ciudadana con evidencias como:

PREGUNTA: *La actividad en sí, puede ayudar a estar formación integral, para desarrollar un buen ciudadano. Justifique su respuesta. En caso contrario qué modificaciones haría a esta actividad.*

RESPUESTA: «El problema presentado sí contribuye a la formación integral de la persona como ciudadano. Este problema materializa una situación de un contexto tomado de la realidad y el alumno tiene que encontrar maneras diferentes de darle solución. Al preguntar cuáles deben ser las dimensiones para obtener el área máxima, hará que el alumno desarrolle su pensamiento lógico, se haga preguntas y se acerque más a las matemáticas. Ahora si el problema se le presenta a un granjero sin estudios matemáticos avanzados, no va a poder aplicar en la resolución: las derivadas o los métodos algebraicos. Incluiría un apartado más, e), con el siguiente enunciado: ¿Qué solución le daría un granjero que no maneja conocimientos matemáticos avanzados, mas sólo lo que aprendió; tal vez en la primaria o secundaria?».

O, al alumno A3 podemos inferirle un nivel 3 de competencia ciudadana con evidencias como su respuesta a la siguiente pregunta:

PREGUNTA: El problema planteado, puede ayudar a estar formación integral, para desarrollar un buen ciudadano. Justifique su respuesta. En caso contrario qué modificaciones haría a esta actividad.

RESPUESTA: «Considero que el problema planteado sí fomenta la formación integral del estudiante, porque una situación-problema modelada puede ser provechada de muchas formas. Callejo (citado en Rodríguez, 2013) manifiesta que el dominio de la matemática para el ejercicio de la ciudadanía requiere no sólo de conocer el lenguaje matemático y hechos, conceptos y algoritmos, sino también procesos más complejos como la matematización de situaciones y la resolución de problemas. Por ello, a partir del problema planteado se puede:

- Generar espacios de discusión sobre posibles formas de solucionar, en las cuales un estudiante debe saber escuchar al otro, respetando la opinión de sus compañeros.
- Conversar sobre las situaciones de traficantes de terrenos y extorsionadores que faltan al valor de la honradez, fomentando muchas situaciones de violencia en la sociedad.
- Despertar el interés para resolver el problema, fomentando la participación de los alumnos con sus aportes sobre posibles formas de solución, sin necesidad de conocer conceptos más complejos, y de esta forma se atiende a los diversos ritmos y estilos de aprendizaje.

En consecuencia se despierta en los alumnos el deseo y la alegría por aprender ya que se sienten capaces de resolver el problema al tener confianza en su habilidad para abordar este tipo de problemas».

A partir de las respuestas de los alumnos al problema del granjero pudimos inferir, por segunda vez, el nivel de competencia ciudadana de los 5 alumnos que forman la muestra:

Tabla 4. Nivel de desarrollo de la competencia ciudadana una vez discutida la lectura en gran grupo y resuelto el problema contextualizado del granjero

	Nivel de desarrollo de la competencia ciudadana después de la implementación de la secuencia didáctica
Alumno 1	Nivel 3: Actúa en concordancia con valores que promueven la dignidad de la persona humana, tales como justicia e igualdad, poniendo en práctica valores socialmente compartidos y demostrando un espíritu de servicio social en su desempeño profesional.
Alumno 2	Nivel 2: Manifiesta juicios críticos sobre prácticas explícitas e implícitas de formación en ciudadanía.
Alumno 3	Nivel 3: Actúa en concordancia con valores que promueven la dignidad de la persona humana, tales como justicia e igualdad, poniendo en práctica valores socialmente compartidos y demostrando un espíritu de servicio social en su desempeño profesional.
Alumno 4	Nivel 1: Identifica los valores morales y los principios éticos en su acción personal y profesional.
Alumno 5	Nivel 2: Manifiesta juicios críticos sobre prácticas explícitas e implícitas de formación en ciudadanía.

CONCLUSIONES

El nivel de desarrollo de la competencia ciudadana se analiza en dos momentos del ciclo formativo:

1) después de que los alumnos realizaran el cuestionario inicial del ciclo formativo.
2) después de que los alumnos realizaran la lectura del artículo *La educación matemática en la con-formación del ciudadano* (Rodríguez, 2013) y resolvieran el problema matemático expuesto.

Se observó cómo la mayoría de los estudiantes mejoraron el nivel de desarrollo de la competencia ciudadana, una vez se incide en la importancia de la reflexión sobre su propia práctica.

En la tabla siguiente se muestra el grado de desarrollo de la competencia ciudadana de los alumnos de la Maestría en los dos momentos expuestos anteriormente:

Tabla 5. Nivel de desarrollo de la competencia ciudadana en dos momentos del ciclo formativo implementado

	Nivel de desarrollo de la Competencia ciudadana Después de la realización del cuestionario	Nivel de desarrollo de la Competencia ciudadana Después de la implementación de la secuencia didáctica
Alumno 1	Nivel 1	Nivel 3
Alumno 2	Nivel 2	Nivel 2
Alumno 3	Nivel 1	Nivel 3
Alumno 4	No responde de forma concreta a las preguntas planteadas.	Nivel 1
Alumno 5	Nivel 2	Nivel 2

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Font, V., Giménez, J., Zorrilla, J. F., y Larios, V. (2012). Competencias del profesor de matemáticas de secundaria y bachillerato. *Barcelona, Publicaciones de la Universidad de Barcelona*.

Font, V., Planas, N. y Godino, J.D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje 33(1)*, 89-105.

Rodríguez, M.E. (2013). La educación matemática en la con-formación del ciudadano. *Revista de Estudios Interdisciplinarios en Ciencias Sociales 15 (2)*, 215-230.

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos*. Tesis Doctoral no publicada. Barcelona, España.

MOTIVACIÓN DE LOS ESTUDIANTES EN LA ELECCIÓN DE LA CARRERA DE MATEMÁTICAS

Lorena Jiménez Sandoval
Universidad Autónoma de Zacatecas (México)
lorejim79@gmail.com

Palabras clave: dominio afectivo, motivación intrínseca, motivación extrínseca, motivación de aprendizaje.

Key words: affective domain, intrinsic motivation, extrinsic motivation, learning motivation.

RESUMEN. El presente estudio es el reporte de la primera parte de una investigación que busca entender ¿qué motiva a los estudiantes egresados de bachillerato a elegir la carrera de matemáticas como la opción para sus estudios de nivel superior? y ¿cómo evoluciona su motivación a lo largo de un semestre? Centrando la atención en la motivación para aprender que manifiestan los estudiantes en las respuestas que dieron a un cuestionario escrito sobre creencias y motivación, y a la entrevista que se realizó con la finalidad de profundizar en dichas respuestas, se da cuenta de las componentes de motivación para aprender que se encontraron en 26 de 46 estudiantes y cómo la presencia de la motivación para aprender en los estudiantes que ingresan a la carrera de matemáticas, se visualiza como un descriptor de un mejor desempeño durante el semestre y su permanencia en la licenciatura.

ABSTRACT. This study is the first report of an investigation that seeks to understand what motivates baccalaureate students choosing mathematics as an option for their higher studies? and, how motivation evolves along a semester? Focusing on motivation to learn that students demonstrate in your answer to a written questionnaire on beliefs and motivation, and the interview was conducted in order to deepen these responses, he realizes the components of motivation for learn they met in 26 of 46 students and how the presence of motivation for learning in students entering to the profession of mathematics, is seen as a descriptor of a better performance during the semester and retention in the bachelor's degree.

INTRODUCCIÓN

Según McLeod (1994) en 1994 las publicaciones en la "*Journal for Research in Mathematics Education*" de investigaciones sobre cuestiones afectivas, apenas rebasaban las 100. Pepin y Roesken (2015) sostiene, que en el marco de las investigaciones sobre el dominio afectivo en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, las correspondientes específicamente al ámbito de las creencias, tuvieron un auge importante a partir de 1999. En Latinoamérica, en los últimos 4 volúmenes de *ALME*, se identifican al menos 15 publicaciones sobre el tema: Casis y Bravo, 2015, Cordoba, 20015, García y Farfán, 2015 y 2014, González de Hernández, 2013, Martínez, 2015, Montero, Pedrosa, y Astiz, 2015, Müller, Engler, y Vrancken, 2012, Paulino y Marmolejos, 2013, Parra, 2013 (citado por Martínez, 2014) y Veiga, 2012, por citar algunos. Sin embargo Uitto, Jokikokko y Estola (2015) refieren, que las propias investigaciones que se encuentran en el ámbito educativo continúan manifestando, por ejemplo, una preocupación sobre la poca atención que se pone en la educación, a los aspectos de las emociones de los profesores.

Lo anterior da una idea de que, si bien investigaciones sobre dominio afectivo en Matemática Educativa en varios países ha venido creciendo en los últimos 30 años, todavía hay mucho por hacer. Específicamente los estudios de factores motivacionales presentes en los estudiantes de los diversos niveles educativos se han dado mayoritariamente desde la psicología y han sido en su mayoría de carácter cuantitativo (Hidalgo, Maroto y Palacios, 2004, Valle, Cabanach, Rodríguez, Núñez y González-Pineda, 2006, Cardoso, 2008, Farías y Pérez 2010). Sin embargo son los resultados de estos estudios, los que en principio han servido como base para sostener la existencia de una correlación estadística, en tanto relación o dependencia existente, entre los factores cognitivos y afectivos en la educación matemática.

De acuerdo con Acevedo (2007), la evaluación PISA pregunta a los estudiantes por "sus motivaciones hacia el aprendizaje, sus sentimientos sobre sí mismos, sus estrategias de aprendizaje, las características de sus centros de enseñanza y sus ambientes familiares; todo con el objetivo de indagar en algunas de las principales características asociadas al éxito escolar" (Acevedo, 2007, p. 396). Las actitudes de las personas, desempeñan sin duda, un papel esencial a la hora de determinar su interés, atención y reacciones hacia la ciencia y la tecnología en general y hacia temas concretos relacionados con ellas en lo particular (Fenshman, 2004, citado por Acevedo, 2007)

Por su parte Gómez (2000) sostiene que, la relación que se establece entre los afectos (emociones, actitudes y creencias) y el rendimiento académico en la matemática es cíclica: por una parte, la experiencia que tiene el estudiante al aprender matemáticas le provoca distintas reacciones e influyen en la formación de sus creencias y por otra, las creencias que sostiene el sujeto, tienen una consecuencia directa en su comportamiento en situaciones de aprendizaje y en su capacidad de aprender.

Según el estudio de Hidalgo, Maroto y Palacios, (2002, citado por Hidalgo *et al.* 2004) el papel de las actitudes de los niños hacia la matemática en edad temprana (3-6 años), aún no está consolidado, y la creatividad en el trabajo del profesor es clave en el desarrollo del grado de aceptación o simpatía hacia la actividad en el aula de matemáticas. Este agrado se va haciendo menos favorable, conforme ellos avanzan en los niveles educativos, de este modo se puede decir que el disgusto por las matemáticas no es una característica con la que los estudiantes nacen sino

que se hace en el transcurso de su formación académica.

En este orden de ideas es que se considera importante mantener el interés en entender las características de los factores afectivos que impulsan o inhiben el aprendizaje de la matemática así como cuáles y cómo son las relaciones que explican este impulso o inhibición. En el presente documento se reportan los resultados de la primera parte de una investigación cuyo objetivo es explicar ¿qué motiva a los estudiantes, egresados de bachillerato, a elegir la carrera de matemáticas como la opción para sus estudios de nivel superior? y ¿cómo evoluciona su motivación a lo largo de un semestre?

DOMINIO AFECTIVO, MOTIVACIÓN Y MOTIVACIÓN DE APRENDIZAJE

De acuerdo a Gómez (2000) la definición sobre dominio afectivo que ha sido usada comúnmente, se debe al equipo de educadores de Taxonomía de los objetivos de la educación conformado por Krathwohl, Bloom y Masia, esta definición considera que "el dominio afectivo incluye actitudes, creencias, apreciaciones, gustos y preferencias, emociones, sentimientos y valores" (p. 22). Según la misma Gómez (2000), McLeod en 1989, usó el término, dominio afectivo, "para referirse a un extenso rango de sentimientos y humores (estados de animo) que son generalmente considerados como algo diferente de la pura cognición, he incluye como descriptores específicos de este dominio las actitudes, creencias y emociones" (p. 22).

> Las emociones son estados afectivos intensos, pero de corta duración, son respuestas organizadas más allá de la frontera de los sistemas psicológicos, incluyendo lo fisiológico, cognitivo, motivacional y el sistema experiencial. Surgen en respuesta a un suceso interno o externo que tiene una carga de significado positiva o negativa para el individuo (Hidalgo et al 2004, p. 77)

Según Maehr y Meyer (1997, citado por Brophy, 2004), la motivación es un constructo teórico que se utiliza para explicar el inicio, dirección, intensidad, persistencia y calidad de la conducta y el comportamiento dirigido a conseguir un objetivo. Los motivos, de acuerdo al mismo Brophy (2004), son empleados para explicar porqué las personas hacen lo que hacen, y es posible distinguirlos por las metas u objetivos a los que responden así como por las estrategias que se usan para alcanzarlos.

Para Hannula (2006), la motivación es un potencial para dirigir la conducta que está integrado en el sistema que controla las emociones. Este potencial se manifiesta en la cognición, la emoción y/o el comportamiento. Las necesidades son las instancias que dirigen la conducta y en el ámbito educativo, las necesidades psicológicas que se enfatizan son; la autonomía, la competencia y la pertinencia social.

La toma de conciencia y transformación de las necesidades en objetivos o metas en el aula de matemáticas esta fuertemente influenciada por las creencias que los estudiantes tienen sobre sí mismos, sobre las matemáticas y sobre el aprendizaje, así como del contexto escolar, las normas sociales y sociomatemáticas en clase.

De acuerdo Brophy (2004), la llamada "teoría de metas" surge como una necesidad de síntesis de diferentes teorías sobre la motivación que se habían venido desarrollando hasta antes de 1992, más que unificación en una sola tendencia, centró la atención en las diferentes aproximaciones que

se conocían sobre las metas de aprendizaje y metas de desempeño o rendimiento y que se presentaba aún en el marco de la dialéctica de motivación intrínseca y motivación extrínseca (Gámez y Marrero, 2000).

La motivación intrínseca se entiende como la tendencia inherente a buscar la novedad y el desafío, a extender y ejercitar las propias capacidades, a explorar, y a aprender (Deci y Rayan, 1995). Refiere la satisfacción inherente que ocasiona la actividad por si misma, es altamente autónoma y representa el caso prototípico de la autodeterminación.

La motivación extrínseca se refiere al desempeño de una actividad a fin de obtener algún resultado separable. Las conductas extrínsecamente motivadas que son menos autónomas son referidas como reguladas externamente, son ejecutadas para satisfacer una demanda externa o una recompensa contingente (Rayan y Deci, 2000)

Brophy (2004) explica la diferencia entre la motivación para aprender y motivación extrínseca extrapolando con la diferencia entre el aprendizaje y el rendimiento. El aprendizaje se refiere al tratamiento de la información, la construcción de sentido, y los avances en la comprensión o dominio que ocurren cuando alguien está adquiriendo un conocimiento o desarrollando una habilidad; el rendimiento en cambio, se refiere a la demostración de que el conocimiento o habilidad ha sido adquirida. Explica también la diferencia entre la motivación intrínseca y la motivación para aprender argumentando su estrecha relación con la diferencia entre las experiencias afectivas y las tareas cognitivas. La motivación intrínseca se refiere principalmente a la experiencia afectiva-disfrute de los procesos involucrados cuando se participa en una actividad. Por el contrario, la motivación para aprender es principalmente una respuesta cognitiva que implica intentos por dar sentido a la información que transmite una actividad, relacionar esta información con los conocimientos previos, y para dominar las habilidades que se desarrollan en la actividad.

En la idea que sostiene Brophy (2004), sobre el hecho de que los estudiantes que realizan actividades de aprendizaje por metas de desempeño tratan estas actividades como pruebas de su capacidad y no como oportunidades para aprender, es que el interés de la investigación que se presenta se centra en la motivación de aprendizaje. Y es a través de la descripción de componentes motivacionales que se encontraron en las respuestas a un cuestionario y una entrevista sobre motivación que dieron estudiantes recién egresados del nivel bachillerato y aspirantes aceptados a cursar la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Autónoma de Zacatecas, que se pretende anticipar su eventual comportamiento en dicha carrera.

LOS PRIMEROS RESULTADOS

El cuestionario, que se aplicó a 46 estudiantes que fueron aceptados para cursar la carrera de matemáticas en la Universidad Autónoma de Zacatecas en agosto del 2014, se conformó de tres partes; la primera en la que se les preguntaban datos personales, la segunda que se nombró de identidad matemática, en la que se les preguntó sobre su historia familiar, académica y su relación con la matemática a lo largo de su vida y la tercera que se denominó: motivacional. En esta última se les cuestionó en torno a las razones y motivos que los llevaron a estudiar la carrera de matemáticas.

Adicionalmente al cuestionario se aplicaron tres entrevistas; la primera se aplicó inmediatamente después que respondieron el cuestionario, con la finalidad de profundizar en sus respuestas, y dos más que se aplicaron, una a mitad del semestre escolar agosto-diciembre 2014 y la otra a final de dicho semestre. Las tres entrevistas fueron videograbadas.

Los resultados que enseguida se presentan, corresponden a lo encontrado en las respuestas al cuestionario y la primera de las entrevistas.

De los estudiantes entrevistados, 19 son mujeres y 27 hombres.

29 de los estudiantes, nunca han reprobado una materia. Entre las materias que más les han gustado durante su trayectoria académica, destacan: matemáticas, física, estadística, química e informática y las razones por las cuales estas materias les han gustado es porque se les facilitan, son prácticas, no son de leer y porque les entienden. Entre las materias más citadas entre las que no les gustan destacan: historia, humanidades, sociología, filosofía, español e ingles. Y entre las razones de este disgusto citan: "no me gusta leer", "no entiendo", "no me gusta hacer resúmenes" y "son aburridas".

Sólo 7 de los 46 estudiantes, tienen una calificación promedio general en bachillerato por debajo del 8. La mayoría considera que su relación con las matemáticas ha sido buena porque les divierte, se les facilita y les va bien en sus calificaciones, y aún que cuando hablan de las buenas calificaciones que han obtenido, parecen no querer mostrarse presunciosos, ninguno de ellos puede evitar señalarlo.

Entre las razones o motivos que los llevaron a elegir la carrera de matemáticas para su formación profesional expresan que: "siempre me han gustado", "se me dan", siempre he sido bueno", "como somos poquitos a los que nos gusta, hay más posibilidades de empleo"

En 41 de las 46 respuestas se encontraron componentes de motivación extrínseca en las que se identificó:

a) El interés de los estudiantes por mostrar o hacer notar las habilidades que ya adquirieron durante su formación académica hasta la conclusión del bachillerato: *"se me da la facilidad", "se me facilitan", "se me facilita mucho el uso de los números, la comprensión de textos matemáticos", "regularmente me va bien en las matemáticas, siempre salgo bien", "el conocimiento que he obtenido…he tenido buenas experiencias con las matemáticas", "es un campo en el que me puedo desarrollar bien por lo mismo, no me estresa, no se me hace pesado resolver problemas*"

b) Que para algunos es importante sentirse especiales o diferentes al resto de los estudiantes y sentir un reconocimiento*: "se me hace fácil … y a parte no hay muchos a los que les gusta*", "*Yo considero que las matemáticas es una materia que no mucha gente es apta para esto, entonces si yo tengo esta habilidad, esa aptitud, la aprovecho de esa manera*", "*escuché a unos amigos de mi papá que como yo era mujer no iba a poder con las matemáticas, entonces lo hice, para demostrarles que si se puede*" "*me gusta el alcance que tienen los matemáticos*", "*que a las matemáticas muchos no van, entonces no tendría mucha competencia" y "Y si es difícil pues mejor", "es el ego"*

Para 12 de ellos la opinión o el ejemplo de sus profesores influyeron en su decisión, esto en coincidencia con la afirmación Hidalgo (*et al*, 2004) sobre que la influencia del profesor y sus

métodos está presente como una variable significativa en el gusto o disgusto que desarrollan los estudiantes por la matemática. Según los resultados del estudio que este autor realiza, uno de cada dos estudiantes considera al profesor como causal de una visión más negativa de las matemáticas, mientras que sólo 3 de cada 10 atribuyen a los profesores sus actitudes positivas hacia las matemáticas. En las ocasiones en que los alumnos han tenido, lo que ellos consideran un buen profesor de matemáticas, han visto esta asignatura con otro sentido y con otra motivación. "el sentimiento de influencia negativa de los profesores sobre el gusto por las matemáticas aumenta a la par que lo hace el nivel educativo" (Hidalgo, et al, p. 89).

En 35 de las respuestas se encontraron componentes de motivación intrínseca, fundamentalmente declaran: *"me gustan", "me gustan mucho", me encantan" "siempre se me han hecho interesantes", "siempre me llamaron la atención" "fue lo que más me llenó".*

Solo en 26 de las 46 respuestas se identificaron componentes de motivación para aprender, respuestas en donde los estudiantes hablan en futuro sobre la posibilidad de aprender o mejorar lo que hasta ahora ya saben, entre estas citamos: *"aprender más", "explotar al máximo las capacidades", "salir bien preparado", " conocer mucho más de matemáticas", "yo digo que voy a aprender", "yo busco entenderles", "siento que me falta mucho por aprender" , "Saber más de álgebra y geometría", espero obtener más conocimiento para poderme desempeñar en varias áreas espero que se amplíen las posibilidades", "tener conocimientos más amplios", "más conocimiento, más habilidad", "conocer los significados, los porqués"*

Hasta diciembre del 2014 se mantenían inscritos en la licenciatura 29 alumnos de la generación entrevistada, 22 de los cuales coinciden con 22 de los 26 en cuyas respuestas encontramos motivación para aprender y por supuesto componentes de motivación intrínseca. Sin embargo 13 de los estudiantes que manifestaron tener este tipo de motivación, abandonaron la licenciatura en el transcurso del semestre.

Ya se explicaba que como parte de la investigación se realizaron dos entrevistas más, es decir se realizaron un total de tres entrevistas en un semestre, en la segunda de estas los estudiantes señalan enfáticamente las bajas calificaciones que han obtenido en las materias que cursan ya en la licenciatura, y se observó que sus emociones se diversificaron; mientras que en la primer entrevista se identificaron emociones como: satisfacción, orgullo, entusiasmo, motivación y curiosidad, en la segunda, además de éstas, se encontraron: preocupación, tristeza, desesperación, frustración, decepción, enojo, confusión, depresión y miedo, esta acentuación hacia emociones que se podrían considerar negativas para mejorar la motivación de aprendizaje de los estudiantes, podrían ser reflejo de lo que Manassero y Vázquez (2003) llaman atribución a baja capacidad. Estos autores explican que:

> Las atribuciones a baja capacidad (sentirse tonto) son las más perjudiciales y un obstáculo muy serio para el aprendizaje, ya que al ser una atribución estable provoca una perpetuación de las expectativas de fracaso, pudiendo generar estados de desamparo, indefensión o depresión; además, por ser una atribución interna, produce un deterioro directo del yo (autoconcepto, autoestima, etc) que favorece, en suma, la baja motivación (p. 27)

En este sentido se considera, que debiera existir un equilibrio entre la motivación intrínseca y la motivación de aprendizaje para que los estudiantes encuentren motivante continuar en la carrera y

no pierdan la confianza en sí mismos atribuyendo las bajas calificaciones a la falta de una capacidad personal, sino que centren su atención en aprender aquello que comienza a causarles dificultades, de este modo la motivación intrínseca pueda emerger "como la tendencia a buscar y superar retos" (Woolfolk, 1999, citado por Orozco y Díaz, 2009).

Los mismos Manassero y Vázquez (2003) explican la desmotivación como un estado activo de motivación, resultado de la percepción de las personas de una falta de contingencia o causalidad entre sus acciones y los resultados que obtienen. De este modo los estudiantes que desertaron de la carrera de matemáticas parecen no haber encontrado motivos para continuar estudiando.

Con los resultados obtenidos hasta el momento se puede decir que a la pregunta ¿qué motiva a los estudiantes egresados de bachillerato a elegir la carrera de matemáticas como la opción para sus estudios de nivel superior? Se puede responder diciendo que los motiva *el gusto por la matemática o la materia de matemáticas* y *las creencias que los estudiantes tienen sobre su propia capacidad para producir altos niveles de desempeño*. Estas creencias Bandura (1994) las llama creencias de eficacia o autoeficacia y explica que ejercen una gran influencia sobre los acontecimientos de la vida de las personas, contribuyen a la motivación determinando la metas que las personas establecen para sí mismos, la cantidad de esfuerzo que invierten en alcanzarlas, el tiempo que perseveran en el ante las dificultades y la capacidad de resistencia ante las fallas.

Queda por analizar con profundidad las respuestas de los estudiantes a la segunda y tercer entrevista y así responder ¿cómo evoluciona su motivación a lo largo de un semestre? El concepto de autoeficacia de Bandura (1994) parece ofrecer una explicación razonable al respecto, pues se observa un cambio en las creencias de los estudiantes sobre su propia capacidad, frente a un cambio de las creencias, que los estudiantes tienen antes de iniciar sus estudios de licenciatura, sobre lo que es la matemática, creencias que Bandura (1989, citado por Chiu, 2007) denomina creencias de valor o componente de valor de las creencias.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acevedo, A. (2007). Las actitudes relacionadas con la ciencia y la tecnología en el estudio PISA 2006. *Eureka,* 4(3), 394-416.

Bandura, A. (1994). Self-Efficacy En V. Ramachaudran (Ed.). *Encyclopedia of human behavior* (Vol. 4, pp. 71-81). New York: Academic Press.

Brophy, J. (2004). *Motivating students to learn*. Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Cardoso, A. (2008). Motivación, aprendizaje y rendimiento académico en estudiantes del primer año universitario. *Laurus*, 14(28), 209-237.

Casis, M. y Bravo, D. (2015). Actitudes que manifiestan hacia las matemáticas los estudiantes de Chile de 4° año de educación básica. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28*, 1047-1053. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Chiu, M. Xihua, Z. (2007). Family and motivation effects on mathematics achievement: Analyses of students in 41 countries. *Learning and Instruction* 18(2008), 321-336.

Córdoba, G. (2015). Creencias de estudiantes de secundaria sobre las matemáticas: un diagnóstico preocupante y sus posibles implicaciones. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28*, 268-274. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Deci, E. Y Rayan, R. (1995). Human autonomy: the basis for true self-esteem. In M. Kemis (Ed), Efficacy, agency, and self-esteem, 31-49. New York: Plenum.

Farias, D. y Pérez, J. (2010). Motivación en la enseñanza de las matemáticas y la administración. *Formación Universitaria*, 3(6), 33-40.

García, M.S. y Farfán, R.M. (2015). Actitudes de estudiantes de secundaria hacía el trabajo con situaciones de aprendizaje. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28*, 128-136. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

García, M.S. y Farfán, R.M. (2014). Actitudes de estudiantes de secundaria hacia las matemáticas. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27*, 163-170. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Gámes, E. y Marrero, H. (2000). Metas y motivos en la elección en la carrera de psicología. *REME*, 3(5-6), 1-25.

Gómez, I. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: NARCEA

González de Hernández, N. (2013). Factores asociados a una evaluación académica en la enseñanza de Matemática: herramienta estratégica para incrementar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26*, 897-904, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Hannula, M. (2006). Motivation in mathematics: goals reflected in emotions. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 165-178.

Hidalgo, S., Maroto, A. y Palacios, A. (2004) ¿Por qué se rechazan las matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas. *Revista de Educación*, 334, 75-95.

Uitto, M., Jokikkoko, K. y Estola, E. (2015). Virtual special issue on teachers and emotions in Teaching and teacher education (TATE) in 1985-2014. *Teaching and Teacher Education*, 50(2015), 124-135.

Martínez, O. J. (2014). Los afectos en el aprendizaje de la matemática: una mirada desde los docentes paraguayos. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27*, 1953-1962. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Martínez, O.J. (2015). Aspectos emocionales que impactan en el desempeño de los estudiantes en el aula de matemática. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28*, 128-136. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Montero, Y., Pedrosa, E. y Astiz M. (2015). Los estudiantes de matemática y su actitud hacia los métodos numéricos. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28*, 370-376. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Manassero, M.A. y Vázquez, A. (2003). Análisis empírico de dos escalas de motivación escolar. *Revista Electrónica de Motivación y Emoción* 3(5-6), 1-38.

McLeod, D. (1994). Research on affect and mathematics learning in the JRME 1970 to the present. *Journal Reseach in Mathematics Education*, 25 (6), 637-647.

Müller, D., Engler, A. y Vrancken, S. (2012). Propuesta de actividades sobre funciones en un entorno virtual de aprendizaje. Análisis de su implementación. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25*, 471-480, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Orozco, C. y Díaz M. (2009). Atribuciones de la motivación al logro y sus implicaciones en la formación del pensamiento lógico-matemático en la universidad. *Interciencia*, 34(9), 630-636.

Paulino, E. y Marmolejos, J. (2013). Importancia del aprendizaje de la acción del despeje y la sustitución numérica en la interpretación y solución de situaciones problemáticas. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26*, 421-428, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Pepin, B. y Roesken, B. (Ed). (2015). From Beliefs to dynamic affects systems in mathematics education. Exploring a mosaic of relationships and interactios. New York: Springer.

Ryan, R.y Deci, E. (2000). La teoría de la autodeterminación y la facilitación de la motivación intrinseca, el desarrollo social y el bienestar. American Psychologist, 5(1)68-78

Valle, A., Cabanach, R., Rodríguez S., Núñez, J. y González-Pineda, J. (2006). Metas académicas, estrategias cognitivas y estrategias de autorregulación de estudio. *Psicothema*, 18(2), 165-170.

Veiga, D. (2012). Introducción al capítulo de propuestas para la enseñanza de las Matemáticas. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25*, 386-387. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

ANÁLISIS DIDÁCTICO A UN PROCESO DE ENSEÑANZA DEL MÉTODO "INTEGRACIÓN POR PARTES"

Enrique Mateus Nieves
Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Colombia)
enrique.mateus@uexternado.edu.co

Palabras clave: Análisis didáctico, trayectoria epistémica, integral, integración por partes.

Key words: Didactic analysis, epistemic trajectory, integral, integration by parts.

RESUMEN: Este artículo presenta algunos resultados de la investigación adelantada. Se observa una tendencia en la enseñanza de los conceptos implicados en la integración por partes a seguir un desarrollo casi exclusivamente de rutinización algebraica. Se conocen las técnicas algorítmicas, sin una contextualización adecuada del proceso de integración. El enseñar separadamente los algoritmos de problemas contextualizados, responde al interés de la presente investigación en aras de buscar respuestas que proporcionen razones para entender ¿por qué los estudiantes se sienten abrumados por tantos requerimientos formalistas de las matemáticas en la formación superior? También trata de determinar si el quehacer del profesor durante la clase influye o no en este sentimiento.

ABSTRACT: This article presents some results of investigation conducted. A trend seen in teaching the concepts involved in the integration by parts a further development almost exclusively on algebraic routinization. Algorithmic techniques are known, without proper contextualization of the integration process. Teaching separately algorithms contextualized problems, in the interest of this research in order to find answers to provide reasons to understand why students are overwhelmed by so many formalistic requirements of mathematics in higher education? It also seeks to determine whether the task of the teacher during class influences or not this feeling.

CONTEXTUALIZACIÓN

El Cálculo, como componente esencial de lo que se conoce como matemáticas del cambio, es una potente y compleja herramienta articulada, sobre todo, alrededor de las nociones de variación y acumulación relacionadas con la derivada y la integral respectivamente, que son dos objetos matemáticos complejos, esenciales en la organización del Cálculo infinitesimal y que, a su vez, se apoyan en otros objetos matemáticos, igualmente complejos: función, límite, derivada e integral. Es aquí donde el cálculo integral, se hace portador de inagotables posibilidades para incidir en el proceso formativo del individuo, por el carácter de su epistemología donde la mate-matización de las ciencias exactas juega un papel importante en la formación del universitario; es fundamental que el estudiante reconozca el doble valor que tienen las matemáticas: como ciencia y como herramienta. De ahí que las reflexiones (e investigaciones) sobre la calidad matemática de los procesos de instrucción de las matemáticas son numerosas en el área de Educación Matemática. Todas ellas ponen de manifiesto que hay muchos aspectos que inciden en esta calidad y que, por tanto, se trata de una noción multidimensional. (Font y Adán, 2013)

DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA

Investigaciones recientes dentro del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), como las de Artigue (2002), Salinas y Alanís (2009), comentan que la situación actual en cuanto a la enseñanza del Cálculo, se caracteriza por un sentimiento general de crisis que, aunque no se ha percibido de la misma manera, sí parece trascender las diferencias culturales y que las dificultades en el aprendizaje no han cambiado de manera sustancial; esta problemática general también se percibe en Colombia como lo relaciona el documento ¿cómo es la evaluación en matemáticas? del Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES, 2003). Dicha situación motiva a realizar esta investigación mediante un estudio de caso que aunque no se puede generalizar, involucra a un profesor representativo de esta problemática que arroja información que si va más allá del caso particular.

OBJETIVOS

Caracterizar el proceso de enseñanza que ha seguido un profesor cuando explica el método de integración por partes [MIP] en un curso de cálculo integral; identificar dificultades específicas que se observen en el desarrollo de las clases, indagar sus causas y comprobar si persisten o no, para determinar con base en esa información el grado de idoneidad didáctica del proceso de instrucción ejecutado por el profesor al enseñar el MIP desde los criterios de idoneidad propuestos por el EOS.

MARCO TEÓRICO

Para el estado del arte de esta investigación, se contemplaron 4 aspectos fundamentales: La línea de investigación sobre el conocimiento del profesor; Investigaciones sobre el PMA; Los aportes de la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos, esquemas); Algunas limitaciones de la teoría APOE y la consiguiente necesidad de usar la Teoría de la Funciones Semióticas, conocida regularmente como el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (EOS) como soporte teórico y metodológico para dicho trabajo.

En diferentes investigaciones Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino 2002; Contreras, Font, Luque, Ordoñez, 2005; Font y Ramos, 2005; Godino, Contreras y Font 2006; Ramos y Font, 2006) han desarrollado el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (EOS) que para el caso del cálculo diferencial e integral, considera a los objetos matemáticos como entidades emergentes de los sistemas de prácticas. Muestran que los estudiantes tienen dificultades para lograr la emergencia del objeto integral debido a la excesiva rutinización algebraica que incide negativamente en la enseñanza y en el aprendizaje de este concepto. Aquí se hace necesario adoptar una posición situada en dos aspectos: el cognitivo y el epistemológico. Para el primero considerar los procesos cognitivos del sujeto desde un punto de vista semiótico (construcción de significados personales). Para el aspecto epistemológico implica asumir que es fundamental problematizar el propio conocimiento matemático (construcción histórico-epistemológica de significados institucionales), no considerándolo como trasparente y acabado. Con esto, en el EOS se entiende la comprensión esencialmente, como una competencia que posee el estudiante y no solo como un proceso mental. Desde este punto de vista es posible inferir que un estudiante comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diversas prácticas. Lo que implica que la capacidad se traduce en la realización de prácticas que son evaluables públicamente.

El EOS permite realizar análisis de tipo microscópico de episodios instruccionales a partir de cinco niveles propuestos y que para esta investigación doctoral han sido adaptados así: Nivel 1. Identificación de prácticas matemáticas. Nivel 2. Identificación de objetos y procesos matemáticos. Nivel 3. Descripción de interacciones en torno a conflictos. Nivel 4. Identificación de normas. Nivel 5. Valoración de la idoneidad interaccional del proceso de instrucción. De ahí que el análisis didáctico que se haga a la descripción del proceso seguido por el profesor en la enseñanza del método de integración por partes (y en particular a la trayectoria epistémica que se definirá en seguida) que permita caracterizar el significado institucional efectivamente implementado y su complejidad ontosemiótica. Para analizarla, su desarrollo (la "crónica") será dividido en unidades de análisis de acuerdo a las distintas situaciones-problema (las "tareas") que se van proponiendo. Se denominará "configuración epistémica" al sistema de objetos y funciones semióticas que se establecen entre ellos relativos a la resolución de una situación-problema. Por tanto, se trata de un segmento de la trayectoria de enseñanza como un aspecto de la trayectoria didáctica global, que, una vez organizada por configuraciones epistémicas, puede considerarse como trayectoria epistémica. El análisis epistémico consiste pues en segmentación y la caracterización de las configuraciones epistémicas, su secuenciación y articulación. Cada configuración epistémica, globalmente considerada, desempeña una función específica en el proceso de instrucción. La atención se fija en la cronogénesis del saber matemático escolar, y en la caracterización de su complejidad Ontosemiótica. Dentro de cada configuración se definen unidades de análisis más elementales según los estados de la trayectoria, que serán llamadas unidades epistémicas. Éstas estarán conformadas por unidades naturales de análisis. Dichas unidades son las distintas oraciones que componen la crónica de un proceso de estudio, las cuales serán numeradas correlativamente para su referencia. Este análisis realizado de esta manera, permitirá determinar la existencia o no de conflictos semióticos que generen dificultades en los estudiantes, la aplicación o no de los enfoques tradicionales de enseñanza del cálculo, planteados en las hipótesis de investigación.

El centro de atención del análisis didáctico se enfocó en la Trayectoria Epistémica de enseñanza, vista desde la distribución a lo largo del tiempo de la enseñanza de los componentes del significado -(significado pragmático: Sistema de prácticas operativas y discursivas)- institucional implementado. Estos componentes (problemas, lenguaje, definiciones, propiedades, procedimientos, argumentos) se van sucediendo en un cierto orden en el proceso de instrucción que el docente imparte. En este análisis, también se ha contemplado la trayectoria epistémica de la secuencia de configuraciones didácticas, esto es, el progresivo "crecimiento matemático" de los aprendizajes. (Comprensión, competencia y conocimiento), ya que se considera que un sujeto comprende un determinado objeto cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas.

METODOLOGÍA

Se trata de una investigación cualitativa, basada en el estudio de caso de un profesor elegido que enseña un contenido matemático, (método de integración por partes [MIP]). Su ubicación teórica está dentro del PMA, específicamente en la didáctica del cálculo integral en un contexto educativo particular, pero en la presentación y discusión de los resultados se utilizan los criterios y las categorías de análisis del EOS que permite combinar diversos métodos y técnicas de acuerdo a las fases de la investigación, y de manera más especifica la noción de idoneidad didáctica de procesos de instrucción y aprendizaje de las matemáticas. El modelo epistémico y cognitivo que caracteriza el EOS proporciona herramientas de análisis que permiten diseñar trayectorias didácticas e instrumentos de evaluación con validez ecológica, esto es, adaptadas al contexto, a las competencias matemáticas iniciales de los estudiantes y a los objetivos de aprendizaje pretendidos e implementados

Las clases consideradas mientras se explicaba el MIP fueron 12, que tenían una duración aproximada de una hora, Algunas de ellas se implementaron según el horario asignado en sesiones de hora y media de clase. Se impartieron en la asignatura de Cálculo Integral, durante el tercer semestre de la licenciatura en matemáticas de una universidad colombiana, con 20 estudiantes de 21 a 23 años de edad. La universidad es de tipo pública estatal. El profesor tenía una antigüedad en la docencia de cinco años, una formación en matemática pura y una especialización en docencia de la matemática universitaria. Para el análisis, hemos subdividido las 12 sesiones de clase en 820 unidades de análisis, que hemos agrupado en episodios de aula que denominamos configuraciones didácticas cada una de ellas con una configuración epistémica asociada. (Godino, Contreras y Font, 2006).

El análisis didáctico se realizó en 4 fases procesales así: Fase heurística: se procede a la búsqueda y recopilación de las fuentes de información. Fase hermenéutica: selección de los puntos fundamentales e indicación de los instrumentos diseñados para sistematizar la información bibliográfica acopiada. Fase de recolección y triangulación de la información: creación de categorías de análisis. Análisis y triangulación de la información en las categorías de análisis. Fase de Resultados: conclusiones, limitaciones del estudio, perspectivas y recomendaciones hacia el futuro.

RESULTADOS ENCONTRADOS

Con respecto a la identificación de prácticas matemáticas, a través de la observación de la trayectoria didáctica que siguió el profesor durante una unidad específica, se pudo percibir cómo la mayoría de los estudiantes demuestran una actitud de rechazo hacia el estudio de esta disciplina. A pesar de este rechazo, en el proceso de enseñanza no se enfatizan los conceptos, pero sí los procedimientos; se hace énfasis en la memorización, siguiendo patrones de imitación, sin que muchas veces los jóvenes entiendan lo que están haciendo y, en general, sin que se desarrolle la capacidad creadora e integradora. La costumbre de enseñar separadamente los algoritmos y los problemas propiamente dichos resalta el interés de la presente investigación para tratar de crear conciencia entre los docentes sobre la necesidad de lograr un significado global de la integral a partir de la adopción de varáis presentaciones del mismo. Sin olvidar lo que argumenta Dreyfus (1991), "el proceso de aprendizaje de un determinado concepto pasa inicialmente por la utilización de una sola representación" (p.28), donde la visualización juega un papel importantísimo, ya que proporciona una visión holística del gráfico y de la región que se trabaja.

Se observa una aproximación socio-constructivista por parte del profesor, privilegia el trabajo cooperativo y en equipo, mientras que en general los sistemas y tiempos de la docencia tradicionales fomentan el trabajo individual y la evaluación cognitiva. El tema de los problemas que presenta el profesor pertenecen estrictamente a un contexto intramatemático y por tanto no se fomentan procesos de modelización.

El profesor enseña matemáticas con exposición, seguida de ejercicios sobre los contenidos vistos. Este modelo se repite en toda la secuencia de clases observada. Este modelo de enseñanza deja a los alumnos la responsabilidad de dar sentido al significado global de los objetos matemáticos que se introducen a través de los ejemplos y ejercicios que se van mostrando. Como expresan Godino et al. (2006, p. 31), se estaría tratando de una decisión topogenética: primero yo, el profesor, te doy las reglas generales, después tú las aplicas.

La institucionalización -regulación-, formulación y validación quedan exclusivamente a cargo del profesor, sin intervención alguna de los alumnos, más allá de salir al tablero. Por dicho motivo, las configuraciones didácticas de toda la secuencia de clases se han considerado del tipo magistral-interactivo o bien de configuración didáctica personal.

Con respecto a la identificación de objetos y procesos matemáticos durante las sesiones analizadas la intervención del profesor se centró en presentar (institucionalizar) el MIP a partir de la resolución de una integral particular. El patrón de interacción sirve para tipificar el proceso de enseñanza como magistral interactiva. Se presentan varios conflictos semióticos potenciales causados por las explicaciones ambiguas del profesor y por el uso de simbología imprecisa. Los elementos matemáticos asociados con la solución de problemas corresponden a un curso del nivel de Licenciatura en Matemáticas y se encuentran descritos en el currículo de las materias que cursan los estudiantes de la Facultad de Ciencia y Tecnología.

Destaca el hecho de que casi no aparezca el lenguaje numérico y que el recurso a la historia es utilizado poco y de una forma descontextualizado. Tal como se observa en los libros de texto, la enseñanza del cálculo integral no incluye explícitamente una fase previa de carácter experimental a lo largo de la cual los objetos matemáticos tengan una referencia explícita. Es decir, tanto las

concepciones como los obstáculos no son tratados de modo explícito como sería conveniente de cara a establecer una enseñanza en la que los propios estudiantes construyan su conocimiento.

El diseño curricular no favorece la enseñanza con base en problemas. Los cursos están concebidos en forma expositiva ilustrativa, con tareas y actividades específicas propias de esa modalidad. El aprendizaje mediante la resolución de problemas requiere de otras estrategias y otros tiempos, dado que la normatividad está acorde con la modalidad tradicional, pueden surgir contratiempos con la problemática, que deberán ser negociados con los estudiantes mediante un contrato didáctico adecuado. Lo que se observa es que el significado institucional pretendido para la integral no corresponde al significado global alcanzado, ni tampoco al significado global de la integral como proceso acumulativo.

En lo que se refiere a la integral como objeto matemático de enseñanza-aprendizaje; se concluye que el tipo de enseñanza propuesto es trasmisivo, lo que supone que el alumno no realiza ningún tipo de trabajo de investigación, siendo un sujeto meramente pasivo. Paralelamente, se comunica el saber sin atender a los posibles errores, por lo que consideramos que al estudiante no se le facilita la construcción del saber matemático. No hay interacciones en torno a conflictos que busquen solucionarlos.

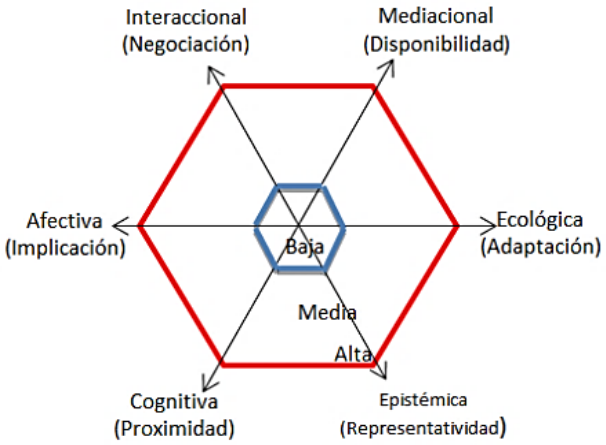
Al finalizar el proceso de observación de las clases, el significado personal de la mayoría de los estudiantes sobre la integral, incorporaba prácticas que permitían obtener expresiones simbólicas de integrales elementales a partir de sus gráficas (para integrales definidas), no así para las integrales indefinidas e impropias. Dichas prácticas no formaban parte del significado de sus objetos personales "funciones elementales" antes del proceso de enseñanza, ni habían sido explícitamente contempladas en el diseño previo del significado institucional pretendido por el profesor observado.

La enseñanza de las integrales es un tópico ampliamente estudiado en la Matemática Educativa. Un grupo relevante de estos trabajos, que normalmente ocupan marcos teóricos de tipo psicológico, han investigado las dificultades que presentan los alumnos con la aplicación de cuestionarios y entrevistas, pero no analizan los procesos de instrucción que siguen los estudiantes. En cambio, el análisis que hemos llevado a cabo aquí, además de permitir hacer una descripción con detalle lo que ha sucedido, ofrece explicaciones sobre por qué se presentan determinadas dificultades en los alumnos. Por una parte, podemos afirmar, como muestra la investigación sobre la didáctica de las integrales, que los alumnos tienen problemas para entender la resolución de integrales por el MIP, y que se observan, entre otras evidencias, a través de los conflictos semióticos de tipo cognitivo que para el caso, por cuestión de espacio, aquí solo ilustraremos un ejemplo tomado de las secuencia didáctica observada, los demás conflictos detectados se pueden consultar en el extenso de la tesis doctoral del autor de este escrito: Conflicto semiótico (cognitivo 1): en la sesión 1, se asocia la configuración didáctica 2, en la unidad de análisis 35, el profesor institucionaliza que "al existir una multiplicación entre funciones no similares, el método a aplicar es por partes". Estamos en presencia de un conflicto cognitivo que el profesor genera en el alumno. Este conflicto se hace evidente en la sesión 2 configuración didáctica 5, unidad de análisis 231. Ante la imposibilidad de resolver la integral $\int \frac{sen2x}{e^x} dx$ un alumno dice que no se puede aplicar el MIP porque no hay un producto de funciones, el profesor resuelve este conflicto ayudándole a avanzar en su aprendizaje indicándole que si se hace el siguiente tratamiento $\int e^{-x} \, sen\, 2x \, dx$, sí que se tiene un producto de funciones.

De las diferentes configuraciones epistémicas para modelizar la complejidad de la integral, descritas en Ordoñez (2011) y en Crisóstomo (2012), solo se usan parcialmente las configuraciones que llaman: geométrica, inversa de la derivada y la algebraica. Por otra parte con relación a estas tres configuraciones los elementos esenciales no están bien explicados ni coherentemente organizados (el procedimiento del MIP es ambiguo, olvida un paso fundamental que es la jerarquía para la selección de *u*, el teorema fundamental del cálculo también se expresa de forma ambigua, etc.). No hay una muestra representativa de los tipos de problemas en donde es indicado aplicar el MIP; incluso el tipo de problemas donde se debe aplicar dos veces el mismo método, no les hace observar que hay una familia de problemas que se resuelven por integración repetida del algoritmo.

Por las descripciones antes mencionadas, en el siguiente diagrama, tomado de Robles, Castillo y Font (2012), suponemos el hexágono regular rojo como la idealización de la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción de buena calidad (se consiguen de manera conjunta todas las idoneidades), mientras que el azul refleja la idoneidad de la clase observada.

Diagrama 1. Idoneidad didáctica del proceso de instrucción ejecutado



Dificultades observadas a partir del análisis didáctico realizado en los apartados anteriores

Se observan tres grandes dificultades a lo largo de las 12 sesiones de clase utilizadas para implementar el proceso de instrucción del MIP que no se superan, en su orden son:

Dificultad para determinar el orden jerárquico para elegir cual función se nombrará como u.

Dificultad para hacer conversiones, trasferencias y aplicar la regla de integración por partes.

Dificultad para solucionar problemas pertenecientes a otros contextos científicos como la física y la economía, por nombrar algunos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Antigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 7*

Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordoñez, L. (2005); Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherche en Didactique de Matematiques*, 25(2), 151-186

Crisóstomo, E. (2012). *Idoneidad de proseos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemática. Una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, Granada.

Dreyfus, T. (1991). "Advanced Mathematical Thinking Processes" En D. TALL (Ed) *Advance Mathematical Thinking,* Kluwer Academic Publishers, Londres, 24-41

Font, V., y M. Adán (2013). Valoración de la idoneidad matemática de tareas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII*, Bilbao, SEIEM, pp. 283-291.

Font, V. y Ramos, A. B. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una Facultad de ciencias Económicas y sociales. *Revista de Educación*, 338, 309-345.

Godino, J. D. (2002) Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22 (2/3), 237-284.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.

ICFES. (2003) ¿Cómo es la evaluación en matemáticas? Subdirección Académica Grupo de Evaluación. Bogotá D. C.

Ordóñez, L. (2011). *Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Jaén. España.

Ramos, A., y Font, V. (2006). Cambio institucional, una perspectiva desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Paradigma,* 27 (1), 237-264.

Robles, G., Del Castillo, A. y Font, V. (2012). Análisis y valoración de un proceso de instrucción sobre la derivada. *Educación Matemática*, 24(1), 35-71.

Salinas, P., y Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 12(3), 355-382

ANÁLISIS DE LAS DIVERSAS TEORÍAS DESARROLLADAS EN MATEMÁTICA EDUCATIVA COMO FUNDAMENTO PARA MEJORAR LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE TIJUANA

Catalina Rodríguez Moreno
Universidad Tecnológica de Tijuana (México)
catalina.rodriguez@uttijuana.edu.mx

Palabras clave: Enseñanza de las matemáticas, práctica docente, universidades tecnológicas.

Key words: Teaching of mathematics, teaching practice, technological universities

RESUMEN: La presente busca el análisis de la investigación existente en matemática educativa al identificar cómo ha evolucionado la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que sirva como fundamento para decidir cuál es la que más se ajusta al modelo educativo de la Universidad Tecnológica de Tijuana, por su característica tecnológica tiende a olvidar la parte pedagógica, sin embargo, la investigación está en lograr una manera de enseñanza matemática funcional.

ABSTRACT: The next investigation looks for the analysis of existing research in mathematics education identifying how teaching and learning of mathematics has evolved so that serves as the basis for deciding which is the most effective to the educational model of the Technological University of Tijuana is adjusted by your technological feature forget the pedagogical part in this discipline and achieve a way of functional mathematics teaching.

Entrar al mundo de propuestas realizadas para la enseñanza de las matemáticas, significa encontrar una diversidad de estudios referentes a la acción pedagógica, en uno de ellos se han destacado algunas preguntas como las siguientes:

> ¿Cuál es el proceso que debe vivir el docente para lograr la comprensión de aquello que fundamenta la propuesta didáctica, como así también, cualquier saber matemático que se le presente en su labor? ¿Qué podemos hacer, desde la investigación, con el fin de que el docente favorezca entre los estudiantes el aprendizaje con base en la construcción social del conocimiento? (Reyes, Cantoral, 2012 p. 1007).

Dichas interrogantes han sido fundamentadas en la Teoría Socioepistemológica a partir de inquietudes que manifiestan diversos docentes de Matemáticas e investigadores en el área.

Es por ello que este trabajo se contextualizará en un espacio educativo donde la enseñanza de la matemática se ubicará desde el modelo de las Universidades Tecnológicas (UT) en México, específicamente en la Universidad Tecnológica de Tijuana (UTT); de igual manera se busca revisar y analizar diferentes propuestas en matemática educativa, que sirvan de base para la enseñanza de las matemáticas.

ORIGEN DE LAS UNIVERSIDADES TECNOLÓGICAS MEXICANAS

En México, el gobierno Federal inició un programa de evaluación y mejoramiento de la educación superior considerando a las universidades públicas, a las privadas, y a las instituciones estatales; dadas las condiciones en ese momento se señala que era necesario ampliar las opciones de educación superior, como resultado la realización de un proyecto que incentivarla definición de un modelo pedagógico concretado en una nueva opción de educación superior para cubrir la necesidad de empleabilidad del sector productivo nacional, regional y sectorial. Así, esta modalidad tiene la característica de terminarse en menos tiempo que en cualquier universidad, pero sin afectar la calidad en la preparación.

Se buscó en diversos países la variedad de modalidades que manejan en educación superior y el modelo que se ajustó a lo pretendido fue el de la Institute Universtare de Technologie (Francia) realizando un convenio e iniciando en 1991 operaciones con la creación de las Universidades Tecnológicas. Al ser aplicado, éste busca lograr un equilibrio entre la capacidad técnica, los conocimientos humanísticos y la habilidad de comunicación necesaria en la formación integral de un técnico superior universitario. El modelo está centrado en tener mayor práctica o saber hacer asignándose un 70% y un 30% para desarrollar la parte teórica o el saber.

LA UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE TIJUANA

La Universidad Tecnológica de Tijuana, se presenta como una opción de acuerdo a las necesidades de la industria regional del Noroeste de Baja California. Dicha Universidad entra en funcionamiento el día 14 de agosto de 1998 como organismo público descentralizado del Gobierno del Estado de Baja California. Cuenta con dos procesos: uno es el correspondiente al de formación educativa (proceso enseñanza-aprendizaje) dirigido a los estudiantes que cursan el nivel Técnico superior universitario e ingeniería y el otro la educación continua dirigida a egresados, empresarios y público en general.

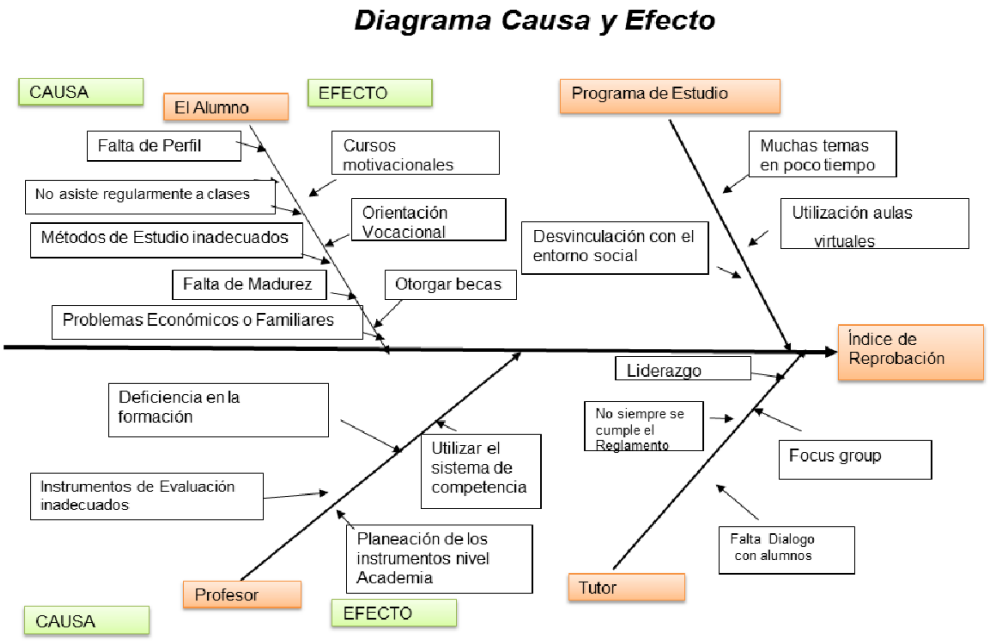
En la UTT, “durante el ciclo escolar 2012-2013, 803 alumnos causaron baja por no aprobar una o más materias, lo que representó un 26.95%”, (Universidad Tecnológica de Tijuana, 2013, p. 19), así que era necesario buscar la manera de disminuir el índice de reprobación porque venía manifestando una tendencia hacia la alza.

Ante este hecho, los profesores de tiempo completo de cada carrera se dedicaron a realizar un análisis de las posibles causas de reprobación. Posteriormente cada director, en reunión con el departamento de planeación, presentó el diagrama de causa y efecto generado (ver la ilustración 1), dando como resultado los siguientes planteamientos y estrategias. De acuerdo a lo acordado en dicha reunión, se propone:

- Realizar una selección de los estudiantes al ingresar a la UTT;
- Incrementar el apoyo de becas en transporte, económicas y alimenticias principalmente en el turno vespertino;
- Hacer un trabajo colegiado con las materias de mayor índice de reprobación;
- Poner mayor atención a los alumnos que ingresan con un perfil bajo de desempeño en el examen de selección, con rendimiento académico deficiente y con características socioeconómicas precarias;
- La sensibilización a los estudiantes al modelo educativo intensivo y de exigencia mayor, al reforzar los conocimientos previos principalmente en los primeros cuatrimestres;
- Revisar a fondo los sistemas de evaluación con el fin de buscar alternativas que superen esa cadena que se ha aplicado al momento de evaluar;
- Cursos de micro-enseñanza a docentes de nuevo ingreso, así como aquellos cuya evaluación por parte de los estudiantes haya sido deficiente. Se sugiere fueran cuatrimestrales y con diversos niveles para llevar un seguimiento del avance obtenido y reforzar las carencias;
- Capacitación a docentes para adoptar metodologías pedagógicas innovadoras con miras a que las clases puedan ser más dinámicas y productivas;
- Apertura para las asesorías por parte de los docentes de asignatura;
- Solicitar apoyo del departamento de orientación para impartir un curso completo de los 7 hábitos de la gente altamente efectiva, hábitos de estudio y mapas conceptuales, entre otros, para que los alumnos aprendan a administrar su tiempo así como métodos de estudios adecuados y eficientes. O en su defecto, realizar talleres en donde se les den a los alumnos las diferentes técnicas de estudio así como el manejo de los diferentes recursos didácticos;
- Círculos de estudio incorporándose al horario de clases;
- Los directores dar seguimiento a tutores para confirmar oportunamente la fecha de aviso de baja de los alumnos; y
- Acciones de mejora del programa de inglés con coordinación de idiomas.

Después de realizar la aplicación de algunas de las estrategias planteadas y algunas acciones para buscar disminuir los porcentajes de reprobación como son cursos remediales, asesorías con los docentes especialistas en la materia, círculos de estudio (asesorías estudiante – estudiante), la elaboración del curso propedéutico, pasando por cursos de capacitación y formación de docentes y el seguimiento de Tutorías. Se convocó a una segunda reunión de Directores con la dirección de Planeación y Desarrollo donde se concluyó que fueron insuficientes las estrategias, ya que si hubo mejora en el índice de reprobación, pero no resolvió de maneja satisfactoria la situación.

Ilustración 1. Diagrama de Causa y efecto para análisis de la reprobación en la UTT



Fuente: Dirección de Planeación y evaluación

LA SITUACIÓN DE ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Para poder comprender la enseñanza de las matemáticas, primero hay que analizar la característica de la población Tijuanense, ésta se ha ido conformando con personas que proceden de varios estados del país. Ahora bien, esto genera una diversidad de propuestas pedagógicas en relación a los conocimientos matemáticos, los cual provoca que algunos estudiantes al ingresar a la UTT presentan el manejo de la disciplina bien fundamentada y otros no. La mayoría ingresa del Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos de Baja California (CECYTEBC) y del Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica (CONALEP) y el resto de otras instituciones.

Otra característica de los estudiantes es que para algunos casos la UTT se convierte en segunda opción porque hicieron el intento de ingresar a otras instituciones oficiales tales como la Universidad Autónoma de Baja California (UABC) o el Instituto Tecnológico de Tijuana (ITT), o incluso su condición económica en general es de bajos recursos.

Desafortunadamente, por ser una Universidad tecnológica y a pesar de los planteamientos teóricos existentes en la enseñanza de la matemática, todavía se presenta una educación tradicionalista, reduciendo el uso del conocimiento al pase de un examen o el de seguir algoritmos. Un docente al ser contratado en este modelo debe tener experiencia en el área empresarial donde imparte sus conocimientos y en el área pedagógica. Entonces, se reflexiona si los docentes se encuentran preparados para impartir clases, o sea que cuenten con ambos puntos ya mencionados.

En la educación escolar de la enseñanza de la matemática, por lo general, se solicita a los docentes buscar su aplicación a la cotidianidad de los estudiantes, para esto es necesario

investigar sobre el origen de las diversas las metodologías sugeridas por investigaciones ya realizadas.

En México, se manejan las líneas de investigación en matemática educativa al nivel educación superior siguientes:

- los campos conceptuales de Vergnaud;
- las funciones cognitivas de Feuerstein;
- la teoría de la matemática en el contexto de las ciencias;
- la transposición contextualizada;
- el pensamiento sistémico;
- la aproximación socioepistemológica; y
- la metodología APOE, en la que sus siglas corresponden a: acción, proceso, objeto y esquema (Avila, 2013).

RETOS PARA LA APLICACIÓN DE UNA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Uno de los retos es el lograr en el área de matemáticas, una manera de enseñar matemática funcional para la educación superior, específicamente para el modelo de las Universidades Tecnológicas, donde la mayoría de los maestros no cuentan con una formación docente. Por su característica tecnológica se olvida de la parte pedagógica, a pesar de la existencia de varias propuestas en el campo de la enseñanza de las matemáticas.

La pregunta obligada es ¿cuáles podrían ser las teorías principales a analizar?, para dar respuesta se puede partir de lo que plantea Artigue en el 2013:

> …el campo de la educación matemática es un campo en el que coexisten una variedad de enfoques teóricos (Sriraman y English, 2010). Sin embargo, no se puede negar que en las dos últimas décadas hemos visto importantes cambios, y en particular la influencia creciente de los enfoques socio-culturales. Este cambio teórico ha tomado diversas formas, y cada uno de acuerdo con sus experiencias y con sus intereses de investigador, es sensible a este cambio de manera diferente. El campo controversial de la Etnomatemática cuyo padre fundador Ubiratan D´Ambrosio ha sido honrado por ICMI de la prestigiosa medalla Félix Klein (D´Ambrosio, 2008), el campo de la educación matemática crítica que pone la dimensión moral y política de la educación matemática, los cuestionamientos de justicia social y de equidad, al centro de sus preocupaciones (Skovsmose y Valero, 2008), o los diversos trabajos relevantes del marco teórico de la socio-epistemología (Cantoral y Farfán, 2003) publicados de manera notable en la revista Relime, son sin duda emblemáticos de este cambio para muchos participantes en esta conferencia. Dentro de mi comunidad didáctica, es con la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) iniciada por Yves Chevallard (Chevallard, 1992, 2002) que esta evolución se ha materializado… (Artique, 2013, p. 47).

Un segundo reto es el desconocimiento de una didáctica de la matemática por parte del docente y de cómo hacer la matemática funcional dentro del modelo de las universidades tecnológicas, ésta será entendida como “un conocimiento incorporado orgánicamente en el humano que lo transforma y que le transforma su realidad. Todo ello en oposición al conocimiento utilitario” (Cordero, Flores, 2007, p. 9). Para esto es importante y necesario tener conocimiento sobre el cómo surgen las

metodologías sugeridas por los investigadores, de tal manera que se busca pasar de una simple instrucción a convertirse en una ciencia denominada matemática educativa.

Como conclusión, la importancia de saber cómo ha evolucionado la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los últimos tiempos, es para estar ubicado en los cambios del mundo en cuanto a los avances de la ciencia y la tecnología, lo que modifica la forma de ver la vida y desarrollo en los estudiantes así como la de los docentes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (2013). La educación matemática como un campo de investigación y como un campo y como un campo de práctica: Resultados, Desafíos. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación, Año 8*(11), 43-60.

Avila, A. (2013). *Una década de investigación educativa en conocimiento disciplinario en México. Matemáticas, ciencias naturales, lenguaje y lenguas extranjeras 2002-2011.* México: ANUIES.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. México: Gedisa.

Coordinación General de Universidades Tecnológicas. (2000). *Universidades tecnológicas. Mandos medios para la industria.* México: Limusa.

Cordero, F., Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(1), 7-38.

D´Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática.* México: Reverté.

Reyes, D., Cantoral, R. (2012). Profesionalización y empoderamiento docente en matemáticas: una mirada desde la socioepistemológica. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* 25, 1005-1014. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Universidad Tecnológica de Tijuana. (2013). *Informe de resultados 2009-2013* Tijuana.

Velázquez Manuel. F. (2000). *De la Instrucción matemática a la educación matemática*. *Números*, 129-134.

EL SENTIDO DE LA DISPERSIÓN Y SU DESARROLLO EN EL CURRICULO

Ignacio González-Ruiz, Carmen Batanero, M. Mar López-Martín, J. Miguel Contreras
Universidad de Cantabria (España), Universidad de Granada (España)
ignaciogonzalezruiz@hotmail.com, batanero@ugr.es, mariadelmarlopez@ugr.es, jmcontreras@ugr.es

Palabras clave: Dispersión, sentido estadístico, currículo.

Key words: Spread; statistical sense, curriculum.

RESUMEN: La dispersión es un concepto básico en estadística, pues cuantifica la variabilidad en las distribuciones de datos y las distribuciones de probabilidad, estando ligada tanto al análisis exploratorio de datos, como a la probabilidad. Es también esencial en inferencia, pues permite valorar la precisión de las estimaciones o del riesgo asumido en los procesos de decisión. La finalidad de este trabajo es analizar la forma en que este concepto se contempla en las directrices curriculares españolas y establecer comparaciones con las de otros países. Todo ello para colaborar en una mejor adquisición del sentido de la dispersión en los estudiantes..

ABSTRACT: Spread is a basic concept in statistics, as it quantifies the variability in the data distributions and probability distributions. Consequently it is linked to both exploratory data analysis and probability, being also essential in statistical inference, since it allows valuing the estimates accuracy and the risk assumed in decision making processes. The aim of this work is to analyze the way in which the concept is taken into account in the Spanish curricular guidelines, as well as compare with other countries. All of this contributes to collaborate in the better acquisition of the sense of spread in the students.

INTRODUCCIÓN

Las medidas de dispersión son esenciales en una distribución estadística, complementando a las de posición central, al caracterizar la variabilidad de los datos respecto a las mismas. Wild y Pfannkuch (1999) incluyen la percepción de la variación en los datos (y por tanto de la dispersión) como un componente básico de su modelo de pensamiento estadístico. También Moore (1990) incluye tres aspectos de la misma relacionados con el razonamiento estadístico: a) la percepción de su omnipresencia en fenómenos de las ciencias y la vida diaria; a) la competencias para su explicación, identificando las fuentes y causas de la variación; y c) la habilidad para su cuantificación, lo que indirectamente implica la comprensión y cálculo de las medidas de dispersión. A pesar de la importancia que hemos señalado, la investigación sobre la comprensión de la dispersión y de sus medidas es escasa (Estepa y del Pino, 2013; Sánchez, Silva y Coutinho, 2011).

Para contribuir a rellenar este hueco, en este trabajo analizamos la forma en que el tema se considera en el currículo español, en las diversas etapas educativas. El estudio se realiza comparando las directrices curriculares españolas, con el fin de prever su desarrollo en el aprendizaje del estudiante y proporcionar recomendaciones que contribuyan a aumentar el sentido de la dispersión entre ellos.

COMPONENTES DEL SENTIDO ESTADÍSTICO

La comprensión de la dispersión es parte del sentido estadístico. Por ello, para comenzar nuestro trabajo, revisamos los componentes del sentido estadístico, descrito por Batanero (2013) como la unión de la cultura y el razonamiento estadístico, incidiendo en particular en la idea de dispersión.

En los últimos años se ha venido forjando el término cultura estadística para reconocer el papel del conocimiento estadístico en la formación elemental que requieren todos los ciudadanos para desenvolverse en su día a día (Murray y Gal, 2002). Pese a que en la literatura sobre este tema cohabitan distintos enfoques vinculados a la cultura estadística (Gal, 2002), existe un consenso generalizado que entiende necesario que una cultura estadística básica requiere de la comprensión y del dominio adecuado de las ideas estadísticas fundamentales. Dichas ideas contribuyen al desarrollo de la estadística como ciencia, están involucradas en la resolución de problemas estadísticos y pueden ser enseñadas con diversos niveles de formalización (siendo, por tanto asequibles en varios niveles educativos). Cada una de estas ideas se diferencia de otros objetos matemáticos próximos en características específicas que deben ser resaltadas en la enseñanza.

Un segundo componente del sentido estadístico, sería la habilidad de cálculo de estadísticos elementales, que no supone hoy día problema alguno, pues es facilitado por la tecnología, que también contribuye a la exploración de las ideas estadísticas fundamentales, por medio de la simulación. La mayor dificultad de aprendizaje es el tercer componente (precisamente el más específico), que consiste en el razonamiento a partir de los datos, para realizar inferencias de muestras a poblaciones y/ o tomar decisiones acertadas en situaciones inciertas.

Seguidamente ahondamos estos aspectos para el caso de la dispersión.

EL CASO DE LA DISPERSIÓN Y SUS MEDIDAS

Los distintos modelos que sientan las bases de la cultura estadística en la literatura, defienden necesidad de un conocimiento de las ideas estadísticas fundamentales. Para identificar cuáles de ellas organizan la noción de dispersión adaptamos la propuesta de Burrill y Biehler (2011), fundamentada en el estudio detallado de diversos marcos teóricos educativos y los currículos de estadística de distintos países. En relación a la dispersión distinguimos las siguientes ideas fundamentales: datos, variabilidad aleatoria, distribución, asociación y correlación, muestreo e inferencia. Asimismo, destacamos la importancia de las mismas en el desarrollo del pensamiento y el razonamiento estadístico.

Datos.

Moore (1991) definió la estadística como la ciencia de los datos y señaló que el objeto de la estadística es el razonamiento a partir de datos empíricos, subrayando la importancia del contexto de donde se han tomado los datos. Mientras que en otras ramas de la matemática con frecuencia los datos y contextos son imaginarios y el interés se centra en los conceptos, el contexto de los datos es esencial en estadística.

Además, los estudiantes no están acostumbrados a trabajar con datos de situaciones reales que frecuentemente requieren de interpretaciones y razonamientos de alto nivel. La aleatoriedad de las situaciones hace que los resultados no sean únicos, presentándose mayor variabilidad en los datos que otras áreas de las matemáticas (Sánchez y Batanero, 2012). Asumir la existencia de variación en los datos contribuye a asimilar su naturaleza y por ende, la de los fenómenos de los que proceden.

Variación

MacGillivray (2004) entiende la estadística como la ciencia de la variación, pues este concepto justifica su estudio, la modela y establece mecanismos para su cálculo; además de encargarse de su análisis y representación. Aunque en otras ramas de matemáticas se usan variables, se supone que los datos se ajustan perfectamente a un modelo y no suele haber estudio de la bondad de ajuste o de los residuos del modelo.

El estudio de la variabilidad es característico de la Estadística, que se interesa tanto por el modelo que describe a unos datos como por los residuos o diferencias entre los datos y el modelo (Engel y Sedlmeier, 2011). Por ello, la Estadística permite buscar explicaciones y causas de la variación para poder hacer predicciones. En consecuencia dos fines importantes de la enseñanza de la Estadística son que los estudiantes perciban la variabilidad y que manejen modelos que permitan controlarla y predecirla (Reading y Shaughnessy, 2004). Una de las formas de abordar el estudio de la variación de los datos es a través del cómputo de la dispersión de los mismos respecto de un valor central representativo.

Distribución

Una característica esencial del análisis estadístico es que trata de describir y predecir propiedades de los agregados de datos y no de cada dato aislado (Bakker y Gravemeijer (2004). La dispersión juega un papel especial en esta labor. Por ello la enseñanza de la Estadística ha de desarrollar la capacidad de leer, analizar, criticar y hacer inferencias a partir de distribuciones de datos (Shaughnessy, 2007).

El razonamiento distribucional implica también conectar los datos (distribución de datos), la población de donde se tomaron (distribución de probabilidad) y las posibles muestras de la misma (distribución muestral). Garfield y Ben-Zvi (2008) señalaron que la comprensión de las ideas de dispersión o variabilidad resulta clave para la comprensión del concepto de distribución, y es esencial para hacer inferencias estadísticas. A este respecto, Wild (2006) defiende que tras la noción de distribución subyacen todas las formas de razonamiento estadísticos acerca de la variación.

Asociación y correlación

Mientras que en una dependencia funcional a cada valor de una variable X (independiente) corresponde un solo valor de otra variable Y (dependiente), en el estudio de la asociación a cada valor de X corresponde una distribución de valores de Y, por lo que este concepto amplía el de dependencia funcional. Este hecho hace que tenga pleno sentido hacer extensivo a sendas variables el estudio de la dispersión.

En el estudio conjunto de dos variables se pueden diferenciar varios componentes de la dispersión: por un lado se puede calcular la dispersión conjunta, y la dispersión de cada una de las variables. Por otro se puede estudiar la dispersión de los datos respecto al modelo de regresión y la dispersión residual. Las medidas de dispersión (varianza respecto a cada variable y covarianza) intervienen además en el cálculo de los coeficientes de correlación y regresión.

Muestreo e inferencia

Relacionar las características de las muestras con las de la población que representan es el principal fin de la estadística y nos sirve para decidir qué datos recoger y para obtener conclusiones con algún grado de probabilidad (de la Fuente y Díaz, 2004). Varios autores sugieren que es posible una comprensión informal de la inferencia, desde la secundaria, que comenzaría por la discriminación entre la posición central y variabilidad en las distribuciones de datos y el uso de estas dos características para decidir cuándo dos distribuciones son iguales o diferentes (Rubin, Hammerman y Konold, 2006).

Además de la comprensión de las ideas anteriores Wild y Pfannkuch (1999) defienden la necesidad de desarrollar el razonamiento estadístico, necesario a la hora de proceder a resolución problemas de esta índole; como los vinculados a la noción de dispersión. En este sentido, subrayan la importancia de la percepción de la variación, como uno de los aspectos básicos del razonamiento estadístico.

DESARROLLO DEL SENTIDO DE LA DISPERSIÓN EN EL CURRÍCULO ESPAÑOL

El segundo punto a desarrollar es el análisis de la presencia de la idea de dispersión en el currículo español (MEC, 2006; 2007a; 2007b; MECD, 2014, 2015) y la forma en que este concepto se va ampliando a lo largo de toda la escolarización, con niveles progresivos de amplitud y complejidad.

La dispersión en la Educación Primaria

En el Decreto de Enseñanzas Mínimas de la Educación Primaria (MEC, 2006) se plantea, como uno objetivo fundamental el empleo de técnicas elementales de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones de su entorno; representarla de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma.

En este documento se incluye como criterio de evaluación valorar la capacidad de los niños para interpretar gráficos sencillos de situaciones familiares y verificar su habilidad para reconocer gráficamente informaciones cuantificables. Puesto que en toda representación de una variable estadística ha de aparecer cierta variabilidad, interpretamos que, aunque sólo implícitamente, se sugieren trabajar la idea de variabilidad y rango. Contenidos similares se recogen en MECD (2015).

La dispersión en la Educación Secundaria

En la etapa correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O.) se amplían estas ideas y se reformula el problema de medir la dispersión respecto a una medida de posición central.

En el Decreto de Enseñanzas Mínimas de la Educación Secundaria (MEC, 2007a), se arguye la importancia que supone en la toma de decisiones, la comprensión, modificación y producción mensajes en los que la información estadística aparece presentada, en tablas, gráficos y fórmulas, que demandan conocimientos matemáticos para su correcta interpretación. También se destaca la presencia de información estadística en los medios de comunicación y el uso que de ella se hace en las diferentes materias del currículo. Todo ello convierte a la estadística en un saber a destacar en la formación actual de los estudiantes. En este sentido se pide al profesor que acostumbre al alumno a analizar de forma crítica la información, las interpretaciones sesgadas y los abusos que, en ocasiones, caracterizan a la información estadística.

Estos problemas motivan los conceptos de desviación respecto a la media, varianza y desviación típica y recorrido intercuartílico, así como la terminología y simbolización asociada. Cuando se desea que la medida de dispersión sea relativa (a la medida de valor central) se introduce el coeficiente de variación.

Progresivamente, a partir de tercer curso, se trabaja con variables agrupadas, lo que amplía el repertorio de algoritmos y procedimientos; las directrices curriculares recomiendan el uso de la calculadora gráfica o la hoja de cálculo para facilitar estos algoritmos. Para dotar de mayor sentido la idea de dispersión se emplean los gráficos de frecuencias agrupadas, gráficos múltiples o de caja. También se recomienda el uso de las medidas de posición central y dispersión para la comparación de distribuciones.

Respecto a la probabilidad, donde aparecerá la idea de dispersión de una variable aleatoria, se sugiere una aproximación frecuencial. El estudio de fenómenos aleatorios sencillos mediante experimentación y el tratamiento, por medio de tablas y gráficas, de datos estadísticos ayuda a este enfoque y acá de nuevo aparece la dispersión en las variables estadísticas asociadas a estos experimentos.

La dispersión en Bachillerato

La enseñanza del Bachillerato comprende los cursos 1º y 2º. En relación a las Matemáticas, el Decreto 1467/2007 de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura de estos estudios y se fijan sus enseñanzas mínimas (MEC, 2007), nos obliga a distinguir entre dos modalidades: 1) Ciencia y Tecnología y 2) Humanidades y Ciencias Sociales.En el Bachillerato, por un lado se introduce la correlación y regresión, donde la dispersión puede interpretarse desde diferentes puntos de vista: En primer lugar, se introducen la correlación y regresión, relacionadas directamente con la dispersión; cuanto mayor sea la dispersión de los puntos respecto a un modelo matemático de ajuste a los datos (línea o recta de regresión), menor será la intensidad de la relación (o de la correlación) entre las variables.

La covarianza y el coeficiente de correlación lineal serán nuevos estadísticos que permiten valorar la intensidad y signo de la relación, pero también son nuevos indicadores de la dispersión conjunta de los datos. Es precisamente el cuadrado del coeficiente de correlación (coeficiente de determinación) el que nos da la proporción de varianza de la variable dependiente Y explicada por el modelo línea de regresión (recta de regresión). Cuanto mayor sea este coeficiente más proporción de la varianza de Y es explicada por el modelo de regresión o, lo que es lo mismo, es mejor la bondad de ajuste. De este modo, se relaciona también la idea de dispersión con la bondad de ajuste de un modelo.

La introducción de algunas variables aleatorias sencillas y sus distribuciones (binomial, normal), en el 1º curso de Bachillerato para los alumnos de Ciencias Sociales y del 2º curso para los alumnos de Ciencias permite considerar un nuevo punto de vista para las medidas de posición central y dispersión: su carácter de parámetro de las distribuciones de probabilidad. La situación-problemática principal que motiva el estudio de estos conceptos será la de determinar modelos generales de distribuciones (familias) que permiten resolver una gama de situaciones probabilísticas y encontrar las expresiones de sus distribuciones de probabilidad. Así, en el caso de la distribución normal un cambio en su desviación típica no sólo produce una mayor menor dispersión de la función de densidad, sino que reduce el apuntamiento de la misma.

En Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II, asignatura opcional en el segundo curso del Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales, se introducen contenidos propios de la inferencia estadística. En este contexto, un problema de interés radica en la estimación de los parámetros de las distribuciones de probabilidad en una población (por ejemplo, la media de una distribución normal) a partir de los datos de una muestra aleatoria tomada de dicha población. Un segundo problema consiste en contrastar hipótesis sobre los valores de dichos parámetros.

Estos problemas llevan a la introducción de muchos conceptos nuevos, como distribución muestral, error de estimación, intervalo de confianza, relacionados con la idea de dispersión. Son características propiedades como la relación entre tamaño de muestra, precisión y confianza o la relación entre la desviación típica de la variable en la población y la de la distribución de la media muestral.

CONCLUSIONES

A pesar de la brevedad de nuestro análisis, es posible observar cómo, cada etapa educativa da un papel relevante al concepto de dispersión, que se va enriqueciendo progresivamente, desde Educación Primaria a Bachillerato. En este último, se introduce la estadística bidimensional, variables aleatorias e inferencia que implican nueva terminología, conceptos y procedimientos relacionados con la dispersión.Propuestas muy similares aparecen en los currículos de otros países; por ejemplo en CCSI (2010).

Es por ello necesario que el profesor ayude al alumno a conectar el uso de la dispersión en los diferentes apartados de la estadística (análisis exploratorio de datos, probabilidad e inferencia) para que llegue a alcanzar un sentido adecuado de la dispersión que le ayude a afrontar situaciones de incertidumbre. Como indicó Moore (1990), la estadística es la ciencia de los datos y estos están caracterizados por la variabilidad. Por tanto la habilidad para percibir, medir y explicar la dispersión

de los datos y de los modelos que utilizamos para describirlos es la clave del razonamiento estadístico.

Esperamos finalmente que este estudio pretendemos orientar el trabajo del profesor en el aula y contribuir a que potencien el sentido de la dispersión en sus estudiantes.

Agradecimientos: Proyecto EDU2013-41141-P (MEC) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: Componentes y desarrollo. En J. M. Contreras (Ed.), *Actas de las I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria,* (pp. 55-61). Universidad de Granada, CCSSI (2010).

Common Core State Standards for mathematics. Washington, DC: National Governors Association for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.

Bakker, A. y Gravemeijer, K. P. E. (2004). Learning to reason about distribution. En J. Garfield y D. Ben Zvi (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp 147-168). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Burrill, G., y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education - A joint ICMI/IASE study (pp. 57-69). Dordrecht: Springer.

De la Fuente, I., y Díaz. C. (2004). controversias en el uso de la inferencia en investigación experimental. *Metodología de las Ciencias del Comportamiento*, número especial, 161-167.

Engel, J. y Sedlmeier (2011). Correlation and regression in the training of teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.). *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE study* (pp. 247-258). New York: Springer.

Estepa, A. y del Pino, J. (2013). Elementos de interés en la investigación didáctica y enseñanza de la dispersión estadística. *Números 83,* 43-63.

Gal, I (2002). Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsibilities. International Statistical Review, 70(1), 1-25.

Garfield, J., y Ben-Zvi, D. (2008). Developing students' statistical reasoning. Connecting research and teaching practices. New York: Springer.

MacGillivray, H. (2004). Coherent and purposeful development in statistics across the education spectrum. En G. Burrill, y M. Camden (Eds.), Curricular Development in Statistics Education: International Association for Statistical Education 2004. Roundtable. (pp. 230-243). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria*. Madrid: Autor.

MEC (2007a). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.* Madrid: Autor.

MEC (2007b). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*. Madrid: Autor.

MECD (2015). Real Decreto 1105/2014 de currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Madrid: Autor.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD (2014). Real Decreto 126/2014 de currículo básico de la Educación Primaria. Madrid: Autor.

Moore, D. S. (1990). Uncertainty. En L. A. Steen (Ed.). On the shoulders of giants. New approaches to numeracy. Washinton, D. C.: National Academy Press.

Murray, S. y Gal, I. (2002). Preparing for diversity in statistics literacy: Institutional and educational implications. En B. Phillips (Ed.), Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics.Ciudad del Cabo: IASE. CD ROM.

Reading, C. y Shaughnessy, J. M. (2004). Reasoning about variation. En J. Garfield y D. Ben-Zvi (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 201-226). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Rubin, A., Hammerman, J. K. y Konold, C. (2006). Exploring informal inference with interactive visualization software. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.* Cape Town, South Africa: International Association for Statistics Education. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Sánchez, E. y Batanero, C. (2011). Manejo de la información. En E. Sánchez (Coord.), Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, Casos y perspectivas (pp. 64-92). México, D. F.: Secretaría de Educación Pública.

Sánchez, E., da Silva, C. B. y Coutinho, C. (2011).Teachers' understanding of variation. En C. Catanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education* (pp. 211-221). New York: Springer.

Wild, C. (2006). The concept of distribution. *Statistics Education Research Journal, 5*(2), 10–26.

Wild, C. J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. International Statistical Review, 67(3), pp. 223-263.

HISTORIA Y CONCEPTOS MATEMÁTICOS EN LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS PARA LA EDUCACIÓN SECUNDARIA EN COSTA RICA (1949-2012)

Leonel Castro, Patricia Cortés, Roberto Guzmán, Noemí Lezcano, Grettel Mora, Natalia Rosales y Miguel Picado

Universidad de Costa Rica (Costa Rica)

leonelm17@gmail.com, patocc.1990@gmail.com, robertoguzmang89@hotmail.com, noemilezcano@gmail.com, grettel19@hotmail.com, nataliarosafer@gmail.com, miguepicado@hotmail.com

Palabras clave: Enseñanza secundaria, investigación histórica, historia, libro de texto

Key words: Secondary education, historical research, history, textbooks

RESUMEN: Se muestran los resultados de un estudio sobre el uso de la historia de la matemática como organizador curricular y eje temático en libros de texto de matemática en educación secundaria en Costa Rica durante 1949-2012. Se ha implementado el Análisis Didáctico como técnica de análisis. Se evidencia las áreas y conceptos matemáticos abordados con mayor frecuencia desde un enfoque histórico en los libros de texto, los sistemas de representación y los contextos utilizados para mostrar estos conceptos matemáticos en los textos. Se establecieron cuatro etapas históricas definidas a partir de acontecimientos políticos, económicos, sociales y educativos que marcan el desarrollo del sistema educativo costarricense.

ABSTRACT: The results of a study on the use of the history of mathematics as organizing curriculum and central theme in textbooks of mathematics in secondary education in Costa Rica during 1949-2012. The training analysis as analysis technique has been implemented. Areas and mathematical concepts addressed most frequently from a historical perspective in textbooks, the systems of representation and contexts used to show these mathematical concepts in texts is evident. Four historical stages defined from political, economic, social and educational events that mark the development of the Costa Rican education system were established.

INTRODUCCIÓN

Esta contribución presenta los resultados de un estudio sobre el uso didáctico de la historia de la matemática y las diferentes formas de representación de los conceptos matemáticos abordados desde una perspectiva histórica en los libros de texto de matemática en educación secundaria en Costa Rica (de los 13 a los 17 años). El período de estudio se extiende desde la fundación de la Segunda República en 1949, hasta la Reforma Curricular implantada por el Ministerio de Educación Pública (MEP) en 2012. Como objetivos específicos se plantean los siguientes: identificar los conceptos con vínculos históricos de la matemática presentes en los textos y determinar los sistemas de representación y contextos utilizados para mostrar conceptos matemáticos asociados a aspectos históricos en estos documentos.

ANTECEDENTES HISTÓRICOS

En Costa Rica, la educación secundaria ha vivido diferentes modificaciones y mejoras desde su instauración. En particular, en cuanto a la educación matemática se han dado una serie de cambios a nivel curricular y general, influenciados por diferentes políticas nacionales e internacionales. Por ejemplo, la incorporación de nuevos elementos a los programas de estudio, los cuales antes de 1980 generalmente correspondían a una serie de lineamientos y descripción de los contenidos que se debían incluir en el desarrollo de las lecciones.

Posterior a 1980, en los programas de estudio se replantearon diferentes aspectos como la inclusión de diferentes tópicos a la maya curricular de cada asignatura, además de lineamientos metodológicos que debían contemplarse en cada nivel académico.

Por otra parte, la incorporación de la historia de la matemática dentro de los fundamentos de los programas ha sido parte de estos cambios, pues, aunque en programas anteriores a 2012 se daban indicios sobre la utilización de la historia de la matemática dentro de la enseñanza de la matemática costarricense; es hasta la Reforma Curricular del año 2012 que se comienzan a instaurar lineamientos más claros sobre cómo incorporar la historia de la matemática en el trabajo de aula.

El estudio de los acontecimientos desarrollados durante el período de 1949 a 2012 en la educación costarricense y en particular en la educación matemática, permitió el establecimiento de cuatro etapas históricas que facilitaron una mejor organización de las fuentes a estudiar. Estas etapas son: Etapa I: Etapa de promulgación constitucional (1949 – 1963), Etapa II: Etapa de implementación de las matemáticas modernas (1964 – 1979), Etapa III: Etapa de conceptualización curricular de los procesos de enseñanza y aprendizaje (1980 – 1994) y Etapa IV: Etapa de implementación y reajustes a la conceptualización curricular de los procesos de enseñanza y aprendizaje (1995 – 2012) (Castro, Cortés, Guzmán, Lezcano, Mora y Rosales, 2015).

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Teóricamente, se destacan las ideas de Babini y Pastor (1997), Bell (1992), Boyer (2003) y Fauvel y Gray (1991). Sus propuestas reconocen en la historia un medio para comprender los orígenes y el desarrollo del conocimiento matemático en la sociedad. Permite, además, seleccionar, analizar e interpretar datos y sucesos relacionados con un concepto matemático específico. Integrar la

historia en la práctica didáctica, mediante la reproducción de ambientes históricos o la vinculación de conceptos con su origen, es una estrategia metodológica que permite al estudiante comprender que los errores, dudas y las controversias surgidas durante la apropiación de conceptos matemáticos, son parte integral del desarrollo y contextualización histórica de esta ciencia a lo largo de la historia de la humanidad (Farmaki, Klaudatos y Paschos, 2004). La incorporación del recurso histórico en los procesos de enseñanza-aprendizaje, se manifiesta en los libros de texto y demás recursos didácticos.

En cuanto al libro de texto, se entiende éste como aquella obra literaria con información organizada de una disciplina y con un fin didáctico, que además busca responder a las necesidades educativas de la sociedad y que responde al currículum del sistema educativo (Picado, 2012).

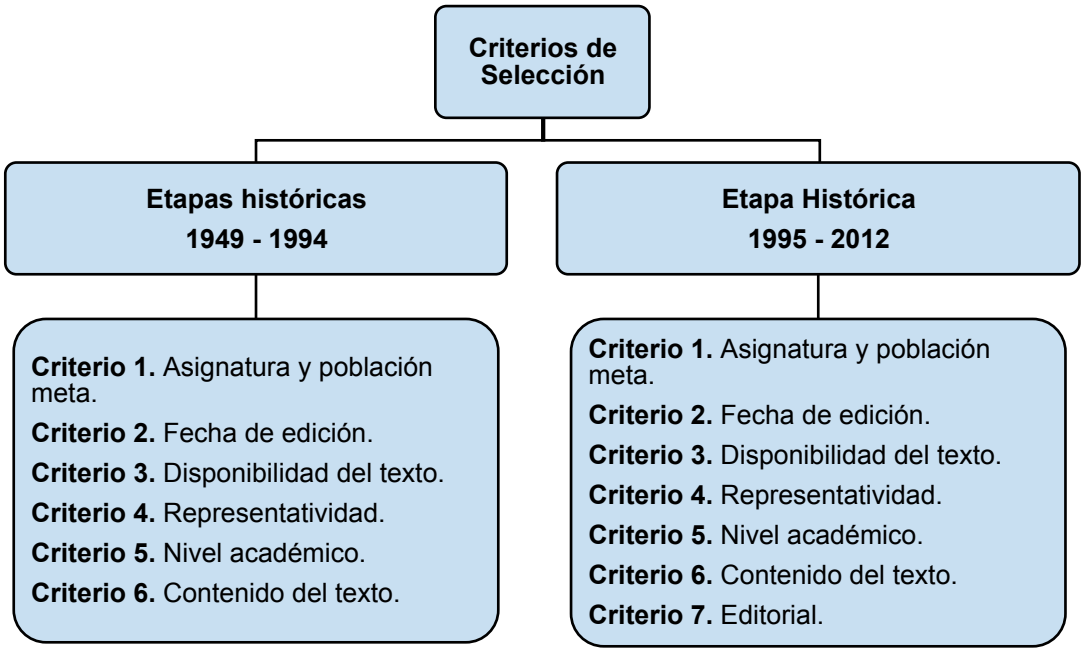
En Costa Rica, la historia de la matemática "…no ha formado parte relevante de los programas escolares, ni de las tradiciones pedagógicas" (Ministerio de Educación Pública, 2012, p. 39). La reforma curricular de 2012, presenta la historia como un eje disciplinar y reconoce su uso como recurso metodológico para los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a partir de las oportunidades didácticas especiales que proporciona. Esto ha promovido estudiar el tratamiento dado a la historia de la matemática en libros de texto en educación secundaria en Costa Rica, en un periodo posterior a la reforma que permita identificar y establecer características de su uso.

METODOLOGÍA

El estudio se enmarca dentro de las investigaciones cualitativas descriptivas en Educación Matemática, particularmente en las investigaciones históricas. Se diseñó en cinco fases Picado (2012). Primero, el planteamiento de la investigación. Segundo, la selección de las fuentes de información. En esta fase, se consideró la búsqueda, localización y revisión de programas y planes de estudio y libros de texto de matemática para la educación secundaria en el período descrito. También, se definieron criterios para seleccionar los libros de texto sometidos a análisis; entre estos: año de edición, representatividad en el periodo, contenido y nivel académico. Tercero, se analizaron las fuentes seleccionadas. Se ha considerado el Análisis Didáctico como técnica para estudiar los libros de texto seleccionados mediante la adaptación y definición de categorías y sus respectivas unidades de análisis (Picado, 2012; Picado, Rico y Gómez, 2013). Algunas categorías de análisis utilizadas son conceptos, representaciones, contextos, tareas de aprendizaje y materiales para la enseñanza. El análisis consistió en enfocar los vínculos entre aquellos aspectos históricos y los conceptos y procedimientos matemáticos mostrados en los libros de texto. En la cuarta fase se describieron los datos obtenidos y se establecieron los resultados del estudio. Finalmente, como quinta fase, se divulgan los resultados.

Se destaca que las principales fuentes de estudio correspondieron a los libros de texto recolectados en diferentes centros de documentación, como bibliotecas de centros de estudios o bibliotecas personales de docentes, además, en bibliotecas públicas ubicadas en diferentes zonas de Costa Rica. En el proceso de selección de las fuentes, se realizó en dos etapas, primeramente, se tuvo una lista de más de 100 fuentes posibles a analizar, las cuales se sometieron a la revisión y filtros establecidos por los criterios establecidos y así llegar a la lista final de 20 libro de texto. En la figura 1, se describen estos criterios de selección.

Figura 1. Esquema sobre criterios de selección de para los textos



Fuente: Castro, Cortés, Guzmán, Lezcano. Mora y Rosales (2015, p. 59)

En la tabla 1, se describen las diferentes fuentes analizadas, de las cuales se citan el autor y título de la obra, asimismo, se organiza la información de acuerdo a la etapa histórica a la que pertenecen.

Tabla 1. Libros de texto por etapas históricas.

Etapa Histórica	Libro	Autor
1949 – 1963	Lecciones de Matemáticas para I año	Alfaro Sagot, Bernardo.
	Lecciones de Matemáticas para II año	Fernández Alfaro, Mario.
	Matemática para la escuela secundaria	Standford Junior University
	Lecciones de Matemáticas para IV año	Fernández Alfaro, Mario.
	Lecciones de Matemáticas para V año	Fernández Alfaro, Mario.
1964 – 1979	Curso Moderno de Matemáticas para la Enseñanza Media Libro Primero	Alfaro Sagot, Bernardo.
	Curso Moderno de Matemáticas para la Enseñanza Media Libro Segundo primera parte	Alfaro Sagot, Bernardo.
	Curso Moderno de Matemáticas para la Enseñanza Media Libro Tercero Capítulo 2	Alfaro Sagot, Bernardo.

Etapa Histórica	Libro	Autor
	Matemática décimo año	Chaverri, G., Calvo, M. y Ramírez, F.
	Matemática 5 Geometría	Montero, B y Calvo, M.
1980 – 1994	Matemática Activa 7°	Bolaños, G; Ríos, M. y Magallón, F.
	Matemática elemental: octavo año	Barahona, M.; Rodríguez, P.
	Matemática elemental 9°	Barahona, M.; Rodríguez, P.
	Matemática 10° año	Castellón, M., Camacho, O. Aguilar, J.
	Matemática Elemental 11° año	Barahona, M.
1995 – 2012	Matemática 7° enseñanza-aprendizaje	Meneses Rodríguez, Roxana.
	Matemáticas 8°	Arias Chavarría, Alejandro.
	Matemáticas 9°	Tsijli Angelaki, Teodora.
	Manual de ejercicios matemáticos 10° año	Aguilar Camacho, Alonso.
	Matemáticas 11°	Porras, V y Gamboa, G.

Fuente: Castro, Cortés, Guzmán, Lezcano. Mora y Rosales (2015, p. 60)

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Se destaca que usualmente los autores de los libros de texto analizados, al incluir aspectos de la historia de la matemática, los incluyen como parte de las introducciones a los capítulos o temas que deben ser estudiados de acuerdo con las normativas curriculares vigentes. También, una parte importante de conceptos vinculados con la historia de la matemática pertenecen a la Aritmética y la Geometría. Entre estos, número, número decimal, número negativo, número primo, multiplicación, triángulo rectángulo, radio, diámetro, área y círculo. Mientras que en el caso de la Estadística y la Trigonometría son de las áreas en las que prácticamente la presencia de conceptos vinculados con la historia de la matemática es nula.

En la tabla 2, se muestran los diferentes conceptos matemáticos que se asociaron con historia de la matemática dentro de las fuentes analizadas, estos conceptos se organizan de acuerdo a la etapa histórica y nivel académico a la que pertenecen.

Tabla 2. Conceptos Matemáticos con vínculo histórico.

Etapa I	Etapa II	Etapa III	Etapa IV
PRIMER AÑO			
Números, cifra, números primos, factores, divisores, multiplicación, división, medidas, unidad de medida, longitud, volumen, superficie, capacidad	Cantidad, número, representación numérica, número primo, número racional, razones y proporciones, operaciones básicas. Incógnita, variable, constante	Número negativo, número natural, suma, número perfecto, número racional, decimal, número irracional, medida, distancia, número primo, número, divisores, múltiplos y factor, número cuadrado, potencia, "mayor que", "menor que", cantidad geométrica, punto, rectángulo, unidad, lados, longitud	Sistema de numeración, símbolo matemático, número, número natural, número entero, número primo, número compuesto, número rectangular, número cuadrado perfecto, número infinito, números pares e impares, fracción positiva, conjunto, conjunto infinito, medida, suma, resta, multiplicación, división, potencia, cuadrado de un número exponente (negativos y fraccionarios), base, radical, raíz cuadrada, raíz cúbica, densidad, segmento, ángulo, recta, rectas paralelas, círculo, circunferencia, longitud, triángulo, cuadrado, esfera ángulo, cuadrado, volumen, arista, cubo, dato
SEGUNDO AÑO			
Punto, recta, rectas paralelas	Diagrama de Euler, número euleriano, Constante Euleriana, Ecuación de Euler, línea de Euler y Variables Euleriana, número, números racionales, números infinito, número pi, número algebraicos, fracciones periódicas, conjunto, conjunto no numerable, cálculo, infinito, perímetro, área,	Área, círculo, radio, diámetro, fracción, lado, triángulo, cuadrado, triángulo rectángulo, cateto, hipotenusa, rectángulo, diámetro, altura, volumen, cilindro circular recto, cubo, círculo, longitud, perímetro, trapecio, circunferencia, ángulo, semejanza, proporcionalidad, polígonos, sólidos, fracción, decimal, división, multiplicación, sistema de numeración, raíz cuadrada y raíz cúbica, número, número natural, número	Semejanza, pirámide, altura, apotema, triángulo isósceles, triángulo rectángulo, triángulo, base, ecuación, razones iguales, proporción, lugar geométrico, ecuación de primero y segundo grado, sistema de ecuaciones, número, número positivo y negativo. Constante, variable, incógnita

	volumen, esfera, sistema geométrico	negativo, número racional, contar, medida, suma, resta, distancia, potencia, expresión algebraica, variable, coeficiente numérico, factor literal, porcentaje	
TERCER AÑO			
Teorema de Pitágoras, cateto, hipotenusa, medida, aproximación, número irracional, radical, arista, pulgada, potencia, triángulo rectángulo, ángulo, ángulo recto	Triángulo rectángulo, ángulo, distancia, medida, segmento, perpendicularidad, rectas paralelas, segmentos congruentes, secante, semejanza de triángulos	Número, operaciones básicas, radical, número racional, irracional y número real. Incógnita, Ecuación, Triángulo rectángulo, ángulo, ángulo recto, ángulo agudo, cateto, hipotenusa, cuadrado y potencia, triángulo pitagórico, secciones cónicas, gráfico de funciones, razones trigonométricas, coordenadas rectangulares. Variable dependiente e independiente	Altura, hipotenusa, triángulo rectángulo, triángulo isósceles, cateto, pirámide, apotema, base, triángulo, triángulos semejantes, distancia, diámetro, arco, área, suma, ángulos opuestos por el vértice, vértice, ángulo, ángulo inscrito, semicircunferencia, ángulo recto, algoritmo, multiplicación, raíz cuadrada, segmento, círculo, radio, punto, resta, división, producto, perímetro, número (primo, perfecto, compuesto, impar, irracional, racional, natural), número π, cuadrado de un número, sector parabólico, parábola, coordenada cartesiana, sistema de dos ecuaciones, ecuación, cifra, fracción, rectas paralelas, recta secante, ángulo entre rectas paralelas, ángulo agudo, Terna pitagórica
CUARTO AÑO			
Infinito, número inconmensurable, número decimal, logaritmo, base de numeración	Logaritmo, logaritmo neperiano, número, Número irracional, número e, función logarítmica y exponencial, logaritmo de base 10, base, potencia	Relación, función (como correspondencia entre dos conjuntos), dominio, codominio, ámbito, imagen, preimagen, gráfico, conjuntos, par ordenado, punto de intersección, función lineal, pendiente	Ecuaciones, logaritmos, función exponencial, imagen, preimagen, dominio, ámbito, punto de intersección, gráfico, gráfica

QUINTO AÑO			
Pirámide, base, cuadrado, arista lateral, volumen, triángulo rectángulo, triángulo isósceles y altura	Triángulo rectángulo, cateto, ángulo recto, ángulo, hipotenusa, cuadrado, potencia, número entero, número entero positivo, número natural, número irracional, número π y cifra decimal	Círculo, circunferencia, área y longitud de la circunferencia, radio, diámetro, número, número irracional, número π, diámetro, polígono regular inscrito y circunscrito, ángulo, grado, medida, división, ángulos internos y externos de un polígono regular, razón, lados de un polígono, función, función trigonométrica	Distancia, proporción, medida, sistema numérico sexagesimal, número complejo, ángulo, grado, triángulo, ángulo central, circunferencia, radio, volumen, esfera, cilindro circular recto, triángulo plano y esférico, función seno, función trigonométrica, tangente, secante

Fuente: Castro, Cortés, Guzmán, Lezcano. Mora y Rosales (2015, p. 197)

Por otra parte, para la presentación de conceptos matemáticos abordados desde la Historia de la Matemática se recurre a la representación verbal, la cual, en los libros de texto analizados, se evidencia el medio más frecuente para presentar conceptos asociados a datos históricos, identificados fundamentalmente en las introducciones a capítulos o en el abordaje de determinados temas. Estos conceptos, además de estar inmersos en contextos matemáticos, se muestran enlazados a otros contextos como el científico y el comercial. A pesar que la normativa curricular propone la utilización de la historia desde 1964, su uso se comenzó a notar desde los libros editados en 1949 y a partir de ahí se presenta un auge progresivo según la etapa histórica. De la misma manera, los libros de texto de educación matemática para la Educación General Básica (EGB), es decir, los libros para primer, segundo y tercer año de la educación secundaria costarricense, resultan los documentos que incorporan mayormente el uso del recurso histórico.

El estudio ha permitido definir cuatro etapas históricas en la educación costarricense dentro del período considerado. Esta división temporal ha considerado factores sociales, políticos, económicos y educativos, así como la aplicación del análisis didáctico como técnica para el estudio de libros de texto históricos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aguilar, A. (2008). *Manual de Ejercicios Matemáticos 10° Año*. (1ª ed). San José: Editorial Káñir.

Alfaro, B. (1965). *Curso Moderno de Matemáticas para la Enseñanza Media. Segundo Libro. Primera Parte.* (1ª ed). San José: Editorial BAS.

Alfaro, B. (1966). *Curso Moderno de Matemáticas para la Enseñanza Media. Libro Tercero*. San José, Costa Rica: Editorial BAS.

Alfaro, B. (1966). *Curso Moderno de Matemáticas para la Enseñanza Media Segundo Libro. Segunda Parte*. (1ª ed). San José: Editorial BAS.

Arias C., A. (2011). *Matemática 8*. (1ª ed). San José: Grupo Nación GN S.A.

Babini, J. y Pastor, J. (1997). *Historia de la Matemática*. Barcelona: Gedisa.

Barahona, M. y Rodríguez, P. (1987). *Matemática Elemental 8° año.* (1ª ed). San José: Alma Máter.

Barahona, M. y Rodríguez, P. (1990). *Matemática Elemental 9° año*. San José: Ediciones Guayacán.

Barahona, M., M. (1989). *Matemática elemental 11° año*. (1ª ed). San José: Ediciones Guayacán.

Bell, E. T. (1992). *Historia de las matemáticas* (R. Ortíz, Trad.). CDMX: Fondo de Cultura Económica.

Bolaños, G. y Ríos M. (1992). *Matemática Activa 7°*. (2 ª ed). San José: Textos Modernos Catleya.

Boyer, C. (2003). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.

Castellón, M.; Camacho, O. y Aguilar, J. (1980). *Matemática 10° Año*. San José: Lehmann Editores.

Castro, L., Cortés, P., Guzmán, R., Lezcano, N., Mora, G. y Rosales, N. (2015). *La Historia de la Matemática en el currículo de matemáticas de Educación Secundaria en Costa Rica (1949-2012).* (Tesis licenciatura). Universidad de Costa Rica, San José.

Chaverri, G., Ramírez, F. y Calvo, M. (1975). *Matemática 10° Año*. San José: Litografía Ambar S.A.

Farmaki, V., Klaudatos, N. y Paschos, T. (2004). Integrating the history of mathematics in educational praxis. En M. J. Høines and A. B. Fuglestad (Eds.), *A Euclidean geometry approach to the solution of motion problems*. PME 28. Vol. 3 (pp. 505-512). Bergen: PME.

Fauvel, J. y Gray, J. (1991). *The history of mathematics: a reader.* Hong Kong: Macmillan Press-The Open University.

Fernández, M. (1956). *Lecciones de Matemática para cuarto año*. San José: BAS.

Fernández, M. (1956). *Lecciones de Matemática para segundo año*. San José: BAS.

Fernández, M. (1959). *Lecciones de Matemática para primer año.* San José: BAS.

Fernández, M. (1960). *Lecciones de Matemática para quinto año*. San José: BAS.

Grupo de estudio de la matemática escolar. (1963). *Matemática para la escuela secundaria.* Standford Junior University.

Meneses, R. (1996). *Matemática 7° año*. (3ª ed). San José: Editorial Norma.

Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programas de Estudio. Matemática*. San José: MEP.

Montero, B; Calvo, M; Jiménez, F; Ramírez, F y Azofeifa, I. (1968). *Matemática 5 Geometría*. San José: [s.n].

Picado, M. (2012). *El sistema métrico decimal en libros de texto de matemática en España durante la segunda mitad del siglo XIX (1849-1892)* (Tesis doctoral), Universidad de Granada, España. Recuperado en http://fqm193.ugr.es/ produccioncientifica/tesis/ver_detalles/7464/

Picado, M.; Gómez, B. y Rico, L. (2013). El análisis didáctico en el estudio del sistema métrico decimal en un libro de texto histórico de matemáticas. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina

(Eds.). *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, Formación de Profesores e innovación curricular* (pp. 403-414). Granada: Comares.

Porras, V y Gamboa, G. (2010). *Matemáticas 11°*. San José: Litografía e Imprenta Universal S.A.

Tsijli, A., T. (1997). *Matemática 9.* (1ª ed). San José: EUCR

COMUNIDAD DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO: UN MARCO METODOLÓGICO

Claudia Leticia Méndez Bello, Claudio Enrique Opazo Arellano, Teresa Guadalupe Parra Fuentes, Rosario Pérez López, Francisco Cordero Osorio.

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (México)

menbell.claudia@gmail.com, opazoferrari_claudio@hotmail.com, parra.tere@gmail.com, rperezl@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx

Palabras clave: comunidad de conocimiento matemático; usos; funcionalidad.

Key words: community mathematical knowledge; uses; functionality.

RESUMEN: Con base en los principios de la Teoría Socioepistemológica postulamos: si hay conocimiento, hay una comunidad que lo construye. Pero ¿qué comunidad? ¿Bajo qué condiciones lo hace? Al intentar responder estas interrogantes nos hemos dado a la tarea de sistematizar algunos elementos de la experiencia empírica. Así, robustecemos marcos de referencia de lo funcional del conocimiento matemático de la gente. Esto, con base en el modelo de comunidad de conocimiento matemático, herramienta metodológica que nos ha permitido entender y explicar usos del conocimiento de diversas comunidades de conocimiento. Éste se basa en los ejes: institucionalización e identidad, y la localidad, intimidad y reciprocidad, en la construcción del conocimiento matemático. Las investigaciones realizadas son con comunidades sociales, Pueblos Originarios y comunidades disciplinares.

ABSTRACT: Based on the principles of Socioepistemological Theory postulate: if there is knowledge, there is a community that builds. But what community? Under what conditions does it? In trying to answer these questions we have taken on the task of systematizing some elements of empirical experience. So, we build on the frameworks of mathematical knowledge functional people. This, based on the mathematical community of knowledge model, methodological tool that has allowed us to understand and explain various uses of knowledge of knowledge communities. This is based on the axes: institutionalization and identity and location, intimacy and reciprocity in the construction of mathematical knowledge. Researches are made with social communities, native peoples and disciplinary communities.

INTRODUCCIÓN

Partimos del principio de que si hay conocimiento, hay una comunidad que la construye (Cordero, en prensa). De ahí que surgen reflexiones que versan respecto del conocimiento matemático: qué conocimiento; quién lo construye; bajo qué circunstancias (Méndez, 2015). Es decir, el conocimiento no es ajeno al humano ni a su constitución cultural, como comunidad disciplinar, social o cultural.

En este sentido, importa conocer qué elementos del individuo, perteneciente a una comunidad, cualquiera que sea ésta, permean la construcción de conocimiento matemático: centro de atención de nuestro estudio. De esta manera, sostenemos la existencia de comunidades de conocimiento matemático (*C*CM): las cuales tienen cabida en función de una situación específica en un momento determinado. Esto no se limita a los colectivos, ya que una única persona conforma una *C*CM, pues ésta puede expresar un uso del conocimiento matemático (CM) propio de esa comunidad.

De esta manera, el fondo de la discusión se centra en explicitar otras epistemologías, cuáles, las que son parte del cotidiano de la gente. Expresados, en al menos, tres escenarios que engloban el actuar de comunidades sociales, culturales y disciplinares: la escuela, el trabajo y la ciudad (Cordero, Gómez, Silva-Crocci & Soto, 2015).

Ahí, encontramos una diversidad de argumentos en función de un quehacer particular, lo que permite lograr poner en discusión una pluralidad epistemológica en contra parte a una hegemonía y homogeneidad del conocimiento matemático (Soto, 2014). Así, abordamos la existencia de otros argumentos, los cuales hoy no están presentes en la escuela, ya que se trivializan a la luz de un conocimiento totalmente utilitario.

De esta manera, robustecemos la idea de *comunidad de conocimiento matemático* (Figura 1), ya que este modelo nos permite explicar los usos del conocimiento matemático (*U*CM) entendiendo aspectos como la reciprocidad, intimidad y localidad de ese conocimiento respecto a la gente que lo construye.

Figura 1. Modelo de comunidad de conocimiento matemático (Cordero, 2013).

De esta manera es que aportamos ejemplos de comunidades de conocimiento donde los *U*CM son diversos en tanto que las comunidades lo son. Cada uno conformado por un marco argumentativo con matices propios de las comunidades estudiadas. Veamos el ejemplo de una comunidad disciplinar (docentes en formación de Chile); comunidades sociales y culturales (Comunidad de Sordos; Comunidad Hñähñu y Comunidad Ñuu Savi).

COMUNIDAD DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE DOCENTES EN FORMACIÓN DE CHILE

La Teoría Socioepistemológica desde una postura revolucionaria, postula como problemática la preocupación por el conocimiento matemático construido socialmente por la gente. Esto quiere decir que reconoce al ser humano como un constructor de conocimiento matemático desde una situación específica con base a ciertos funcionamientos y formas (Cordero, 2001) que son entendidos desde un uso del conocimiento matemático permeado de aspectos socioculturales.

En este sentido se concibe la necesidad de hacer visible la red de usos de conocimiento matemático que son dispuestos desde una reciprocidad, intimidad y localidad de ese conocimiento matemático. Con lo anterior, abrimos un espectro relevante dentro de la Teoría Socioepistemológica, ya que ponemos en el centro de la discusión la creencia en una pluralidad epistemológica; así pasamos de asumir la existencia de un conocimiento matemático estático, hegemónico y homogéneo a postular un uso del conocimiento donde los significados, procedimientos y argumentaciones tienen como principio reconocer quién lo construye.

De esta manera presentamos a modo de ejemplo, el caso de los docentes en formación de Chile. Ahí encontramos un uso del conocimiento matemático situado, propio de una comunidad que construye conocimiento desde una institucionalización del conocimiento matemático: donde la identidad disciplinar posee un rol vital. Ya que nos permite pensar en cómo ésta es la expresión de un uso del conocimiento matemático particular y no universal.

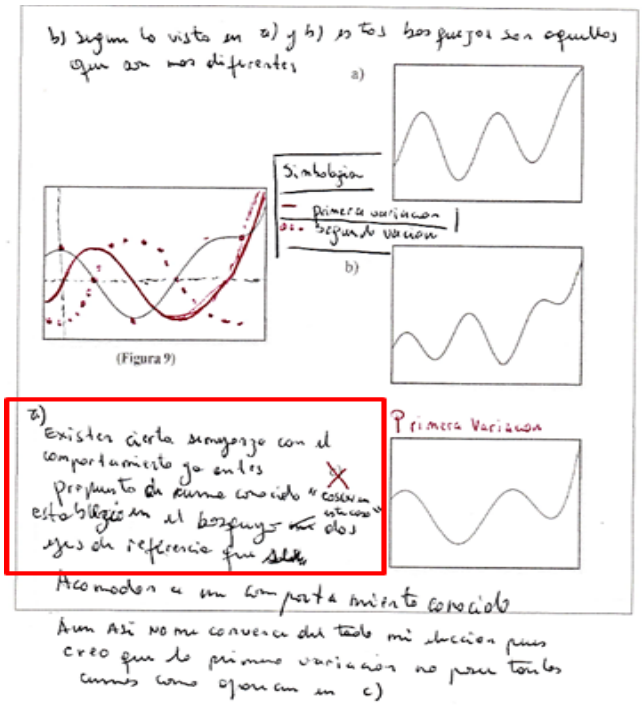
Opazo-Arellano (2014), discute el uso de las gráficas en las derivadas en docentes en formación de Chile. Ahí observa una resignificación del uso de las gráficas cuando se discute la variación y el cambio, ya que ésta transita desde una perspectiva donde la gráfica posee una visión estática de representación de una iteración particular a ser la misma gráfica la cual permite al estudiante discutir cuánto y cómo algo cambia.

De esta manera se propone la existencia de un uso del conocimiento matemático que no es visible, ya que se aprecia el uso de los máximos y mínimos como un elemento de referencia en la práctica del estudio del cambio y la variación en esta comunidad. Lo anterior, nos lleva a analizar el rol de esta práctica, ya que se aprecian estudios locales del cambio desde la modelación de un comportamiento tendencial del cambio en la gráfica. Situación que le permite al estudiante predecir un comportamiento global de la gráfica en función del estudio de pequeñas variaciones.

En este contexto es importante señalar la necesidad de conformación de un sistema de referencia cuando se estudia el cambio y la variación. El cual permita centrar la discusión en aspectos locales y globales, donde se podría considerar por ejemplo: un punto, una recta o incluso un plano cartesiano. Aquí es relevante ampliar la discusión, ya que no es trivial pensar sobre cómo y cuánto algo cambia pero menos lo es, cómo y cuál es el elemento de referencia para analizar la variación.

En la Figura 2, se presenta un caso, dentro del conjunto de actividades que fueron conformadas bajo una epistemología del uso de las gráficas. Además bajo un análisis de las características de las disciplinas que conforman los programas de formación, los perfiles profesionales de los maestros de los docentes en formación. Todo ello articulado con el modelo de comunidad de conocimiento matemático, con objeto de atender aquel entendimiento del uso del conocimiento matemático desde quién lo construye.

Figura 2.



Estudiante 3 (UCSH)

En este caso, el estudiante nos permite hacer distinciones en sus argumentaciones, las cuales se fecundan en ciertos significados y procedimientos que estudiamos con mayor puntualidad en Opazo-Arellano (2014). Destacamos puntualmente, el uso de la gráfica como elemento que permite un razonamiento y análisis de aquello que cambia. Además, cómo la gráfica transita desde una representación a una que permite distinguir variaciones locales de tal forma de conformar un entendimiento sobre los comportamientos tendenciales que son parte de los intervalos de estudios por el estudiante.

Finalmente, el estudiante nos permite reflexionar sobre la condición de marco o sistema de referencia, esto quiere decir, si estudiamos aquello que cambia cuál es el elemento que nos permite decir cuánto y cómo algo cambia. Lo anterior nos permite inferir que al pensar en la identidad disciplinar de una comunidad como la de los docentes en formación, ésta se expresa en un uso del conocimiento matemático que al menos hoy está en desventaja y en olvido.

COMUNIDAD DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE SORDOS

La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de la población sorda se ha centrado en las limitaciones que pueden presentar en este campo; pues se ha mirado desde la discapacidad. En cambio, desde la Teoría Socioepistemológica, postulamos al Sordo como un ciudadano constructor de conocimiento matemático, entendiendo que éste se construye socialmente.

Existen diversas disciplinas de mayor tradición que han tenido incidencia en la vida del Sordo, tal incidencia se ha llevado también al campo educativo aunque éste no sea su objeto de estudio. Este es el caso de la Medicina, Lingüística, Psicología, entre otras, no podemos negar los logros y explicaciones que brindan respecto a esta población, sin embargo, en cuanto la educación del sordo se refiere, se requieren de estudios del conocimiento mismo de la comunidad. Si bien, la Psicología se ha concentrado en los procesos mentales, existe aún una postura sobre las limitaciones cognitivas que puede representar la sordera. En cambio, otra visión más contemporánea de la Psicología reconoce al sordo como miembro de una comunidad cultural (Claros-Kartchner, 2009, citado en Méndez, 2015), permitiendo así, no centrarnos en las posibles limitaciones; sino más bien, generar un estudio que nos otorgue la posibilidad de estudios respecto a su conocimiento matemático concibiéndola como una comunidad lingüística (Oviedo, 2001, citado en Méndez, 2015).

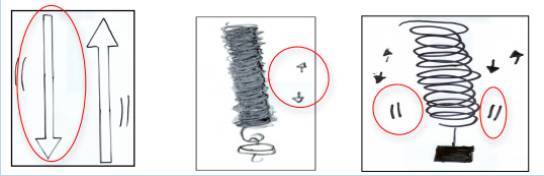
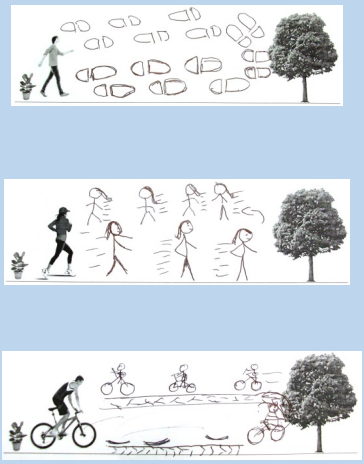
Partir de este hecho, nos obliga a un cambio de paradigma: pasar de pensar que el sordo sólo requiere de mecanismos distintos para aprender a considerarlo como constructor de conocimiento matemático, donde la sordera no es una limitante sino una condición que permea dicha construcción (Méndez, 2015). Así, nuestro estudio consideró la necesidad de crear marcos de referencia que den cuenta de esta diversidad de argumentos de la población sorda, es decir, importa dar cuenta de la funcionalidad del conocimiento matemático, a través de sus usos, del para qué los usan y cómo lo usan. En este sentido, importa no sólo que conocimiento sino quién lo construye y qué circunstancias lo permiten.

De esta manera, asumimos una postura socio-lingüística de los sordos; estos es, concebir la Comunidad Sorda con una cosmovisión, cultura, lengua e identidad propias (Oviedo, 2001; Jullian, 2005; Claros-Kartchner, 2009; citados en Méndez, 2015). Para ello, echaremos mano del *modelo de comunidad de conocimiento matemático* que, metodológicamente, nos permite caracterizar a los jóvenes sordos como parte de una comunidad cultural, sino como una comunidad que construye socialmente conocimiento matemático.

Por ello, mostramos algunos *U*CM generados en una situación de traslado, esta situación se basa en una epistemología del uso de las gráficas en el marco de la Categorías de conocimiento matemático de Modelación-Graficación (Flores, 2005; Cen, 2006; Briceño, 2013; Zaldívar, 2014; Suárez, 2014; citados en Méndez, 2015).

En la siguiente tabla se muestra, en la columna izquierda, producciones habituales en situaciones de modelación del movimiento y, en la columna derecha, producciones de jóvenes sordos en una situación de traslado de una persona.

Tabla 1. Argumentos del movimiento con diversas poblaciones.

La indicación: "cuál es el movimiento del resorte cuando se le pone una pesa".	**La indicación:** "dibuja el movimiento de una persona que se traslada de un lugar a otro, está parada al lado de la maceta y va hacia el árbol, se detiene 5 segundos y regresa".
 Figura 3. La representación del movimiento de un resorte (Zaldívar, 2014, citado en Méndez, 2015).	 Figura 4. Producciones de jóvenes Sordos (Méndez, 2015).

De tal manera, podemos hacer énfasis en lo propio de una comunidad de conocimiento, pues si bien dibujar una huella, pasos o dibujar a la persona que se mueve no parece algo único de los Sordos sí lo son los argumentos que generan en torno a la situación de traslado, pues no es ver el ícono por sí sólo, sino el significado que le otorgan a éste. En Méndez (2015), se explica con mayor detalle al respecto; sin embargo, sí podemos decir que mientras las líneas o flechas son elementos recurrentes en situaciones de modelación del movimiento, con un grupo de jóvenes Sordos éstos no eran suficientes, pues no expresaban la velocidad y rapidez del movimiento de la persona que se trasladaba. Es decir, para expresar la trayectoria de la persona no sólo importaba la posición inicial y final; sino que era necesario expresar la velocidad con la que se mueve, y más aún, quién se mueve. De aquí que el uso de huellas de zapatos y de la llanta de la bicicleta, la misma persona moviéndose por el plano; sumado a las explicaciones del porqué el movimiento se expresa así: la velocidad es distinta porque la persona que se mueve lo es.

Dichas argumentaciones pueden entenderse con base en la situación planteada pero además, sabiendo que quienes las generaron son jóvenes Sordos usuarios de la LSM. De esta manera, entendemos que los Sordos no sólo en su medio de comunicación, corporizar todo objeto, situación, sentimiento y acción, sino que además esto se pone en juego en cuanto a su uso del conocimiento matemático como una comunidad de conocimiento matemático de Sordos.

COMUNIDAD DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO HÑÄHÑU

La investigación que se reporta corresponde a Parra (2015) sobre una construcción social de la cantidad en una población originaria hñähñu del estado de Puebla, México. La cual es conocida por el comercio de papel amate, cuya elaboración aún conserva la técnica ancestral. Ésta inicia con el desprendimiento de la corteza de los árboles que es cocida y posteriormente golpeada para darle diferentes formas, posteriormente es expuesta al sol para secarse, terminando el proceso de producción. Este papel es usado para hacer cuadernos, cuadros, lámparas, entre otros objetos, que serán comercializados.

Al indagar sobre esta práctica, se encontró que su origen está relacionado con otras dos prácticas que se realizaron en la comunidad: la curación y el trueque. Encontrando dos líneas para la investigación: la *usanza del papel amate* de la curación al comercio; y la forma de *transacción* del trueque al comercio.

La usanza del papel amate tiene su origen en prácticas religiosas de la comunidad que se remontan a la época prehispánica, fue prohibido por los conquistadores y sin embargo se conserva hasta nuestros días. Es usado como ofrenda a sus dioses para pedir por el bienestar de una persona o de la comunidad. Se realizan recortes en formas antropomorfas y zoomorfas, que representan a diferentes seres. Al haber mayor apertura en la comunidad, llegaron antropólogos para indagar al respecto y fue así como empezó la venta del papel. Los diseños han evolucionado de tal manera que se encuentran objetos como los mencionados anteriormente. La cantidad en la curación se construye con base en la cosmovisión de la comunidad, por ejemplo, la cantidad de papel amate usado como ofrenda es en función de la edad de la persona enferma y del tipo de enfermedad. Por lo que se establece que el uso de la cantidad en la curación responde a una cosmovisión. A diferencia que en el comercio, el uso de la cantidad responde a una ganancia económica.

El trueque fue realizado hasta hace unas décadas, para obtener principalmente alimentos requeridos en la comunidad. Para ello se establecieron unidades de medida, como el cuartillo, una especie de cajón de madera cuyas medidas fueron establecidas por las dimensiones de la mano. Con el cual se realizó trueque de frijoles con maíz que son la base de la alimentación. Las unidades de medida o convenciones, juegan un papel central en el trueque, ya que son usadas para el intercambio. Sin embargo, han sido establecidas por la propia comunidad en función de la necesidad del momento. Por tanto se establece que el uso de la cantidad en el trueque es en función de un bien común. A diferencia del uso de la cantidad en el comercio que es para generar una ganancia económica.

Fue así que se encontró una construcción social de la cantidad, del trueque y curación al comercio del papel amate. Estas formas de construir conocimiento con base en conocimientos propios, de una identidad, donde es la organización humana la que define criterios y argumenta en función de su realidad es un ejemplo de Comunidad de Conocimiento Matemático.

COMUNIDAD DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO ÑUU SAVI

Hacer referencia a la enseñanza y aprendizaje de la matemática es definitivamente un tema muy complejo dada su naturaleza, independientemente de la visión que se tenga de ello, las discusiones se centran en el continuo y estatus del conocimiento, cuyo organismo denominada

educación tiene la tarea de cubrir las necesidades y demandas de la sociedad. Bajo esta percepción general, en la Teoría Socioepistemológica se considera que el conocimiento matemático se construye socialmente, su atención se centra en lo funcional del conocimiento a través del funcionamiento y forma de los usos, así, el desafío se encuentra en dibujar una realidad de lo matemático que se encuentra en constante cambio, es decir; una modelación de la realidad que se vive en el cotidiano.

En este escrito reportamos la investigación de Pérez (2012) sobre comunidad de conocimiento matemático Ñuu Savi (El pueblo de la lluvia) a través de los usos de la oralidad numérica. En principio, nos preguntamos, ¿cómo se construye conocimiento matemático en el pueblo de la lluvia? ¿Cuáles son los mecanismos de construcción? Hacer estas preguntas connota entender que se hace referencia a un conocimiento matemático local, muy específico, de ser Ñuu Savi que se manifiesta en reciprocidad e intimidad de ese conocimiento matemático dentro del colectivo, un conocimiento matemático diferente al universal, que se mantiene en el sistema educativo.

Al tratarse de la oralidad numérica Ñuu Savi como conocimiento matemático en la investigación, una primera característica en un pueblo originario como el Ñuu Savi es, que dichos conocimientos se encuentran en la oralidad, así, el conocimiento, la práctica, el lenguaje y la cosmovisión forman una unidad sistémica, en donde el rol de la familia y la comunidad juegan el papel de institucionalización.

Tomamos el trabajo de la siembra y poda del café del pueblo de la lluvia. Para sembrar las plantas de café, el campesino considera las fases de la luna y la temporada de lluvia y seca del año, así, antes de realizar las cepas (hoyos) realiza un diálogo interno con la naturaleza, después, escarba una profundidad aproximada de 40 centímetros, y también, un diámetro aproximado de 40 cm, hecho esto, procede a introducir las plantas rellenándolas de tierra abonada. Esta práctica del cafetalero tiene relación con la oralidad numérica de base vigesimal, el cuarenta como medida y espacio le permite a la planta crecer en buenas condiciones, pero, también el cuarenta significa desarrollo y producción para el Ñuu Savi, en relación directa y funcional de su práctica con la naturaleza.

Este argumento se reafirma en la poda del café. Generalmente las plantas de café tiene una duración de vida de 10 a 15 años de buena producción, después de este tiempo los granos en una planta son menos y de menor tamaño, por lo tanto, el campesino realiza la poda de las plantas de café. En un primer momento, el campesino observa la dirección del sol, después toma como base el suelo y aproxima 40 centímetros de altura en el tronco de la planta, con esa referencia, procede a realizar un corte vertical medio (no horizontal) en dirección al sol. Esta característica del corte al tronco le permite no acumular líquido que tienda a pudrir la planta, y los rayos del sol ayudan en tiempo pertinente el secado para que los retoños nazcan libremente. El cuarenta como oralidad numérica vuelve a significar reproducción, desarrollo y producción.

En estos dos ejemplos, los argumentos y los significados dentro del proceso conforman un lenguaje, ligado al conocimiento matemático del cuarenta que considera a la práctica de la siembra y poda del café, esta práctica socio-cultural del cafetalero se rige de una cosmovisión, de la relación directa y concreta con la naturaleza. En conclusión, este conocimiento matemático local, caracteriza que el conocimiento matemático estará ligada al lenguaje, práctica y cosmovisión como

elementos de su naturaleza. Así, el conocimiento matemático difícilmente quedará en términos abstractos, sino, en concreciones directas.

A MANERA DE CIERRE

Reconocemos la necesidad de entender cómo se usa el conocimiento matemático en comunidad. Esto no es trivial, ya que hoy la discusión se ha centrado sobre qué conocimiento y no por ejemplo en quién lo construye.

Proponemos dar entendimiento a los usos del conocimiento matemático desde una herramienta metodológica particular, el *modelo de comunidad de conocimiento matemático*; el cual nos acerca a la comprensión de una reciprocidad, intimidad y localidad del conocimiento matemático desde una institucionalización e identidad de comunidades específicas; a manera de generar marcos de referencia de lo funcional del conocimiento matemático: en distintos escenarios y situaciones desde diversos grupos sociales, culturales y disciplinares.

Así, desde el estudio de comunidad de originarios, de Sordos y disciplinares como los docentes en formación tratamos de dar amplitud a la discusión de fondo. Ésta es, que existe una exclusión de las argumentaciones que son construidas por la gente, esto quiere decir que no hay un diálogo entre la realidad de la escuela y el cotidiano de la gente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 4(2), 103-128.

Cordero, F. (en prensa). Modelación, Funcionalidad y Multidisciplinariedad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta & L. Díaz. (Eds). *Investigaciones Latinoamericanas de modelación de la Matemática Educativa.* Gedisa.

Cordero, F. (2013). *Matemáticas y el Cotidiano*. Diplomado Desarrollo de estrategias de aprendizaje para las matemáticas del bachillerato: la transversalidad curricular de las matemáticas Módulo III. Documento interno. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento de Matemática Educativa, México, D.F.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. & Soto, D. (2015). El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad. México: Gedisa.

Méndez, C. (2015). Comunidad de conocimiento matemático de Sordos: lo matemático y la escuela. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Opazo-Arellano, C. (2014). *El uso de las gráficas y el fenómeno de opacidad. El caso del concepto de derivada en los estudiantes de pedagogía en matemáticas en Chile*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Parra, T. (2015). *Los usos de la cantidad en una comunidad de conocimiento matemático Hñähñu. Del trueque y la curación al comercio de papel amate.* Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Pérez, R. (2012). *Usos de la oralidad numérica Ñuu Savi*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Soto, D. (2014). *La dialéctica Exclusión-Inclusión entre el discurso Matemático Escolar y la Construcción Social del Conocimiento Matemático.* (Tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

EMERGENCIA DEL RAZONAMIENTO INFERENCIAL DESDE UN PRIMER ACERCAMIENTO A LOS DATOS

Blanca R. Ruiz Hernández, María Guadalupe Tobías Lara, Armando Albert
Tecnológico de Monterrey (México)
bruiz@itesm.mx, mgt@itesm.mx, albert@itesm.mx

Palabras clave: inferencia informal, error tipo 1, hipótesis

Key words: Informal inference, error type 1, hypothesis

RESUMEN: La presente investigación se ubica en un curso universitario de probabilidad y estadística en el que se introdujeron algunas ideas inferenciales desde su inicio. Los estudiantes trabajaron en una actividad que consistió en la comparación de dos poblaciones a partir dos muestras haciendo uso de inferencia informal. Este primer análisis se concentró en las concepciones de los estudiantes sobre las nociones de hipótesis y error estadístico tipo 1. Se desglosan algunos de los resultados obtenidos que enfatizan en la necesidad de que algunas de las nociones vinculadas con inferencia estadística, por su complejidad, se desarrollen desde el inicio del curso, para que puedan ser retomadas en diversos momentos dentro del mismo.

ABSTRACT: This research is at a university course in probability and statistics, which were introduced some inferential ideas from the beginning. The students worked in an activity that involved the comparison of two populations from two samples using Informal inference. The analysis focused on the conceptions of students on the concepts of hypotheses and statistical error type 1. It breaks down some of the results that emphasize the need for some of the concepts related to statistical inference are developed from the beginning of the course so that they can be taken up at various points within it.

INTRODUCCIÓN

La inferencia estadística es esencial en la formación de todo profesionista por la necesidad de tomar decisiones adecuadas sustentándose en el análisis e interpretación de información cuantitativa (Cobb y Moore, 2000), sin embargo es un tópico difícil de enseñar. Rodríguez, Albert y Agnelli (2009) indican algunas dificultades que enfrenta la enseñanza escolarizada para lograr que los profesionistas adquieran razonamiento inferencial. Gran parte de esa problemática deriva de la forma en qué está organizado el conocimiento escolar en el currículo universitario en el cual se introduce todo el bagaje de conocimientos relacionados con inferencia estadística de manera casi simultánea. Diversos estudios cuestionan la forma en que se enseña la estadística sin partir de una problemática inferencial, que fue lo que le dio sentido y origen tanto a la probabilidad como a la estadística (Ruiz, 2014). Buscando este propósito, la investigación en didáctica de la estadística ha propuesto a la inferencia informal para insertar en la escuela, los conceptos básicos tanto de probabilidad como de estadística (Rossman, 2008).

Por otro lado, investigaciones como la de Albert, Ruiz, Tobías y Villarreal (2014) proponen la inserción temprana de conceptos propios de la inferencia estadística para que las concepciones iniciales de los estudiantes se enriquezcan y redefinan conforme los conceptos se retoman a lo largo del curso hasta su formalización.

Retomando tanto la idea de inferencia informal como de inserción temprana de conceptos propios de la inferencia, en este reporte se narra la experiencia que se tuvo en un curso de probabilidad y estadística para ingeniería en el que se trataron los conceptos de hipótesis estadística y error tipo 1 desde el inicio del curso de manera paralela a estadística descriptiva. Ambas cuestiones vista desde una perspectiva de inferencia informal.

LA PROBLEMÁTICA DE LA ENSEÑANZA DE LA INFERENCIA

Desde la perspectiva de la socioepistemología (Cantoral, 2013) la forma en que está organizado el conocimiento en el currículo escolar impide que se desarrolle el conocimiento matemático, puesto que generalmente se ignora la forma en que éste vive en los distintos contextos o situaciones cotidianas y/o profesionales. El orden de aparición de los temas en el currículo, normalmente se justifica a través de su racionalidad en un orden axiomático deductivo, el cual no obedece a una forma de razonamiento cognitivo. La estadística, no es la excepción, pues aunque guarda una relación muy estrecha con los datos, y por lo tanto con contextos reales (Moore, 1992), muchos de sus problemas de aprendizaje están vinculados con la cantidad de conceptos nuevos que tienen que ser operacionalizados casi simultáneamente al enfrentarse a un problema real en el que se requiera de estadística (Wild, Pfannkuch, Regan y Horton, 2011). Esto significa que no son sólo los tiempos didácticos los que dificultan una asignación más pausada del conocimiento sino también la naturaleza misma del conocimiento estadístico y la forma en que éste es necesario al analizar los problemas profesionales o de la vida cotidiana.

Diversas investigaciones, por tanto, se han enfocado a esta problemática desde una perspectiva didáctica, dando lugar al surgimiento de diversas visiones de cómo enfrentarla. En este escrito destacamos dos por la importancia que han adquirido y por la forma en que cubren las necesidades de un curso en particular en que los autores se han interesado.

Inferencia informal

La investigación en enseñanza de la estadística ha propuesto que la integración y asimilación de conceptos relacionados con inferencia estadística se puede fomentar guiando el estudio de la estadística descriptiva y los modelos probabilísticos a través de la inferencia informal y del razonamiento estadístico inferencial (Rossman, 2008; Zieffler, Garfield, Delmas y Reading, 2008; Makar 2013). En particular, recomiendan sumergir a los estudiantes en problemas bajo incertidumbre que inciten discusiones alrededor de la evidencia que proporcionan los datos a favor o en contra de una hipótesis desde los niveles escolares básicos para desarrollar su razonamiento de inferencia informal. Zieffler et al. (2008), clasifican las actividades que se pueden trabajar en la enseñanza en tres categorías: el razonamiento acerca de las características de una población basada en una muestra (forma, medidas de centralización y dispersión, etc.); el razonamiento acerca de las posibles diferencias entre dos poblaciones basadas en las diferencias entre dos muestras; y, por último, el razonamiento acerca de si una muestra en particular es probable o sorpresiva dado que se espera un valor particular o dando por supuesta una afirmación establecida previamente.

La inferencia informal ha tenido sus principales resultados en investigaciones en el nivel básico, medio o en preparación o actualización de profesores. En otras ramas del nivel superior se ha expresado, sin embargo, la problemática de la transición de la inferencia informal a la formal (Wild, Pfannkuch, Regan y Horton, 2011). Esto se ha manifestado particularmente en los primeros cursos universitarios de probabilidad y estadística, que generalmente se dedican a introducir la inferencia partiendo de estadística descriptiva, probabilidad y modelos probabilísticos.

Ideas tempranas en inferencia estadística

Aliaga y Gunderson (2006) sugieren que los conceptos vinculados con la toma de decisiones, como hipótesis nula, hipótesis alternativa, errores tipo I y II, potencia de la prueba, resultado significativo o regla de decisión, que normalmente se tocan hasta el final de los cursos introductorio a probabilidad y estadística en el nivel universitario, sean definidos al inicio. Esto ofrece la ventaja de que los conceptos pueden ser retomados posteriormente y desarrollar otros conceptos a partir de esa base, sin embargo, tal aparato conceptual en su inicio puede ser apabullante para los estudiantes además de que esta propuesta se enmarca en un contexto probabilístico desvinculado de los datos.

En Albert, et al. se propone que las ideas tempranas de inferencia estadística se introduzcan paulatinamente a medida que el curso avanza, con la idea de profundizar cada vez más en esos conceptos hasta su formalización en estimación por intervalo y pruebas de hipótesis. Albert, et al. retomaron la noción de *idea temprana* de Bruner (1960), quien visualizó la necesidad de una enseñanza en espiral que permitiera al estudiante fundamentar continuamente lo que ya ha aprendido, a la vez que el ensanchamiento y la profundización del conocimiento esté en términos de esas ideas tempranas a lo largo del curso.

Ruiz y Albert (2015) se sustentan en la visión de inferencia informal de Makar (2013), el marco de razonamiento estadístico de Wild y Pfannkuch (1999) y el desarrollo histórico de la relación entre la variable aleatoria y estadística (Ruiz, 2014) para sugerir que la ideas de *hipótesis* y *errores estadísticos* auxilian la obtención y justificación de inferencias informales basándose en el análisis de un conjunto de datos a través de herramienta de estadística descriptiva. Así, para ellos, las hipótesis y los errores estadísticos son dos de las ideas tempranas en que puede sustentarse en

desarrollo de inferencia en un curso. Este escrito retoma este planteamiento para analizar cómo un conjunto de estudiantes de un curso introductorio a probabilidad y estadística desarrollan esas ideas en el primer módulo (estadística descriptiva).

LAS HIPÓTESIS Y LOS ERRORES

Ruiz y Albert (2015) proponen un marco en el que definen a las nociones de *hipótesis* y *errores estadísticos* como dos de las ideas tempranas que, desde su forma germinal, pueden constituirse en detonadoras de conocimiento inferencial. En un primer momento (módulo 1 del curso), el planteamiento narrativo tanto de las hipótesis como de los errores constituye el centro de la enseñanza, pero se estimula la estructura formal que se retomará en momentos posteriores.

Las hipótesis se introducen como una conjetura (o creencia) que el estudiante tiene sobre su entorno, se enfatiza la distinción entre los tipos de hipótesis y se maneja la hipótesis alterna como la negación de la hipótesis nula. Se enfatiza la distinción y semejanza entre la hipótesis estadística alternativa y la de investigación.

Los errores adquieren el papel de concientizar a los estudiantes del riesgo que implica la toma de decisiones cuando ésta se sustenta en una muestra. Describen con palabras los tipos de errores que pueden cometerse en situaciones específicas, según la decisión que se tome y se les confronta a optar por el error que es más importante no cometer de acuerdo al contexto. También se comienza a cuestionar sobre la posibilidad (escasa, mucha, poca, media) de cometer el error seleccionado.

Las hipótesis

Desde la perspectiva de la investigación científica, existen diferentes tipos de hipótesis que normalmente no son consideradas en la enseñanza escolarizada. Batanero (2000) analiza los distintos tipos de hipótesis y expresa su preocupación por la confusión que su existencia puede generar al estudiante. De acuerdo con Batanero (2000) los tipos de hipótesis se pueden clasificar como: (1) *hipótesis sustantiva*, explicación especulativa y general del fenómeno a estudiar; (2) *hipótesis de investigación*, especulación observable, se habla de factores que pueden ser medibles a través de variables; (3) *hipótesis experimental*, es una explicación medible del fenómeno y ya implica la definición de variables; (4) *hipótesis estadísticas*, están propuestas en función de los parámetros que se quieren evaluar en la variable seleccionada y pueden ser (4.1) *hipótesis nula*, formula que el parámetro de la población es conocido y verdadero, (4.2) *hipótesis alterna*, es la negación de la hipótesis nula y está vinculada con la hipótesis experimental. Ésta sólo tiene sentido en un contraste de hipótesis desde la perspectiva de Neyman y Pearson (Batanero, 2013).

Las diferencias entre estos tipos de hipótesis están principalmente en el nivel de generalidad que se refleja en la concreción de las variables a considerar y de los parámetros. Las hipótesis estadísticas son las más específicas. Se refieren a parámetros de la distribución de una variable definida en la hipótesis experimental. La falta de comprensión de este nivel de especificidad, dificulta comprender las conclusiones obtenidas a partir de una hipótesis estadística y cómo éstas contribuyen a probar o refutar la hipótesis sustantiva. En Batanero, Vera y Díaz (2012) se expresa que existe confusión de los estudiantes entre las hipótesis estadística e investigación y entre las hipótesis nula y alterna.

Los errores estadísticos

Este concepto está vinculado con el nivel de significancia de la prueba de hipótesis, que se define como la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando en realidad es cierta (probabilidad del error tipo 1). La probabilidad de los errores estadísticos es condicional puesto que, en el error tipo 1, se supone cierta la hipótesis y en el error tipo 2 se supone falsa la hipótesis, lo que ocasiona algunos errores. De acuerdo con Batanero (2013) es común que se cambien los dos términos de la probabilidad condicional y se interprete como la probabilidad de que la hipótesis sea cierta una vez que se ha tomado la decisión de rechazarla, es decir, la probabilidad de equivocarse al rechazar la hipótesis nula. Este tipo de dificultades están vinculadas con una falta de comprensión del significado del error. Sin embargo, no hay investigaciones que hablen sobre las dificultades vinculadas con la formulación del error tipo 1 en el contexto del problema, cuestión importante para poder cuantificar su probabilidad.

EL OBJETIVO

La motivación de esta investigación no sólo está en analizar la formulación de la hipótesis y el error estadístico tipo 1 sino también en retomar la propuesta de Ruiz y Albert (2105) en dos de sus ideas tempranas. Estamos interesados en conocer las concepciones iniciales de los estudiantes sobre estas dos nociones cuando se introducen como ideas tempranas en estadística descriptiva bajo un enfoque de inferencia informal.

Los estudiantes participantes en este proyecto enfrentaron un problema abierto de inferencia de comparación de dos poblaciones independientes desde la inferencia informal. Esa actividad se tituló “En el corazón del marcapasos”.

EN EL CORAZÓN DEL MARCAPASOS

La exploración se realizó en dos grupos que llevaban la materia de probabilidad y estadística para ingeniería durante el semestre enero-mayo de 2015 y que llevaban el curso con la misma profesora bajo el enfoque de introducción de ideas tempranas. Esa actividad se introdujo en la tercera sesión de clase.

El diseño de la actividad “En el corazón del marcapasos” se sustentó en un artículo de investigación de ingeniería bioquímica (Huerta y Gutierrez, 2008) en donde se pretende mejorar el diseño de un marcapasos. Para ello se tomaron dos muestras de pacientes enfermos en uno de las cuales se probó el marcapasos diseñado y la otra sirvió de testigo. Para evaluar el efecto del marcapasos se midió la intensidad de pulso (mili Volts) y el periodo entre pulsos (segundos) en ambas muestras. En el artículo de Huerta y Gutierrez se muestra el análisis haciendo uso de estadística formal y tomando en cuenta otras variables, entre ellas algunas no controlables (edad, peso, tiempo de estar en consulta, etc), sin embargo a los alumnos se les proporcionaron únicamente los datos relacionados con intensidad de pulso y periodo entre pulso para que, dado el momento en que se encontraban en el curso, realizaran un análisis de inferencia informal.

Se considera una actividad abierta porque aun cuando inicia con un cuestionario sobre la identificación de las variables, las hipótesis y los errores tipo 1 y 2, no se les dan sugerencias o guía sobre los cálculos o gráficas que tienen que hacer para realizar una inferencia informal. Los

estudiantes pudieron tener acceso a computadora y hacer consulta de libros, internet o biblioteca virtual. Dentro del curso, la actividad tiene el papel ser introductoria a inferencia informal, puesto que a pesar de que dentro del curso los estudiantes ya habían manejado problemas relacionados con estadística descriptiva, no se les había propuesto un problema abierto en el que tuvieran que hacer una inferencia sustentándose en la integración de los conocimientos que hubieran adquirido tanto en las clases previas, como en los que habían adquirido en su vida cotidiana y escolar previa. Dentro del curso, los problemas que ellos habían resuelto estaban vinculados con la definición de problema, problemática, tipos de variables y formulación de las hipótesis y ambos tipos de errores. También se les había insertado en el proceso de pruebas de hipótesis en donde la hipótesis alternativa es la hipótesis que se desea probar y la nula es la que se desea refutar.

Por su complejidad, la actividad de "En el corazón del marcapasos" no se realiza en una sola sesión de clase, sin embargo en este reporte sólo se analizarán las concepciones iniciales en esta primera sesión en que los estudiantes trabajaron con esa actividad concentrándonos sólo en el cuestionario con que inicia la actividad.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este primer momento del análisis, se analizaron los reportes escritos de los estudiantes para detectar sus concepciones sobre hipótesis nula y alternativa (que en ese momento del curso se introdujo como *hipótesis estadística y su negación*) y la manera en que formulan el error tipo 1. Las categorías establecidas se sustentaron en las respuestas que formularon los estudiantes al cuestionario con el que se introduce la actividad sobre la identificación de las variables que se usan para evaluar el funcionamiento del marcapasos así como en la manera en que formularon la hipótesis y su negación y el error tipo 1 en el contexto del problema.

Las variables y las hipótesis

La actividad fue realizada por 56 alumnos. De los cuales el 87.5% identificaron correctamente una o las dos variables involucradas en la situación (tiempo entre pulsos e intensidad del pulso), 5.4 % identificaron otras variables diferentes y 7.1% no identificaron ninguna variable en la situación presentada. Sin embargo, cuando se les pide definir la hipótesis estadística, sólo el 16.1% incluye explícitamente a las variables en su redacción. La mayoría, 69.6%, escribe la hipótesis sustantiva en lugar de la estadística, es decir, una explicación especulativa y general del fenómeno a estudiar. Un ejemplo de las hipótesis que plantearon este grupo de estudiantes es: "*El nuevo marcapasos mejora el funcionamiento del corazón*". La cual no es observable ni cuantificable porque no concreta cuáles son las variables que darían sentido a la frase "*mejora el funcionamiento"* y que, por lo tanto, *medirían* la mejora. Sólo el 5.4% de los alumnos plantearon la hipótesis en función de parámetros, que concretarían más aún la hipótesis y el objetivo de la investigación del marcapasos. Cabe mencionar que, dado que eran dos las variables que indicarían el funcionamiento del corazón, las hipótesis estadísticas tenían que haber sido al menos dos (una por cada variable) sin embargo, ninguno de los estudiantes redactó dos.

También podemos decir que aunque el grupo identificó las variables correctamente, pocos alumnos redactaron sus hipótesis con respecto a sus variables. En el 80.4% de los alumnos no hubo coherencia entre las hipótesis y las variables descritas unos renglones antes. Esto significa que en las hipótesis plantearon nuevas variables ignorando las que habían descrito como las variables de

investigación de la actividad. Lo cual nos indica que no vinculan la hipótesis estadística con las variables de investigación.

La negación de la hipótesis y la hipótesis

También se les solicitó redactar la negación de la hipótesis (hipótesis nula). En este punto el 42.9% de los alumnos escribieron la hipótesis estadística como negativa, en cambio la hipótesis nula la escribieron como una afirmación. Esto significa que a los estudiantes no les quedó claro que en el proceso de pruebas de hipótesis se busca refutar la hipótesis establecida y, por lo tanto, su comprensión del análisis estadístico formal se complicaría pues tendrían al revés la hipótesis nula y la alternativa.

Observamos que pocos alumnos, el 17.9%, hacen explícita la comparación de los dos grupos (enfermos con marcapasos y enfermos sin marcapasos) tanto en su hipótesis, como en su negación. El 50% redacta la comparación de manera implícita, por ejemplo: "*Los nuevos marcapasos reducen el tiempo entre pulsos del corazón y reducen la intensidad de pulso generado*". Es importante mencionar que algunos alumnos investigaron cuál era el tiempo entre pulsos e intensidad de pulso en una persona normal y, para ellos, el marcapasos estaría funcionando bien si estas variables caen dentro del rango de una persona saludable e ignoraron que estaban comparando con el grupo de enfermos sin marcapasos (grupo control). También es de notar que, puesto que el 69.9% de los estudiantes escribieron la hipótesis sustantiva en lugar de la estadística, no visualizan la hipótesis como una conjetura muy específica de la investigación en la que se plantea de forma explícita la comparación de dos grupos de pacientes enfermos a través de sus parámetros.

El error tipo 1

También se les solicitó que definieran con sus propias palabras que significaba cometer el error tipo 1 bajo el contexto de la situación problema. El 69.6% lo escribió de manera general, lo que se esperaba porque la mayoría escribieron una hipótesis sustantiva. El 14.3% solo escribieron la definición de error tipo 1 pero no lo redactaron en términos del contexto del problema, y el resto redacto un error no estadístico.

En el 71.4% de las redacciones del error tipo 1 se percibe la condicionalidad. Algunos ejemplos de las palabras que se emplearon para expresarla son: "*cuando en realidad*", "*cuando*", "*pero*", "*y aun así*", "*pero aún*", "*que debería*", entre otros. Es decir usan un lenguaje diferente al que usan los libros de texto para expresar condicionalidad, "*si*" o "*dado qué*". El 12.8% de los alumnos ven en el error tipo 1, como una intersección, pues usan la palabra "*y*". Por ejemplo: "*los marcapasos funcionan y no se utilizan*". En el 10.7% de las redacciones de error tipo 1 no se expresa condicionalidad, sino sólo es una afirmación. En la redacción del resto de los alumnos no distingue si es el error está condicionado o no.

CONCLUSIONES

En general los alumnos presentan dificultades para escribir las hipótesis estadísticas, pues aunque distinguen las variables involucradas en la situación, no las vinculan con la hipótesis. De acuerdo con los hallazgos de Batanero, Vera y Díaz (2012) en que los alumnos confunden la hipótesis de

investigación con la hipótesis estadística se observa que esto puede provenir de no darse cuenta que en las pruebas de hipótesis se busca refutar la hipótesis y no probarla. En nuestra investigación predominó la confusión entre la hipótesis sustantiva y la estadística, pero también se presentó la confusión de redactar la hipótesis nula como la estadística y la estadística como la nula. Así mismo, llama la atención de que a pesar de que se les da información para fomentar la comparación de dos grupos (enfermos con marcapasos y enfermos sin marcapasos), pocos alumnos hacen explícita la comparación en la redacción de su hipótesis y su negación, quizá porque se concentran en la hipótesis sustantiva.

La desvinculación de la hipótesis con las variables de investigación puede ser muy grave puesto el análisis de los datos arrojará inferencias hacia los parámetros de las variables y no directamente hacia la hipótesis sustantiva. Sin embargo, el hecho de que estos conceptos se tengan previos a la realización de análisis estadísticos (aunque sea informales) puede enriquecer esta perspectiva, puesto que los alumnos podrán palpar la vinculación entre el análisis de las variables a partir de los datos de la muestra con la hipótesis que realmente pueden probar.

Es de llamar la atención que los estudiantes sí vinculan el error tipo 1 con la hipótesis y por lo tanto, también lo desvinculan de la variable. La interpretación del nivel de significancia, por tanto, puede ser problemática si este error persiste. Sin embargo, esto también puede resultar esperanzador porque si se enfatiza en la vinculación de la hipótesis con los parámetros de las variables, este error puede disminuirse.

Así mismo, detectamos una necesidad de mayor uso de lenguaje cotidiano en problemas relacionados con probabilidad condicional, puesto que en sus redacciones, los estudiantes sí distinguen la condicionalidad del error tipo 1, pero usan una forma de expresarla diferente a la que manejan los libros de texto.

Agradecimientos. Este trabajo ha sido posible gracias al apoyo recibido por el proyecto Novus “Transformando la educación estadística desde un enfoque inferencial” con registro en el Tecnológico de Monterrey. Fondo Novus. Convocatoria 2014-2015.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Albert, J. A., Ruiz, B., Tobías, M.G., Villarreal, O. (2014). Proyecto: Transformando la Educación Estadística desde un Enfoque Inferencial. Fondo NOVUS. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. Convocatoria 2014-2015.

Alliaga, M. y Gunderson, B. (2006). Interactive Statistics (3ª ed). New Jersey: Pearson.

Batanero, C., Vera, O. y Díaz, C. (2012). *Dificultades de estudiantes de Psicología en la comprensión del contraste de hipótesis*. Números, 80, 91-101.

Batanero, C. (2000). *Controversies around the role of statistical test in experimental research*. Mathematical Thinking and Learning, 2(1-2), 75-98.

Batanero, C. (2013). Del análisis de datos a la inferencia: Reflexiones sobre la formación del razonamiento estadístico. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(11), 277-291.

Bruner, J. S. (1960). The process of Education. Massachusetts: Cambridge.

Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento. Barcelona, España: Gedisa.

Cobb, P. y Moore, D. (2000). Statistics and mathematics: tension and cooperation. *The American Mathematical Monthly* (August – September), 615-630.

Huerta, I. y Gutiérrez, A. (2008). Diseño de un marcapasos externo a demanda basado en el dsPIC30F4013. *Revista mexicana de ingeniería biomédica*, 29 (1), 21- 27.

Moore, D. S. (1992). Teaching statistics as a respectable subjetct. En F. Gordon y S. Gordon (Eds.), *Statistics for the Twenty-first century* (14-25). Washington D.C.: Mathematical Association of America.

Makar, K. (2013). Predict! Teaching statistics using informal statistical inference. *Australian Mathematics Teacher*, 69(4), 34.

Pfannkuch, M. (2005). Probability and statistical inference: How can teachers enable learners to make the connection? In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 267-294). New York: Springer.

Rodríguez, M. I., Albert-Huerta, J. A., y Agnelli, H. (2009). Pruebas de Hipótesis y el Valor P: usos e interpretaciones. En G. Buendía y A. Castañeda (Eds), *Memorias de la XII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 104-117.

Rossman, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: one statistician's view. Statistics Education Research Journal, 7(2), 5-19.

Ruiz, B. (2014). Relaciones históricas entre las variables aleatoria y estadística y sus repercusiones didácticas. En Andrade, L. (Ed.), *Memorias del Primer Encuentro Colombiano de Educación Estocástica* (pp 1-12). Bogotá, Colombia: Asociación Colombiana de Educación Estocástica.

Ruiz, B. y Albert, J. A. (2015). Retos y oportunidades de educación en el pensamiento inferencial estadístico. *XIII Congreso Nacional de Investigación Educativa, Consejo Mexicano de Investigación Educativa* (en prensa).

Wild, C. J., Pfannkuch, M., Regan, M. y Horton, N. J. (2011). Towards more accessible conceptions of statistical inference. Journal of the Royal Statistical Society, 174 (2), 247-295.

Wild, C.J., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirica enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-248.

Zieffler, A., Garfield, J., Delmas, R., & Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 40-58.

LOS SIGNIFICADOS DE *FUNCIÓN* Y *FUNCIÓN DERIVADA* DESARROLLADOS POR LOS ESTUDIANTES AL ESTUDIAR LA VARIACIÓN EN EL CONTEXTO DE LOS PROBLEMAS DE INGENIERÍA

Ramiro Ávila Godoy, Jesús Ávila Godoy, José María Bravo Tapia
Universidad de Sonora (México) Universidad Autónoma de Baja California (México)
ravilag@gauss.mat.uson.mx, jag_virgo@hotmail.com, jmbravo@gauss.mat.uson.mx

Palabras clave: pensamiento variacional, contexto, significado, competencias

Key words: variational thinking, context, signification, competency

RESUMEN: Este es un reporte parcial de un proyecto diseñado para investigar el papel del contexto de la enseñanza en la formación y desarrollo de los significados de los objetos matemáticos que construyen los estudiantes. En este proyecto específicamente se está investigando sobre los significados de los objetos matemáticos función y función derivada que adquieren los estudiantes de ingeniería al estudiar la variación en el contexto de los problemas de optimización y se desarrolla con alumnos de los cursos de Cálculo Diferencial de la carrera de ingeniería civil de una universidad del norte de la República Mexicana. En este trabajo se reporta el proceso de diseño de las actividades que se utilizaron en la investigación y un avance de los resultados obtenidos.

ABSTRACT: This is a partial report of a project designed to investigate the role of the context of teaching in the formation and development of the significations of mathematical objects that students construct. In this Project, we are specifically investigating the significations of the mathematical objects, function and derivative function acquired by engineering students, while studing the variation in the context of optimization problems and develops students courses Differential Calculus Career civil engineering from a university in northern Mexico. In this work the design process of the activities that were used in the research and progress of the results is reported.

INTRODUCCIÓN

La investigación que aquí se reporta se desarrolló asumiendo las premisas de dos marcos teóricos: el Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y la Cognición Matemática (EOS) de Juan D. Godino y la Teoría de la Enseñanza Problémica de M. Majmutov (TEP) con base en las cuales se diseñaron y desarrollaron una serie de actividades didácticas, organizadas en secuencias, cuyo propósito fundamental fue desarrollar competencia para utilizar los conceptos y los métodos matemáticos en la resolución de problemas de ingeniería, en particular problemas de optimización y en general problemas de variación.

Del EOS se asumieron las premisas relativas al carácter sistémico de los significados de los objetos matemáticos, estableciendo como punto de partida su naturaleza pragmática y, en consecuencia, su carácter contextual, es decir, se parte de que dichos significados son, esencialmente, los sistemas de prácticas que se utilizan para analizar, interpretar y resolver un cierto tipo de situaciones problémicas, que estos sistemas de prácticas son discursivas y operativas; los elementos que los constituyen son los medios utilizados, tales como *el lenguaje*, constituido a su vez, por las diversas formas de representación de los objetos matemáticos (que en el caso de las funciones, son la numérica, la gráfica, la analítica, la verbal y otras), *los procedimientos, los conceptos, las propiedades, los argumentos* (utilizados para justificar las propiedades y los procesos que se desarrollan), *los medios tecnológicos*, (en este caso, el interés está centrado en el uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, especialmente el uso de los simuladores digitales). De la TEP se asume que el aprendizaje es producto de la actividad de estudio que realiza el *sujeto estudiante* en un ambiente sociocultural determinado y que dicha actividad es de autotransformación, pues además de aprendizaje, produce desarrollo de las habilidades intelectuales y de las actitudes que hacen que el sujeto esté cada vez, en mejores condiciones para analizar y resolver situaciones problémicas de complejidad cada vez mayor.

EL MÉTODO UTILIZADO PARA LLEVAR A CABO LA INVESTIGACIÓN:

El proyecto diseñado para llevar a cabo la investigación consta de cuatro etapas; la primera corresponde al diseño de los materiales (problemarios) a utilizarse en el curso; la segunda a la implementación del mismo, la tercera a la toma de datos necesarios para evaluar los significados construidos por los estudiantes de los conceptos matemáticos *función* y *derivada* y la cuarta, al análisis de la información obtenida y a la formulación de conclusiones.

Las tres primeras etapas ya se desarrollaron y la cuarta y última aún se está llevando a cabo; aunque en este reporte se presentan algunos de los resultados obtenidos y el análisis que de ellos se ha hecho.

El diseño de los materiales del curso

Dada nuestra concepción pragmática de la naturaleza de los objetos matemáticos, las actividades diseñadas consideran, entre los propósitos específicos, lograr que los estudiantes:

- Detecten las variables intervinientes en los procesos de cambio, objeto de estudio.
- Establezcan relaciones de dependencia entre ellas.

- Sean cada vez más competentes para utilizar las diversas representaciones semióticas (numérica, gráfica, analítica y verbal) al analizar, interpretar y comunicar diversas formas de variación, en particular, las que se presentan en los problemas de ingeniería y, en general en la ciencia.

Las *actividades* diseñadas se organizaron en *secuencias didácticas* que están constituidas por tres momentos denominados de *Inicio*, de *Desarrollo* y de *Cierre*; las secuencias, a su vez, conforman *bloques* destinados al estudio de un tipo específico de problemas, que forman parte de los denominados *Problemas de Optimización*. El diseño de las actividades que forman las secuencias, se llevó a cabo utilizando una metodología que tiene las siguientes cuatro etapas:

- Elección de la situación problémica que será objeto de estudio a través de la secuencia.
- Determinación de los propósitos del estudio (generales y específicos)
- Determinación de las competencias cuyo desarrollo se promoverá
- Formulación y organización de las interrogantes y tareas (problémicas) que servirán para provocar y conducir el proceso de estudio.

Para ilustrar este proceso se presentan a continuación, cuatro actividades, correspondientes, las dos primeras, al *Momento Inicial* y las otras dos, al *Momento de Desarrollo* de la *Secuencia* 1 del Bloque destinado al estudio del proceso de resolución de problemas de minimización; proceso que constituye una parte fundamental de lo que se está investigando en este proyecto:

- Situación problémica elegida: La fabricación de una lata (envase) en forma de cilindro circular recto cuya capacidad sea un litro.
- Propósito General de la secuencia: Determinar las dimensiones de la lata que se pretende fabricar, que minimicen la cantidad de material que se requiere para ello.

Propósitos específicos:

Que los estudiantes logren:

- Identificar las variables intervinientes
- Establecer las relaciones entre las variables
- Realizar un análisis cualitativo de la variación de alguna de las variables identificadas con respecto a la(s) otra(s)
- Analizar la variación representada en:
  - Una tabla
  - Una gráfica
  - Una expresión analítica

Competencias cuyo desarrollo se pretende promover

Disciplinares: Leer, analizar e interpretar información proporcionada en una tabla, en una gráfica o en una expresión analítica. Representar tabular, gráfica y analíticamente la variación de una magnitud con respecto a otra. Caracterizar el tipo de variación

Genéricas: Trabajar en equipo. Interpretar información recibida por medio del lenguaje natural o del lenguaje matemático. Comunicar información utilizando el lenguaje natural y el lenguaje matemático

Interrogantes y tareas (problémicas) de la Secuencia Didáctica diseñadas para provocar y conducir el proceso de estudio.

Los Problemas de Minimización

Secuencia No. 1.

Las actividades que se proponen a continuación debes realizarlas de manera independiente como tarea extraclase. Durante la clase, en la primera media hora, trabajarán en equipo, analizando, tanto los resultados obtenidos, como las estrategias que hayan utilizado, para mejorar la comprensión del problema planteado y para señalar lo que todavía no hayan comprendido, que podrán exponer en la segunda media hora destinada al trabajo grupal, en la que podrán escuchar la opinión de los otros equipos sobre lo realizado por ustedes y las sugerencias relacionadas con sus dificultades y sus dudas; lo mismo que la opinión y las sugerencias del profesor.

Etapa de Inicio.

Actividad 1. El problema de la fabricación de una lata en forma de cilindro circular recto.

Supón que se te encomienda elaborar un proyecto para la fabricación de latas que tengan la forma de un cilindro circular recto y capacidad de un litro (o sea, **1000 cm^3**) con la condición de que la cantidad de material que se utilice sea la mínima. Para cumplir la encomienda es necesario que analices lo que se te pide que hagas, tratando de entender qué sabes al respecto y cómo, a partir de lo que sabes, puedes decidir qué hacer. Para iniciar este proceso de entendimiento de la situación, se te sugiere que contestes las siguientes preguntas y veas si al contestarlas, tienes más claro cómo cumplir con lo que se te ha encargado.

- ¿De qué valores depende la capacidad de la lata?
- Si la altura de la lata permanece constante ¿Qué sucede con su capacidad si se aumenta el área de su base?
- Y si el área de la base de la lata se conserva constante ¿Qué pasa con su capacidad al variar su altura?
- Dado que en el caso de la lata que se pretende fabricar, lo que se quiere que permanezca constante es su capacidad ¿Cómo están relacionadas el área de la base y la altura?
- Si se tiene una lata cuya capacidad es un litro y se quiere aumentar el área de la base al doble, ¿Qué tendría que hacerse para que la capacidad no cambiara?
- Y si fuera la altura la que se quisiera aumentar, sin cambiar la capacidad de la lata ¿Qué tendría que hacerse?

Actividad 2. ¿Sabes cómo se calcula el volumen del cilindro recto? (Si no sabes, necesitas investigar). De acuerdo con la fórmula que se utiliza para calcular dicho volumen, determina ¿De que valores depende dicho volumen?

- En el problema que estás queriendo resolver, el valor del volumen de la lata de aceite debe valer 1000 cm^3. Si sustituyes este valor en la fórmula del volumen V obtienes una nueva

expresión (fórmula) que permite calcular la altura *h* del cilindro ¿Cuál es esa nueva expresión?

- En esta nueva expresión ¿De quién depende el valor de la altura *h*?
- Si quisieras construir una lata cuya base tuviera un radio $r = 5\ cm$ ¿Qué altura debería tener?
- Y si quisieras que la altura fuera $h = 15\ cm$ ¿Cuánto deberá medir el radio de la base
- ¿Cómo debe cortarse la lámina para construir la lata?

Etapa de Desarrollo

Actividad 3

- Si se considera que el grueso, tanto del fondo como de los lados y de la tapa de la lata, es uniforme. ¿De quién depende la cantidad de material empleado en la fabricación de la lata?
- Escribe la expresión analítica que indica cómo puede calcularse el área del rectángulo que sirve de cara lateral del cilindro en función del radio y de la altura.
- Escribe también la expresión analítica que puede utilizarse para calcular el área de la tapa y del fondo de la lata en función del radio.
- Con base en los resultados de los incisos 2) y 3), escribe ahora una expresión analítica que indique cómo calcular el área de la superficie total del cilindro.
- La expresión analítica que has obtenido en el inciso anterior, permite calcular el área de la superficie de la lata en función del radio y de la altura. Utilizando la expresión analítica obtenida en el inciso 2) de la actividad anterior, escribe una expresión analítica que permita calcular el área de la superficie de la lata de nuestro problema (esto es, la superficie de la lata que tiene un volumen de 1000 cm^3) de manera que dicha área sólo dependa del radio de la base.
- ¿Cuál consideras que es el menor valor que puede tomar el radio *r* de la base de la lata? ¿Y el mayor?
- Escribe una desigualdad que exprese el intervalo de valores que puede tomar *r*.
- Dado que el volumen de la lata que se quiere construir es fijo, ¿Qué pasa con la altura de dicha lata a medida que tomamos un radio cada vez más pequeño? ¿y qué pasa con la altura a medida que el radio es cada vez más grande?

Actividad 4

- Abre los archivos lata.ggb y lata1.ggb y observa lo que sucede con la altura de la lata al ir cambiando el tamaño del radio. Cuando lo hayas hecho, describe verbalmente cómo varía la altura en función del radio.
- En el archivo lata1.ggb puede observarse la gráfica que muestra la variación del área de la superficie total de la lata con respecto al radio de la base. Con base en dicha gráfica:
- Describe la variación observada

- Basándote en la gráfica del área que acabas de observar, reformula el problema que se quiere resolver, es decir formúlalo como un problema referido a la gráfica.

Estas actividades se han mostrado con el propósito de ilustrar el proceso de diseño; a la vez que con la intención de mostrar la manera en que, las preguntas y las tareas propuestas están orientadas al logro de los objetivos señalados en el apartado correspondiente, lo mismo que a la promoción de las competencias también señaladas.

En total se diseñaron cincuenta actividades que se organizaron en seis secuencias didácticas que conformaron tres bloques, el primero dedicado al proceso de resolución de problemas de maximización, el segundo al proceso de resolución de problemas de minimización y el tercero al proceso de sistematización e institucionalización de lo aprendido en los dos primeros. Los tres bloques, más una sección de problemas complementarios, cuyo propósito es que los estudiantes tengan la oportunidad de consolidar y profundizar su dominio de los métodos de resolución de problemas, en particular los de optimización. Todas estas actividades se presentan en un folleto titulado Problemas de Optimización que empieza con una presentación, en la que se exponen los propósitos del trabajo, se explica la estructura del mismo y las dinámicas que se habrán de desarrollar. La presentación termina con un exhorto al trabajo con responsabilidad y constancia.

Las dinámicas de trabajo, en las que había una primera etapa de trabajo individual independiente, una segunda de trabajo en equipo y una tercera de trabajo a nivel de todo el grupo, en la que el profesor era el conductor, eran parte esencial de la estrategia a través de la cual se promovía el desarrollo de las competencias, tanto disciplinares como genéricas, con especial énfasis en: la competencia comunicativa, en la de trabajo en equipo, en la de gestión del conocimiento, en la del trabajo cooperativo, entre otras.

Los materiales diseñados para recabar información

Para recabar información sobre los avances logrados, además de la observación permanente del desarrollo de las actividades en el salón de clases, se acordó la elaboración de un portafolio de evidencias de cada alumno, que contuviera un reporte de las actividades del curso realizadas por él durante la semana y una reflexión titulada *¿Qué aprendí esta semana en el curso de Cálculo*? y contuviera también lo realizado por los estudiantes al tratar de resolver un problemario diseñado exprofeso con ese propósito. Dicho problemario está constituido por tres secciones, cada una de las cuales se aplicó a los estudiantes inmediatamente después de haber terminado de desarrollar las actividades didácticas de cada uno de los tres bloques de problemas que constituyeron el material de estudio del curso.

Los siguientes problemas corresponden a la primera sección del Bloque 2 del Problemario y se presentan aquí para ilustrar el material diseñado para recabar información sobre los avances de los estudiantes**:**

Problema 1

Determina, en cada caso, lo que se te indica y argumenta cómo llegaste a la respuesta.

a) Las cantidades que percibes que varían al estarse llenando con agua un recipiente esférico.

b) ¿De qué variables depende la presión que ejerce un gas contenido en un recipiente?

c) De dos esferas de igual volumen ¿Cuál pesa más?

Problema 2

La fórmula $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ expresa la relación entre el volumen de un cono, el radio de su base y su altura. Con base en esta información, describe:

a) ¿Cómo es la variación del volumen con respecto a la altura, si la base permanece constante?

b) Y si la altura es la que permanece constante ¿Cómo es la variación del volumen con respecto al área de la base?

c) Y con respecto al radio, ¿Cómo varía el volumen, si la altura permanece constante?

d) Si se quiere que el volumen de un cono no cambie al duplicar el radio de su base, ¿Qué debe sucederle a la altura?

e) Y si la altura se cuadruplica, ¿Qué hay que hacer para que el volumen no cambie?

f) ¿Cómo están relacionados el radio y la altura de un cono si se quiere que su volumen no cambie?

g) En los primeros tres incisos se te pidió que describieras la variación del volumen del cono, con respecto a la altura, en el a); con respecto al área de la base, en el b) y con respecto al radio de la base, en el c); y en el inciso f) se te pidió que establecieras la relación entre el radio y la altura del cono cuando el volumen permanece constante. Representa gráficamente cada una de las cuatro relaciones que has descrito.

Problema 3

a) ¿Qué forma geométrica tiene la cara lateral de un cono? Dibújala

b) Si se quiere fabricar un recipiente cónico cuya capacidad sea un litro y que su altura mida el doble de lo que mida el radio de su base, ¿Cuánto deberá medir el radio y cuánto el área del material la cara lateral?

c) ¿Para qué valor del radio la cantidad de material necesaria para fabricar un cono cuya capacidad sea un litro, es mínima?

Los problemas de cada una de las secciones del problemario se propusieron a los estudiantes para que intentaran resolverlos, primero de manera individual para lo cual se les asignó un tiempo de una hora, al agotarse el tiempo asignado, lo realizado por cada estudiante se recogió, luego se organizaron equipos de cuatro estudiantes y se les pidió que comentaran lo que cada uno había hecho en cada uno de los problemas y a partir de este intercambio, escribieran y reportaran la versión que hubiera resultado del trabajo en equipo. En este segundo intento también se asignó un tiempo de una hora y se recogió el producto de esta segunda etapa de trabajo. Finalmente, se les propuso que se llevaran los problemas para que, como tarea extraclase y de nueva cuenta en equipo; revisaran la versión que habían entregado y, si lo consideraban necesario, la modificaran y escribieran una nueva versión de la resolución de algunos de los problemas o de todos. Esta nueva versión la entregaban al día siguiente y después de ello se desarrollaba una sesión en la que cada equipo exponía al resto del grupo lo que había hecho, lo que consideraba haber logrado y lo que sabía que le faltaba. Con esta sesión de debate grupal se concluía la etapa de recopilación de información sobre el desempeño de los estudiantes.

LOS RESULTADOS DEL DESARROLLO DE LAS ACCIONES DEL PROYECTO:

En correspondencia con las premisas teóricas en las que está basado el diseño de este proyecto, en particular con las premisas en las que se declara el carácter pragmático y contextual de los significados de los objetos matemáticos, esto es, en las que se establece que los significados que tiene un sujeto de tales objetos, son esencialmente los sistemas de prácticas operativas y discursivas que pone en juego al, analizar, interpretar y resolver problemas; el análisis del trabajo realizado por los estudiantes, estuvo orientado a identificar las prácticas utilizadas por ellos para lograr lo pretendido en cada una de las etapas del proceso de resolución de los problemas, es decir, primero se analizó la etapa de comprensión del problema, luego la del diseño de la estrategia que utilizaron para resolverlo, después la del desarrollo o implementación de dicha estrategia y, finalmente, la etapa de análisis de los resultados obtenidos y su correspondencia con los requerimientos.

A través de este análisis, a partir de la identificación de los sistemas de prácticas utilizados por los estudiantes, se hizo una valoración del nivel de desarrollo de algunas competencias genéricas y disciplinares, tales como: trabajar en equipo, comunicarse (interpretando y emitiendo información) por medio del lenguaje matemático (numérico, analítico, gráfico y verbal), entre otras.

En este reporte sólo presentamos una pequeña muestra de la forma en que se analiza el desempeño de los estudiantes, tanto en el trabajo individual como en el trabajo en equipo y grupal, al tratar de resolver la serie de problemas diseñados exprofeso, lo mismo que al comunicar, oralmente o por escrito, las acciones realizadas en el proceso. También se ilustra la interpretación que se hace de dicho desempeño para valorar el desarrollo de competencias.

Los propósitos específicos que orientaron el análisis de lo realizado por los estudiantes en esta etapa, fueron identificar las prácticas utilizadas y determinar en qué medida lograban:

a) Detectar las variables intervinientes en los procesos de cambio, objeto de estudio.

b) Establecer relaciones de dependencia entre ellas.

c) Desarrollar competencias para utilizar:

- Las diversas representaciones semióticas (numérica, gráfica, analítica y verbal) al analizar, interpretar y comunicar las diversas formas de variación.
- La derivada para maximizar o minimizar el valor de una cierta variable; así como para analizar, interpretar y cuantificar la rapidez con que está variando.

1. En la etapa de trabajo individual.

Se observó que todos los participantes estuvieron intentando resolver cada uno de los problemas aunque ninguno de ellos logró resolverlos todos. Este hecho nos permitió formular dos conjeturas:

- Tal vez el tiempo asignado fue insuficiente.
- Parece que todos los estudiantes, consideran estar preparados para tratar de resolver los problemas.

a) En relación con el Problema 1.

Todos mostraron haber entendido lo que se les pidió.

Las respuestas dadas a lo solicitado en el inciso a), es decir, donde se pide que señalen *las magnitudes que perciben que están variando a medida que se llena el recipiente* indican que han logrado desarrollar competencia para percibir las variables que hemos denominado *visuales* (porque se perciben por medio de la vista), tales como el volumen del agua que está entrando al recipiente, que es la que se percibe más fácilmente, aunque muchos de ellos se refieren al volumen diciendo que *lo que* está cambiando es *"*la cantidad de agua*"*; otras variables visuales que perciben son "el área de la superficie superior del agua" , "el área que se moja", lo que "falta por llenarse" la "profundidad del agua", por el contrario, las magnitudes cuya variación no se percibe visualmente, sino por medio de una inferencia, (como es el caso de *la rapidez con que aumenta la profundidad*), la mayoría de los estudiantes aún no logró percibirlas..

b) El análisis de las respuestas a lo solicitado en los incisos b) y c), se hizo con el propósito de valorar en qué medida pueden los estudiantes establecer relaciones de dependencia entre variables. En el caso de las variables de las que depende la presión que ejerce el gas contenido en un recipiente, prácticamente todos los estudiantes pudieron determinar que depende "Del tamaño del recipiente" y "De la cantidad de gas", que, como puede verse, al volumen lo denominaron "tamaño" y con la palabra "cantidad" se refieren a la "masa". La variable que pasó inadvertida a varios de los estudiantes fue la temperatura. La valoración del desempeño del grupo indica que la gran mayoría de los estudiantes logra establecer relaciones de dependencia entre variables..

c) En relación con el Problema 2.

Las respuestas a las preguntas de los incisos a), b) y c) muestran que todos los estudiantes perciben que el volumen del recipiente crece al crecer cualquiera de las tres variables señaladas; pero apenas un poco más de la mitad establece que la variación del volumen con respecto a la altura o al área de la base, es directamente proporcional y que la variación del volumen es directamente proporcional al cuadrado del radio, sólo logró establecerlo aproximadamente el 40% de los estudiantes. Todos los que establecieron la proporcionalidad en forma cuantitativa justificaron su respuesta con el argumento de que el cociente entre las dos cantidades era una constante y al decirlo, la mayoría escribió la expresión analítica correspondiente. Es decir, escribieron, $\frac{V}{h}=\frac{1}{3}\pi r^2$ argumentando que $\frac{1}{3}\pi r^2$era una constante porque se había dicho que el área de la base era constante; en el inciso b) escribieron $\frac{V}{\pi r^2}=\frac{1}{3}h$ y en el inciso c) escribieron $\frac{V}{r^2}=\frac{1}{3}\pi h$.

Estas respuestas nos llevaron a valorar un buen desarrollo de la competencia para utilizar el lenguaje matemático (analítico y natural) para determinar el tipo de variación de una variable con respecto a otra cuando ésta es directamente proporcional

Las respuestas a las preguntas de los incisos d) y e) puso de manifiesto que la variación inversamente proporcional entre una cantidad y el cuadrado de otra resulta menos comprensible, pues sólo un 25%, aproximadamente, pudo contestar correctamente y quienes lo hicieron argumentaron que la altura y el cuadrado del radio eran inversamente proporcionales porque su producto era una constante, que a su vez fue la respuesta a la pregunta del inciso f).

Las gráficas trazadas por los estudiantes que respondieron en el inciso a), que el volumen era directamente proporcional a la altura y que en el inciso b) respondieron que el volumen es

directamente proporcional al área de la base, indican que ellos saben que la variación directamente proporcional se representa gráficamente por medio de una recta de pendiente positiva, aunque no parece que tengan claro qué representa dicha pendiente, pues ninguno de ellos hizo algún comentario al respecto. La representación gráfica de la relación entre el volumen y el radio la hicieron incorrectamente, aproximadamente la mitad de los que habían establecido la proporcionalidad directa entre el volumen y el cuadrado del radio; uno de ellos graficó el volumen contra el cuadrado del radio, es decir en un eje puso V y en el otro puso r^2 y lo graficó correctamente por medio de una recta.

Estas respuestas ponen de manifiesto que la mayoría de los estudiantes representan gráficamente la relación directamente proporcional de manera correcta, si ambas variables son lineales, pero no cuando la proporcionalidad es entre una variable y el cuadrado de otra; además parecen no reconocer que la pendiente de la recta representa la constante de proporcionalidad. Esto nos permite valorar que la competencia para utilizar la representación gráfica de la variación directamente proporcional tiene un bajo nivel de desarrollo en un número significativo de estudiantes y, en consecuencia, nos permite planear nuevas actividades para mejorar su desarrollo. .

d) En relación con el Problema 3.

Este problema resultó difícil para la mayoría de los estudiantes, ya que no lograron dibujar correctamente la cara lateral; algunos parecen no haber entendido bien la pregunta pues lo que dibujaron fue un cono; otros dibujaron un triángulo y sólo unos cuantos, aproximadamente un 15%, dibujaron un sector circular.

De lo solicitado en el inciso b) un poco menos de la mitad logró determinar las dimensiones del radio y de la altura para que el volumen del cono sea un litro; aunque sin tener claras las unidades en que estaban midiendo el radio y la altura pues al resolver escribieron $h = 2r$ y la sustituyeron en la fórmula del volumen obteniendo una fórmula para calcular el volumen en función del radio que resultó ser $V = \frac{2}{3}\pi r^3$, luego sustituyeron V por 1 obteniendo $\frac{2}{3}\pi r^3 = 1$ y despejaron r obteniendo $r = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}$, lo cual les permitió obtener un valor aproximado de r; sin embargo en ningún momento parecen haber sabido en qué unidades resultó medido el radio al sustituir V por 1; que en el problema se establece que el volumen es un litro; por otra parte tampoco pudieron establecer la relación entre el valor de r y el valor del área de la cara lateral, es decir no pudieron encontrar una fórmula que les permitiera calcular el área de la cara lateral del cono; ni siquiera quienes dibujaron un sector circular.

Una consecuencia de no poder establecer una expresión analítica que permita calcular el área de la sección transversal en función del radio, es no poder calcular el valor de éste para minimizar el área de la cara lateral del cono con capacidad de un litro.

2. En la etapa de trabajo en equipo, en el aula.

En esta segunda etapa, de trabajo en equipo, se observa una mejoría en lo relacionado con los problemas 1 y 2, ahora todos los equipos muestran una mejor comprensión de las relaciones entre las variables presentes en cada uno de los problemas; sin embargo sigue habiendo problemas para interpretar correctamente la relación inversamente proporcional entre el cuadrado del radio de la

base del cono y su altura; lo cual se manifiesta al no poder graficar correctamente la relación entre esas dos variables.

En relación al problema 3 no se manifiesta mejoría; sigue sin poder establecerse una relación entre el valor del radio del cono y el área de la cara lateral razón por la cual no se logra determinar el valor del radio que minimiza el área de la cara lateral del cono

De nueva cuenta se observa la posibilidad de que el tiempo no haya sido suficiente para entender y resolver totalmente los tres problemas.

3. En la etapa de trabajo en equipo, fuera del aula, como tarea.

El producto entregado por todos los equipos después de trabajar los problemas fuera de la hora de clase, muestra un avance significativo. El problema 3 que no lograron interpretarlo correctamente en las dos primeras horas de trabajo llevadas a cabo en el aula, finalmente, aproximadamente la mitad de los equipos, logró resolverlo, al establecer la relación entre el radio de la base del cono y el radio del sector circular que constituye la cara lateral y a partir de ella lograron obtener la expresión analítica de la función que permite calcular el área de la cara lateral del cono en función del radio de la base cuando $h = 2r$, la cual resultó ser $A = \sqrt{5}\pi r^2$ y como el valor de r ya había sido calculado, habiendo obtenido $r = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}$ pudieron calcular el valor del área de material que se requiere para construir el cono con capacidad de un litro en el que la altura mide el doble de lo que mide el radio de la base; sin tener necesidad de aplicar el criterio de minimización utilizando la función derivarla.

El significativo avance mostrado por los estudiantes en esta tercera etapa del trabajo, tanto en el reporte escrito como con su participación en la sesión de debate grupal, nos permite valorar de manera más confiable el nivel de desarrollo de cada uno de los elementos (conocimientos, habilidades, actitudes y valores) que constituyen las competencias que se ponen en juego al tratar de resolver problemas; a la vez que nos permite detectar los diversos aspectos cuyo desarrollo se percibe más limitado y a partir de tal valoración, poder planear nuevas actividades que ayuden a mejorarlo.

EL DESARROLLO DE ALGUNAS COMPETENCIAS GENÉRICAS.

El desarrollo de la competencia para trabajar en equipo, no sólo se refleja en el avance en la comprensión y resolución de los problemas, sino fue observado durante el tiempo que trabajaron en equipo en el salón de clase

El desarrollo de la competencia para interpretar información recibida por medio del lenguaje natural o del lenguaje matemático, lo mismo que para comunicarla, también se refleja en la calidad de los reportes escritos que presentaron, al igual que en su participación en la sesión de debate desarrollada en el aula sobre la resolución de los problemas propuestos. de el de la competencia información.

COMENTARIO FINAL.

En este reporte se ha pretendido mostrar la relación existente entre los significados que los estudiantes construyen sobre los objetos matemáticos *función y derivada* y el contexto de la enseñanza, específicamente al promover su estudio en el contexto de resolución de problemas de ingeniería. El espacio disponible para publicar este reporte, sólo permitió ilustrar con unos pocos ejemplos lo observado. Quedará pendiente la presentación de las conclusiones finales del proyecto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ávila, R. (1998). *El papel de las representaciones (numérica, gráfica, analítica y verbal) en el origen y desarrollo de los conceptos de función y función derivada* Tesis de Doctorado no publicada. Universidad Autónoma del Estado de Morelos. México

Godino, J. (2010). *Perspectiva de la didáctica de la matemática como disciplina tecnocientífica.* (Consultado el 12-01-2011 de http://www.ugr.es/local/jgodino)

Godino, J. (2010). *Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático.* (Consultado el 12-01-2011 de http://www.ugr.es/local/jgodino)

Ímaz, C.; Moreno, L. (2010). *La génesis y la enseñanza del Cálculo. Las trampas del rigor.* Trillas. México.

Font, V. (1999).*Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de grafiques. Aplicacions a les derivades*. Tesis de Doctorado no publicada. Universitat de Barcelona. España

Font, V. (2007). *Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas.* La gaceta de la RSME, volumen 10.2

Font, V.; Godino, J.; D´Amore, B. (2007). *Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática*. (Consultado el 12-01-2011 de http://www.ugr.es/loc)

Majmutov, M. I. (1983) *La enseñanza problémica*. Editorial Pueblo y Educación, La Habana, Cuba.

SOBRE LAS RAZONES Y LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: ¿QUÉ TRATAMIENTO HACEN LOS LIBROS DE TEXTO?

Ferney Tavera Acevedo, Jhony Alexander Villa-Ochoa
Universidad de Antioquia. (Colombia)
ftavera827@yahoo.es, jhony.villa@udea.edu.co

Palabras clave: textos universitarios, razones trigonométricas, funciones trigonométricas

Key words: textbooks, rates and tigonometric functions

RESUMEN: En este artículo presentamos los resultados obtenidos de un estudio cualitativo que indagó por las maneras en que algunos libros de texto hacen el tratamiento de las razones y las funciones trigonométricas. Para ello, hicimos un análisis de contenido a cinco libros de texto que se reportaron como los más usados en la asignatura de matemáticas el primer año de Educación Superior, en algunas universidades de Medellín-Colombia. Los resultados muestran que algunos libros de texto hacen un tratamiento indistinto para los términos funciones y razones, asimismo identificamos que en algunos textos la transición de las razones a las funciones trigonométricas hacen un cambio de notación en los que los significados no se hacen explícitos.

ABSTRACT: This paper presents the results of a qualitative study, its purpose was inquiry the treatment that textbooks do of trigonometric rates and functions. The method was content analysis; we used to analize five university textbooks. The results show that some textbooks do an indistinct treatment for rate and functions words; also we identified that in some texts the transition from trigonometric rate to trigonometric function there is a change of notation but not its meanings.

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

La literatura internacional ha llamado la atención sobre la importancia que tienen los libros de texto en la formación matemática de los estudiantes de cualquier nivel educativo (Fan, 2013; Rezat, 2013; Randahl, 2012). En un estudio previo, Tavera (2013) mostró que los libros de texto generalmente se asumen como uno de los principales recursos didácticos que emplea el docente para planear sus intervenciones en el aula de clase, debido a que actúan como herramienta para aplicar un currículo ya establecido facilitando, de esta manera, la enseñanza y el aprendizaje de las temáticas que se deben abordar en el área de matemáticas. En ese mismo sentido, Selva y Borba (2013) han argumentado que muchos profesores no solamente utilizan recursos como orientación para explicar los conceptos matemáticos, sino también como fuente bibliográfica para preparar las actividades (por ejemplo: ejercicios, problemas, tareas) que se desarrollarán en la clase de matemáticas.

De igual forma, Montiel (2005) ha señalado que los libros de texto presentan de manera secuenciada, lógica y coherente los temas y conceptos matemáticos. La autora analiza la manera en que estos recursos hacen el desarrollo de la trigonometría y manifiesta que en los textos analizados se privilegia la secuencia trigonometría → círculo trigonométrico → función trigonométrica; este tratamiento está presente en los textos de trigonometría, algo diferenciado del tratamiento hecho por textos de "análisis matemático" los cuales introducen la función trigonométrica y demuestran sus propiedades en relación al cálculo.

En un estudio posterior, Montiel y Buendía (2013) retomaron el trabajo realizado por De Kee, Mura y Dionne (1996) para señalar que las comprensiones del seno y el coseno como razón y como función trigonométrica no son ampliamente diferenciadas por los estudiantes. Estas observaciones también fueron reportadas en el trabajo de Weber (2005) quien seleccionó dos grupos para desarrollar su estudio (grupo control y grupo experimental) con el fin de examinar la comprensión acerca de las funciones trigonométricas. A partir de su estudio, este autor concluyó que a través del uso de la tecnología computacional los estudiantes (del grupo experimental) lograron mostrar una comprensión profunda de las funciones trigonométricas, puesto que fueron capaces de calcular los valores de las expresiones trigonométricas dadas y dedujeron sus propiedades, justificando paso a paso las características que las describen.

Desde una perspectiva socioepistemológica, Jácome (2011) reportó una experiencia con profesores mexicanos que pertenecían al nivel medio superior; el propósito de su estudio fue trabajar las relaciones de proporcionalidad en la construcción de modelos geométricos para que se resuelvan situaciones-problema donde se aplique la trigonometría. Para poder desarrollarla, este autor evita las medidas hipotéticas y le solicita a sus participantes que observen un objeto de su entorno y que traten de calcular su altura.

Según el informe presentado por los profesores participantes en el estudio de Jacome (2011) se pueden observar distintos fenómenos, los cuales están enfocados hacia el manejo del discurso escolar, porque hay docentes que manifestaron utilizar la "razón trigonométrica" tangente como herramienta para solucionar el problema planteado, pero también existen otros que expresaron que este problema se resuelve aplicando la "función trigonométrica" tangente, la relación tangente, la función tangente, o simplemente se cuestionaron sobre el procedimiento trigonométrico a emplear y murmuraron de la fórmula que sirve para hallar la tangente en un triángulo rectángulo.

Algo similar lo evidenció Tavera y Villa-Ochoa (2013) cuando analizaron la manera en que los libros de texto promueven el desarrollo del pensamiento variacional en el estudio de las relaciones trigonométricas. Estos investigadores observaron que algunos textos universitarios denominan como funciones trigonométricas a aquellas expresiones que sirven para calcular las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, las cuales están determinadas por un ángulo agudo (Tabla 1). Esta temática usualmente es trabajada en el aula de clases como razones trigonométricas.

Tabla 1.

Definición de funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo	$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}}$ $\quad \cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}}$ $\quad \tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$ $\csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$ $\quad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$ $\quad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$

Fuente: Swokowski y Cole (2009, p. 378).

Las investigaciones revisadas anteriormente ponen en evidencia las dificultades que los estudiantes tienen frente a la comprensión de las razones y las funciones trigonométricas, sus propiedades, usos y diferencias. Teniendo estas consideraciones en mente, se produjo un interés especial por examinar algunos libros de texto que hagan referencia al estudio de la trigonometría plana, tanto en el triángulo rectángulo como en la circunferencia goniométrica. En particular nos proponemos analizar e interpretar la manera en que se da la transición de las razones a las funciones trigonométricas; para ello, formulamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuál es el tratamiento que los libros de texto universitarios hacen de las razones y las funciones trigonométricas?

REFERENTE CONCEPTUAL

El Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) ha sugerido que el estudio de la variación se convierta en un eje articulador del currículo de matemáticas de tal forma que se propenda por el desarrollo de un pensamiento variacional. Para promover este tipo de pensamiento es necesario propiciar en el aula de clase actividades que se fundamenten en "el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos" (MEN, 1998, p. 73). Se espera que los estudiantes puedan explorar, analizar, interpretar, deducir, conjeturar y plantear nuevas situaciones frente a las relaciones funcionales y dinámicas que se generan entre los conceptos matemáticos.

El MEN también resalta que el pensamiento variacional debe cumplir "[…] un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas" (MEN, 2006, p. 66). En coherencia con ello, observamos una estrecha relación con otros tipos de pensamiento (por ejemplo: el numérico, espacial y métrico) porque su estudio se genera a partir de la búsqueda de una visión más generalizada y abstracta del conocimiento matemático,

determinada por el reconocimiento de características, que son invariantes en medio de la variación y el cambio.

Algunas de las ideas anteriormente expuestas, sirvieron de sustento para la pesquisa de Villa-Ochoa y Ruiz (2010), quienes expresan que el estudio del pensamiento variacional constituye uno de los aspectos de mayor riqueza en el ámbito escolar, puesto que cotidianamente se establece a partir de situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación provenientes del contexto sociocultural, de otras ciencias o de las mismas matemáticas. Por tal razón, se considera que la variación implica la covariación y correlación de magnitudes cuantificables, que son expuestas no sólo a través de procesos algebraicos sino también mediante gráficas y registros numéricos de tabulación.

Desde un enfoque socioepistemológico, Montiel y Buendía (2013) han reconocido algunas características del pensamiento variacional cuando se estudia acorde a las particularidades de algunos objetos matemáticos. Estas investigadoras, han acuñado el término "pensamiento funcional-trigonométrico" para describir un tipo de pensamiento que "se fundamenta en reconocer que el comportamiento trigonométrico se caracteriza y se distingue de otros comportamientos algebraicos o trascendentales, por su variación y sus variaciones sucesivas: cómo cambia y cómo cambian sus cambios" (p. 188).

De acuerdo con esta mirada consideramos que el desarrollo del pensamiento funcional-trigonométrico esta ligado implícitamente al pensamiento variacional, si se utilizan en el aula de clases software de Geometría Dinámica (por ejemplo: Geogebra), porque su estudio se fundamenta en comprender cómo está variando el movimiento y desde ahí es posible identificar las propiedades que tiene cada función trigonométrica (Montiel y Buendía, 2013).

METODOLOGÍA

Este estudio se encuentra enmarcado en un enfoque cualitativo de investigación y el método que se utilizó fue el análisis de contenido. Este método se considera como una "técnica que pretende dilucidar la naturaleza del discurso generado en una realidad social, la cual está determinada a través de la producción documental sustentada en los libros de texto" (Pino y Blanco, 2008, p. 73). Basados en dicha descripción, observamos que este método intenta generar razonamientos discursivos o inferencias a partir de los datos registrados en cualquier tipo de lenguaje que exprese comunicación (por ejemplo: verbal, escrito, pictográfico,…); a causa de ello, consideramos que sea posible analizar e interpretar la manera en que algunos libros de texto universitarios hacen el tratamiento de las relaciones (razones) y de las funciones trigonométricas.

Para obtener los datos seleccionamos un conjunto de libros de texto que atendieran a los siguientes criterios: (i) que sean textos recomendados por los departamentos de ciencias básicas en algunas universidades de Medellín-Colombia, (ii) que sean utilizados por los estudiantes en la asignatura de matemáticas durante el primer año de universidad y finalmente, (iii) que desarrolle, las temáticas propias de la trigonometría plana, tanto en el triángulo rectángulo como en la circunferencia goniométrica.

En la Tabla 2 se presenta la lista de los libros de texto que fueron seleccionados y analizados para interpretar la manera en que se hace el tratamiento de las razones a las funciones trigonométricas.

Tabla 2. Libros de texto que fueron seleccionados para realizar este estudio.

Autor (es)	Año	Nombre del libro de texto	Edición	Editorial
Buriticá, B	2012	*Algebra y Trigonometría*	tercera	U de A (Programa U de @)
Stewart, J, Redlin, L, Watson, S	2012	*Precálculo Matemáticas para el cálculo*	Sexta	Cengage Learning
Swokowsky, E. W, Cole, J. A	2009	*Algebra y Trigonometría con geometría analítica*	Décimo segunda	Cengage Learning
Díez, L. H	2009	*Matemáticas operativa*	Décimo sexta	Díez Mejía
Sullivan, M	2007	*Álgebra y Trigonometría*	Séptima	Pearson

Para hacer el respectivo análisis realizamos un proceso de codificación en el que determinamos la presencia de dos términos, a saber: “razones” y “funciones”. Dichos términos los analizamos en el contexto en el cual fueron usados en los libros de texto e interpretamos sus significados. Posteriormente establecimos un conjunto de tres categorías, las cuales emergieron en nuestro propósito de comprender los aspectos relevantes que se originan en el tratamiento de las razones y las funciones trigonométricas. Estos hallazgos fueron triangulados entre los diversos textos, para luego ser divulgados y discutidos con expertos en esta temática.

ALGUNOS HALLAZGOS

Los resultados de este análisis confirman las conclusiones de Tavera y Villa-Ochoa (2013) quienes señalan que los libros de textos abordan la temática de las razones trigonométricas haciendo especial énfasis en el uso de ecuaciones lineales, donde los valores a encontrar (por ejemplo: lados y ángulos agudos de un triángulo rectángulo) se presentan como incógnitas, los cuales son asumidos como cantidades desconocidas que permanecen “fijas” y no como cantidades que varían para poder establecer ciertas relaciones funcionales. En este artículo centramos la atención en dos aspectos, a saber: (i) usos de los términos relaciones (razones) y funciones, y (ii) la transición entre las razones y las funciones.

Usos de los términos relaciones (razones) y funciones

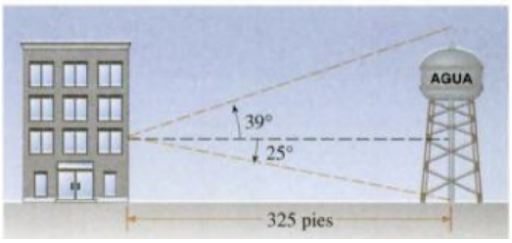
En las Tablas 3 y 4 se presentan algunas de las tareas propuestas por los libros de textos analizados, que al solucionarlas ejemplifican lo dicho anteriormente.

Tabla 3.

Si $\cos\theta = \frac{3}{4}$, dibuje un triángulo rectángulo con un ángulo, θ, y determine las otras cinco razones trigonométricas de θ.	Una escalera de 10 m de largo está apoyada contra un edificio. Si la base de la escalera está a 1 m de la base del edificio, ¿cuál es el ángulo formado entre la escalera y el edificio?

Fuente: Buriticá (2012, p. 128)

Tabla 4.

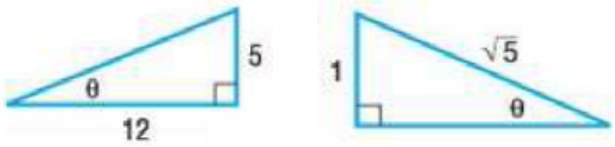
Altura de una torre Una torre de agua se localiza a 325 pies de un edificio (véase la figura). Desde una ventana en el edificio, un observador nota que el ángulo de elevación de la parte superior de la torre es de 39° y que el ángulo de depresión respecto a la base de la torre es de 25°. ¿Qué tan alta es la torre? ¿A qué altura está la ventana?	

Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 450)

Los libros de texto seleccionados para este análisis hacen un uso indiscriminado de los términos "razones" y "funciones"; dado que en los enunciados de las tareas propuestas algunas veces emplean las palabras: "hallar las funciones trigonométricas del ángulo θ" y al resolverlas, identificamos que se utilizan las razones trigonométricas. Conforme Montiel y Buendía (2013) han señalado, algunas investigaciones informan que existen estudiantes con dificultades para comprender la diferencia que hay entre las razones y las funciones trigonométricas; para este tipo de estudiantes, el uso del libros de texto como el ejemplificado anteriormente, poco aportarían a resolver esas dificultades, pues no hace diferencia de ambos términos ni promueven el desarrollo de ambiente para su comprensión en contextos en los cuales cobraría sentido (por ejemplo: fenómenos de variación).

En la Tabla 5 se muestra algunas tareas propuestas por los libros de texto analizados, que sirven de evidencia para justificar los comentarios anteriores.

Tabla 5.

Encontrar el valor de las funciones trigonométricas del ángulo θ en cada figura 	Dado que $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}$ y θ es un ángulo agudo, encuentre el valor exacto de las cinco funciones trigonométricas de θ restantes. Dado $\tan\theta = \frac{1}{2}$, θ un ángulo agudo, encuentre el valor exacto de las otras cinco funciones trigonométricas de θ.

Fuente: Sullivan (2007, p. 510 - 515)

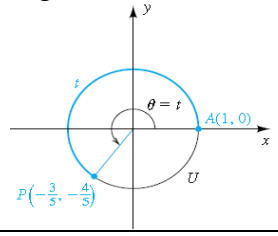
La transición entre razones y funciones trigonométricas

Los libros de textos analizados en este estudio muestran que la transición del tema de las razones a las funciones trigonométricas implica la introducción de coordenadas cartesianas, las cuales sirven para representar el punto de intersección entre el lado terminal de un ángulo y la circunferencia goniométrica. Desde esta perspectiva, se tiene que las relaciones trigonométricas deben de trascender su interpretación geométrica como razón entre dos lados de un triángulo (rectángulo), para considerarse como "distancias dirigidas" en un plano cartesiano.

En el contexto referido anteriormente, la idea de ángulo debe trascender la interpretación que se le da en un triángulo, para asumir posiciones relativas en un plano cartesiano (por ejemplo: la rotación de dos rayos ($\mathbf{R_1}$ y $\mathbf{R_2}$) sobre el origen de un plano cartesiano, donde uno permanece fijo ($\mathbf{R_1}$) y el otro gira ($\mathbf{R_2}$) para determinar la medida de dicho ángulo). En esta interpretación, no se hace alusión solamente al dominio sobre el cual recaen los valores de los ángulos agudos y obtusos sino que el dominio pasa a ser el conjunto de los números reales.

Conforme hemos mencionado anteriormente, cuando los libros de texto inician el desarrollo de la trigonometría con el estudio de las relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo se generan necesidades de promover cambios en la notación y en la interpretación de algunos de los objetos involucrados, de tal forma que se puedan generar las comprensiones de las funciones trigonométricas. Con relación a esta última temática en la Tabla 6 se exhibe un ejemplo de como son trabajadas, en los libros de texto analizados, las funciones trigonométricas.

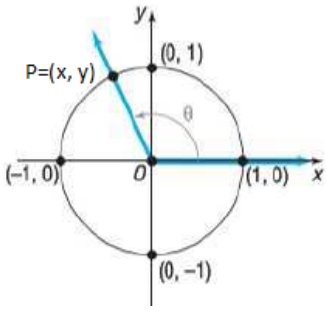
Tabla 6.

Un punto $P(x, y)$ en la circunferencia unitaria U correspondiente a un número real t se muestra en la figura 4, para $\pi < t < 3\pi/2$. Encuentre los valores de las funciones trigonométricas en t. Solución $\operatorname{sen} t = y = -\frac{4}{5}$ $\quad \cos t = x = -\frac{3}{5}$ $\quad \tan t = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$ $\csc t = \frac{1}{y} = \frac{1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4}$ $\sec t = \frac{1}{x} = \frac{1}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}$ $\cot t = \frac{x}{y} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$	Figura 4 

Fuente: Swokowski y Cole (2009, p. 395)

En la transición de las razones a las funciones trigonométricas los libros de texto introducen un cambio de su notación para representar el dominio y el rango de dichas funciones, sin embargo, no observamos acciones que promuevan el cambio de significado en esa nueva notación. En la Tabla 7 y 8 se muestran dos usos distintos de la variable *x* y la variable *y*.

Tabla 7.

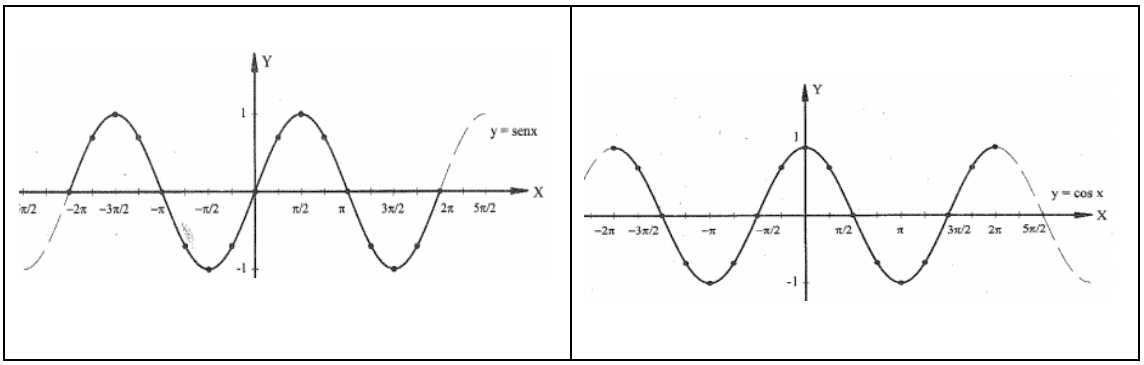
Figura 65  	Sea θ un ángulo en posición normal y sea P = (x, y) el punto de un círculo unitario que corresponde a theta. Vea la figura 65. Entonces, por definición: sen θ = y csc θ = $\frac{1}{y}$, y ≠ 0 cos θ = x sec θ = $\frac{1}{x}$, x ≠ 0 tan θ = $\frac{y}{x}$, x ≠ 0 cot θ = $\frac{x}{y}$, y ≠ 0

Fuente: Sullivan (2007, p. 541)

En la Tabla 7 podemos observar una manera en que los libros de texto introducen la noción de funciones trigonométricas a través de un círculo unitario representado en el plano *xy*. En esta tabla, tanto el ángulo (theta – variable independiente) como la ordenada (*y* – variable dependiente) y la abscisa (*x* – variable dependiente) se interpretan como variables.

Posteriormente aparecen las gráficas *y*=sen *x*, y *y*=cos *x*, (Tabla 8) en el cual los símbolos *x* y *y* representan la variación entre dos variables (magnitudes no necesariamente geométricas). Cuando estas funciones se interpretan geométricamente, se observa que la variable *x* deja de ser interpretada como abscisa para ser interpretada como el ángulo.

Tabla 8.



Fuente: Díez (2009, p. 123)

Por otra parte, en los libros de texto revisados se observa poco énfasis en los aspectos dinámicos que están en la naturaleza de las nociones de razón, relación y función. En estos textos las tareas planteadas sobre el estudio de la trigonometría plana -tanto en el triángulo rectángulo como en la circunferencia goniométrica- se centran principalmente en la aplicación de procesos algebraicos y estos difícilmente permiten visualizar las situaciones de cambio y de variación que trae consigo misma esta rama de las matemáticas.

CONCLUSIONES

A partir de los resultados de este estudio se observa que existen libros de texto que se preocupan por desarrollar aspectos conceptuales y procedimentales centrados en el tratamiento algebraico, lo cual conlleva a la utilización de símbolos para operar sin preocuparse por sus usos y significados. Conforme como hemos argumentado en este artículo, en algunos textos hacen un cambio de notación pero no de significado. Este aspecto no se observa en coherencia con el desarrollo del "pensamiento funcional-trigonométrico", dado que Montiel y Buendía (2013) señalan que para abordar éste tipo de pensamiento requiere del uso de un contexto dinámico.

A partir de los resultados de este estudio sugerimos que tanto profesores como investigadores han de estar atentos a los usos y significados que los libros de texto presentan con el fin de proponer estrategias que promuevan los cambios de significados requeridos. Al igual que Montiel y Buendía (2013) sugerimos el diseño de ambientes en los que los estudiantes experimentes procesos de variación, usen y den sentido a las razones y funciones trigonométricas los contextos en los cuales tienen lugar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

De Kee, S., Mura, R., y Dionne, J. (1996). La compression des notions de sinus et de cosinus chez des élèves du secondaire. *For the Learning of Mathematics, 16*(2), 19 - 27.

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM Mathematics Education, 45*(5), 765 - 777.

Jácome, G. (2011). *Estudio socioepistemológico de la razón trigonométrica. Elementos para la construcción de su naturaleza proporcional.* Tesís de maestría no publicada, Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencias Aplicada y Tecnología Avanzada, México D. F.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica.* Barcelona: Ediciones Paidós.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencia.* Bogotá: Magisterio.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica.* Tesis de doctorado no publicada, Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencias Aplicada y Tecnología Avanzada, México D.F.

Montiel, G., y Buendía, G. (2013). Desarrollo del pensamiento funcional-trigonométrico. En G. Buendía, M. Ferrari, y G. Martínez, *Resignificación de funciones para profesores de matemáticas* (págs. 169 - 205). México D. F.: Díaz de Santos.

Pino, J., y Blanco, L. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones, 38*, 63 - 88.

Randahl, M. (2012). Approach to mathematics in textbooks at tertiary level: Exploring authors' views about their texts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 43*(7), 881 - 896.

Rezat, S. (2013). The textbook-in-use: students' utilization schemes of mathematics textbooks related to self-regulated practicing. *ZDM Mathematics Education, 45*(5), 659 - 870.

Selva, A., y Borba, M. (2013). *Uso de la Calculadora en los primeros grados de escolaridad.* Medelín - Colombia: Sello Editorial Universidad de Medellín.

Tavera, F. A. (2013). *El pensamiento variacional en los libros de texto de matemáticas: el caso de las relaciones trigonométricas.* Tesís de maestria no publicada, Universidad de Medellín, Ciencias Básicas, Medellín.

Tavera, F. A., y Villa-Ochoa, J. A. (2013). El pensamiento variacional en los libros de texto de matemáticas: el caso de las relaciones trigonométricas. En A. Ramírez, & Y. Morales, *Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y del Caribe* (págs. 666 - 676). Santo Domingo - República Dominicana: REDUMATE - PUCMM.

Villa-Ochoa, J. A., y Ruiz, H. M. (2010). Pensamiento variacional: seres-humanos-con-Geogebra en la visualización de nociones variacionales. *Educação Matemática Pesquisa, 12*(3), 514 - 528.

Weber, K. (2005). Students' Understanding of Trigonometric Functions. *Mathematics Education Research Journal, 17*(3), 91 - 112.

ÁLGEBRA Y EL ENFOQUE POR COMPETENCIAS EN EL BACHILLERATO MEXICANO

Dulce Yuridia Miranda Aragón, Silvia Elena Ibarra Olmos
Universidad de Sonora (México)
dhyma142@hotmail.com, sibarra@mat.uson.mx

Palabras clave: álgebra, competencias, México, libros de texto

Key words: algebra, competences, México, textbook.

RESUMEN:. En México se introdujo la Reforma Integral de la Educación Media Superior, la cual propone un Marco Curricular Común con base en competencias. El objetivo general de la presente investigación consiste en identificar cuáles y de qué manera son promovidas las competencias matemáticas, específicamente aquellas relativas al conocimiento algebraico, en el caso de algunos subsistemas mexicanos de bachillerato ubicados en el noroeste del país. Esto se realizará utilizando el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemática como marco teórico para el análisis de documentos clave, como son los programas de materia y libros de texto utilizados por las instituciones de interés.

ABSTRACT: In Mexico was introduced the "Reforma Integral de la Educación Media Superior" (Reform of School Education), which proposes a Common Curriculum Framework based on a Competencies Approach. The general purpose of the present investigation is to identify the competences relative to mathematical knowledge and how they are promoted in some high school institutes in the northwest of México. We will use the Onto-Semiotic Approach (OSA) of mathematical cognition and instruction for the analysis of key documents, such as subject programs and textbooks used in the institutes of interest.

INTRODUCCIÓN

En este documento se exponen los avances que hasta el momento se tienen sobre el proyecto de tesis titulado “Álgebra y el enfoque por competencias en el Bachillerato”. En la primera sección de este trabajo se muestra la identificación del problema, las principales características de la investigación, así como algunos elementos mínimos que justifican su selección. Se plantearán las preguntas de investigación y se darán a conocer los objetivos.

En la segunda sección, se analizarán los componentes teóricos utilizados y la metodología a implementarse en el desarrollo de la investigación.

En una tercera sección se analiza una sección de uno de los textos, lo cual representa una muestra del trabajo que se está realizando.

La problemática y algunos elementos para su justificación

En México por mucho tiempo la educación media superior estuvo “compuesta por una serie de subsistemas que operan de manera independiente, sin correspondencia a un panorama general articulado y sin que exista suficiente comunicación entre ellos” (Acuerdo Secretarial No. 442, p.5). Por lo cual se propone como un reto encontrar los objetivos comunes de esos subsistemas, además de considerar la formación de personas cuyos conocimientos y habilidades les permitan continuar sus estudios superiores y/o desempeñarse en el mundo laboral. Es así que en 2008 se da a conocer la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS), la cual propone la creación de un Sistema Nacional de Bachillerato (SNB) que integre los aspectos antes mencionados.

El Marco Curricular Común en la RIEMS

La Reforma está fundamentada en cuatro ejes y el primero de ellos consiste en la construcción e implantación de un Marco Curricular Común (MCC) con base en competencias, ya que la existencia de una gran diversidad de subsistemas había ocasionado una desarticulación académica de los planes y programas de estudio. Aunque la solución a este problema podía tomar dos direcciones, por un lado definir un conjunto de asignaturas comunes y por el otro establecer desempeños finales compartidos que deben alcanzar todos los estudiantes que culminan este nivel educativo, esta última es la más viable al buscar un cierto grado de libertad para las instituciones, respetando su organización curricular.

En este marco curricular las competencias se agrupan en genéricas, disciplinares y profesionales. Las genéricas capacitan a los estudiantes para continuar aprendiendo de forma autónoma a lo largo de sus vidas, las profesionales se refieren a un campo del quehacer laboral y éstas pueden ser básicas o extendidas y por último las competencias disciplinares buscan integrar los conocimientos, habilidades y actitudes necesarias para la resolución de un problema teórico o práctico. Hay dos niveles de complejidad para estas competencias: las básicas, que se desprenden de los conocimientos que todos los alumnos tienen que dominar independientemente de sus estudios futuros; por otro lado tenemos las extendidas, las cuales especializan al estudiante en un campo de conocimiento específico. En el caso de las competencias disciplinares en el área de Matemáticas, se considera que se han desarrollado cuando el alumno:

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.

8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos (Acuerdo Secretarial No. 444).

Las instituciones de interés

En las distintas modalidades para el bachillerato en México se desarrollan las competencias genéricas y disciplinares básicas, sin embargo existen ciertas diferencias. El bachillerato general además de las competencias mencionadas también desarrolla las disciplinares extendidas. En la modalidad de bachillerato general con capacitación para el trabajo las instituciones tienen una componente de formación profesional (competencias profesionales básicas), mientras que los bachilleratos tecnológicos proporcionan a los egresados una calificación de nivel técnico que eventualmente puede ser certificada (competencias profesionales extendidas).

Para nuestro estudio hemos considerado tres subsistemas que imparten la educación media superior en el estado de Sonora, el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora (COBACH), el Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios (C.B.T.i.s.) y el Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Sonora (CECyTES); por ser las instituciones de bachillerato más representativas de nuestro estado al concentrar más del 60% de los alumnos de preparatoria en la modalidad escolarizada, esto sin incluir las preparatorias incorporadas a cada uno de los subsistemas (Secretaría de Educación y Cultura, 2015, p. 3).

En estas instituciones los estudiantes tienen la oportunidad de cursar varias asignaturas relacionadas con Matemáticas, entre ellas álgebra, geometría, geometría analítica, estadística, cálculo diferencial y cálculo integral. Hemos seleccionado la primera asignatura del plan de estudios que aborda temas matemáticos para realizar nuestro estudio, la cual corresponde a Álgebra. Sin embargo el programa de la asignatura es diferente para las distintas modalidades del bachillerato.

De acuerdo con el planteamiento expresado en la Reforma, los programas han sido formulados de tal modo que respondan al enfoque por competencias. Entonces ¿cómo se establecen los

contenidos matemáticos a estudiar en cada uno de los programas? ¿Qué se pierde o se gana al incluir o descartar determinados temas? ¿En qué difieren con respecto a los programas que les anteceden? ¿En qué elementos del programa se advierten las modificaciones que implica la Reforma?

En esta investigación, justamente, estamos interesados en la relación que guardan los planteamientos de la RIEMS con las acciones que han realizado las diversas instituciones del bachillerato en al ámbito curricular, particularmente en lo relacionado a los planes, programas de estudio y textos.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las instituciones han realizado las adecuaciones que impone la RIEMS, renovando planes y programas, libros de texto, creando programas de formación de docentes y directivos, y otras acciones que posibilitan su ingreso al SNB. En este escenario, nos preguntamos ¿las acciones realizadas reflejan realmente los planteamientos de la Reforma?

En el caso del currículo matemático, ¿qué modificaciones se han realizado a los objetivos, contenidos y medios disciplinares, (componentes clásicas en una propuesta curricular)? ¿Estas modificaciones han detonado otros procesos, como acciones de formación de profesores sobre distintas formas de trabajar con los estudiantes? ¿Qué versión o interpretación de competencias se está promoviendo actualmente?

En este sentido, y con el propósito de tener elementos para responder a la serie de interrogantes que hemos venido planteando, estudiaremos, para el caso de algunos temas del programa de la asignatura de Álgebra, las competencias disciplinares promovidas por instituciones representativas del bachillerato sonorense. Nuestra pregunta de investigación queda expresada entonces de la siguiente forma:

¿Qué competencias matemáticas, específicas del álgebra se están desarrollando y cómo se promueven en algunas instituciones de educación media superior del Estado de Sonora?

Buscamos dar respuesta a esta pregunta al centrarnos particularmente en los planes, programas y textos de las instituciones de estudio, considerando como casos separados cada una de las instituciones, con el propósito de realizar una descripción y análisis de las competencias promovidas en el nivel medio superior.

Para realizar el estudio utilizaremos el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) como marco teórico, el cual nos permitirá identificar las competencias matemáticas promovidas por la institución mediante la descripción y análisis de los sistemas de prácticas puestas de manifiesto ante ciertos problemas. Por lo cual de las preguntas anteriores se desprenden las siguientes:

Con relación al conocimiento algebraico, ¿Cuáles son las prácticas institucionales promovidas en los planes, programas y textos del bachillerato?

¿Cómo se relacionan las prácticas institucionales que se desprenden de los planes, programas y textos del bachillerato con la versión de competencias que se está promoviendo?

Los planes y programas de estudio funcionan como un ordenador institucional, desde esta perspectiva, podemos entender el programa como "el documento oficial de carácter nacional en el que se indica el conjunto de contenidos a desarrollar en determinado nivel El Programa recoge lo que en cada momento cultural y social es definido como los conocimientos, habilidades, valores y experiencias comunes y compartidas por un pueblo (Zabalza, 1987, pp.14-15). Y dado que se plantea en términos prescriptivos, podemos referirnos a él como el conjunto de experiencias de aprendizaje por las que han de pasar los jóvenes en determinado nivel escolar.

La razón de considerar los libros de texto como otra de las fuentes de información se debe a que éstos constituyen una parte fundamental en los procesos de enseñanza y aprendizaje en diversos países, especialmente en México. En algunos casos, el texto llega a sustituir la planeación del profesor, convirtiéndose en el único recurso empleado en la práctica docente. Al tener un rol tan importante en los procesos educativos, el libro de texto debiera estar en constante escrutinio, con el propósito de evaluar su pertinencia disciplinar y didáctica. Por otro lado el análisis de textos es una componente fuerte en el área de matemática educativa (Ruiz de Gauna, Dávila, Etxeberria y Sarasúa, 2013).

OBJETIVOS

El objetivo general de nuestro trabajo consistiría entonces en:

"Identificar y analizar las competencias matemáticas promovidas en el nivel medio superior correspondientes a ciertos contenidos de álgebra, además de establecer la relación que guardan con las competencias disciplinares planteadas en la RIEMS."

Los objetivos particulares que nos permitirán alcanzar el objetivo general se enlistan a continuación:

• Identificar y describir las prácticas institucionales promovidas en los planes de estudio de cada institución, en los programas y textos de álgebra.

• Relacionar las prácticas institucionales que se desprenden de los planes, programas y textos del bachillerato con las competencias disciplinares.

Como ya se dijo, para las instituciones de bachillerato en el Estado de Sonora.

El tema matemático de estudio

El tema matemático que hemos seleccionado forma parte de lo que se conoce en matemáticas como pensamiento algebraico, el cual alude a los fines más relevantes del estudio de la aritmética y del álgebra. Por un lado, permite encontrar el sentido del lenguaje matemático y por otro, tiende un puente entre la aritmética y el álgebra, en el entendido de que el álgebra tiene una gran presencia como contenido matemático en diferentes etapas en la educación, en especial a partir de la Educación Secundaria (Secretaría de Educación Pública, 2006).

"En relación con los procesos del pensamiento algebraico: la sustitución formal, la generalización y la modelización, son los procesos característicos del lenguaje algebraico que se utilizan también en otras partes de las Matemáticas y en otras ramas del saber" (Socas, 2011, pp. 19-20).

Uno de los objetivos en matemáticas es tratar de describir procesos de formas globales, definir patrones y comportamientos generales, pero al mismo tiempo, se espera que los estudiantes sean

capaces de realizar deducciones a partir de reglas y patrones ya definidos. Para Mason (1996, citado por Socas, 2011), esto es el corazón de las matemáticas y consiste en ver tanto los casos particulares en la generalidad como ver la generalidad a través de los casos particulares.

ELEMENTOS TEÓRICOS Y ACCIONES METODOLÓGICAS

Elementos teóricos

En la sección anterior declaramos que el marco teórico que utilizaremos es el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2009 y Godino y Batanero, 1994) ya que ofrece elementos adecuados para realizar este análisis.

En la teoría (Godino, Contreras, y Font, 2006) se distinguen diferentes procesos instruccionales (cada experiencia particular de enseñanza de un contenido matemático) en los cuales se distinguen seis dimensiones que se encuentran interconectadas: epistémica, docente, discente, mediacional, cognitiva y emocional.

Es de nuestro interés estudiar la faceta epistémica a través de las trayectorias.

Al requerirse la identificación de los objetos matemáticos (lenguajes, situaciones problemáticas, procedimientos, conceptos, teoremas, propiedades, argumentaciones), puestos en juego y las relaciones que se establecen entre los mismos, recurrimos a las configuraciones epistémicas. La trayectoria epistémica es por lo tanto, la distribución en el tiempo de estas configuraciones.

Las relaciones entre los objetos matemáticos nos permitirán identificar las prácticas y corresponderlas con los atributos de las competencias disciplinares, proporcionando una descripción de las competencias que se busca desarrollar en los textos. De esta forma tendremos una versión de competencias de cada institución, siendo esto lo que se busca conocer mediante la investigación.

Acciones Metodológicas

Tal como se ha descrito en las secciones anteriores, se realizará un análisis onto-semiótico de los libros de texto de tres instituciones además de los planes y programas de estudio. En esta sección describiremos las acciones metodológicas necesarias para alcanzar los objetivos planteados.

Primeramente fue necesario realizar una revisión bibliográfica, en la cual se indagó sobre la RIEMS, los planes de estudio de los diferentes subsistemas y los programas. Posteriormente se hizo la selección de los libros de texto que se revisarán y las secciones que se analizarán. Además se hizo la identificación de los atributos de las competencias disciplinares, particularmente los relacionados al conocimiento algebraico.

Para cada una de las competencias disciplinares se construyeron los atributos considerando el trabajo de Marín, Guzmán y Zapata (2012) así como las competencias genéricas establecidas en la RIEMS y algunos trabajos sobre competencias en álgebra (Filloy, Puig y Rojano, 2008).

Después se procedió a la elaboración de las trayectorias epistémicas en los textos, para lo cual se realizó una división de los apartados correspondientes en unidades de análisis. Éstas se organizaron en tablas en las cuales se describieron los objetos matemáticos primarios involucrados en cada unidad, además se describieron las relaciones que guardan entre sí, lo que constituye la configuración epistémica de cada unidad de análisis. Una vez hecha la configuración se

identificaron los procesos relacionándolos con los atributos de las competencias. De esta forma se podrán describir las competencias que se están promoviendo en el texto y en qué medida se está haciendo.

A partir de esto se concluirá con un resumen de las prácticas promovidas alrededor de los objetos matemáticos y sus relaciones, con lo cual se podrá describir el significado institucional de referencia. Después de esto se relacionará el significado institucional con la noción de competencias globalmente, buscando responder a la pregunta de investigación.

EL SIGNIFICADO INSTITUCIONAL DE REFERENCIA

En esta sección se realizará una muestra del análisis de uno los textos, en el caso del texto o módulo de aprendizaje de COBACH lleva por título "Matemáticas 1" (Vargas, Rodríguez, Castillo, Villalva, Ibarra, Grijalva, Armenta, Ávila, Urrea, Soto, Bravo, 2014). Está organizado en nueve bloques; cada uno de estos bloques se conforma por secuencias didácticas que a su vez constan de tres tipos de actividades: inicio, desarrollo y cierre. En este caso, analizaremos las primeras secuencias didácticas relacionadas con Álgebra.

A continuación se muestra una de las configuraciones epistémicas del texto:

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 2

UNIDAD DE ANÁLISIS		OBJETOS PRIMARIOS
2.1	Desarrollo Actividad: 2 Actividad Individual **Completa los arreglos con números positivos** Los juegos con números siempre han resultado atractivos para ciertos grupos de personas, particularmente para aquellos que se sienten atraídos por las matemáticas, encontrar el número perdido es una actividad que se presenta desde primaria en algunas situaciones sencillas en las que se debe encontrar un número que cumpla ciertas condiciones dadas de antemano. *Un ejemplo de este tipo de situaciones puede ser el siguiente:* Encuentra el número que va en el cuadro: $5 + \square = 18$ $\quad 4 + 3 \times \square = 19$ ¿Cuáles son los números que van en los cuadros?	**Situaciones-Problemas:** *Encontrar todos los números que cumplan con las características señaladas (2.1, 2.2, 2.3). *Resolver un problema usando la herramienta algebraica (2.6). **Lenguajes:** *Verbal (planteamiento de problemas, explicaciones, argumentaciones) *Numérico (N, conteo y representación de cantidades) *Algebraico (representar cantidades desconocidas x, y; **plantear y simplificar una ecuación: $3x + 3y + 15 = 42$)** ***Figurativo (Figuras en 2.2, 2.3 y 2.6)** **Conceptos:** *Intervinientes:* Números, suma, solución del problema.
2.2	*Una situación menos sencilla puede ser la siguiente:* Encuentra el número que falta en el primer renglón y que permite completar el siguiente arreglo. Toma en cuenta que cada pareja de números se suma horizontalmente, pero el resultado se anota inmediatamente debajo del signo de suma. Al número que falta en el primer renglón le llamaremos la solución del problema. ¿Te resultó sencillo encontrar número que faltaba en el primer renglón?	
2.3	Encuentra los dos números naturales que faltan en el primer renglón y que permiten completar el siguiente arreglo numérico. De nuevo cada número es la suma de los dos números superiores, como indican las flechas. A los dos números naturales buscados le llamaremos la solución del problema.	
2.4	En equipo responde las siguientes preguntas: 1. ¿Con qué números completaste el primer renglón en el primer intento? 2. ¿Con qué criterio cambiaste los números (del primer renglón) que habías anotado en el primer intento? 3. Anota la solución que encontraste.	
2.5	4. ¿Habrá otro par de números que puedan ser solución del problema? ¿Cuáles? 5. Presentar al grupo los resultados obtenidos al trabajar en equipo. 6. ¿Cuántas soluciones existen para el problema? Como podrás darte cuenta los equipos encontraron diferentes soluciones al problema. En la parte siguiente de la actividad nos dedicaremos a investigar cuántas posibles soluciones tiene este problema.	**Propiedades:** *Propiedades de la igualdad (reflexiva, simétrica, aditiva y multiplicativa) *Suma de términos algebraicos.
2.6	Si llamamos x y y a los números que se colocan en el primer renglón, tal como se muestra, completa los espacios en blanco.	**Procedimientos:** Sumas, restas, divisiones y multiplicaciones. Suma de expresiones algebraicas simples para resolver un problema (Ejemplo en 2.6). Simplificar una expresión (Ejemplo en 2.7).
2.7	7. Si los dos números que estamos buscando son desconocidos, ¿por qué no representamos con x a los dos? 8. ¿Cuál es la expresión que resulta de sumar las dos expresiones del tercer renglón? 9. ¿Cuál es la ecuación que relaciona la expresión obtenida en el tercer renglón con el número 42? 10. Simplifica lo más que puedas la ecuación obtenida. 11. Compara con los demás equipos las ecuaciones simplificadas y selecciona entre ellas la más simplificada. 12. ¿Cuánto deben sumar x e y para que sean solución del problema? 13. Haz una lista con todas las parejas que son soluciones del problema. 14. Compara los tanteos numéricos que te llevaron a la solución del problema con el procedimiento algebraico que usaste después. ¿Cuál te parece mejor? Justifica tu respuesta.	**Argumentos:** Justificación mediante la herramienta algebraica (Ejemplo en 2.7).

Figura 1

Para realizar este análisis se dividieron las secuencias didácticas seleccionadas en unidades de análisis, tomando como referencia cada una de las actividades.
Posteriormente se muestran las relaciones existentes entre los objetos matemáticos y las prácticas que se desprenden de éstas destacando los procesos, por último se identifica la relación con los atributos de las competencias.

Esta configuración corresponde al primer bloque del plan de estudios de la DGB, particularmente está relacionado con los desempeños "Representa relaciones numéricas y algebraicas entre los elementos de diversas situaciones" y "Soluciona problemas aritméticos y algebraicos" además el objeto de aprendizaje de acuerdo al programa sería "Modelos aritméticos y algebraicos".

El análisis que se hace a continuación es una parte de la trayectoria epistémica del texto de COBACH y se procedió con el resto de las actividades de forma similar.

Configuración Epistémica 2:

Con el propósito de resolver las situaciones problema planteadas en 2.1, 2.2 y 2.3, se realizará un proceso de algoritmización, lo cual se reduce a cálculos numéricos. Este proceso implica la movilización de los atributos 1a, 1c, 2b, 2e, 3b, 4a, 8a y 8b.

Al responder las cuestiones planteadas en 2.4 y 2.5 identificamos un proceso de comunicación, además de particularización, ya que el estudiante en un primer momento proporciona una solución al problema. Es así que en los apartados 2.4 y 2.5 se están promoviendo los atributos 2g, 2h, 3c, 3d, 4b, 4c y 4e.

En 2.7 identificamos un proceso de personalización donde se guía al estudiante a encontrar un modelo algebraico que proporciona una solución general lo cual implica una generalización. Con estos procesos se desarrollan los atributos 1b, 1d, 1h, 2a y 2c además algunos mencionados anteriormente.

Esto representa solamente un acercamiento del análisis que realizaremos en nuestra investigación ya que no basta una configuración para describir la versión de competencias promovidas por la institución, es necesario analizar toda la trayectoria y hacer un análisis de los atributos que se desarrollaron en cada actividad para identificar las competencias que efectivamente se están desarrollando en esa sección del texto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acuerdo Secretarial No. 442. (2008). *Por el que se establece el Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad*. México: DOF.

Acuerdo Secretarial No. 444. (2008). *Por el que se establecen las competencias que constituyen el marco curricular común.* México: DOF.

Godino, J.D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3): 325-355.

Godino, J.D. y Batanero, C. y Font (2009). Un Enfoque Onto-Semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Recuperado el 21 de Mayo de 2014 en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J.D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26(1), 39-88.

Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 25(3), pp. 327-342.

Marín, R., Guzmán, I. y Zapata, M. (2012) La construcción de atributos. Una propuesta pedagógica viable en la evaluación de competencias matemáticas. I Congreso Internacional de Educación. Chihuahua, México.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching.*London: Kluwer Academic Publishers.

Ruiz de Gauna, J., Dávila, P., Etxeberria, J. y Sarasúa, J. (2013). Los libros de texto del bachillerato en el periodo de 1970-2005. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 16 (2), 245-276.

Secretaría de Educación y Cultura. (2015). Inicio de Cursos 2014-2015 por sostenimiento. Recuperado el 29 de Mayo de 2015, de: http://148.235.6.240/upeo/imagen/documentos/Inicio%202014%20-%202015.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2006). Educación básica. Secundaria. Matemáticas. Programas de estudio 2006. México: SEP.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*. 77, 5-34.

Vargas, J.R., Rodríguez, M.A., Castillo, A.G., Villalva, M.C., Ibarra, S.E., Grijalva, A., Armenta, M., Ávila, R., Urrea, M.A., Soto, J.L. y Tapia, J.M. (2014) *Matemáticas 1*. Hermosillo: COBACH.

Zabalza, M.A. (1987). *Diseño y desarrollo Curricular*. Madrid: NARCEA.

ELEMENTOS ARTICULADORES PARA LOS MODOS DE COMPRENDER EL CONCEPTO DE DERIVADA

Irma Pinto Rojas, Marcela Parraguez González
Universidad Católica del Norte (Chile), Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)
ipinto@ucn.cl, marcela.parraguez@pucv.cl

Palabras clave: elementos articuladores, modos de pensamiento, comprensión, derivada.

Key words: articulating elements, modes of thinking, understanding, derivative.

RESUMEN: Este reporte describe los elementos matemáticos articuladores en los modos de pensar el concepto de derivada de una función real de variable real. Estos modos se han sustentado en el pensamiento práctico y teórico de Sierpinska, y se han validado con un análisis histórico-epistemológico, cognitivo y didáctico con base en la epistemología de Cauchy, los modos que se proponen para comprender este concepto son: modo Geométrico-Gráfico-Convergente (GGC), Analítico-Operacional (AO) y Analítico-Estructural (AE). Para alcanzar este objetivo se diseñan secuencias didácticas que son aplicadas a un grupo de estudio, con metodología de estudio de casos, con informantes de primeros años de nivel universitario.

ABSTRACT: This report describes the mathematical articulating elements for the modes of thinking the concept of derivative a real function of real variable. These modes are supported by the practical and theoretical thinking of Sierpinska, and validated by historical-epistemological, cognitive and didactic analysis, based on the epistemology of Cauchy, which are proposed to understand this concept modes are: mode Geometric-Graphical-Convergent (GGC), Analytical-Operational (AO) and Analytical-Structural (AE). To achieve this objective are designed teaching sequences that are applied to a study group with case study methodology, with students the early years of university level.

INTRODUCCIÓN

Esta investigación tiene una perspectiva cognitiva cuya motivación inicial fue describir cómo el objeto matemático "derivada", es comprendido por estudiantes de nivel universitario (19 años y más).Con este propósito se consideró un estudio desde un marco teórico cognitivo de la didáctica de la matemática, Los Modos de Pensamiento, propuesto por Sierpinska, (2000), marco que fue variado para el objetivo de este estudio, desde esta perspectiva teórica se define la comprensión profunda de la derivada como la capacidad que los estudiantes tienen para transitar desde un pensamiento práctico a un pensamiento teórico del concepto de derivada y se observa cuando un estudiante resuelve problemas del cálculo diferencial. A partir de la observación de estas producciones, se plantea, indagar respecto a los elementos matemáticos que propician este tránsito, que para este estudio serán llamados los elementos articuladores. La búsqueda de los elementos que favorecen el tránsito entre estos modos de pensar la derivada, permite plantear la pregunta que guiará esta investigación. ¿Cuáles son los elementos articuladores entre los modos GGC, AO y AE que permiten la comprensión profunda, del concepto de derivada?

Un desafío en esta etapa, será dar respuesta a esta pregunta, por lo que se han planteado los siguientes objetivos:

1. Determinar los elementos de conexión entre las formas de comprender la derivada.
2. La búsqueda de estos elementos conectores que pudiera estar en el ámbito de la matemática o de la física o de otra disciplina.
3. Una vez determinados estos articuladores serán validados a través de la realización de una secuencia de enseñanza y actividades de aprendizaje para la compresión de la derivada.

MARCO TEÓRICO

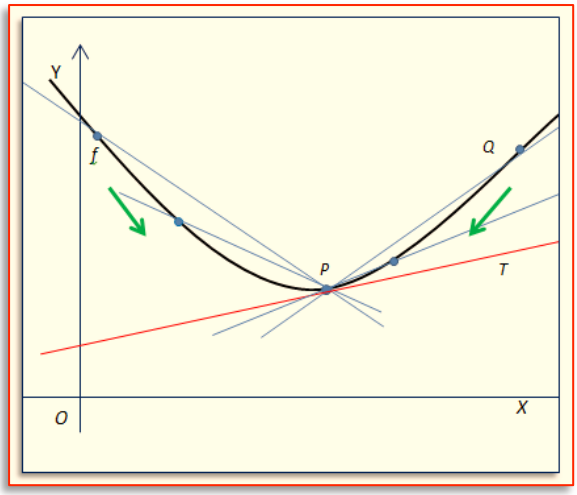
El marco teórico que sustenta esta investigación corresponde a una variación del marco teórico-*Los Modos de Pensamiento* de Anna Sierpinska-, un referente teórico que se focaliza en la actividad cognitiva exigida al sujeto que realiza una actividad matemática, es decir, observa la interacción del pensamiento con el objeto. En Sierpinska (2000) se caracterizan dos tipos de pensamiento, el pensamiento práctico, definido como una acción inmediata entre el sujeto y el objeto, alusivo a hechos observables y el pensamiento teórico, referido a la comprensión como la reflexión de los resultados de una acción, que considera la producción de sistemas conceptuales internos coherentes, sustentados en un sistema lógico de signos, por tanto reflexivo, sistémico y analítico. Sin embargo las autoras presentan una variación de este marco para el estudio en otra área de la matemática, en este caso el cálculo diferencial. Se plantea entonces la coexistencia de tres modos de pensar la derivada, presentados en Pinto y Parraguez (2015), de la siguiente forma:

Modo Geométrico-Gráfico-Convergente del concepto de Derivada (GGC).

Desde un estudio histórico-epistemológico del concepto de derivada, se define la recta tangente en un punto del gráfico de una función real de variable real, el elemento matemático fundamental para conseguir la imagen directa observable del concepto, sin embargo la noción de tangencia no forma parte del pensamiento práctico propuesto por Sierpinska, Nadozier y Oktaç (2002), se hace necesario una extensión del modo SG, que será llamado en adelante el modo Geométrico-Gráfico-Convergente (GGC) en relación a la comprensión del concepto derivada.

Es posible determinar una recta secante desde P, un punto fijo de la curva, a cualquier otro punto de ésta, a medida que éste se desplaza a lo largo de su gráfica, (Figura 1), se llegará a una posición límite que será representada por la recta tangente, el tránsito de la recta secante llegando a esta posición límite, que es cuando está próximo a P será representada por la pendiente de la recta tangente que será la imagen directa de la derivada de la función en *P*.

Figura 1. Representación del Modo Geométrico- Gráfico- Convergente del concepto de Derivada



Modo Analítico Operacional del concepto de Derivada (AO).

La idea de aproximar la recta tangente con múltiples rectas secantes que tienen distancias progresivamente más pequeñas entre los dos puntos que cruzan la función, (Figura 1), considera la recta tangente como la mejor aproximación lineal de la función alrededor de dicho punto. Se define entonces el concepto de derivada como el límite de las pendientes de las rectas secantes al aproximarlas a la recta tangente.

La derivada de f en el punto P es el límite del valor del cociente diferencial, en la medida que las rectas secantes se aproximan a la recta tangente, esto es:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Si este límite existe, entonces se dice que la derivada de f en el punto P es $f'(x_0)$.

En la aproximación lineal anterior, se sustenta que para definir el concepto de derivada en su forma (AO) se propició, considerar la definición de límite presentada por Cauchy, por tal razón el modo AA definido por Sierpinska pierde su carácter aritmético, emergiendo lo operacional del concepto, por lo que se reformula como el modo AO, para el caso específico de la derivada.

Con esta idea se define: Derivada de una función f definida en su dominio y continua, como la pendiente de la recta tangente de f en el punto P: $(x_0, f(x_0))$.

Modo Analítico Estructural del concepto de Derivada (AE):

Para definir el concepto de derivada en su forma (AE), es necesario mirar desde el modo AO, como se ha desarrollado el concepto de derivada de una función real de una sola variable, y desde esa

perspectiva seguir los elementos estructurales que permiten la generalización de este concepto como el elemento matemático que articula el modo AO y AE y que a su vez, permite definir el operador derivada desde la comprensión de la derivada en un punto a su comprensión de la derivada de una función en un punto cualquiera, $f'(x)$, es este concepto matemático que permite junto con sus propiedades la representación de derivada en el modo AE, se consideran así las reglas de derivación, los teoremas y el operador inverso (integración). Una función es diferenciable cuando el operador está bien definido. La derivada en este contexto será el operador derivada como transformación lineal, el operador inverso de la derivada, en el espacio vectorial de las funciones diferenciables.

Estos modos definidos para la derivada constituyen las vías de acceso a una comprensión profunda de la derivada, siendo la coordinación de ellos a través de elementos de conexión el objetivo principal de este estudio.

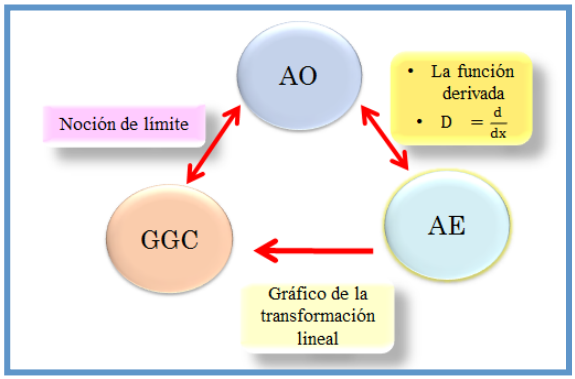
MÉTODOLOGÍA

Se propone una metodología en tres etapas, primero, determinar los elementos matemáticos de conexión entre las formas de comprender la derivada, desde un análisis epistemológico y didáctico del concepto, junto con la observación de los datos proporcionados por los informantes, segundo, validar estos articuladores con la aplicación de nuevos instrumentos y entrevistas en profundidad y tercero, concluir con la realización de una secuencia de enseñanza y actividades de aprendizaje del concepto, que serán relevantes para la comprensión de la derivada.

En este sentido, la primera etapa en desarrollo, considera las producciones de los estudiantes en la etapa de validación de los tres modos definidos, con la aplicación de una metodología cualitativa de naturaleza descriptiva y hermenéutica (Stake, 2010) para lo que se consideró un estudio de casos múltiples con dos grupos de informantes, el primer grupo denotado CASO1está formado por diez estudiantes que están cursando la asignatura de Cálculo Diferencial, seis de pedagogía en educación media y cuatro estudiantes de licenciatura en matemáticas, rotulados E1-E10, el CASO2 formado por tres estudiantes de licenciatura en matemáticas que han cursado recientemente el curso de ecuaciones diferenciales, rotulados E1,E2,E3.

Emerge desde un análisis histórico-epistemológico y de los resultados obtenidos del grupo de estudio, los tres articuladores matemáticos de los Modos de pensar el concepto de Derivada, se muestran en la Figura 2.

Figura 2. Descripción de los elementos articuladores entre los modos de pensar el concepto de derivada.



RESULTADOS

En una etapa inicial se presenta el concepto de límite como un articulador bidireccional, lo mismo con el concepto de función derivada y el gráfico de la transformación lineal se visualiza también bidireccional. Se presentarán algunos resultados de la búsqueda de articuladores.

Pregunta 3: Sea la función $f(x) = x^2$, en el punto $(1,1)$, la tabla muestra los valores resultantes del cociente $\frac{f(1)-f(x)}{1-x}$ que son las pendientes de las rectas secantes cuando x se aproxima a $x = 1$.

x	0.59	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$\frac{f(1)-f(x)}{1-x}$	1.59	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1

Esta pregunta, intencionada a situar al estudiante en el modo GGC, pretende que muestre rectas secantes aproximándose a la tangente en términos geométricos e identifique a la recta tangente, con la idea que muestre el tránsito hacia el modo analítico operacional (AO).

Desde una perspectiva teórica, el análisis de la reproducción del estudiante muestra que está situado en el modo GGC, sin poder transitar hacia el modo AO.

Figura 3. Informante E2, Se visualiza el concepto de límite en un punto.

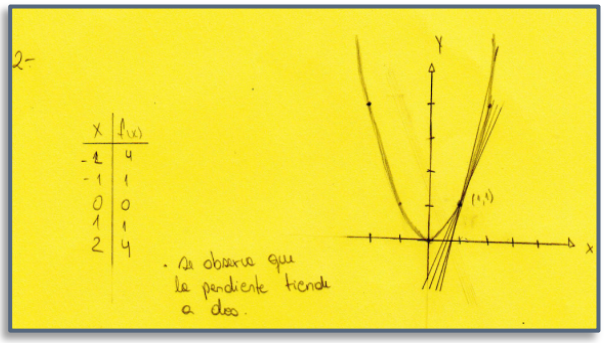
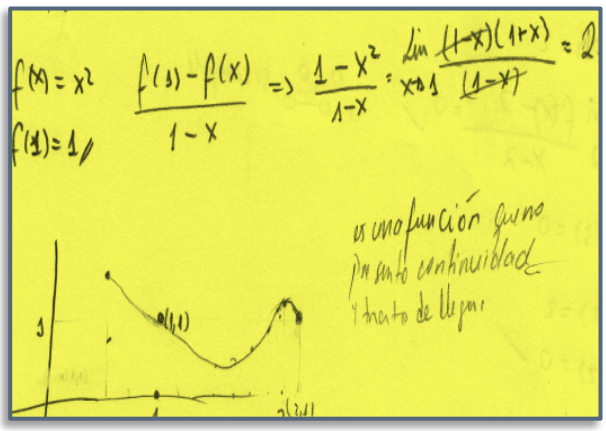


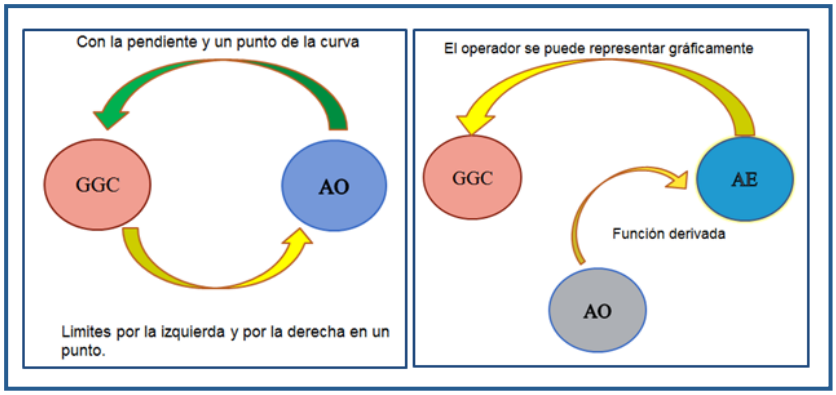
Figura 4. Informante E7, este estudiante va directamente al modo AO.



CONCLUSIONES

Se muestra en la Figura 5 los elementos matemáticos que coordinan los modos de pensamiento para la derivada, que están siendo analizados como elementos articuladores.

Figura 5. Esquema de los articuladores matemáticos en proceso de validación.



El análisis de las respuestas del grupo de estudio muestra que los estudiantes confunden $f'(x_0)$ y $f'(x)$, esto posiblemente se debe a que la derivada como función se propone como un articulador, por lo que habría que complementar la aplicación de un nuevo instrumento con una entrevista en profundidad.

Tanto la noción de límite como el de función derivada son elementos articuladores, que emergen del análisis Histórico-epistemológico, (Steward, 2007) y se presentan bidireccionales, las evidencias empíricas muestran que los estudiantes que no se familiarizan con estos elementos tienen dificultad para la comprensión del concepto de derivada.

El elemento articulador entre el modo GGC y AE no emerge de la epistemología y como se observa en la Figura 5 es unidireccional, lo que indica que se debe indagar en la búsqueda de algún candidato a articulador en la otra dirección.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Pinto, I. y Parraguez, M. (2015). El concepto de derivada desde la teoría de los modos de pensamiento, sustentada en la epistemología de Cauchy. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 28, 337-344. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Sierpinska, A. (2000). *On some Aspects of Student´s thinking in Linear Algebra. The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A., Nnadozie, A. y Oktac, A. (2002) *A Study of relationships between theorical thinking and high achievement in linear algebra.* Concordia University: Montreal.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Steward, I. (2007). *Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años.* España: Drakontos.

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL EN EL BACHILLERATO

Luis López-Acosta, Gisela Montiel Espinosa, Ricardo Cantoral Uriza
CINVESTAV-IPN, México.
lalopeza@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Palabras clave: socioepistemología, pensamiento y lenguaje variacional, investigación basada en el diseño

Key words: socioepistemology, variational thinking and language, design-based research

RESUMEN: En este escrito se pretende mostrar la configuración de un proyecto de investigación enmarcado en la teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, con el que se intentará generar un marco de referencia para aportar elementos al rediseño del discurso matemático escolar en términos del diseño instruccional y del desarrollo profesional docente. Lo anterior se pretende lograr en varias etapas, de las cuales, una inicial consiste en identificar principios y criterios que caractericen los diseños de intervención bajo la Socioepistemología, en particular, tomando como referencia la línea de investigación Pensamiento y Lenguaje Variacional. Posteriormente, se estudiará la pertinencia de tales principios y criterios para contar con elementos concretos que permitan construir escenarios de trabajo con profesores de bachillerato

ABSTRACT: In this paper the intention is to show the configuration of a research project framed in the socioepistemological theory of mathematics education, with which is intended to build a framework to provide some elements for supporting the redesign of the mathematical scholar discourse in terms of the instructional design and the teacher's professional development. To achieve that aim are proposed three phases. The first of these phases consist in the identification of principles and criteria that characterizes the intervention designs under the socioepistemological approach, using the results of the Language and Variational Thinking research line. After that process, the relevance of those principles and criteria will be studied to have concrete elements for the construction of work scenarios with high school teachers.

INTRODUCCIÓN

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, a decir de Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel (2014), señala que el problema educativo no apunta hacia el problema de la constitución u aprehensión de tales objetos abstractos, sino hacia el de su significación compartida mediante el uso culturalmente situado. Así, el fin último de la TSME, es la democratización del aprendizaje de las matemáticas, en el sentido de lograr que en las aulas cada vez más estudiantes disfruten, participen y aprendan de la cultura matemática enraizada en sus propias vidas (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014). Esto se propone lograr a partir del rediseño del discurso matemático escolar (RdME), que descansa en un cambio de paradigma: del dominio de los objetos matemáticos escolares a la participación en las prácticas que producen el conocimiento matemático (Cantoral, 2014).

Sin embargo, el paso de la investigación a la innovación no es inmediato, requiere de la configuración de ambientes de desarrollo profesional docente y de la mediación de la investigación basada en diseño, para lograr la innovación (fundamentada en conocimiento científico) con el profesor y no para el profesor.

Por ejemplo, Cabrera (2009) encuentra que los resultados de la línea de investigación sobre el pensamiento y el lenguaje variacional (PyLVar), permiten abordar el planteamiento general del enfoque por competencias, para el nivel medio superior, en tanto valora el uso que se hace del conocimiento; en particular, transformar las estrategias de enseñanza y de aprendizaje de los contenidos relativos al Precálculo y al Cálculo.

Este cambio se logra, porque la TSME promueve el tránsito del *conocimiento* (como información) al *saber* (como conocimiento puesto en uso), donde los objetos matemáticos requieren fundamentalmente ser relacionados con el uso que les da sentido y significación.

> En síntesis, diríamos desde el programa socioepistemológico que los conocimientos desde el punto de vista de su contenido conceptual y su contenido factual, para ser objetivables, requieren del uso que le da sentido al conocimiento, de herramientas y argumentos que tipifican al usuario y a las situaciones de aprendizaje, escolares o no, pero ligadas a la vida real donde se ponga en uso el conocimiento, es decir, se constituya en saber (Cantoral, 2013, p. 145).

En este sentido, la TSME propone una transformación del aula, lo cual implica una reorganización de la praxis, planteando un reto mayúsculo al promover una enseñanza basada en prácticas.

EL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL, Y EL BACHILLERATO MEXICANO

Una de las líneas de investigación fundamentales para la conformación del programa Socioepistemológico de investigación, es la del *Pensamiento y Lenguaje Variacional* (PyLVar), la cual se encarga de "estudiar fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social" (Cantoral, 2004, p. 8). Asimismo, el PyLVar es considerado también una forma de pensamiento que comprende un conjunto de elementos, estrategias, técnicas y lenguajes variacionales que

conforman una forma de razonamiento predictivo que permite enfrentar o conducirse ante problemas o situaciones variacionales (Cabrera, 2014).

Como se mencionó antes, en trabajos como el de Cabrera (2009) en el que se analizan los planteamientos que establece la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS) sobre el enfoque por competencias y su relación con las estrategias metodológicas y didácticas promovidas por la línea de investigación PyLVar se muestra cómo esta última es una opción viable para alcanzar los objetivos planteados por la RIEMS.

Este análisis curricular, se complementa con la investigación de Caballero (2012), donde se caracterizan con detalle algunos de los elementos involucrados en el proceso de construcción de saberes matemáticos en situaciones variacionales (véase figura 1), por parte de los estudiantes.

Figura 1. Modelo de interacción de elementos del PyLVar (Caballero, 2012; p.39)

Entre tales elementos se encuentran las *estrategias variacioneles, argumentos variacionales* y las *situaciones variacionales.* De estos tres elementos, las primeras, se consideran de suma importancia pues se presume que son estas las que permiten generar el pensamiento variacional, "pues resultan ser el punto de partida para el análisis y reflexión acerca del cambio y sus efectos" (Caballero, 2012; p.39). Consisten en formas particulares de razonar y actuar ante situaciones en las que la variación y el cambio juegan un rol fundamental, todo con la finalidad de reconocer y estudiar cualitativa o cuantitativamente los cambios de las variables involucradas. Algunas de las estrategias variacionales reconocidas hasta ahora son la Comparación, la Seriación, la Estimación y la Predicción (Salinas, 2003; Caballero, 2012).

Estas ideas hasta el momento se considera permitirán generar conjeturas importantes a considerar para el diseño de las propuestas de intervención que busquen promover el desarrollo del PyLVar. Así, el PyLVar se perfila como un eje que podría conducir el diseño instruccional del bachillerato mexicano. Con base en este último planteamiento el trabajo que estamos desarrollando tiene como intención central la transformación del escenario educativo en matemáticas, con base en la identificación de principios que orienten el diseño instruccional hacia la promoción del desarrollo de significados, en el sentido de la TSME: transitando de los objetos a las prácticas. Así, partiendo de la pertinencia identificada por Cabrera (2009), nos planteamos el proyecto de hacer investigación

socioepistemológica basada en el diseño, en particular, para integrar al bachillerato el desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional, como fundamento para la construcción de conocimiento matemático relativo al estudio del cambio y la variación.

UN PROYECTO DE REDISEÑO

Considerando la propuesta metodológica (Figura 2) de Montiel y Buendía (2012), es necesaria la configuración de una epistemología de prácticas que fundamente el diseño de situaciones problema, que provoquen el desarrollo intencional de prácticas; pero, también es necesario tomar en consideración el escenario educativo y sus condiciones institucionales para que dichas situaciones se integren a la actividad didáctica en el aula. En esta última fase es que, planteamos, es necesario trabajar con los profesores.

Figura 2. Esquema metodológico de la investigación socioepistemológica

Con todo lo anterior, en el proyecto se vislumbra, hasta ahora, al menos tres momentos para lograr constituir un aula extendida (Cantoral, 2013), es decir, construir un espacio (aula) que priorice la incorporación de aspectos socio-culturales, como argumentaciones, razonamientos, prácticas y actividades que permean la realidad de quienes se encuentran dentro del mismo, de modo que este constituya un colectivo de individuos conscientes y preocupados por construir conocimiento útil para su vida:

1. Sentar las bases teóricas y de diseño instruccional, relativas al desarrollo del PyLVar.
2. Hacer, propiamente, una investigación basada en el diseño para estudiar el desarrollo del PyLVar a la luz del diseño, y con ello validar tanto las bases teóricas y de diseño instruccional, como el diseño mismo.
3. Diseñar escenarios de desarrollo profesional docente, para adaptar e integrar los diseños en condiciones reales de aula y hacer vivir la experiencia de innovación al profesor, para que se apropie no sólo del diseño, sino de las bases que lo fundamentan y orientan la valoración de los aprendizajes.

El primer momento del proyecto se está elaborando con la revisión bibliográfica relativa tanto a la teoría (TSME), como a la línea de investigación (PyLVar). A partir del marco bibliográfico logrado, configuraremos la epistemología de prácticas que servirá de base teórica inicial a nuestro(s) diseño(s). El segundo momento, sobre el cual desarrollamos el presente extenso, trata de la revisión sobre la investigación basada en el diseño para la elección o elaboración de la metodología pertinente.

LA INVESTIGACIÓN BASADA EN EL DISEÑO

En términos generales, la investigación basada en el diseño se puede caracterizar como la investigación en la que el diseño de materiales educativos (por ejemplo, herramientas informáticas, actividades de aprendizaje, o un programa de desarrollo profesional) es una parte crucial de la investigación (Bakker y van Eerde, 2015).

Se ha encontrado que en las últimas décadas la comunidad internacional de matemáticos educativos ha mostrado un creciente interés en la discusión y consideración de metodologías más robustas y fundamentadas con respecto a la investigación basada en diseños. Algunos autores mencionan que los reportes de investigación de estudios sobre diseño de tareas rara vez proporcionan suficientes detalles sobre la lógica de las tareas y sobre aspectos que permitan a otros el empleo de las mismas (Sierpinska, 2003, citada en Whatson y Ohtani, 2015). Es por ello que se han estado organizando grupos temáticos de discusión en diversos espacios sobre el diseño y análisis de tareas, en los que los diseñadores exponen y demuestran el uso de sus principios respecto al diseño de tareas (Whatson y Ohtani, 2015). Todo ello con la intención de generar marcos de referencia que permitan analizar de manera fundamentada y sistemática el papel que juega el diseño de tareas en aspectos como los procesos de enseñanza de la matemática, el diseño de actividades para libros de texto, así como en el desarrollo de los aprendizajes matemáticos dentro de una perspectiva progresiva y controlada.

Algunas perspectivas proponen la construcción y análisis de diseños de forma situada, asumiendo que la relación entre los procesos individuales y sociales son tan fuertes que no se les podría separar. Al respecto, Cobb (2003), considera que la investigación basada en el diseño implica tanto el desarrollo de diseños de instrucción para apoyar a determinadas formas de aprender, así como determinar metodologías para estudiar sistemáticamente esas formas de aprendizaje dentro del contexto definido, es decir, un análisis situado del aprendizaje. El diseño de ambientes de aprendizaje en el aula es uno de los dos principales aspectos del investigación basada en el diseño, el segundo se refiere al análisis del aprendizaje matemático situado dentro del contexto social del aula, por lo tanto, la investigación basada en el diseño debe contemplar los siguientes criterios (Cobb, 2003; p.11):

1. Los resultados de los análisis deben alimentar de nuevo a mejorar los diseños de instrucción.
2. La metodología debe permitir la documentación del aprendizaje matemático colectivo de la comunidad de la clase durante los largos períodos de tiempo abarcados por los experimentos de diseño.

3. El análisis debe permitir la documentación del desarrollo individual del razonamiento matemático de los estudiantes a medida que participan en procesos comunales dentro del salón.

Bajo estas premisas, se propone un ciclo que caracteriza la investigación basada en el diseño (Cobb, Stephan, McClain, y Gravemeijer, 2001; Cobb, Confrey, diSessa, Leher, y Schauble, 2003; Bakker y van Erde, 2015; Plomp, 2013) (Ver figura 3), que en síntesis corresponde a un proceso iterativo que comprende el diseño de secuencias de instrucción, la experimentación y un análisis retrospectivo de las mismas en el contexto del aula y, con base en lo anterior, se analiza el aprendizaje de la clase para que el ciclo de diseño, revisión y aplicación reinicie nuevamente (Stephan, Bowers, Cobb y Gravenmeijer, 2003).

Figura 3. Fases en el ciclo de diseño.

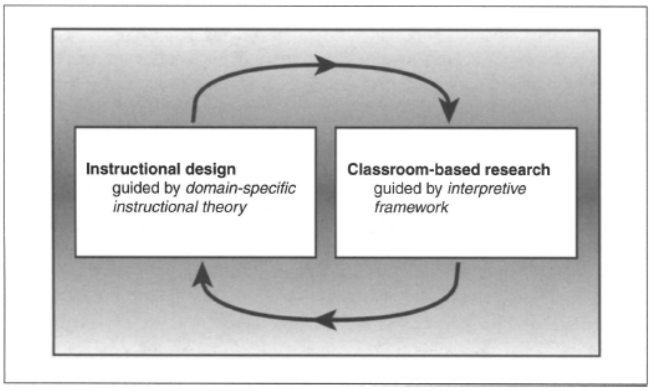


Figura 4. Un marco interpretativo para analizar el aula de clases

Social Perspective	Individual Perspective
Classroom social norms	Beliefs about own role, others' roles, and the general nature of mathematical activity in school
Sociomathematical norms	Mathematical beliefs and values
Classroom mathematical practices	Mathematical conceptions

Como puede observarse en esta perspectiva, se enfatiza la idea de aprendizaje situado, es decir, el aprendizaje de la comunidad dentro del aula y no únicamente el aprendizaje individual. Por tanto, se propone un análisis de los procesos individuales y sociales dentro del salón de clases al experimentar diseños. Cobb y Yackel (1996, citados en Stephan, 2003) desarrollaron un marco interpretativo para analizar ambos procesos descritos (Ver figura 4).

Asimismo, una de las nociones centrales de la investigación basada en el diseño es la de *Trayectoria Hipotética de Aprendizaje* que se acuño a partir del trabajo de Martin Simon a finales de los noventa, el cual describió como sigue (Gómez y Lupiáñez, 2007):

> Una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) consiste en los objetivos para el aprendizaje de los estudiantes, las tareas matemáticas que se usarán para promover el aprendizaje de los estudiantes, y las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje de los estudiantes (Simón, 1995, p.133).

De esta manera, la THA constituye el momento inicial y parte fundamental del ciclo de la investigación basada en el diseño, pues presenta los elementos metodológicos para la instrucción. Según Gravenmeijer, Bowers y Stephan (2003), una THA aborda cuatro consideraciones específicas que la distingue de un proceso tradicional del diseño de la instrucción, las cuales se relacionan con el énfasis respecto a la naturaleza socialmente situada de la misma, el punto de vista de la planificación como un ciclo iterativo, el enfoque en las construcciones de los estudiantes en lugar de contenido matemático y, la posibilidad de ofrecer al profesor una teoría fundamentada que describe cómo un cierto conjunto de actividades de instrucción podría desarrollarse en un entorno social determinado (el aula de clase).

Las ideas descritas con respecto a la investigación basada en el diseño solo corresponden a una perspectiva sobre esta metodología, la de los experimentos de diseño, y el interés en esta revisión es, por un lado, determinar los aspectos sobre la investigación basada en el diseño que la comunidad internacional exige en la actualidad sobre los aspectos metodológicos que se espera cumplan las investigaciones en este campo. Así, podremos elegir una metodología que se articule con nuestras bases teóricas o elaborar una propia a partir de los consensos del grupo de especialistas que discuten sobre esta tendencia de investigación.

Por ejemplo, desde la TSME una trayectoria hipotética de aprendizaje se traduciría en un modelo hipotético de anidación de prácticas, en el sentido de Cantoral (2013) (figura 5), que habría de confrontarse con los datos obtenidos de la experiencia de clase, tal como la ingeniería didáctica hace con su análisis a priori y su análisis a posteriori.

Figura 5. Modelo de anidación de prácticas (Cantoral, 2013, p. 334)

REFLEXIONES FINALES

En este escrito se plantean las ideas iniciales sobre un proyecto de investigación a largo plazo que abarcará diferentes fases para aportar hacia el Rediseño del discurso Matemático Escolar, a partir de dos ejes que resultan como consecuencia del planteamiento de la TSME sobre una descentración en los objetos y la centración en las prácticas que acompañan a los objetos. Estos dos ejes son el diseño instruccional y el desarrollo profesional docente, ambos vistos desde la perspectiva socioepistemológica. Por tanto, se propone un proyecto en fases debido a estas implicaciones, las cuales contemplan la determinación de principios y criterios socioepistemológicos para guiar la construcción de diseños de intervención, la experimentación de los diseños y la creación de escenarios de trabajo con docentes de bachillerato.

Se ha elegido a la línea de investigación del PyLVar para atender a este problema debido a las evidencias de su pertinencia en el nivel medio superior, así como al avance con respecto a los resultados que se siguen desarrollando dentro de la misma.

El estado actual de la investigación se centra, por un lado, en la revisión bibliográfica relativa tanto a la teoría (TSME), como a la línea de investigación (PyLVar). A partir del marco bibliográfico logrado, configuraremos una epistemología de prácticas que servirá de base teórica inicial a nuestro(s) diseño(s). Asimismo, el segundo momento de nuestro trabajo, trata de la revisión sobre la investigación basada en el diseño para la elección o elaboración de la metodología pertinente. Sobre este tipo de investigaciones se ha generado un interés para clarificar, explicitar y sistematizar los principios que guíen la elaboración de diseños de intervención para su experimentación, así como de metodologías que permitan analizar las implicaciones dicha experimentación en situaciones de aula.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bakker, A. y Van Eerde, D. (2015). An Introduction to Design-Based Research with an Example From Statistics Education. En A. Bikner-Ashbash, y N. Knipping (Eds.). *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods*. (pp. 429-466). Bremen, Germany: Springer.

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional en profesores de bachillerato.* Tesis de maestría no publicada, México: Cinvestav.

Cabrera, L. (2009). *El Pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de Competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato*. Tesis de maestría no publicada, México: Cinvestav.

Cabrera, L. (2014). *El estudio de la variación en la práctica del profesor de cálculo. Un estudio de caso.* Tesis de doctorado no publicada, México: Cinvestav.

Cantoral, R. (2004). Pensamiento y lenguaje variacional, una mirada Socioepistemológica. En J. Lezama, M. Sánchez y Molina J. (Eds.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 18, 1-9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* México: Gedisa.

Cantoral, R. (2014). Matemática Educativa: Relme, Relime y Clame. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 17* (2): 125-129

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(3), 91-116.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in mathematical practices. *Journal of the Learning Sciences*, *10*(1, 2),113-163.

Cobb, P. (2003). SupportingStudents' Development of Measuring Conceptions: Analyzing Students' Learning in SocialContext. *Journal for Research in Mathematics Education. Monography*. 12, 1-16.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Leher, R. y Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*. *32*(1). p. 9-13.

Gómez, P. y Lupiáñez, J. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA*, 1(2), p79-98.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y Reflexiones* (pp. 61-88). México: Lectorum.

Plomp, T. (2013). Educational Design Research: An Introduction. En Plomp, T. y Nieveen, N. (Eds.). *Educational Design Research. Part A: An introduction*. (pp. 10-51). Enschede, the Netherlands: Netherlands Institute for Curriculum Development (SLO).

Salinas, C. (2003). *Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los cursos introductorios al Cálculo.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26,114–145.

Stephan, M. (2003). SupportingStudents' Development of Measuring Conceptions: Analyzing Students' Learning in SocialContext. *Journal for Research in Mathematics Education. Monography*. *12*, 17-35.

Stephan, M. y Bowers, J. Cobb, P. y Gravenmeijer, K. (2003). SupportingStudents' Development of Measuring Conceptions: Analyzing Students' Learning in SocialContext. *Journal for Research in Mathematics Education. Monography*. *12*, 51-66.

Whatson, A y Ohtani M. (2015). *Task Design In Mathematics Education an ICMI study 22.* Germany: Springer.

PRELIMINARES AL MODELO DE ESTOCÁSTICOS PARA LA FORMACIÓN TECNOLÓGICA

Omar Pablo Torres Vargas, Ana María Ojeda Salazar
CINVESTAV-IPN (México)
optorres@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx

Palabras clave: formación en estocásticos, observación participante, desempeño de estudiantes.

Key words: training in stochastics, participant observation, students' performance.

RESUMEN: Se presenta una parte de una investigación que examinó la implementación de la propuesta para estocásticos del bachillerato tecnológico en un aula de Matemáticas I (DEMS, 2014), a fin de caracterizar la formación respectiva del estudiante bachiller. Mediante la aplicación de un cuestionario de diagnóstico y la observación durante la enseñanza (Wittrock, 1986), se analizaron los desempeños de 88 estudiantes de nuevo ingreso y de tercer semestre. Entrevistamos a tres de ellos para profundizar en su comprensión de las ideas de estocásticos implicadas en el cuestionario y las que fueron objeto de la enseñanza. Los resultados revelaron el predominio de un pensamiento determinista y de una formación matemática básica deficiente.

ABSTRACT: It is the first stage of a wider, qualitative research, based on the category of model (Badiou, 1978), we examined the implementation of the technological baccalaureate proposal for stochastics in the Mathematics I (DEMS, 2014) classroom, in order to characterize the corresponding student training. By applying a diagnosis questionnaire and by participant observation during the teaching (Wittrock, 1986), the performances of 88 incoming and third semester students were analyzed. Furthermore, three of them were interviewed to deepen in their understanding of the ideas of stochastics involved in the questionnaire and those that were taught. The results revealed the predominance of a deterministic thinking and of a deficient mathematics basic training.

INTRODUCCIÓN

El objetivo de esta primera parte de la investigación que se presenta es caracterizar la enseñanza de estocásticos en el bachillerato tecnológico y el razonamiento probabilístico resultante de sus estudiantes, para identificar las condiciones iniciales en el tema al ingreso al sistema tecnológico superior. Esa caracterización requiere también de la inspección de las propuestas institucionales de ambos sistemas educativos. Cabría preguntarse entonces qué tanto la enseñanza, guiada por el curriculum propuesto institucionalmente, contribuye a que el estudiante advierta a la actividad científica fundamentada en un sistema formal matemático.

En el marco de un acuerdo académico colegiado (CECyT No 4 IPN/DME Cinvestav) esta investigación dio inicio en agosto de 2014 cuando se puso en práctica en el bachillerato tecnológico el programa de estudio *DEMS, 2014*, que proponía para el primer semestre la unidad de aprendizaje *Matemáticas I* con los temas: los números reales, su aplicación en la estadística y la noción de función. A dos meses de su implementación, el programa se interrumpió (véase http://www.dems.ipn.mx/Documents/acuerdo_lineamientos.pdf) y, a partir de enero de 2015, se le sustituyó por el programa anterior (DEMS, 2008), que propone la unidad de aprendizaje *Probabilidad y Estadística* para el sexto semestre. Este cambio posibilitó investigar en los semestres primero y sexto la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos de los jóvenes bachilleres como antecedente a la propuesta de un instituto tecnológico SNEST (2010) y a la comprensión de estocásticos resultante de sus estudiantes.

Aquí nos referimos solamente a los resultados obtenidos con estudiantes bachilleres del primer semestre, que cursaban la asignatura *Matemáticas I*.

REFERENTES TEÓRICOS

Elementos de orden epistemológico, cognitivo y social sustentan esta investigación relativa a la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) resultante de una enseñanza escolarizada.

Eje epistemológico

Según Badiou (1978), para que un modelo constituya una cobertura ideológica de la ciencia, como concepto de la lógica matemática debe ser sostén de una noción descriptiva de la actividad científica. Heitele (1975) propone una lista de diez ideas fundamentales como guía continua para un curriculum en espiral que describe a los estocásticos: medida de probabilidad, espacio muestra, adición de probabilidades, regla del producto e independencia, equiprobabilidad y simetría, combinatoria, modelo de urna y simulación, variable estocástica, ley de los grandes números y muestra. Para su propuesta, Heitele adopta el punto de vista de “racionalidad a distancia” (p. 193) para el modelo de estocásticos que presenta, según la cual, con la abstracción creciente, las frecuencias de los datos que se recopilan “emergen como hechos reales” (p. 193) más bien que como datos del modelo. De esta forma argumenta que la enseñanza deductiva de estocásticos no contribuye a que el estudiante vaya teniendo aspiraciones científicas en la cotidianeidad.

Mediante el triángulo epistemológico, Steinbring (2005) plantea la interrelación necesaria entre *objeto*, *signo* y *concepto* en la constitución del concepto matemático, y lo utiliza en el análisis de la interacción en el aula.

Eje cognitivo

Las investigaciones de Vygotsky (1997) sobre los procesos del pensamiento que se activan con la palabra y sus resultados sobre el estudio de la conciencia fueron motivo de la obra de Frawley (1999). Este autor señala la existencia de tres tipos de subjetividad: el *procesamiento no consciente* que funciona como un reflejo y como la mediación poco profunda de la estimulación y la respuesta; la *conciencia*, como el procesamiento de las cualidades de la experiencia; y la *metaconciencia*, que consiste en la organización deliberada de la experiencia.

De la experiencia con el entorno se deriva un pensamiento tácito (Gigerenzer, 2008), automático y dependiente del reconocimiento de rasgos de las situaciones en juego, que puede o no activar al pensamiento probabilístico. Varios autores (por ejemplo, Fischbein, 1975; Hogarth, 2002) recomiendan tomar en cuenta ese pensamiento tácito en la enseñanza de estocásticos.

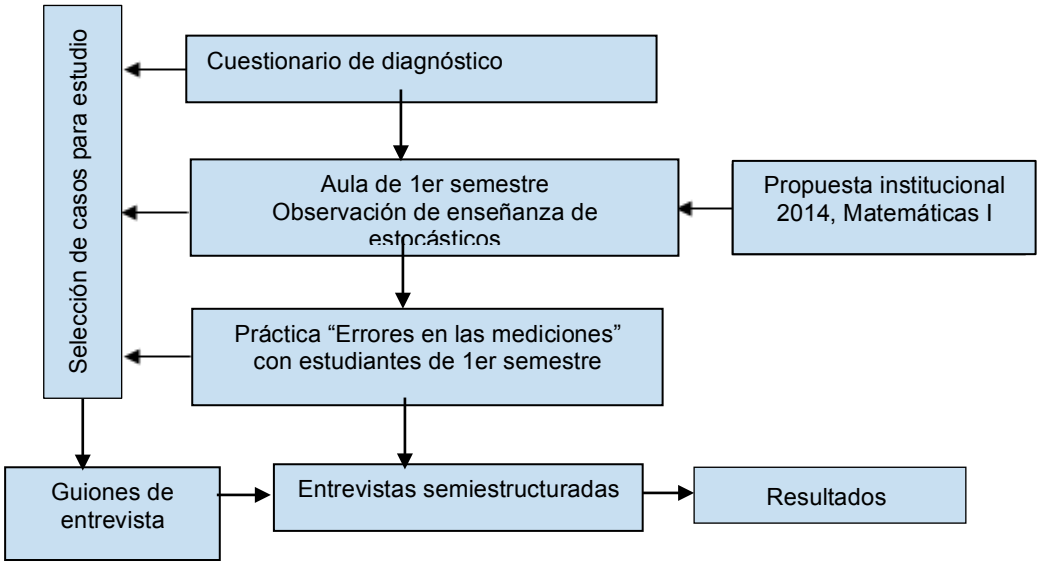
Eje social

Un aspecto de la observación como proceso contextualizado es considerarla conducto para representar la realidad existente en las situaciones que surgen en el medio educativo; es decir, la observación participante "se enfoca en la descripción de la realidad además de ayudar a los estudiantes, por etapas sucesivas, a que se sustraigan de ella poco a poco para construir progresivamente un modelo matemático" (IREM, 1997, pág. 57). O sea, como el etnólogo, los estudiantes tienen que sustraerse poco a poco de esa realidad para lograr modelarla matemáticamente. "El tratamiento por separado de los métodos y de la teoría que guía los estudios individuales permite el desarrollo de conceptos sobre la índole de la observación como estrategia para representar aspectos de la realidad" (Wittrock, 1986, pág. 307).

MÉTODO Y TÉCNICAS

La investigación, interpretativa, considera la realidad de la organización local de la enseñanza y del aprendizaje en el aula (Wittrock, 1986). En la primera etapa de esta investigación, *en curso* (véase www.matedu.cinvestav.mx/~cognicion) y cualitativa (Borovcnik, 2014), se caracterizó la comprensión de 88 estudiantes de primer y tercer semestres de bachillerato tecnológico de algunas ideas de estocásticos, a partir de la organización mostrada en la Figura 1.

Figura 1. Organización de la primera etapa de la investigación.



Instrumentos de recopilación de datos

Se aplicó un cuestionario de diagnóstico, en dos modalidades, A y B, diseñado por docentes de la institución y su aplicación satisfizo la necesidad común a la docencia y a esta investigación de identificar los conocimientos matemáticos adquiridos en la educación secundaria (SEP, 2011) con los que ingresa el estudiante al nivel medio superior. La modalidad A incluyó tres reactivos relativos a estocásticos, de los cuales dos fueron de preguntas abiertas y uno de opción múltiple; mientras que la modalidad B incluyó tres preguntas de opción múltiple (véase la Tabla 1).

Para *situar* la investigación en las condiciones educativas reales, en las actividades específicas propuestas, y perfilar una selección de estudiantes para entrevista, en el aula de *Matemáticas I* de un grupo de 46 estudiantes de primer semestre, observamos y registramos en bitácora cuatro clases, de 50 minutos cada una. El docente condujo tres: números reales; su aplicación en la estadística; y noción de función; este investigador condujo la cuarta.

En la primera sesión, los estudiantes, en equipos de cuatro, compararon y discutieron sus respuestas a una actividad propuesta días anteriores basada en el texto “Funciones ¿con qué se comen?”, para que se familiarizaran con la noción de función. En la segunda sesión se agruparon cuatro o cinco estudiantes para solucionar dos problemas ("Los trenes” y “La compañía de teléfonos”), relativos a números reales y noción de función. En la tercera sesión se realizó la actividad “Tarifa vs. Distancia” para introducir el tema de regresión lineal mediante el tratamiento de datos e interpretación de una tabla.

En la cuarta sesión, este investigador aplicó la práctica “Errores en las mediciones”, que comúnmente se desarrolla en la asignatura *Física I*, pero consideramos: a) que el programa de *Matemáticas I* indica “resolver y analizar situaciones problemáticas mediante el pensamiento aritmético, estadístico y probabilístico en su entorno académico y social como parte de su formación propedéutica y tecnológica, que le permita comunicar y argumentar los resultados obtenidos mediante el razonamiento matemático” (DEMS, 2014, p. 50); y b) el señalamiento de Badiou (1978) de que “el concepto de modelo no designa un conocimiento matemático exterior por formalizar, sino un material matemático por experimentar” (p. 56). El objetivo de la práctica fue que, mediante un acercamiento efectivo a mediciones físicas directas, el estudiante estimara el valor más probable de una longitud e identificara una aproximación normal en la distribución de las medidas obtenidas en equipo. La práctica consistió en: 1) efectuar y registrar en tablas en hojas de control, treinta y cinco mediciones individuales e independientes de un segmento de recta, empleando un segmento diferente de la regla en cada ocasión; 2) agruparlas e identificar sus frecuencias; 3) trazar el histograma correspondiente; 4) calcular la media y la desviación estándar respectivas; y 5) responder a seis preguntas relacionadas con la actividad.

Para profundizar en la comprensión de los estudiantes de algunas ideas de estocásticos implicadas en los reactivos del cuestionario de diagnóstico y en el tratamiento de errores aleatorios en las mediciones, de ese grupo de estudiantes se identificaron tres casos para estudio (Díaz, Mendoza y Porras, 2011), “Estudiante α”, “Estudiante β” y “Estudiante γ”; se les entrevistó en formato semiestructurado (Zazkis y Hazzan, 1999), de acuerdo a un guión personalizado con 20 preguntas relativas a sus respuestas en el cuestionario de diagnóstico, a sus respuestas en la práctica y a partir del análisis de los episodios de las enseñanzas en el aula.

A los datos recopilados en la investigación (propuesta institucional, diagnóstico, desarrollo de la enseñanza y entrevistas) se les caracterizó mediante los criterios de la célula de análisis (Ojeda, 2006): ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos, recursos semióticos, términos empleados, situaciones de referencia.

RESULTADOS

Propuesta institucional

La propuesta institucional es un elemento de orden social. En la revisión de los libros de texto (Hernández, 1978, por ejemplo) recomendados en la propuesta (DEMS, 2008; 2014) se pone especial atención al concepto de variación, desde los puntos de vista determinista y probabilístico. La estrategia de enseñanza que propone el bachillerato tecnológico se sintetiza en el programa de la unidad de aprendizaje *Matemáticas I*, la cual considera la utilización de la estadística descriptiva y la aplicación de la probabilidad "en la interpretación y solución de situaciones problemáticas relacionadas con su entorno académico y social, que le permita tomar decisiones fundamentadas" (DEMS, 2014, p. 50). Las ideas fundamentales de estocásticos identificadas en las *competencias particulares* 2 y 3 son: *variable estocástica*, por los valores estadísticos y su descripción mediante las medidas de tendencia central y las de dispersión, y por la frecuencia de los datos obtenidos o propuestos; *combinatoria* (técnicas de conteo); *adición de probabilidades*; y *regla del producto* en el tema de "probabilidad condicionada" *e independencia*.

Diagnóstico

La Tabla 1 resume los resultados de la aplicación del cuestionario de diagnóstico a 48 estudiantes de nuevo ingreso (26 en la modalidad A y 22 en la modalidad B) y 40 de tercer semestre (18 en la modalidad A y 22 en la modalidad B), para los reactivos de estocásticos.

Tabla 1. Clasificación primaria de las respuestas al cuestionario de diagnóstico

Reactivo	Tipo	Idea fundamental	Correctas	Incorrectas	Omitidas
Modalidad A					
3.	Abierto	Combinatoria: combinaciones.	8	30	6
6.	Abierto	Variable estocástica: Media.	6	14	24
		Mediana.	3	24	17
		Moda.	27	2	15
7.I	Opción múltiple	Adición de probabilidades: frecuencia relativa.	19	17	8
Modalidad B					
13.	Opción múltiple	Variable estocástica: Media, mediana y moda.	17	25	2
14.	Opción múltiple	Adición de probabilidades: frecuencia relativa.	1	40	3
15.	Opción múltiple	Regla del producto e independencia: intersección de eventos.	26	16	2

Para el tercer reactivo del cuestionario diagnóstico, acerca de determinar el número de posibles combinaciones de cuatro elementos tomados de dos en dos, 18% (8 de 44 estudiantes) de las respuestas fueron correctas. Para una muestra de ocho datos numéricos en el sexto reactivo, al proponer calcular sus medidas de tendencia central, la moda fue identificada de manera más inmediata (61% de respuestas correctas (27 de 44 estudiantes)) que la media, cuyo cálculo fue realizado correctamente sólo por seis estudiantes (14%).

La enseñanza y la práctica

El resultado del proceso observacional, cuyo registro en bitácora fue analizado, indicó rasgos de los estudiantes durante la enseñanza que consideramos en el diseño de los reactivos de la práctica "Errores en las mediciones". Un ejemplo de esos rasgos es privilegiar el cálculo de las medidas de dispersión sin la interpretación correspondiente en la variabilidad del conjunto de datos.

Al inicio de la sesión se hicieron explícitos el nombre de la práctica y el objetivo del acercamiento a un conjunto de mediciones de la misma magnitud efectuadas para estimar su valor más probable. Se esperaba que el estudiante prefigurara la distribución normal de las medidas obtenidas. No obstante, al igual que sucedió con estudiantes universitarios (Torres, 2013), los de bachillerato también inadvirtieron el azar en las mediciones realizadas y eligieron la moda como resultado del conjunto de 35 mediciones efectuadas de una misma longitud, en vez de la media, que es el valor más probable. Además, resultó el desconocimiento de cómo trazar un histograma de frecuencias completo a partir de las mediciones efectuadas.

Las entrevistas

Se caracterizaron las respuestas de los tres estudiantes entrevistados a cada pregunta del guión personalizado respectivo. Por ejemplo, la Tabla 2 muestra la caracterización del desempeño de la estudiante α en la séptima pregunta del guión de entrevista. Esta estudiante, que en la modalidad B del cuestionario de diagnóstico contestó correctamente seis de los 15 reactivos planteados pero sin exponer el procedimiento respectivo, e incorrectamente a nueve de ellos, en el reactivo relativo a las medidas de tendencia central no eligió la opción correcta, aunque se mostró participativa en el aula durante la enseñanza.

Tabla 2. Caracterización de la respuesta de α a la pregunta 7 en la entrevista.

Pregunta de entrevista	Situación planteada en la práctica	Ideas fundamentales de estocásticos	Otros conceptos matemáticos	Recursos para organizar y tratar los datos	Términos empleados
7. ¿Cuál es el valor más probable de la longitud del segmento?	Calcular el valor de la media de 35 mediciones de un segmento y dar un resultado de las mediciones efectuadas.	Independencia, Variable aleatoria, Ley de los grandes números, Muestra.	Operaciones aritméticas, orden en los reales.	Signos numéricos y algebraicos, lengua natural, tabla.	Se aproximaría media, todos, estos, medidas, al azar, se repitió más.

El fragmento de la entrevista correspondiente a la Tabla 2 reveló el conocimiento deficiente de α de la media ("E" indica al entrevistador y "α" a la estudiante entrevistada):

E ¿Sí existe el valor verdadero o uno se aproxima al valor verdadero?

α Pues, se aproximaría yo creo, porque…

E ¿De qué manera te aproximas? ¿Con tus medidas, con el cálculo de la media o, cómo?

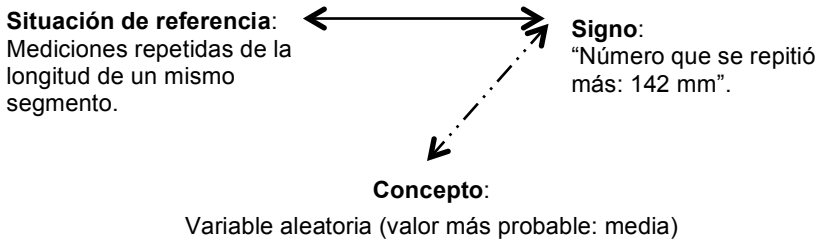
α Pienso que con el cálculo de la media. Porque sería como la suma de todos éstos [señala con su mano las lecturas de las mediciones ordenadas en la tabla 2 de su hoja de respuestas de la práctica], algo así. Es que no me acuerdo muy bien cómo hicimos la media porque sí fueron varios pasos y sí, fue un poco complicado. Pero yo digo que sería la media [señala con el índice el resultado que ella proporcionó en la práctica del cálculo de la media], que sería un valor un poco más exacto que estas medidas [vuelve a indicar la tabla que contiene sus mediciones ordenadas] que fueron tomadas al azar.

E ¿Entonces para qué te sirvió calcular la media?

α Supongo que para saber cuál número se repitió más o algo así. No entendí el propósito de la práctica, pero la tratamos de resolver lo mejor que pudimos.

Al comienzo del pasaje de la entrevista, la estudiante α dio evidencia de un significado intuitivo del concepto "media" como la aproximación al valor "verdadero" en cuestión y su cálculo de la media aritmética de las mediciones efectuadas en la práctica (143.3 mm) fue correcto; no obstante, α no lo asoció al valor más probable ("verdadero") de la longitud del segmento, sino al valor de la moda, con lo que exhibió un desconocimiento de la intervención del azar (véase la Figura 2). La estimación del valor más probable de la longitud del segmento dado en las hojas de control, como objetivo de la práctica, fue obtenido correctamente por la estudiante α, con el valor de 143.3 mm para la media aritmética del conjunto de sus mediciones. Pero tanto en las hojas de control como en la entrevista anunció el valor de la moda, 142 mm, como resultado de las mediciones efectuadas, argumentando que "estuvo presente más frecuentemente" y porque fue "el número que más se repitió".

Figura 2. Triángulo epistemológico para "variable aleatoria" según α.



Explícitamente, la estudiante α declaró no haber comprendido el propósito de la práctica y, al hacer un análisis mediante el triángulo epistemológico (Steinbring, 2005) de la constitución del concepto "variable aleatoria" como la media aritmética, ella evidenció una ruptura de la doble interrelación entre el signo y el concepto. El tipo de subjetividad reflejado en las respuestas de α corresponde al consciente (Frawley, 1999) al exhibir en la entrevista un procesamiento de las cualidades de las mediciones efectuadas en la revisión del cálculo de la media, aunque su reacción instintiva en acción (Gigerenzer, 2008) haya sido reconocer al número con mayor repetición como el verdadero.

COMENTARIOS

Aunque reducida, la información que se obtiene del proceso de la enseñanza, observada en condiciones reales, de la descripción de la variación de mediciones efectivas de la misma magnitud en el desarrollo de la práctica y de la entrevista, indica aspectos relevantes de la enseñanza que pueden contribuir a que poco a poco se revele a los estudiantes un modelo de estocásticos (Heitele, 1975) y al objetivo último de que ellos lo adviertan como sustento de la actividad científica (Badiou, 1978). Pero esta formación en estocásticos debe ser continua, a lo largo de toda la educación. En particular, en ausencia de una educación en probabilidad se enfrentará una dificultad creciente con la edad para erradicar sesgos del pensamiento probabilístico (Fischbein, 1975).

La deficiente formación matemática básica de los estudiantes de la unidad de aprendizaje *Matemáticas I* participantes en esta etapa de la investigación, así como su inadvertencia de la necesidad de tratar los datos para reducir los efectos del azar y dar un resultado de las mediciones en la práctica, apuntan a su insensibilidad a la variación de los datos, aunque el programa de estudios propone el tratamiento de las medidas de tendencia central, de posición y de dispersión "para resolver situaciones mediante la aplicación correcta del lenguaje, símbolos matemáticos, intuición sobre fenómenos de azar y el uso de una metodología para la toma de decisiones" (DEMS, 2014, p. 50).

Estos resultados motivaron una observación, también participante, de la enseñanza de la asignatura *Probabilidad y Estadística* (DEMS, 2008, programa vigente) a un grupo de estudiantes de sexto semestre y la implementación de estrategias de enseñanza que destacaran la naturaleza aleatoria de los fenómenos propuestos para su estudio. Los resultados por obtener, junto con los aquí reportados, informarán de los antecedentes en estocásticos con que se puede arribar a la formación tecnológica en el nivel superior.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Badiou, A. (1978). *El concepto de modelo. Bases para una epistemología materialista de las matemáticas*. Tercera Edición. México: Siglo Veintiuno Editores.

Borovcnik, M. (2014). Empirical research on understanding probability and related concepts - A review of vital issues. In de Sousa, B. & Gould, R. (Eds.) *Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9, July, 2014), Flagstaff, Arizona, USA*. Voorburg, the Netherlands: International Statistics Institute.

Díaz, S.; Mendoza, V. M., Porras, C. M. (2011). Una guía para la elaboración de estudios de caso. *Razón y palabra.* No. 75. www.razonypalabra.org.mx

Dirección de Educación Media Superior (DEMS). (2008). *Programa de Estudios de la unidad de Aprendizaje: Probabilidad y Estadística*. México, D. F.: IPN

Dirección de Educación Media Superior (DEMS). (2014). *Programa de Estudios de la unidad de Aprendizaje: Matemáticas I*. México, D. F.: IPN

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Dördrecht: Reidel.

Frawley, W. (1999). *Vygotsky y la ciencia cognitiva*. España: Paidós.

Gigerenzer, G. (2008). *Decisiones instintivas: La inteligencia del inconsciente*. España: Ariel.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics* Vol. 6, No. 2, pp. 187-205. Netherlands: Reidel.

Hernández, O. (1978). *Elementos de Probabilidad y Estadística*. México: Fondo de Cultura Económica.

IREM, (1997). Enseigner les probabilités au Lycée. *Ouvertures statistiques, enjeux épistémologiques, questions didactiques, idées d'activités*. pp. 54-104. France: Réseau des IREM – Direction des Lycées et Collèges.

Hogarth, R. M. (2002). *Educar la intuición. El desarrollo del sexto sentido*. España: Paidós.

Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: Un ensayo en la enseñanza de estocásticos. *Matemática educativa, treinta años*, pp. 195-214. México: Santillana-Cinvestav.

SEP (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas*. México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.

SNEST (2010, abril). *Planes de Estudio Actualizados del SNEST. Probabilidad y Estadística*. Recuperado el 20/02/2014, de http://itmorelia.edu.mx/2012/Escolarizado.html

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective*. USA: Springer.

Torres, O. (2013). *Limitaciones en la adquisición de ideas fundamentales de estocásticos por estudiantes de ingeniería: El caso de un instituto tecnológico*. Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav.

Vygotsky, L. (1997). *Pensamiento y lenguaje*. Madrid, España: Visor.

Wittrock, M. (1986). *La investigación de la enseñanza II*. Barcelona, España: Paidós.

Zazkis, R., Hazzan, O. (1999). Interviewing in Mathematics Education Research: Choosing the Questions. *Journal of Mathematics Behaviour*, 17 (4), pp. 429-439. USA: Elsevier Science Inc.

SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

Silvia Carmen Morelos Escobar, Noelia Londoño Millán, Iris Arely Salazar Estrada
Universidad Autónoma de Coahuila (México)
silvia.morelos@gmail.com, noelialondono@uadec.edu.mx iris_arely2@hotmail.com

Palabras clave: Resolución de problemas, olimpiada

Key words: Problem solving, olympiad.

RESUMEN: En el presente artículo se documentan características de las estrategias heurísticas y de control, así como también el dominio de conocimiento que emplean los alumnos de primaria y primeros años de secundaria en la resolución de problemas de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Dentro de los resultados se destacan el uso de algunas estrategias, propias del nivel, que fueron usadas con varios propósitos, por ejemplo, para entender el problema construyeron figuras o realizaron trazos auxiliares, mientras que para abordarlo usaron listas, la particularización, los diagramas y el típico ensayo-error. Las estrategias metacognitivas fueron poco empleadas, de ellas usaron exclusivamente las operaciones inversas para la comprobación de los resultados.

ABSTRACT: In this article are documented heuristic strategies and control features, as well as also the domain of knowledge that students in primary and early secondary years employed in solving problems of the Mexican Mathematical Olympiad. Within the results stand the use of some strategies of the level, which were used for various purposes, for example, to understand the problem built figures or made auxiliary strokes, while addressing the problem they used lists, the particularization, diagrams, and typical trial. Metacognitive strategies were little used of them they used exclusively the inverse operations to check the result.

INTRODUCCIÓN

En el presente documento se hace alusión a la resolución de problemas de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas OMM, iniciando con algo de historia, se hace mención de las diferentes etapas que conforman el proceso de selección de alumnos.

También se alude sobre diferentes autores de resolución de problemas, haciendo énfasis en los planteamientos de Schoenfeld, ya que es la perspectiva que se tiene en cuenta en el presente reporte de investigación.

Posteriormente se comenta sobre la metodología seguida en la investigación, en donde se explica el proceso seguido, se describen las características de los individuos que participaron, para luego dar paso a la discusión de los resultados en torno a las estrategias heurísticas y de control. Por último se muestran las conclusiones y recomendaciones del estudio.

DESARROLLO

Un poco de historia. La Sociedad Matemática Mexicana (SMM) desde 1987 se encarga de organizar a nivel nacional la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) con dos objetivos: uno el de promover el estudio de las matemáticas en forma creativa, buscando desarrollar el razonamiento lógico, las habilidades en la resolución de problemas y la imaginación de los jóvenes de los niveles de primaria, secundaria y bachillerato; y el otro seleccionar cada año a los seis mejores alumnos que representarán a México en las diferentes competencias internacionales como la Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO), la Olimpiada Iberoamericana, entre otras.

Anualmente cada estado de la república, a través de un delegado realiza en forma autónoma el concurso estatal, además selecciona y prepara su selección para el concurso nacional. Vale la pena resaltar que el estado de Coahuila ha participado en todas las ediciones de la OMM.

Por lo regular al Concurso Nacional, que se realiza en noviembre de cada año, asisten 196 alumnos de todo el país y los profesores de cada delegación estatal. Existe un tribunal de coordinación que lo integran 27 personas, entre los cuales hay profesores de reconocido prestigio de todo el país y alumnos que destacaron en olimpiadas anteriores y que han continuado su preparación en matemáticas. Una de las tareas asignadas a este tribunal es calificar los exámenes presentados por los alumnos concursantes, para después acordar con cada delegación la puntuación para sus respectivos alumnos.

Los participantes con mejores puntuaciones en el Concurso Nacional constituyen la preselección nacional, ellos reciben entrenamientos especiales durante varios meses, para luego conformar las delegaciones que representarán a México en las olimpiadas internacionales del año siguiente, entre ellas: la Iberoamericana, Centroamericana y del Caribe, de la Cuenca del Pacífico y en la Europea Femenil, así como también en la International Mathematical Olympiad (IMO).

Vale la pena resaltar que la participación de los alumnos en todos los concursos y entrenamientos, el hospedaje y la alimentación son gratuitos, ya que son patrocinados por diversos organismos; por lo regular las instituciones educativas de los participantes financian los gastos de traslado.

Con el propósito de fortalecer la OMM, el comité organizador de la misma realiza exámenes de práctica, cursos especiales para profesores y la publicación de material académico y de difusión OMM (2013). De manera general, este comité enlaza las inquietudes de los comités estatales, los

alumnos participantes y conjuntamente con la SMM establece los contactos necesarios a nivel internacional y nacional para inscribir a las delegaciones que representan al país en los distintos concursos internacionales. También tramita los apoyos de las instituciones financiadoras de la OMM y maneja el presupuesto, se hace cargo de vigilar la correcta aplicación del reglamento. OMM (2015).

A través de varios años de experiencia puede decirse que la OMM ha tenido un gran impacto en aspecto educativo, ya que un gran porcentaje de alumnos que ingresan a las carreras de matemáticas, matemáticas aplicadas, ingeniería, ciencias de la tierra, etc., han participado en al menos una de las convocatorias de la olimpiada, aunado a eso el proyecto cuenta con varias distinciones recibidas para México en diferentes participaciones a nivel internacional, esto hace que la labor que se desempeñan los distintos actores de manera altruista, tenga sus recompensas.

Sobre la resolución de problemas. Son varios los autores que han hecho planteamientos, desde su propia visión acerca de este tema, entre ellos (Polya 1997; Schoenfeld 1985; Mason, Burton y Stacey 1988; de Guzmán 1991; entre otros), cada uno expone diferentes fases en la solución particularmente Polya en su obra ¿Cómo plantear y resolver problemas? presenta un conjunto de pasos a seguir, y a pesar de ser un planteamiento un tanto antiguo, tiene vigencia en las propuestas más recientes.

Sin pérdida de generalidad, en este estudio se analiza la resolución de problemas desde la perspectiva de Schoenfeld (1985), quien sostiene que para resolverlos de forma exitosa se requiere poner de manera articulada cuatro dimensiones las cuales son: *estrategias heurísticas, dominio de conocimientos, estrategias metacognitivas y el sistema de creencias.* A continuación se definen cada una de ellas:

Las estrategias heurísticas son procesos muy generales que consiguen transformar un problema en una situación más sencilla de entender y solucionar Schoenfeld (1979). Algunos ejemplos de este tipo de estrategias se pueden mencionar las siguientes: hacer trazos auxiliares, construir una figura, identificar sub metas, crear una lista, realizar un diagrama, la técnica de ensayo-error, resolver uno similar, pero más simple, particularizar, distinguir diversas partes de la condición, buscar patrones, disminuir las variables, empezar por el final, entre otras. En el presente estudio solamente se discuten algunas de ellas.

Dominio de conocimientos: Se refiere a los conceptos, fórmulas, algoritmos, y en general todas las nociones que se consideren necesarias saber para enfrentarse a un determinado problema. El instrumento aplicado para este estudio sólo incluye cuatro áreas del conocimiento, además aborda temas de matemáticas que se imparten hasta el segundo año de la educación básica secundaria.

Estrategias metacognitivas: Se refiere a cómo una persona controla su trabajo, consiste en una habilidad propia para monitorear y evaluar el proceso y tomar decisiones respecto a las estrategias que debe seguir para resolver el problema.

Sistemas de creencias: Consiste en lo que la persona cree acerca de la matemática y sobre la resolución en particular.

Este reporte hace referencia a los procesos y resultados parciales de investigación respecto a la resolución de problemas en la OMM, en lo referente a las tres primeras dimensiones mencionadas

en párrafos anteriores, ya que no se recabó información contundente acerca del sistema de creencias.

METODOLOGÍA

Sobre las personas. El examen de olimpiada fue aplicado a 707 alumnos del estado de Coahuila, en 8 municipios sede, de los cuales 306 presentaron en Saltillo. Para el desarrollo de este estudio se eligió al azar un grupo de 36 estudiantes, cuyas edades estaban entre los 11 y 14 años, todos ellos habían sido seleccionados por sus respectivas escuelas, es decir, ya habían presentado el examen correspondiente a la primera etapa, y estaban cursando educación primaria, primero o segundo año de educación básica secundaria.

*En cuanto al instrumento. D*ebe precisarse que constó de 15 problemas con distintos niveles de profundidad, en ellos se incluyen temas de matemáticas acordes al plan de estudio para la primaria y dos primeros años de secundaria, divididos en cuatro grandes áreas; algebra, geometría, aritmética y combinatoria. El examen aplicado de forma general fue de opción múltiple con única respuesta; dado que esta modalidad no deja mucha información ni evidencias de los procesos, se indicó a los alumnos participantes que debían entregar las hojas donde hicieron los procedimientos. Fue a través de estas contestaciones que se recabó la información que se analizó para hacer el presente reporte de investigación, teniendo como marco teórico la resolución de problemas en lo que respecta a las dimensiones que se nombraron antes.

Vale la pena resaltar que en los exámenes no se evalúa si el alumno conoce fórmulas, procedimientos únicos, ni la memorización de conceptos; este concurso de olimpiada permite al alumno resolver libremente.

Para asignar un puntaje se tienen en cuenta todas las estrategias heurísticas que pueda usar el alumno para hallar una solución satisfactoria y correcta.

Sobre los procesos y técnicas. Cada alumno resolvió el examen de forma individual, no se permitió el uso de calculadoras ni celulares, las dudas surgidas durante el examen las atendieron los aplicadores de forma personal, la mayoría de los alumnos contestaron en un tiempo aproximado de dos horas.

RESULTADOS

Sobre las estrategias heurísticas empleadas. Al analizar las soluciones de los alumnos pudimos advertir el uso de varias estrategias como *hacer trazos auxiliares*, por ejemplo, sobre las figuras proporcionadas ellos hicieron trazos que le ayudaron a comprender el problema, y si el enunciado no contenía una figura la construyeron. Algunos ejemplos de esta estrategia se muestran en las siguientes figuras.

Figura 2. Trazo auxiliar: diagonal AP y ángulos (izquierda) y construcción de rectángulos (derecha).

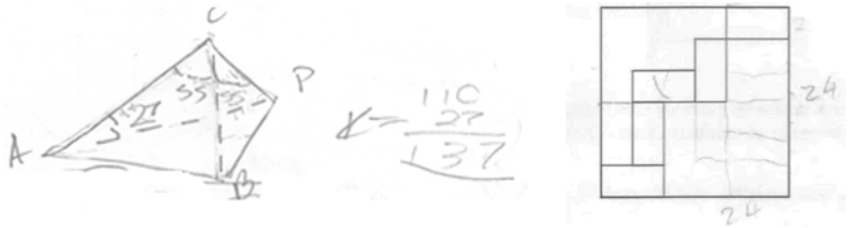
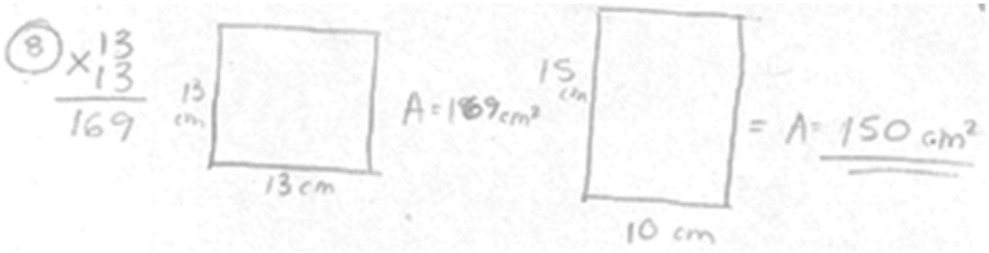


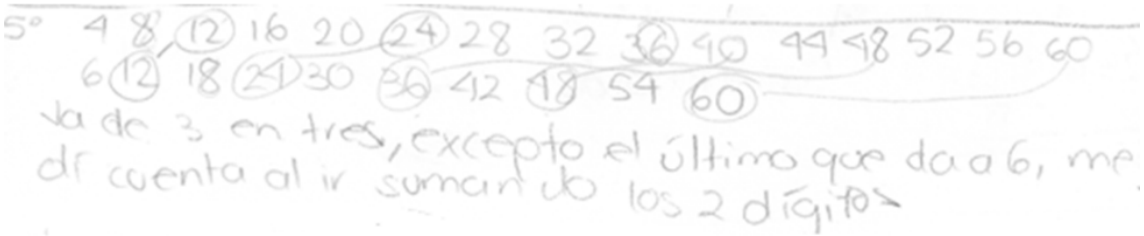
Figura 3. Hacer un dibujo del enunciado y la solución.



En la figura tres se puede observar aparte del dibujo, el uso de un proceso inverso, radicación contra potenciación. El alumno sabe que necesita la raíz cuadrada de 169, pero como no recuerda el proceso, decide probar multiplicando dos números para obtener la potencia, pero tiene control sobre los números a multiplicar, porque sabe que $10\ x10$ es 100, y descarta los cuadrados cuya medida de los lados son de un dígito.

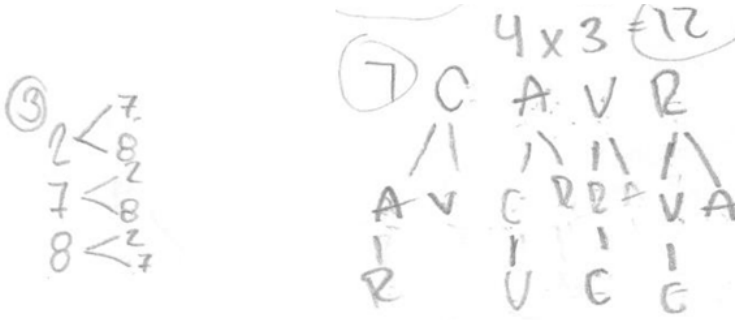
También hubo alumnos que usaron la estrategia *hacer una lista*; por ejemplo el enunciado decía: ¿Cuánto vale la suma de los números de dos dígitos que son múltiplos de seis y de cuatro a la vez? La solución de este problema implicaba conocer el mínimo común múltiplo de 4 y de 6 que es 12, y calcular los múltiplos de 12 menores que 100. En términos algebraicos corresponde a solucionar la desigualdad entera $12k < 100$, la cual da 8, en la figura 4, notamos que este alumno decidió hacer una lista de los múltiplos de cada número por separado. Esta estrategia fue utilizada por la mayoría de los alumnos sin distinción de grado escolar.

Figura 4. Lista de los múltiplos de 4 y de 6.



La estrategia de hacer un *diagrama de árbol*, fue empleada particularmente en la solución de dos problemas a saber: Considere el conjunto de todos los enteros positivos pares de tres dígitos, formados por los dígitos 2, 7, y 8 sin que estos se repitan. ¿Cuál es el resultado de restar el máximo número posible de estos y el mínimo?

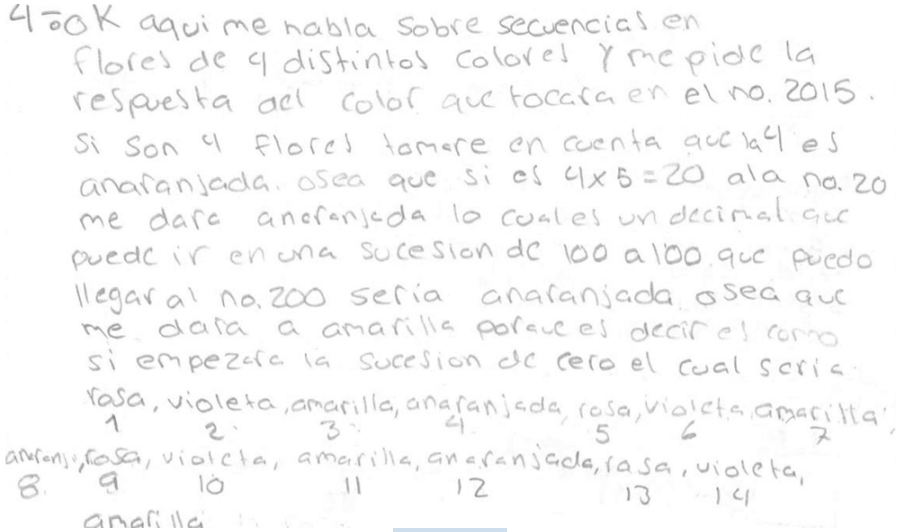
Figura 5. Diagramas de árbol.



A través del uso de este diagrama el alumno descarta las combinaciones que no hacen parte de la solución y obtiene una respuesta correcta. También esta estrategia fue usada en otro enunciado, donde se pedía el número de banderas bicolores que se pudiesen formar con cuatro lienzos de colores diferentes, para solucionarlo el alumno toma la primera letra del color y construye el diagrama como se muestra en la figura 5.

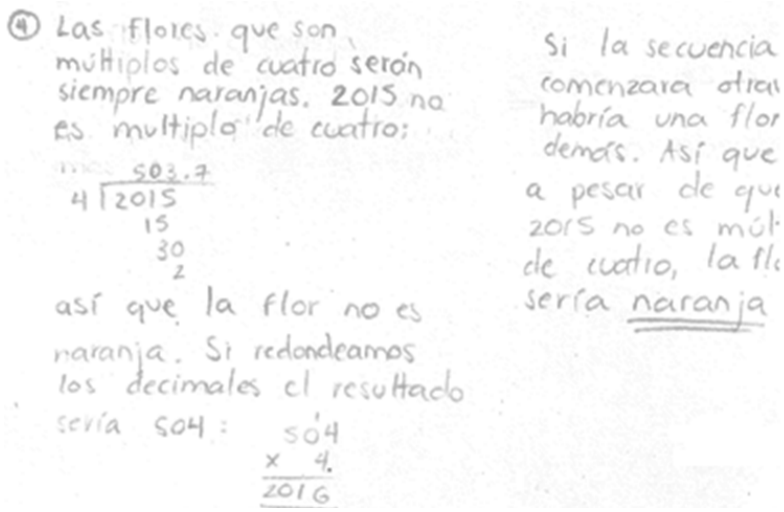
En el siguiente caso el alumno *re-escribe* el enunciado y describe su solución haciendo en principio soluciones parciales coherentes, al preguntarle qué sentido tiene escribirlo de nuevo, argumenta que de esa manera lo entiende mejor, también usa predicción respecto a la solución, además hace una lista aunque menos corta que la construida por otros alumnos, a partir del enunciado del problema el cual es el siguiente: Se dibujan flores: una rosa, una violeta, una amarilla, una anaranjada, una rosa, una violeta, y así sucesivamente. ¿De qué color es la flor número 2015?

Figura 6. Uso de diferentes estrategias.



Otro planteamiento y discusión en torno al mismo problema:

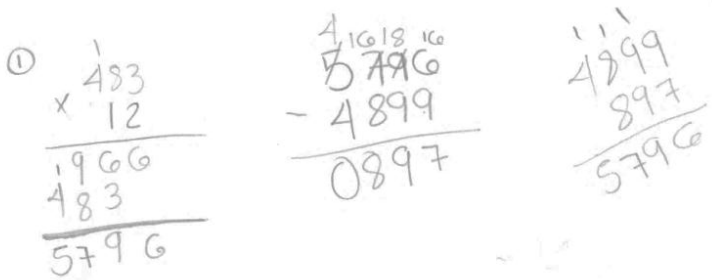
Figura 7. Estrategia de descartar opciones.



Algunas estrategias heurísticas que fueron usadas por los alumnos fueron las siguientes: hacer figuras, tablas, listas, identificar sub metas, ensayo-error, resolver un problema similar más simple, utilizar números en lugar de datos, distinguir diversas partes de la condición, buscar patrones, entre otras, y aunque no todos obtuvieron resultados exitosos su dificultad radicó en distorsión de la solución.

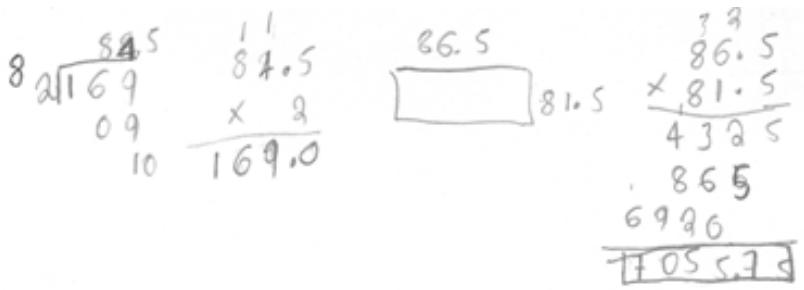
Sobre las *estrategias de control.* Realmente es poco lo que podemos decir respecto a la utilización que hicieron los estudiantes sobre esta dimensión, ya que los únicos casos en los que estuvo presente fueron para corroborar resta, haciendo suma y verificar la división usando multiplicación. Las otras estrategias metacognitivas no fueron tenidas en cuenta. Para la mayoría, el problema terminó cuando encontraron una solución, un bajo porcentaje de alumnos aplicó estrategias metacognitivas. Algunas de las que se realizaron fueron las siguientes dos (ver figuras 8 y 9): Revisar si se calculó bien una resta haciendo la suma del sustraendo y la diferencia y comparar con el resultado el minuendo.

Figura 8. Uso de estrategias de control (suma – resta).



Otro caso consistió en revisar si se realizó bien una división verificando que el resultado de multiplicar el divisor por el cociente dé como resultado al dividendo.

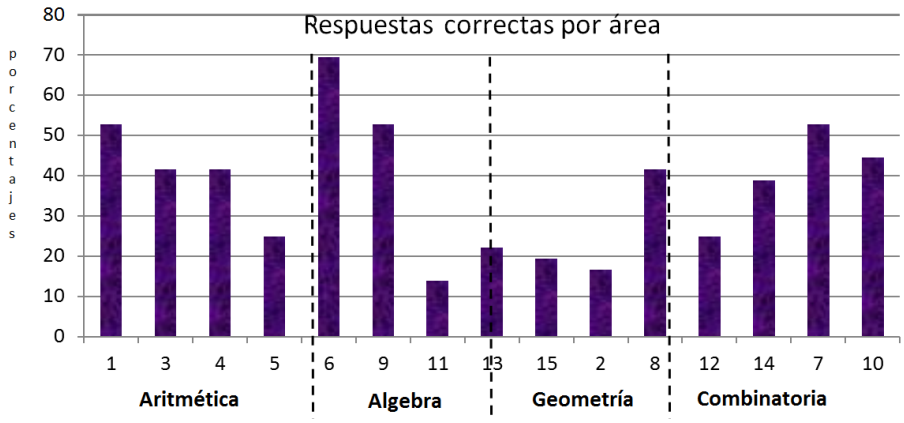
Figura 9. Uso de estrategias de control (multiplicación - división)..



Respecto al dominio de conocimientos. Como se indicó al principio fueron cuatro las áreas que se evaluaron en el examen estatal de la segunda etapa de la OMM, los resultados que se obtuvieron se resumen en la siguiente figura, donde se puede observar menor cantidad de aciertos en geometría mientras que en algebra están los porcentajes más altos. Debe decirse que los problemas propuestos tenían la opción de ser resueltos a través de aritmética o usando proceso algebraicos, esto debido a que en la educación primaria en México (1° a 6°) los alumnos no reciben formación en algebra. La valoración otorgada al examen del primer nivel no mide el uso de un área o la otra, el mayor peso lo tiene el uso de las estrategias heurísticas que pudiera implementar el alumno y las estrategias de control.

Figura 10. Porcentaje de respuestas correctas por área.

.



Algunos de los conocimientos implicados en la resolución de los problemas fueron los siguientes: algoritmos de operaciones básicas (suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación), suma de los ángulos interiores de polígonos (triángulos, cuadriláteros), propiedades de ángulos en triángulos (equiláteros, isósceles) definición de entero positivo par, definición de múltiplo, algoritmo de mínimo común múltiplo, regla de tres simple directa, fórmula del área de un cuadrado, fórmula del área de un rectángulo, algoritmo del promedio, definición de enteros positivos consecutivos,

definición de punto medio, fórmula del área del triángulo, definición de dígito, lugar de las unidades, etc.

CONCLUSIONES

La Olimpiada Mexicana de Matemáticas brinda a los estudiantes que participan en ella la posibilidad resolver problemas de manera autónoma, sin que estén esperando la aprobación o reprobación de una asignatura, porque es un evento en el que se participa de manera voluntaria y no está sujeto a la promoción o reprobación de un curso en particular. Su objetivo central es promover y favorecer el pensamiento matemático de los alumnos a través de uso de diferentes estrategias heurísticas y de control, así como también el uso de los conocimientos que la escuela le provee, sin solicitar datos memorísticos.

En este estudio se muestra suficiente evidencia de lo anterior, sin embargo dado que fue notorio el poco uso de las *estrategias de control, sugerimos* crear diferentes mecanismos para promover el uso de éstas en el quehacer cotidiano de los alumnos.

Así mismo, pudimos percatarnos del bajo desempeño que tuvieron en general los alumnos en el área de geometría, a pesar de ser un área que está inmersa en varias dimensiones del

internacionales.

Sugerimos explorar des otro estudio, por supuesto, qué ocurre con la enseñanza y el aprendizaje de geometría en los primeros años de la educación básica. No lo trataremos aquí porque no es objeto de estudio en este reporte e investigación, pero se deja de tarea a los lectores.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Guzmán, M. de (1991). *Para pensar mejor.* Barcelona: Labor.

Mason, J. L. Burton y Stacey (1988). *Pensar matemáticamente*. Barcelona: Mec-Labor.

Olimpiada Mexicana de Matemáticas. OMM. (2013). *Canguro Matemático Mexicano*. México: Sociedad Matemática Mexicana.

Olimpiada Mexicana de Matemáticas. (sf). ¿Qué es la OMM? Recuperado 15 de marzo de 2015 de: http://www.ommenlinea.org/?page_id=10.

Polya, G. (1997). *¿Cómo plantear y resolver problemas?*. México D.F: Trillas.

Schoenfeld, A. (1979). Explicit Heuristic Training as a variables in problem solving performance. En *Journal for research in mathematics Education (10)*3. 173-187

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

LA PROBABILIDAD CONDICIONAL COMO HERRAMIENTA PARA LA TOMA DE DECISIONES

Raimundo José Elicer Coopman, Eduardo Andrés Carrasco Henríquez
Universidad Austral de Chile, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (Chile)
raimundo.elicer@uach.cl, ecarrasc@gmail.com

Palabras clave: probabilidad condicional, toma de decisiones, monty hall.

Key words: conditional probability, decisions, monty hall.

RESUMEN: Este reporte se enmarca en el proceso de diseño, implementación y validación de una situación de enseñanza de la probabilidad condicional que recurre al juego de Monty Hall como escenario de toma de decisiones ante situaciones de incertidumbre. En particular, en el marco de la ingeniería didáctica, se exponen elementos del análisis preliminar. En lo cognitivo, los estudiantes recurren a razones no matemáticas para decidir. El análisis epistemológico se centra en el intercambio epistolar entre Pascal y Fermat sobre juegos de azar. Los elementos didácticos evidencian una prevalencia del cálculo de probabilidades, por sobre la toma de decisiones, en los textos escolares.

ABSTRACT: This report is frammed with the process of design, implementation and validation of a teaching situation of conditional probability. It draws upon the game Monty Hall as scenary for decision-making in face of situations of uncertainty. In particular, under the didactic engineering framework, preliminary analysis elements are given. Cognitively, students use non mathematic elements to decide. Epistemologic analysis focuses on the exchange of correspondence about gamblings between Pascal and Fermat. The didactic elements show a prevalence of probabilistic calculations over decision making in textbooks.

INTRODUCCIÓN

Actualmente se reconoce la necesidad de un actuar en situaciones de incertidumbre, cada vez más incorporadas a distintos entornos laborales y de vida. Al decir de Morin: "lo nuevo brota sin cesar; nunca podemos predecir cómo se presentará, pero debemos contar con su llegada" (Morin, 1999, p.11), ante lo cual precisa que "importa (…) comprender la incertidumbre de lo real, saber que hay un posible aún invisible en lo real". De este modo, el estudio de la probabilidad se constituye en una herramienta para enfrentar situaciones reales. Ignorar esta incertidumbre o intentar minimizarla nos puede llevar a tomar decisiones frágiles, que pueden generar un impacto negativo apenas el escenario cambie (Taleb, 2012).

Sin embargo, es un área del saber matemático que muestra, en Latinoamérica, bajos resultados. Más del 80% de los estudiantes no supera el segundo nivel de logro en el área de datos y azar (OECD, 2014), es decir, en el mejor de los casos entienden y usan conceptos de probabilidad básicos en situaciones como lanzamientos de dados o monedas, sin evidenciar la capacidad de realizar razonamientos en contextos simples. Esto supone la necesidad de innovar en situaciones de enseñanza y aprendizaje que permitan a los estudiantes constituir a las nociones de la probabilidad en una herramienta matemática para su actividad.

En este contexto, a medida que se adquiere nueva información sobre la situación en que se requiere tomar decisiones en escenarios inciertos, la noción de probabilidad condicional permite incorporar cambios en los grados de creencia sobre los posibles resultados, mejorando la toma de decisiones basadas en predicciones. Esto amplía el rango de experimentos a considerar en el aula, dando oportunidades para una mayor comprensión y razonamiento sobre las nociones involucradas en la inferencia estadística, asociación entre variables, regresión y modelos lineales (Batanero y Díaz, 2007).

El objetivo general de esta investigación es constituir la probabilidad condicional como herramienta para la toma de decisiones. El presente reporte se enmarca en el diseño, implementación y validación de una situación de enseñanza de la probabilidad condicional que recurre al juego de Monty Hall como escenario de toma de decisiones. En particular, en el marco de la ingeniería didáctica, se exponen los elementos cognitivos, epistemológicos y didácticos del análisis preliminar.

MARCO TEÓRICO

Probabilidad condicional y el problema de Monty Hall

Batanero y Díaz explican que "la deducción por Bayes en 1763 de su famoso teorema llevó a una conclusión inesperada: las probabilidades de las causas podrían revisarse en función de las consecuencias observadas y perderían su carácter objetivo. Una nueva visión de la probabilidad como grado de creencia personal, basada en el conocimiento previo y los nuevos datos, hace innecesaria la repetición del experimento en las mismas condiciones. El teorema de Bayes, aplicado sucesivamente, permite formalizar el proceso de aprendizaje a partir de la experiencia y unificar la metodología de la inferencia" (Batanero y Díaz, 2007). Esta reflexión supone un aparente conflicto entre la probabilidad subjetiva del estudiante, que se encuentra en el estudio de la probabilidad condicional, entendida como una nueva definición del espacio muestral y de asignaciones de probabilidades según la información disponible.

Las paradojas toman un rol preponderante en este encuentro (Batanero, Contreras, Cañadas, y Gea, 2012), pues la aparente contradicción entre lo intuido y lo experimentado configuran un conflicto cognitivo que solo se puede resolver al analizar y posteriormente formalizar la situación. Un ejemplo es el juego de Monty Hall, en el cual, a partir de haber seleccionado una de tres puertas, el animador da la oportunidad de cambiarla después que ha descartado una de las que no tenían el premio. Este problema pone en jaque percepción de independencia de eventos y espacio muestral, la asignación inicial de probabilidades y la interpretación de convergencia (Batanero, Fernandes, y Contreras, 2009).

Ingeniería didáctica

La ingeniería didáctica, como método de investigación y diseño contempla cuatro fases: (1) análisis preliminar, (2) análisis a priori, (3) aplicación y (4) fase de contraste y rediseño (Artigue, 1988, Ferrari, 2008). Este reporte se enmarca en la etapa de análisis preliminar, en la cual, y en un marco socio-epistemológico, se consideran: (a) la faceta cognitiva, que se propone establecer aspectos propios del conocer de los estudiantes respecto de la probabilidad; (b) la faceta didáctica, que aborda el discurso matemático escolar presente en Chile respecto de la probabilidad; y (c) la faceta histórico-epistemológica, que busca establecer una epistemología de la noción de probabilidad. El aspecto sociocultural, que se imbrica en los tres anteriores, responde a considerar que la construcción de saber matemático es un proceso sociocultural, normado por prácticas sociales específicas.

METODOLOGÍA DE TRABAJO

Se asume a la ingeniería didáctica para el análisis preliminar.

Análisis cognitivo

El análisis cognitivo recurre a un estudio exploratorio inicial que busca mejorar la pregunta de investigación. A una población de estudiantes universitarios de ingeniería, sin formación en probabilidad o estadística de nivel superior, se aplica un cuestionario de preguntas abiertas, con el objeto de obtener producciones lingüísticas respecto de lo que enactan frente al juego de Monty Hall. Las preguntas y conjeturas son las siguientes.

1. Después de explicar el juego de Monty Hall, se pregunta: “si tú fueras el jugador, ¿te cambiarías de puerta cuando el animador te lo ofrece? Da una explicación de por qué.”

Se espera que el cambio de puerta no sea significativo para el estudiante, bajo la noción de que ambas puertas restantes tienen la misma probabilidad de ser ganadoras. En menor medida, se esperan menciones a la suerte o a experiencias previas en juegos de azar.

2. Se comenta el resultado de la simulación hecha muchas veces, con un jugador que nunca se cambia de puerta y otro que siempre se cambia. El primero gana una de cada tres veces, y el segundo gana dos de cada tres veces, aproximadamente. La pregunta es: “¿por qué crees que ocurre esto?”.

Se esperan expresiones de perplejidad y/o que pongan en duda el resultado de la simulación, o argumentaciones del tipo “cambiarse siempre da mayores probabilidades de ganar”, sin dar referencias a cantidades concretas. Las respuestas a estas preguntas se clasifican según su similitud en la argumentación.

Análisis didáctico

El análisis didáctico se realiza sobre los textos de enseñanza entregados a la educación pública y particular subvencionada chilena, que cubre el 80% de su matrícula. En particular, se analizan las actividades propuestas en el Programa de Estudios (MINEDUC, 2004) y el Texto de Estudiante de tercer año de enseñanza media (Saiz y Blumenthal, 2014), con el objeto de detectar tareas que involucren toma de decisiones en el estudio de la probabilidad condicional.

Análisis histórico-epistemológico

El análisis histórico-epistemológico recurre a la selección de autores y sus obras significativas en el desarrollo de la probabilidad. Para el análisis de la obra de cada autor se hace a partir de la construcción de una crónica del autor, de su contexto sociocultural y de su obra. Sobre ellos se sistematizan las prácticas que dan necesidad y sentido a la noción de probabilidad, en el contexto de toma de decisiones y apuestas, particularmente para juegos diacrónicos.

Adicionalmente, se estudian los distintos significados que ha tenido la probabilidad, que repercuten en el discurso matemático escolar. Paralelamente, se analizan elementos sistematizados por la teoría de elección y toma de decisiones.

RESULTADOS

Elementos del análisis preliminar

En los análisis realizados se identifica la noción de lo probable como algo que puede ocurrir y en la decisión del juego cualquier alternativa es probable de ocurrir (Elicer y Carrasco, 2014). Los estudiantes recurren a razones no matemáticas para tomar su decisión. La tabla 1 resume las categorías que se establecieron y etiquetaron en base a las respuestas dadas al cuestionario. Las columnas siguientes representan qué noción de probabilidad tienen los estudiantes, qué argumentaciones ofrecen y en qué basan su decisión.

Quienes recurren a la probabilidad como variable de decisión, consideran únicamente la probabilidad condicional (dado que quedan dos puertas, cada una tiene igual probabilidad de ser la ganadora), o bien, notan que la probabilidad de ganar cambiándose es mayor, pues la probabilidad de la puerta descartada se transfiere a otra.

Las variables no matemáticas son esencialmente la supuesta mala intención del animador del juego, y el valor intrínseco que dan a mantenerse firmes en su primera decisión. Una variable inesperada, dada por el contexto campesino del que provienen algunos estudiantes, es el hecho de que las cabras estén silenciosas. Según ellos, esto solo puede ocurrir si están juntas, en puertas contiguas.

Tabla 1. Categorías dadas por la respuesta a la pregunta 1, en que argumentan por qué cambiarse o no cambiarse de puerta en el juego de Monty Hall. Elaboración propia.

Categoría	Probabilidad	Argumentación	Decisión
Cabras	No está presente	Cabras debe estar juntas	Cabras en puertas contiguas
50/50	Condicional	Dos puertas equiprobables	Contexto o personalidad
Proba. es un líquido	Propiedad que llena	Probabilidad se traspasa	Mayor probabilidad
Porfía	No está presente	Mantenerse es un valor	Sensación experiencial
Animador	No está presente	Conveniencia	Intención del animador

Después de mostrado el resultado de repetidas simulaciones, las producciones lingüísticas arrojan que el grupo se divide. Un grupo asume que el cambio de puerta otorga mayor probabilidad de éxito y busca una explicación. Otros siguen pensando que no hay una ventaja, y que el que ganó con mayor frecuencia fue simplemente por "suerte".

En la tabla 2 se resumen estas nuevas categorías. Quienes asumen que hay una ventaja en cambiarse de puerta recurren a tres explicaciones: la probabilidad de éxito se transfiere de una puerta a otra, el cambio es un valor en sí mismo o la probabilidad de ganar cambiándose es la probabilidad de no acertar en el primer intento. Esta última explicación se vale del uso correcto de la probabilidad condicional y la probabilidad total.

Tabla 2. Categorías dadas por las respuestas a la pregunta 2, en que buscan una explicación a los resultados de la simulación. Elaboración propia.

Categoría	Probabilidad	Argumentación	Decisión
Proba. es un líquido	Propiedad que llena	Probabilidad se traspasa	Mayor probabilidad
Cambio es bueno	Dinámica	Cambio como receta de éxito	Mayor probabilidad
Proba. condicional	Total	Elegir cabra inicialmente	Mayor probabilidad
Azar y suerte	No existe	Suerte como factor	No existe

En la faceta didáctica, el programa de estudios chileno no abarca la toma de decisiones, ni la predicción con ventaja en sus actividades. Se descansa en el pensamiento inferencial que puede ser estudiado en estadística durante el próximo año de estudio, o bien en estudios superiores. Esto se ve reflejado, por ejemplo, en la siguiente indicación:

> En este ejemplo la experiencia aleatoria es elegir a una persona al azar y se estima la probabilidad de que ella satisfaga una determinada condición recurriendo a la frecuencia relativa.
>
> Recoger información, organizarla e interpretarla es de vital importancia para la toma de decisiones en diversos y múltiples ámbitos. Muchas decisiones no se sustentan en información censal sino muestral, tema que será estudiado en Cuarto Año Medio. (MINEDUC, 2004, p.107).

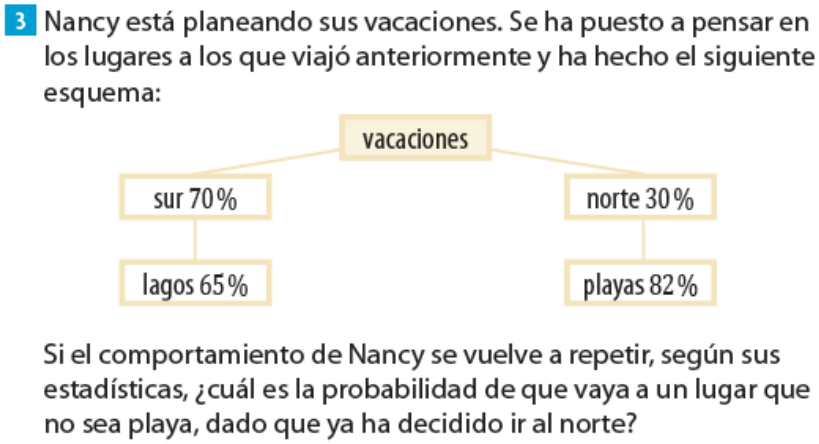
En consecuencia, las tareas no consisten en tomar decisiones utilizando los conceptos estudiados. A lo sumo se pide al estudiante calcular probabilidades de que se tome una u otra decisión, siendo el experimento una extracción al azar, basado en información estadística pasada. Esto se puede verificar en la siguiente actividad:

> Los resultados en una encuesta de mi curso, en relación con la utilización de los fondos de nuestra tesorería, arrojaron que de los 40 alumnos, hay 26 que prefieren ir a paseo y el resto quiere un regalo. De los que quieren ir a paseo, 12 prefieren ir a la piscina y el resto a otro lugar. Si se escogiera, al azar, una persona dentro del curso, ¿cuál sería la probabilidad de que no quisiera ir a la piscina si desea ir a paseo? (Saiz y Blumenthal, 2014, p.334).

Adicionalmente, se corre el peligro de confundir cómo se toma una decisión ante incertidumbre.

La actividad expuesta en la figura 1 (Saiz y Blumenthal, 2014, p.333) da a entender que el sujeto no toma una decisión, sino que escogerá al azar o ciegamente. La probabilidad condicional solo influirá en el posible resultado de esta decisión.

Figura 1. Actividad de probabilidad condicional. Fuente: Saiz, O., y Blumenthal, V. (2014)



En el análisis histórico-epistemológico, Pascal y Fermat (Pascal, 1983), por su parte, abordan sus trabajos iniciales de probabilidad en torno a la necesidad de generar un reparto equitativo al suspender un juego de azar. No realizan cálculos de probabilidades, sino que, considerando experimentos con resultados equiprobables de varias etapas, determinan, en cada escenario, cuál es el valor de la jugada. Posteriormente y en contraste, surge la idea de hacer injusto el juego, en el sentido de apostar con ventaja.

Algo similar ocurre con el intercambio de cartas entre los hermanos Huygens (Basulto, Camuñez, Ortega, y Pérez, 2015), en que buscaban asignar un valor a la vida de una persona, según el tiempo que se espera que siga con vida una persona. Esto, con el propósito de realizar un reparto adecuado en el sistema de pensiones que emergía en la economía europea. A partir de las primeras tabulaciones de mortalidad publicadas en Inglaterra, resignifican el espacio muestral desde aquel usado por Pascal y Fermat, es decir, todas los posibles resultados del juego, por los casos estadísticos reconocidos. Se avanza de este modo hacia una probabilidad a posteriori.

En ambos casos la práctica consiste en asesorar a otro a tomar decisiones premeditadas. Estos son propósitos diferentes al planteado en el escenario del juego de Monty Hall, en el cual no se pide una decisión a priori, sino una *in situ.*

Muchos de los significados particulares de la probabilidad en el discurso matemático escolar son analizados y sintetizados en Batanero (2005). Estos se pueden clasificar en: intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático. En el juego de Monty Hall salen a relucir principalmente los significados intuitivo y subjetivo, contrastado por el sentido clásico en el análisis a priori, y el frecuencial dado por la realización repetida del juego.

Desde la arista de la toma de decisiones, se puede mostrar que toda elección de preferencias racional se puede asociar a un problema de maximización de una función de utilidades personal (Levin y Milgrom, 2004). Es por esto que, un buen apoyo a la reflexión acerca de la toma de decisiones es analizar las variables que influyen y determinan esta función, ya sean estáticas o dinámicas, objetivas o subjetivas.

Implicancias para la secuencia

La etapa siguiente de esta investigación corresponde al análisis a priori, es decir, al diseño de una secuencia didáctica que promueva las prácticas y nociones de probabilidad condicional que se han estudiado en este análisis preliminar. Se establecerán conjeturas acerca de la devolución de los estudiantes ante las actividades.

De acuerdo al análisis histórico-epistemológico, se propone comenzar por realizar actividades en que se evalúe si acaso un juego de azar es considerado justo. Luego se debe avanzar en la construcción de estrategias que hagan un juego injusto, a favor, es decir, a la apuesta con ventaja. En cada caso, se debe distinguir entre vivir la decisión y asesorar a otro para que la tome.

Debido a la falta de experiencia en situaciones de toma de decisiones, se aconseja comenzar planteando juegos más sencillos, idealmente de una única etapa de decisión. El problema de Monty Hall puede incluirse en una segunda fase.

Muchas de las conjeturas a priori se pueden extraer del análisis cognitivo, en que prevalecen variables socioemocionales en la decisión de la jugada. En el marco de la teoría de elección, se debe anticipar la confluencia de estas variables en la función de utilidad de los individuos y

proceder a constantificarlas, de modo de que el planteamiento matemático sea preponderante. Adicionalmente, se prevén concepciones erróneas acerca de la independencia de sucesos, definición del espacio muestral, asignación de probabilidades iniciales e interpretación de la convergencia de una variable aleatoria (Batanero et al., 2009).

Finalmente, se vuelve relevante poder avanzar en una resignificación a priori del espacio muestral, que se concreta en la consideración de todos los casos posibles, como en juegos de dados y naipes, a un espacio muestral estadístico definido a posteriori, como en el análisis de simulaciones del juego Monty Hall.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*,*9*(3), 281-308.

Basulto, J., Camuñez, J., Ortega, F., y Pérez, M. (2015) La correspondencia entre los hermanos Huygens en 1669: vida media frente a vida mediana. En *Historia de la probabilidad y la estadística (II),* pp. 57-69. Delta Publicaciones, . España.

Batanero, C. (2005) Significados de la probabilidad en la Educación Secundaría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matematica Educativa*, *8*(3), pp. 247-263. México D.F., México. CLAME.

Batanero, C., y Díaz, C. (2007). Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje. *XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas.* Granada: Federación Española de Profesores de Enseñanza de las Matemáticas.

Batanero, C., Contreras, J. M., Cañadas, G., y Gea, M. (2012). Valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas: un ejemplo de probabilidad. *Novedades Educativas*, *261*, 78-84.

Batanero, C., Fernandes, J. A., y Contreras, J. (2009). Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicancias didácticas. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 62*, 11-18.

Elicer, R., y Carrasco, E. (2014). Juegos de azar diacrónicos: un espacio para el encuentro entre las creencias subjetivas y las probabilidades condicionales. En M. Parraguez, H. Rivas, C. Vásquez, N. Pincheira, H. Solar, F. Rojas y E. Chandía (Eds.). *Jornadas Nacionales de Educación Matemática, 18, 86*. Santiago: Sociedad Chilena de Educación Matemática.

Ferrari, M. (2008). *Un acercamiento socioepistemológico a lo logarítmico de multiplicar sumando a una primitiva*. Tesis de Doctoral no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Levin, J. y Milgrom, P. (2004). *Introduction to choice theory* [Documento PDF]. Recuperado el 26 de marzo de 2016 de http://goo.gl/s9Dz6x

MINEDUC (2004). *Matemática, Programa de Estudio, Tercer Año Medio, Formación General.* Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación, Ministerio de Educación, Gobierno de Chile.

Morin, E. (1999). *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro.* París: UNESCO.

OECD. (2014). *PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do - Student Performance in Mathematics, Reading and Science (Volume I, Revised edition, February 2014).* PISA: OECD Publishing.

Pascal, B. (1983). Cartas de Pascal a Fermat. En C. R. de Dampierre (Trad.), *Blaise Pascal: obras escogidas*. Madrid: Ediciones Alfaguara.

Saiz, O., y Blumenthal, V. (2014). *Matemática 3° medio: texto del estudiante.* Santiago: Ediciones Cal y Canto.

Taleb, N. (2012). *Antifragile: Things that gain from disorder (Vol. 3)*. New York: Random House Incorporated.

ANÁLISIS DE TEXTOS USANDO LA TEORÍA APOE: EL CASO DEL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN EN EL LIBRO DE GRIMALDI

Isabel García Martínez, Marcela Parraguez González
Universidad Católica del Norte (Chile), Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)
igarcia@ucn.cl, marcela.parraguez@pucv.cl

Palabras clave: APOE, libro de texto, inducción, paso base

Key words: APOS, textbook, induction, basis step

RESUMEN: En este trabajo se analiza el tópico de inducción matemática del libro de Grimaldi a través de la teoría APOE. Ello se hace a partir de una descomposición genética diseñada por Dubinsky y Lewin para dicho concepto. Se indaga la relación que existe entre la manera de abordar este tema en el libro y las estructuras mentales mostradas en la descomposición genética. En este libro, se enfatiza la importancia del paso base del principio de inducción matemática, el cual no está declarado de manera explícita en la descomposición genética de Dubinsky y Lewin. La secuencia de ejercicios que propone Grimaldi, promueve la encapsulación del principio de inducción matemática como construcción mental objeto, a partir del paso base y del paso inductivo como procesos.

ABSTRACT: In this paper the topic of mathematical induction of the book of Grimaldi is analyzed by the APOS theory. This is done from a genetic decomposition designed by Dubinsky and Lewin to this concept. It explores the relationship between the approach to this topic in the book and mental structures shown in genetic decomposition. In this book, the importance of the basis step of the principle of mathematical induction is emphasized, which is not said explicitly in the genetic decomposition of Dubinsky and Lewin. The sequence of exercises proposed by Grimaldi, promotes the encapsulation of the principle of mathematical induction as a mental construct object from basis step and the inductive step as processes.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se analiza la unidad de inducción matemática del libro *Matemáticas discreta y combinatoria: Una introducción con aplicaciones* (Grimaldi, 1997), por ser un libro que se utiliza como referente en varios cursos universitarios chilenos para abordar el tema de inducción matemática.

Se propone analizar la presentación que Grimaldi realiza de este tópico desde la teoría APOE, porque ella nos brinda elementos para indagar en la construcción de este concepto en aprendices.

A partir del análisis del libro de Grimaldi con esta teoría, se puede reafirmar la conclusión del trabajo de García-Martínez y Parraguez (2015), esto es: la construcción mental "paso base" es fundamental para construir el concepto inducción matemática como objeto. Donde el "paso base" es una de los dos pasos que se requieren para realizar una demostración por el método de inducción y consiste en determinar si la propiedad que se quiere demostrar se cumple para un primer elemento (Grimaldi, 1997), como se verá más adelante.

MARCO TEÓRICO

La teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) es un marco teórico cognitivo, creado por Ed Dubinsky, a partir de la abstracción reflexiva de Piaget (Dubinsky, 1996). Posteriormente se ha seguido desarrollando por otros investigadores (Arnon et al., 2014).

Según esta teoría, las estructuras mentales necesarias para construir un concepto matemático son: acción, proceso, objeto y esquema. Se dice que un estudiante muestra una concepción acción de un determinado concepto matemático cuando lo percibe como algo externo y debe realizar todos los pasos para resolver una tarea que involucre dicho concepto. Cuando un estudiante repite una acción, hasta ser capaz de resolver tareas sin necesidad del estímulo externo, ni de efectuar todos los pasos, se dice que él ha interiorizado la acción en un proceso. A su vez, dos o más procesos pueden ser coordinados para obtener otro proceso. Cuando el estudiante ve el proceso como un todo y puede actuar sobre él, se dice que lo ha encapsulado en un objeto. Si un estudiante muestra la concepción objeto de un determinado concepto matemático, podrá desencapsularlo para ver los procesos que dieron origen a dicho objeto. Al conjunto de acciones, procesos, objetos y esquemas relacionados con un concepto matemático determinado, se lo denomina esquema, el cual es una estructura coherente e inacabada, ya que un esquema puede asimilar nuevos objetos para luego acomodarlos. Los mecanismos mentales que permiten pasar de un estado a otro son las abstracciones reflexivas, algunas de ellas son: interiorización, coordinación, reversión, asimilación, encapsulación y desencapsulación.

La teoría APOE, también tiene incorporado un ciclo de investigación compuesto por tres componentes: análisis teórico o descomposición genética (DG), diseño y aplicación de instrumentos, y análisis y verificación de los datos (Asiala et al., 1996). La DG es un modelo cognitivo hipotético que muestra las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante debería construir para aprender un concepto matemático determinado (Arnon, et al., 2014). Se construyen instrumentos para validar, o no, la DG, los cuales se analizan y si fuera necesario se refina la DG y se sigue el ciclo las veces que sea necesario, hasta que la DG sea validada.

ANÁLISIS DE LA UNIDAD DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA EN EL LIBRO DE GRIMALDI

En este apartado, se analiza el libro de Grimaldi desde lo cognitivo, a través de la teoría APOE, permitiendo obtener algunos elementos importantes para el diseño de una DG.

En el capítulo 4 de este libro, el autor comienza mostrando una diferencia entre $\mathbb{Z}^+$y $\mathbb{Q}^+$ o $\mathbb{R}^+$ para enunciar el principio del buen orden:

"Cualquier subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}^+$ contiene un elemento mínimo." (Grimaldi, 1997, p. 184).

En Grimaldi (1997) se enuncia y demuestra el principio de inducción matemática a través del siguiente teorema:

Teorema: *Principio de inducción finita o de inducción matemática.* Sea $S(n)$ una proposición matemática abierta (o un conjunto de tales proposiciones abiertas), en la que aparece una o varias veces la variable n, que representa a un entero positivo.

a) Si $S(1)$ es verdadera; y

b) siempre que $S(k)$ sea verdadera (para algún $k\epsilon\mathbb{Z}^+$ particular, pero elegido al azar), entonces $S(k+1)$ será verdadera;

entonces $S(n)$ es verdadera para todo $n\epsilon\mathbb{Z}^+$. (Grimaldi, 1997, p. 184)

Como se puede interpretar, en el teorema de inducción matemática, este autor describe con precisión la inducción a partir de dos pasos: el paso base (a) y el paso inductivo (b). Para demostrarlo, Grimaldi se basa en el principio del buen orden, pero luego observa que este último se puede demostrar suponiendo verdadero el principio de inducción matemática.

A partir de nuestra experiencia como docentes en el tema, no podemos dejar de mencionar una forma más general de presentar explícitamente el principio de inducción matemática, esto es, como el mismo Grimaldi ha señalado, indicando que en la parte (a) de dicho principio, se puede reemplazar el 1 por cualquier otro número entero. Y lo enuncia de la siguiente manera:

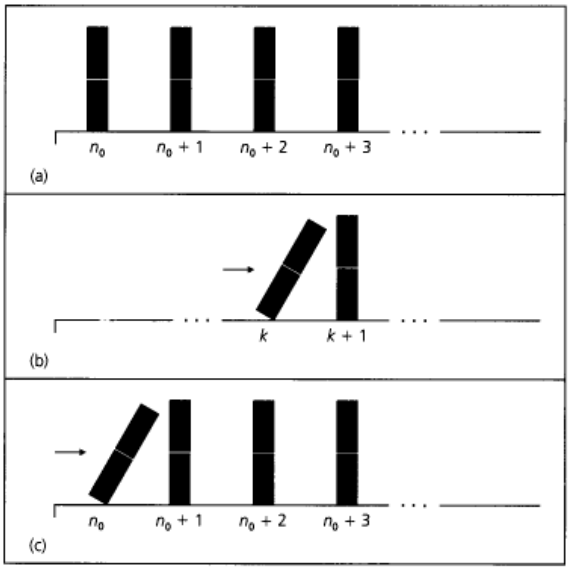
$$\left[S(n_0) \wedge \left[(\forall k \geq n_0)\big(S(k) \Rightarrow S(k+1)\big)\right]\right] \Rightarrow (\forall n \geq n_0)\, S(n).$$

(Grimaldi, 1997, p. 185).

En este enunciado, el principio de inducción matemática es visto como un objeto, desde el punto de vista de la teoría APOE, porque se ve el proceso como un todo y es posible actuar sobre él.

También es interesante ver como Grimaldi hace una analogía entre el principio de inducción matemática y una forma intuitiva de verlo usando fichas de dominó (Figura 1).

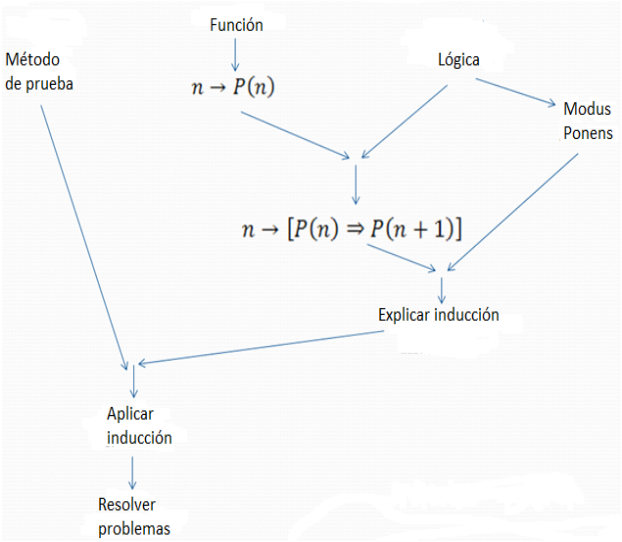
Figura 1. El principio de inducción matemática visto con fichas de dominó (Grimaldi, 1997, p. 185).



Las fichas se colocan en forma vertical, a una distancia tal que si se cae una ficha hacia la derecha, la siguiente también se caerá y además se cae la primera ficha (que ocupa el lugar n_0).

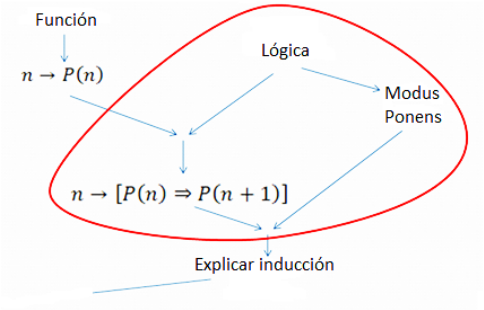
La indagación desde lo cognitivo, comienza con un análisis teórico que se plasma en una DG para la inducción matemática, diseñada por Dubinsky y Lewin (Arnon et al., 2014, p. 31) la cual se presenta en la Figura 2.

Figura 2. DG de inducción matemática diseñada por Dubinsky y Lewin (1986).



Si se presta atención en la Figura 3, se puede apreciar, al interior de la línea roja, el modelo de construcción de la DG al realizar los pasos indicados en la forma intuitiva del principio de inducción.

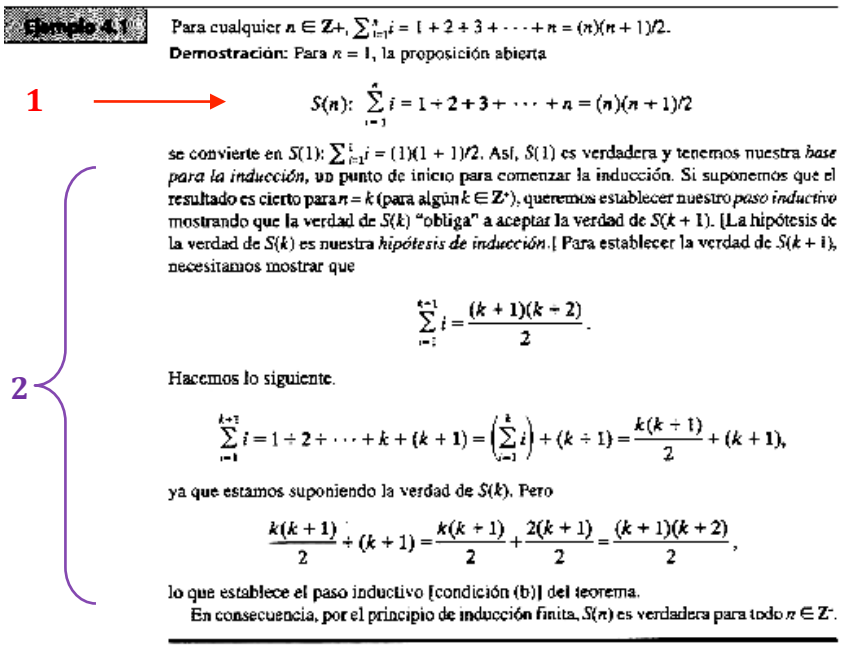
Figura 3. Modelo de construcción de la DG que se sigue al ver el principio de inducción matemática de manera intuitiva.



Por la regla de eliminación del cuantificador universal, de $(\forall k)(S(k) \Rightarrow S(k+1))$, se puede deducir $(S(n_0) \Rightarrow S(n_0+1))$ y aplicando *Modus Ponens* y el hecho de que $S(n_0)$ es verdadera, se deduce que $S(n_0+1)$ es verdadera. Luego, análogamente, se obtiene $(S(n_0+1) \Rightarrow S(n_0+2))$ y se aplica nuevamente *Modus Ponens* (ya que $S(n_0+1)$ es verdadera) para deducir que $S(n_0+2)$ es verdadera. Y así sucesivamente.

En el ejemplo 4.1 de dicho libro, que se muestra en la Figura 4, se realiza una demostración usando el principio de inducción matemática.

Figura 4. Ejemplo de demostración usando el principio de inducción matemática(Grimaldi, 1997, p. 186).



Ejemplo 4.1 Para cualquier $n \in \mathbf{Z}^+$, $\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots+n = (n)(n+1)/2$.

Demostración: Para $n = 1$, la proposición abierta

1 → $$S(n): \sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots+n = (n)(n+1)/2$$

se convierte en $S(1)$: $\sum_{i=1}^{1} i = (1)(1+1)/2$. Así, $S(1)$ es verdadera y tenemos nuestra *base para la inducción*, un punto de inicio para comenzar la inducción. Si suponemos que el resultado es cierto para $n = k$ (para algún $k \in \mathbf{Z}^+$), queremos establecer nuestro *paso inductivo* mostrando que la verdad de $S(k)$ "obliga" a aceptar la verdad de $S(k+1)$. [La hipótesis de la verdad de $S(k)$ es nuestra *hipótesis de inducción*.] Para establecer la verdad de $S(k+1)$, necesitamos mostrar que

2 →
$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Hacemos lo siguiente.

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = 1+2+\cdots+k+(k+1) = \left(\sum_{i=1}^{k} i\right)+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+(k+1),$$

ya que estamos suponiendo la verdad de $S(k)$. Pero

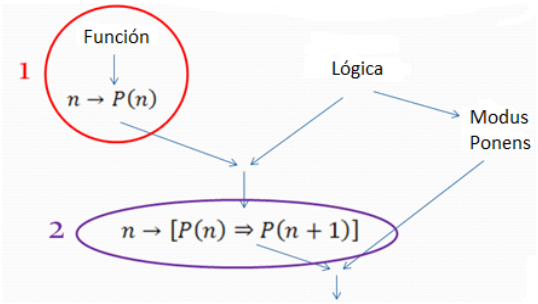
$$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

lo que establece el paso inductivo [condición (b)] del teorema.

En consecuencia, por el principio de inducción finita, $S(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbf{Z}^+$.

En las Figuras 4 y 5 se puede observar que los números **1** y **2** relacionan los tramos de la demostración (Figura 4) con las partes correspondientes de la DG (Figura 5).

Figura 5. Fragmento de la de la Figura 2 de la DG de Dubinsky y Lewin.



En un ejemplo del libro de Grimaldi (1997), se observa la importancia que se le da al paso base del principio de inducción matemática. En dicho ejemplo se demuestra el paso inductivo (Ver Figura 5) para la siguiente proposición abierta

$$S(n): \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

(Grimaldi, 1997, p. 188)

y que dicha función proposicional es falsa para cualquier número natural, a pesar de cumplirse el paso inductivo del principio de inducción.

CONCLUSIÓN Y DISCUSIÓN

Si bien la presentación que realiza Grimaldi (1997) del principio de inducción sigue el mismo formato de diversos libros de matemática universitarios, él a diferencia de otros, muestra a través de variados ejemplos, la importancia del paso base. Otros autores también mencionan este punto, pero no tan explícitamente, por ejemplo Apostol (1984) lo muestra en un ejercicio que deja planteado a los lectores.

Interpretando la secuencia de ejemplos que presenta Grimaldi (1997), sostenemos que ellos promueven la encapsulación del principio de inducción matemática a partir de los procesos del paso base y del paso inductivo.

Agradecimientos. Este trabajo está siendo posible gracias al apoyo recibido del CONICYT para el desarrollo del proyecto Fondecyt Regular No. 1140801.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Apostol, T. (1984). *Calculus. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal.* España: Editorial Reverté, S.A.

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education.* New York: Springer.

Asiala, M., Brown, A., De Vries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld, E. Dubinsky (Eds.) *Research in Collegiate Mathematics Education, 2,* 1-32. U.S.A.: American Mathematical Society.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación matemática, 8* (3), 25-41.

Dubinsky, E. y Lewin, P. (1986). Reflective abstraction in mathematics education: The genetic decomposition of induction and compactness. *The Journal of Mathematical Behavior*, *5*, 55-92.

García-Martínez, I. y Parraguez, M. (2015). Refinamiento de una descomposición genética para el concepto de inducción matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28*, 765-773. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Grimaldi, R. (1997). *Matemáticas discreta y combinatoria. Una introducción con aplicaciones.* Estados Unidos: Addison - Wesley Iberoamericana, S. A.

DIFICULTADES PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS ESTADÍSTICAS EN LA UNIVERSIDAD DE SONORA

Irma Nancy Larios Rodríguez, Enrique Hugues Galindo, Gerardo Gutiérrez Flores
Universidad de Sonora (México)
nancy@.mat.uson.mx, ehugues@mat.uso.mx, gerardo@mat.uson.mx

Palabras clave: Modelo de competencias, competencia estadística, dificultades, cursos de estadística.

Key words: Competences model, competition statistics, difficulties, statistics courses.

RESUMEN: En el trabajo se presentan una serie de reflexiones en torno al a las dificultades para el desarrollo de competencias estadísticas en los cursos de Estadística de la Universidad de Sonora. También se proponen algunas estrategias dirigidas a los docentes que imparten los cursos de estadística. Como antecedente se tiene que actualmente el plan estudios de los programas educativos (Licenciatura en Trabajo Social, Derecho, Psicología, Ciencias de la Comunicación, Historia, Administración Pública y Sociología) del área de Ciencias Sociales de le Universidad de Sonora están basados en el modelo por competencias, en dichos programas educativos de contemplan uno o dos cursos de estadística, de ahí el interés institucional de promover acciones que impacte en el logro del desarrollo de competencias estadísticas en los estudiantes.

ABSTRACT: In this work we present some reflections related with the difficulties found to develop statistical competences in the statistics courses teached at the University of Sonora. We also propose some strategies directed specifically toward the proffesors who attend these courses. Nowadays, the study programs (Bachelor of Social Work, Law, Psychology, Communication Science, History, Public administration and Sociology) of the area of Social Sciences at the University of Sonora, are based in a competences model; these educational programs include one or two statistics courses, hence the institutional interest to promote some actions directed to achieve the development of statistical competences in our university students.

INTRODUCCIÓN

En la Universidad de Sonora el modelo curricular de los programas educativos del área de Ciencias Sociales están basados en competencias, en los planes de estudios de los programas educativos de dicha área se imparten uno o dos cursos de estadística, siendo los profesores adscritos al Departamento de Matemáticas los responsables de impartir los cursos de matemáticas, incluyendo lo cursos de estadística. En el departamento de Matemáticas, en los últimos años se han desarrollado varios proyectos entre los que nos parece importante destacar los siguientes, dado que están directamente relacionados con el presente trabajo: *Estado de la educación estadística en carreras de ciencias sociales en la Universidad de Sonora y alternativas para su desarrollo*; *Detección de errores y dificultades en la comprensión de conceptos fundamentales estadísticos* y *Seguimiento de la impartición de los cursos de estadística bajo el nuevo modelo curricular en el área de ciencias sociales*, los dos primeros vigentes y el último concluido. De los resultados obtenidos en estos proyectos hemos podido detectar una serie de aspectos que dificultan la concreción del modelo curricular basado en competencias en nuestra institución los cuales describiremos en el presente trabajo.

MARCO CONCEPTUAL.

Los métodos de la estadística se aplican donde quiera que haya datos, variación y el azar, consideramos que esto la hace favorable un modelo educativo por competencias. Pero, ¿Qué es una competencia, una competencia matemática y una competencia estadística?, sobre estos conceptos se tienen diferentes definiciones, de las cuales destacamos las que se presentan en este apartado.

Para el concepto de competencia se tienen por ejemplo las siguientes definiciones.

El programa PISA de la OCDE establece que:

“Una competencia es más que conocimientos y habilidades. Implica la capacidad de responder a demandas complejas, utilizando y movilizando recursos psicosociales (incluyendo habilidades y actitudes) en un contexto particular” (OCDE, 2004, p.4).

ANUIES define la competencia como:

> Un conjunto de conocimientos, habilidades y destrezas, tanto específicas como trasversales, que debe reunir un titulado para satisfacer las exigencias sociales. Fomentar las competencias es el objetivo de los programas educativos. Las competencias son capacidades que la persona desarrolla en forma gradual y a lo largo de todo proceso educativo y son evaluadas en diferentes etapas. Pueden estar divididas en competencias de formación profesional en general (competencias genéricas) o con un área de conocimientos (especifica de un campo de estudio). (De Allende y Morones, 2006, p.5).

Philippe Perrenoud señala que "El concepto de competencia representa una capacidad de movilizar varios recursos cognitivos para hacer frente a un tipo de situaciones" (Perrenoud, 2004, p.11). En esta definición, se incorporan los siguientes aspectos aspectos:

- Las competencias no son conocimientos, habilidades o actitudes, más bien movilizan, integran y orquestan tales recursos.

- La movilización resulta pertinente a la situación particular, siendo esta única, pero se pueden tratar de manera análoga a otras ya conocidas.
- Las acciones implicadas en la competencia pasa por operaciones mentales complejas, estas se realizan de un modo más o menos consciente y rápido y adaptado a la situación.
- Las competencias se desarrollan en la formación pero también en la práctica cotidiana en la resolución de las situaciones.

En relación al concepto de competencia matemática encontramos que el programa PISA de la OCDE señala que "el concepto general de competencia matemática se refiere a la capacidad del alumno de razonar, analizar y comunicar operaciones matemáticas. Es, por lo tanto, un concepto que excede al mero conocimiento de la terminología y las operaciones matemáticas e implica la capacidad de utilizar el razonamiento matemático en la solución de problemas de la vida cotidiana" (OCDE, p.12).

Para Watson, "La competencia estadística es el punto de encuentro del currículo de azar y datos con el mundo de la vida diaria, donde tal encuentro involucra contextos inexplorados y tomas de decisiones espontáneas con base a la habilidad para aplicar las herramientas estadísticas, el conocimiento general del contexto y las habilidades críticas" (Watson, 2006,p.11). Por otro lado para Cobb y Moore "la estadística es una disciplina metodológica. Ella existe no por sí misma sino para ofrecer a otros campos de estudio un conjunto coherente de ideas y herramientas para tratar con datos. La necesidad de una disciplina como esta, surge de la omni-presencia de la variabilidad" (Cobb, P. y Moore D., 2000), razón por la cual afirman Sánchez y Hoyos (2013) hace a la estadística favorable al enfoque por competencias.

Particularmente coincidimos con los planteamientos realizados por Sánchez y Hoyos (2013) al afirmar que las competencias se ubican en una relación entre la teoría y la práctica, de tal forma que no se trata de más teoría o más práctica, sino buscar el ser competente, esto lo interpretamos como un proceso continuo en un ir y venir, esto es no se trata aprender y luego aplicar ya que aprender implica aplicar. Coincidimos también en que un enfoque por competencias se debe terminar con la estructura lógica y secuencial de unidades contenido como tradicionalmente está organizado los programas de cursos.

Por otro lado, en las diferentes definiciones de competencias planteadas anteriormente se puede destacar que el resolver situaciones en contextos de la realidad o de la vida cotidiana parece ser un punto relevante, sobre tal particular nos parece importante enfatizar que en la estadística la existencia de dichos contextos o situaciones de la vida cotidiana son inherentes a ella ya que es una disciplina metodológica que ofrece a otros campos disciplinares un conjunto coherente de ideas y herramientas para tratar datos, esto hace particularmente proclive a la estadística a un modelo curricular por competencias, otro planteamiento con el que coincidimos.

Teniendo como referente los aspectos señalados en este apartado, nos dimos a la tarea de analizar los programas de estudios de los cursos de estadística del área de Ciencias Sociales, así como realizar un estudio de casos con profesores que imparten cursos de estadística en dicha área.

DIFICULTADES PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS ESTADÍSTICAS EN LA UNIVERSIDAD DE SONORA.

Desde el 2003, la Universidad de Sonora inicio una serie de modificaciones en sus planes y programas de estudios, de tal forma que en el 2004 el modelo curricular de los programas educativos del área de Ciencias Sociales está basado en competencias, al menos eso es lo que se declara formalmente. Los programas educativos adscritos al área de Ciencias Sociales son: Administración Pública, Ciencias de la Comunicación, Psicología, Historia, Sociología, Derecho y Trabajo Social. En la Tabla 1, se muestra los cursos de matemáticas que se imparten a dichos programas educativos.

Tabla 1. Relación de cursos de matemáticas impartidos a los programas educativos del área de Ciencias Sociales de la Universidad de Sonora.

Programas educativos	Cursos de matemáticas			
	Estadística Descriptiva	Estadística Inferencial	Estadística no Paramétrica	Aspectos cuantitativos de los Problemas Jurídicos
Administración Publica	X			
Ciencias de la Comunicación	X	X		
Derecho	X			X
Historia	X			
Psicología	X		X	
Sociología	X	X		
Trabajo Social	X			

Sin lugar a dudas los factores que pueden dificultar el desarrollo de competencias estadísticas en los estudiantes de los cursos de estadística, son múltiples, en el presente trabajo se presentan algunos relacionados con el currículo y la formación de profesores.

En los proyectos señalados en la introducción se han realizado como tareas prioritarias como el análisis de los programas de los cursos de estadística, entrevistas con profesores que imparten cursos de estadística en los diferentes programas educativos, análisis de las prácticas didácticas de enseñanza de los profesores, de los métodos de evaluación y del tipo de materiales didácticos utilizados en los cursos.

Análisis de los programas de los cursos de estadística del área de Ciencias Sociales.

El análisis de los programas de estudio fue realizado por los que autores del presente y en él se ha se ha encontrado que:se sigue teniendo una estructura rígida, en donde se enlistan una serie de

temas disciplinares, así por ejemplo para el curso de estadística descriptiva, UNISON (2004) se tiene el siguiente temario sintético: I. Introducción, II. Representación estadística (Tablas, gráficas y diagramas), III. Medidas de tendencia central, IV. Medidas y V. Análisis Regresión y Correlación Lineal Simple.

Lo anterior, contradice lo destacado por Sánchez y Hoyos (2013) que señalan para el desarrollo de competencias el programa o currículo debe romper con el currículo organizado por secuencias lógicas de contenido y estar a favor de prescripción que sean indicativas en relación con situaciones o problemas de relevancia social, siendo estos los conductores del desarrollo de del pensamiento estadístico. Particularmente estos autores proponen un conjunto de ideas fundamentales importantes a considerar para el desarrollo del currículo.

Como orientación del tratamiento de los temas en el programa se señala que: “En todos los casos de los temas nos referimos no solo al cálculo de estadísticas y/o construcción de tablas o gráficas, sino también a la interpretación de las mismas, así como la elección adecuada a situaciones particulares de su área”. Que desde nuestro punto de vista, destaca el hecho de ir más allá del simple cálculo o de representación de la información, pero es limitada para un modelo de competencias. Tomando como punto de partida las diferentes definiciones que sobre competencias se expresaron en el apartado del marco conceptual, en la revisión de los programas también pudimos observar que en el mejor de los casos se declaran desempeños terminales de los estudiantes, no competencias, siguiendo con el ejemplo del programa de estadística descriptiva se señalan los siguientes desempeños terminales de los estudiantes:

1. Identificar las características de la información que sean pertinentes con el modelo.
2. Determinar los tipo de variable que mejor describan la variación de esas características (cuantitativa o cualitativa; nominal, ordinal, por intervalo o de cociente; continua discreta).
3. A partir del tipo de representación en que se presente la información, utilizará otras formas para representarla, de acuerdo a los tipos de variable que describan esa información (tipos de representación: lenguaje materno o coloquial, pictograma, numérico o tabular, diagramas y gráficas; se incluye la representación algebraica o analítica sólo con fines de descripción).
4. Identificará las características significativas de los datos a partir del análisis comparativo y de articulación de las representaciones para los mismos.
5. Identificará las regularidades e invariantes en el comportamiento de las variables que describen a los datos.
6. Evaluará los diferentes criterios de clasificación y usará aquellos que considere pertinentes y más eficientes.
7. Usará los diferentes tipos de representación pertinentes como registro de las clasificaciones.
8. Conjeturar acerca del comportamiento de la distribución de los datos.
9. Evaluará los diferentes criterios para resumir datos y usará aquellos que considere pertinentes y más eficientes.
10. En el caso de una muestra, conjeturará acerca de los valores de los parámetros de la población.

11. En el caso de variables cuantitativas caracterizará la distribución de la variable.

12. Generalizar hacia el comportamiento de la distribución de la población.

El no tener claramente definidas las competencias estadísticas y genéricas que se pretenden desarrollar en los estudiantes, refleja poca claridad de los diseñadores de los programas de materia de un modelo basado en competencias, que evidentemente provoca confusión entre los docentes que imparten los cursos y en los estudiantes que consultan dichos programas de estudio. Por lo cual es necesario definir claramente cuáles son las competencias estadísticas necesarias desarrollar en los programas educativos del área de Ciencias Sociales, esta es una acción en la que se deben involucrar docentes e investigadores de programas educativos a los cuales está dirigido el curso, no es pertinente que estas sean definidas exclusivamente por los expertos del Departamento de Matemáticas, como sucedió con los programas de cursos vigentes.

En los programas de los cursos de estadística existen mínimas orientaciones didácticas y de evaluación para los docentes que imparten los cursos, lo cual dificulta a los docentes con poco o nulo conocimiento de un modelo de competencias el poder utilizar estrategias didácticas adecuadas para el desarrollo de competencias estadísticas en los estudiantes, así como el promover evaluaciones formativas.

Formación de los profesores que imparten los cursos de estadística.

En la Universidad de Sonora, los profesores que imparten los cursos de servicio a los programas educativos tienen diferentes licenciaturas, así al indagar sobre las formaciones de los profesores que imparten los cursos de estadística en el área de Ciencias Sociales, nos encontramos que son muy variadas ya que se tienen matemáticos, ingenieros, etc., profesores con posgrados diversos. Consideramos que incluso el contar con profesores con posgrado no garantiza el desarrollo de un modelo por competencias.

Como uno de los acercamientos de lo que sucede en el aula se diseñó un cuestionario que consto de once preguntas (seis abiertas y el resto cerradas), distribuidas en: conocimiento del modelo educativo vigente, opinión acerca de su ejecución, percepción del impacto del modelo educativo vigente en cursos de estadística y concepción de educación estadística asumida por el profesorado. El cuestionario se aplica a seis profesores, con formaciones disciplinares diversas, se tienen profesores con maestría en matemáticas, en educación y en matemática educativa.

Al analizar las respuestas al cuestionario que algunos profesores que imparten cursos de estadística en el área de Ciencias Sociales, encontramos aspectos como los siguientes:

- 50% considera que los planes y programas de estudio, tiene solo parcialmente o no tiene una orientación acorde a los lineamientos universitarios y específicamente hacia el desarrollo de competencias estadísticas y profesionales.
- 67% consideran que falta elaboración y divulgación de materiales didácticos de apoyo.
- Para la planeación de sus cursos, el 67% consideran lo más importante el contenido disciplinar, dejando por fuera las estrategias de aprendizaje y enseñanza, así como la organización de tiempo y formas de evaluación.

- En cuanto el uso de la tecnología hay un marcado uso de hojas de cálculo y de calculadora, como instrumento para la realización de cálculos, tablas y gráficas, es decir, usan la tecnología como una herramienta para realizar cálculos exclusivamente.
- En cuanto a la forma de evaluación, impera la forma tradicional de evaluaciones parciales.

Lo anterior muestra una doble dificultad para el desarrollo de competencias estadísticas en los estudiantes, las propiciadas por la deficiencia del currículo y la relacionada con el desconocimiento que los profesores tienen del modelo basado en competencia y el no tener las competencias docentes requeridas por dicho modelo o tenerlas parcialmente (consideramos que las ultimas dificultades se relacionan con la formación docente)

Un análisis más detallado sobre las respuestas del cuestionario aplicado a los docentes se presenta en el trabajo de Hugues, Larios y Gutiérrez, titulado: Valoración de la educación estadística en ciencias sociales, el cual fue presentado en la RELME 29 el cual se encuentra en evaluación.

RECOMENDACIONES

Es necesario y urgente modificar los programas de los cursos de estadística del área de Ciencias Sociales, de tal forma que sean pertinentes a un modelo basado en competencias, que sirvan de apoyo tanto para los docentes que imparten los cursos de estadística. Actualmente el Departamento de Matemáticas cuenta con un grupo de matemáticos educativos con una amplia experiencia en el diseño de textos basado en el modelo por competencias, son los autores de los textos Matemáticas I, Matemáticas II y Matemáticas III para el Colegio de Bachilleres del Colegio de Sonora, así mismo cuentan con experiencia en impartición de cursos de formación docente basado en competencias para profesores de matemáticas del nivel básico y nivel medio superior, además como instructores en varias generaciones del Diplomado de en Competencias Docentes del Nivel Medio Superior, ofertado a los profesores de Nivel Medio Superior de México por la Secretaria de Educación Pública (SEP) y La Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior (ANUIES), como un mecanismo de acreditación de la Reforma Integral del Nivel Medio Superior (RIEMS), reforma basada en un modelo por competencia. Con lo anterior queda claro que se cuenta con el personal para poder realizar los cambios necesarios en los programas de los cursos de estadística.

En relación a la formación docente de los profesores, nos parece importante señalar que la institución en el documento Lineamientos generales para un modelo curricular de la Universidad de Sonora (2003), reconoce que:

> El agente central de toda reforma o política de mejoramiento del modelo educativo y curricular en cualquier institución seguirá siendo el docente, en tanto que es el responsable de promover y orientar la adquisición y el desarrollo de aprendizajes en los estudiantes…, debe fortalecer decididamente la formación didáctica pedagógica, de los profesores, para que sean capaces de llevar a cabo los cambios de actitud y formas de trabajo que el modelo necesita. (UNISON, 2003, p.37).

Para dar cumplimiento a este requerimiento la Universidad de Sonora cuenta con un Programa Permanente de Formación Docente, el cual ofrece diferentes cursos de formación (algunos de

esos cursos son de planeación didáctica basada en competencias o de evaluación formativa, entre otros) que nos parecen pertinentes para los profesores que imparten los cursos de estadística, también ofrece cursos a solicitud, sin embargo estos no son es de carácter obligatorio y en ese sentido habrá que evaluar el impacto que el programa ha tenido en el grupo de profesores de nuestro interés.

Particularmente en el Departamento de Matemáticas se han impulsado Proyectos de Docencia en donde los profesores que imparten los cursos de estadística se involucran en una serie de actividades que son estrategias de formación como por ejemplo el diseño de actividades didácticas que promuevan trabajo independiente de los estudiantes o colaborativo. Así mismo se han impulsado seminarios sobre temáticas diversas. Sin embargo es necesario que estas estrategias de formación sean realizadas de manera continua, otorgando a los profesores de asignatura condiciones para su participación en esas estrategias. Se hace referencia a los profesores de asignatura, ya que son estos los imparten el mayor número de cursos de matemáticas, incluyendo obviamente los de estadística.

Sin lugar a duda hay mucho trabajo que impulsar y concretar para poder lograr el desarrollo de las competencias estadísticas en nuestros estudiantes, pero consideramos que vamos avanzando hacia el logro de tan ambicioso objetivo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cobb, P. y Moore D. (2000), Statistics and mathematics: tension and cooperation. The American Mathamtical Monthly.

De Allende, C. y .Morones, G. (2006), *Glosario de términos vinculados con la cooperación académica. México: ANUIES. p.4.*

Hugues, E.,Larios, I. y Gutierréz, G. (En evaluación). Valoración de la educación estadística en ciencias sociales. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 29. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

(1999). Statistical thinking in empirical enquiry.

OCDE (2004). El Programa PISA de la OCDE. *Qué es y para qué sirve*. Paris: OCDE. Recuperado el 07 de octubre de 2015 de http://www.oecd.org/pisa/39730818.pdf.

Perrenoud, Ph (2004), Diez nuevas competencias para enseñar. Grao. Biblioteca para la actualización del maestro. SEP, México.

Sánchez, E. y Hoyos, V. (2013). La estadística y la propuesta de un currículo por competencias. En: A Salcedo (Ed.) Educación Estadística en América Latina: Tendencia y Perspectivas (pp.211-228), Venezuela: Programa de Cooperación Interfacultades. Vicerrectorado Académico. Universidad Central de Venezuela.

UNISON (2003) Lineamientos generales para un modelo curricular de la Universidad de Sonora. Gaceta, febrero de 2003. Hermosillo Sonora México: Universidad de Sonora.

UNISON (2004) Programas de Estudio Cursos en la División de Ciencias Sociales. Recuperado el 10 de junio de 2015, de Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora: http://www.mat.uson.mx/sitio/docenciaDCS.php.

Watson, J.M. (2006). Statistical Literacy at School: Growth and Goals. Mahawah, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. Wild, C. & Pfannkuch, M.

ESTUDIO COMPARATIVO SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES: ANÁLISIS DE TAREAS EN LIBROS DE TEXTO DE CHILE, FRANCIA E ITALIA

Charlotte Derouet, Carolina Henríquez, Romina Menares, Monica Panero
Université Paris Diderot (Francia), Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, (Chile), ENS de Lyon (Francia)
derouet@math.univ-paris-diderot.fr, carolina.henriquez@pucv.cl, rominame3@gmail.com, monica.panero@ens-lyon.fr

Palabras clave: función, comparación internacional, educación medio superior, libro de texto.

Key words: function, international comparison, secondary education, textbooks.

RESUMEN: El propósito de este escrito es mostrar un análisis comparativo relativo al estudio de tareas que involucran la noción de función en libros de texto de Chile, Francia e Italia. El análisis es de corte cualitativo, para lo cual fue diseñada una herramienta metodológica que facilita el estudio en profundidad de las tareas propuestas. Para estos efectos utilizamos una metodología específica de análisis de tareas, la cual ha sido refinada con perspectivas diversas. Los resultados evidencian diferencias importantes en relación a las tareas analizadas según cada país. El instrumento de análisis se propone como una herramienta susceptible de ser empleada y mejorada en estudios posteriores.

ABSTRACT: The intention of this article is to show a comparative analysis concerning the study of tasks that involve the notion of function in textbooks of Chile, France and Italy. The analysis is qualitative, and we searched for a methodological tool that facilitates the in-depth study of the proposed tasks. For this purpose, we use a specific methodology of analysis of tasks, which has been refined by different perspectives. The results show important differences in relation to the tasks analyzed from each country. The instrument of analysis turns out to be a tool capable of being used and improved in later studies.

CONTEXTO DEL ESTUDIO

El propósito de esta comunicación es mostrar un análisis comparativo sobre la enseñanza de las funciones en la educación media superior (o liceo), específicamente nos centramos en el análisis a priori de tareas que se proponen en los libros de texto en tres países: Chile, Francia e Italia. Cabe señalar que el contexto general de los sistemas escolares en estos países es diferente. En Chile, la escolaridad culmina en el grado 12, en *Cuarto Medio*. Lo mismo ocurre en Francia, en el nivel *Terminale* del liceo. En el sistema italiano, la escolaridad culmina en la *Scuola secondaria di II grado*, en el grado 13, es decir, un año más que Chile y Francia. En la siguiente Tabla (1), se muestra de forma resumida los diferentes sistemas escolares de Chile, Francia e Italia.

Tabla 1. Los diferentes sistemas escolares en Chile, Francia e Italia

Chile		
1	Educación Básica (6/11 años)	1º básico
2		2º básico
3		3º básico
4		4º básico
5		5º básico
6		6º básico
7	Educación Media Formación General (12/17 años)	7º básico
8		8º básico
9		1º medio
10		2º medio
11	Educación Media Diferenciada (16/17 años)	3º medio
12		4º medio

Francia		
1	École primaire (6/11 años)	CP
2		CE1
3		CE2
4		CM1
5		CM2
6	Collège (11/15 años)	6ème
7		5ème
8		4ème
9		3ème
10	Lycée (15/18 años)	2nde
11		1ère
12		Terminale

Italia		
1	Scuola primaria (6/11 años)	primo anno
2		secondoanno
3		terzoanno
4		quartoanno
5		quinto anno
6	Scuola secondaria di I grado (11/14 años)	primo anno
7		secondoanno
8		terzoanno
9	Scuola secondaria di II grado (14/19 años)	primo anno
10		secondoanno
11		terzoanno
12		quartoanno
13		quinto anno

En un estudio relativo a los sistemas escolares de Francia e Italia en la enseñanza de funciones se reporta sobre la similitud de ambas organizaciones (Derouet & Panero, 2015). Con la inclusión de Chile en esta investigación se amplía y enriquece el estudio, en el cual se evidencian las diferencias del sistema educativo en relación a los otros dos países. En un estudio reciente concerniente a las funciones, se comparan tareas de evaluaciones que los estudiantes deben rendir al finalizar la educación medio superior, las cuales corresponden al sistema de ingreso a la universidad (Derouet, Henríquez, Menares & Panero, 2015). Este estudio evidencia algunas similitudes y amplias diferencias entre las evaluaciones de dichos países. Por ejemplo, se observa una gran diferencia en el nivel de disponibilidad de conocimientos y la autonomía esperada de los estudiantes: en Chile, los estudiantes requieren un alto nivel de activación de conocimientos de las funciones como objeto; en Francia, los estudiantes requieren movilizar algunos conocimientos a nivel de herramienta y en otros casos como objeto, otorgando también poco espacio a la autonomía; en Italia, los estudiantes tienen mayor autonomía en la solución de tareas y en la movilización de conocimientos, alta disponibilidad a nivel de herramienta.

En relación a los libros de texto que se utilizan en cada país, éstos se desarrollan bajo políticas variadas. Por ejemplo en Chile, el Ministerio de Educación entrega un único libro de texto para cada nivel a las instituciones municipales o particulares subvencionadas, independiente de la institución (Científico-Humanista o Técnico Profesional) y del currículo. En cambio, en Francia e Italia se elabora más de un texto por nivel, dependiendo de la organización del sistema escolar y su currículo (liceo general y tecnológico, y liceo profesional, en Francia; liceo, instituto técnico e

instituto profesional, en Italia). En este estudio nos focalizamos en tareas de libros de texto que implican funciones, y nos preguntamos qué se espera de la actividad matemática del estudiante en las propuestas estudiadas de las secciones científicas en los tres países, considerando la tarea tal como se presenta en el libro de texto. En este sentido, las actividades propuestas son concebidas como un apoyo muy importante para la organización didáctica del profesor, que le permite escoger (o adaptar) las situaciones que los estudiantes deben afrontar en la clase. Asimismo, trabajamos en el diseño de una herramienta metodológica que facilite el estudio en profundidad de tareas propuestas, considerando elementos del análisis de tareas de Robert (1998) y en enfoques complementarios como los de Douady (1986), Duval (1995, 2005) y Chevallard (1999).

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Este estudio es de corte cualitativo relativo al análisis de tareas que involucran la noción de función, las cuales fueron seleccionadas de los libros de texto de los tres países. Luego, mediante un análisis *a priori* estudiamos las particularidades que en cada trabajo matemático activado por la tarea se favorece. Particularmente, utilizamos la metodología de análisis de tareas introducidas por Robert (1998), nos preguntamos por el grado de apertura de la tarea (abierta, cerrada, semi-abierta, semi-cerrada), la finalidad de la tarea según el momento en que esta se propone (exploración, introducción, familiarización de una técnica o teorema, aplicación, volver a tratar un conocimiento antiguo, o evaluación), el nivel de activación de conocimientos (técnico, movilizable, disponible).

En este trabajo nos enfocamos en el nivel “disponible”, que corresponde a la activación del conocimiento sin indicación en el texto. Podemos distinguir dos grados de disponibilidad. Por un lado, una *noción/propiedad* que puede ser memorizada y empleada como objeto (por ejemplo, la memorización de una fórmula para trabajar directamente la noción en juego). Lo llamamos "disponibilidad como el objeto"; por otro lado, una *noción/propiedad* puede ser recordada y presentada por el estudiante como "herramienta" para solucionar una pregunta que no implica directamente la noción. Lo llamamos "disponibilidad como el herramienta". Además, identificamos el tipo de tarea desde la perspectiva de Chevallard (1999); analizamos si el conocimiento es disponible como herramienta u objeto, y los marcos activados (Douady, 1986); identificamos los aspectos semióticos que se privilegian, tratamientos y conversiones, en relación a los registros involucrados (Duval, 1995, 2005). Además, consideramos el nivel de postura esperado en la activación de conocimiento, y la disponibilidad de los objetos matemáticos empleados (herramienta/objeto).

En el desarrollo del estudio, la elección de libros de texto es la siguiente: en Chile el texto es único para 2º Medio (Muñoz, Rupin & Jiménez, 2014); en el caso de Francia, consideramos el libro *Math’x* (Le Yaouanq, 2012) del nivel Terminale Scientifique, y en Italia, uno de los textos del nivel *Quinto Anno del Liceo Scientifico* (Bergamini, Trifone & Barozzi, 2013). La siguiente Tabla (2) muestra de forma resumida aspectos de los textos seleccionados, y también, de las tareas que fueron analizadas.

Tabla 2. Resumen de la tarea seleccionada según el libro de texto por país

País	Nivel	Unidad	Sección de tarea	Página
Chile	2º Medio	Unidad 3: Álgebra. Lección 31: Función exponencial	Practiquemos lo aprendido	209
Francia	Terminale Scientifique	Capítulo 6: Límites de funciones	Estudio de funciones	186
Italia	Quinto Anno del Liceo Scientifico	Capítulo 27: El estudio de las funciones	El estudio de las funciones	1882

En general, destacamos tres aspectos relevantes del estudio: (1) por un lado, la coordinación de los elementos teóricos para analizar tareas, (2) la metodología empleada para análisis de tareas, la que puede ser mejorada y/o empleada en otros contextos y, (3) comparar el trabajo matemático que se espera de los estudiantes en cada país, en relación al concepto *función* en educación medio superior. Los análisis que se presentan a continuación proporcionan información que permite concluir acerca del *contrato didáctico* (Brousseau, 1988) que se establece en cada texto según la tarea específica.

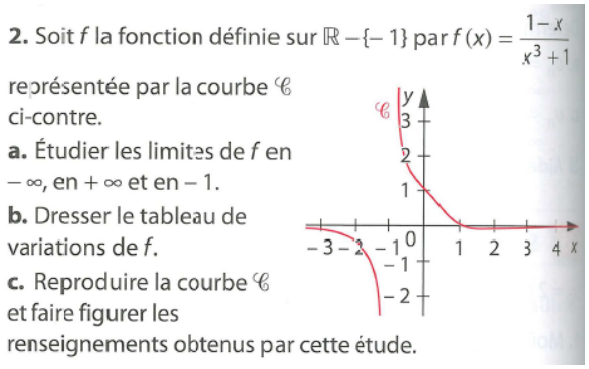
ANÁLISIS A PRIORI DE TAREAS

Las tareas analizadas de los libros de texto de Chile, Francia e Italia, se escogieron por ser consideradas "representativas", de acuerdo a los conceptos involucrados y el trabajo que esta demanda. A continuación, se muestra el análisis de tareas según cada país.

Tarea de texto Francia

La siguiente figura (1), muestra la tarea seleccionada que será analizada para el caso de Francia, de la sección "Límite de funciones" del último nivel de liceo.

Figura 1. Libro de texto francés *Math'x*, Terminale scientifique, ejercicio 65 (Le Yaouanq, M.-H, 2012, p. 186).



2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}$ représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-contre.

a. Étudier les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$ et en -1.

b. Dresser le tableau de variations de f.

c. Reproduire la courbe $\mathscr{C}$ et faire figurer les renseignements obtenus par cette étude.

En este ejercicio, la tarea general de la pregunta 2 (independiente de la pregunta 1) es estudiar la función f donde la expresión algebraica está dada, y luego, trazar el gráfico representativo de esta función. La función f tiene estatus de objeto en todo el ejercicio. La finalidad de la tarea según el momento es de aplicación de conocimientos estudiados. Las tres sub-preguntas se presentan por etapas para el estudio de la función. El trabajo del alumno es levemente guiado en las preguntas, es posible notar que cada sub-pregunta moviliza un registro de representación diferente y sugiere un cambio de registro. La representación gráfica de la función está dada, la cual permite ver como un medio de verificación de los resultados demandados; sin embargo, se espera que el procedimiento del estudiante sea mediante trabajo algebraico en las dos primeras preguntas: el contrato didáctico. El detalle de las preguntas se presenta a continuación.

La primera pregunta (a), respecto al *tipo de tarea,* esto es "estudiar los límites en puntos específicos de una función dada, y los límites de la misma función al ∞ y $-\infty$". El *grado de apertura* es semi-abierto, pues está presente la representación gráfica de la función que permite al alumno comprobar sus resultados. El estudiante debe identificar que se trata de una función racional, y luego, deben estudiar el límite de la función, es suficiente determinar el límite del cociente de los términos de mayor grado del numerador y del denominador. Luego, el trabajo implica utilizar las fórmulas de los límites de un cociente. El *nivel de activación de los conocimientos* es disponible como objeto. En este caso se trata de un conocimiento nuevo en el nivel escolar. Finalmente, para esta sub-pregunta el registro semiótico es algebraico.

Para la sub-pregunta (b), se trata de un tipo de tarea "dibujar la tabla de variación de la función". El registro de la respuesta esperada es la tabla (de variación). Para responder a la pregunta, el método para estudiar las variaciones de una función se supone disponible como objeto. El alumno debe desarrollar varias etapas: inicialmente, se espera un trabajo algebraico, en el cual el alumno debe determinar la función derivada de la función f. Como se trata de una función racional debe aplicar la fórmula de derivada de un cociente. Después, estudiar el signo de la función derivada para deducir las variaciones de la función. La propiedad que relaciona el signo de la derivada y las variaciones de la función es disponible como objeto. Después debe reunir los resultados en una tabla de variación agregando los resultados de la pregunta (a) en la tabla. En este caso, se trata de un cambio de registro. El nivel de autonomía del estudiante en esta pregunta es alto, y debe emplear métodos y desarrollar en etapas.

Finalmente, en la última sub-pregunta (c), el alumno tiene que reproducir la representación gráfica de la función y agregar en la gráfica la información obtenida en las preguntas anteriores. Se trata aquí de un cambio de registro: pasaje de un registro "tabla de variación" al registro gráfico.

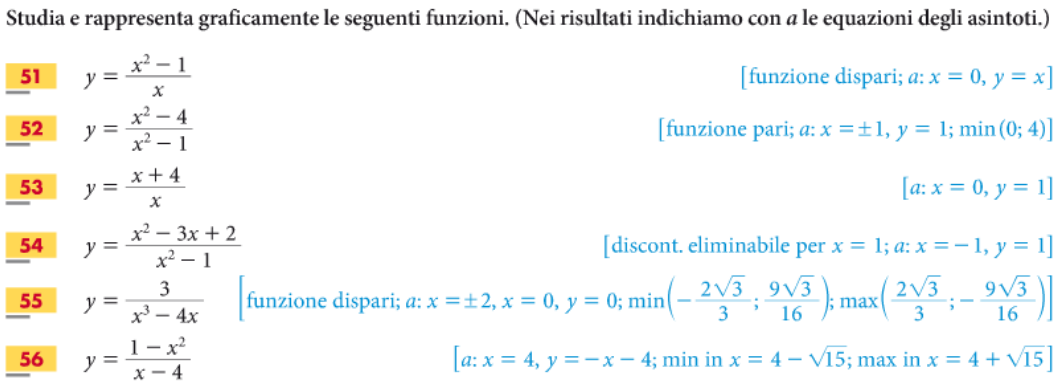
En esta pregunta del libro, el trabajo se divide en sub-preguntas. No obstante, demandan autonomía por parte del alumno, especialmente en la pregunta (b).

En el estudio de las funciones esta forma de trabajar es habitual en Francia en este nivel. En particular, la tarea analizada requiere cambios de registro (algebraico→tabla de variación→gráfico). Aquí la función se estudia como objeto, pero no es el caso de los siguientes ejercicios del libro.

Tarea de Texto Italia

El extracto del libro Italiano que se presenta en la siguiente figura (2), muestra algunos ejemplos del tipo de ejercicio "Estudiar una función" dada en expresión algebraica del último nivel de liceo.

Figura 2. Libro de texto italiano *Matematica.blu 2.0*, Capítulo 27: El estudio de las funciones (Bergamini *et al*, 2013, p. 1882).



Studia e rappresenta graficamente le seguenti funzioni. (Nei risultati indichiamo con a le equazioni degli asintoti.)

51 $y = \frac{x^2 - 1}{x}$ [funzione dispari; a: $x = 0$, $y = x$]

52 $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$ [funzione pari; a: $x = \pm 1$, $y = 1$; $\min(0; 4)$]

53 $y = \frac{x + 4}{x}$ [a: $x = 0$, $y = 1$]

54 $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ [discont. eliminabile per $x = 1$; a: $x = -1$, $y = 1$]

55 $y = \frac{3}{x^3 - 4x}$ $\left[\text{funzione dispari; } a\text{: } x = \pm 2,\ x = 0,\ y = 0;\ \min\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{9\sqrt{3}}{16}\right);\ \max\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; -\frac{9\sqrt{3}}{16}\right)\right]$

56 $y = \frac{1 - x^2}{x - 4}$ [a: $x = 4$, $y = -x - 4$; min in $x = 4 - \sqrt{15}$; max in $x = 4 + \sqrt{15}$]

En esta actividad la pregunta es semi-abierta. No hay indicación sobre el método a utilizar; sin embargo, es un tipo de ejercicio que se trabajó durante el último año de liceo científico, por lo que podemos asumir que el estudiante está tratando de desarrollar y practicar una técnica rutinaria para resolverlo. Entonces, la finalidad de la tarea según el momento es de aplicación de conocimientos estudiados. Algunos conocimientos involucrados son antiguos (como el estudio del intervalo de definición, el signo, los ceros, la paridad) y otros son nuevos (como el estudio de las variaciones, asíntotas, de la concavidad). Cada paso del trabajo debe ser presentado por el estudiante. El orden de estas etapas juega un papel en la consistencia del estudio. Se espera que los estudiantes justifiquen cada paso en el registro algebraico y convertir las informaciones en el registro gráfico (contrato didáctico). Por ejemplo, vamos a estudiar ejercicio 54 (función similar a la del texto francés).

El estudiante debe determinar el dominio de definición de la función, comprobar la paridad de la función, determinar las posibles intersecciones con los ejes. Además, el estudiante debe determinar el signo de la función. Se espera un trabajo algebraico para resolver la inecuación $f(x) > 0$, que es fraccionaria. Para obtener el resultado el alumno debe estudiar separadamente los dos polinomios, el numerador y denominador, y después deducir el signo del cociente con una tabla de signos. Luego, se espera un estudio de posibles asíntotas verticales, horizontales u oblicuas. Para ello, el alumno debe calcular los límites requeridos (cuando *x* tiende a -1, 1,$+\infty$ y $-\infty$). En este caso, el límite de la función cuando *x* tiende a 1 conduce a la forma indeterminada [0/0].

El estudiante debe entonces cambiar el punto de vista sobre la expresión de la función para descomponer las funciones polinómicas que constituyen y hacen aparecer los factores infinitesimales que dan la indeterminación. La descomposición de un polinomio es un conocimiento disponible como objeto, pero la técnica de realizar una descomposición, identificar y simplificar los factores que son cero se asumen disponibles como herramienta. A continuación, el estudiante debe estudiar el signo de la derivada y la segunda derivada, y debe realizar la conexión entre el signo de

la derivada y las variaciones de la función, y entre el signo de la segunda derivada y concavidad de la función. Estas nuevas propiedades se movilizan en este capítulo, donde se supone disponible todo el conocimiento antiguo sobre el estudio de las funciones polinomiales que componen la función como objeto (su dominio, ceros, signo, el comportamiento en el infinito, etc.). Cuando toda la información recopilada se traduce gráficamente, se debe trazar una curva que cumple con todas las características encontradas. El marco es funcional para todo el ejercicio. Podemos notar la presencia de cambio de registros, en particular, algebraico, tabla de signos (o de variaciones) y gráfico. En este trabajo, las funciones derivadas se utilizan como herramientas para estudiar la función dada que tiene el estatus de objeto.

La ausencia de sub-preguntas que detallan la tarea muestra que los estudiantes italianos aprenden métodos altamente estructurados para resolver este tipo de tareas, donde luego el trabajo se deja completamente autónomo; seguramente más que para los estudiantes franceses, donde las etapas son más detalladas en los ejercicios.

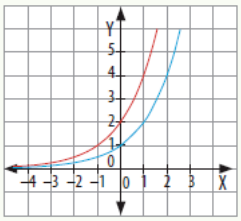
Tarea de Texto Chile

El extracto del libro chileno que se presenta en la siguiente figura (3), muestra dos ejemplos (ejercicios 7 y 8) del tipo de ejercicio "Practiquemos lo aprendido" de la lección Función Exponencial del nivel Segundo Medio.

Figura 3. Libro de texto chileno *Matemática 2º Medio,* Unidad 3: Álgebra, Lección 31 (Muñoz *et al*, 2014, p. 209).

7. **Identifica** las funciones correspondientes a la curva en rojo. La curva en azul corresponde a $y = 2^x$.

a)



8. Sin graficar, **determina** el dominio recorrido e intersecciones con los ejes de las gráficas correspondientes a las siguientes funciones exponenciales.

a) $f(x) = 2^x - 1$

b) $g(x) = 10^x - 5$

c) $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

d) $j(x) = 2 - 10^x$

e) $k(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$

f) $h(x) = 1 - 3^x$

En estos ejercicios los *tipos de tareas* son identificar una función desplazada según una curva dada algebraica y gráficamente para la tarea 7, y determinar dominio, recorrido, intersección con los ejes en funciones exponenciales dadas para la tarea 8. Consideramos el *grado de apertura* como semi-cerrado, para ambas tareas, pues si bien no se entregan alternativas de respuestas, en la tarea 7 se pide identificar una curva algebraicamente luego de visualizar el desplazamiento de otra curva dada gráfica y algebraicamente, y en la tarea 8 se pide determinar elementos de las funciones sin utilizar la gráfica. La finalidad de ambas tareas es la familiarización de una técnica, por tratarse del mismo tipo de tareas resueltas previamente en el texto. El *nivel de activación de los conocimientos* es disponible como objeto en ambas tareas (representadas en el gráfico y representadas algebraicamente), donde debe memorizar y utilizar una propiedad y una noción, respectivamente. En este caso se trata de un conocimiento nuevo en el nivel escolar. En relación a los *marcos* presentes en ambas tareas es funcional. Sobre los *registros de representaciones semióticas*

presentes en las tareas, en ambas identificamos el registro algebraico (principalmente en la tarea 8). En la tarea 7 identificamos una conversión entre el registro gráfico y algebraico, que podría darse en ambos sentidos). Además, es posible el uso de una tabla que relacione las variables; sin embargo, la tarea no demanda este tipo de trabajo. En la tarea 8 se observan principalmente tratamientos algebraicos. En ambos casos, las tareas implican aprender métodos poco estructurados, y el trabajo que demandan es escasamente autónomo.

CONCLUSIÓN Y PERSPECTIVAS

Los análisis que hemos presentado, nos han permitido realizar una comparación entre los tres países considerando diversas tareas de los libros de texto en relación al concepto función. Las diferencias en general se relacionan con la autonomía esperada de las tareas (más o menos dirigidas) y con el nivel de activación de los conocimientos (como herramienta u objeto). En este último aspecto se evidencian diferencias en las tareas analizadas de cada país, lo cual es similar a los resultados obtenidos en el marco de un trabajo anterior que fueron analizadas tareas relativas al mismo tema matemático, de las pruebas terminales de educación medio superior en cada país (Derouet *et al*, 2015). Un interesante aspecto que diferencia a Chile con Italia y Francia, tiene que ver con el contrato didáctico que se establece en el trabajo matemático de las tareas que se proponen en los libros. En Francia e Italia, los estudiantes asumen que deben justificar los pasos de resolución, aun cuando esto no es explícito en los enunciados. En cambio en Chile, las tareas deben indicar explícitamente este proceso si la intención es que se justifique la técnica o estrategia empleada.

Cabe señalar que las tareas presentadas no corresponden a libros de texto del mismo nivel. En los casos de Francia e Italia, el texto corresponde al de último nivel de educación medio superior (liceo), a diferencia de Chile, en el cual se estudia el texto de 2º Medio (15 años), pues consideramos temas evaluados en las pruebas terminales, que viene heredado del estudio citado anteriormente (Derouet *et al*, 2015).

Por otro lado, el estudio ha otorgado la posibilidad de construir y aplicar una herramienta de análisis de tareas sustentados en los enfoques teóricos citados (sección 2). Finalmente, este instrumento puede ser empleado en futuras investigaciones; sería interesante comparar con otras realidades, mejorar el instrumento, o bien, analizar otras nociones matemáticas.

Nota: En el caso de Chile, la inclusión de temas ha sido gradual debido a los ajustes curriculares, especialmente para las funciones, tema que se amplía a partir del proceso de admisión a las universidades el año 2016.

Reconocimiento: Financiamiento parcial Proyecto ECOS-Sud C13H03. Beca Postdoctorado PUCV, Carolina Henríquez.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bergamini, M., Trifone, A. & Barozzi, G. (2013). *Matematica.blu 2.0*, Libro digitale multimediale, vol. 5. Bologna: Zanichelli.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 309-336.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Derouet, C. Henríquez, C. Menares, R. & Panero, M. (2015). An international comparison between final secondary assessments: detected differences through an a priori analysis of tasks. En Krainer K., Vondrová N. (Eds.) *CERME 9 - Ninth Congress of European Research in Mathematics Education*. (pp. 2291-2292). Prague: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME

Derouet, C. & Panero, M. (2015). Etude comparative sur l'enseignement des fonctions dans le secondaire en France et en Italie. *Cahiers du Laboratoire de Didactique André Revuz, n°11*.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en didactique des mathématiques, 7(2),* 5-32.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne : Peter Lang.

Duval, R. (2005). Les Conditions Cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnements et Coordination de leurs Fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5-53.

Le Yaouanq, M.-H. (dir.). (2012). *Math'x. Term S. Enseignement spécifique*. Paris: Didier.

Muñoz, G. Rupin, P. & Jiménez, L. (2014). *Matemática 2º Medio. Texto del extudiante.* Santiago: Ediciones SM.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'Université. *Recherches en didactique des mathématiques*, *18(2),* 139-190.

A AS AVALIAÇÕES EXTERNAS E A ESCOLA: A ARTICULAÇÃO ENTRE RESULTADOS E AS PRÁTICAS NA SALA DE AULA DE MATEMÁTICA

Marger da Conceição Ventura Viana, Roberto Arlindo Pinto
Universidade Federal de Ouro Preto (Brasil)
margerv@terra.com.br, robertoarlindo@yahoo.com.br

Palavras chave: avaliações externas, ação pedagógica, sala de aula, matemática,espaço e forma

Key words: external evaluations, pedagogical action, classroom, space and form, mathematics

RESUMO: Documentos oficiais relacionam as avaliações externas à busca pela melhoria da qualidade no ensino, verificando a eficácia das políticas públicas para a educação e adequado planejamento educacional. Assim, as avaliações externas podem servir para repensar e planejar a ação pedagógica e a gestão educacional. Pesquisas em Educação Matemática têm demonstrado que o Sistema de Ensino, mais que o aluno, é responsável por seu sucesso/insucesso. Este estudo de caso se refere a uma escola da rede pública de ensino de uma cidade do interior do Estado de Minas Gerais - Brasil. A análise documental do desempenho desta escola, nos últimos cinco anos, indicou que sua maior fragilidade está no tema Espaço e Forma. Comparando seus resultados, embora abaixo do recomendado, são melhores do que os de outras escolas.

ABSTRACT: Official documents related to external evaluations search for the improvement of the quality of education in order to verify the effectiveness of public policies for education and an adequate educational planning. Thus, external evaluation may be an element to rethink and to plan the pedagogical action and the educational management. Research in Mathematics Education has shown that the educational system, rather than the students, is responsible for their success/failure. This is case study was conducted in a public school in a city of the state of Minas Gerais- Brazil. The documental analysis of the performance of this school in the last five years showed that its greatest weakness is the theme of Space and Form. By comparing its results, although lower than recommended, are better than those obtained by other schools. How school planning arrive to the classrooms and how they have influenced the teaching/learning process is an question.

INTRODUÇÃO

Pesquisas em educação, particularmente em Educação Matemática têm demonstrado que o Sistema de Ensino, mais que o aluno é responsável por seu sucesso/insucesso. Com isso, as práticas de avaliação institucional e de larga escala que vão além da avaliação em sala de aula são importantes, pois a qualidade da aprendizagem do educando, em primeiro lugar, depende da instituição que oferece o ensino. (Luckesi, 2013).

Nesse sentido, a avaliação externa pode ser um ponto de apoio, um elemento a mais, para repensar e planejar a ação pedagógica e a gestão educacional.

No Brasil, a Avaliação em Larga Escala como política pública, tal como é hoje concebida, teve início na década de 80 do século XX, quando o Ministério da Educação começou a desenvolver estudos sobre a Avaliação Educacional, movido pelo incentivo proveniente das agências financiadoras transnacionais (Oliveira e Rocha, 2007).

Para isso o Ministério da Educação e Cultura (MEC) tem implementado massivamente a avaliação externa ou avaliação em larga escala, como é conhecida. E tornou-se um dos principais instrumentos utilizados pelo governo para a implantação e elaboração de políticas públicas dos sistemas de ensino, fazendo com que escola e comunidade alterem suas ações e redirecionem o método de trabalho das escolas. Com isso, poderá possibilitar uma percepção mais ampla da realidade e contribuir para diagnosticar a situação da educação brasileira, visando sua melhoria quantitativa e qualitativa (Oliveira e Rocha, 2007).

Por outro lado, enquanto gera informações para subsidiar o trabalho pedagógico das escolas, a avaliação externa também instaura um clima de competição ao divulgar os resultados cada escola, observando que a cultura avaliativa tem provocado impactos tanto nas questões pedagógicas quanto nas administrativas das escolas (Melo,2012).

Porém, mais do que as competições provocadas pelas avaliações externas, a avaliação em sala de aula é o instrumento que possibilita que o aluno avance em seus conhecimentos, já que a avaliação integra o processo de ensino/aprendizagem (Viana, 2002, 2013). Além disso, embora a avaliação escolar seja parte integrante do processo de ensino/aprendizagem, ela depende da concepção que se tem desse processo estando associada à corrente filosófica /psicológica/pedagógica que a sustenta (Viana, 2002).

A aprendizagem é considerada uma atividade de produção e reprodução do conhecimento, sob condições de orientação e interação social dentro do paradigma histórico cultural, e as "características deste processo segundo esta concepção são seu caráter social, ativo, individual, consciente, comunicativo, motivante, significativo interativo e cooperativo" (Viana, 2002;2013,p.20). E é neste contexto, para acompanhar o desenvolvimento e crescimento do aluno, principalmente da aquisição de conhecimentos matemáticos que se esclarece que a avaliação não trata apenas de avaliar rendimento. Diz respeito ao acompanhamento do desenvolvimento e crescimento do aluno, principalmente da aquisição de conhecimentos matemáticos. Em decorrência, não se trata apenas de avaliar a produção escrita dos estudantes, a exemplo de seus testes, exercícios e cadernos.

A avaliação é algo mais amplo, pois "a avaliação da aprendizagem também necessita ser realizada por professores e alunos, analisando processos, recursos, estratégias e resultados das atividades para aprender Matemática, em interações discursivas na sala de aula (Viana, 2013, p.10).

Ainda de acordo com Viana (2013) a avaliação deve cumprir diferentes funções que auxiliem professor e aluno a elevarem o nível do resultado de suas atividades e admite como fundamentais as funções de diagnóstico, de controle, educativa e projetiva.De fato, segundo Luckesi (2003), a avaliação escolar é uma apreciação qualitativa sobre dados relevantes do processo de ensino e aprendizagem que auxilia o professor a tomar decisões sobre o seu trabalho.

Mas quais serão os reflexos causados pelas avaliações externas na sala de aula do professor? Que ações elas impulsionam?

Com isso, a intenção é verificar influências das avaliações externas nas práticas pedagógicas de professores de Matemática e apresentar sugestões para aperfeiçoamento de práticas e avaliação. Analisou-se, em documentos oficiais, o desempenho da escola nos últimos cinco anos detectando no eixo Espaço e Forma o de maior fragilidade da escola. Discutem-se estratégias de interpretação dos resultados das avaliações para utilização no planejamento e realização de aulas de Matemática. Os instrumentos para coleta de dados são questionários, análise documental, entrevistas, grupos focais e caderno de campo. Uma sequência didática para abordagem dos conteúdos desse eixo é elaborada, apresentada e discutida com os professores.

AS AVALIAÇÕES EXTERNAS

Para acompanhar a qualidade da educação básica pública brasileira foi criado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP) o indicador IDEB. É um indicador educacional que relaciona de forma positiva informações de rendimento escolar (aprovação) e desempenho (proficiências) em exames padronizados, como a Prova Brasil e o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) que compõem o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB). (FERNANDES, 2013).

Assim, nos documentos oficiais que tratam da educação (leis, parâmetros curriculares, diretrizes, etc.), as avaliações são relacionadas à busca pela melhoria da qualidade no ensino, colocando-as como um meio pelo qual se torna possível um planejamento educacional e a verificação da eficácia das políticas públicas para a educação (BRASIL, 2001).

Os resultados desses exames proporcionam informações sobre o andamento da Educação Básica, isto é, do 1° ao 9° ano do Ensino Fundamental e dos três do Ensino Médio principalmente aos responsáveis pela elaboração de Políticas Públicas no Brasil, ou seja, no Distrito Federal, Estados e Municípios e no âmbito das Escolas. Em resumo, por meio desses exames são obtidas as médias alcançadas pelos alunos brasileiros.

As médias são apresentadas em uma escala de desempenho capaz de descrever, em cada nível, as competências e as habilidades que os estudantes desses sistemas demonstram terem desenvolvido. Há uma escala descrita para as habilidades em Língua Portuguesa e outra para Matemática (BRASIL, 2001, p.2).

Entretanto, em sua prática profissional, o segundo autor percebeu que o envolvimento dos professores com os resultados das avaliações externas e o que significam para a escola, no geral é muito tímido. Enquanto professor o inquietava a função das avaliações externas e seus reflexos, na escola, mais especificamente no trabalho docente. Quais são as reais finalidades dessas

avaliações oficiais? Como utilizar os resultados dessas avaliações no planejamento das atividades a serem trabalhadas em de sala de aula?

Baseando-se em suas experiências como professor da educação básica e a partir das reflexões que vinha fazendo sobre as avaliações externas e sua relação com a escola, foi levado a elaborar as seguintes perguntas:

Qual é a interpretação [entendimento, comentário crítico, explicação, opinião, juízo, (Koogan, 1999) que um grupo de professores tem sobre as avaliações externas?

Como os resultados dessas avaliações podem contribuir para a elaboração de propostas de atividades para alunos do segundo ciclo do ensino fundamental, de acordo com uma análise crítica dos resultados?

De forma que o objetivo desta pesquisa é desvendar a interpretação que um grupo de professores de Matemática tem das avaliações externas e como isto pode contribuir para o processo de ensino/aprendizagem.

METODOLOGIA

Trata-se de um estudo de caso no qual o professor e sua prática terão enfoque. Toda a pesquisa, desde a sua fundamentação teórica até a dissertação final passando pelo trabalho de campo, tem como objetivo verificar como as avaliações externas podem contribuir para a elaboração de propostas de atividades adequadas à aprendizagem dos alunos.

O contexto da pesquisa é uma escola da rede municipal de ensino de uma cidade do interior do estado de Minas Gerais. Os participantes são cinco professores de Matemática que atuam nas turmas de 6º aos 9º anos do Ensino fundamental, dois supervisores da escola e a diretora pedagógica da cidade.

A escolha desta instituição de ensino deveu-se ao fato do segundo autor nela trabalhar, o que facilitou a autorização para realização da pesquisa e para que o resultado pudesse contribuir para a aprendizagem e melhoria do desempenho dos alunos desta escola nas avaliações externas.

Para evitar correr o risco de realizar trabalho duplicado inicialmente foi feita uma revisão da literatura a partir de busca por meio de palavras-chave, no banco de teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e também nos periódicos BOLEMA da Universidade Estadual Júlio de Mesquita (UNESP) e ZETETIQUÉ da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). O objetivo foi conhecer o que tem sido produzido no Brasil sobre a temática da investigação e melhor compreensão sobre o campo de pesquisa. Com isso, ao mesmo tempo se obteve informações sobre metodologias e resultados a utilizar (PINTO e VIANA, 2014).

Os instrumentos para coleta de dados foram os documentos oficiais contendo os resultados da escola nos últimos cinco anos, que foram por ela disponibilizados. Tais documentos oficiais se referem aos resultados da proficiência média em Matemática da escola pesquisada nas últimas cinco edições da Prova Brasil e também os do PROEB/SIMAV nos últimos 5 anos. Isto por que a Prova Brasil e o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) compõem o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB).Com isso se justifica a seleção da Prova Brasil e PROEB/SIMAV como as avaliações externas a serem consideradas nesta pesquisa.

Além dos documentos oficiais foram utilizados dois questionários, entrevistas e um grupo focal como instrumentos para a coleta de dados.

Foram preparados dois questionários: o primeiro para elaborar o perfil dos participantes da pesquisa e o segundo para saber a relação de cada participante com as avaliações externas.

Os dados coletados são analisados de forma mais qualitativa que quantitativa o que não exclui quantificação para sua descrição, embora a natureza da pesquisa não possibilite generalização.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Foram buscados e obtidos os dados sobre a escola nas avaliações externas a que a escola é submetida. Assim foram analisados os documentos que continham os resultados da escola na Prova Brasil desde a sua primeira edição em 2005, ou seja, as suas cinco edições até o ano de 2013, inclusive. A Tabela 1, a seguir, contém os resultados da proficiência média em Matemática da escola nas cinco últimas edições da Prova Brasil.

Tabela 1. Resultados da proficiência média em Matemática da escola pesquisada nas últimas cinco edições da Provas Brasil

Edição	Proficiência
2005	309,96
2007	302,61
2009	318,82
2011	314,76
2013	302,19

Fonte: dados do INEP colhidos pelos autores

Embora o índice da escola pesquisada tenha baixado nos últimos anos, ainda é superior ao da média das escolas municipais e estaduais, ficando abaixo apenas do da média das escolas federais.

Quando se compara o índice da escola pesquisada com o de escolas similares, percebe-se que o daquela está acima da média das similares em 21 pontos. Consideram-se escolas similares aquelas cujo número de matrículas é próximo, assim como o de professores, de espaço físico e os alunos possuem o mesmo nível socioeconômico.

Apesar de nesse período a proficiência da escola pesquisada haver sido superior ao de escolas similares, apenas 0,83% dos estudantes estavam no nível de proficiência considerado ideal, isto é o nível 9. Mesmo sendo baixo, esse índice ainda foi superior à média estadual e nacional.

Foram analisados também os documentos com os resultados da escola no PROEB/SIMAV dos cinco últimos anos, ou seja, de 2009 a 2013, inclusive. Em relação aos dados do PROEB/SIMAV 2013, a escola alcançou a média 299,4, menor em 2,6 que a proficiência registrada em 2012. Neste ano, 3,55% dos alunos estavam no nível considerado baixo, 42,6% estavam no nível intermediário e 53,9% estavam no nível recomendado, como pode ser visto naTabela 2 a seguir.

Tabela 2. Resultados do PROEB/SIMAV da escola pesquisada nos últimos 5 anos

Edição	Proficiência	% por padrão de desempenho		
		Baixo	Intermediário	Recomendado
2009	313,7	2,4	28,5	69,1
2010	312,5	0,0	37,7	62,3
2011	307,1	0,8	37,3	61,9
2012	302,0	1,8	48,2	50,0
2013	299,4	3,5	42,6	53,9

Fonte: elaboração dos autores a partir de dados do CAED

O perfil de cada um dos professores foi formulado por meio do questionário inicial e conhecida a opinião deles sobre as avaliações externas por meio do segundo questionário.

Julga-se necessário investigar o que leva esta escola a conseguir um resultado melhor que o de muitas. O perfil dos professores pode indicar alguma pista. De todo modo há muitas variáveis que influenciam nos resultados.

Está sendo, elaborada uma proposta de atividades, fundamentadas no Currículo Básico comum de Matemática (CBC) do estado de Minas Gerais, que poderão ser utilizadas pelos professores nas turmas de alunos do 6º ao 9º ano do ensino fundamental. Os professores serão entrevistados para apresentação e discussão dessa proposta, fazendo-se as alterações necessárias indicadas por eles. Além da dissertação, proveniente desta pesquisa resultará um produto educacional representado por uma proposta de atividades que auxilie professores a utilizar os resultados das avaliações externas para favorecer a aprendizagem dos alunos.

CONCLUSÕES

Para os professores, as avaliações externas são muito importantes. Elas devem continuar a serem realizadas nas escolas, mas precisam de algumas modificações. Segundo eles, na escola não se discute muito sobre esse tipo de avaliação e seus resultados. Esses dados são apresentados somente em uma data, denominada dia “D”.

Os professores também afirmaram que as avaliações externas e as avaliações em sala de aula são pouco diferentes. Isso pode nos sugerir que eles não possuem um conhecimento aprofundado das avaliações externas, visto que suas finalidades são distintas.

Analisando o desempenho da escola nos últimos cinco anos, bem como a avaliação diagnóstica realizada pela secretaria municipal de educação da cidade, além de entrevistas realizadas com o supervisor da escola e com a diretora pedagógica da cidade, foi detectado que a maior fragilidade se encontra nos descritores relacionados com a geometria.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Fernandes, D. (1993). Avaliação em educação: uma discussão de algumas questões críticas e desafios a enfrentar nos próximos anos. In *Ensaio: Avaliação e políticas públicas em educação (1)*1, 170. Rio de Janeiro: Fundação Cesgranrio.

Koogan, A.(1999). Enciclopédia e dicionário ilustrado. Rio de Janeiro: Seiter.

Luckesi,C. (2013). *Avaliação da aprendizagem, institucional e de larga escala*. Acessado em 11 de março de 2014 de: http://luckesi.blog.terra.com.br/2012/11/15/avaliacao-da-aprendizagem-institucional-e-de-larga-escala/

Melo, S. C. L. (2012).*Impactos da avaliação nacional do rendimento escolar (ANRESC/ Prova Brasil) entre os anos de 2007 a 2009 na gestão do processo de ensino-aprendizagem em um município baiano.* Dissertação de Mestrado em Educação não publicada, Universidade Católica de Brasília, Brasil.

Ministério da Educação (2001). *Plano Nacional da Educação – PNE/MEC*. Brasília: INEP.

Oliveira, M. A. M.; Rocha, G. (2007) Avaliação em larga escala no Brasil nos primeiros anos do ensino fundamental. In *Cadernos Anpae (4),* 11-14. Associação Nacional de Política e Administração da Educação.

Pinto, R. A., Viana, M. C. V. (2014). Avaliação Externa e a Sala de Aula de Matemática In: *Anais do IV CEMA-Colóquio de Educação Matemática*. Juiz de Fora – Minas Gerais: UFJF

Viana, M. C. V. (2002).*Perfeccionamiento del currículo para la formación de profesores de Matemática en la UFOP.* Tese de Doutorado em Ciências Pedagógicas não publicada, Instituto Central de Ciencias Pedagógicas, La Habana, Cuba.

Viana, M. C. V. (2013). *O Processo de Ensino/Aprendizagem Sob Diferentes Olhares. Ed Amp.* Ouro Preto: Centro de Educação Aberta e a Distância da Universidade Federal de Ouro Preto.

CONTEXTO Y RENDIMIENTO EN ÁLGEBRA DE BACHILLERATO. UNA APROXIMACIÓN ESTADÍSTICA

Eddie Aparicio, Martha Jarero, Landy Sosa, Luis Reyna, Luis Rodríguez, Adriana Avilez
Universidad Autónoma de Yucatán (México)
alanda@correo.uady.mx, jarerok@correo.uady.mx, smoquel@uady.mx, lreyna@uady.mx lrodrigz@uady.mx

Palabras clave: rendimiento, álgebra, contexto, significatividad estadística.

Key words: performance, algebra, context, statistical significance.

RESUMEN: Si bien los esfuerzos por predecir y explicar el problema del rendimiento escolar vienen de mucho tiempo atrás, los recientes reportes de las evaluaciones internacionales en matemáticas reflejan la necesidad de seguir acrecentando la información sobre el tipo y diversidad de variables que intervienen en el rendimiento escolar de los jóvenes. Es así que en el presente trabajo versó sobre identificar la importancia y significatividad de algunas variables contextuales asociadas al rendimiento escolar en estudiantes de educación media superior, en su curso de Álgebra elemental, de acuerdo con los resultados de un análisis estadístico realizado. Se detectó que el género, el área de interés profesional de los estudiantes, el nivel de estudio de los padres, la autopercepción, las notas de clase y la escuela, son variables significativas en el rendimiento escolar.

ABSTRACT: Even though efforts to predict and explain the problem of academic performance comes from long ago, recent reports from international assessments in mathematics reflect the need to continue to increase the information about the type and diversity of variables involved in the school performance of youth. Thus, the emphasis of the study was to identify the importance and statistical significance of some contextual variables associated with school performance in students from high school in Algebra, according to the results of statistical analysis made. It was found that gender, area of professional interest of students, the level of study of parents, self-perception, class notes and school, are significant variables in student performance.

INTRODUCCIÓN

En la búsqueda de explicaciones sobre el problema del rendimiento escolar se ha ido ampliado el enfoque de análisis, de variables escolares del estudiante a variables que permitan analizar su contexto de estudio. Así, para algunos la cuestión se enfocó en el papel predictivo de las variables solamente escolares, es decir, aquellas exclusivas del sistema institucional de enseñanza, por ejemplo, el currículo, profesores, recursos pedagógicos y didácticos, así como el ambiente escolar, por referir algunas. Para otros, en el análisis se consideraron variables extraescolares, que se sitúan en lo que era percibido ajeno al ambiente escolar, pero al mismo tiempo propio de los estudiantes, ejemplo de ello es el nivel socioeconómico familiar, el género, la autopercepción y las aptitudes, entre otras variables.

La apuesta investigativa del presente trabajo consistió en admitir una visión mucho más sistémica e incluyente de las variables asociadas tanto al aprendizaje como al rendimiento escolar en matemáticas. El énfasis estuvo en poder establecer variables contextuales significativas (variables escolares en conjunción con las no escolares) que puedan ser objetos de intervenciones didácticas como se sugiere en los trabajos de Saritas & Akdemir (2009); Buyatsi, (2013); Mohammadpour & Shekarchizadeh (2013).

PERSPECTIVAS DE ANÁLISIS DEL RENDIMIENTO ESCOLAR

En estudios sobre el papel de variables escolares en la predicción y explicación del rendimiento escolar se hallan aquellas relacionadas con las prácticas docentes, las interacciones en las aulas y el currículo. Tras los hallazgos generados en esta dirección, emergieron pronunciamientos teóricos que marcaron el tránsito de estudios simples de correlaciones a estudios de relaciones causales (Centra & Potter, 1980; Fuentes, 1986; Murphy, 1992; Scheerens, 1993; Creemers, 1994).

Para algunos autores (Coleman, Hoffer & Kilgore, 1982; Jencks, Acland, Bane, Cohen, Gintis & Mishelson, 1972), las características de los estudiantes han sido las que tienen mayor relevancia por sobre los factores escolares al momento de intentar entender y predecir el rendimiento escolar. Particularmente y de modo más reciente a los trabajos anteriores, Creemers (1994) y Hill & Rowe (1996) mencionaban que la situación socioeconómica que rodea a los estudiantes es una variable significativa al momento de explicar la varianza en las calificaciones obtenidas. No obstante, en estudios más recientes se ha identificado que el rendimiento de algunos estudiantes varía según el tipo de escuela de procedencia e incluso en las que al momento se encuentren estudiando (Lockheed & Bruns, 1990; Cu, 2005).

Algunos otros autores consideran que el tema debe analizarse desde una perspectiva socioafectiva de los estudiantes, tal es el caso de lo desarrollado por Carmona, Sánchez y Bakieva (2011), quienes analizaron el rol de la variable autoconcepto en el rendimiento de los estudiantes. Ellos indican que el autoconcepto general es más relevante para los varones y el académico es más importante para las mujeres en cuanto a su rendimiento y la realización de actividades extraescolares. En la misma línea se ubican los estudios de Parker, Marsh, Ciarrochi, Marshall & Abduljabbar (2014), reportando que la autoeficacia y el autoconcepto en matemáticas guardan estrecha relación con el rendimiento escolar, siendo éstos independientes, pero fuertes predictores del rendimiento en secundaria para los estudios universitarios. Afirman que la variable autoeficacia

resulta un predictor significativo de acceso a la universidad y el autoconcepto de la realización de estudios posteriores en ciencia, tecnología, ingeniería o matemáticas.

Naturalmente el tema ha acogido otras tantas reflexiones en las que la predicción del rendimiento académico se mira desde un combinado de aspectos escolares con no escolares, tal es el caso del trabajo desarrollado por Sales, Baldaque, Mourão, Nuñez, González-Pienda, Valle y Rodrigues (2008), quienes reportan una relación entre el trabajo escolar que realizan los jóvenes fuera de la escuela, con su rendimiento escolar. En Mohammadpour & Shekarchizadeh (2013) también se proporciona evidencia de que factores propios del estudiante, como el autoconcepto, explican una mayor proporción de la varianza en las escuelas de alto rendimiento que en las escuelas de bajo rendimiento.

Dicho así, el predecir respecto al aprovechamiento o rendimiento escolar de los estudiantes ha de consistir en la posibilidad de establecer relaciones precisas entre el tipo de escuela y la situación socioeconómica de los estudiantes en un sentido amplio. Particularmente en matemáticas, los estudios últimos sobre rendimiento escolar han tendido a reconsiderar la diversidad de factores contextuales en el aprendizaje, ampliando incluso las aproximaciones teóricas y metodológicas de análisis mediante el método multinivel para relacionar variables y reconocer su importancia, empleando principalmente técnicas estadísticas y software computacional para el análisis de regresión múltiple (Zvoch & Stevens, 2005), análisis de varianza y pruebas post hoc de comparación múltiple (Saritas & Akdemir, 2009), de Minería de datos (Salas, Domínguez y Farfán, 2011).

En el presente trabajo se admite una visión más sistémica de las variables asociadas al rendimiento escolar en matemáticas, pues se asume que el contexto escolar y el no escolar son inseparables del estudiante y viceversa, pues los seres humanos emplean una racionalidad contextualizada en la elaboración de sus primeras nociones (Cantoral, 2013). La investigación radicó en el uso de la Estadística para reconocer variables contextuales significativas en el rendimiento obtenido por una población de estudiantes en una prueba de conocimientos matemáticos de Álgebra en bachillerato. Para ello se planteó la pregunta: ¿Qué variables contextuales resultan ser significativas respecto al rendimiento escolar en Álgebra de bachillerato?

MÉTODO DE ESTUDIO

El estudio realizado se ubica en los llamados análisis de contenido toda vez que se plantearon preguntas orientadas a indagar sobre la situación actual del rendimiento escolar en general y rendimiento escolar matemático en particular, a partir de lo reportado en la literatura especializada. Se realizó un análisis cuantitativo – descriptivo con base en la técnica estadística de regresión lineal múltiple utilizando variables indicadoras, a fin de reconocer qué variables de contexto son significativas en relación con la cantidad de aciertos obtenidos en una prueba escrita de conocimientos algebraicos.

Población participante

Se trabajó con una población de 1876 estudiantes pertenecientes a dos escuelas de bachillerato de una Universidad Autónoma en México, que al momento de la investigación se encontraban cursando su segundo semestre de estudios (14-17 años). Del total de esta población 48.3% fueron hombres y 51.7% mujeres.

Tabla 1.

Población participante	
Escuela	**Cantidad de estudiantes**
Preparatoria 1	892
Preparatoria 2	984

Instrumento

Se diseñó y utilizó una prueba escrita cerrada con un total de doce ejercicios sobre contenidos de Álgebra, a partir de establecer indicadores de logro académico en matemáticas, clasificados en conceptuales y procedimentales, con base en un análisis de los objetivos y del contenido temático de los programas y libros de textos del curso. Cada ejercicio tenía cuatro opciones de respuestas, empero solo una era correcta. En la Tabla 2 se muestran dos ejemplos de los ejercicios de la prueba.

Tabla 2.

Ejemplos de ejercicios de la prueba	
Ejercicio conceptual	**Ejercicio procedimental**
8. Si $a < 0$ y n es un número entero distinto de cero, entonces la expresión $\sqrt[n]{a}$, tiene soluciones reales si: A) n es par B) n es impar C) n negativo D) n es positivo	7. La expresión algebraica $a^2 - (b-1)^2$ es equivalente a: A) $a^2 - b^2 + 1$ B) $(a-(b-1))^2$ C) $(a+b-1)(a-b-1)$ D) $(a+b-1)(a-b+1)$
Indicador de logro: Reconoce las propiedades de los radicales.	**Indicador de logro:** Simplifica expresiones algebraicas por factorización.

Adicionalmente, como parte de la prueba escrita aplicada posterior al cierre del curso de Álgebra, se recabó información del estudiante respecto a un total de quince variables contextuales (Tabla 3) asociadas a la variable respuesta (total de aciertos obtenidos por los estudiantes en la prueba escrita), denotada por la letra y.

Tabla 3.

Variables de contexto y opciones de respuestas asociadas					
Variables (V)		**Opciones de respuesta**	**Variables (V)**		**Opciones de respuesta**
x_1	Preparatoria de procedencia	Preparatoria 1 Preparatoria 2	x_9	Mayor nivel de estudios de los padres	Primaria Secundaria Bachillerato Universidad (Licenciatura) Posgrado
x_2	Secundaria de procedencia	Pública Privada	x_{10}	Recursos empleados para estudiar	Internet Libros Notas en la libreta Internet/Libros Notas/Libros Notas/Internet Notas/Libros/Internet
x_3	Género	Hombre Mujer	x_{11}	Formas de estudio preferido	Individual Grupal
x_4	Lugar de residencia	Mérida Interior del Estado	x_{12}	Desempeño promedio en Matemáticas	Sobresaliente Aceptable Deficiente
x_5	Edad (en años)	Respuesta Libre	x_{13}	Grupo al que se pertenece	Rango [1a, 30a]
x_6	Número de integrantes en la familia	Respuesta Libre	x_{14}	Expectativas al concluir el bachillerato	Ingresar al campo Laboral Realizar estudios superiores
x_7	Lugar ocupado entre los hermanos	Primero Intermedio Último Único	x_{15}	Área de interés	Ciencias Biológicas y Agropecuarias Ciencias Exactas o Ingenierías Ciencias de la Salud Ciencias Sociales y Economía Arquitectura, Arte y Diseño Indeterminado Sin interés en continuar estudiando
x_8	Ingreso familiar mensual	Menos de 4,500 De 4,500 a 7,500 De 7,500 a 10,500 Más de 10,500			

Análisis de datos

Entre las variables de contexto se tenían doce categóricas por lo que al utilizar variables indicadoras éstas se vieron incrementadas a veintisiete. Dada la cantidad y diversidad de variables tratadas se optó por concentrarlas en cuatro grupos para realizar un análisis más específico de ellas, quedando como sigue: 1) Antecedentes personales; 2) Antecedentes académicos; 3) Familiares y; 4) Socioeconómicas. Los cálculos estadísticos se realizaron usando el software Statgraphics y para su interpretación se consideró que un modelo y una variable son significativos si su valor p, obtenido del análisis estadístico del modelo, arrojaba un valor menor a 0.10, como se sugiere en Mudge, Baker, Edge & Houlahan (2012), pues indicaría una relación estadísticamente significativa con un nivel de confianza del 90%.

DATOS Y RESULTADOS

A continuación se presentan los modelos de regresión múltiple obtenidos para la identificación de las variables significativas en este estudio y su interpretación:

Grupo 1:	Antecedentes personales
Modelo:	$y = 2.97 - 0.16A - 0.02x_5 + 0.38B_1 + 0.51B_2 + 0.48B_3 + 0.54\ B_5 + 1.11B_6$

Tabla 4.

Resultados del análisis de regresión múltiple del Grupo 1

V	*Parámetro*	*Valor-p*
	CONSTANTE	0.02
x_3	A: Género	**0.05**
x_{15}: Área de interés	B_1: Indeterminado	0.28
	B_2: Ciencias de la salud	**0.08**
	B_3: Ciencias Biológicas y Agropecuarias	0.13
	B_4: Ciencias Sociales y Economía	**0.07**
	B_5: Arquitectura y Arte	**0.04**
	B_6: Ciencias Exactas e Ingeniería	**< 0.01**
	x_5: Edad	0.78

En el resultado del análisis de varianza se obtuvo que el valor p del modelo es menor que 0.1, por lo tanto es significativo, concluyéndose que en éste existen variables significativas. La variable *género* $(p = 0.05)$ resultó significativa determinándose que los hombres obtuvieron un mayor rendimiento en Álgebra que las mujeres. Este dato coincide con lo reportado en estudios sobre el hecho de que en Matemáticas suelen salir mejor evaluados los hombres (Betz & Hackett, 1998, citados en Blanco, Ornelas, Aguirre y Guedea, 2012).

También se detectó que las variables asociadas a las *expectativas profesionales* que tienen los estudiantes al concluir su preparatoria, tienen influencia sobre su rendimiento mostrado en Álgebra. Las variables con mayor aportación en este aspecto fueron: en primer lugar y sustancialmente, el interés hacia el área de Ciencias Exactas $(p < 0.01)$; en segundo, por el área de Arquitectura y Arte $(p < 0.041)$, seguidamente por las Ciencias Sociales $(p < 0.065)$ y finalmente el interés por Ciencias de la Salud $(p < 0.08)$.

Grupo 2:	Antecedentes académicos
Modelo:	$y = 2.75 + 0.18C + 0.24D - 0.07E + 0.3F_1 + 1.80F_2$

El modelo resultó significativo en el análisis de varianza. Una de las variables significativas (Tabla 5) para esta población es la *Preparatoria* a la que pertenecen, pues los estudiantes de la Preparatoria 2 tuvieron mejor rendimiento en Álgebra que los de la Preparatoria 1, aunque la media para ambas fue casi igual.

Tabla 5.

Resultados del análisis de regresión del Grupo 2		
V	***Parámetro***	***Valor-p***
	CONSTANTE	<0.01
x_1:	C: Preparatoria	**0.02**
x_2:	D: Secundaria	**0.01**
x_{11}:	E: Forma de estudio	0.40
x_{12}:	F1: Desempeño aceptable	**<0.01**
	F2: Desempeño sobresaliente	**<0.01**

También resultó significativa la variable *Secundaria de procedencia*, teniéndose el caso que los estudiantes provenientes de escuelas privadas mostraron un mejor rendimiento que los de escuelas públicas. Las variables de *Desempeño en Matemáticas* se relacionan con la forma en cómo los estudiantes se auto perciben respecto a su rendimiento escolar en dicha ciencia, es decir, con la confianza que se tienen en sí mismos de poder entender y resolver ejercicios de Matemáticas. Visto así, las variables definidas con desempeño aceptable y sobresaliente fueron las más significativas con respecto a la apreciación de tener desempeño deficiente.

Grupo 3:	Familiares
Modelo:	$y = 3.12 - 0.02x_6 + 0.13G_1 + 0.24G_2 + 0.07G_3$

Tabla 6.

Resultados del análisis de regresión múltiple del Grupo 3	
Parámetro	***Valor-p***
CONSTANTE	<0.01
x_6: Número de integrantes en la familia	0.67
x_7: Lugar que ocupas entre hermanos:	
G_1: Primero	0.44
G_2: Intermedio	0.19
G_3: Último	0.69

En el análisis de varianza del Grupo 3 el valor del modelo fue $p = 0.57$, mayor a 0.1, de ahí que éste no resulte significativo y por tanto, ninguna de las variables aporta significancia al modelo.

Grupo 4:	Socioeconómicas
Modelo:	$y = 2.51 - 0.18H + 0.16I_1 + 0.16I_2 + 0.2I_3 + 0.32J_1 + 0.37J_2 + 0.49J_3 + 0.53J_4 + 0.19K_1 + 0.08K_2 + 0.37K_3 + 0.08K_4 + 0.78K_5 + 0.29K_6$

Tabla 7.

Resultados del análisis del Grupo 4		
V	***Parámetro***	***Valor-p***
	CONSTANTE	<0.01
x_4	H: Residencia	0.21
x_8	I_1: 4,500-7,500	0.12
	I_2: 7,500-10,500	0.21
	I_3: >10,500	0.13
x_9	J_1: Secundaria	0.26
	J_2: Bachillerato	0.18
	J_3: Licenciatura	**0.08**
	J_4: Posgrado	**0.07**
x_{10}	K_1: Libros/Internet	0.32
	K_2: Notas/Internet	0.66
	K_3: Notas/Libros/Internet	**0.02**
	K_4: Libros	0.74
	K_5: Notas	**<0.01**
	K_6: Notas/Libros	**0.09**

El valor p del modelo en el análisis de varianza del Grupo 4 resultó menor a 0.1. Son variables significativas en este grupo las relacionadas con el *Nivel de estudios de los padres* y los *Recursos empleados para estudiar*.

En el caso del *Nivel de estudios de los padres,* únicamente las variables en las que se consideran padres con posgrado o al menos con licenciatura son las que intervienen de manera significativa para el rendimiento de los jóvenes, comparados con los que solo cuentan con estudios de primaria. Cabe decir que esto no sucede para el caso en el que los padres tienen estudios de Secundaria o Bachillerato.

Las variables asociadas a los *Recursos empleados para el estudio* con mayor influencia fueron las relacionadas con las Notas de clase, con respecto al uso únicamente de Internet. Esto es entendible si se mira desde la óptica de que el rendimiento del estudiante estaría también asociado a su entendimiento del contenido de los cursos, y si bien las notas pudieran no ser determinantes para un aceptable rendimiento, sí son un indicativo de un estudiante que asiste y toma notas con regularidad, por lo que es plausible esperar tenga mayor posibilidades de éxito.

CONCLUSIONES

Entre las variables contextuales consideradas en este estudio, se identificaron como estadísticamente significativas respecto al rendimiento escolar en matemáticas y con particular énfasis en Álgebra, las siguientes: *género, área disciplinar de interés de los estudiantes, nivel de estudio de los padres, autopercepción de desempeño en matemáticas, notas de clase como recurso empleado en el estudio, escuela a la que pertenece y la de procedencia*.

Respecto al género, si bien en los estudios internacionales sobre evaluación de competencias lectoras y matemáticas se sigue observando el hecho de que los hombres obtuvieron mayor rendimiento en contraposición a las mujeres en el área de las matemáticas, lo cierto es que también hay una clara tendencia en la disminución de las distancias que separan a unos de otros (Inda, Rodríguez y Peña, 2010; citado en Carmona, Sánchez y Bakieva, 2011). Por tanto, adquiere sentido pensar en la posibilidad de estar frente a una tendencia de cambio en las creencias y representaciones sociales en las que se ha adjudicado a ellas un papel "débil" de autoeficacia en carreras tradicionalmente masculinas.

Por otra parte, es de esperarse que en matemáticas obtengan mejores resultados quienes se identifiquen y proyecten su futuro con una actividad profesional estrechamente relacionada con esta ciencia y bajo rendimiento aquellos estudiantes que no vislumbran continuidad alguna en sus estudios profesionales. Sin duda, sociedad y escuela deben atraer este tipo de situaciones mediante programas integrales que favorezcan una cultura educativa y profesional entre los jóvenes. Asimismo, la desigualdad educativa presente en el seno familiar se convierte en un factor clave para el futuro desarrollo profesional de sus integrantes.

Los jóvenes que registraron tener una autopercepción de desempeño aceptable y sobresaliente en matemáticas fueron los que comparativamente tuvieron mejor rendimiento en Álgebra. Se infiere que la consideración de ser eficiente en algo, incrementa la automotivación y rendimiento en las tareas, en este caso, de aprendizaje escolar. Así, parece que a mayor autopercepción de eficiencia, habrá mayor esfuerzo y persistencia por conseguir un logro en sus metas propuestas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Blanco, H.; Ornelas, M.; Aguirre, J. y Guedea, J. (2012). Autoeficacia percibida en conductas académicas. Diferencias entre hombres y mujeres. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 17(53)*, 557 – 571.

Buyatsi, M. (2013). Factors affecting mathematics academic counselling services: the secondary school counsellors' perspective. *International Journal of Education and Research, 12(1)*, 1 – 8.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona, España: Gedisa.

Centra, J. & Potter, D. (1980). School and teacher effetcs: An international model. *Review of Educational Research, 50,* 273 – 291.

Carmona, C., Sánchez, P. y Bakieva, M. (2011). Actividades extraescolares y rendimiento académico: Diferencias en autoconcepto y género. *Revista de Investigación Educativa, 29(2)*, 447 – 465.

Creemers, B. (1994) Effective instruction: An empirical basis for a theory of educational effectiveness. En D. Reynolds, B. Creemers, P. Nesselrodt, E. Shaffer, S. Stringfield & C. Teddlie (Eds.), *Advances in School Effectiveness Research and Practice* (pp.189-203). New York, USA: Elsevier Science Ltd.

Coleman, J., Hoffer, T., & Kilgore, S. (1982). Cognitive outcomes in public and private schools. *Sociology of Education*, *55*, 65 – 76.

Cu, G. (2005). El impacto de la escuela de procedencia del nivel medio superior en el desempeño de los alumnos en el nivel universitario. *Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, *3(1)*. Recuperado de http://www.ice.deusto.es/RINACE/reice/Vol3n1_e/Cu.pdf.

Fuentes, A. (1986). *Procesos funcionales y eficacia de la escuela. Un modelo causal*. Madrid: Universidad Complutense.

Hill, P. & Rowe, K. (1996). Multilevel modeling in school effectiveness research. *School Effectiveness and School Improvement, 7(1)*, 1 – 24.

Jencks, C., Smith, M., Acland, H., Bane, M., Cohen, D., Gintis, H., Heyns, B. & Mishelson, S. (1972). *Inequality: A reassessment of the effect of the family and schooling in America*. New York: Basic Books.

Lockheed, M. & Bruns, B. (1990). *School Effects on Achievement in Secondary Mathematics and Portuguese in Brazil* (No. 525). Washington: The World Bank.

Mohammadpour, E. & Shekarchizadeh, A. (2013). Mathematics achievement in high- and low-achieving secondary schools. *Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology*, *34*. DOI: 10.1080/01443410.2013.864753.

Mudge, J., Baker, L., Edge, C & Houlahan, J. (2012). Setting an optimal alpha that minimizes errors in null hypothesis significance tests. *PLoS One*, *7(2)*: e32734.

Murphy, J. (1992). School effectiveness and school reestructuring: Contributions to educational improvement. *School Effectiveness and School Improvement, 3(2)*, 90 – 109.

Parker, P., Marsh, H., Ciarrochi, J., Marshall, S. & Abduljabbar, A. (2014). Juxtaposing math self-efficacy and self-concept as predictors of long-term achievement outcomes. *Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology*, Special Issue, *34(1)*, 29 – 48.

Salas, E., Domínguez, T. y Farfán, R. M. (2011). Logro educativo: Prueba ENLACE México 2008. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24*, 79 – 86. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A. C.

Sales, P., Baldaque, M., Mourão, R., Nuñez, J., González-Pienda, J., Valle, A., y Rodrigues, M. (2008). Trabalho de casa, auto-eficácia e rendimiento em Matemática. *Revista Semestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional, 12(1)*, 23 – 35.

Saritas, T. y Akdemir, O. (2009). Identifying factors affecting the mathematics achievement of students for better instructional design. *International Journal of Instructional Technology and Distance Learning, 10(8)*, 57 – 62.

Scheerens, J. (1993). Effective schooling: Research, theory, and practice. *School Effectiveness and School Improvement, 4(3),* 230-235.

Zvoch, K. & Stevens, J. J. (2005). Sample exclusion and student attrition effects in the longitudinal study of middle school mathematics performance. *Educational Assessment, 10*(2), 105 – 123.

PRODUCCION DE SENTIDOS PARA LOS NUMEROS ENTEROS POR ALUMNOS DE PRIMARIA AL RESOLVER PROBLEMAS ELEMENTALES

José Luis Mejía Rodríguez y Aurora Gallardo Cabello
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (México)
jose.luc.am@hotmail.com, agallardo@cinvestav.mx

Palabras clave: números enteros, educación primaria, procesos cognitivos, orden, adición y sustracción

Key words: integers, elementary school, cognitive processes, order, addition and subtraction

RESUMEN: En este trabajo se describen y analizan los procesos cognitivos de los estudiantes de cuarto grado de primaria en la resolución de tareas con números enteros, previa instrucción. Es la primera parte de una investigación cuyo objetivo es plantear la posibilidad de la inclusión de algunos temas de números enteros ausentes en los programas de matemáticas de educación primaria, mediante el estudio de cómo los estudiantes comprenden situaciones relacionadas con los enteros negativos a través de la implementación de una ruta didáctica. Algunos resultados indican que los alumnos intentan dar sentido a los números enteros, basándose en su conocimiento de los números naturales.

ABSTRACT: This paper describes and analyzes the cognitive processes of students in fourth grade in solving tasks with integers, subject any instructions. This is the first part of a research aimed to raise the possibility of including some issues of missing integers in mathematics programs of primary education by studying how students include situations involving negative integers. Some results of this study indicate that students try to make sense of integers, based on their knowledge of natural numbers.

INTRODUCCION

Las diversas investigaciones realizadas para explicar las dificultades encontradas por estudiantes de secundaria en la conceptualización y operatividad de los números negativos indican que este problema sigue vigente. Algunos de estos trabajos, de corte epistemológico, indican la importancia de considerar lecciones de la historia en relación a la evolución de los números en tanto concepto matemático legítimo.

Los avances logrados en el razonamiento con números enteros por parte de niños pequeños de entre 6 y10 años de edad (Bishop, Lamb, Philipp, Whitacre, Schappelle & Lewis, 2014 y Bofferding, 2014), así como algunos resultados favorables alcanzados en los estudios del álgebra temprana (early algebra) en temas como el razonamiento proporcional y los procesos de generalización (Butto y Rojano, 2004) condujeron a plantearnos en esta investigación los siguientes objetivos:

1. Analizar los procesos cognitivos de los niños (de cuarto grado de primaria, 9-10 años) acerca de los números enteros antes de llevar a cabo un periodo de instrucción.
2. Conocer los obstáculos y las vías de acceso a la comprensión de los números enteros después de enseñanza.
3. Plantear las posibilidades de la inserción del tema de los números enteros en el programa de matemáticas de educación primaria.

En este trabajo damos cuenta del primer objetivo, describiendo y analizando los procesos cognitivos de los niños de cuarto grado de primaria, antes de alguna instrucción en el tema de los números negativos. El análisis de las producciones de los alumnos considera la cuestión histórica-epistemológica en la aceptación de los negativos.

ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACION

Entre las investigaciones que ponen de manifiesto las dificultades enfrentadas por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas con números negativos destacan las de Gallardo y Mejía (2015), Gallardo (2002) y Vlassis (2001). Gallardo (2002) realiza un estudio histórico-epistemológico para estudiar la extensión del dominio numérico de los naturales enteros por parte de los estudiantes de 12-13 años de edad. El estudio histórico pone de manifiesto cuatro niveles de aceptación de los números negativos antes de considerarlos legítimamente como enteros: sustraendo, número relativo, número aislado y número formal.

El estudio de Gallardo (2002) fue complementado por Gallardo y Mejía (2015) al enfocar el problema desde la noción de obstáculo epistemológico (Brousseau, 1983). En este estudio se encontró que las dificultades de los estudiantes al enfrentar problemas con números negativos son de origen epistemológico, dadas las características de estos conflictos tales como su persistencia y las semejanzas con los que presentaron los matemáticos históricos en la conceptualización de los negativos. Por su parte, Vlassis (2001) diseñó un experimento de enseñanza en la resolución de ecuaciones lineales. La autora señala que la presencia de los números negativos en las ecuaciones representa un corte con el conocimiento aritmético el cual no puede superarse por los alumnos, sino a través de un razonamiento formal en los aspectos semánticos y sintácticos. Los alumnos de este experimento pudieron superar los obstáculos surgidos por la presencia de las dos

ocurrencias de la incógnita en las ecuaciones lineales, a través del modelo de la balanza, pero no lo hicieron cuando las ecuaciones contenían números negativos.

Estudios recientes como los de Bofferding (2014) y Bishop et al (2014) también exhiben los obstáculos encontrados por niños de educación primaria (edades entre 6-10 años). Sin embargo en estas investigaciones se pone de manifiesto el uso de pensamiento creativo de los alumnos para superar esas dificultades. Bofferding (2014) se propone estudiar si existe un cambio y en qué consiste, en los modelos mentales de valor y orden, y magnitudes dirigidas en los números enteros, por parte de los estudiantes de primaria después de una instrucción. En esta experiencia didáctica se formaron tres grupos, en el primero se hizo énfasis en la naturaleza unaria del "signo menos", en el segundo, en su naturaleza "binaria" y, en el tercero se trata de una instrucción combinada. Los modelos mentales de la mayoría de los estudiantes en los diferentes grupos pasaron del inicial al sintético, e incluso, en algunos, al modelo formal, esto significa un avance en la comprensión de los negativos.

Por su parte, Bishop et al (2014) realizan un estudio de corte histórico-epistemológico en relación al rechazo de los números negativos y la forma en que estos fueron aceptados, por parte de los matemáticos del pasado. El estudio histórico conjuntamente con el análisis de las estrategias utilizadas por los niños de primaria, al resolver problemas numéricos con números enteros, puso de manifiesto semejanzas entre estos y los matemáticos de antaño, en la forma de conceptualizar dichos números. En particular, encontraron tres obstáculos: el número como magnitud (los números representaban cantidades de objetos), operaciones sin sentido (no se puede quitar más de lo que se tiene o no se puede quitar algo de la nada) y situaciones contra-intuitivas (la adición no puede disminuir la cantidad, la sustracción no puede aumentarla), y tres formas de pensamiento creativo funcionando como apoyo para superarlos: ideas basadas en el orden, pensamiento lógico/formal y la noción de magnitud. Según estos autores, la idea de magnitud funcionó a la vez como un obstáculo y como una idea creativa; al entenderse el número como cantidad de objetos, se dificultó comprender el negativo por parte algunos alumnos, sin embargo, a otros les ayudó a resolver algunas operaciones numéricas.

FUNDAMENTO TEORICO

Nos basamos en la perspectiva teórica de los Modelos Teóricos Locales (MTL) (Filloy, 1999). Según este autor los fenómenos de la matemática educativa deben observarse desde cuatro componentes interrelacionados: la competencia, los procesos cognitivos, la enseñanza y la comunicación. De acuerdo a Puig (2006) el carácter de modelo de los MTL, viene del hecho de que no pretende ser una teoría, sino un modelo teórico útil para describir, explicar y predecir esos fenómenos, pero no niega que estos puedan describirse, explicarse y predecirse de otra manera. Es local porque se elabora un modelo para estudiar los fenómenos que se producen en los procesos de enseñanza/aprendizaje de unos contenidos matemáticos determinados a alumnos específicos, y se pretende que sólo sea adecuado para estos.

Se explica la necesidad de interrelacionar los cuatro componentes mencionados anteriormente porque se pretende observar procesos de pensamiento (componente cognitivo) conjuntamente con el intercambio de mensajes (componente comunicativo) entre sujetos de diversos grados de competencia (componente formal) en el uso de Sistemas Matemáticos de Signos (SMS) empleados

para crear los textos matemáticos (componente de enseñanza) pertinentes para el proceso didáctico (Filloy, 1999). En este estudio describiremos los procesos cognitivos de los alumnos al enfrentar situaciones con enteros, por lo cual debe precisarse el componente cognitivo. Definiremos los procesos cognitivos como "aquellas estructuras mentales del sujeto… que dan preferencia a distintos mecanismos de proceder, diferentes maneras de codificar y descodificar mensajes matemáticos…diferentes estrategias para resolver problemas" (Filloy, 1999, p. 5).

La noción de SMS para el estudio de los textos producidos por los alumnos no distingue entre los signos estrictamente matemáticos y otros tales como el lenguaje vernáculo. Lo crucial para los procesos de significación es considerar el sistema de signos tomados como un todo, lo que es de naturaleza matemática es el sistema y no los signos individualmente, porque es el sistema el responsable del significado de los textos. (Filloy, Puig, & Rojano, 2008). Los textos no deben identificarse con los textos escritos, "sino como el resultado de la lectura/transformación de un espacio textual cuya finalidad no es extraer un significado inherente al texto, sino producir sentido" (Talens y Company, 1984, p. 32).

El espacio textual, por su parte, puede considerarse como un sistema que impone una restricción semántica sobre la persona que lo lee. Las ideas de texto y espacio textual se relacionan con las de significado y sentido. Debe distinguirse entre el campo semántico del objeto matemático, esto es, el "significado", donde cada palabra será la misma para todas las personas de un grupo social en una época histórica específica y el campo semántico personal del sujeto que produce "sentidos" que se convertirán en significados vía una interpretación afortunada del estudiante, respecto a la situación problemática planteada (Filloy et al, 2008).

EL METODO

Esta investigación es de tipo cualitativo. Se trata de una investigación preocupada por la precisión de los datos, sistemática, conducida por procedimientos rigurosos, aunque no estandarizados, para producir estudios válidos del mundo real (Taylor y Bogdan, 1990). La confianza en la investigación cualitativa se logra cuando métodos diferentes de recogida de datos producen en esencia los mismos resultados, utilizando métodos de contraste se reduce considerablemente las posibilidades de que los hallazgos sean un simple artífice del método (Cohen y Manion, 1990).

En esta investigación utilizamos dos métodos: el cuestionario y la entrevista en profundidad. Esta se considera flexible y dinámica, más que estructurada y estandarizada y se define como aquellos encuentros cara a cara entre el entrevistador y el sujeto dirigidos a la comprensión de la perspectiva que tiene éste respecto de la situación. En este tipo de entrevista el mismo entrevistador se convierte en el instrumento de la investigación y el protocolo de entrevista es sólo una guía flexible (Taylor y Bogdan, 1990).

Para analizar las producciones de los niños de 4º grado de primaria, consideramos los "sentidos de uso" del número negativo (Gallardo, 2002):

a) Número sustractivo: la noción de cantidad se subordina a la de magnitud, por ejemplo, en la sustracción a – b, donde a y b € N, y siempre a > b.

b) Número relativo; surge la idea de cantidades opuestas en el dominio discreto y de simetría en el dominio continuo.

c) Número aislado: se trata de la aceptación del negativo como el resultado de una ecuación o la solución de un problema.

d) Número formal: es la noción formal del número negativo, nuestros enteros de hoy.

EL ESTUDIO EMPIRICO

Los sujetos de estudio pertenecen a un grupo de cuarto grado de primaria de una escuela pública de México, D.F. compuesto por 16 niños de entre 8-9 años de edad. Se aplicó un cuestionario para conocer sus ideas acerca de los números negativos, previa instrucción. El cuestionario consta de 35 ítems pertenecientes a dos temas en general: valor y orden y operaciones con números enteros. Estos temas se desglosan en varios subtemas: límite del dominio numérico, secuencias numéricas, recta numérica, comparación de números, problemas de enunciado verbal y operaciones de adición y sustracción de enteros.

El análisis de las producciones de los alumnos en el cuestionario permitió seleccionar un alumno para la entrevista video-grabada, con duración aproximada de 50-60 minutos. El estudiante elegido es de un nivel bajo de desempeño académico. Esto se debe a que la ruta didáctica diseñada para llevar a cabo nuestro periodo de instrucción debía partir de los conocimientos que poseen los alumnos de menor rendimiento para asegurar así la inclusión de todos.

RESULTADOS DE LA PRIMERA FASE

A continuación presentamos en tablas algunos ítems representativos de cada uno de los temas con números enteros, así como las estrategias más utilizadas.

Valor y orden de números enteros

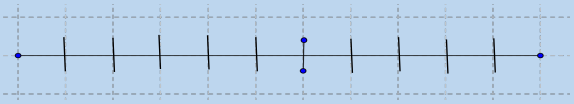
Nos interesa conocer el límite del dominio numérico de los alumnos y esperábamos encontrarnos el cero como límite. Como puede observarse en la tabla 1, hayamos con sorpresa que para varios alumnos el cero no es un número, por lo que su dominio numérico termina en el 1 como puede observarse en la tabla 1.

Tabla 1.

El límite del dominio numérico de los estudiantes	
Ítem	**Estrategias o respuestas más frecuentes**
1. Escribe el número más chico que conozcas: _____.	El 0 El 1
2. Empezando en 5, cuenta hacia atrás hasta donde sea posible.	Cinco, cuatro, tres, dos, uno, cero.
3. En cada inciso escribe los números que siguen. a) 12, 9, 6, 3, ___. b) 10, 8, 6, 4, ___, ___, ___. c) 5, 4, 3, 2, ___, ___, ___, ___.	Para el inciso a) escriben en el espacio faltante 0 ó 1. Para los otros incisos: -Llenar los espacios faltantes con ceros. -Dejar los espacios en blanco -Escribir una cantidad ascendente de ceros (Escriben uno, dos, tres… ceros).

Como se muestra en la tabla 2, respecto a los temas de orden y comparación nos encontramos que la mayoría de los alumnos ignoran el signo unario de los números, comparando los enteros como si fueran naturales. Asimismo, todos los estudiantes desconocen el orden de los enteros en la recta numérica, pero también es sorprendentes que ninguno de ellos coloca el cero en dicha recta. La respuestas correctas dadas al inciso d) puede deberse a que los números son iguales "en todo" y no al conocimiento del orden. Descubrimos respuestas correctas para todos los incisos de comparación, por parte de un alumno.

Tabla 2.

Orden y comparación en los enteros	
Ítem	**Estrategias y/o respuestas más frecuentes**
1. Para cada inciso subraya el número que sea más grande. Pon un signo = si las cantidades son iguales. a) 3 -7 b) -5 -15 c) 8 -8 d) -4 -4	Ignorar el signo unario: es mayor el que tiene mayor valor absoluto; son iguales si tienen el mismo valor absoluto. Responder correctamente al comparar dos números negativos iguales.
1. Escribe los números que faltan en la siguiente recta numérica.  1	Colocar correctamente los números a la derecha del 1. No colocar el cero a la izquierda del 1. Reflejar los naturales a la izquierda del 1. Dejar vacías las marcas. Repetir los números en forma decreciente.

Operaciones con números enteros

La primera operación de la tabla 3 resultó ser la más compleja para todos los estudiantes. Escribir una raya en el cuadrito vacío puede indicar que para ellos no existe el número pedido; escribir 1 o 0, se debe tal vez a la idea de que estos son los números -según su dominio numérico-, con los que menos se aumenta la cantidad. Estas respuestas, así como la de convertir la adición en sustracción muestran que para ellos esta operación es absurda. En cuanto a las otras adicciones, el hecho más destacado es la conversión de adición en sustracción de naturales, posiblemente debido a la presencia del "signo menos" (Número sustractivo). En cuanto a las sustracciones es notorio el obstáculo: "quitar más de lo que se tiene" o "quitar algo de nada".

Tabla 3.

Operaciones a través de expresiones numéricas	
Ítem	**Estrategias y/o respuestas más frecuentes**
Escribe en el cuadrito vacío el número que falta para que la operación sea correcta.	
$6 + \square = 4$	-Trazar una raya (-) sobre el cuadrito. -Dar como respuesta 0 o 1. -Trasformar la adición en sustracción.
$-11 + -6 = \square$ $-5 + 2 = \square$	-Ignorar los signos unarios y resolver como adición de naturales. -Restar los valores absolutos y escribir positivo o negativo el resultado.
$0 - 2 = \square$ $3 - 4 = \square$	-Resolución basada en una lectura de derecha a izquierda. -Resolución basada en la idea de "quitar todo lo que se puede". -Solución correcta para la primera sustracción.

Pretendíamos saber qué sucede cuando las operaciones se plantean a través de preguntas. Las estrategias mostradas en la tabla 4 confirman los procesos cognitivos exhibidos por los estudiantes al resolver operaciones numéricas. Sin embargo, en estos ítems hubo dos respuestas correctas (una por cada pregunta) motivadas tal vez por el lenguaje verbal, arribando así al negativo como número aislado.

Tabla 4.

Operaciones a través de preguntas abiertas	
Ítem	**Estrategias y/o respuestas más frecuentes**
¿Cuál es el número que sumado a 5 resulta 2?	-Convertir la adición en sustracción (5 – 3 = 2). -Restar ambos números. -Dar 0 como respuesta. -Sumar ambos números.
¿Cuánto es 0 menos 5?	-Lectura de derecha a izquierda. -Actuar según la idea "no se puede quitar más de lo que se tiene".

Planteamos problemas de enunciado verbal en contexto. Se muestran en la tabla 5 los correspondientes a los contextos “temperatura” y “nivel del mar”. Estos ítems fueron los que más dejaron sin resolver los estudiantes y también en los que ignoraron la instrucción, no planteando operación alguna para resolverlos. Sin embargo, un alumno usa negativos en su respuesta (número aislado).

Tabla 5.

Resolución de problemas de enunciado verbal	
Ítem	**Estrategias y/o respuestas más frecuentes**
Resuelve cada uno de los siguientes problemas. Escribe las operaciones que les dan solución.	
1-En una ciudad la temperatura se encontraba a 9 grados por la tarde, para la noche bajó 17 grados. ¿A qué temperatura se encontraba en la noche? 2-En una película de guerra, un submarino estaba a 30 metros bajo el nivel del mar y luego bajó 23 metros. ¿A qué profundidad estaba finalmente el submarino?	-Respuestas correctas utilizando números naturales. -Respuestas correctas e incorrectas el ámbito contextual. -No hay uso de negativos en las respuestas (excepto una).

COMENTARIOS FINALES

Los resultados del análisis de los procesos cognitivos de los niños de cuarto grado de primaria mostraron un desconocimiento total de este campo numérico, otorgando sentido a las tareas basándose en sus conocimientos de las propiedades de los naturales. Encontramos un estudiante competente en la resolución de diferentes situaciones usando números enteros. Los alumnos exhiben dos de los tres “sentidos de uso” del negativo, encontrados por Gallardo (2002) con alumnos de educación secundaria: el número sustractivo y el número aislado, aunque éste en muy pocas ocasiones. Es destacable el hecho de que haya surgido incluso el “número aislado”, pero en ninguna ocasión, el “número relativo”; el desconocimiento de este “sentido de uso” no les permitió resolver algunas tareas como la de recta numérica, de hecho la idea de opuestos, como se indica en la literatura fue uno de los pasos hacia la aceptación de los negativos.

Un hecho importante es que los problemas de enunciado verbal, comúnmente utilizados para introducir los números enteros, son completamente desconocidos para ellos, de tal forma que los contextos inmersos en dichos problemas no sólo no los conducen al uso de signos binarios, sino que pasan inadvertidos, resolviéndolos en el campo de los naturales. También debemos mencionar que en la parte operativa se mostraron los siguientes obstáculos históricos: ideas contra-intuitivas (la suma no puede disminuir la cantidad) y operaciones absurdas (no se puede quitar más de lo que se tiene o no se puede quitar algo de nada).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

Bishop, J., Lamb, L., Philipp, R., Whitacre, I., Schappelle, B. & Lewis, M. (2014). Obstacles and Affordances for Integer Reasoning: An Analysis of Children´s Thinking and the History of Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education 43(1),* 19-62.

Bofferding, L. (2014). Negative integer understanding: characterizing first graders' mental models. *Journal for Research in Mathematics Education 45(2)*, 194-245.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problémes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mahématiques 4(2),* 165-198.

Butto, C. y Rojano, T. (2004) Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la Geometría. *Educación Matemática 6(1),* 113-148.

Filloy, E. (1999). *Aspectos Teóricos del Algebra Educativa.* México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Filloy, E., Puig, L. & Rojano, T. (2008). *Educational Algebra. A Theorical and Empirical Approach*. New York: Springer.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics 49(2),* 171-192.

Gallardo, A. y Mejía, J.L. (2015). Los números negativos ¿constituyen un obstáculo epistemológico persistente? En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28*, xx-xx. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Puig, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los Modelos Teóricos Locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 107-126). Valencia: Universidad de Valencia.

Talens, J. & Company, J. M. (1984). The textual space. On the notion of text. *The Journal of The Midwest Modern Language Association 17(2),* 24-36.

Taylor, S. y Bogdan, R. (1990). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación. La búsqueda de significados.* Barcelona: Paidos.

Vlassis, J. (2001). Solving Equations with negatives or crossing the formalizing gap. En M. Van Den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceeding of the Twenty-fifth*

¿CUÁLES SON LAS CAUSAS DE LAS DIFICULTADES QUE PRESENTAN LOS ESTUDIANTES AL RESOLVER SITUACIONES PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN FRACCIONES?

Dayana Paola Escobar Álvarez, Lilian Carina Fuentes Monterroza, Moisés David Arcia Benavides, Tulio Rafael Amaya De Armas.
Universidad de Sucre (Colombia).
dapaesal93@hotmail.com, lilianfuentes1995@hotmail.com, moisesarcia9a@hotmail.com, tuama1@hotmail.com

Palabras clave: fracciones, dificultades, estrategias, resolución de problemas

Key words: fractions, difficulties, strategy, resolution of problems

RESUMEN: Con este trabajo se reportan los hallazgos de un estudio descriptivo realizado con 34 estudiantes de cuarto grado de educación básica, con edades entre 8 y 10 años de una escuela pública colombiana, con el fin de determinar las posibles causas de las dificultades que presentan al resolver situaciones problemas que involucren fracciones y se proponen alternativas de solución para minimizar estas dificultades. Los resultados evidencian que la mayoría de los estudiantes tienen un conocimiento bajo sobre las fracciones y más específicamente se les dificulta resolver situaciones problemas donde estas se encuentran inmersas. Y además el docente se limita a desarrollar clases tradicionales cuando lleva a cabo la enseñanza de las fracciones.

ABSTRACT: With this work the findings where a descriptive case study was conducted with 34 students in the fourth grade of elementary school, aged 8 and 10 years in a Colombian public school, in order to determine the possible causes of the difficulties that have been reported to solve problems involving fractions situations and propose solutions to minimize these difficulties. The results show that most students have little knowledge about fractions and more specifically it difficult to resolve situations where these problems are embedded. And teaching is limited to developing traditional classes when conducting teaching fractions.

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones en matemática educativa han ido en aumento en los últimos años, esta área de investigación atrae mucho la atención debido a la importancia de las matemáticas dentro del proceso educativo para un desenvolvimiento dentro de la sociedad. Pero que está evidenciando dificultades para los estudiantes. En diferentes investigaciones (Parra y Flores, 2008; Godino, Batanero y Font, 2003; León, 2011; Duval, 2004) se ha encontrado que los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje de las matemáticas y el tema concerniente a las fracciones no es ajeno a esta gran problemática, sobre todo cuando se usan en contextos para resolver problemas.

Resulta interesante preguntarse a qué se deben estas dificultades, es decir, ¿cuáles son las principales causas de las dificultades que presentan los estudiantes al resolver situaciones problemas que involucren fracciones? ¿Qué está pasando en las escuelas con el proceso de enseñanza aprendizaje de las fracciones?

Sin duda el aprendizaje de las matemáticas ha presentado un alto grado de dificultad para el sujeto que las aprende. Uno de los contenidos en los que el grado de dificultad es mayor es el aprendizaje de las fracciones, debido a que los alumnos no sólo deberán acostumbrarse a sus usos en diferentes contextos y a las representaciones de un numero fraccionario, sino también a nuevos significados y formas de operar (Corial, 2001). Al introducir por primera vez las fracciones, el estudiante tiene concepciones en cuanto a los números naturales y operaciones básicas con números naturales. Por ello, las fracciones van a generar un desequilibrio cognitivo en los estudiantes, tal desequilibrio permitirá un cambio en sus estructuras mentales tras un proceso de acomodación, en la medida que el docente los vaya involucrando en el estudio de las fracciones. Pero este proceso no se da de la noche a la mañana, requiere esfuerzo y tiempo.

La solución de problemas con fracciones no es un aspecto fácil de manejar para muchos estudiantes. Parra y Flores (2008) sostienen que alumnos de primaria, y varios de secundaria, poseen un conocimiento rudimentario de las fracciones, pero aparentan comprenderlas ampliamente porque utilizan su terminología y dominan ciertas partes de los procedimientos, aunque no reconocen los problemas en los que éstos pueden ser empleados. Es decir, estos estudiantes creen dominar completamente el tema de fracciones porque resuelven ejercicios mecánicos, pero a la hora de utilizar el concepto para resolver una situación problema se le hace difícil interpretar la información, extraer los datos y llegar a una solución. El proceso de solución requiere también el empleo de otros apoyos como dibujos y trazos, además, de los conocimientos previos y cotidianos de los alumnos para proponer estrategias de solución y valorar el resultado final. Los estudiantes buscan sus propias estrategias para resolver determinado problema, basándose en algunos conceptos explicados que no interiorizaron completamente (poseen alguna noción pero no el concepto completo o en el momento no recuerdan exactamente los pasos a seguir, por ello no logran desarrollar el procedimiento cabalmente y por lo tanto cometen errores en los procesos de solución). Respecto a los errores Godino, Batanero y Font (2003) expresan, “hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar” (P. 73).

Antes de analizar lo referido a las dificultades de los estudiantes al resolver situaciones problemas que involucren fracciones es conveniente resaltar la importancia que tiene la resolución de problemas en el desarrollo cognitivo de las personas, puesto que de allí parte esta gran problemática. Muchas propuestas recalcan el valor que tiene el incluir las situaciones problemas

dentro de los procesos de enseñanza-aprendizaje como es el caso de Panizza (2003) quien señala que el alumno es "puesto en acción" al plantearle una situación problemática, para lo cual busca un procedimiento de solución. Las situaciones problemas van a permitir que el estudiante busque distintos procedimientos para obtener la solución a dicha situación problema, haciendo uso de lo que ya conoce, de lo que posee en su estructura mental y no solo eso sino que utilizará los recursos que considere útiles para llegar a la solución. En la medida en que se involucre al estudiante en estos procesos de resolución de problemas adquirirá destrezas y desarrollará habilidades de pensamiento, activando la capacidad analítica, reflexiva y propositiva.

Por otra parte, en los ideales del sistema educativo por lo general está inmerso el formar individuos integrales y la resolución de problemas es una parte esencial que favorece la formación integral de los educandos, pues estimula el desarrollo de estructuras de pensamiento lógico-matemático, ayuda a comprender las relaciones cuantitativas, favorecen el análisis, fomenta el ingenio, la creatividad y el razonamiento, y si el estudiante no es capaz de resolver situaciones problemas lo más probable es que no desarrolle estas habilidades obstaculizando así el desarrollo de sus procesos mentales. Aprender a resolver problemas es la destreza más importante que los estudiantes pueden aprender en cualquier lugar del mundo (Jonassen, 2004). Pero para esto es necesario relacionar los contenidos que se llevan a cabo en la enseñanza de las matemáticas con el contexto en que los estudiantes se encuentran. Y cómo contextualizar a las fracciones es uno de los desafíos que se le plantea a los docentes en el momento de presentársela a sus estudiantes de manera que las fracciones, sus relaciones y operaciones cobren sentido como herramientas útiles para resolver problemas y sus prácticas no se transformen en un obstáculo para la construcción del concepto. Esto revela que existen deficiencias de los docentes en este tema. Aunque no conozcamos el dominio de los maestros, esta problemática despierta el interés por analizar la enseñanza de las fracciones, por eso es importante que los docentes se capaciten y abrir espacios de estudio de discusión sobre la enseñanza-aprendizaje de las mismas.

METODOLOGÍA:

Se está haciendo un estudio descriptivo de casos con un diseño cuasi-experimental.

Los informantes fueron 34 estudiantes de cuarto grado de educación básica, con edades entre 8 y 10 años de una escuela pública colombiana. Este estudio se hace con el fin de determinar las posibles causas de las dificultades que presentan los estudiantes al resolver situaciones problemas que involucren fracciones y proponer alternativas de solución para minimizar estas dificultades.

La investigación se desarrolla en cuatro etapas: Revisión documental, diseño, exploración y aplicación de instrumentos, proceso de intervención y análisis e interpretación de resultados: La primera etapa consistió en la revisión de teóricos o antecedentes de investigaciones que tenían relación con el problema de investigación, resultó importante tener en cuenta las fundamentaciones de los mismos, puesto que dieron una guía clara para ayudar a complementar la investigación. Se tomaron bases para el análisis de las dificultades que presentan los estudiantes con el concepto de fracción y la resolución de problemas y el papel que juega el docente en la formación de estas dificultades. Una de las actividades indispensables para consolidar el proyecto fue la realización de un trabajo de campo, en el cual se hicieron una serie de observaciones sistemáticas tanto a los estudiantes como a la profesora a cargo del grupo, para reconocer las

dificultades que presentan los estudiantes cuando resuelven determinados problemas y para ver qué tanto conocimiento y dominio del tema poseía la docente, la manera como se dirigía a sus estudiantes y la trascendencia de las explicaciones, las estrategias metodológicas didácticas, los recursos y las herramientas utilizadas y las diferentes representaciones semióticas, las transformaciones tipo conversión o tipo tratamiento en la ejecución de la temática de las fracciones. Se extrajeron conclusiones de lo observado a partir de notas y diarios de campos en las cuales se escribieron los aspectos más relevantes. Se le hicieron a los estudiantes una serie de preguntas con el propósito de saber que tanto transcendió la explicación por parte de la profesora, si estaban conformes y satisfechos por todas las explicaciones dadas, por conocer qué proceso le genero mayor dificultad y cuál no, con respecto a la temática, escuchar por ellos mismos lo que hacen para resolver el problemas, entre otras, con el fin de contrarrestar y comparar los datos que se habían recolectado tras las observaciones.

Aparte de las exploraciones que se hicieron y se siguen haciendo en dicho curso, se desarrolló una segunda etapa que consistió en el diseño y aplicación de un cuestionario con el objetivo de detectar errores y dificultades que presentan los estudiantes cuando se disponen a resolver determinados problemas que requieran el uso de operaciones con fracciones, los errores más comunes en el proceso de cada estudiante, y el error común o que se mantenía latente comparando al grupo en general, las estrategias y ocurrencias que realizaban para llegar a la solución de la situación, y qué pregunta generó mayor dificultad en el proceso resolutivo. Esto dio lugar a evaluar el desempeño de los alumnos tanto individual como grupalmente. Una tercera etapa consiste en realizar un proceso de intervención en el aula, aplicando nuevamente la misma prueba piloto pero esta vez con un acompañamiento a los estudiantes por parte del grupo de investigación y con esto, formular y establecer algunas recomendaciones básicas para mejorar los resultados y el planteamiento de algunas alternativas de solución para que haya una mejor comprensión de la temática y de las aplicaciones problemas. Además de ello, dentro del proceso de intervención se pretende realizar otras pruebas más para contrarrestar los resultados y también aplicar una serie de estrategias como dictar clases por parte del grupo investigador y con mutuo acuerdo con el docente, con el apoyo de recursos didácticos que puedan ser manipulables por los mismos estudiantes, es decir, cambiar las explicaciones formales por unas didácticas, utilizar el juego como estrategia didáctica, utilizar las tics como herramienta didáctica. Dichas estrategias pretenden ser verificadas, para ello, se piensa llevar a cabo un diseño cuasi experimental, tomando dos grupos (el grupo escogido inicialmente y otro curso mas) en el que uno de ellos nos servirá como grupo de control, a ambos grupos se le aplicará la prueba para saber el nivel en que se encuentran con respecto a las fracciones y a las situaciones problemas que involucran fracciones, pero solo se implementaran las estrategias propuestas a un solo grupo, de manera que al aplicar la prueba final a ambos grupos se puedan comparar los resultados y analizar el éxito de las estrategias usadas. Y una última etapa consiste en el análisis de todos los resultados que se hallen en el desarrollo de la intervención.

RESULTADOS:

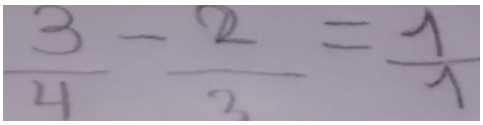
Con el análisis de los resultados obtenidos en la prueba piloto aplicada a los estudiantes de cuarto grado, se pueden evidenciar algunos resultados preliminares que se verán explícitos a continuación, no sin antes explicar y aclarar primero en qué consistía la prueba, ésta estaba

configurada inicialmente por una situación problema enfocada en la temática de fracciones, de la cual se desglosaban cinco preguntas de tipo abiertas, con el propósito de poder analizar los procedimientos llevados a cabo por cada estudiante. La situación planteada era la siguiente: el paso de un padre es 3/4 de metro y el del hijo es de 2/3 de metro. Debido esta situación en la primera pregunta pedían buscar la diferencia entre el paso del padre y el paso del hijo, en la segunda pregunta se exigía que se plasmara en un lenguaje coloquial cómo se había obtenido la respuesta a la pregunta anterior, en la tercera se preguntaba cuántos metros se recorría entre el padre y el hijo en un paso, en la cuarta pregunta se pretendía saber cuántos metros recorría el padre en cuatro pasos, y la quinta un poco más compleja para su nivel, era que si ambos querían recorrer 12 metros, cuántos pasos tenía que dar cada uno; en esto consistía básicamente toda la prueba. Con el desarrollo de la prueba y el análisis de la misma se pudo notar muchas dificultades y errores cometidos por los estudiantes, de acuerdo con el análisis estadístico de los resultados solo cuatro estudiantes de treinta y cuatro consiguieron ganar la prueba, lo que resulta bastante preocupante, porque la diferencia es sumamente grande.

Aquí se muestran algunas de las dificultades (las más representativas), que presentaron los estudiantes a los cuales fue aplicada la prueba analizando cada pregunta propuesta.

Con relación a la primera pregunta las respuestas más dadas por los estudiantes fueron las siguientes:

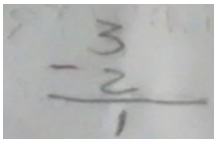
Figura 1.



El 38% de los estudiantes respondieron de forma similar a lo mostrado en la fig. 1, se evidencia que los estudiantes no tienen claro los procedimientos que deben llevar a cabo para resolver este algoritmo, no tenían en cuenta que los denominadores debían dejarse igual y no restarlos entre sí, esto mismo pasó en la tercera pregunta cuando se les pide sumar. Lo que permite deducir que una buena parte de los estudiantes poseen un conocimiento bajo en lo que se refiere a este tipo de operaciones con fracciones como es este caso, el de restar dos fracciones heterogéneas. Ellos restaban directamente numerador con numerador y denominador con denominador; debido a que no tienen presente que para sumar o restar fracciones es necesario tener en cuenta los denominadores, en caso de ser iguales (homogéneas) solo se han de sumar los numeradores y dejar el mismo denominador, en caso de ser diferente (heterogéneas) el procedimiento es completamente distinto. Investigadores puntualizan que uno de los errores más frecuentes es la extrapolación de cálculo de los naturales a las fracciones. Esto se debe como señala León (2011) a que los chicos siguen utilizando las estrategias validas con los números naturales para la realización de sus cálculos con fracciones. Aunque también podría atribuirse, como lo afirman Llinares y Sánchez (1988), al conocimiento del algoritmo de la multiplicación, provocando la mezcla de este con el de la suma.

Otra respuesta fue la siguiente,

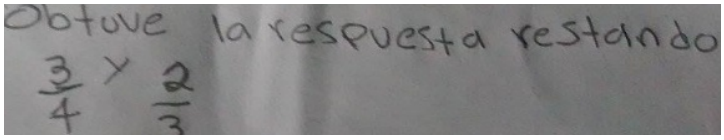
Figura 2.



El 12% de los estudiantes respondieron de esta manera (ver fig. 2), lo que hicieron para darle respuesta fue restar los numeradores de las fracciones que correspondían al paso del padre y del hijo respectivamente, obviando los denominadores, los estudiantes comprendieron lo que exigía la pregunta, es decir, entendieron que para dar respuesta era necesario realizar una resta, más sin embargo el procedimiento que llevaron a cabo no fue el correcto.

Con la segunda pregunta se evidenciaron respuestas como esta;

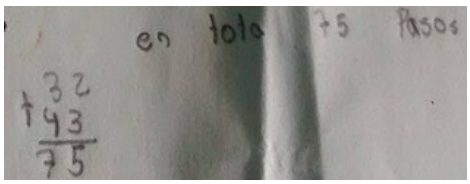
Figura 3.



Un 36% escribió muy sutilmente lo que habían hecho en la pregunta anterior (ver fig. 3), pero la intención con la pregunta era que expresaran con sus palabras el procedimiento para resolver restas de fracciones heterogéneas, cabe resaltar que aunque expresaron que habían restado las respectivas fracciones, en realidad no aplicaron el procedimiento correcto para realizar dicha operación.

Con base a la tercera pregunta una de las respuestas fue:

Figura 4.

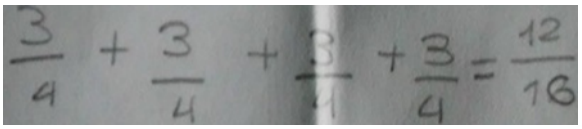


Un 35% de los estudiantes presentó este error (ver fig. 4) al momento de operar las fracciones del paso del padre que correspondía a 3/4 y el paso del hijo que correspondía a 2/3, lo que hicieron fue sumar los numeradores y denominadores de cada una de las fracciones, es decir, sumaba 3+4 y 2+3, no tuvieron en cuenta que se estaba trabajando con fracciones y no tomaron el 3/4 como una fracción sino como números naturales, de igual manera fue el caso de 2/3. De manera que en vez

de tener 3/4+ 2/3 tenían 32+43 lo cual generó dificultad puesto que el procedimiento de la operación suma es diferente para cada caso.

En la cuarta pregunta algunos estudiantes respondieron de esta forma:

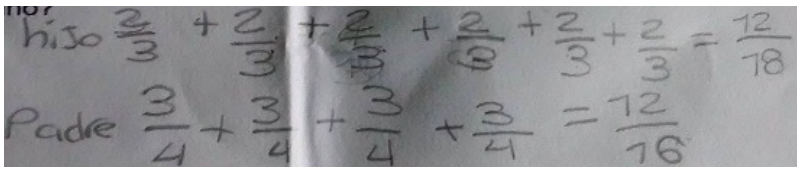
Figura 5.



Un 82% de los estudiantes comprendieron que la operación que debían utilizar era la de suma, es decir, que debían sumar 4 veces el paso del padre que en este caso era 3/4 pero el procedimiento (ver fig. 5) que aplicaron para realizar las respectiva suma no fue el correcto, porque sumaron los denominadores y no tenían que hacerlo sino que debían dejarlo igual y solo sumar los numeradores.

Con respecto a la última pregunta cabe resaltar que ninguno de los estudiantes fue capaz de resolverla, lo que se pretendía con ésta era averiguar que hacían ellos para tratar de resolverla, veamos la siguiente respuesta;

Figura 6.



Un 53% de los estudiantes sumaron varias veces las fracciones como se aprecia en la fig. 6, donde representaron lo que recorría el padre en un paso hasta que la suma de los numeradores resultara 12 sin tener en cuenta que el denominador jugaba un papel importante para obtener los 12 metros que se quería que recorrieran, es decir, no tuvieron en cuenta que los doce metros debían ser resultado de la fracción como un todo y no del numerador. A parte de esto, la suma de las fracciones no estuvo bien hecha ya que sumaron los denominadores y no debían hacerlo.

De igual manera se pudo observar que el profesor no hacia transformaciones tipo tratamiento (Duval, 2004) para explicar la temática a sus estudiantes, es decir, hacía uso del registro analítico aritmético y su mención en el lenguaje materno, y no utilizaba los otros registros que también en conjunto ayudan eficazmente a la total comprensión y asimilación de la temática, ni hacía uso de elementos del contexto para lograr así que los estudiantes le asignaran significado y sentido a los objetos estudiados y así mismo se pudo observar que el docente no interactuaba con el estudiante, se dedicaba a dar una clase expositiva, negándole la oportunidad de intervenir y participar de manera activa en la clase.

CONCLUSIONES

Los resultados preliminares de esta investigación permiten concluir que aunque los estudiantes de cuarto grado de primaria habían tenido antes experiencias con respecto a las fracciones, poseen un conocimiento bajo sobre este tema y esto incide de una u otra manera en las dificultades que tienen al resolver situaciones problemas donde las fracciones se encuentran inmersas, puesto que algunos aunque entiendan las situaciones problemas, no realizan procedimientos correctos donde las utilicen. Y otros ni siquiera son capaces de comprender las situaciones que se les plantean. Por otra parte el docente juega un papel importante dentro de esta problemática ya que al dirigir el proceso de enseñanza debe tener la capacidad de ayudar al estudiante a adquirir aprendizajes significativos y es aquí donde él debe mostrar sus competencias como profesional de la educación y como un docente comprometido con el aprendizaje de sus estudiantes. La manera en que el docente lleva a cabo la enseñanza debería modificarse un poco y permitir que el estudiante se involucre mucho más en actividades de resolución de problemas contextualizados, brindándoles a los estudiantes la oportunidad de desarrollar un pensamiento matemático robusto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Corial, M. (2001).*Didàctica de las matemàticas en la escuela primaria*. Madrid: Sìntesis.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del conocimiento.* Cali: Universidad Del Valle.

Godino, J. Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática para maestros*. Granada: Universidad de Granada.

Jonassen, D. H. (2004). Learning to solve problems. An instructional design guide. San Francisco, CA: Pfeiffer.

León, G. (2011). *Unidad didáctica: Fracciones*. Trabajo Fin de Master. Granada: Universidad de Granada.

Llinares,S. & Sanchez, M. (1988). *Fracciones: la relación parte-todo*. Sevilla: Síntesis.

Panizza, M. (2003). Conceptos bàsicos de la teorìa de situaciones didàcticas. En Panizza, M. (comp.). Enseñar matemàticas en el nivel inicial y el primer ciclo de la EGB. Mèxico: Paidòs.

Parra, M. & Flores, R. (2008). Aprendizaje cooperativo en la solución de problemas con fracciones. *Revista Educación Matemática*, 20(1), 31-52.

LA COMPRENSIÓN DE TEXTOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. UN ACERCAMIENTO COGNITIVO

Alma Alicia Benítez Pérez, Martha Leticia García Rodríguez, Alicia López Betancourt
CECyT 11 Wilfrido Massieu-IPN, ESIME Zacatenco-IPN, Universidad de Durango (México)
albenper@gmail.com, martha.garcia@gmail.com, abetalopez@gmail.com

Palabras clave: segmentación, recontextualización, representaciones, aprehensión sinóptica

Key words: Segmentation, recontextualization, representations, synoptic apprehension

RESUMEN: La presente investigación identifica las operaciones de segmentación y recontextualización en la comprensión de problemas no rutinarios en matemáticas, así como el cambio de representación para establecer el vínculo entre la comprensión del texto y el discurso explicativo. La experiencia se llevó a cabo en la unidad de aprendizaje de cálculo diferencial por alumnos de Nivel Medio Superior (16-17 años). El análisis de la producción de los alumnos se realizó a través de cuatro momentos, lo cual permitió identificar los indicadores que contribuyeron para valorar los procedimientos desarrollados. A nivel de resultados, hay un desarrollo manifiesto de capacidades y habilidades, así como la influencia del contenido cognitivo y redaccional en la comprensión de textos en matemáticas. Los registros y las transcripciones de las clases fueron analizados considerando un modelo particular de la investigación cualitativa, empírico / experimental.

ABSTRACT: This research identifies the operations of segmentation and recontextualization in the comprehension of non-routine mathematical problems, so as the representation change in order to establish a link between the text comprehension and the explanatory speech. The experience took place in a high school level at a differential calculus class (16–17 years old). Production' students was analyzed throughout 4 phases, allowing to find the indicators which helped to evaluate the developed procedures. The result exhibit a clear development of skills and abilities, was shown as well marked influence of cognitive and editorial content on comprehension of mathematical texts. The records of the lessons and the transcripts were analysed considering a very particular investigation qualitative model: empirical/experimental

INTRODUCCIÓN

El logro de la comprensión de textos en la resolución de problemas en matemáticas es uno de los mayores retos en el aprendizaje del estudiante, en este sentido la comprensión de textos adquiere un papel relevante durante el proceso.

A menudo se considera que en el acto de comprensión lectora participan diversos aspectos: por un lado la confrontación de las múltiples interpretaciones del acervo histórico y cultural de las situaciones de lectura generadas, y por otro el problema cognitivo enfocado a los procesos de producción de la comprensión durante la lectura. Es el problema cognitivo el que será abordado en el presente trabajo en el cual el lector asigna significados para dar cuenta del sentido y la valoración a su contenido.

Diversas investigaciones han enfatizado que lo importante no es únicamente el texto ni su contenido, sino la estrecha relación que se produce entre él y quien lo lee. En esta relación, la lectura es una acción intencionada en la que el lector se acerca a una texto (Johnston, 1989). Por su parte Britton y Graesser (1996), definen la comprensión lectora como un proceso dinámico de construcción de representaciones coherentes a diversos niveles de texto y de contexto. Este proceso supone que el lector elabora un modelo mental en que incorpora sus conocimientos previos y que enriquece con lo identificado en el contenido del texto, se puede entonces decir que se ha logrado un aprendizaje y se han ampliado sus conocimientos a nuevas situaciones (Rouet, 2006). Esto significa que el sujeto va construyendo una estructura mental a partir de los conocimientos que posee y de lo que el texto proporciona. Es por tanto que la construcción es única, pues cada lector seguirá una estructura diferente desde su propia experiencia enfrentando el mismo texto.

Kintsch (1998) identifica tres niveles de comprensión lectora: código superficial (el lector reconoce las relaciones lingüísticas entre las palabras incluidas en los enunciados); texto base (elaboración de una red de proposiciones semánticas) y; modelo situacional (el lector hace uso de su conocimiento previo relativo al tópico y lo integra a la red semántica establecida), cuyo planteamiento se enfoca en los procesos psicológicos, es decir, en los procesos mentales implicados durante la comprensión de textos.

En este orden de ideas Duval (1999) ha mencionado la relevancia del lector en el proceso de comprensión de textos, pero señala que se han dejado de lado otros factores que demandan la misma atención. Por ejemplo, refiriéndose a las variables redaccionales del texto, es decir la forma de explicitar el contenido cognitivo, así como las variables del lector referentes al conocimiento que se dispone con relación al contenido cognitivo del texto, la comprensión lingüística, etcétera. Sólo la relación entre estas dos variables permite llevar a cabo un análisis de los procesos de comprensión de textos. Además puntualiza la necesidad para realizar dos operaciones fundamentales; *segmentación y recontextualización de las unidades segmentadas.*

La presente investigación tuvo como propósito analizar las situaciones posibles de lectura que experimenta el estudiante de Nivel Medio Superior (NMS), para identificar el empleo de las dos operaciones fundamentales (segmentación del texto en unidades y recontextualización de las unidades segmentadas), lo que contribuye a la construcción de la representación no discursiva, siendo precisamente ésta representación la organización de la comprensión del texto, durante la resolución de problemas en matemáticas. El objetivo general fue analizar las representaciones no

discursivas cuando se emplean procedimientos de tipo deductivo durante la comprensión de textos en matemáticas, para lograrlo se planteó el siguiente objetivo específico; identificar la información que proporciona las operaciones cognitivas para plantear el tratamiento matemático en un problema no rutinario.

MARCO TEÓRICO

Duval (1999) aborda la comprensión de textos desde un enfoque cognitivo y establece la complejidad que afronta el lector cuando la organización redaccional del texto se aleja de la organización de los discursos orales espontáneos, y cuando el texto es ajeno a los conocimientos del lector, por consecuencia se presentan dificultades en su comprensión que pueden llegar a ser insuperables.

Las diferentes interacciones que se establecen entre ambas variables generan de acuerdo con Duval, situaciones de lectura diferentes, reconociendo que los procesos que conducen a la comprensión no son los mismos de una situación a otra. Duval propone una primera clasificación de las situaciones de lectura, constituida por cuatro situaciones, de la cuales solo se abordarán las situaciones 1 y 2, por así convenir a los objetivos de la presente investigación.

La situación 1, se enfoca a escenarios triviales cuya comprensión se produce simultáneamente con un recorrido visual, la cual presenta congruencia entre la organización propia del contenido cognitivo y la organización redaccional, así mismo alude a la relación entre la base de conocimientos del sujeto con el contenido cognitivo del texto.

La Situación 2 presenta el recorrido visual, pero puede provocar dudas o incomprensiones locales debido a la no congruencia entre la organización redaccional y la organización del contenido cognitivo, provocando regresos en el texto. No obstante presenta la relación entre el conocimiento del lector con el contenido cognitivo del tema que se aborda en texto. En este sentido se puntualiza la realización de operaciones fundamentales; *segmentación y recontextualización de las unidades segmentadas,* el modo de ser aplicadas varía de una situación a otra.

La segmentación de un texto en unidades es la primera operación del proceso de comprensión de textos, que son ajenos a las reglas lingüísticas, es decir a las unidades de un texto que no son ni las palabras ni las frases, son las unidades textuales de información. Hay tres tipos de procedimientos para identificar las unidades textuales de información: segmentación cognitiva, segmentación funcional y segmentación proporcional. Por otra parte la recontextualización de las unidades segmentadas unen en su totalidad las unidades de información identificadas, empleando conocimientos relativos al tópico que se aborda en el texto. Para llevar a cabo la recontextualización se tiene dos diferentes procedimientos; uno puramente cognitivo y otro redaccional.

La presente investigación considera pertinentes la segmentación cognitiva y la recontextualización cognitiva, debido a que los textos que se exploran están redactados para aplicar tratamientos matemáticos determinados a una situación del entorno económico, social o físico. A partir de esto se desprende la relevancia de la segmentación cognitiva por basarse en representaciones que son independientes a las expresiones lingüísticas y a la explicitación redaccional. La recontextualización cognitiva moviliza esencialmente los conocimientos relativos a la situación.

Desde el punto de vista de un aprendizaje de la comprensión de textos, Duval menciona la movilización explícita de la forma de segmentación y recontextualización: por un lado se tiene segmentación funcional y recontextualización redaccional y por otro segmentación cognitiva y recontextualización cognitiva. Esta última se caracteriza por emplear el proceso deductivo de comprensión, el cual parte de una base de conocimientos que corresponde al contenido cognitivo del texto, donde la comprensión de la explicitación redaccional del texto es secundaria.

Específicamente en el proceso deductivo hay una organización propia del contenido cognitivo, donde las operaciones de segmentación y recontexualización cognitiva son fundamentales, ya que depende de la selección que se realice en el texto, para identificar la información relevante que permita plantear el tratamiento matemático que se debe aplicar. Por lo que la aprehensión sinóptica requiere del cambio de representación para fortalecer la recontextualización de la información identificada o bien para enriquecer con otras relaciones el tratamiento matemático que exige la situación.

METODOLOGÍA

El propósito de la experiencia educativa fue proporcionar al estudiante diversas vivencias en la comprensión de textos y el uso de representaciones durante la resolución de problemas no rutinarios, así como el tratamiento de múltiples representaciones (gráfica, numérica, diagrama, algebraica, etcétera) que permitieron evidenciar su contenido, para re-interpretar o modificar la primera representación. La experiencia educativa se llevó a cabo con un grupo de 50 alumnos (grupo 4IM9) del CECyT No. 11 “Wilfrido Massieu” de NMS, que cursaron el cuarto semestre del ciclo escolar. Las edades de los alumnos fluctuaban entre 16-17 años.

Se impulsó la metodología de la resolución de problemas en el aula, a partir de las ideas previas del estudiante, así como la discusión en equipo y en plenaria, con la finalidad de analizar las unidades discriminadas en el texto (segmentación) y su recontextualización en las diferentes representaciones, para externar las inferencias relativas a las conjeturas que surgieron en la comprensión del texto. La observación del estudio se llevó a cabo durante un semestre escolar (18 semanas) para detectar las cualidades del fenómeno de estudios. Las observaciones en el estudio se desarrollaron a nivel local y global registrando los siguientes eventos: Bitácora del curso. Anotaciones por parte del investigador para reorganizar o bien estructurar las siguientes actividades en el aula.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

El elemento que guio el análisis fue identificar y analizar las situaciones de lectura durante el proceso de comprensión de textos en la resolución de problemas.

A continuación se muestra la actividad desarrollada y videograbada:

Los ciclistas: De dos puntos A y B que se encuentran separados una distancia de 105 km, salieron simultáneamente dos ciclistas al encuentro uno de otro. Se encontraron 1 h 45 min después de iniciado el recorrido. Cada uno siguió su camino sin detenerse. Después de 3 min del encuentro el primer ciclista que iba a 40 km/h, se encontró con otro ciclista que venía a su encuentro por el mismo camino. El tercer ciclista luego de encontrarse con el primero, continuó su camino sin

detenerse y alcanzó al segundo ciclista en el punto C, en el cual se hubiera encontrado el primer y el segundo ciclista, si la velocidad del primero hubiera sido 20 km/h menos y la del segundo 2 km/h más de la original.

Durante el análisis de las actividades se identificaron cuatro momentos:

- El primer momento referido a la segmentación del texto; cognitiva (representaciones independientes del texto) y redaccional (se apega a la redacción del texto).
- El segundo momento se enfocó a la recontextualización, la cual puede ser cognitiva (relativa al conocimiento de la situación, siendo independiente de la organización redaccional) o redaccional (explícita todas las relaciones que tienen entre sí las unidades discriminadas).
- El tercer momento se presentó en la aprehensión sinóptica, integración de las unidades obtenidas por segmentación para ser organizadas a nivel redaccional o cognitiva.
- El cuarto momento descubrimiento de nueva información y reformulación del problema original, para enriquecer la representación o bien para re-interpretar la situación.

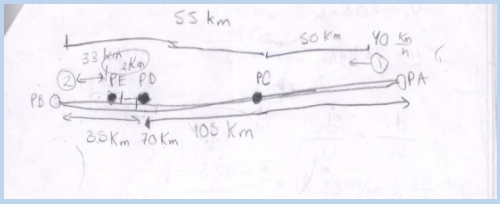
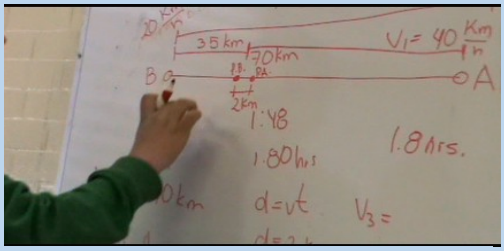
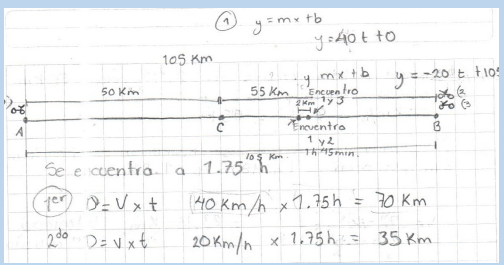
El problema se planteó al inicio de la sesión, y se abordó desde las ideas previas de los alumnos, para analizar las dos operaciones; segmentación y recontextualización durante la comprensión del texto y la construcción de la primera representación en la resolución del problema. Cabe aclarar que el problema puede ser abordado desde la aritmética, no obstante la riqueza que presenta en la estructura del texto permitió exploran cada una de los momentos descritos anteriormente.

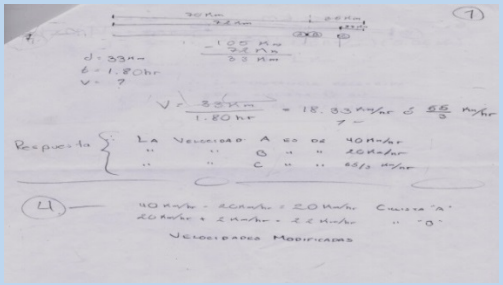
Procedimientos de análisis

El acopio de datos se realizó con base en el análisis y discusión del trabajo desarrollado por los equipos durante el desarrollo de la actividad. El análisis de la videograbación, el trabajo escrito por el equipo, así como las notas del investigador, muestran los cuatros momentos que los estudiantes experimentaron en la situación. Para el análisis de los datos se exploraron los diferentes momentos que motivaron la reflexión del objeto de estudio. A continuación se expone el análisis (Ver cuadro 1).

Cuadro 1. Comprensión de textos en la resolución de problemas no rutinarios. (Creación propia)

Momentos	Descripción	
1.- Segmentación	La segmentación del texto fue de tipo redaccional apegado al texto, del cual se identificaron cuatro episodios:	
	1	La separación de los ciclistas A y B, y su encuentro después de 1 h 45 min.
	2	El primer ciclista, después de tres minutos de haberse encontrado con el segundo en el punto M, se encontró con un tercer ciclista que venía al encuentro.
	3	El tercer ciclista, luego de haberse encontrado con el primero en el punto D, continuó su camino sin detenerse y alcanzó al segundo ciclista en el punto C.
	4	Del punto M salió el segundo ciclista a una velocidad de 20 km/h, y 3 min después del punto D, que se encuentra 2 km atrás de M, salió en su persecución el tercer ciclista, quien lo alcanzó en el punto C, 20 km adelante del punto M.

2.- Recontextualización	Cada uno de los episodios presentó la recontextualización de la segmentación desde la organización cognitiva y redaccional.		
	1	La recontextualizacion del primer episodio articuló la velocidad del ciclista A para determinar la distancia AM y con ello la velocidad y distancia del segundo ciclista. Información que movilizó conocimiento independiente a la organización redaccional.	
	2	La recontextualización del segundo episodio articuló el tiempo y la velocidad del ciclista A entre los puntos M y D para determinar la distancia MD.	
	3	La recontextualización de la situación consideró el supuesto del punto C, en el cual se hubieran encontrado el primero y segundo si la velocidad del primero hubiera sido de 20 km/h, y la velocidad del segundo 2 km/h mayor, con base en este supuesto los estudiantes determinaron el tiempo de encuentro y la ubicación del punto C. Información que movilizó conocimiento independiente a la organización redaccional.	
	4	La recontextualización articuló la distancia recorrida en 3 minutos por el ciclista B (1 km) para determinar su distancia hasta el punto C, en dicho tiempo el ciclista C recorrió la distancia DC y con ello determinar la velocidad del tercer ciclista.	
3.- Aprehensión Sinóptica	Cada una de las representaciones expuestas presenta la reconceptualización que el equipo estructuró para mostrar la articulación de la segmentación durante la comprensión del texto.		
	1		1) Velocidad ciclista A 2) Distancia del ciclista A y el punto M, de encuentro entre los ciclistas A y B 3) Velocidad del ciclista B
	2		1) Encuentro entre los ciclistas A y C (punto M) 2) Tiempo y velocidad del ciclista A entre los puntos M y D 3) Distancia MD
	3		1) Velocidades modificadas (condición del problema) 2) Tiempo de encuentro en el punto C y distancia MC del primer lugar de encuentro

	4		1) Distancia recorrida del ciclista B en 3 min 2) Velocidad del ciclista C
4.- Descubrimiento de nueva información	La exploración de las representaciones contribuyó a la articulación de las unidades discriminadas en el texto, así como aquellas unidades más distantes, para el descubrimiento de nueva información. El empleo de las representaciones contribuyó en la aplicación de tratamientos matemáticos, con base en la selección de la información necesaria para ser explicitada desde el contenido cognición de la situación. Este pasaje del uso de la representación benefició para establecer un puente entre el texto que quiere ser comprendido y el discurso que lo explica.		

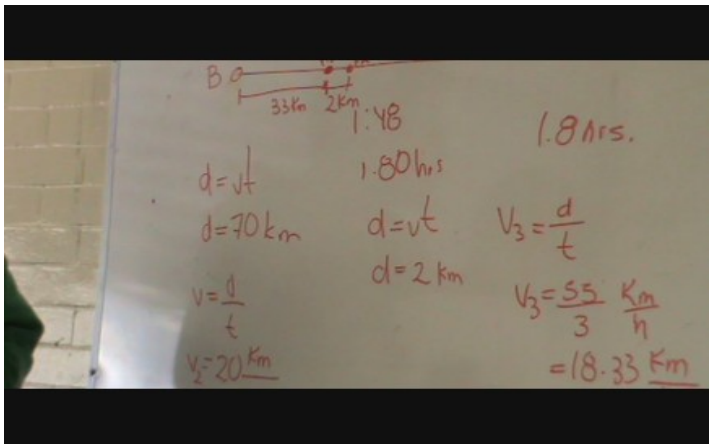
No obstante, el equipo presentó variaciones en la comprensión del texto, por ser un problema no rutinario influenciado por la redacción del texto, en cuanto a la explicitación del contenido cognitivo, y por otro lado el conocimiento que el equipo poseía en relación con el contenido cognitivo del texto. Las características identificadas durante el desarrollo del problema permitió determinar que los equipos presentaron rasgos distintivos de los expuestos en la tercera situación, en la cual los equipos se enfocaron en la aprehensión de la organización redaccional del texto, para ser abordado por procesos inductivos de comprensión, es decir, los equipos recurrieron al reconocimiento de la unidades textuales como fue: posición de los ciclistas A y B, posición del ciclista A tres minutos después de haberse encontrado con el ciclista B en el punto M, y la posición del ciclista C luego de haberse encontrado con el ciclista A continuó su camino y alcanzó al ciclista B.

Concediendo el acceso al contenido cognitivo, a través de la exploración, identificación y análisis detallado del texto, y eventualmente se presentó el retroceso a pasajes que contribuían a la compresión del texto, principalmente durante el episodio 3, cuando el problema menciona el punto de contacto C, es el punto en cual se hubieran encontrado los ciclistas A y B , siempre que la velocidad del ciclista A hubiera sido menor que la original y la velocidad del ciclista B mayor, evidenciando la necesidad del manejo semántico y sintáctico del lenguaje para poder acceder a la comprensión del texto. Sin embargo este dominio no bastó para la comprensión y la resolución del problema, fue necesario llevar a cabo tratamientos paralelos para cada episodio, por ejemplo; dibujos, esquemas, gráficas, etcétera (ver figura 1). La participación del equipo mostró el tratamiento y expuso su explicación con base en la representación diseñada;

> **Fernando**. Para el tercer ciclista tenemos un tiempo que es de 1.8 hrs, por que el tercero salió del mismo punto del segundo ya que se encontró con el primero, entonces nos faltaría la distancia, que también ya la tenemos porque ya sabemos que esto mide 35 km si le restamos 2 km la diferencia del punto

de encuentro del segundo con el tercero, nos va a dar el total que esto mide 33 km por lo tanto nos dice que recorrió 33 km en 1.8 hrs, entonces tenemos distancia y tiempo, haciendo cálculos esto nos va a dar 55/3 km/h, bueno es 18.33 km/h, lo dejamos en fracción para dejarlo exacto.

Figura 1. Esquema elaborado por el equipo



Tratamientos que contribuyeron para identificar el contenido en el texto y no son explícitos en el mismo, pues son organizaciones que forman parte de la base de conocimientos del estudiante.

Principales hallazgos

- Durante el diseño de las actividades fue esencial puntualizar el contenido cognitivo en los textos, para favorecer el pensamiento flexible, pues fue evidente, la tendencia a quedar sujetos a los contextos, en los cuales se presentaban las ideas matemáticas.
- El proceso de aprendizaje durante la segmentación para la comprensión de texto, sufrió altas y bajas, principalmente en las actividades para construir o interpretar las situaciones que se planteaban.
- La recontextualización de las unidades identificadas por el equipos mostró dificultades en cuanto a su articulación, lo que originó regresar constantemente a re-leer los episodios.
- Las representaciones empleadas fueron diagramas y gráficas, cuyo tratamiento fue determinado por la elección de la información necesaria en el texto para su explicación.
- La construcción de las representaciones empleadas estuvieron influenciadas por el contenido cognitivo que se trataba de representar.
- Para el aprendizaje de la comprensión de textos en matemáticas, es preciso considerar en primer lugar la segmentación de un texto en unidades textuales y, recontextualizar las unidades segmentadas a través del cambio de representación (diagrama, gráfica, dibujo etc.), para construir el vínculo necesario entre el texto que se quiere comprender y el discurso de su explicación.

- La manera en que se organizaron las actividades durante el curso, es decir trabajo en equipo, exposiciones y discusión grupal, fueron elementos que aportaron para que el alumno pudiera exponer sus ideas y conjeturas, desde la inferencia.

Agradecimientos. Los autores agradecen el apoyo otorgado por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, a través de las investigaciones con números de registro 20141195 y 20130873

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Britton, B. y Graesser, A. (1996). *Models of Understanding Text.* Nahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Colombia: Peter Lang.

Johnston, P. (1989). *La evaluación de la comprensión lectora. Un enfoque cognitivo*. Madrid: Visor.

Kintsch, W. (1998). *Comprehension: A paradigm for cognition*. Cambridge: Cambridge University Press.

Maqueo, A. M. (2004). *Lengua, aprendizaje y enseñanza. El enfoque comunicativo: de la teoría a la práctica.* México: UNAM/Limusa.

Monroy, J., Gómez, B. (2009). Comprensión Lectora. *Revista Mexicana de Orientación Educativa*, *6* (16), 37-42.

Paradiso, J. (2006). *Textos y cognición. Tipologías textuales, estructuras, cognitivismo.* Recuperado el 26 de marzo de 2016 de: http://www.espacioblog.com/yoniparadiso

Partido, M. (2 de abril de 2003). *Lectura y práctica docente: Un acercamiento.* Recuperado de www.uv.mx/cpue/coleccion/n_2526/pubmari.htm

Rouet, J. (2006). *The skills of document use: From text comprehension to Webbased learning.* Mahwah: Erlbaum.

Vega, L., Bañales, G. y Reyna, A. (2003). La comprensión de múltiples documentos en la universidad. El reto de formar lectores competentes. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 18* (57), 461-481.

UN ACERCAMIENTO AL RAZONAMIENTO INFERENCIAL DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Jesús Guadalupe Lugo Armenta, Enrique Hugues Galindo, Irma Nancy Larios Rodríguez
Universidad de Sonora (México)
lupitalugo_@hotmail.com, ehugues@mat.uson.mx, nancy@mat.uson.mx

Palabras clave: razonamiento inferencial informal, conocimiento informal, razonamiento informal, inferencia estadística

Key words: informal inferential reasoning, informal knowledge, informal reasoning, statistical inference

RESUMEN: En el presente artículo se describe un primer acercamiento al Razonamiento Inferencial Informal (RII) de estudiantes universitarios, teniendo como marco conceptual y metodológico propuestas hechas por Zieffler, Garfield, DelMas y Reading (2008). Este es un esfuerzo que forma parte del abordaje al problema de investigación: ¿En qué medida los estudiantes universitarios desarrollan y hacen uso de un Razonamiento Inferencial Informal? Se reportan resultados obtenidos al explorar un cuestionario diseñado para indagar algunos aspectos de lo que aquí es llamado RII, realizando un análisis que intenta caracterizar niveles de razonamiento utilizando como herramientas una adaptación de los niveles de lectura introducidos por Curcio (1989) y en el modelo taxonómico SOLO desarrollado por Biggs y Collins (1982).

ABSTRACT: This paper describes a first approach to university student's informal inferential reasoning (IIR), using a conceptual framework and methodological proposals made by Zieffler, Garfield, DelMas y Reading (2008). This is an effort that is part of the approach to the research question: To what degree university students develop and use informal inferential reasoning? Presents the results by exploring to questionnaire designed to investigate some aspects of what is here called IIR, the analysis trying to characterize levels of reasoning using as tools an adaptation of reading levels introduced by Curcio (1989) and the taxonomic model SOLO developed by Biggs and Collins (1982).

INTRODUCCIÓN

En los últimos años la Estadística ha venido adquiriendo mayor importancia para la sociedad, debido a que sus desarrollos y diversas aplicaciones han mostrado su capacidad para convertirse en un medio adecuado para modelar fenómenos y contribuir a la solución de diversos problemas científicos, tecnológicos, económicos y sociales. Actualmente se produce un sinfín de datos y, particularmente, informes sobre estos son difundidos por los medios de comunicación, como sería el caso de aquellos que provienen de encuestas que forman opinión o llevan a la toma de decisiones. Pero comprender esos informes no es tarea fácil para un individuo, ya que plantea disponer de conocimiento y habilidades que lo capaciten para valorar la generación, el análisis y la interpretación de información en diversas situaciones, así como la capacidad de examinar objetiva y críticamente las inferencias estadísticas que esos procesos producen, mismas que asumen un papel fundamental pues representan la esencia y fin último de la Estadística.

Frente a esto, resulta congruente e importante que los diferentes niveles educativos contemplen curricularmente la educación estadística. Sin embargo, en nuestro país, la revisión de dichos currículos arroja que no es sino hasta el nivel superior que algunos estudiantes entran en contacto con tópicos específicos de la Estadística Inferencial, aun cuando ésta pueda considerarse el central para la Estadística y lo que le da sentido, ya que constituye la fase que guía el análisis de datos y que permite juicios y toma de decisiones en los estudios estadísticos, lo que frecuentemente no es bien comprendido. De acuerdo con David Moore la inferencia estadística "va más allá de los datos disponibles y obtiene conclusiones sobre un universo más amplio, teniendo en cuenta la omnipresencia de la variabilidad y la incertidumbre de las conclusiones" (Moore, 2000, p. XXXIV). Adicionalmente diversos autores (Zieffler, Garfield, DelMas y Reading, 2008) han venido señalando la existencia de serias dificultades para lograr que los estudiantes desarrollen las capacidades necesarias para realizar y analizar críticamente inferencias estadísticas. Dificultades que se han visto fuertemente vinculadas a la falta de comprensión de antecedentes de la Estadística Inferencial, muy especialmente un conjunto de formas de proceder anticipando algunos aspectos de la inferencia estadística que denominamos: Razonamiento Inferencial Informal (RII); y que pueden ser desarrolladas previo a la instrucción en Estadística Inferencial pues no involucra a sus conceptos y técnicas. El RII en los estudiantes universitarios nos parece sumamente importante ya que integra conocimiento estadístico, y no estadístico, para realizar inferencias con base estadística, fomentando el sentido a sus elaboraciones estadísticas. Por lo anterior es que nos hemos propuesto abordar el problema de investigación: ¿En qué medida los estudiantes universitarios desarrollan y hacen uso de un Razonamiento Inferencial Informal?

Precisando que se aborda el problema restringiendo el escenario a estudiantes de carreras del área de Ciencias Sociales y haciendo uso de herramientas de indagación acordes al marco de trabajo propuesto por Zieffler et al (2008). Además, tomando en cuenta que la mayoría de los estudiantes, en este contexto no entrarán en contacto con la Estadística Inferencial y sus fundamentos, no se considerará la medición o expresión de grado de incertidumbre al hacer inferencias.

MARCO CONCEPTUAL

Entendemos por marco conceptual los principales conceptos o elementos que se encuentran involucrados en la problemática de investigación y que son indispensables para emprender y/o

comprender su estudio. En esta investigación destacamos los siguientes: el RII, las tres tareas propuestas por Zieffler et al. (2008), los Niveles de lectura de Curcio (1989) y la Taxonomía SOLO de Biggs y Collins (1982).

El razonamiento inferencial informal

Zieffler et al (2008) destacan como importantes componentes del RII al conocimiento informal y al razonamiento informal, que en cierta medida son cercanos y se encuentran parcialmente involucrados en él. Y definen al RII como

"la forma en la cual los estudiantes usan su conocimiento estadístico informal para hacer argumentos que apoyen las inferencias acerca de poblaciones desconocidas basados sobre muestras observadas" (p.44), definición que hemos adoptado en este trabajo, precisando que aquí entenderemos conocimiento estadístico informal como el cúmulo de conocimientos estadísticos que poseen los estudiantes previamente a su contacto con la Estadística Inferencial.

Las tres tareas centrales

Una de las nociones con mayor relevancia en el proyecto son lo que llamamos "las tres tareas centrales" para evaluar el RII, las cuales fueron propuestas por Zieffler et al (2008): "1. Estimar y graficar una población basados en una muestra;

2. Comparar dos o más muestras de datos para inferir si existe una verdadera diferencia entre las poblaciones de las que se obtuvieron las muestras, y

3. Juzgar cuál de dos modelos en competencia o afirmaciones es más probable sea el verdadero" (p. 47).

Tareas que se perciben como centrales para indagar acerca del RII como un proceso que incluye las siguientes capacidades para razonar acerca de:

- Las posibles características de una población basado en una muestra de datos.
- Las posibles diferencias entre dos poblaciones basado en las diferencias observadas entre dos muestras de datos.
- Sí o no una muestra particular de datos es probable dada una expectativa en particular.

Niveles de lectura

Consideramos importante incluir los niveles de lectura propuestos por Curcio (1989), para gráficos, pues creemos que las tareas que implican leer una gráfica o una situación que incluye una gráfica, suelen estar involucradas en una etapa inicial del RII y concretamente:

> (a) Leer los datos: este nivel de comprensión requiere una lectura literal del gráfico; no se realiza interpretación de la información contenida en el mismo.
>
> (b) Leer dentro de los datos: incluye la interpretación e integración de los datos en el gráfico; requiere la habilidad para comparar cantidades y el uso de otros conceptos y destrezas matemáticas.
>
> (c) Leer más allá de los datos: requiere que el lector realice predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se refleja directamente en el gráfico. (Batanero, Godino, Green, Holmes & Vallecillos, 1994, p. 529)

En el 2001 Friel, Curcio y Bright amplían los niveles anteriores, añadiendo uno nuevo:

(d) Leer detrás de los datos: consistente en valorar críticamente el método de recogida de datos, su validez y fiabilidad de extensión de las conclusiones. (Arteaga, Batanero, Cañadas & Contreras, 2011, p. 60)

Taxonomía SOLO

Considerando que "la comprensión se desarrolla poco a poco, haciéndose cada vez más estructurada y articulada" (Biggs, 1999, p.60), se ha propuesto la taxonomía SOLO (Structure of Observed Learning Outcomes) como referente para clasificar los avances de las personas en alguna comprensión determinada. Este modelo, desarrollado por Biggs y Collins (1982), plantea cinco niveles de comprensión, agrupados en dos fases: cuantitativa y cualitativa. Los niveles ubicados en la fase cuantitativa se presentan mientras la persona enfrenta un tema nuevo y son: preestructural, uniestructural y multiestructural, mientras que un avance o refinamiento de estas comprensiones es ubicada en la fase cualitativa, en tal caso los niveles de comprensión: relacional y abstracto ampliado.

Así mismo consideramos la existencia de una íntima relación entre la comprensión y el razonamiento, ya que la primera puede ser vista como producto del segundo pero éste es un proceso que hace uso de comprensiones (conocimientos y habilidades), esta taxonomía suele ser utilizada también para clasificar el proceso de razonamiento en niveles. Así, llevando el modelo Taxonómico SOLO al contexto de nuestro proyecto, hemos realizado una adaptación de éste para clasificar diferentes niveles alcanzados por las personas en el RII, la cual presentamos a continuación en la tabla 1:

Tabla 1. Niveles de la Taxonomía SOLO en el RII

Niveles de la Taxonomía SOLO en el Razonamiento Inferencial Informal
Nivel Preestructural
No plantea conclusión alguna o plantea una errónea, pudiendo hacer referencia a conceptos estadísticos y a datos de la situación, pero no llegan a concretar sus ideas.
Nivel Uniestructural
Plantea una conclusión, pudiendo hacer referencia a algún concepto estadístico y dato acorde a la situación, pero aún no generaliza.
Nivel Multiestructural
Plantea una conclusión y/o inferencia, haciendo referencia a dos o más datos de la situación y conceptos estadísticos involucrados pero sin conectarlos.
Nivel Relacional
Plantea una conclusión y/o inferencia realizando una conexión de todos los datos involucrados en la situación así como de los conceptos y propiedades estadísticas.
Nivel Abstracto Ampliado
Plantea una conclusión y/o inferencia realizando las conexiones necesarias, pero además genera hipótesis y reflexiones acerca de la problemática.

Como mencionamos anteriormente, este modelo supone que la comprensión se desarrolla poco a poco, de modo que entonces podemos decir que los niveles, además de ser sucesivos, se superponen unos a otros.

METODOLOGÍA

El método que sigue nuestra investigación es de carácter cualitativo y descriptivo, toda vez que pretendemos observar el RII de estudiantes universitarios en carreras de ciencias sociales a su paso por un curso de Estadística en la Universidad de Sonora, analizarlo y clasificarlo, para finalmente interpretar su grado de desarrollo.

Los sujetos participantes en el estudio que aquí se reporta fueron 24 alumnos del curso de Estadística Descriptiva en la carrera de Licenciatura en Derecho, perteneciente al área de Ciencias Sociales de la Universidad de Sonora, aunque los antecedentes de los alumnos son variados, predominan aquellos que han llevado cursos de Estadística, pero no inferencia estadística, previo a su formación universitaria.

El diseño del cuestionario está dirigido por los elementos que componen el marco conceptual de nuestro proyecto y se estructuró a través de cuatro situaciones, en las cuales se originan preguntas enfocadas a los propósitos de cada una de ellas, los que se describen a continuación:

Situación 1. Identificar la habilidad de los estudiantes para el manejo del lenguaje y las posibles relaciones entre muestra y población.

Situación 2. Identificar la habilidad del estudiante para hacer juicios, afirmaciones, o predicciones acerca de una población basados en una muestra.

Situación 3. Identificar la habilidad del estudiante para describir las posibles diferencias entre dos poblaciones basado en las diferencias observadas entre dos muestras.

Situación 4. Identificar la habilidad del estudiante para decidir y argumentar sí o no una muestra de datos es probable dada una expectativa inicial.

Para caracterizar el RII de los alumnos a partir de sus respuestas a cuestionarios nos apoyamos en el modelo taxonómico SOLO y los niveles de lectura, ambos descritos en el marco conceptual.

RESULTADOS DE PRIMER ACERCAMIENTO

Las preguntan que integran el cuestionario son abiertas, se asocian con algunas de las situaciones y en la tabla 2 se muestran tanto los propósitos de la situación como de sus preguntas correspondientes.

Tabla 2. Propósitos de situaciones problema y de sus respectivas preguntas

Propósito de la Situación problema		Propósito de la Pregunta	
1	Identificar la habilidad de los estudiantes para el manejo del lenguaje y las posibles relaciones entre muestra y población.	1	Distinguir entre población y muestra
		2	Distinguir entre población y muestra
		3	Lectura de gráfica (se puede ubicar en los cuatro niveles de lectura)
		4	Lectura de gráfica (leer los datos)
		5	Inferir acerca de la población
		6	Lectura de gráfica (leer los datos)
		7	Lectura de gráfica (leer dentro de los datos)
		8	Lectura de gráfica (leer los datos)
		9	Inferir acerca de la población
2	Identificar la habilidad del estudiante para hacer juicios, afirmaciones, o predicciones acerca de una población basados en una muestra.	1	Responde en base a la muestra o a la población
		2	Identificar la relación entre dos muestra de la misma población y hacer inferencias
		3,1	Identificar la relación muestra-población y hacer inferencias
		3,2	Identificar la relación muestra-población y hacer inferencias
		4	Diferencia entre muestras de la misma población
3	Identificar la habilidad del estudiante para describir las posibles diferencias entre dos poblaciones basado en las diferencias observadas entre dos muestras.	1	Lectura de gráfica (se puede ubicar en los cuatro niveles de lectura)
		2	Distinguir entre población y muestra
		3	Diferencia entre las poblaciones argumentando acerca de la media y la dispersión
		4	Diferencia entre las poblaciones argumentando acerca de la media y la dispersión
4	Identificar la habilidad del estudiante para decidir y argumentar sí o no una muestra de datos es probable dada una expectativa inicial.	1	Lectura de gráfica (se puede ubicar en los cuatro niveles de lectura)
		2	Comparar gráfica de la muestra con grafica de la distribución
		3	Comparar muestras
		4	Comparar gráfica de la muestra con grafica de la distribución
		5	Concluir cuál muestra es más probable en base a los elementos presentados

Las respuestas que los alumnos dieron a cada una de las preguntas se analizan y categorizan de acuerdo a los niveles del modelo taxonómico SOLO y a los niveles de lectura (los cuales se describieron previamente en el marco conceptual).

Por niveles de lectura

La categorización de respuestas al cuestionario por niveles de lectura se resumen en la tabla 3:

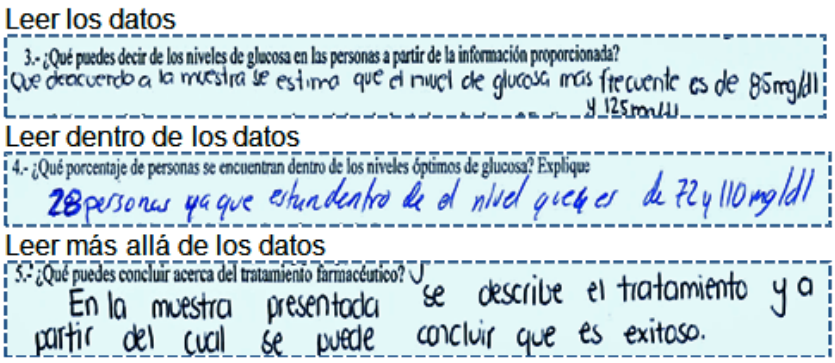
Tabla 3. Resultados por niveles de lectura

Situación problema	Pregunta	Niveles				
		Leer los datos	Leer dentro de los datos	Leer más allá de los datos	Leer detrás de los datos	Ninguno
1	1	11	0	0	0	13
	2	12	0	0	0	12
	3	16	0	0	0	8
	4	11	2	0	0	11
	5	12	1	3	0	8
	6	10	0	0	0	14
	7	3	0	0	0	21
	8	12	0	0	0	12
	9	8	0	2	0	14
2	1	17	5	0	0	2
3	1	14	2	0	0	8
4	1	15	3	0	0	6

Estos resultados acerca de la lectura de datos por los alumnos, muestra que en resumen el 51% lee los datos, mientras que el 42% ni siquiera es capaz de leerlos y también destaca que ningún alumno realizó lectura detrás de los datos.

Algunas respuestas que dieron los alumnos en cada nivel de lectura se muestran en la imagen 1

Imagen 1. Respuestas de los alumnos por niveles de lectura



Con este tipo de cuestionamientos se pretende identificar el conocimiento informal y la intervención del razonamiento inferencial, involucrados en el RII aunque vinculados con la lectura de la información proporcionada, pero los alumnos presentaron dificultades para realizar una lectura adecuada de los datos en los diferentes niveles y se destaca que sólo el 5% de los alumnos realizó una lectura dentro de los datos y un 2% más allá de los datos.

Por niveles del modelo taxonómico SOLO

En la tabla 4 se resume la categorización de respuestas al cuestionario por niveles del modelo taxonómico SOLO, estando ausente de este análisis la situación problema uno, debido a que ésta ha sido diseñada para obtener información acerca de las habilidades de lectura de datos de los alumnos:

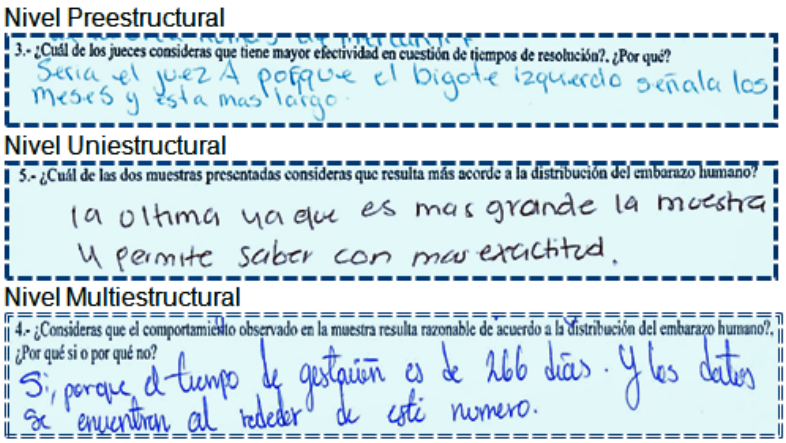
Tabla 4. Resultados por niveles del modelo taxonómico SOLO

Situación problema	Pregunta	Niveles				
		Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional	Abstracto ampliado
2	2	8	12	4	0	0
	3,1	15	6	3	0	0
	3,2	14	6	4	0	0
	4	13	9	2	0	0
3	2	21	3	0	0	0
	3	7	15	2	0	0
	4	8	12	4	0	0
4	2	17	7	0	0	0
	3	12	12	0	0	0
	4	6	15	3	0	0
	5	5	17	2	0	0

De la tabla 4 se destaca que el 48% se encuentra en un nivel preestructural, un 43% en el nivel uniestructural, mientras que sólo el 9% se ubica en el nivel multiestructural, estando ausentes razonamientos en niveles posteriores.

Algunas respuestas que dieron los alumnos en cada nivel se muestran en la imagen 2:

Imagen 2. Respuestas de los alumnos por niveles del modelo taxonómico SOLO



Como puede verse la mayoría de los alumnos se ubica en los dos primeros niveles indicando un razonamiento estadístico pobre. Con todo y que los conceptos estadísticos involucrados (medidas de tendencia central, medidas de dispersión, muestra, población, aleatoriedad) son accesibles de acuerdo a su nivel académico.

CONCLUSIONES

Los resultados de este primer acercamiento muestran las serias dificultades que presentan los alumnos tanto para realizar una adecuada lectura de datos como para integrar ésta con la comprensión de los conceptos estadísticos y el razonamiento estadístico, a fin de realizar inferencias.

A pesar de que los alumnos mostraron confianza en sus respuestas en la situación problema uno, un alto porcentaje no alcanzo el nivel inferior de lectura de datos.

Conforme avanza el cuestionario podemos observar que las respuestas se van viendo disminuidas al igual que su calidad. Siendo la actividad que mayor reto presentó a los alumnos la de comparar dos muestras de datos de la misma población para decidir cuál es la más probable dada una expectativa inicial. Como resultado de ello la mayoría de los alumnos se ubicó en los dos niveles inferiores del modelo taxonómico SOLO.

Finalmente, es importante señalar que los alumnos se encuentran en niveles bajos de los aspectos del RII abordados en este trabajo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Biggs, J. B., Collins, K. F. (1982). Evaluating the Quality of Learning: The taxonomy. New York: Academic Press. (Citado en Biggs, J.B. (1999). *Teaching for Quality Learning at University* (2da ed.), 60)

Curcio, F. R. (1989). Developing graph comprehension. Reston, VA: N.C.T.M. (Citado en Batanero C., Godino J.D., Green D.R., Holmes P. & Vallecillos A. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547)

Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education* 32(2), 124-158. (Citado en Arteaga P., Batanero C., Cañadas G. & Contreras J.M. (2011). Las Tablas y Gráficos Estadísticos como Objetos Culturales. *NÚMEROS Revista de Didáctica de las Matemáticas*; V76, 55-67)

Moore, D. S. (2000). Estadística aplicada básica (2da ed.). Barcelona: A. Bosh

Zieffler, A., Garfield, J., DelMas, R., & Reading, C. (2008). A Framework to Support research on Informal Inferential Reasoning. (P. Petocz, & T. Short, Edits.) *International Association for Statistical Education* (IASE/ISI), VII(2), 40-58.

ARGUMENTACIONES EN EL AULA DE MATEMÁTICA. LA ESTRATEGIA DE INDUCCIÓN COMPLETA

Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González", Instituto Nacional Superior del Profesorado Técnico. Buenos Aires. (Argentina,)
crccrespo@gmail.com

Palabras clave: inducción completa, demostración, error, formalización

Key words: mathematical induction, proof, error, formalizing

RESUMEN: Las demostraciones por inducción completa o inducción matemática, introducidas y aplicadas desde cursos elementales de álgebra en nivel superior, son aplicables a distintas áreas de la matemática. A pesar de que los estudiantes las aplican correctamente en muchos casos, a veces lo hacen de manera mecánica y sin comprender su significado, reduciéndolas a algoritmia y cometiendo, en oportunidades, errores en su aplicación sin poder interpretar sus alcances. Proponemos reflexionar acerca de la forma de argumentación por inducción completa, sus orígenes y fundamentación en la historia de la matemática, sus alcances y algunas de las dificultades y errores en su aplicación.

ABSTRACT: Proofs of mathematical induction presented and used since the first courses of elementary algebra in higher education can be used for different areas within Mathematics. Even though students can apply them correctly in many situations, sometimes their work is mechanic and does not imply the complete understanding of its meaning, narrowing down this activity to an algorithmic process; and occasionally provoking mistakes they cannot anticipate or perceive the extent it will take them to. We propose to thoroughly consider this method for proofs, its origins and foundations in Math's History, its scope and some of the difficulties and mistakes on its application.

LAS DEMOSTRACIONES POR INDUCCIÓN COMPLETA O POR RECURRENCIA

En la mayoría de los cursos elementales de álgebra del nivel superior, están presentes las demostraciones por inducción completa al abordar propiedades de los números naturales. Posteriormente en cursos superiores de las carreras matemáticas, esta estrategia de argumentación es retomada y aplicada. Se encuentra presente en el discurso matemático escolar y su nombre se debe a que tiene cierta similitud con los procesos inductivos característicos de las ciencias experimentales, aunque posee un carácter deductivo.

La aplicación usual de este método consiste en verificar que la propiedad que se desea demostrar primeramente el caso base, o sea que la propiedad es cumplida por el primer elemento de un conjunto, usualmente el cero, y luego partiendo de la suposición de que un número n la verifica (hipótesis inductiva), se prueba que también la cumple su siguiente o sucesor (tesis inductiva). A esta etapa del proceso, se la denomina paso inductivo. De esta manera y a partir de los dos pasos anteriores, se afirma que todos los elementos del conjunto considerado a partir del primero, verifican la propiedad. Este método de demostración suele ser aplicado para teoremas de la aritmética y teoría de números, donde su importancia es capital, pero también es aplicable a propiedades, por ejemplo, geométricas tanto métricas como topológicas en las que aparezca una variable que tome cualquier valor natural.

Los estudiantes las aplican correctamente en muchos casos y adquieren manejo con su algoritmia, pero lo hacen de manera mecánica y no comprenden su esencia.

Este trabajo, que forma parte de una investigación en la línea de la construcción social del conocimiento con enfoque socioepistemológico, centrada en analizar las características del discurso matemático escolar, en particular en relación con las formas de argumentar y el lenguaje que utilizado en el aula de matemática. En esta oportunidad, se analizan casos en que la aplicación por parte de los estudiantes de la estrategia de inducción completa no es correcta y denota que en su afán por realizar demostraciones formales de propiedades matemáticas, no tienen en cuenta su aplicabilidad y significación. Consideramos necesario de que los estudiantes comprendan su significado y limitaciones, y para ello se presentan algunos ejemplos que permiten resignificar la inducción completa.

INDUCCIÓN COMPLETA. SU PRESENCIA EN LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA

El método de inducción completa es aplicable a conjuntos bien ordenados, o sea a aquellos conjuntos no vacíos en los que se ha definido una relación de orden total y que además verifican que todo subconjunto no vacío posee un primer elemento para dicho orden.

El primero en utilizar el término “inducción” con el sentido de “llevar hacia” o “ser conducido”, fue Aristóteles. Se refería al tipo de razonamiento en el que se concluye de una afirmación particular otra universal. Este es el sentido que se le da en las ciencias experimentales y que fuera analizado por Francis Bacon y, posteriormente, por David Hume y John Stuart Mill. Sin embargo su presencia en la matemática es anterior. En la India, Bhaskara I (600–680d.C.) realiza una demostración que utiliza argumentaciones que pueden ser reconocidas como el germen de la inducción completa para la prueba de la infinidad de los números primos. También en la matemática árabe está presente la inducción completa de una manera no rigurosa, en la obra de Al-Karaji (953-1029d.C.) y Samau‘al al Maghribi (1130-1180d.C.) (Cajori, 1918).

Gersomides (1288-1344), utilizó este tipo de argumentación de manera no formal en la deducción de la manera de calcular el número de permutaciones de un conjunto de elementos diferentes. Francesco Maurolico (1494-1575), realiza la primera exposición rigurosa de este método 1575 en Arithmeticorum Libri Duo, aunque no usa el término inducción para denotar este proceso. Este método fue expuesto por Blas Pascal (1623-1662) con claridad. Lo utilizó para demostrar propiedades del triángulo que lleva su nombre. De Morgan (1806-1871) describió el proceso cuidadosamente y fue el primero en denominar este proceso como "inducción matemática" en el siglo XIX.

Su fundamento lógico se encuentra en la axiomática de Giuseppe Peano para los números naturales, basada en las siguientes ideas:

Se parte de ciertos conceptos primitivos, como un conjunto de elementos llamado N (naturales), y un elemento llamado cero (0) y una relación definida dentro de N como *"es siguiente de"* (sg).

Los cinco axiomas que presenta Peano para definir los números naturales, son:

Ax1) 0 pertenece a N

Ax2) Si x pertenece a N entonces sg(x) pertenece a N y es único.

Ax3) Si x e y pertenecen a N y sg(x)=sg(y) entonces x=y.

Ax4) 0 no es siguiente de ningún elemento de N.

Ax5) Si Q es un subconjunto de N que verifica:

a) 0 pertenece a Q

b) Si x pertenece a Q entonces sg(x) pertenece a Q

Entonces, Q=N

Estos axiomas dan origen a la definición de número natural basada fundamentalmente en la propiedad de ordinalidad. El quinto axioma es conocido como Principio de Inducción Completa y es utilizado con frecuencia para demostrar propiedades de los números naturales.

El principio de inducción completa presenta algunas formas alternativas equivalentes. Entre ellas podemos citar el Principio de inducción fuerte, que afirma:

Sean n_o, n_1 números naturales tales que $n_o < n_1$

a) Si una propiedad S se verifica para los números naturales entre n_0 y n_1, o sea: $S(n_o)$, $S(n_o+1)$,... $S(n_1-1)$, $S(n_1)$ son verdaderas y

b) Siempre que $S(n_o)$, $S(n_o+1)$,... $S(k-1)$, $S(k)$ sean verdaderas para algún k natural, particular pero elegido al azar con $k \geq n_1$, entonces $S(k+1)$ también sea verdadera,

Entonces $S(n)$ es verdadera para cualquier $n \geq n_0$.

Otra formulación equivalente es el Principio de Descenso infinito, debido a Pierre Fermat (1601/8?-1665), que afirma que Si existe un $l \in N$ para el cual la veracidad de P(l) implica necesariamente que para algún $k \in N$ tal que $k < l$, P(k) es cierta, entonces P(n) es falsa para todo $n \in N$. Una de sus aplicaciones es una demostración de la irracionalidad de $\sqrt{3}$ (Crespo Crespo, 2007).

LAS DEMOSTRACIONES EN EL AULA DE MATEMÁTICA. EL CASO DE LA INDUCCIÓN COMPLETA

Las demostraciones pueden ser comprendidas como una práctica social surgida dentro de la comunidad matemática con el objeto de validar los conocimientos matemáticos (Crespo Crespo, 2007). Esta visión se desarrolla a partir de considerar en la comunidad matemática la necesidad de validar los enunciados referentes a la matemática. Cada comunidad matemática, en cada escenario sociocultural desarrolló la normativa correspondiente a aquellas demostraciones que considera correctas y aceptables para esa validación. El papel de las demostraciones es, por lo tanto fundamental para la matemática y resulta vital su comprensión en el aula, aunque esta no sea su única función (de Villiers, 1993). Esta visión permite analizar dentro de cada escenario sociocultural en el que se realizan actividades matemáticas, en particular en el aula de matemática, las características de las demostraciones, las funciones que desempeñan y la significatividad que poseen para los estudiantes.

Sin embargo, no siempre para los estudiantes revisten las demostraciones la condición de práctica social asociada a la validación. No siempre adquieren para ellos el valor de ser una manera de validar un enunciado matemático, ni de obtener convencimiento del mismo. Más bien, en muchas oportunidades, se convierten en una técnica que adquieren con la finalidad de aprobar un examen, o de cumplir con un requisito acorde con su visión del contrato didáctico, en el que la formalización es comprendida como una parte importante y fundamental en el lenguaje matemático (Crespo Crespo, Homilka y Lestón, 2011). Esto se pone en evidencia a través del análisis de respuestas de estudiantes en las que realizan aplicaciones incorrectas de formas de argumentar en relación a la justificación de propiedades matemáticas. Las argumentaciones por inducción completa ofrecen ejemplos claros en los que puede observarse que se tornan en técnicas vacías de significado.

Analizaremos algunas situaciones de aula que permiten comprender mejor cuáles son algunos de los errores que cometen los estudiantes y cómo en algunas oportunidades si bien manifiestan cierto manejo de la inducción completa como estrategia de demostración, a partir de su aplicación incorrecta, se trasluce la falta de comprensión de su esencia.

Caso 1. Errores algebraicos

En evaluaciones de estudiantes de Primer año de la carrera de Profesorado de Matemática en la materia Álgebra I, (Lestón, 2015) reporta errores de los alumnos consistentes la aplicación de la asociatividad de una fracción negativa y otra positiva conservando el signo negativo como antecesor de la fracción resultante de la suma es uno de los errores que surgen, o en considerar como equivalentes fracciones que no lo son. Estos errores de carácter algebraico cometidos durante el paso inductivo no son detectados por los estudiantes, ya que por saber que están demostrando la propiedad para el sucesor de un elemento de la hipótesis inductiva son a veces utilizados para “forzar” el resultado en un examen.

Caso 2. La importancia del caso base

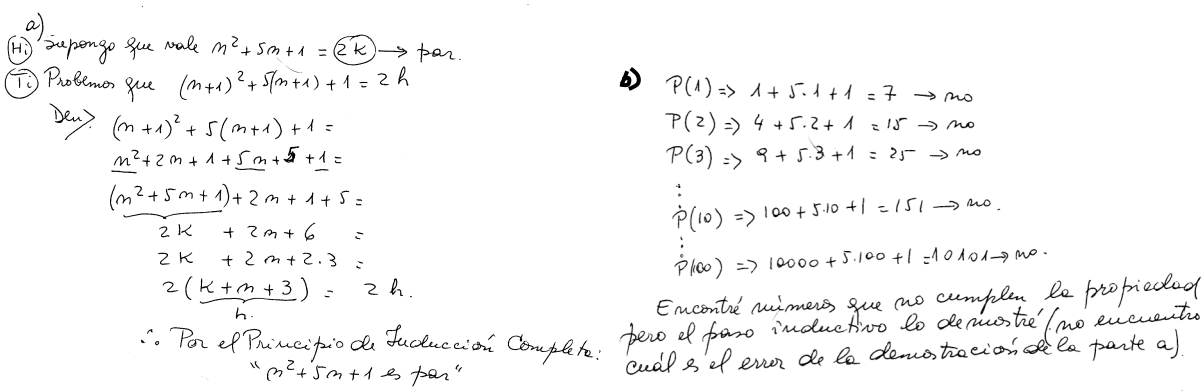
La demostración del caso base en una demostración por inducción completa, suele ser sencilla y en muchas oportunidades, trivial. Los estudiantes, se concentran normalmente en la realización del paso inductivo, ya que es el que les puede traer mayores dificultades y por lo tanto a veces descuidan el caso base y su significado e importancia.

En una evaluación de estudiantes de segundo año de la carrera de ingeniería informática de la materia Matemática Discreta, en la que se aborda el tema de inducción completa, se presentó el siguiente enunciado:

> *Considere la proposición p(n): "n2 + 5n + 1 es par"*
>
> *a) Demuestre que si p(n) es Verdadera, entonces p(n+1) es Verdadera para todo n perteneciente a N y extraiga conclusiones*
>
> *b) ¿Para qué valores de n es p(n) efectivamente verdadera? ¿Qué puede concluir?*

La idea del problema era determinar si los estudiantes comprendían que la verificación del paso no garantiza la veracidad de una proposición e incluso mostrar que aún si el paso inductivo puede demostrarse, la propiedad puede no ser válida para ningún caso.

Uno de los estudiantes presentó la siguiente resolución del problema



En realidad, el estudiante tras responder a la consigna del problema que le pedía que demostrara que si p(n) es Verdadera, entonces p(n+1) es Verdadera para todo n perteneciente a N, afirma como conclusión que por la aplicación del Principio de inducción completa, la propiedad es válida para todos los naturales. No detecta que no ha probado el caso base y por lo tanto no puede afirmar la aplicabilidad de este principio.

En estas respuestas, puede observarse que el estudiante no tiene dificultades en la demostración del paso inductivo y a partir de él, afirma que la propiedad es verdadera. Sin embargo, al comenzar sus intentos de verificación de la propiedad para distintos casos, ve que no se cumple, saltea números y busca para otros números. Afirma en ese momento que encontró números para los que no se verifica la propiedad. El estudiante, sin embargo, no es capaz de identificar que el problema es que no ha verificado el caso base y que por lo tanto la demostración del paso inductivo no garantiza el cumplimiento de la propiedad para todos los números naturales, e incluso en este caso no se verifica para ningún número natural la propiedad. No se está aplicando correctamente la estrategia de demostración por inducción completa, el caso base es fundamental para garantizar el cumplimiento de la propiedad en un conjunto bien ordenado, sino que se la ha asumido como una técnica vacía de significado, cuyo mayor valor es el cálculo algebraico correspondiente al paso inductivo.

Caso 3. No para todas las propiedades que involucran a los números naturales es aplicable la inducción completa

Otra situación que puede darse en las aulas de matemática es que los estudiantes apliquen la inducción completa siempre que encuentren una propiedad que menciona a los números naturales, sin analizar si es aplicable o no.

A continuación se describe un episodio que sucedió en una clase de la asignatura Álgebra III de la carrera de Profesorado de Matemática. En esta asignatura se abordan las temáticas que corresponden al tratamiento formal de los conjuntos infinitos a partir de la teoría desarrollada por George Cantor. Esta materia corresponde en el diseño curricular al tercer año de estudios. La inducción completa ha sido abordada en Álgebra I, por lo que los alumnos tienen un manejo bueno de la misma y es esperable que tengan comprendida su significación y las implicaciones de su aplicación. El momento de desarrollo de la clase corresponde al abordaje de las propiedades de los conjuntos infinitos, en particular numerables y los resultados de las operaciones con ellos. La propiedad que se estaba demostrando durante la clase era: *La unión de una familia numerable de conjuntos numerables no vacíos, disjuntos dos a dos es un conjunto numerable*. La idea de la demostración que se estaba aplicando consiste en una aplicación del método diagonal de Cantor. No entraremos en detalles acerca de la demostración correcta que estaba siendo realizada con la guía de la profesora del curso, sino de la que proponen un grupo de alumnos como otra alternativa. Este grupo, una vez finalizada la demostración por parte de la profesora del curso, propuso la realización de otra demostración posible. Pasó uno de los estudiantes al frente y escribió una demostración en la que aplicaba la estrategia de inducción completa, haciendo inducción sobre la cantidad de conjuntos que se están uniendo. En la propuesta del estudiante, el caso base corresponde a la unión de dos conjuntos finitos, luego demostró el paso inductivo partiendo de suponer que la propiedad es válida para una cantidad n de conjuntos y uniendo a ella un conjunto más. La profesora dejó que la demostración estuviera terminada y entonces abrió la discusión al curso en relación a si es correcta o no, y en caso de que fuera incorrecta, cuál es la causa por la que no es aplicable la estrategia de inducción completa para esta propiedad. Todo el curso, compuesto por 40 estudiantes, aceptó inicialmente la propuesta de demostración realizada por el estudiante. Ante la afirmación de la profesora de que la demostración era incorrecta y la propuesta de que buscaran el error, los alumnos analizaron cuidadosamente la demostración, cada uno de sus pasos y la manera en la que se la había escrito. Ninguno cuestionó la aplicabilidad del método para la propiedad. La profesora les propuso entonces al grupo la propiedad: *La unión de una familia finita de conjuntos numerables no vacíos, disjuntos dos a dos es un conjunto numerable*. Les dio unos minutos para que realizaran la demostración correspondiente por inducción completa y les pidió que compararan ambas. Observaron que habían reproducido la misma demostración. Entonces les propuso que pensaran qué propiedad habían logrado demostrar y por qué. Ellos estuvieron de acuerdo en que la segunda propiedad estaba correctamente demostrada, y que la diferencia entre ambas consistía en la cantidad de conjuntos considerados: en un caso, finita, en el otro infinita numerable. Sólo entonces les fue posible darse cuenta de que el error cometido en la primera demostración consistía en la no aplicabilidad de la inducción completa por tratarse de una cantidad infinita de conjuntos.

Este ejemplo muestra cómo la inducción completa había sido asumida por los alumnos como una técnica, pero que se la había vaciado de significación, no reconociéndose lo que en realidad se está demostrando y para qué casos es aplicable.

Caso 4. Inducción completa sin cuentas para hacer…

Este caso corresponde a un diálogo suscitado en 4° año del Profesorado de Matemática, en la primera clase de Teoría de Grafos, en un curso de 7 alumnos.

En la práctica se plantea el siguiente problema:

En un grafo no orientado, la suma de los grados de los vértices coincide con el doble del cardinal del conjunto de aristas. Probar por inducción completa ¿sobre qué conjunto realizas inducción?

Los alumnos estaban trabajando en un solo grupo, por lo que se vio favorecido el intercambio de ideas, mientras eran observados por la docente del curso, que dejó que el grupo discutiera y planteara dudas sin su intervención.

Una de las estudiantes recordó en seguida que debían probar la propiedad para h y h+1, sin darse cuenta de que se trata de una implicación y a partir de ese momento, el diálogo que surgió fue el siguiente:

A1: Tomamos para 1. Luego para h y h+1

A2: ¿Y ahora?

A3: Sí, eso de h y h+1 me acuerdo, pero: ¿qué formula utilizamos?

A4: Si pienso en que h es el número de aristas sería un dibujito así: muchos puntitos. V es fijo

A5: ¿Por qué aristas y no vértices?

A3: Si no hay vértices, no hay nada… no se me ocurre cómo sería un grafo así

A4: Supuestamente ahora lo que queremos decir es para A=h (una cantidad cualquiera), entonces es 2h.

A5: Y ahora ponés la tesis inductiva: A=h+1

A5: Y entonces hay que llegar a $\sum g(v_i) = 2(h+1)$

A4: Es la tesis inductiva, ¿la escribimos así?

A5: Sí, por ahora sí. Luego la vemos de nuevo por si hay que cambiar

A1: No entiendo dónde está el h=1

A4: Acá sería h=0, sin aristas. El primer número que lo cumple

A1: ¿Y por qué 0 y no 1?

A5: Estamos viendo si funciona el 0. Veamos y luego corregimos si hace falta.

A5: De acá tengo que llegar a esto, ni idea de cómo... Capaz que tengo que escribir la sumatoria con la cantidad de aristas, pero cómo digo que si agrego una arista a un vértice se le agrega una vez a este otro en el grado.

A4: ¿No tendríamos que poner como que no es la misma sumatoria? ¿Pero cómo?

A5: No sé… Igual es sumatoria de grado de los vértices y los vértices son los mismos. Pero agrego una arista. No sé cómo indicarlo tampoco.

(Mientras tanto, A6 y A7 se mantienen al margen de la conversación. A6 busca en internet qué es inducción. A2, A6 y A7 tratan de entenderla)

A2: Pero acá no tenemos para hacer cuenta, sumar o multiplicar. ¿Y cómo hago inducción?

A5: Entonces g(v) de un vértice aumenta en 1, ¿dónde meter el 1 en la fórmula? En realidad tengo g(v1)=2, era 1.

A4: Hay que variar lo que está adentro de la sumatoria, pero ¿cómo?

A4: V=0 pruebo que se cumple con las aristas. Si V=h entonces V=h+1

A5: La sumatoria la verifico para el primer elemento y luego para h y para el siguiente.

A5: Para mí vértices fijos. Aristas puedo agregar un montón. Pero si V=0 no tengo dibujo.

A4: A=0 ¿Seguro? ¿Puede haber un grafo sin aristas?

A5: V es fijo

A4: ¿Cuál es?

A5: No sé pero lo llamo V. Entonces el cardinal de vértices es V y el cardinal de aristas es A y varía, pero ¿cómo escribo la sumatoria?

A4: Pero si la cantidad de aristas es cero, va a ser como que 0 es 0, porque no tiene grado

A5: Si no hay aristas no hay grado, ya veremos qué le ponemos.

A4: Primero no le ponemos ninguna arista ¿se verifica la propiedad?

A5: Sí, porque 0+0+0 todas 0 es 0. Inicial A=0 entonces g(vi)=0 para toda i

A4: Pero grado depende de las aristas, no es el mismo para todos los vértices. ¿Con qué fórmula lo colocamos?

A5: Ayuda, Profe!!!

Este diálogo muestra que los estudiantes recordaron solo pasos de la inducción completa. No recuerdan su significado. Les cuesta hacer inducción sobre un conjunto concreto. Algunos alumnos no siguen el diálogo que se dio en el grupo. Predomina en los estudiantes el enfoque formal puesto de manifiesto en la búsqueda de una expresión algebraica o de una manera de escribir formalmente las ideas que surgen, confundiendo lo formal y lo riguroso en sus afirmaciones. Por momentos en el diálogo aparecen dos conversaciones en paralelo, en las que se centran en recordar en qué consiste la inducción completa, y en la búsqueda de la manera de realizar un cálculo algebraico, que creen es la esencia de la inducción completa. Una de las dificultades que surgen es la necesidad de hacer inducción sobre una cantidad que no es abstracta, sino que representa la cantidad de aristas de un grafo.

Dando significado a la inducción completa en distintas ramas de la matemática

En distintas temas de diversas ramas de la matemática es posible encontrar propiedades que por ser válidas para valores finitos, en su demostración puede acudirse a la inducción completa.

Una de ellas es, como vimos en el caso anterior, la Teoría de grafos. Son numerosas las propiedades en cuya demostración se hace uso de esta estrategia, haciendo inducción sobre la cantidad de aristas o de vértices del grafo, según corresponda.

También en Teoría de conjuntos es posible hacer generalizaciones a una cantidad finita de conjuntos de propiedades que normalmente se demuestran para dos conjuntos, como por ejemplo las Leyes de De Morgan.

En Análisis matemático, la demostración de la manera de calcular la derivada de una función representada por un monomio en una variable se realiza por inducción completa sobre el exponente de esa variable.

En Teoría de Probabilidades, la demostración de que la esperanza de suma de n variables aleatorias es la suma de las esperanzas de las n variables también se realiza por inducción completa.

Estos son algunos ejemplos de propiedades que permiten aplicar inducción completa y comprender el significado de esta estrategia de demostración resignificándola en el aula.

COMENTARIOS FINALES

Los ejemplos presentados en este trabajo muestran cómo en el aula las demostraciones han perdido en muchas oportunidades su función de validación del conocimiento matemático y se han transformado en técnicas que los alumnos reproducen sin analizar lo que están haciendo ni cuál es el alcance de las mismas.

En el intento de cumplir con la visión formal del lenguaje matemático que surge en las representaciones que poseen los estudiantes como una necesidad, las justificaciones que se dan en las aulas, no siempre logran su corrección. Los alumnos intentan realizar demostraciones cuando se les solicitan, pero se concentran muchas veces en aspectos formales de las mismas y no en su significado. Para ellos, la formalización es comprendida como parte de la normativa que impone el contrato didáctico; la aplicación de estrategias de demostración formales. El caso de la inducción completa puede reflejar esta realidad, como se observa en los ejemplos presentados en los que se ha tornado en una técnica mecánica, pero alejada de su significación.

Resulta, por lo tanto fundamental la reflexión en el aula acerca del significado de estas estrategias de demostración, para que los estudiantes comprendan lo que en realidad están haciendo cuando lo aplican y en qué casos es posible aplicarlas. Las demostraciones por inducción completa deben ser analizadas para comprender su significado y que no se restrinjan a una técnica algebraica. Se las logra resignificar si son presentadas en distintos contextos matemáticos y se hace hincapié en ellas de qué significan y por qué y a qué casos son aplicables

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cajori, F. (1918). Origin of the name 'mathematical induction'. *The American Mathematical Monthly* 25 (5), 197-201

Castañeda, A. (2009). Aspectos que fundamentan el análisis del discurso matemático escolar. P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 1379-1387. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, México.

Crespo Crespo, C., Homilka, L. y Lestón, P. (2011). *Acerca del lenguaje utilizado en el discurso matemático escolar.* P. Lestón (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24, 729-738. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Épsilon* 26, 15-30.

LAS CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS EN TORNO AL LUGAR GEOMÉTRICO DE LA PARÁBOLA INFLUENCIADO POR EL GEOGEBRA

José Carlos León Ríos
Universidad de Lima - Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas (Perú)
jleonr@ulima.edu.pe

Palabras clave: enfoque instrumental, instrumentación, instrumentalización, geogebra.

Key words: Instrumental approach, instrumentation, instrumentalization, Geogebra.

RESUMEN: El escrito presenta un extracto de algunas de las actividades que estamos elaborando en un trabajo de investigación, acerca de la incidencia de las construcciones geométricas en la génesis instrumental de la parábola. Nuestro trabajo está dirigido a docentes de matemática de una universidad privada de Lima. Los objetivos son analizar cómo la condición geométrica de dicha curva se transforma en instrumento cuando los sujetos dirigen sus acciones a la resolución de los problemas con actividades geométricas y cómo dichas acciones contribuyen al proceso de aprendizaje de algunos contenidos geométricos haciendo uso del Geogebra que movilizan como herramienta mediadora. Las actividades se fundamentan teniendo en cuenta aspectos del Enfoque Instrumental y la Teoría Antropológica de lo Didáctico, para analizar los esquemas y las técnicas que los profesores construyeron o movilizaron durante las tareas propuestas.

ABSTRACT: Our research is one of the many activities from our preliminary research about the impact of geometric constructions in the instrumental genesis of parabola. Our research is performed by teachers from a private university of Lima, which teach mathematics. Thus, the goals are to analyze the way the geometric condition becomes an instrument when the teachers addressed their actions to solve geometric problems and how the insertion of these instrument contribute in the geometric content learning process using the Geogebra as mediator. We use aspects the Instrumental Approach and Anthropological Theory of Didactics in order to analyze the schemes and techniques that teachers constructed or moved while they worked with the tasks proposed

INTRODUCCIÓN

En el taller se planteó una secuencia de aprendizaje, basada en la condición geométrica de la parábola, que movilizada como instrumento, opera transformaciones y permite resolver tareas con construcciones geométricas, logrando de esta forma, que el propio sujeto dote al instrumento de otras propiedades extrínsecas, de acuerdo al contenido de nuestras actividades. Además, la condición geométrica de la parábola, favorece en los sujetos la reutilización y el aprendizaje de los contenidos geométricos, teniendo en cuenta las técnicas y el discurso tecnológico – teórico, que validan el desarrollo de sus actividades.

Destacamos que las situaciones mostradas, forman parte de una investigación preliminar que estamos elaborando actualmente, la cual está dirigida a un grupo de profesores del curso de geometría analítica, en el área de matemática. Señalamos la importancia que tuvieron las investigaciones de Jesus (2012) y Fernández (2011), los cuales movilizaron un objeto matemático haciendo uso de construcciones geométricas, analizando el comportamiento de dichos objetos como instrumentos en la elaboración de las actividades geométricas. En esta propuesta, hicimos uso de algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), por su carácter experimental en aula, luego de elaborar un análisis *a priori,* basado en un conjunto de hipótesis, cuya descripción y predicción, permitió controlar el comportamiento del estudiante y sus significados que le atribuyeron al objeto matemático, teniendo en cuenta la complejidad de la clase. De igual forma, para el análisis de las acciones se empleó el Enfoque Instrumental de Rabardel (1995), específicamente para analizar las acciones de los sujetos cuando movilizaron el instrumento condición geométrica de la elipse mientras interactuaron con las construcciones geométricas de las tareas propuestas. Dichas acciones nos permitieron identificar los posibles esquemas de utilización que los sujetos construyeron y movilizaron. Del mismo modo, para el análisis de las técnicas y del discurso tecnológico – teórico, tomamos algunos aspectos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard (1999) en relación a la solución de las tareas y a la fundamentación de dichas técnicas.

De ese modo, la confluencia entre el Enfoque Instrumental y la TAD, de acuerdo a Pérez (2014), permitieron reconocer en ambos marcos teóricos, el valor cognitivo del instrumento y pragmático de las técnicas. El instrumento referido al instrumento psicológico, a los esquemas que moviliza el sujeto cuando lo moviliza como medio para conseguir una meta, mientras que la segunda, cuando posibilitan las acciones del sujeto en el desarrollo de una tarea.

Es necesario indicar, que el Enfoque Instrumental, distingue como esquemas de uso (EU), un conjunto de acciones que como módulos especializados, están orientados hacia tareas específicas o tareas segundas, pero que se pueden coordinar unos a otros y que se articulan para formar un nuevo esquema, llamado esquema de acción instrumentada (EAI), dirigida hacia la tarea principal de la actividad. En nuestras actividades, por ejemplo, la condición geométrica de la parábola, visto como EAI, está construida sobre la base de otros EU. De acuerdo al contenido de nuestras actividades, propiciamos entonces, la movilización de otros esquemas de uso como el de la circunferencia, mediatriz de un segmento, distancias, rectas, segmentos, polígonos, los cuales podrán emerger de manera propia o de una apropiación de esquemas sociales exteriores al sujeto, es decir, en un contexto de actividades compartidas, llamado también esquema de actividad colectiva instrumentada (EACI), el cual es incorporado a los esquemas que los sujetos movilizan. De este modo y de acuerdo a la noción de praxeología, nuestra organización didáctica, gira en

torno a un sistema de tareas que, para ser resueltas, requieren de una técnica y de un bloque técnico-tecnológico que los alumnos describirán con elementos justificativos, favoreciendo la inserción de las construcciones geométricas. Todas estas acciones están orientadas, de acuerdo al contenido de las actividades, al proceso de instrumentación de la condición geométrica de la parábola.

Las actividades del taller serán realizadas en dos sesiones de una hora y media, agrupadas en cuatro actividades. Las tareas propuestas en cada actividad están distribuidas como siguen: en las dos primeras actividades los alumnos construirán , en base a sus esquemas geométricos previos, el entorno tecnológico-teórico de la condición geométrica de la parábola, la cual indica que *un punto de la parábola equidista de otro punto exterior fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz*. En las actividades tres y cuatro, los alumnos resolverán tareas de construcción geométrica en torno a la condición geométrica de la parábola. Se ha buscado que las secuencias de aprendizaje se desarrollen haciendo uso del deslizador del Geogebra, el cual permitirá presentar a los objetos geométricos en forma de animaciones. Debido a ello, las representaciones dejarán de ser estáticas y algunas propiedades estructurales geométricas podrán ser confrontadas, como la propiedad de la mediatriz, la cual es caracterizada de dos maneras distintas, por un lado que *la mediatriz de un segmento es una recta perpendicular al segmento y que pasa por el punto medio de dicho segmento*, y por otro, que un *punto de la mediatriz de un segmento, equidista de los extremos de dicho segmento*. Como material adicional, compartiremos una actividad relacionada a la propiedad de reflexión de la parábola.

Por otro lado, buscamos fomentar el uso de los ambientes en geometría dinámica, como lo afirma León (2014), donde indicamos que en la actualidad el uso y la difusión de nuevas tecnologías adaptables al entorno humano, nos brindan la posibilidad de trabajar en estos ambientes dinámicos, los cuales ofrecen un nuevo espacio de aprendizaje educativo. Sobre este entorno de trabajo los alumnos pueden manipular, explorar, experimentar con elementos geométricos gracias a la plataforma interactiva que estos programas ofrecen.

ANÁLISIS DE LA EXPERIENCIA DESARROLLADA

La experiencia que presentamos en este artículo, trata acerca de la condición geométrica de la elipse cuando es movilizada como instrumento, para operar transformaciones sobre las tareas propuestas relativas a las construcciones geométricas. La condición geométrica de la parábola, incorpora como constituyentes, esquemas de uso relativos a las tareas segundas que pueden situarse en el orden de esquemas elementales, tales como la construcción y definición de la mediatriz, triángulo isósceles, circunferencia, etc. pero que coordinadas unas a otras se constituyen como un esquema de acción instrumentada. Es importante señalar que la experiencia que mostramos, en este artículo, corresponde a dos de las ocho actividades de nuestra investigación preliminar.

En ese sentido, destacamos que los alumnos movilizarán algunos esquemas de uso como la mediatriz, la circunferencia, el triángulo isósceles, empleando técnicas y discursos apropiados para construir el entorno tecnológico – teórico respecto a la condición geométrica de la parábola. Estos esquemas se coordinan unos a otros y se articulan para formar el esquema de acción

instrumentada (EAI) de la Parábola, lo que contribuirá también a que la condición geométrica sea mediador cuando se movilice sobre otras construcciones geométricas

El conjunto de respuestas esperadas por los alumnos, fueron previstas en el análisis *a priori*, de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995). Esta descripción nos permitió controlar el comportamiento del sujeto y los significados que le atribuyeron al objeto matemático.

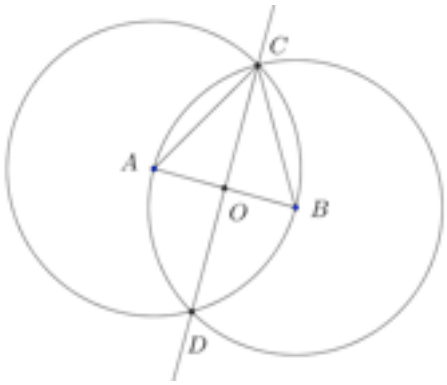
ACTIVIDAD 1

Tarea 1.1

Dada un segmento AB , haciendo uso de construcciones geométricas, construya la recta perpendicular que pase por el punto medio del segmento *AB.* Luego describa y justifique el proceso de construcción

En nuestro análisis *a priori* los docentes construyen la recta perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por su punto medio trazando dos circunferencias de igual radio y de centros A y B, luego señalan que la recta que pasa por las intersecciones de ambas circunferencias es la recta buscada, de acuerdo a la representación gráfica de la figura 1.

Figura 1. Construcción mediatriz de un segmento AB



.

De acuerdo a la TAD de Chevallard, existe una justificación racional sobre la técnica ofrecida. Al respecto describimos y justificamos los trazos que se muestran en la figura 1. Se trazan circunferencias de igual radio, determinándose que $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AD} = \overline{BD}$. De lo anterior, se concluye que por los puntos *C y D* pasa una recta mediatriz del segmento $\overline{AB}$, dado que dichos puntos equidistan respectivamente, de los extremos del segmento $\overline{AB}$. Los alumnos hacen uso de la propiedad de la mediatriz que indica que *un punto de la mediatriz de un segmento, equidista de los extremos de dicho segmento*. Luego, dado que la mediatriz *es perpendicular al segmento* $\overline{AB}$ *por su punto medio,* afirmamos que $\overline{AO} = \overline{OB}$.

Probablemente los sujetos movilicen otras técnicas como las propiedades del triángulo isósceles o congruencia de triángulos, esta última, creemos como fundamento teórico que justifica la técnica de la recta mediatriz.

De acuerdo al Enfoque Instrumental de Rabardel, creemos que los docentes movilizarán como EAI las propiedades de la mediatriz, triángulo isósceles o congruencia de triángulos.

Destacamos que durante la socialización de los grupos, los EACI también podrán emerger. De acuerdo al enfoque instrumental, son los que corresponden a la movilización simultánea o en conjunto de una serie de actividades compartidas.

Tarea 1.2

Dada un segmento AB , haciendo uso de construcciones geométricas, construya:

a. La recta mediatriz del segmento AB

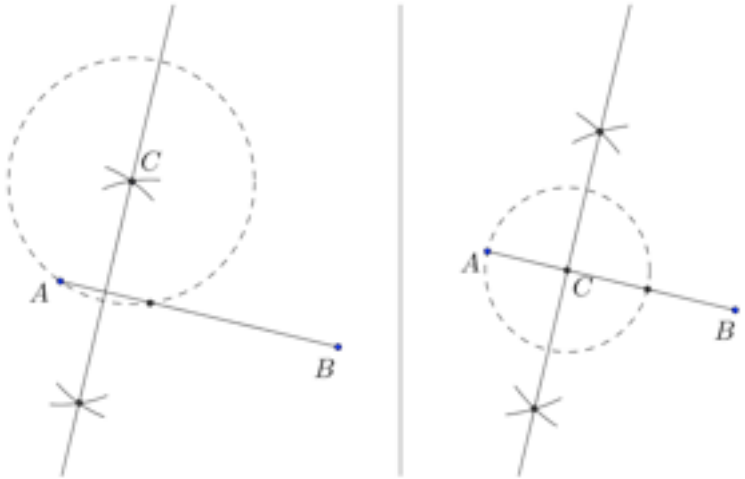
b. La recta perpendicular que pase por un punto *C* exterior al segmentoAB.

c. La recta perpendicular que pase por un punto *C* contenido en el segmentoAB.

Luego, describa y justifique el proceso de construcción para cada caso.

Respecto al ítem a), acreditamos que la organización didáctica de la tarea (*construir la mediatriz, describir y justificar el proceso…*), permite la emergencia de las técnicas y tecnologías para dicha construcción, la cual corresponde a la mediatriz de un segmento, que describimos en la actividad anterior. Como observamos en la figura 2, desde el punto *C*, se traza una circunferencia de radio **CA** que corta al segmento *AB* en un punto dado. Luego se procede a construir la mediatriz del segmento de extremos el punto *A y* el punto dado

Figura 2. Mediatriz de un segmento que pasa por C



Podemos afirmar que los profesores continuarán instrumentándose con la mediatriz de un segmento dado, pues mantendrán organizadas sus acciones relativas al trazo de dicha recta. Como se ve en la figura 2, se puede garantizar que dado los extremos de un segmento, el sujeto podrá determinar la mediatriz de dicho segmento. Afirmamos que la movilización de la mediatriz como EAI es uno de los procesos de instrumentación de la génesis instrumental.

Tarea 1.3

Dado tres puntos no colineales, y una recta l que no contiene a ninguno de los puntos dados, construya una circunferencia que pase por:

a. Dos de los puntos dados.

b. Tres de los puntos dados.

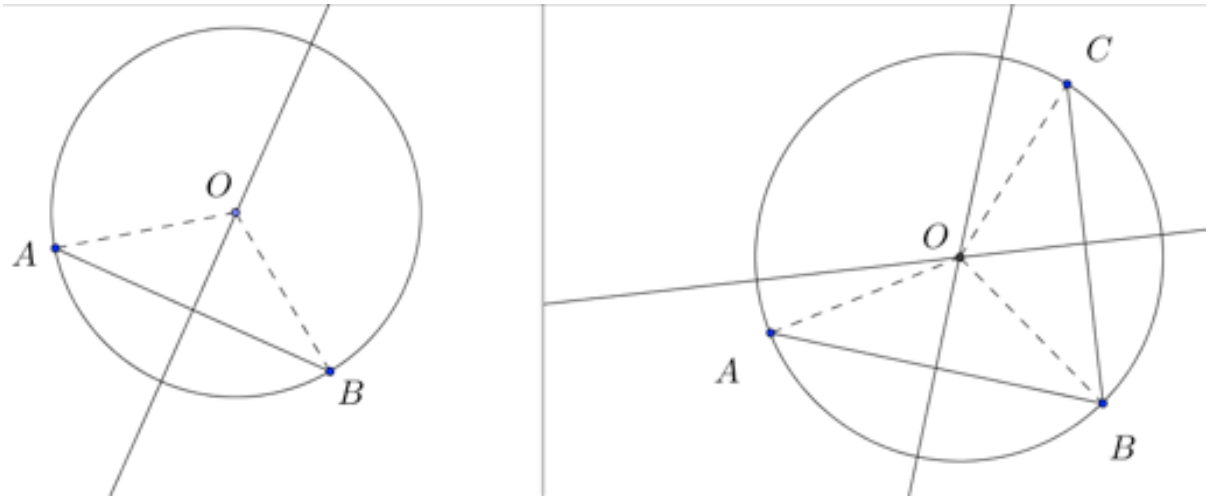
c. Uno de los puntos dados y sea tangente a la recta l en el punto $P \in l$.

Describa y justifique el proceso de construcción que movilizó.

En nuestro análisis *a priori* los docentes construyen las circunferencias que pasan por dos y tres de los puntos dados. En el primer caso, el procedimiento mostrado en la figura 3, señala que dada la mediatriz del segmento *AB,* se toma un punto de dicha mediatriz, el cual corresponde al centro de la circunferencia de radio $\overline{OA}$.

La justificación de la técnica se basa en la propiedad que indica que *un punto de la mediatriz de un segmento, equidista de los extremos de dicho segmento*.

Figura 3. Circunferencia usando la mediatriz



En el siguiente caso, se trazan las mediatrices respectivas a los segmentos *AB* y *CB.* La intersección de ambas rectas es el punto *O*, el cual corresponde al centro de la circunferencia de radio $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$. La propiedad de la mediatriz explica la técnica.

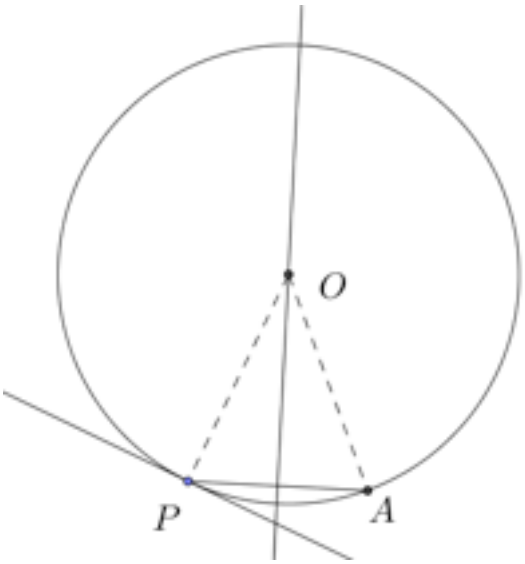
De acuerdo al análisis *a priori,* hay evidencias que los profesores están instrumentados con relación a la mediatriz pues logran movilizar las propiedades de dicha recta en sus trazos. También hay evidencia que los EU que componen la mediatriz como punto medio, recta perpendicular y segmento, forman módulos específicos que se coordinan unos a otros.

En el siguiente ítem, de acuerdo al análisis *a priori* de la ingeniería didáctica, creemos que los alumnos movilizarán el instrumento mediatriz junto a otros objetos matemáticos como EU. Esto facilitará la movilización de los EU que corresponden a la condición geométrica de la parábola en la actividad 2. De hecho, una vez construida la condición geométrica a partir de sus repertorios preexistentes, en el trabajo de investigación que actualmente nos encontramos en proceso de elaboración, construimos la condición geométrica de la parábola y la aplicamos como instrumento en distintos problemas de aplicación geométrica.

En la figura 4, se observa el trazo de la mediatriz del segmento $\overline{AP}$. Tomando un punto de la mediatriz, se pueden trazar tantas circunferencias como queramos que pasen por los puntos *A y P.*

Como el radio de una circunferencia es perpendicular a la tangente de la curva, trazamos una recta perpendicular a la tangente que pase por el punto *P*. El centro de la circunferencia se obtiene al intersecar dicha recta con la mediatriz.

Figura 4. Recta tangente a una circunferencia



En este ítem, la mediatriz evoluciona de EAI a EU ya que junto a otros EU como la propiedad de una recta tangente a una circunferencia perpendicular a su radio, la circunferencia como lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de otro punto fijo y coplanario llamado centro en una cantidad constante, coordinan unos a otros, respondiendo cada objeto a metas identificables, actividades específicas relacionadas con el artefacto.

ACTIVIDAD 2

Tarea 2.1

Dada una recta *l*, un punto *F* no contenido en dicha recta y el punto Q que se desplaza a lo largo de la recta l

a. Redacte la condición geométrica de una parábola con foco en F y directriz la recta l.

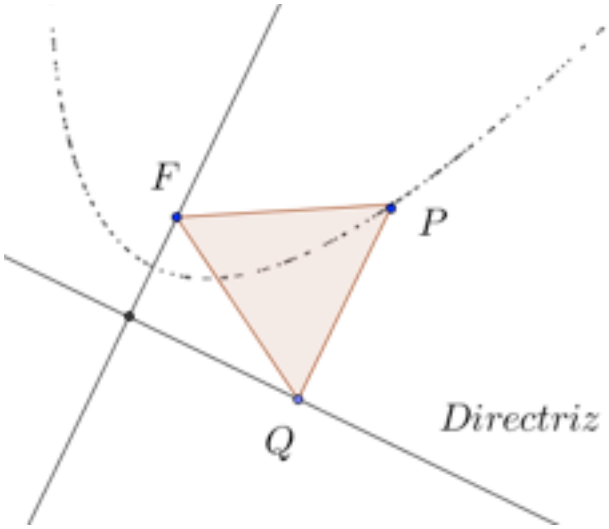
b. Determine un punto *P* que cumpla con la condición geométrica de la parábola. Luego trace el triángulo *FPQ* y describa la trayectoria que deja el rastro del vértice *P*, cuando desplaza Q a lo largo de *l*. Justifique su construcción.

La tarea propuesta, estuvo bien identificada pues es clara cuando señala que debemos redactar la condición geométrica de una parábola y determinar un punto que cumpla con dicha condición, En el análisis *a priori*, conjeturamos que debido a que el objetivo de la tarea es claro, los profesores no tendrán ningún inconveniente en redactar *un punto P perteneciente a una parábola equidista de otro punto fijo F llamado Foco y de una recta fija l llamada directriz.*

Acreditamos que la técnica y el entorno tecnológico – teórico a usar ya ha sido construida en la actividad anterior, y moviliza EU en relación a dicha técnica, como las propiedades de la mediatriz de un segmento, la circunferencia como lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de otro punto fijo y coplanario llamado centro en una cantidad constante, segmento que representa la distancia de un punto a una recta.

En la figura 5, se observa que el sujeto traza la mediatriz del segmento *FQ*, y en la intersección de dicha mediatriz con la recta perpendicular a *Q*, determinará el punto *P* que equidista al foco y a la recta

Figura 5. Construcción de una parábola



Las acciones del sujeto, acreditan que está instrumentado con la construcción de un punto que pertenece a una parábola, pues con base a la definición *un punto P perteneciente a una parábola equidista de otro punto fijo F llamado Foco y de una recta fija l llamada directriz.* Creemos que discurso tecnológico – teórico favorece la coordinación de los EU pues los sujetos desarrollan de manera explícita su justificación matemática.

CONSIDERACIONES FINALES

Las acciones mostradas por los estudiantes permitieron identificar posibles esquemas de utilización que construyeron y movilizaron, de manera progresiva, mientras interactuaban con la condición geométrica de la parábola. En ese sentido, de acuerdo al enfoque instrumental, en las actividades se evidenció la triada de elementos: sujeto, instrumento y objeto.

Las tareas fueron pertinentes, en el sentido que permitieron justificar las técnicas que los sujetos empleaban. En ese sentido, concordamos con Jesus (2012) cuando indica que la teoría Antropológica de lo Didáctico y el Enfoque instrumental contribuyen al aprendizaje de los contenidos matemáticos.

Las construcciones geométricas de la condición geométrica de la parábola, permitieron ampliar o desarrollar sus habilidades en torno a otros elementos geométricos

Se hizo uso de la geometría dinámica (Geogebra) como herramienta tecnológica en la enseñanza y aprendizaje de la elipse, la cual permitió la interacción de la representación de este objeto matemático con los estudiantes

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En P.Gómez (Ed). *Ingeniería didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Chevallard, Y. (1999). *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado.* [Traducido por Clauida Gilman]. Argentina, Buenos Aires. Grupo Editorial AIQUE.

Fernández, E. (2011). *Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global. Integrando Cabri Géometre II Plus*. Tesis de Maestría en Educación Matemática, Instituto de educación y pedagogía, Universidad del Valle. Santiago de Cali, Colombia.

Jesus, G. (2012). *As Construções Geométricas e a Gênese Instrumental: o caso da mediatriz.* Doutorado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

León, José (2014). *Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el Geogebra en alumnos de arquitectura y administración de proyectos.* Tesis de Maestría en Educación Matemática. Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú.

Pérez, C. (2014). *Enfoques teóricos en investigación para la integración de la tecnología digital en la educación matemática* (pp. 38, 97-140). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías: Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos* [Traducido por M. Acosta]. Colombia, Universidad Nacional de Santander. (Trabajo original publicado en 1995)

EDUCACIÓN ESTADÍSTICA EN LATINOAMÉRICA: SOBRE EL PENSAMIENTO INFERENCIAL

José Armando Albert Huerta, Blanca Ruiz Hernández, Ingrith Álvarez Alfonso, Enrique Hugues Galindo
Tecnológico de Monterrey (México), Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), Universidad de Sonora (México)
albert@itesm.mx, bruiz@itesm.mx, ialvarez@pedagogica.edu.co, ehugues@mat.uson.mx

Palabras clave: Educación estadística, razonamiento inferencial

Key words: Education statistics, inferential reasoning

RESUMEN: Nuestro Grupo de discusión busca dar continuidad a una iniciativa que surgió en RELME 27 de constituir una Red Latinoamericana de Investigación en Educación Estadística (RELIEE). Con más de 40 profesores asociados actualmente, la RELIEE busca impulsar la investigación estadística, su difusión y formación de grupos de trabajo en Latinoamérica. El grupo de discusión ofreció una oportunidad de interacción entre profesores e investigadores, así como difundir algunas de las acciones que se están haciendo para el impulsar el razonamiento inferencial en nuestros estudiantes. En particular, se mostró un estudio sobre investigaciones doctorales concluidas, dentro de educación estadística, y proyectos a nivel universitario que se están desarrollando. El grupo de discusión también fue importante porque despertó entusiasmo en hacer otras iniciativas para mantener la comunicación y discusión de manera continuada.

ABSTRACT: Our discussion group seeks to continue an initiative that emerged in RELME 27. There a Latin American Research Network on Education Statistics (RELIEE) was established. With over 40 teachers currently associated, the RELIEE aims to promote statistical research, dissemination and formation of working groups in Latin America. The group discussion provided an opportunity for interaction between teachers and researchers, and disseminate some of the actions that are being made to boost our students inferential reasoning. In particular, we show a study about concluded doctoral research in statistical education and university-level projects that are being developed. The discussion group was also important because it awakened enthusiasm in making other efforts to maintain communication and discussion continuously.

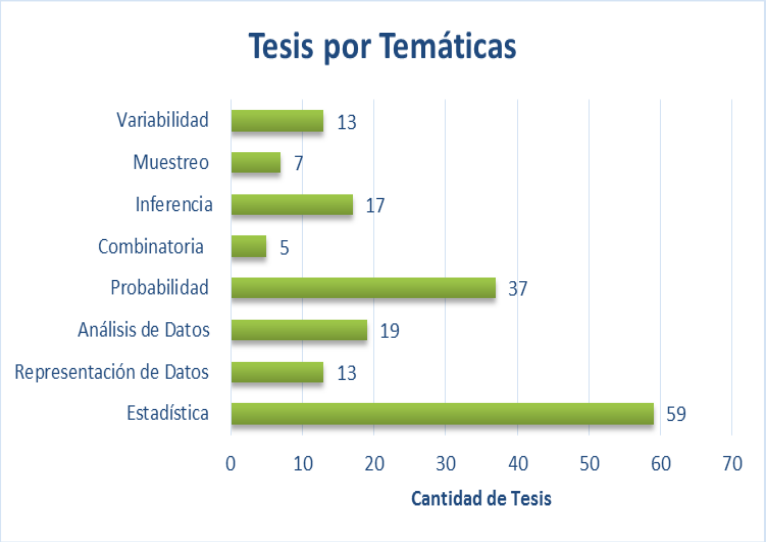
INTRODUCCIÓN

Nuestro grupo de discusión en RELME 29 se basó en el reconocimiento de que el pensamiento probabilístico y estadístico ha tomado cada vez mayor importancia no sólo en el contexto de la ciencia, ingeniería y negocios, sino también en la vida cotidiana de todo ciudadano. Aprender a hacer una revisión crítica de la información cuantitativa es parte importante de la formación de todo ciudadano y profesionista. Nuestra comunidad educativa latinoamericana es consciente de ello y por eso ha iniciado un movimiento, en particular desde el grupo de discusión de RELME 27, Buenos Aires, Argentina, al que se le llamó *Red Latinoamericana de Investigación en Educación Estadística* (RELIEE) (Albert, Rodríguez, Hernández, Torres y Alvarado, 2014). Los primeros esfuerzos tuvieron continuidad en RELME 28 en el mismo espacio, así como en Panamá, RELME 29, también a través de un grupo de discusión, con énfasis, en esta ocasión, en la inferencia estadística. La mecánica del grupo consistió en la participación de cuatro especialistas y un espacio de discusión administrado por un moderador. Se inició con Ingrith Álvarez, de la Universidad Pedagógica Nacional, Colombia. Ella abordó una panorámica de la producción científica en Didáctica de la Estadística en Latinoamérica a través de un estudio sobre tesis doctorales en el área. Después Enrique Hugues, de la Universidad de Sonora, México, mostró los avances de la implementación de un proyecto de inferencia informal en estudiantes de ciencias sociales en la universidad, también se tuvo la oportunidad de conocer un proyecto que se está llevando a cabo en de innovación en educación estadística basada. Posteriormente, Armando Albert y Blanca Ruiz mostraron los avances de su proyecto Novus Transformando la Educación estadística desde un enfoque inferencial. Destacó también la participación de Jesús Pinto de la Univesidad Autónoma de Yucatán, mostrando su proyecto de formación de profesores en Educación estadística para bachillerato. Al término de las exposiciones se abrió un espacio a la discusión. Entre las intervenciones destacadas estuvieron las de Carmen Batanero y Juan Godino que mostraron entusiamo por darle continuidad a este tipo de iniciativas y de la necesidad de impulsar una red de profesores e investigadores en Educación estadistica, moción a la que todos los asistentes (más de 20 profesores) estuvimos de acuerdo. A continuación se muestran las principales ideas de los participantes.

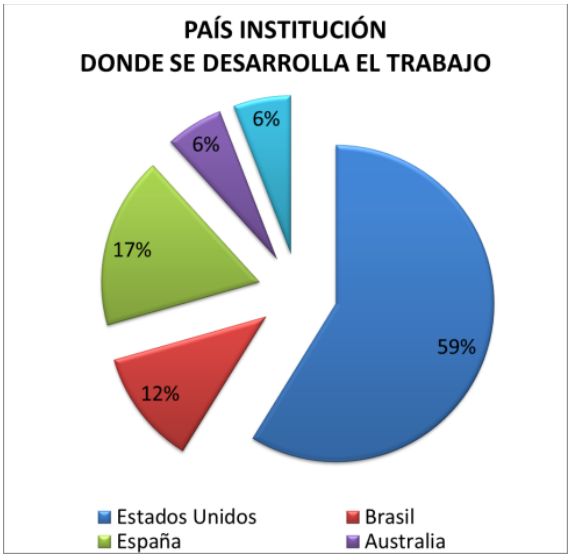
UNA PANORÁMICA DE LA PRODUCCIÓN DOCTORAL RESPECTO A INFERENCIA

Como parte del trabajo desarrollado en el marco del proyecto de investigación titulado *Panorama de la investigación en Educación Estadística* (Fernández, Andrade y Álvarez, 2015) que tiene como propósito establecer derroteros para orientar el desarrollo de la Línea de Educación Estadística de la Universidad Pedagógica Nacional y su agenda de trabajo e investigación, se acopiaron 170 trabajos de grado doctorales relacionados con el campo de la Educación Estadística, los cuales fueron clasificados a partir de tres categorías propuestas: Enfoque Conceptuales, Propósito y Temática (Gráfica 1) y por país (Grafica 2).

Gráfica 1. Se muestra una distribución temática de los trabajos de tesis doctorales.



Gráfica 2. Países de mayor producción de tesis doctorales.



Así, la categoría de Enfoques Conceptuales ha posibilitado caracterizar los trabajos doctorales desde la perspectiva teórica escogida por los autores como marco o fundamento para el trabajo investigativo, los cuales fueron agrupados en dos niveles (principios teóricos considerados en la Educación Matemática en general, y los particulares para la Educación Estadística). La categoría Propósitos permite identificar sobre qué población (individuos u objetos) se hace el estudio, mirar si la atención se centra en formación de profesores, formación de otros profesionales en el área de la estocástica o formación de estudiantes de colegio; en la revisión de textos escolares o universitarios; en el uso de la tecnología como herramienta de enseñanza y aprendizaje; o si el estudio tiene como núcleo asuntos de corte epistemológico o histórico. En la categoría Temáticas

se consideran los conceptos de la estocástica que son objeto de estudio en los trabajos doctorales, agrupados en subcategorías según el campo de dicha disciplina al que hacen referencia.

De esta manera y centrando la atención en la categoría Temáticas, se evidencia que de las 170 tesis finalmente contempladas como marco muestral (trabajos desarrollados entre el 2000 y 2014), solo 17 de ellas están ubicadas en la subcategoría *Inferencia*, la cual contempla temáticas específicas como: Intervalos de confianza, Pruebas de hipótesis, Teorema del límite central, De inferencia informal a inferencia formal y Modelos de regresión.

Dichos trabajos se han desarrollado mayoritariamente en universidades de Estados Unidos, dos de ellos en universidades de México y 2 en España, centrándose en Enfoques Conceptuales específicos tales como la *Alfabetización, Razonamiento y Pensamiento estadístico* (6 de los 17 trabajos); anudando esfuerzos por procurar información, principalmente en relación con la *Formación de otros profesionales en el área de la estocástica*.

Una breve mirada a estos 17 trabajos, devela un interés generalizado de introducir de manera paulatina conceptos que sirvan de base para una posterior enseñanza de la inferencia formal. Así, por ejemplo se han generado investigaciones centradas en abordar temas relacionados con el muestreo, variación entre muestra y conceptos de probabilidad, fundamentos para encaminar la transición entre lo informal y lo formal de la inferencia. Especialmente dichas investigaciones han sido centradas en la formación de otros profesionales en el área de la Estadística y unas cuantas (4 de las 17) en la formación de estudiantes de colegio.

Lo anterior presenta no solo una panorámica frente a la importante producción científica en el campo de la Inferencia como parte esencial de la Educación Estadística, sino también oportunidades de investigación, profundización en el tema y trabajo conjunto que se posibilita a partir de la ausencia de trabajos asociados a determinados enfoques y propósito. Así, se abre una veta para desarrollar investigaciones bajo enfoques tales como la Educación Estadística Crítica, Comunidades de práctica, Práctica reflexiva y Resolución de problemas; con propósitos como la Formación inicial y continuada de profesores, el estudio epistemológico e histórico de los conceptos y la formulación de estados del arte en relación con la temática en cuestión. Lo que devela una gran oportunidad de trabajo para la comunidad Latinoamericana, en pro de desarrollar investigaciones que atiendan, el desarrollo del pensamiento aleatorio a partir del desarrollo de ideas tempranas sobre inferencia, pues como se evidencia, hasta el momento solamente Brasil hace una aparición en el escenario con un par de tesis sobre estas temáticas.

Por otra parte, se dejan cuestionamientos abiertos específicamente sobre los niveles de internacionalización y globalización de los enfoques teóricos usados; esto es, se debe revisar si enfoques como el de *alfabetización*, *razonamiento y pensamiento* han logrado un nivel de aceptación y consolidación internacional; asunto que se puede estudiar con cada uno de los enfoques identificados y su nivel de globalización dentro de la comunidad de educadores estadísticos.

RAZONAMIENTO INFERENCIAL DE UNIVERSITARIOS EN CIENCIAS SOCIALES

Reconociendo una problemática especial en la formación estadística prevista para las carreras de ciencias sociales (CCS), el grupo de educación estadística de la Universidad de Sonora, México, se

encuentra trabajando en la valoración del razonamiento inferencial en estudiantes de dichas carreras y de los esfuerzos que realizan los profesores de estadística para desarrollarlo.

Esta universidad cuenta con siete CCS, cuyo plan de estudios incluyen un curso común llamado Estadística Descriptiva y, para dos de ellas, existe otro llamado Estadística Inferencial, dando por resultado que un gran número de estudiantes en estas carreras no recibe una instrucción formal en inferencia estadística, situación que resulta preocupante pues no tendrán oportunidad alguna de llegar a emprender o comprender los análisis de datos y la toma de decisiones presentes en estudios estadísticos en su campo.

Ciertamente que el primer curso, aun contando con un contenido tradicional, se propone no sólo que el estudiante sea capaz de descripciones básicas de los datos (distribuciones empíricas) sino también capacidades hacia la caracterización de variables y poblaciones, por lo menos conjeturalmente. En esto se percibe un esfuerzo encaminado a proporcionar al estudiante una vía que le dé sentido a lo que estudia y, para los que continúan su formación con un segundo curso, una preparación para iniciar un estudio formal de la inferencia estadística. De hecho la labor encomendada al profesor incluye: "Propiciar las condiciones para que los estudiantes, generalicen, abstraigan y sinteticen en términos de conceptos y propiedades de los objetos estadísticos" (UNISON, 2004), lo cual es identificado como componente necesaria de la inferencia estadística, que en un sentido amplio aquí se denomina razonamiento inferencial.

Precisamente, en conexión con estos señalamientos es que surgen interrogantes sobre las que el grupo de educación estadística de la Universidad de Sonora está trabajando en estos momentos: ¿Qué capacidades en razonamiento inferencial están siendo desarrolladas por los estudiantes? y ¿Qué hacen los profesores para promover el desarrollo del razonamiento inferencial de sus estudiantes?; en el contexto del curso de Estadística Descriptiva en CCS, en el cual no se ponen en juego herramientas de la inferencia estadística.

En relación con la primera de las preguntas una referencia central ha venido siendo un artículo de Zieffler, Garfield, Delmas y Reading (2008) acerca de lo que llaman razonamiento inferencial informal descrito como el uso del conocimiento estadístico para argumentar inferencias de las muestras a las poblaciones sin echar mano de herramientas propias de la Estadística Inferencial. Así, siguiendo a estos autores, se han diseñado y explorado en estudiantes de CCS cuestiones requiriéndoles:

> 1. Hacer juicios, afirmaciones, o predicciones acerca de las poblaciones basados en muestras, pero sin utilizar procedimientos y métodos estadísticos formales (por ejemplo, p-valor, prueba t);
>
> 2. Recurrir, utilizar e integrar el conocimiento previo (por ejemplo, conocimiento formal acerca de conceptos fundamentales, tales como distribución o media; conocimiento informal sobre inferencia tal como el reconocimiento de que una muestra puede ser sorprendente dada una pretensión en particular; uso del lenguaje estadístico), en la medida que este conocimiento sea requerido; y
>
> 3. Articular evidencia basada en argumentos para juicios, afirmaciones o predicciones sobre poblaciones basados en muestras. (Zieffler et al., 2008, pág. 46-47)

En cuanto a la segunda de las preguntas, se ha tenido un acercamiento a la forma en que los profesores conciben su trabajo en el salón de clases a través de un cuestionario y un guion de entrevista, valorando particularmente la atención que los profesores otorgan al razonamiento estadístico y a cada uno de los componentes del proceso estadístico: Formular preguntas, Recolectar datos, Analizar datos e Interpretar datos; que son utilizados metodológicamente como categorías de análisis (Newton, Dietiker y Horvath, 2011)

SOBRE PENSAMIENTO INFERENCIAL EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Un factor que agrava el problema de la enseñanza de la Estadística a nivel universitario es tener un programa denso en contenidos ha cubrirse en corto tiempo. Y, al ser la inferencia uno de los temas tradicionalmente vistos hasta el final, muchas de sus ideas centrales de la inferencia no alcanzan a madurar en los estudiantes, o ni siquiera ser atendidas en los tiempos didácticos asignados. Aunado a ese problema, la inferencia tiene en sí misma sus propias dificultades que investigadores vienen señalando desde antaño a la fecha (Vallecillos,1999; Rodriguez, Albert y Agnelli, 2011; Batanero 2013; Albert y Ruiz, 2014).

Es por eso que han surgido iniciativas que no esperan hasta el final del curso para avanzar en el razonamiento inferencial. Una de ellas surgió en la Universidad de Michigan con Aliaga y Gunderson (2006). Retomamos su aportanción y pretendimos darle continuidad a través de otra propuesta que desarrolle el pensamiento inferencial a lo largo de todo el curso, así como graduar qué ideas del razonamiento inferencial son posibles incorporar paralelamente al desarrollo del curso. Estamos en la etapa de avaluación de resultados. Entre las primeras cosas que pudimos observar al implementar nuestra propuesta con estudiantes de ingeniería que llevan el curso de Probabilidad y Estadística es que es posible introducir la idea de Hipótesis, necesidad de datos para argumentar a su favor o en contra, toma de decisiones, errores que se pueden cometer al tomar una decisión sobre la Hipótesis, razonamiento sobre dato atípico, muestra aleatoria y población, parámetro y estadístico, entre otros. Para luego abordar resultado significativo en distribuciones, particularmente en distribuciones muestrales donde es posible abordar las ideas centrales de la inferencia estadística, para finalmente formalizar el tema cuando se estudia con ellos la unidad de Inferencia estadística. A continuación se expresa esto a través de la Tabla 1:

Tabla 1. Momentos clave de inserción del razonamiento inferencial

Tema	Ideas tempranas
Estadística descriptiva	Hipótesis nula e hipótesis alternativa Muestra aleatoria, Muestra determinística Error tipo I, Error tipo II Valor atípico
Probabilidad	Probabilidad Error tipo I y Error Tipo II en aplicaciones del Teorema de Bayes
Distribuciones	Resultado significativo en Distribución Binomial y Distribución Normal Nivel de significación en Distribuciones del muestreo
Inferencia	Intervalos de confianza Pruebas de hipótesis

En conclusión, podemos decir, por los primeros resultados que obtuvimos, que se favorece a los estudiantes notablemente introducir a lo largo del curso el razonamiento inferencial, aunque faltaría revisar el estado de otros problemas como la comprensión del concepto distribución del muestreo o el de parámetro como constante y como variable, así como también si se mantienen las dificultades ya reportadas alrededor de la Inferencia estadística tal como el papel del parámetro y los estadísticos en los ensayos de hipótesis y los errores de interpretación del valor p.

CONCLUSIÓN

A través de este grupo de discusión se mostró que nuestra comunidad está haciendo esfuerzos por retomar las aportaciones de otros países, adaptar y también mejorar las propuestas. En particular, hay una importante contribución de trabajos doctorales recientes con interés en educación estadística ya presentados y que debemos conocer y difundir. Por otra parte, se mostró el esfuerzo que se está haciendo por incorporar ideas de inferencia informal en estudiantes de ciencias sociales y de ideas tempranas de la inferencia estadística en estudiantes de ingeniería.

La comunidad reunida coincidió por unanimidad en la importancia de estos espacios que ofrece RELME para impulsar la investigación en educación estadística y difundir lo que se está haciendo. También se acordó buscar impulsar la red formada en RELME 27 y darle continuidad al grupo en el próximo evento de RELME.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Albert, J. A.; Rodríguez, M.I.; Hernández, S.; Torres J.L. y Alvarado H. (2014). Red de colaboración en investigación de la educación estadística. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27,* 389-398. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Albert, J. A. y Ruiz, B. (2014). Dificultades en estudiantes universitarios del estadístico como variable aleatoria en la distribución del muestreo de medias. 27o. *Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. CLAME: Buenos Aires, Argentina.

Aliaga, M. and Gunderson, B. (2006). *Interactive Statistics* (3rd Edition). Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall.

Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: Componentes y desarrollo. *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 149-156.

Fernández, F., Andrade, L. y Álvarez (2015). *Panorama de la investigación en educación estadística*. Proyecto de Investigación en desarrollo financiado por la Universidad Pedagógica Nacional [DMA-412-15]. Bogotá, Colombia.

Newton, J., Dietiker, L., Horvath, A. (2011). Statistics Education in the United States: Statistical Reasoning and the Statistical Process. En C. Batanero, G. Burril, C. Reading (Eds.) *Teaching Statistics in School Mathematics – Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp. 9-13). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Rodríguez, M. I., Albert, J. A. y Agnelli, H. (2011). Controversias sobre las pruebas de hipótesis: sus implicaciones para su enseñanza. *Contribuciones a la Enseñanza y Aprendizaje de la Probabilidad y la Estadística 2011*. Puebla, México: BUAP.

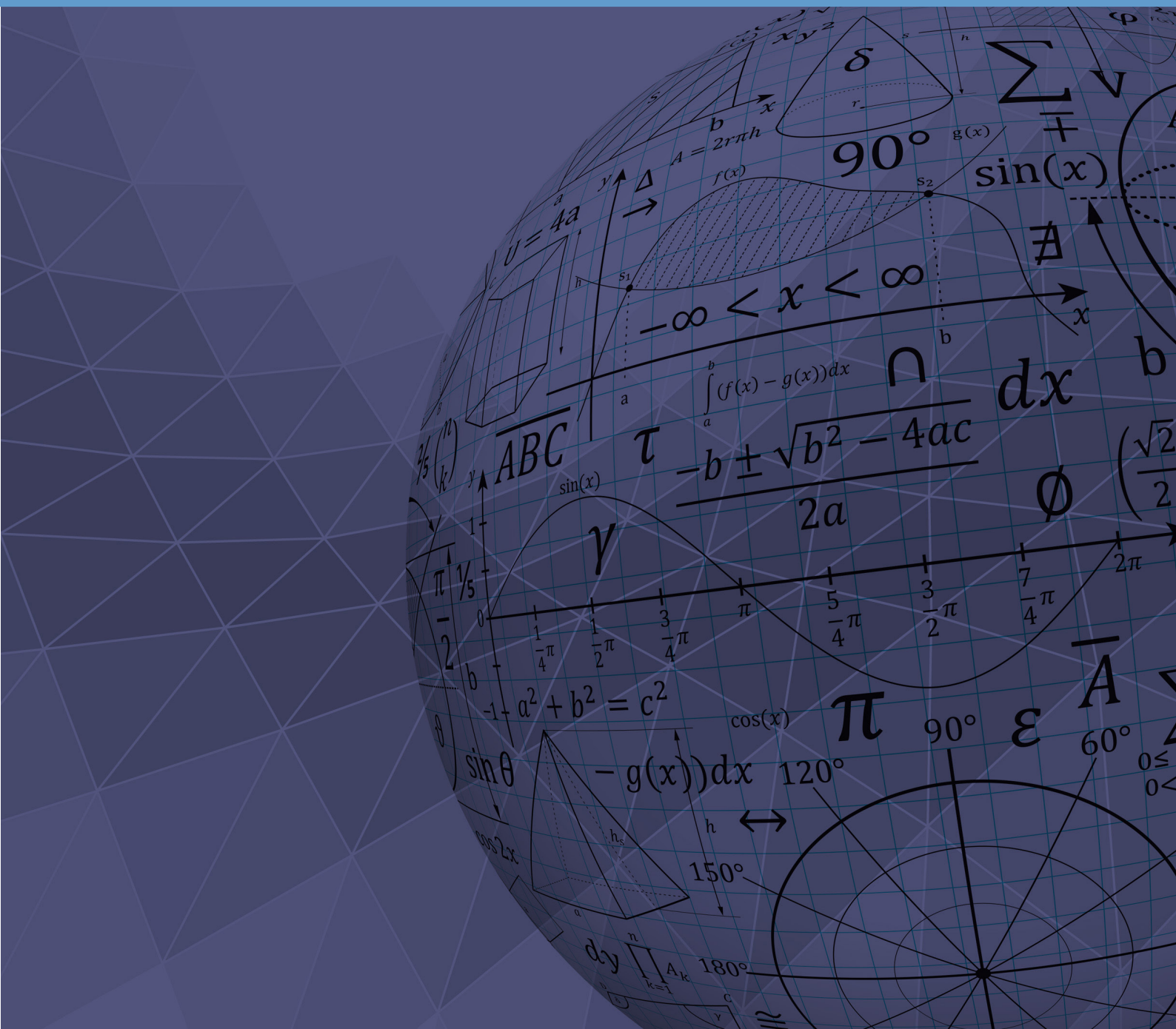
UNISON (2004) *Programas de Estudio de Cursos de Matemáticas en la División de Ciencias Sociales de la Universidad de Sonora*. Recuperado el 9 de enero de 2015 de http://www.mat.uson.mx/sitio/docenciaDCS.php

Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidence on learning difficulties about testing hypotheses. *Bulletin of the International Statistical Institute: Proceedings of the Fifty-Second Session of the International Statistical Institute*, 201-204.

Zieffler, A., Garfield, J., Delmas, R., y Reading, C. (2008). A Framework to Support research on Informal Inferential Reasoning. (P. Petocz, y T. Short, Edits.) International Association for Statistical Education (IASE/ISI), VII(2), 40-58.

CAPÍTULO 2

PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS



HACIA LA INCORPORACIÓN DE ASPECTOS REGIONALES EN LA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Adriana Atenea de la Cruz Ramos, Liliana Suárez Téllez, Hipólito Hernández Pérez
Universidad Autónoma de Chiapas, Instituto Politécnico Nacional (México)
ateneadr@hotmail.com, lsuarez@ipn.mx, polito_hernández@hotmail.com

Palabras clave: Educación

Key words: Mathematic

RESUMEN: El propósito de este escrito es compartir la experiencia de análisis de los resultados de unas pruebas estatales de matemáticas para observar si hay diferencias regionales en el desempeño de los estudiantes. Bajo el concepto de región, surgió el interés de saber si las características regionales de los estudiantes estaban relacionadas con su desempeño en el este concurso que convoca a estudiantes de nivel medio superior de todo el estado por lo que se analizaron los resultados de las pruebas en dos años y se encuestó a los alumnos que, después del proceso, ingresaron a la Universidad.

ABSTRACT: The purpose of this paper is to share the experience of analyzing the results of a state math test to see if there are regional differences in student performance. Under the concept of region, the interest arose to know if the regional characteristics of the students were related to their performance in this contest that summons to upper level students of all the state by which the results of the tests in two years and the students who, after the process, were admitted to the University were surveyed.

INTRODUCCIÓN

En el desarrollo de la investigación en matemática educativa se observa cómo se han ido incorporando componentes que intervienen en la construcción de conocimientos en matemáticas, Cantoral y Farfán (2003) dan una visión de la evolución de las problemáticas en diferentes momentos que va de una didáctica sin alumnos hasta una didáctica en escenarios socioculturales, en este último se expone la necesidad de dotar a la investigación una aproximación sistémica y situada que permita incorporar cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento. Para incorporar el componente regional, tomamos como punto de partida la investigación realizada por Hernández (2012) en la que expone la necesidad de estudiar el proceso de adquisición y recomposición que los alumnos de la carrera de Ingeniería Civil, que se encuentra en la capital del Estado de Chiapas, han hecho a lo largo de su vida, a fin de construir conceptos matemáticos. Hernández concluye haciendo hincapié en la importancia del factor social que envuelve el estudio de las matemáticas en cada región, este resultado nos anima a investigar más sobre los factores sociales de los estudiantes de cada una de las regiones del Estado de Chiapas que contribuyen en el desempeño de los estudiantes.

PLANTEAMIENTO

El Concurso Estatal de Matemáticas (CEM) es un evento que se desarrolla en la Facultad de Ingeniería Civil de la Universidad Autónoma de Chiapas (UNACH), se realiza con la finalidad de observar los avances que los estudiantes de las escuelas del nivel medio superior poseen en el área de las matemáticas, de tal forma que propicie un vínculo entre ellas con la Universidad Autónoma de Chiapas.

Del análisis de los resultados obtenidos en los concursos estatales de matemáticas realizadas el 2013 y 2014 de los cuales se tuvieron los siguientes datos: del primer concurso encontramos: El porcentaje de participación de las instituciones como Colegio de Bachilleres de Chiapas (COBACH), Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios (CBTIS), Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos (CECYT) y Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica (CONALEP), las Preparatorias del Estado y algunas preparatorias particulares. De un total de 333 participantes, la participación del COBACH y de las preparatorias del estado corresponde al 36%, el CECYT registró una participación del 12%, las escuelas particulares registraron el 7%, el CBTIS tuvo 6% de participación, así como el CONALEP lo hizo con un 3% (Facultad de Ingeniería, 2013). Por otra parte, en marzo del 2014, se llevó a cabo el segundo concurso estatal de matemáticas en donde el primer lugar estuvo compartido con un total de 40 aciertos lo obtuvo el municipio de Chilón correspondiente a la región Tulijá Tzeltal Chol, y el municipio de Ocozocoautla de la región valle zoque; en segundo lugar, con un registro de 39 aciertos se registra la zona metropolitana, norte con los municipios de Tuxtla e Ixtacomitan. En tercer lugar, se registra la región metropolitana con 38 aciertos, en cuarto lugar, se tiene la región de los llanos, y la Meseta Comiteca Tojolabal (Facultad de Ingeniería, 2014).

Se observa que la participación de los alumnos ha sido relevante independientemente de la región a la que pertenecen del estado de Chiapas; es controversial la participación de la zona metropolitana que, a pesar de la diversidad y cantidad de escuelas pertenecientes al nivel medio superior, se colocó en el tercer lugar; mientas que el primer lugar fue para el municipio de Chilón de la región Tulijá Tseltal Chol.

ACERCAMIENTO A UN MARCO DE ESTUDIOS REGIONALES

De acuerdo con Cabrera y Pons (2015), para el investigador que estudia regionalmente, es imprescindible la concepción de límites que vuelvan el espacio- tiempo de acción de los actores que se involucran en un problema determinado, pero no debe dejar a un lado sus relaciones con el exterior, en el momento específico en el que investiga. Por tanto la región es concebida intelectualmente por el investigador, pero no sólo en un espacio – tiempo determinado, sino que involucra el tiempo de los procesos llámese económicos, sociales, políticos o culturales que un grupo sea grande o pequeño comparten, ya sea por reconocerse como iguales, por trabajar en un mismo lugar, por hacer determinadas actividades a la misma hora; por mencionar algunos ejemplos, lo anterior a pesar de la permanencia en un espacio y tiempo, misma que no será estática, si no lo contrario, ya que por existir diversas interacciones de los que lo habitan se torna dinámico, cambiante (Cabrera y Pons, 2015)

Ante la diversidad de factores, ambientes y espacios, en un determinado tiempo, se ha reflexionado acerca de los términos, definiciones, conceptos que ayudarán a la delimitación de la investigación. Partiendo de la concepción de “estudios regionales”, a razón de su carácter incluyente por la participación de investigadores formados en distintas disciplinas, mismos que discuten sobre la región, y que han encontrado que los estudios regionales deben tener naturaleza, una mirada transdisciplinaria que responda a la necesidad de pensar los problemas actuales de manera integral, incorporando aspectos tanto cultural como naturales que marcan la actuación de las personas en contextos diversos.

De acuerdo a algunas definiciones de globalización se encuentra la emitida por Boisier (1997), al explicar que la globalización (enfocándose al ámbito educativo) puede ser fatal para las distintas regiones de país si se aborda descuidadamente, sin una inteligencia conductora que sirva de guía, pero al incorporar una política regional, se establece una condición para minimizar las posibilidades de fracaso en la inserción de las regiones. Así mismo al hablar de una educación, no se puede evitar pesar en exámenes, parámetros, mismos que son comparados y analizados a nivel mundial como parte de una educación global. Pero como se mencionó en líneas anteriores la globalización ha llegado al ámbito educativo de tal forma que se ha sido evidente la incorporación de diferentes políticas educativas, así como la aplicación de pruebas, parámetros a nivel mundial pero que no deberían ser iguales en todo México, dada las condiciones del país y mucho menos en el estado de Chiapas. Desde el 2006 se han aplicado en nuestro país diversas reformas educativas y pruebas tales como Pisa y ENLACE por mencionar algunas, y por ende en nuestro estado; sin embargo, ha surgido la pregunta ¿por qué se aplican? Por ello se realizó una breve revisión bibliográfica a fin de conocer el ¿por qué se ha aplicado? y ¿desde cuándo?; encontrándose que la prueba PISA por sus siglas en inglés, significa *Programme for International Student Assessment* (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación México, 2015).

La revisión de los textos incluyó la revisión del Plan Nacional de Desarrollo de tal forma que se logra distinguir que se retoman los objetivos planteados en los párrafos anteriores. El Programa Nacional de Desarrollo (PND) en México, tiene como objetivo garantizar la inclusión (integración de la diversidad de las necesidades educativas) y equidad en el sistema educativo, se requiere aumentar las oportunidades de acceso a la educación, permanencia y avance en los estudios a todas las regiones y sectores de la población. (Secretaría de Educación Pública, 2013). Partiendo

de la referencia anterior se hace evidente la necesidad de revisar algunos objetivos del PND de los que se retoman particularmente: el porcentaje de deserción escolar en el nivel medio superior uno de los desafíos prioritarios y urgentes, ya que es un fenómeno con altos costos económicos y sociales, perpetuando las condiciones de exclusión (situación desfavorable socialmente de una persona) y pobreza. Entre las causas de este problema se encuentran el ámbito económico, educativo y familiar, por tanto, su descenso porcentual, es un objetivo de la política educativa de vital importancia. Las escuelas más pequeñas y alejadas, con poblaciones con mayor incidencia de pobreza y marginación, como en el caso de las comunidades indígenas, mantienen sistemáticamente los resultados más bajos en el examen ENLACE 2012. Por tanto, surge la necesidad de realizar la investigación en escuelas de nivel medio superior (Secretaría de Educación Pública, 2013).

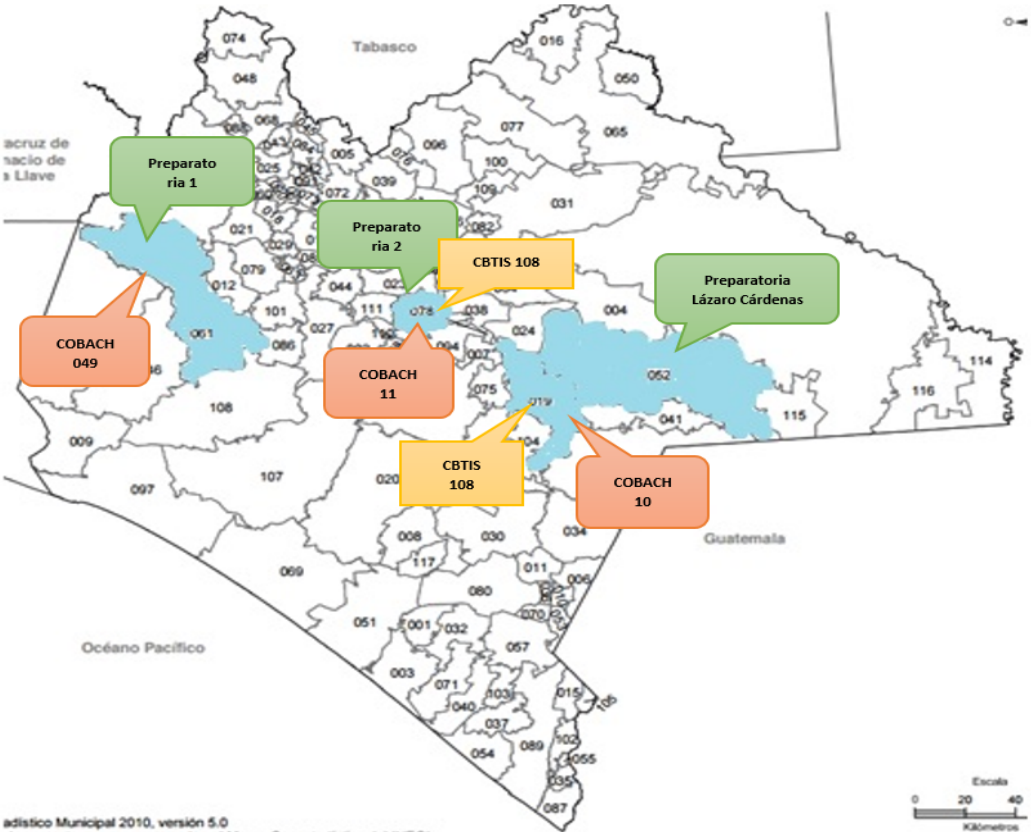
Para la construcción de la región se toma como referencia la definición de Giddens (1995), de *sede* a la FI, para tener referentes al tomarla como lugar de confluencia de diferentes alumnos que presentan: un interés en común: acceder a la FI de la UNACH; que tienen como formación última la del medio superior en el área de físicos-matemáticos; en su cotidianidad comparten el estudio la Licenciatura de Ingeniería Civil cuyo contenido curricular en materias de naturaleza matemáticas (Plan de Estudios 2007), es posible tomar referentes de la formación previa de los estudiantes. Es pertinente mencionar que no se trabajará con los alumnos de la FI, si no que ellos nos ayudarán a construir la región de estudio, de tal forma que conozcamos al profesor, la escuela, el nivel educativo y el municipio del cual provienen, a razón su formación última en el área de físicos matemáticos y tuvieron éxito en su ingreso a la Licenciatura en Ingeniería Civil.

DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA

En una primera aproximación a la construcción de la región a estudiar se realizó un toma de datos en el mes de abril del 2015, por medio de la aplicación de una encuesta a aproximadamente 250 alumnos que actualmente se encuentran en primer semestre de la FI de la UNACH para conocer el lugar de origen, la escuela de procedencia, área de terminación del bachillerato y su experiencia en el aprendizaje de las matemáticas.

En una segunda etapa se procedió a clasificar la información para conocer el municipio que presentaba más estudiantes escritos y la escuela de la que provenían. Se obtuvieron los resultados siguientes: la mayor cantidad de alumnos que ingresaron a la Facultad de Ingeniería fueron del municipio de Tuxtla Gutiérrez, San Cristóbal de las Casas, Coita, Las Margaritas y Comitán; pero retomando los objetivos del PND "… las escuelas más pequeñas y alejadas, con poblaciones con mayor incidencia de pobreza y marginación, como en el caso de las comunidades indígenas, mantienen sistemáticamente los resultados más bajos…" (Secretaría de Educación Pública, 2013), se trabajara únicamente con los demás municipios exceptuando la ciudad de Tuxtla Gutiérrez por su carácter de capital del estado. En la construcción de la región también se identificó la que se hace construye tomando encuentra la escuela de nivel medio superior que se encuentra en ése municipio de la cual se obtuvieron.

Mapa 1. Ubicación geográfica de planteles educativos propuestos en la investigación. Fuente: (INEGI, 2015).



La incorporación de la componente social es pertinente en Matemática Educativa, ya que dependiendo de la escuela que provengan tienen una cultura matemática, una forma de estudiar que entra en conflicto al llegar a la facultad de Ingeniería ya que se enfrentan a una forma de enseñar diferente, de formas de calificar diferentes y conocimientos que tal vez jamás habían escuchado; determinada por el profesor que dirigía las asignaturas de naturaleza matemática. Se tiene relación directa de la región estudiada, tanto territorialmente como la encontrada al revisar el tipo de escuela a la que asistió ya sea Colegio de Bachilleres de Chiapas (COBACH), Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios (CBTIS), Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos (CECYT) y Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica (CONALEP) y las Preparatorias del Estado. Las sedes que incluyen en la región a investigar son las escuelas: ubicadas en los municipios de Ocozocoautla, San Cristóbal de las Casas, Las Margaritas, Comitán.

A MANERA DE CONCLUSIÓN.

Los *estudios regionales* abarcan los estudios acerca de flujos y redes de fenómenos en los que se involucran factores económicos, educativos y por supuesto, sociales. Las inquietudes de acuerdo al tema de la influencia de la formación de profesores y su influencia en la enseñanza de las matemáticas, no es un tema que sólo se investigue en el estado de Chiapas, sino que son países como Colombia, Cuba, Perú por mencionar algunos. Existen investigaciones en las que se

entrelazan la enseñanza de las matemáticas y la mirada de los estudios regionales; es necesario investigar aún más en la resignificación de los conocimientos matemáticos partiendo tanto de áreas de conocimiento específico, en nuestro caso de las matemáticas, incorporando la visión sociocultural, es decir el cómo se vive ese conocimiento en una comunidad, localidad o ciudad, así como por cada grupo de personas, como nuestros estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Boisier, S. (1997). El vuelo de una cometa. Una metáfora para una teoría del desarrollo territorial [CD-ROM]. México: UNACH.

Cabrera, J. C. y Pons, L. (2015). *Apunte: El campo de los estudios regionales en Chiapas*. México: UNACH.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución.*Revista Latinoamericana en Matemática Educativa*, 6(1): 27-40.

Facultad de Ingeniería (2013). *Resultados del primer Concurso Estatal de Matemáticas. Archivos de la Facultad de Ingeniería de la UNACH*. México: UNACH.

Facultad de Ingeniería (2014). *Resultados del segundo Concurso Estatal de Matemáticas. Archivos de la Facultad de Ingeniería de la UNACH.* México: UNACH.

Giddens, A. (1995). *La constitución de la sociedad. Bases para la teoría de la estructuración.* Buenos Aires: Amorrortu.

Hernández, H. (2012). *Aprendizaje de las matemáticas: Un acercamiento a las estrategias de construcción de conceptos matemáticos en la carrera de ingeniería civil.* Tesis de Doctorado no publicada. Universidad Autónoma de Chiapas. México.

INEGI. (2015). INEGI. Recuperado el 2015

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación México. (30 de 04 de 2015). INEE. Obtenido de http://www.inee.edu.mx/index.php/acerca-del-inee

Secretaría de Educación Pública. (2013). Programa Sectorial de Educación 2013-2018. México, D. F.: Secretaría de Educación Pública.

Secretaría de Educación Pública. (2013). Secretaría de Educación Pública. Obtenido de http://www.sep.gob.mx/es/sep1/programa_sectorial_de_educacion_13_18#.VUrnO_l_Oko

ANALISIS TAREAS EN EL LIBRO DE TEXTO DE MATEMÁTICA EN EL NIVEL PRIMARIO EN RELACIÓN AL TEMA DE PROBABILIDAD. ANÁLISIS DE UN CASO CHILENO

Nicolás Andrés Sánchez Acevedo
CICATA-IPN (México), UAHC (Chile)
nicolas1983@gmail.com

Palabras clave: texto de matemática, probabilidad, ejercicio, resolución de problemas

Key words: maths textbook, probability, exercise, problem solving

RESUMEN: Por mucho tiempo el texto escolar ha sido (y es) el recurso elemental en clase de Matemática por profesores y estudiantes. Utilizado como recurso para organizar y planificar la enseñanza, como también para proponer a los estudiantes las actividades y tareas a desarrollar para alcanzar los objetivos planteados. En este artículo se presentan los resultados de una investigación en el tema de probabilidad para un libro de texto de Matemática de 8° grado. El objetivo propuesto es analizar y describir algunas inconsistencias en el tratamiento de este tema y las actividades propuestas. Se utilizó un diseño de estudio de caso por medio de análisis de contenido. Los resultados muestran que el concepto de probabilidad teórica y experimental se definen casi de forma similar, lo que puede ser fuente de confusión para estudiantes y profesores. Además, las actividades propuestas para promover la idea de probabilidad experimental, por medio de heurísticas es muy limitada, dando un énfasis a ejercicios de tipo rutinario.

ABSTRACT: For a long time, textbooks have been, and still are, the basic resource in Maths classes for both teachers and students. They have been used as a source to organise and plan teaching practices, as well as to present activities and tasks for students to develop in order to achieve the suggested objectives. In this article, the results of a research related to the Probability subject for an eighth graders Maths textbook are shown. The objective proposed in this study is to analyse and describe some of the inconsistencies regarding the way in which this topic is developed throughout the textbook and the activities offered to students to work in. A case study design was used by means of content analysis. The results of it show the concept of theoretical and experimental probability through very limited heuristics, emphasizing exercises belonging to the every-day management category.

INTRODUCCIÓN

Hoy en día se hace necesario formar personas para la sociedad actual. Sociedad que demanda un conocimiento adecuado para conocer, analizar e interpretar la información que proviene de diversos medios. Para Batanero (2001), estas personas deben ser capaces de evaluar e interpretar la información proveniente de diversos contextos a través del razonamiento estocástico, lo que implica otorgar un valor a la Estadística y la Probabilidad en la actual sociedad.

Dentro de los cuatro ejes que propone el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) se encuentra *"Probabilidad y Estadística"* (los otros tres son Números, Algebra y funciones y Geometría). En las bases curriculares, cada uno de estos ejes, plantea el desarrollo de cuatro habilidades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática escolar. Se clasifican en: (i) resolución de problemas, (ii) representación, (iii) modelación y (iv) argumentación y comunicación (MINEDUC, 2013). La base curricular, en el caso de Matemática, es el documento oficial que entrega los lineamientos y contenidos que se deben desarrollar de forma progresiva desde 7° grado de enseñanza primaria a 2° grado de enseñanza secundaria en Chile. La configuración de todos estos elementos (objetivos, habilidades, contenidos y actitudes), plantea la necesidad de contar con recursos alineados para desarrollar y potenciar los aprendizajes en clases. Uno de estos recursos, el de mayor uso y mayor influencia por estudiantes y profesores es el libro de texto.

En éste se deben proponer actividades que permitan por una parte, desarrollar habilidades necesarias para construir conocimiento en el proceso de aprendizaje en los diversos ejes curriculares (Números y álgebra, Geometría, datos y azar y, álgebra). Una de las habilidades a la que se hace mayor énfasis en el currículo matemático es la resolución de problemas. Para comprender los procesos que se evidencian en el desarrollo del pensamiento probabilístico, el cual se inserta como un tema particular en la unidad de Probabilidad y Estadística, es necesario comprender que el análisis de datos está sujeto a la incertidumbre y la variabilidad. Esto implica que por una parte las tareas, explicaciones y definiciones en el texto escolar deben ser claras y diferenciadores una de la otra a nivel conceptual básicamente y, por otra, las actividades derivadas de estas tareas preliminares, deben proveer de mecanismos para que los estudiantes de alguna forma construyan elaborando sus propias heurísticas validando las definiciones que se entregan de forma atomizada. Es decir, se deben propiciar espacios para analizar la variabilidad en el análisis de datos, también, determinar relaciones entre variables, abrir actividades que permita a los estudiantes diseñar diversos experimentos y estudios, logrando así mejorar las predicciones son algunos de los aspectos que la estadística tiene en cuenta (Ponteville, 2014). "Las discrepancias se limitan esencialmente a la profundidad con que se trate la probabilidad, lo que se relaciona con el énfasis en cuanto a su existencia autónoma o bien como una herramienta fundamental para la inferencia estadística" (Del Pino y Estrella, 2012, p. 56).

Con base en las consideraciones anteriores, se propone el siguiente objetivo general:

- Analizar y describir las tareas que propone el libro de texto de Matemática de 8° grado de enseñanza primaria de Chile en relación al tema de probabilidad

Se hace especial hincapié en aquellas situaciones problemas que permitan promover la experimentación, para construir la noción de probabilidad y cómo este valor permite de alguna forma "cuantificar" el grado de incertidumbre de algunos fenómenos.

CURRICULO CHILENO

El Currículo Chileno en la actualidad, incorpora el eje de *"Probabilidad y Estadística"*, desde los primeros grados de enseñanza primaria. Esto se debe a la importancia que ha adquirido hoy en día que todo ciudadano alcance un nivel adecuado para la comprensión, interpretación y análisis de información que emana de diversos medios de comunicación; entendiéndose por esto "cultura estadística".

> […] que se refiere a dos componentes interrelacionados: a) capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos, y b) capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante. (Gal, 2002, pp. 2-3)

De este modo la base curricular de Matemática hace un fuerte énfasis en proponer un lineamiento que permita a los estudiantes alcanzar competencias mínimas en términos de las actividades que lleven a cabo como habilidad de trabajo.

> […] contextualizar el aprendizaje mediante problemas reales relaciona la matemática con situaciones concretas, y facilita así un aprendizaje significativo de contenidos matemáticos fundamentales. Resolver problemas da al estudiante la ocasión de enfrentarse a situaciones desafiantes que requieren, para su resolución, variadas habilidades, destrezas y conocimientos que no siguen esquemas prefijados y, de esta manera, contribuye a desarrollar confianza en las capacidades propias de aprender y de enfrentar situaciones, lo que genera, además, actitudes positivas hacia el aprendizaje (MINEDUC, 2012, p. 87)

Se asume una postura, que en términos concretos permitiría a estudiantes tener espacios para construir, por medio de actividades debidamente elaboradas, sus propios conocimientos y lograr una institucionalización de los mismos.

En cuanto a los contenidos que se relacionan con el tema de probabilidades, los estudiantes se inician con juegos e ideas de azar desde 2° de enseñanza primaria, donde se incluyen: (a) recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre juegos con monedas y dados, usando bloques y tablas de conteo y pictogramas y, (b) registrar en tablas y gráficos de barra simple, resultados de juegos aleatorios con dados y monedas. Estos contenidos incrementan el nivel de complejidad hasta llegar a final de 2° ciclo de educación primaria, paso previo de la educación secundaria. En 8° de enseñanza primaria los temas asociados a probabilidad incluye explicar el principio combinatorio multiplicativo: (a) a partir de situaciones concretas (b) representándolo con tablas y árboles regulares […] y, (c) utilizándolo para calcular la probabilidad de un evento compuesto.

TEXTOS ESCOLARES

Los textos escolares son un recurso de uso masivo, los que muchas veces no responden a necesidades particulares de los estudiantes, dado que asume un rol y un saber institucionalizado y atomizado. Esto se opone a lo que se persigue al enseñar matemática hoy, que es una construcción y una mayor participación de estudiantes en su aprendizaje.

En el caso del libro de texto, éste es parte una es una publicación especializada. En cambio un manual es un libro de texto que se utiliza en instituciones de “escolarización”. En primera instancia lo recomiendan los gobiernos de turno y en segundo lugar los profesores especialistas. Su estructura se caracteriza por una forma de presentar y organizar el contenido textual que atiende a una combinación de elementos entre los que sobresalen:

> (a) un modelo de agrupación temática con denominación propia, a saber: lecciones, temas, unidades, actividades; (b) un modelo de codificación que usa diferentes tipos de letras, párrafos numerados, y epígrafes resaltados; (c) unas formas específicas de expresión literaria como son las definiciones, explicaciones, demostraciones, preguntas y respuestas, diagramas; etc.; y (d) unos modos de orientación al lector mediante el uso de ejemplos, ejercicios, problemas, cuestiones, o actividades (Gómez, 2009, p. 23)

El tratamiento de las actividades en los textos sigue lineamientos acordes a los programas de estudio. Estos se dan en dos perspectivas: desde una visión formal, la cual está influenciada por las ideas desde las teorías de Piaget en cuanto a la forma de comprender la idea de azar y probabilidad asociada a un razonamiento combinatorio y otra que es de carácter heurístico o frecuencia que tiene como base la experimentación por parte de los estudiantes (Perusini y Ferrero, 2002).

CONOCIMIENTO PROBABILISTICO

En el último tiempo se han venido acuñando diversas caracterizaciones para aquellos conocimientos que se pretende que los estudiantes logren desarrollar en sus años de escolarización. Diversos congresos (International congress teaching statistics) y journals (Statistical education research journals) ha desarrollado y discutido investigaciones en torno al *Statistical Thinking*, los cuales cobran importancia, pues de aquí se desprende ideas relevantes asociadas al pensamiento probabilístico en etapa escolar a través de la experimentación.

Como bien se puede saber, el cálculo de Probabilidades se ocupa de estudiar los fenómenos que presentan grados de aleatoriedad. Pero ¿Qué entendemos por aleatoriedad? Consideraremos la acepción hecha por Moliner (1983, citado en Batanero, 2001, p. 12) “Incierto. Se dice de aquello que depende de la suerte o del azar, siendo el azar, la supuesta causa de los sucesos no debidos a una necesidad natural ni a una intervención humana ni divina”.

En términos escolares, este concepto se circunscribe al conocimiento que se debe desarrollar en los grados del nivel primario, se hace énfasis en la concepción clásica de probabilidad. La probabilidad de un suceso es el "cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles, siempre que todos sean equiprobables. En palabras de Batanero (2001) “la acepción de la probabilidad, consideramos que un objeto (o un suceso) es un miembro aleatorio de una cierta clase de objetos (población), si la probabilidad de obtener este objeto (en un sorteo u otro experimento) es igual que la de cualquier otro miembro de su clase” (p, 13).

METODOLOGÍA Y ANÁLISIS

Desde el año 2016 se comienzan a implementar desde 7° grado de enseñanza primaria hasta 2° grado de enseñanza secundaria, la base curricular de Matemática y los programas de estudios actualizados en cada caso, se ha optado por considerar el texto de estudio 8° de primaria. Principalmente, por ser uno de los niveles que son evaluados anualmente por el Sistema de Medición de la Calidad Educativa (SIMCE) en matemática. Dentro de sus características este debiese hacer hincapié en actividades y tareas tendientes a experimentar por medio de actividades que profundicen en el conocimiento y contrucción.

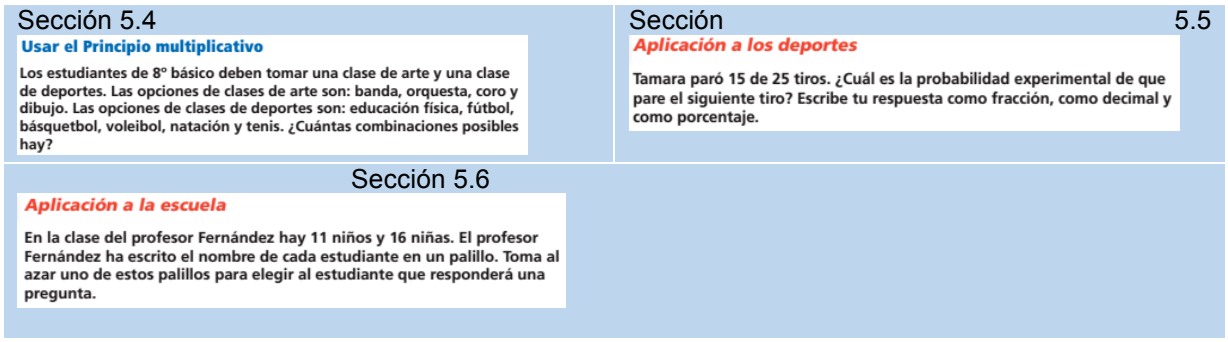
La presente investigación tiene por objetivo analizar y describir actividades presentes en un texto de Matemática en el tema de probabilidad.

Esta adopta una metodología cualitativa bajo un diseño de estudio de caso, utilizando el análisis de contenido como técnica de recolección de datos, que en palabras de López (2002) “se constituye en un instrumento de respuesta a esa curiosidad natural del hombre por descubrir la estructura Interna de la información, bien en su composición, en su forma de organización o estructura, bien en su dinámica” (p. 173).

El texto de Matemática analizado es: Bennet, M., Burger, D., Chard, D., Hall, E., Kennedy, P., Renfro, F., Roby, T., Scheer, J., & Waits, B. (2014). *Texto para el estudiante Matemática 8° básico.* (1ª edición). Editorial Houghton Mifflin Harcour. Galileo

De la estructura general: La estructura del texto se divide en tres secciones (i) sección (5.4) métodos de conteo y espacios muestrales. Aquí se proponen actividades asociadas al principio multiplicativo, (ii) sección (5.5) probabilidad experimental, donde se presentan actividades que introducen la idea de probabilidad desde la experimentación y, (iii) sección (5.6) probabilidad teórica, donde se formaliza la idea de probabilidad “clásica” en términos de la sección anterior (Figura 1). La mayoría de las secciones presentan actividades con casos de diversos contextos relacionados a situaciones cotidianas.

Figura 1. Tipos de problemas en cada una de las secciones del texto del estudiante de Matemática. Fuente: Bennet et al. 2014, pp. 172-183



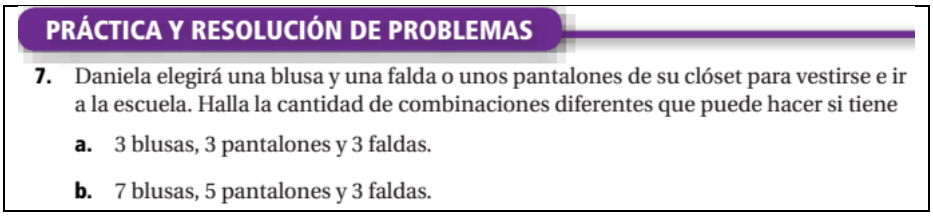
Sección 5.4: Métodos de conteo y espacios muestrales

Esta sección está compuesta de un apartado introductorio. Se explica de manera simple lo que es un espacio muestral para introducir con un ejemplo el conteo de puntos muestrales y aplicar el principio multiplicativo; sólo en este caso se propone un diagrama de árbol para hacer más amigable la comprensión.

En este mismo apartado, se muestran dos ejemplos adicionales para aplicar el principio multiplicativo. Estos tienen por objetivo que los estudiantes consoliden la comprensión y aplicación de la regla. Aun así, las indicaciones para resolver estas actividades, dan cuenta, simplemente de aspectos rutinarios de resolución.

En el apartado de ejercitación se proponen una serie de situaciones contextualizadas con distintas etiquetas (12 problemas): "práctica con supervisión" (se presentan tres problemas), "práctica independiente" (se proponen tres problemas), "práctica y resolución de problemas" (se proponen seis problemas). Esta última presenta actividades para poder llevar a cabo habilidades de los estudiantes con base a una profundización del conocimiento y algunas heurísticas. Una de ellas es "elegir una estrategia", que pretende que los estudiante elaboren y configuren un plan. La otra actividad es "escríbelo" que pretende que el estudiante comunique sus ideas de manera escrita y finalmente un "desafío" para aplicar conocimientos adquiridos (Figura 2).

Figura 2. Ejemplo de problema de aplicación del principio multiplicativo (Bennet et al. 2014, p.174).



PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

7. Daniela elegirá una blusa y una falda o unos pantalones de su clóset para vestirse e ir a la escuela. Halla la cantidad de combinaciones diferentes que puede hacer si tiene

   a. 3 blusas, 3 pantalones y 3 faldas.

   b. 7 blusas, 5 pantalones y 3 faldas.

Sección 5.5: Probabilidad experimental

Esta sección inicia con un ejemplo aplicado de futbol, "Tamara paró 15 de 25 tiros" conceptualizando "la probabilidad experimental" de una forma similar a la de probabilidad teórica, diferenciándose del símbolo de igualdad (Figura 3).

Figura 3. Definición del texto sobre probabilidad experimental (Bennet et al. 2014, p.176).

PROBABILIDAD EXPERIMENTAL

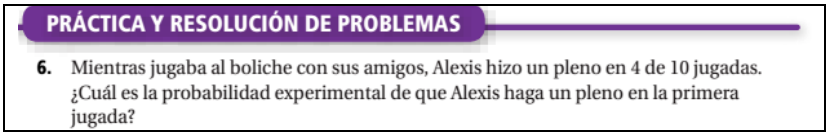
$$\text{probabilidad} \approx \frac{\text{cantidad de veces que ocurre un suceso}}{\text{cantidad total de pruebas}}$$

No se propone alguna situación inicial donde se haga énfasis a algún tipo de experimentación que permita construir la definición antes mostrada. Y menos aún la consideración sobre la probabilidad clásica bajo el supuesto de equiprobabilidad.

Siguiendo esta primera parte, se proponen dos ejemplos adicionales donde se explica la "probabilidad teórica" sin alusión a actividades de experimentación que permitan una estimación de la probabilidad de un evento (Figura 4).

Los siguientes apartados son similares al anterior. Un set de problemas contextualizados en su mayoría, pero con una simple aplicación algorítmica de la expresión anterior de "probabilidad experimental".

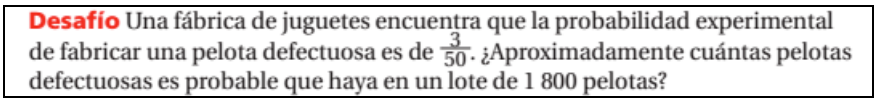
Figura 4. Ejemplo de aplicación de probabilidad experimental de la sección 5.5 (Bennet et al. 2014, p.177).


PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

6. Mientras jugaba al boliche con sus amigos, Alexis hizo un pleno en 4 de 10 jugadas. ¿Cuál es la probabilidad experimental de que Alexis haga un pleno en la primera jugada?

Problemas de práctica con supervisión del profesor, un parte de problemas de práctica independiente y una práctica y resolución de problemas. En esta última hay un problema de razonamiento crítico, uno de varios pasos y un desafío (Figura 5).

Figura 5. Desafío propuesto en el apartado de resolución de problemas de la sección 5.5 (Bennet et al. 2007, p.177).


Desafío Una fábrica de juguetes encuentra que la probabilidad experimental de fabricar una pelota defectuosa es de $\frac{3}{50}$. ¿Aproximadamente cuántas pelotas defectuosas es probable que haya en un lote de 1 800 pelotas?

Este desafío, aunque no sigue la línea de los problemas que se presentan en general. Es posible resolverlo por simple inspección, dado que basta con amplificar por un número adecuado (factor 36) y determinar que en este lote hay 108 pelotas defectuosas.

Sección 5.6: Probabilidad teórica

Esta sección tiene por objetivo formalizar una expresión para el cálculo de probabilidades de fenómenos aleatorios, habiendo internalizado la idea de equiprobabilidad de eventos aleatorios. Se aprecia que la expresión para el cálculo de probabilidad solo difiere de la anterior por el símbolo de igualdad (Figura 6) y se define el evento del cual se quiere obtener una cuantificación. Además, a diferencia de los problemas en que pregunta por probabilidad experimental, esta sección pregunta en sus problemas sobre la probabilidad teórica.

Figura 6. Definición del texto sobre probabilidad teórica (Bennet et al. 2014, p.180).

Modelo de Laplace

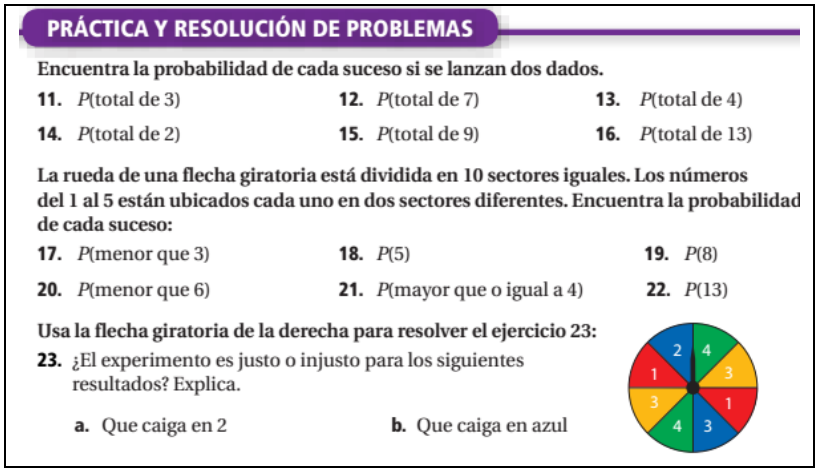
$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

Los apartados siguientes muestran problemas de aplicación directa de la expresión. No se hace alusión a los aspectos que subyacen al cálculo de probabilidades como lo es la variabilidad, el azar, la incertidumbre. Se explica en estos problemas las diversas formas de representación de la probabilidad, es decir, porcentual, como frecuencia relativa y como razón.

Los apartados siguientes son idénticos a los propuestos en las secciones anteriores, práctica con supervisión, práctica independiente y resolución de problemas. Si bien es que se presenta una situación cotidiana de simple aplicación, no presenta un mayor desafío cognitivo. Este termina siendo un simple ejercicio de aplicación matematizada (Figura 7).

El apartado final de resolución de problemas propone un problema para hacer elección de alguna estrategia de resolución, un problema que tiene la intención que los estudiantes apliquen estrategias de comunicación escrita y un desafío que en principio no es de aplicación tan directa, pero se pueden llevar a cabo por inspecciones simples.

Figura 7. Ejemplos de actividades del apartado de práctica y resolución de problemas de la sección 5.6 de probabilidad teórica (Bennet et al. 2014, p.182).



PRÁCTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Encuentra la probabilidad de cada suceso si se lanzan dos dados.

11. *P*(total de 3) **12.** *P*(total de 7) **13.** *P*(total de 4)

14. *P*(total de 2) **15.** *P*(total de 9) **16.** *P*(total de 13)

La rueda de una flecha giratoria está dividida en 10 sectores iguales. Los números del 1 al 5 están ubicados cada uno en dos sectores diferentes. Encuentra la probabilidad de cada suceso:

17. *P*(menor que 3) **18.** *P*(5) **19.** *P*(8)

20. *P*(menor que 6) **21.** *P*(mayor que o igual a 4) **22.** *P*(13)

Usa la flecha giratoria de la derecha para resolver el ejercicio 23:

23. ¿El experimento es justo o injusto para los siguientes resultados? Explica.

a. Que caiga en 2 **b.** Que caiga en azul

REFLEXIONES FINALES

Con respecto la estructura del texto y los tipos de tareas que propone, esta sigue la línea de los resultados de otras investigaciones de análisis de texto (Sánchez, 2012; Serradó, Azcarate y Cardeñoso, 2006). Estas secciones responden a ejercicios para aplicar lo aprendido. En nuestro caso las secciones proponen ejercicios "simplistas" y "rutinarios". La estructura del texto responde, en general, a necesidades particulares institucionales, a necesidades y demandas de carácter gubernamental, político y económico. Es decir, se aprecian ciertas inconsistencias entre algunas habilidad que se proponen en la base curricular de Matemática (lo prescrito) y lo que se da cuenta al analizar las tareas propuestas por el texto. Las actividades propuestas, "simulan" ser problemas con carga cognitiva; pero, en realidad solo alimentan "trayectorias mecanicistas" al responder únicamente al desarrollo de *"habilidades para dar cuenta de resultados en pruebas estandarizas"*.

En todas las secciones donde se propone "práctica y resolución de problemas", la mayoría de las tareas propuestas son sólo aplicaciones de una "formula" que propone el texto, que en los casos presentados son acabados y son espacios la construcción de ideas y conceptos.

En una cantidad mínima de casos, los desafíos presentan un mayor grado de complejidad, pero aun así, estos podrían ser resueltos por simple inspección. Del mismo modo, no se aprecian preguntas que lleven a los estudiantes a cuestionar la comprensión conceptual de la variabilidad de los datos, o lo que sucedería si el tamaño de la muestra cambia.

Con respecto a las secciones 5.4, 5.5 y 5.6 del texto, no se alude a ningún tipo de tareas que promuevan habilidades propuestas en la base curricular de Matemática, sólo se evidencian actividades de tipo rutinario.

En ninguna de las secciones, se evidencia una diferenciación clara de los que es probabilidad experimental y probabilidad. La sección "probabilidad experimental" no propone actividades que transiten desde lo experimental a lo teórico (clásico). Tampoco hay propuestas de actividades que permitan a los estudiantes experimentar y deducir la posible construcción de la expresión de probabilidad, como por ejemplo, el lanzamiento de dado y anotar sus resultados en una serie de repeticiones, actividades con dados, monedas u otra actividad. Es decir, la lección sólo atiende a un constructo de nombre y forma, pero no de fondo, dando paso, principalmente a una forma de operacionalizar las tareas mecanicistamente.

Con base en las conclusiones antes expuestas, se hace necesario que los libros de texto logren responder más a necesidades e intereses propios de los estudiantes, incluyéndolos y haciéndolos participes en tareas que si promuevan una actitud constructiva e inductiva; aspectos que son posible implementar y potenciar al construir la idea de probabilidad de un evento aleatorio. Para el caso particular de la elaboración y confección de libros de texto en el eje de Probabilidad y Estadística, debiesen incorporarse equipos multidisciplinarios especialista en Educación Estadística. Estos podrían dar luces de cómo presentar el tratamiento del azar en los libros de texto, es decir, que las propuestas de tareas, actividades, proyectos y problemas incluya a la variabilidad como eje central de los temas propiciando el desarrollo de un pensamiento que no esté condicionado por el determinismo que actualmente ha y sigue fomentando el libro de texto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística (disponible en http://www.ugr.es/local/batanero).

Bennet, M., Burger, D., Chard, D., Hall, E., Kennedy, P., Renfro, F., Roby, T., Scheer, J., y Waits, B. (2007). *Texto para el estudiante Matemática 8° básico.* (1ª edición). Editorial Houghton Mifflin Harcour. Galileo

Del Pino, G. y Estrella, S. (2012). Educación estadística: Relaciones con la matemática. *Pensamiento educativo*, 49(1), 53-64.

Gal, I (2002). Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review,* 70(1), 1-25.

Gómez, B. (2011). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA*, *5*(2), 49-65.

López Noguero, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. XXI, *Revista de Educación*, 4, 167-180.

MINEDUC. (2012). *Bases curriculares educación básica. Matemática*. Santiago: Ministerio de Educación.

MINEDUC. (2013). *Bases curriculares Matemática, 7º y 8º básico – 1º y 2º Medio.* Unidad de currículo y evaluación. Ministerio de educación. Chile. http://www.agenciaeducacion.cl/resultados nacionales-simce-2013/

Perusini, M., y Ferrero, S. (2002). Comprensión de la idea intuitiva de la idea de probabilidad en los niños de 5 años. En C. Crespo. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 15, pp. 439-444). México D. F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Polya, G. (1962). Cómo plantear y resolver problemas. Trillas, México.

Ponteville, Ch. (2014). ¿Por qué enseñamos estadística? En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (Vol 27, pp. 517-525).* México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Serradó, A., Azcárate, P., Cardeñoso, J.M. (2006). La caracterización escolar de la noción de probabilidad en libros de texto de la ESO. *Tarbiya. Revista de Investigación e Innovación Educativa*, Vol. 38, p. 91-112.

Sánchez, N. (2012). *Análisis del texto de Educación Matemática entregado por el MINEDUC utilizado en segundo año de enseñanza secundaria en el periodo 2007-2011.* Tesis de magíster no publicada, Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de la Frontera, Temuco, Chile.

Schrock C. (2000). Problem Solving-What Is It?. *Journal of School Improvement Volume 1 Issue 2 Fal*./Winter 2000.

Schoenfeld A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press Inc. Florida USA.

Serradó, A., Azcarate, P., y Cardeñoso, J. (2006). La caracterización escolar de la noción de probabilidad en libros de texto de la ESO. *Tarbiya: Revista de investigación e innovación educativa*, (38), 91-112.

COMO MEJORAR EL USO DE OPERACIONES MENTALES A TRAVÉS DE UNA MEDIACION INTELIGENTE

Sandra Liliana Botello Suárez, Jesús David Villamizar Valencia, Rocío León Martínez
Colegio Luis Hernández Vargas, (Colombia)
sandralilianabotello@gmail.com, jedaviva24@yahoo.es, pilosa58@hotmail.com

Palabras clave: mediación, operaciones mentales, modificabilidad cognitiva

Key words: mediation, mental operations, cognitive modifiability

RESUMEN: En el presente trabajo de investigación en el aula, se detectaron niños con un amplio potencial de aprendizaje, pero, con dificultades en su desempeño académico. Se apoya el estudio en la Teoría de la Modificabilidad Cognitiva de Feuerstein. Se evalúan operaciones mentales deficientes, se establece mediante el mapa cognitivo la ruta de intervención, la cual produce un cambio positivo, pues los resultados obtenidos, permitieron demostrar que una persona adecuadamente mediada y con la aplicación de los instrumentos apropiados, puede llegar a modificar sus estructuras cognitivas

ABSTRACT: In this classroom research, some children with a huge learning potential were detected, they have a weak academic performance, though. It is supported on Cognitive Modifiability Theory by Feuerstein. Deficient cognitive functions are evaluated and the intervention route is stablished through the cognitive map which makes a positive change taking into account the results that are useful to demonstrate how a well-mediated person, using well-chosen instruments, can be helped to modify cognitive structures.

INTRODUCCIÓN

El actual método educativo colombiano lleva a los estudiantes a presentar evaluaciones como las pruebas SABER. Las cuales ponen de manifiesto el manejo de estructuras mentales. Los resultados de dichas pruebas evidencian tanto falencias didácticas como procesos de comprensión y aprendizaje de los estudiantes, particularmente, en las áreas de lenguaje y matemáticas. Desde este contexto se analizan las habilidades y estrategias de pensamiento de los estudiantes seleccionados. Se hace necesaria la ejecución de un modelo basado en la teoría de la Modificabilidad Cognitiva de Feuerstein, que desde procesos didácticos analizarán cómo se produce la evolución en el pensamiento de los estudiantes, a través de la aplicación de efectivos instrumentos seleccionados y bajo una mediación adecuada, verificar si se podrían mejorar sus niveles de pensamiento.

MARCO TEÓRICO

Inteligencia

El concepto de inteligencia se basaba en la prueba de Cociente Intelectual, ideada por (Binnet, 1903), para medir la comprensión, el razonamiento y el juicio. Este esquema en su momento fue una innovación, aun así, en la actualidad, existen otras teorías que dimensionan la inteligencia desde diferentes puntos de vista, teniendo en cuenta los aspectos individuales, sociales y culturales. Surge la inquietud sobre si la inteligencia es una característica única o consta de distintas variables.

(Feuerstein, 1980), afirma "Que la esencia de la inteligencia no radica en el producto mensurable, sino en la construcción activa del individuo, es decir, él mismo tiene la capacidad para usar experiencias adquiridas previamente para ajustarse a nuevas situaciones", lo cual indica que la inteligencia es modificable. Esta propuesta ha sido muy significativa, ya que permitió completar y desarrollar otros trabajos previos de psicólogos y pedagogos como Vigostky quien propuso su teoría sobre la Zona de Desarrollo Próximo que habla del potencial de aprendizaje que tenemos todos los seres humanos, pero no ofreció una metodología para lograrlo. Feuerstein llena ese vacío, se apoya en los trabajos de Bruner, Golman y Gardner quienes hablaron de la importancia del medio social en los procesos de aprendizaje y de las inteligencias múltiples estos trabajos le permitieron formular su teoría sobre la importancia de la mediación para asegurar y potenciar el desarrollo de niños y niñas con dificultades de aprendizaje.

METODOLOGÍA

Diagnóstico

La utilización clínica de la "*Evaluación dinámica del potencial de aprendizaje*" de Reuven Feuerstein, ha establecido algunas funciones cognitivas deficientes que se clasifican en las *fases de entrada*, *elaboración* y *salida* correspondientes al acto mental. Las funciones que se encuentran en la fase de entrada pueden afectar la capacidad de funcionamiento en la fase de elaboración y salida. Por tal razón se recogen datos para definir con precisión la fuente de dificultades de los estudiantes, se tienen en cuenta las siguientes:

- Percepción borrosa y difusa al distinguir los detalles, formas, relaciones de los objetos, figuras problema o situaciones.
- Conducta imprevista, impulsiva y exploración asistemática de la realidad: dificultad para recoger datos, crear estrategias con orden, trabajar de modo sistemático o asistémico.
- Falta o deterioro de los instrumentos verbales receptivos que afectan al discernimiento (por ejemplo, los objetos, los sucesos y las relaciones no son clasificados correctamente)
- Falta o deterioro de la orientación espacial y carencia de sistemas de referencia fijos para establecer una organización euclidiana y topológica del espacio.
- Falta o deterioro de conceptos temporales para llegar a conceptos de espacio y de tiempo.
- Falta o deterioro de la conservación de constantes (por ejemplo, tamaño, forma, cantidad, color, dirección) cuando se producen cambios en una o más dimensiones.
- Carencia o deficiencia de la necesidad de precisión y exactitud en la recopilación de datos.
- Falta de capacidad para considerar dos o más fuentes de información a la vez. Esto se refleja en el tratamiento de los datos como elementos independientes más que como una unidad de hechos organizados.

PROPUESTA DE INTERVENCIÓN

En la elaboración de nuestra propuesta orientada por la teoría de la Modificabilidad Cognitiva, aplicando los instrumentos seleccionados, se intenta corregir dificultades cognitivas en los estudiantes. Cada una de estas acciones se rige a través de los principios de mediación, planificación, teniendo en cuenta las estrategias que se deban seguir de acuerdo con las indicaciones obtenidas con el mapa cognitivo de cada instrumento.

Los cuatro instrumentos seleccionados en la propuesta se trabajan de manera secuencial buscando lograr los objetivos iniciales con cada estudiante. Se establecerán 3 sesiones de trabajo semanales, dos horas para cada una, por un periodo de dos a tres semanas por cada instrumento; registrando observaciones individuales, valorando progresos, dificultades, correctivos, fortaleciendo aciertos y encontrando estrategias de trabajo.

El organizador de puntos es un instrumento para trabajar la representación mental, la percepción clara, relaciones virtuales, encontrar uso de puntos de referencia, desarrollar el pensamiento flexible ante la presentación de diferentes indicios, posibilita la planificación de conductas inhibiendo la tendencia impulsiva que lleva a cometer diversos errores. Brinda elementos para adquirir una conducta sumativa al reconocer el todo a partir de las partes. Enseña nuevas términos geométricos, permite además introducir conceptos de jerarquía en el lenguaje.

Mapa Cognitivo:

Contenido: Figuras geométricas.

Modalidad: Figurativa.

Tabla 1. Fases del acto mental instrumento: organización de puntos

INPUT	ELABORACIÓN	OUTPUT
*Percepción precisa y definición de las formas del modelo. *Conservación de forma y tamaño a pesar de los cambios en la orientación espacial de la figura. *Secuencia temporal: reproducir los cuadrados antes que los triángulos. *Uso de dos o más fuentes de información: tamaño y forma. *Atención a las partes del todo y a sus relaciones. *Búsqueda sistemática. *Representación de cambios en la orientación de figuras asimétricas.	*Definir el problema. Pensamiento hipotético. *Selección de los puntos relevantes del modelo. *Comparación entre la figura proyectada y el modelo. *Conducta sumativa. Interiorización del modelo.	*Precisión y exactitud en la reproducción del modelo. *Restricción de la impulsividad y de la conducta ensayo-error. *Superación del bloqueo mediante estrategias.

Operaciones mentales: diferenciación de las figuras, articulación del campo, representación, pensamiento deductivo e inductivo, categorización, inferencia lógica y generalización.

Nivel de complejidad: es bajo cuando la tarea exige figuras familiares. Sin embargo, es más complejo cuando el número de puntos se multiplica y la proyección de los mismos implica figuras asimétricas.

Nivel de abstracción: exige un nivel de abstracción bajo para resolver los problemas, sin embargo, es más elevado cuando se han de generalizar reglas y aplicar principios.

Nivel de eficacia: en principio suele ser bajo, aunque en la práctica el número de errores disminuye considerablemente.

Las progresiones numéricas. Este instrumento es útil para despertar en los alumnos la necesidad de encontrar la fórmula de progresión que corresponda dado un modelo inicial, modificando así habilidades y procesos cognitivos que permiten al usuario del instrumento encontrar relaciones para la formulación de reglas en una serie.

Mapa cognitivo:
Operaciones mentales: operaciones matemáticas básicas (adición, sustracción, multiplicación y división), diferenciación, segregación, pensamiento inferencial, razonamiento deductivo.

Tabla 2. Fases del acto mental instrumento: Progresiones numéricas.

INPUT	ELABORACIÓN	OUTPUT
*Percepción clara, completa y precisa de todos los elementos de los datos. *Exploración sistemática de los datos y de la relación existente entre estos. *Comprensión y utilización de los conceptos y términos necesarios para el test: serie, progresión, intervalo, orden, ritmo, secuencia, paralelo, ascendente, descendente, dirección, movimiento, regla, adyacente. *Atención al orden, la secuencia, y la dirección del movimiento de una progresión. *Conservación de constancia de la regla a través de las variaciones producidas en los elementos de una progresión. *Consideración simultánea de un mínimo de dos fuentes de información.	*Utilización de signos para reconocer y construir progresiones ascendentes y descendentes. *Comparación espontánea de dos números adyacentes para determinar el intervalo existente entre ellos. *Recuerdo de una fórmula compleja durante el proceso de su aplicación. *Empleo del pensamiento hipotético y fundamento lógico en aquellas tareas que requieran la selección de una respuesta apropiada entre varias alternativas. *Conducta de planificación adecuada.	*Proyección de las relaciones existentes entre los ítems de una sucesión. *Restricción de la impulsividad y aplazamiento de juicios hasta que se hayan reunido y elaborado todos los datos disponibles y se hayan considerado y comparado todas las alternativas.

La orientación espacial. Este instrumento, busca interiorizar el espacio y permite el uso adecuado de sistemas de referencia espacial para la solución de problemas, posibilita integrar conceptos tales como giros, vueltas; desarrolla la capacidad de encontrar divergencia y flexibilidad de pensamiento al encontrar caminos alternativos en la solución de problemas.

Mapa cognitivo:

Contenido: Sistemas de referencia que permiten la localización de los objetos en el espacio y la relación entre ellos.

Modalidad: Figurativa y gráfica con algunos elementos verbales, codificación simbólica y mapas.

Tabla 3. Fases del acto mental instrumento: Progresiones numéricas.

INPUT	ELABORACIÓN	OUTPUT
*Percepción precisa de los objetos. *Conocimiento de conceptos básicos que relacionan al sujeto con su espacio circundante. *Necesidad de orientación en el espacio. *Considerar dos o más fuentes de información.	*Definir el problema. Conducta comparativa. *Amplitud del campo mental. *Evidencia lógica. *Interiorización de las relaciones. *Proyección de relaciones.	*Necesidad de un proceso de descentración de las relaciones del propio cuerpo con las del espacio. *Necesidad de una gran flexibilidad y apertura hacia los diferentes puntos de vista. *Reducción del egocentrismo. *Transporte visual.

Operaciones mentales: Pensamiento flexible, Pensamiento lógico, Pensamiento hipotético-deductivo.

Nivel de complejidad: De baja a moderada.

Nivel de abstracción: Relativamente bajo en los ejercicios de modalidad figurativa, moderadamente alto en los ejercicios que exigen transformación simbólica, y alto en las representaciones sin soporte apoyo figurativo.

Nivel de eficacia: Moderadamente alto en los elementos figurativos. La eficacia es menor cuando se exige un nivel de descentración y la utilización de símbolos y códigos.

Instrucciones I. Este instrumento brinda la posibilidad de manejar adecuadamente representaciones mentales, integración de varios elementos, desarrollo del pensamiento divergente, desciframiento y codificación de instrucciones, la adquisición de estas operaciones mentales permiten la apropiación de una conducta planificada, desarrollo del pensamiento hipotético, elaboración de inferencias lógicas, lo cual se traduce en reducción de respuestas egocéntricas.

Mapa cognitivo:

Contenido: figuras geométricas simples relacionadas entre sí y, al mismo tiempo, relacionadas con la estructura o marco como referente.

Modalidad: gráfica y verbal.

Tabla 4. Fases del acto mental, instrumento: Instrucciones I

INPUT	ELABORACIÓN	OUTPUT
*Precisión en el análisis estructural y operacional de instrucciones y/o dibujos dados. *Atención a conceptos temporales y secuenciación de los mismos. *Atención a conceptos espaciales y relaciones. *Reunión sistemática de la información. *Utilización de dos o más fuentes de información. *Familiaridad con términos básicos y diferenciación entre ellos. *Conservación de la constancia de las figuras y de los números, a pesar de las modificaciones en la orientación, situación y dirección.	*Definición del problema. Comparación de dibujos con instrucciones verbales. *Empleo de cuestiones relevantes para aclarar ambigüedades. *Atención hacia las señales de puntuación. *Uso de la conducta planificada y de la determinación de estrategias. *Pensamiento hipotético y uso de la evidencia lógica para verificar hipótesis.	*Proyección de relaciones entre figura y entre figuras y fondo. *Restricción de la impulsividad al leer las instrucciones antes de planificar y dibujar. *Precisión y exactitud en instrucciones consecutivas. *Reducción de respuestas y comunicaciones egocéntricas.

Operaciones mentales: Las operaciones que se trabajan con este instrumento son: representación, integración, pensamiento divergente, desciframiento, codificación.

MÉTODOS UTILIZADOS

- Preguntar las razones de las respuestas: Las respuestas ya sean correctas o incorrectas, deben ser justificadas.
- Discutir cómo se ha obtenida una respuesta correcta fomentando el pensamiento reflexivo.
- Comparar cómo el estudiante enfoca problemas similares en etapas previas de la evaluación: establecer continuidad de principios y estrategias de un problema a otro, acostumbrar a revisar métodos empleados para el descubrimiento de una regla.
- Discutir los modos de resolución de problemas: una vez establecidos los requisitos de un problema, el paso inmediato en la selección de estrategias aplicables.
- Discutir acerca de los errores. Para conocer la Modificabilidad.
- Distinguir entre partes correctas o incorrectas de una respuesta.
- Producir ejemplos similares para ayudar a la generalización ya que los conceptos se aprenden más fácilmente en la medida en que se apliquen.

La mediación efectuada, cumple con cinco principios básicos:

- *Intencionalidad:* Producir en el estudiante una buena disposición para atender, la capacidad de concentración y perseverancia en la búsqueda de la solución.
- *Trascendencia:* Permite que los principios, reglas y requisitos previos, se utilicen en tareas más generalizadas.
- *Mediación del significado:* Amplía el sistema de necesidades del estudiante, produciendo niveles elevados de motivación y consecución de los objetivos.
- *Mediación del sentimiento de capacidad.*
- *Regulación de la conducta:* Se trabaja para someter la conducta del estudiante a su propio control, haciendo insistencia en aspectos como: La concentración, la atención sostenida, y la inhibición de la respuesta impulsiva.

Se aplicaron test como: Organización de puntos, progresiones numéricas, instrucciones I y orientación espacial I, haciendo una preparación desde unidades simples a las más complejas, para establecer requisitos conductuales.

Ir sometiendo al estudiante a su propio control de impulsividad y vencimiento del bloqueo, realizando preguntas concretas.

Se ayuda a los estudiantes a reflexionar sobre sus propios procesos de pensamiento, a ser críticos y a proponer sus propias soluciones.

Se les enseñan principios, reglas o estrategias generalizadoras, que puedan utilizarlas cuando la tarea lo requiera.

Se establece un ambiente de diálogo mutuo en donde se puede comunicar con claridad y precisión el porqué de una respuesta, si es correcta o incorrecta y determinar los procesos que fueron utilizados para llegar a tales conclusiones.

En la fase de mediación se enfoca principalmente a la corrección de funciones cognitivas deficientes, al establecimiento de prerrequisitos de conducta, a su regulación y a la enseñanza de operaciones específicas y prerrequisitos del contenido.

Un objetivo de las estrategias de intervención utilizadas es el pensamiento reflexivo, es decir, reflexionar sobre sí mismo e impedir la conducta impulsiva.

CONCLUSIONES

Los resultados del estudio indican que la intervención llevada a cabo por medio del Programa de Enriquecimiento Instrumental, resulta efectiva porque se notó Modificabilidad Cognitiva desde el inicio del proceso al final con el apoyo de la mediación.

Los procesos cognitivos de los estudiantes se pueden desarrollar por medio de los ejercicios del programa.

Al desarrollar los ejercicios prácticos del PEI (Programa de enriquecimiento instrumental) se mejoran los niveles de atención y comprensión.

La aplicación del PEI como alternativa de intervención, ayudan a alcanzar estrategias cognitivas para el rendimiento escolar como se demuestra en los resultados académicos presentes en los boletines escolares

A través del desarrollo de los instrumentos del PEI, los estudiantes ejercitan funciones mentales como reconocer el significado de la información, identificar y relacionar los diferentes objetos, usar distintas fuentes de información, generan hipótesis y elaboran deducciones significativas.

Los instrumentos motivan a los estudiantes. Ya que les generan retos lo que hace más fácil su aplicación y tratamiento, puesto que ellos se hacen capaces de trabajar de forma independiente.

Los resultados muestran que el tratamiento es efectivo, en el rendimiento académico. Ayudan a los estudiantes a mejorar el uso de sus operaciones mentales, sus funciones cognitivas situación que les permite adquirir seguridad e independencia académica en sus labores escolares.

Los resultados reflejados en el diagnóstico muestran habilidades cognitivas deficientes, las que después de una mediación adecuada y planificada, se evalúan, mostrando un cambio positivo. Lo que comprueba que la inteligencia puede ser modificada por la intervención del programa.

Los estudiantes desde el test inicial pasan por la evaluación y finalizan con actividades de transfer (aplicación de conocimientos a otros campos) los educandos demostraron control de su impulsividad, dominio personal, estrategias para la planificación del trabajo, lo que se traduce en autoconfianza y un significativo desarrollo personal y humano.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Binnet, A. (1903). Etude expérimentale de l'intelligence. Recuperado el 02 de abril de 2014 de http://rechercheseducations.revues.org/851.

Brunet, J., Farrés, R. (1990). Metodología de la Mediación en el PEI, Orientaciones y recursos del mediador. Madrid: Bruño.

Gardner, H. (1995). Inteligencias Múltiples: La Teoría en la Práctica**.** Barcelona: Paidós.

Feuerstein, R. (1980). Instrumental Enrichment: An Intervertion Program for Cognitive Modifiability. Baltimore: University Park Press.

Feuerstein, R. (1990). Programa de Enriquecimiento Instrumental. Madrid: Bruño.

Prieto, M. (1992). Modificabilidad cognitiva y P.E.I. Colección Nueva Escuela. Madrid: Bruño.

Martínez, J. (2001). Propuesta didáctica: Arpa 1 y 2. Madrid: Bruño.

ALGUNAS DIDÁCTICAS DE CAMPO EN LA ENSEÑANZA DE HERRAMIENTAS DE MODELAMIENTO MATEMÁTICO PARA INGENIERÍA

Luis Fernando Plaza Gálvez
Unidad Central del Valle del Cauca (Colombia)
lplaza@uceva.edu.co, lufepla@gmail.com

Palabras clave: didáctica, ecuación diferencial, ingeniería, modelamiento matemático

Key words: didactic, differential equation, engineering, mathematical modeling

RESUMEN: Por medio del presente trabajo, se pretende implementar algunas estrategias didácticas, que permitan poner en práctica el uso de herramientas para llevar cabo modelación matemática de fenómenos y/o procesos, en un programa de Ingeniería, entre los que se tiene: la ley de enfriamiento de Newton y el vaciado de tanques (tipo a) y el crecimiento de aves (tipo b). Para realizar el anterior procedimiento se usará la hoja de cálculo de Excel, la diferenciación numérica y mediante la teoría de mínimos cuadrados (Regresión) se originaran ecuaciones diferenciales, resueltas por el método de separación de variables. Al analizar el respectivo Coeficiente de Determinación (R2) se logra llegar a la expresión matemática deseada.

ABSTRACT: By means of this paper, it treat to implement some didactic strategies that enable implement the use of tools to carry out mathematical modeling of phenomena and / or processes in an engineering program, among which is: the law of cooling Newton and emptying of tanks (type a) and growth in birds (type b). To perform the above procedure the Excel spreadsheet is used, numerical differentiation and by the theory of least squares (regression) the differential equations solved by the separation of variables were originated. When analyzing the respective coefficient of determination (R2) is achieved to the desired mathematical expression.

INTRODUCCIÓN

El mayor propósito presente en este trabajo, es generar en el docente del área de Matemáticas de los programas de Ingeniería, un carácter innovador, por medio de estrategias didácticas a implementar, permitiendo a sus estudiantes observar el real uso de la matemática aplicada a modelos que deban ser implementados como tarea externa de aula. El informe de reporte de investigación va dirigido especialmente a estudiantes de un nivel básico de los programas de Ingeniería, que tengan entre sus haberes, inicialmente estar inscritos en un curso de Ecuaciones Diferenciales ordinarias de primer orden, donde al menos tengan conceptos básicos de Mínimos cuadrados, por medio de los diferentes tipos de regresión que nos brinda la herramienta de la Estadística Inferencial. El modelamiento matemático permite crear lazos entre la matemática y la ingeniería generando motivación en los procesos de aprendizaje.

MARCO TEÓRICO O CONCEPTUAL

Los modelos matemáticos pueden asumirse como método de enseñanza y de investigación (Hein y Biembengut, 2006) en la que induce a los estudiantes un incremento del concepto matemático, permitiendo interpretar, formular y resolver problemas de ingeniería en especial. Adicionalmente algunos estudios realizados (Camarena, 2009 y 2012), han caracterizado el modelamiento matemático como estrategia didáctica en la formación de futuros ingenieros como contexto de las ciencias. Aquí se evidencia en algunos casos la desvinculación que hay entre los cursos básicos de matemáticas y los posteriores en Ingeniería, originándose una necesidad cuando el profesional necesita resolver un problema en el mercado laboral. Algunos autores (Rodríguez, 2010) han trabajado las ecuaciones diferenciales como herramienta de enseñanza en Modelamiento matemático y utilizando un enfoque lógico semiótico, modelan problemas resolviendo ecuaciones diferenciales (Guerrero, Camacho y Mejía, 2010).

La modelación matemática debe ser estimulada en el aula, ya que esta refuerza la capacidad de reflexión y capacidad de análisis del estudiante frente al escenario de la solución de un problema, desarrolla habilidades con fundamentación matemática (Obando, Sánchez, Muñoz y Villa, 2013). En Rendón y Esteban (2013), se plantea la modelación matemática como una alternativa donde el estudiante puede armar una realidad que corresponda a un conocimiento puntual y el cual deben ser aplicados en un contexto, siendo esta una herramienta en la formación del ingeniero. Hay estudios como los de Romo, Romo y Vélez (2012) y los de Romo (2014), en los que la estrategia didáctica que se incorpora a la modelación matemática es parte integral de los diseños curriculares en los programas de ingeniería, haciendo uso de elementos teóricos y metodológicos, midiendo así el alcance de logros por contenidos o competencias

METODOLOGÍA

La propuesta metodológica, de las práctica a realizar sobre modelamiento se presentan como herramienta de enseñanza – aprendizaje, y de investigación. Se presentan algunas situaciones de la vida cotidiana objeto de ser modeladas, se trata luego su matematización, su solución y en últimas se analiza si dicha solución está cercana a la realidad. Lo anterior se hace por medio de unidades didácticas, permitiendo conocer aspectos epistemológicos, heurísticos y cognitivos de los estudiantes a los que se les brindaría dichas prácticas finalmente.

Al querer modelar fenómenos y/o procesos *(W)* que varíen con respecto al tiempo, se denota a *W=f(t)*, siendo *W* la variable dependiente y *t* la variable independiente, mediante su observación, se analizaran los siguientes comportamientos, así: a) *W* vs *dW/dt*, b) *W* vs *1/W*dW/dt*, originando algunas ecuaciones diferenciales, cuya solución permite modelar el fenómeno y/o proceso en cuestión, así como la respectiva tasa relativa de crecimiento de la variable a modelar. Lo anterior se resume en los siguientes pasos a realizar:

- Toma de datos a espacios iguales de tiempo,
- Análisis de diferenciación,
- Regresión (mínimos cuadrados),
- Origen de la Ecuación Diferencial,
- Solución de la Ecuación Diferencial,
- Análisis comparativo de resultados, con el Coeficiente de Determinación (R^2).

DISEÑOS DIDÁCTICOS Y RESULTADOS

Prácticas tipo a (Tasa de cambio)

Para el tipo a, se tienen en cuenta dos prácticas: el análisis de la Ley de Enfriamiento y/o Calentamiento de Newton, así como el vaciado de tanque. Para la primera práctica se toman datos de Temperatura y tiempo en lapsos iguales de un minuto. Los elementos necesarios son un termómetro digital con termocupla, un beaker, una estufa pequeña de una boquilla y un cronometro o reloj (para toma de tiempo transcurrido), ver figura No. 1. La práctica consiste en llevar 100 ml de agua a un beaker. Luego hacerlo pasar por una fuente de calor (estufa) hasta obtener su punto de ebullición, tal como aparece en la figura No. 2. A partir de ese instante (inicio de enfriamiento) se toman datos de temperatura cada minuto, hasta tratar de llegar a la temperatura ambiente y donde los datos deben quedar consignados como en la tabla No. 1; esta práctica es recomendada por (Zill, 2009) y fue expuesta en (Plaza, 2013).

Haciendo uso del método de Diferenciación numérica inicialmente a tres pasos se puede obtener la derivada para este caso, como se ha expuesto (Chapra y Canale, 2007).

Figura 1. Elementos necesarios para Laboratorio Ley de Enfriamiento.

Figura 2. Calentamiento de 100 ml de agua, hasta llegar al punto de ebullición.

Tabla 1. Toma de datos en Laboratorio de Ley de Enfriamiento.

Tiempo Transcurrido = *t* (min)	Temperatura = *T (°C)*	*dT/dt*, con *Δt= 1*, Diferenciación numérica a 3 pasos
0	T_0	
1	T_1	$(T_2 - T_0)/2$
2	T_2	$(T_3 - T_1)/2$
t_{n-1}	T_{n-1}	$(T_{n-2} - T_n)/2$
t_n	T_n	

En una hoja d cálculo de Excel, se demuestra con una buena aproximación, con el apoyo de la Regresión Lineal, entre *T'* y *T*, tal que $dT/dt = k^* (T-T_0)$, siendo T_0 la temperatura ambiente, y en la que está también se puede expresar como $dT/dt = aT + b$, el cual representa el comportamiento lineal de la variación de la temperatura con respecto al tiempo, los parámetros *a* y *b*, son dados por Excel

Al resolverse la ecuación diferencial por separación de variables $\frac{dT}{dt} = aT + b$

Sujeta a la conclusión inicial $T(0) = T_0$

Se llega a la solución que modela el enfriamiento de 100 ml de agua, el cual es:

$$T = \frac{(aT_0 + b)}{a} e^{at} - \frac{b}{a}$$

En la segunda práctica del vaciado de Tanque, se puede encontrar la variación de la altura del nivel de un líquido *H,* en función del tiempo para un tanque, después del inicio de un proceso de vaciado, sin tener en cuenta la geometría del recipiente, el agujero de entrada y salida del líquido, los cuales si son tenidas en cuenta en la Ley de Torricelli, tal como aparece en la figuras No. 2 y 3. Para eso se monitorea el vaciado del tanque tomando datos de altura y tiempo en lapsos de 30 seg. (0.5 min) y la información es consignada en la tabla No. 2.

Figura 3. Elementos necesarios para Laboratorio Vaciado de Tanques.

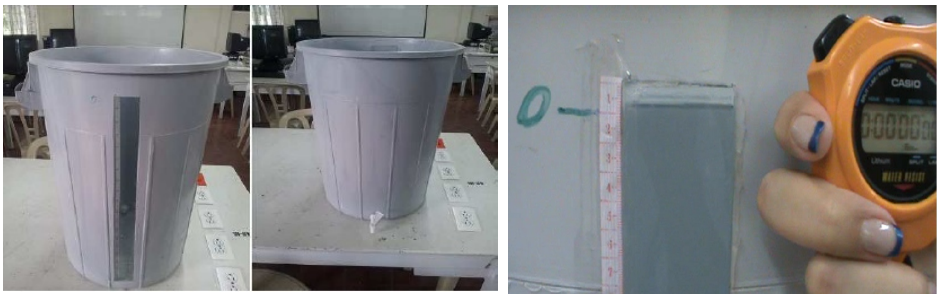


Figura 4. Proceso de toma de datos en la práctica Vaciado de Tanques.

Tabla 2. Toma de datos en Laboratorio de Vaciado de Tanques..

Tiempo Transcurrido = *t (min)*	Altura = *H (cm)*	*dH/dt*, con *Δt= 0.5*, Diferenciación numérica a 3 pasos
0	H_0	
0.5	H_1	$(H_2 - H_0)/1$
1	H_2	$(H_3 - H_1)/1$
t_{n-1}	H_{n-1}	$(H_{n-2} - H_n)/1$
t_n	H_n	

De nuevo, usando la Diferenciación numérica a tres pasos se puede obtener la derivada (Chapra y Canale, 2007) y luego mediante el uso de Mínimos Cuadrados, se puede hacer uso de la mejor regresión que permita la distribución de los datos, tal como ha sido planteado (Walpole, Myers y Myers, 1998). Se demuestra con una regresión potencial que la variación de la altura obedece a una expresión del tipo $dH/dt = aH^b$; esta práctica fue socializada por Plaza (2014). De nuevo, los parámetros *a* y *b* de la regresión pueden ser encontrada con ayuda de una hoja de cálculo como

Excel. Originándose una ecuación diferencial ordinaria de primer orden que se resuelve por el método de Separación de Variables. Las constantes de integración se haya por medio de la condición inicial en la toma de datos.

Al resolverse la ecuación diferencial $\frac{dH}{dt} = a \cdot H^b$

Sujeta a la conclusión inicial $H(0) = H_0$

Arroja la siguiente solución:

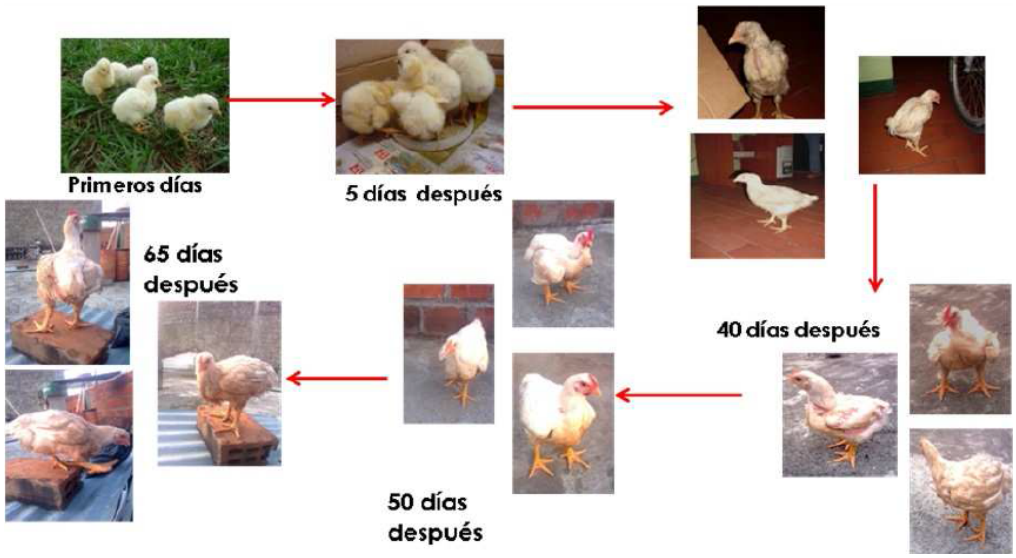
$$H = \left[a(1-b) + H_0^{1-b}\right]^{\frac{1}{1-b}}; \quad b \neq 1$$

Prácticas tipo b (Tasa relativa de cambio)

En el tipo b, se tiene el análisis de crecimiento (evolución del peso), en el caso de especies menores (aves tipo pollo, como producción animal). Donde se puede aportar información para la toma de decisiones que ayudan a mejorar la producción bilógica agropecuaria como es el peso en función del tiempo, la velocidad de crecimiento, la tasa relativa de crecimiento y una fecha ideal de sacrificio, para llegar a una optima producción. En esta oportunidad se puede monitorear el crecimiento de aves (pollo parrillero) por su corta vida útil. Los datos pueden tomarse con lapsos de una semana cada uno, tal como aparece en la figura No. 4 y lo ideal es contar con la fecha de nacimiento, como dato inicial. Su evolución puede verse en la figura No. 5. Las diferentes formas de regresión de la tasa relativa de crecimiento arrojan varias opciones de solución. Inicialmente se logra obtener una expresión de la forma *1/W*dW/dt = aW + b* (Regresión lineal) cuya solución es conocida como el Modelo Logístico. Otra solución es de la forma *1/W*dW/dt = aLn (W) + b*, (Regresión logarítmica) cuya solución es conocida como el Modelo de Gompertz.

Figura 5. Elemento necesario para Laboratorio de Crecimiento de aves.

Figura 6. Evolución de Crecimiento de aves.



Una toma de datos, para el crecimiento de especies menores, sería similar a la siguiente

Tabla 3. Toma de datos en Laboratorio de crecimiento de Aves.

Tiempo Transcurrido = *t* (días)	Peso, *W* (*g*)	*W'* = *dW/dt*, con Δt= 7, Diferenciación numérica a 3 pasos	*W'/W* Tasa relativa de crecimiento
0	W_0		
7	W_1	$(W_2 - W_0)/14$	$(W_2 - W_0)/(14\ W_1)$
14	W_2	$(W_3 - W_1)/14$	$(W_3 - W_1)/(14\ W_2)$
t_{n-1}	W_{n-1}	$(W_{n-2} - W_n)/14$	$(W_{n-2} - W_n)/(14\ W_{n-1})$
t_n	W_n		

Al resolverse la ecuación diferencial (Regresión Lineal), llamada Modelo Logístico:

$\frac{1}{W}\frac{dW}{dt} = aW + B$, sujeta a la condición inicial $W(0) = W_0$

da la siguiente solución:

$$W = \frac{bC_1e^{bt}}{1 - aC_1e^{bt}}; \quad C_1 = \frac{W_0}{aW_0 + b}$$

Al resolverse la ecuación diferencial (Regresión Logarítmica), llamada Modelo de Gompertz:

$\frac{1}{W}\frac{dW}{dt} = aLn(W) + b$, sujeta a la condición inicial $W(0) = W_0$

da la siguiente solución:

$$W = e^{\left\{\frac{1}{a}\left[e^{a(C_1+t)} - b\right]\right\}}; \quad C_1 = \frac{1}{a}Ln\left[aLn(W_0) + b\right]$$

CONSIDERACIONES FINALES

Las prácticas de laboratorio permiten inducir en el estudiante de ingeniería, contribuir para que este construya matemáticas, pues los fenómenos abordados permiten describir otro tipo de experiencias que junto al análisis del tipo grafico, simbólico, etc. (análisis cualitativo y cuantitativo) pueden generar nuevo conocimiento, o permiten refutar o confirmar otros ya existentes.

Una conclusión importante es que un modelo que emergen en una situación, puede ser aplicada en otro contexto, como es el caso de los modelos de crecimiento y la aplicación en curvas de aprendizaje asociadas a producción.

Este tipo de actividades didácticas, en las que se usa el Modelamiento Matemático como herramienta de Enseñanza – Aprendizaje, permite acercar al estudiante de ingeniería con su profesión, por medio de conceptos tales como:

- Funciones, pues a pesar de que se está trabajando variables que dependen de una sola variable, puede ser la base para un análisis multivariado.
- Cálculo como la derivada (variaciones) y el límite (comportamientos asintóticos) especialmente cuando se desea conocer el valor de la función a modelar para valores muy grandes del tiempo, como es el caso del momento ideal para el sacrificio de una especie menor, o en un caso de producción un momento de fatiga.
- Estadística, con aplicaciones de Máximos y Mínimos en varios tipos de Regresión.
- Ecuaciones diferenciales, aquellas que son obtenidas a partir del punto anterior.

Agradecimiento. Es importante brindar especialmente agradecimiento a las directivas de la UCEVA (Unidad Central del Valle del Cauca) con sede en la ciudad de Tuluá, Colombia, quien en nombre de la Vicerrectoría de Investigaciones, permitió llevar a cabo durante cerca de cuatro años la investigación que origino estas prácticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Camarena, P. (2009). La matemática en el contexto de las Ciencias. *Revista Innovación Educativa* 9(6), 15 – 25. Recuperado de:

http://www.redalyc.org/pdf/1794/179414894003.pdf

Camarena, P. (2012). La modelación matemática en la formación del ingeniero. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia 5 (3)*, 1-10. Recuperado de:

https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/1386/902

Chapra, S. y Canale, R. (2007). *Métodos numéricos para Ingenieros*. México D.F.: Mc Graw Hill, 5ª edición.

Guerrero, C., Camacho, M. y Mejía, H. (2010). Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema. *Enseñanza de las Ciencias 28 (3)*, 341-352. Recuperado de:

http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/viewFile/210804/353412

Hein, N. y Biembengut, M. (2006). *Modelaje Matemático como método de Investigación en clases de Matemáticas*. Ponencia presentada en V Festival internacional de Matemática, Puntarenas, Costa Rica. Recuperado de: http://www.cientec.or.cr/matematica/pdf/P-2-Hein.pdf

Obando, J., Sánchez, J., Muñoz, L, Villa, J. (2013). *El reconocimiento de variables en el contexto cafetero y su contribución como modelos matemáticos*, Ponencia presentada en el 13° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Bogotá – Colombia. Recuperado de:

http://funes.uniandes.edu.co/2123/1/2.pdf

Plaza, L. (2013). Ley de Enfriamiento de Newton. Laboratorio de Ecuaciones Diferenciales. *Revista Páginas de Ingeniería* 1 (1), 7 – 12.

Plaza, L. (2014). *Modelamiento Matemático en Ingeniería. Vaciado de Tanques.* Ponencia presentada en VI Congreso Internacional de Modelación y Formación en Ciencias Básicas. Medellín, Colombia.

Rendón, P. y Esteban, P. (2013). *La modelación matemática en ingeniería de diseño*, Ponencia presentada en el I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe, Santo Domingo, República Dominicana. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/2357/1/rendonestenban387-483-1-DR1.pdf

Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13 (4-1), 191-210. Recuperado de:

http://www.clame.org.mx/relime/201012d.pdf

Romo, A., Romo, R. y Vélez, H. (2012). De la ingeniería Biomédica al aula de Matemáticas. *Revista electrónica de Computación, Informática, Biomédica y Electrónica* 1(1). Recuperado de: http://recibe.cucei.udg.mx/revista/es/vol1-no1/pdf/biomedica01.pdf

Romo, A. (2014). La modelización matemática en la formación de ingenieros, *Revista Educación Matemática* 25(E), 314 – 338. Recuperado de:

http://www.redalyc.org/pdf/405/40540854016.pdf

Walpole, R., Myers, R. y Myers, S. (1998). *Probabilidad y Estadística para ingenieros*. México D.F.: Editorial Pearson Educación, 6ª edición.

Zill, D. (2009). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*. México D.F.: Cengage Learning Latin America, 9ª edición.

FORTALECIMIENTO DEL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA, UNA EXPERIENCIA EN LA UNIVERSIDAD ESTATAL A DISTANCIA. COSTA RICA

Eric Ricardo Padilla Mora
Universidad Estatal a Distancia (Costa Rica)
epadilla@uned.ac.cr

Palabras clave: didáctica, matemática, enseñanza, aprendizaje, resolución de problemas

Key words: didactic, math, teaching, learning, problem solving

RESUMEN: El Programa Enseñanza de la Matemática de la Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica, comprometido con la mejora de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de dicha disciplina, en todos sus niveles, ofrece un proyecto para el fortalecimiento del aprendizaje a estudiantes del III Ciclo de la Educación General Básica, en el cual la resolución de problemas se emplea como la principal estrategia didáctica. En este artículo se brinda un análisis de los principales resultados obtenidos a partir de la puesta en marcha del proyecto.

ABSTRACT: The Mathematics Teaching Program of the State Distance University of Costa Rica, committed to improving the teaching and learning of that discipline, at all levels, provides a project to fortifying learning Cycle III students General Basic Education, in which problem solving is used as the main teaching strategy. This article analyzes the main results obtained from the implementation of this project is provided.

INTRODUCCIÓN

La educación cumple con una diversidad de propósitos, dentro de los que se incluyen contribuir con el desenvolvimiento de la personalidad humana, la formación de valores, la búsqueda de la equidad en las sociedades y el desarrollo de habilidades y destrezas en el ser humano. Lo cual pretende, entre otros fines, que las personas logren desempeñarse con éxito en su vida profesional y que favorezcan la toma de decisiones adecuadas en las demás actividades de la vida cotidiana.

En el 2012 la Organización de Naciones Unidas (ONU), dentro de los objetivos de desarrollo del milenio (ONU, 2012), reitera la necesidad del acceso a la educación para que las personas puedan obtener un empleo productivo. Por su parte, en el ámbito nacional, el informe de la Oficina de Planificación de la Educación Superior del Consejo Nacional de Rectores (CONARE), relacionado con el seguimiento de la condición laboral de las personas graduadas, presenta un estudio de las disciplinas con mejores condiciones laborales, considerando indicadores como: desempleo, subempleo por insuficiencia de horas y relación de la carrera con el campo de estudio. Al respecto, las carreras de corte científico se encuentran mejor ubicadas; en particular la Enseñanza de la Matemática, la Estadística y algunas ingenierías están dentro de las disciplinas que presentan los porcentajes óptimos en estos tres indicadores.

Dicho panorama, debería inducir a que muchas personas analicen, dentro de sus posibilidades, estudiar carreras cuyo perfil ocupacional sea de orientación científica, lo cual provocaría su auge. Esto conlleva a que el adquirir y fortalecer habilidades y destrezas matemáticas cobre importancia, dado que se requiere no solo del dominio de los conceptos propios de dicha disciplina sino que además puedan aplicarlos en la resolución de diversas situaciones tanto de su ámbito profesional como de la vida cotidiana.

Un aspecto que podría contribuir con ello, es que en Costa Rica desde el 2012 el Ministerio de Educación Pública (MEP) ha propuesto e implementado, a partir de la reestructuración y transformación de los Programa de Estudio de Matemática, un cambio en el quehacer de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, en el cual la resolución problemas surge como el eje fundamental sobre el cual se rija la actividad educativa. Al respecto se señala

> En este currículo se enfatizará el trabajo con problemas asociados a los entornos reales, físicos, sociales y culturales, o que puedan ser imaginados de esa manera. Se asume que usar este tipo de problemas es una poderosa fuente para la construcción de aprendizajes en las Matemáticas. Al colocarse en contextos reales, el planteo y la resolución de problemas conlleva directamente a la identificación, uso y construcción de modelos matemáticos.
>
> La resolución de problemas como estrategia pedagógica se subrayará aquí como sustrato de un estilo de acción de aula. (MEP, 2012, p.10)

Esto requiere que en la educación, desde sus primeros niveles, se refuerce y profundice en contenidos de números, álgebra, funciones, geometría, trigonometría, probabilidad y estadística; y que de manera simultánea se propicie el desarrollo de habilidades y destrezas como: el razonamiento lógico matemático, la resolución de problemas, la precisión, la generalización, la visualización, la formalización y el análisis de patrones o tendencias. Lo anterior dentro de un marco de desarrollo de valores propios de la cultura costarricense y de actitudes favorables para la convivencia armoniosa, el espíritu colaborativo y el trabajo en equipo.

Ante este panorama el Programa de Enseñanza de la Matemática, de la Universidad Estatal A Distancia (UNED), comprometido con la formación de dicha disciplina, en todos sus niveles, propone un proyecto de fortalecimiento del aprendizaje de la Matemática, para estudiantes del III Ciclo de la Educación General Básica (sétimo, octavo y noveno año), con el objetivo de realizar un trabajo en equipo con el Ministerio de Educación Pública (MEP), que promueva que los estudiantes que deseen seguir carreras que requieran de habilidades y destrezas matemáticas tengan una sólida formación y propicie que puedan culminar con mayores posibilidades de éxito sus carreras. Además de fortalecer el aprendizaje de dicha disciplina, se pretende que puedan: encontrar pasión por ella, aplicarlo en la resolución de diversos problemas y darse cuenta que ésta puede emplearse en diversidad de actividades de la vida cotidiana.

OBJETIVOS DEL PROYECTO

Es por ello que para el logro de este propósito se plantean como objetivos:

- Reforzar y profundizar los contenidos de Matemática, propuestos en el Programa de Estudios del MEP, a partir de encuentros presenciales entre facilitadores y estudiantes.
- Diseñar estrategias metodológicas que orienten al estudiante respecto a los procesos de toma de decisiones para la resolución de problemas y situaciones de la vida cotidiana que requieran del uso de contenidos matemáticos.
- Fomentar, en los estudiantes, el desarrollo de técnicas de estudio que favorezcan el aprendizaje de la matemática.
- Fortalecer, en los estudiantes, la adquisición de valores y actitudes para la convivencia armoniosa y el trabajo en equipo.
- Motivar al estudiante hacia el estudio de la matemática, con el fin de mejorar la actitud y aptitud hacia esta disciplina y coadyuvar a la disminución de la deserción escolar.
- Motivar a los estudiantes hacia el estudio de la Matemática, buscando que cada uno de ellos le encuentre la cognición estética a los contenidos estudiados, que los lleven al disfrute del estudio de la disciplina.

El público meta son estudiantes del III Ciclo de la Educación General Básica con edades de los 12 y a los 15 años, quienes asisten de forma voluntaria.

Durante el 2013 y el 2014 se trabajó en la Región Huetar Norte del país y se ha contado con la participación de estudiantes de seis centros educativos; y para el 2015 además, de esta región, se incluyó la Región Brunca, de la cual se atiende a discentes de dos instituciones.

PRUEBA DIAGNÓSTICO: ALGUNOS RESULTADOS

En la primera sesión, como parte clave para el logro de los objetivos, se aplica una prueba diagnóstico, la cual posibilita la toma de decisiones respecto a que temáticas se deberá reforzar y que no forman parte de los contenidos propuestos para el proyecto. Además, se brinda una orientación sobre diversas estrategias que podrían favorecer el aprendizaje de la Matemática. Para ello se tratan aspectos que van desde la actitud en el aula cuando: se explica la materia, se brindan

ejemplos o realizan prácticas, hasta lo que se recomienda hacer en casa cuando: se repasa la materia, se resuelve tareas, se prepara para las pruebas o se estudia en forma individual o grupal, entre otras consideraciones. Cabe señalar que de forma continua, en cada una de las sesiones y actividades, se brinda recomendaciones. No obstante, se pretende que con el paso del tiempo el estudiante trabaje de forma independiente, sea el constructor de su conocimiento y se empodere de las estrategias que le han permitido resolver los diversos problemas propuestos.

En el 2013 la prueba diagnóstico se aplicó a 37 estudiantes de la Región Huetar Norte. En ella se propusieron nueve ejercicios de desarrollo divididos en: dos de operaciones combinadas, dos de razonamiento lógico y cinco de resolución de problemas.

En cuanto a los ejercicios relacionados con operaciones combinadas los detalles de los resultados obtenidos se muestran en el cuadro 1

Cuadro 1.

Prueba diagnóstico y ejercicios de operaciones combinadas									
Criterio								**E1**[1]	**E2**
1.	No intenta resolver el ejercicio							1	1
2.	Hay evidencia que permita asegurar que intentó resolver el ejercicio							36	36
3.	Resuelve solo algunos pasos del ejercicio							0	1
4.	Resuelve el ejercicio hasta obtener el resultado final							36	35
5.	El resultado final es correcto							27	18
Criterio		**Siempre**		**Casi siempre**		**Algunas veces**		**Nunca**	
		E1	E2	E1	E2	E1	E2	E1	E2
6.	Respeta el orden de prioridad de operaciones en la resolución del ejercicio	36	35	0	1	0	0	0	0
7.	Evidencia una estructura de orden en la resolución del ejercicio	35	35	0	0	0	0	1	1
8.	Los resultados de las operaciones son correctos	27	16	0	6	6	12	3	2

Fuente: prueba diagnóstico aplicada a estudiantes del proyecto fortalecimiento del aprendizaje de la Matemática, Región Huetar Norte, 2013.

Aunque 72,9% resolvió de forma correcta el ejercicio 1, solo 48,6% lo hace en el ejercicio 2 esto permitió establecer la necesidad de fortalecer este tipo de operaciones no solo en las sesiones de trabajo sino también en los materiales teóricos.

Respecto a los ejercicios relacionados con razonamiento lógico el detalle de los resultados obtenidos se muestra en el siguiente cuadro 2

[1] E1 se utilizará como nomenclatura para referirse al ejercicio 1, E2 para el ejercicio 2, E3 para el ejercicio 3 y así para los demás.

Cuadro 2.

Prueba diagnóstico y ejercicios de razonamiento lógico									
Criterio								**E3**	**E4**
1.	No intenta resolver el ejercicio							0	1
2.	Hay evidencia que permita asegurar que intentó resolver el ejercicio							37	36
3.	Reconoció los datos relevantes en el ejercicio							26	29
4.	Perseveró en la búsqueda de la solución							36	36
5.-	La solución final del ejercicio es correcta							11	23
Criterio		**Siempre**		**Casi siempre**		**Algunas veces**		**Nunca**	
		E3	**E4**	**E3**	**E4**	**E3**	**E4**	**E3**	**E4**
6.	Utilizó los datos presentes en el enunciado	15	28	20	3	2	3	0	2
7.	Las operaciones que propone tienen relación con el enunciado del ejercicio	14	26	19	3	4	5	0	2
8.	Las operaciones que propone las resuelve de forma correcta	24	27	6	1	7	6	0	2

Fuente: prueba diagnóstico aplicada a estudiantes del proyecto fortalecimiento del aprendizaje de la Matemática, Región Huetar Norte, 2013.

Como se puede observar aunque los estudiantes intentan resolver este tipo de ejercicios, son pocos los que logran hacerlo de forma correcta. Además, muchos de ellos: no siempre emplean los datos presentes en el enunciado y las operaciones que proponen, en ocasiones, no tienen relación con este. Por tanto, es necesario que durante las sesiones se trabaje en la solución de este tipo de situaciones.

Respecto al planteamiento de situaciones problema, elemento clave para el diseño e implementación del proyecto el detalle de los resultados obtenidos se muestra en el cuadro 3

Cuadro 3.

Prueba diagnóstico y ejercicios que contienen situaciones problema						
Criterio		**E5**	**E6**	**E7**	**E8**	**E9**
1.	No intentó resolver el problema	1	9	1	1	0
2.	Hay evidencia que permita asegurar que intentó resolver el ejercicio	36	28	36	36	37
3.	Reconoció los datos relevantes en el problema	18	22	7	13	22
4.	Traduce al lenguaje numérico y operatorio el enunciado verbal del problema	11	13	4	7	20
5.	La solución final del ejercicio es correcta	11	5	6	12	16
6.	Perseveró en la búsqueda de la solución	26	20	23	23	30
7.	En la respuesta brindada hay precisión del lenguaje utilizado al expresar las estrategias y razonamientos utilizados en la resolución del problema	10	5	4	6	15

Fuente: prueba diagnóstico aplicada a estudiantes del proyecto fortalecimiento del aprendizaje de la Matemática, Región Huetar Norte, 2013.

Lo mostrado en el cuadro anterior advierte que aunque muchos de los estudiantes intentan resolver los ejercicios, existe una dificultad generalizada en cuanto al no reconocimiento de los datos relevantes en el problema, lo cual provoca que muchas de las operaciones que proponen no tengan relación con el enunciado. El traducir al lenguaje numérico y operatorio lo propuesto en el problema se evidencia como dificultad, la mayoría de los estudiantes brindan una solución incorrecta; además, en las respuestas hay poca precisión del lenguaje utilizado al expresar las estrategias y razonamientos que emplearon. Sin duda, la resolución de problemas debe ser la base sobre la cual se sustente la construcción de los materiales teóricos y las diversas actividades para las sesiones presenciales.

MEDIACIÓN Y LAS SESIONES PRESENCIALES

Como parte del proceso se realiza una revisión minuciosa de los contenidos propuestos en los Programas de Estudio, para así analizar y seleccionar cuáles se fortalecerá en el proyecto. Esto ha permitido valorar las estrategias de mediación que podrían ser las más adecuadas para el desarrollo de los contenidos. Por ejemplo, a nivel de séptimo año:

- Respecto al tema números, se consideró pertinente elaborar un material teórico que reforzaría lo trabajado en las sesiones presenciales.
- Respecto al tema Geometría, las sesiones se diseñaron de forma tal que, durante el proceso, el estudiante pueda ir construyendo los conceptos y algunos resultados. Se valoró que bajo esta metodología no era necesario elaborar material teórico.
- Respecto a Probabilidad y Estadística, la técnica por emplear es la de “proyectos”, esta se discute en las primeras sesiones y con base en ella se debe hacer un trabajo el cual se va desarrollando en las lecciones y los resultados obtenidos se exponen en la última sesión del proyecto. De esta manera los contenidos se analizan de acuerdo con las necesidades que los estudiantes tengan a partir de su propuesta investigativa. Por tanto, se consideró que no era necesario realizar material teórico.

La resolución de problemas como estrategia de mediación es el eje central del proceso de enseñanza y conlleva a que el estudiante pueda, a partir de su conocimiento previo, desarrollar habilidades y destrezas que le permitan no solo resolverlos, sino que además interactúe con el contenido matemático, lo cual le permitiría generar sus estrategias y con ello la posibilidad de aplicarlas en las actividades de la vida cotidiana.

En cuanto a los problemas propuestos deben corresponder a un contexto real, para así despertar el interés y generar actitudes positivas hacia su estudio. De esta manera durante el planteamiento y la modelación de estos deberá recurrirse a diversa información, preferiblemente de la familia, la clase, la escuela, la comunidad, la prensa, Internet y algunos libros de texto. Sin embargo, el planteamiento de situaciones abstractas no se dejará de lado, dado que podría contribuir con el desarrollo de las capacidades y destrezas que permitirán el manejo de objetos matemáticos de esta índole, poniendo en juego distintas habilidades y procesos cognitivos que le obliguen a justificar sus conclusiones y al empleo de la demostración como recurso que valide resultados, así como al uso del lenguaje matemático y el razonamiento abstracto y riguroso.

Para el proceso de resolución de problemas los estudiantes no solo deben determinar la solución correcta de cierto problema, en caso que esta exista; sino que además, en su accionar deben reconocer y compartir los argumentos esenciales que le permitieron resolverlos.

Por ello, el trabajo del docente ante la resolución de problemas está dirigido a orientar o guiar al estudiante para que logre:

- Leer y comprender enunciados.

Diversos investigadores entre ellos Conde y Conde (2005), De La Rosa (2007) y Poggioli (s.f.), concuerdan sobre esta necesidad, dado que señalan que los estudiantes ante un problema, generalmente, no efectúan una lectura minuciosa que les permita comprender el enunciado, lo cual provoca que soliciten ayuda del docente incluso antes de haber terminado de leer el problema.

- Traducir de forma correcta al lenguaje matemático.

Aspecto que de acuerdo con De La Rosa (2007) debe trabajarse fuertemente dado que en ocasiones el lenguaje matemático tiene semejanza con el lenguaje ordinario; sin embargo, utiliza palabras y símbolos con un significado totalmente distinto.

Además, es común que los estudiantes no puedan hacer la representación mental del enunciado del problema, aislar la información relevante y organizarla. Este proceso requiere de mucho tiempo, de una lectura minuciosa, hacer gráficos, dibujos, sacar ideas centrales y escribir relaciones, entre otras estrategias.

- Seleccionar las estrategias y los métodos más adecuados para enfrentar su solución.

Generalmente, los estudiantes intentan conseguir la solución de forma directa e inmediata, sin establecer una estrategia o plan de trabajo; no organizan la información del enunciado o lo hacen precipitadamente. Por lo general toman los datos que sean numéricos de acuerdo con los conocimientos que más dominan, aunque no necesariamente sean relevantes para la solución.

Es necesario que comprendan que al comenzar a realizar cálculos con los datos que se brindan, existe una o varias formas de resolver el problema y poder seleccionar cuál de ellas es la más adecuada. Se debe propiciar espacios para que compartan el o los procesos de resolución, de esta manera podrán analizar cuál estrategia es la que más se adecua, así como comprender que para resolver correctamente un problema no necesariamente existe una única vía.

Podría trabajarse con problemas en los cuales existan datos irrelevantes que dificulten la representación mental, esto puede contribuir para que identifiquen los datos importantes de los superfluos o a deducir que se trata de un problema que no se puede resolver por no disponer de la información necesaria.

- Dedicarle tiempo a la resolución de un problema.

Un estudio realizado por Alfaro y Barrantes (2008) determinó que la mayoría de los estudiantes consideran que el tiempo estimado para resolver un problema es de 10 minutos o menos. Por otra parte, Poggioli (sdf) señala que se ha comprobado que el aumentar la dificultad en un ejercicio no conlleva a que el estudiante dedique más tiempo a analizar o plantear alguna propuesta de solución, casi siempre dedicará la misma cantidad.

- Valorar los resultados matemáticos obtenidos.

En ocasiones los estudiantes escriben como respuesta a ciertos problemas los valores que obtienen de sus cálculos, sin analizar si lo obtenido puede o no ser solución. Durante el proceso sería importante enseñarles a conversar con el problema y preguntarse ¿Qué me dan? ¿Qué me piden? ¿Qué es lo que debo encontrar? ¿Qué estoy haciendo? ¿Para qué lo estoy haciendo? Entre otras interrogantes.

- Ofrecer una respuesta acorde con lo que se le plantea.

Muy relacionado con el aspecto anterior, esto debe analizarse. Muchos estudiantes no brindan respuesta a los problemas. Luego de sus cálculos pretenden que se asuma que lo obtenido es la solución. Debe trabajarse en la interpretación de los resultados y determinar cuáles o cuál de ellos, en caso que el problema tenga solución, es el que se ajusta a los requerimientos del problema y dejar de forma explícita la solución.

- Poder evaluar y controlar su avance ante la resolución de problemas.

Como parte del proceso, en cada sesión, se realiza un monitoreo por grupos o a alguno de los estudiantes de manera que se pueda tener un panorama de lo que estos realizan ante la resolución de problemas. Es importante el diseño de algún instrumento que permita llevar un control de los avances.

Durante el aprendizaje de los contenidos y su aplicación práctica es preciso que el estudiante conozca ciertas técnicas y estrategias que le favorezcan su comprensión, algunas puede que las desarrolle de forma intuitiva; sin embargo, el docente podría contribuir con la propuesta y discusión de otras, sugiriendo al grupo métodos y técnicas de estudio para cada uno de los contenidos.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El empleo de estrategias innovadoras es una necesidad que impera en los procesos tanto de enseñanza como de aprendizaje de la Matemática, ante esta situación las Universidades deberán convertirse en entes investigadores y diseñadores de estas para favorecer dichos procesos y el desarrollo e implementación de este tipo de proyectos es una opción. Además, los resultados de los mismos deben ser divulgados para que puedan ser analizados, adecuados e implementados por quienes nos dedicamos a la enseñanza de esta disciplina.

La propuesta de una enseñanza de la Matemática tomando como eje fundamental la resolución de problemas, constituye un verdadero reto; por ende las entidades encargadas de velar por su complimiento deben ofrecer a los docentes espacios para que se capaciten, conozcan y propongan estrategias didácticas para su implementación y brindar espacios para el análisis de los resultados obtenidos en las aulas.

El diseño de actividades a partir de la implementación de este tipo de estrategias metodológica requiere de mucha planificación. Además, éstas deben procurar que el estudiante asuma un rol más activo, el cual será acompañado por la guía del docente. Sin embargo, es fundamental que la sociedad en general tenga claro lo que se pretende lograr, de lo contrario podría convertirse en un obstáculo y se le dedique mucho tiempo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alfaro, C. y Barrantes, H. (2008). *¿Qué es un problema matemático? Percepciones en la enseñanza media costarricense*. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática. Centro de investigaciones matemáticas y meta-matemáticas. Año 2, No.4. San José Costa Rica.

CONARE. (2012). *Seguimiento de la condición laboral de las personas graduadas 2000-2007 de las universidades costarricenses.* Recuperado el 4 de abril del 2015 de http://ucrcomunicacion.wdfiles.com/local--files/start/Seguimiento%20a%20situacion%20laboral

Conde, J. y Conde, Y. (2005). *El alumnado de secundaria ante los problemas matemáticos*. Recuperado el 4 de abril del 2015 de http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/24662/Documento_completo.pdf?sequence=1

De La Rosa Sánchez, J. (2007). *Didáctica para la resolución de problemas. Educación primaria*. Recuperado el 14 de marzo del 2015 de https://dl.dropboxusercontent.com/u/5941054/blog_mates/compematex/ordenados/primaria/Did%C3%A1ctica%20para%20la%20Resoluci%C3%B3n%20de%20Problemas%20Jose%20de%20la%20Rosa.pdf

MEP. (2012). *Programas de Estudio en Matemáticas*. Costa Rica.

ONU. (2012). *Objetivos de desarrollo del milenio*. Recuperado el 14 de marzo del 2015 de http://mdgs.un.org/unsd/mdg/Resources/Static/Products/Progress 2012/Spanish2012.pdf

Poggioli, L. (s.f.). Estrategia de resolución de problemas. Recuperado el 28 de marzo del 2015 de Recuperado de https://spratfau.files.wordpress.com/2011/09/biblio_estrategias-de-resolucic3b3n-de-problemas.pdf

MATEMÁTICA E PORTUGUÊS: A INTERDISCIPLINARIDADE ATRAVÉS DA POESIA

Renata Camacho Bezerra, José Ricardo Souza.
Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Brasil)
renatacamachobezerra@gmail.com, josericardo1012@gmail.com

Palavras chave: professores de matemática, educação matemática, poesia, interdisciplinar

Key words: mathematics teacher, mathematics education, poetry, interdisciplinary

RESUMO: O cientista físico teórico alemão e um dos pais da ciência moderna Albert Einstein certa vez disse: "A Matemática pura é, à sua maneira, a poesia das idéias lógicas." E é por pensar assim que há anos trabalhamos poesia e matemática nas aulas de didática do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE Campus de Foz do Iguaçu e nos vários cursos que temos ministrado para professores e futuros professores de Matemática da educação básica do Estado do Paraná, buscando unir as disciplinas de Matemática e Português através da Poesia. Os resultados de nossas pesquisas empíricas mostram que a interdisciplinariedade é um bom caminho para trabalhar a Matemática, para aproximar professores e futuros professores e para desenvolver o lado criativo, além é claro de trabalhar conteúdos específicos da Matemática de uma forma alternativa.

ABSTRACT: The german theoretical physicist scientist and one of the fathers of modern science Albert Einstein once said: "Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas." And it's thinking like that for years worked poetry and mathematics in Degree Course teaching classes in mathematics from the State University of West of Paraná - UNIOESTE Campus of Foz do Iguaçu and the various courses we have given to teachers and future teachers of Mathematics of the State of Paraná basic education, seeking to unite the disciplines of Mathematics and Portuguese through poetry. The results of our empirical research shows that interdisciplinarity is a good way to work in mathematics, to bring teachers and future teachers and to develop the creative side, and of course to work specific contents of mathematics in an alternative way.

INTRODUÇÃO

O cientista físico teórico alemão e um dos pais da ciência moderna Albert Einstein certa vez disse: "A Matemática pura é, à sua maneira, a poesia das idéias lógicas." E é por pensar assim que há anos trabalhamos poesia e matemática nas aulas de didática do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE Campus de Foz do Iguaçu e nos vários cursos que temos ministrado para professores de matemática da educação básica.

No entanto, o que temos visto na maioria das vezes é uma Matemática fria, sem espaço para a criatividade do aluno e sendo apontada na maioria das vezes como a grande responsável pela evasão e reprovação escolar. Mas não queremos isso, porque acreditamos numa Matemática trabalhada de forma prazerosa e divertida, embora isso exija de nós professores: dedicação, esforço, criatividade e abertura a metodologias alternativas.

Por isto, neste texto apresentamos uma proposta de trabalho que une Português e Matemática através da "Poesia Matemática" de Millôr Fernandes, pois acreditamos que o espaço destinado ao trabalho diferenciado (metodologias alternativas) em matemática permite o convívio das diferenças, o respeito ao saber alheio, permite que a matemática possa contribuir na formação geral do indivíduo e não seja apenas uma disciplina isolada, mas realmente como uma arte/ciência necessária para o bem estar de todos, pois "o conhecimento, ao buscar construir-se com referência ao contexto, ao global e ao complexo, deve mobilizar o que o conhecedor sabe do mundo" (Morin, 2000, p. 39)

Poesia Matemática (Millôr Fernandes)

Às folhas tantas
do livro matemático
um Quociente apaixonou-se
um dia
doidamente
por uma Incógnita.
Olhou-a com seu olhar inumerável
e viu-a do ápice à base
uma figura ímpar;
olhos rombóides, boca trapezóide,
corpo retangular, seios esferóides.
Fez de sua uma vida
paralela à dela
até que se encontraram
no infinito.
"Quem és tu?", indagou ele
em ânsia radical.
"Sou a soma do quadrado dos catetos.
Mas pode me chamar de Hipotenusa."
E de falarem descobriram que eram
(o que em aritmética corresponde
a almas irmãs)

primos entre si.
E assim se amaram
ao quadrado da velocidade da luz
numa sexta potenciação
traçando
ao sabor do momento
retas, curvas, círculos e linhas sinoidais
Escandalizaram os ortodoxos das fórmulas euclidiana
e os exegetas do Universo Finito.
Romperam convenções newtonianas e
pitagóricas.
E enfim resolveram se casar
constituir um lar,
mais que um lar,
um perpendicular.
Convidaram para padrinhos
o Poliedro e a Bissetriz.
E fizeram planos, equações e diagramas para o futuro
sonhando com uma felicidade
integral e diferencial.
E se casaram e tiveram uma secante e três cones
muito engraçadinhos.
E foram felizes
até aquele dia
em que tudo vira afinal
monotonia.
Foi então que surgiu
O Máximo Divisor Comum
frequentador de círculos concêntricos,
viciosos.
Ofereceu-lhe, a ela,
uma grandeza absoluta
e reduziu-a a um denominador comum.
Ele, Quociente, percebeu
que com ela não formava mais um todo,
uma unidade.
Era o triângulo,
tanto chamado amoroso.
Desse problema ela era uma fração,
a mais ordinária.
Mas foi então que Einstein descobriu a Relatividade
e tudo que era espúrio passou a ser
moralidade
como aliás em qualquer
sociedade.

Biografia do Autor

Como estudar um poema sem conhecer seu autor. Nosso trabalho começa por conhecer Millor Fernandes.

Milton Viola Fernandes nasceu em 16 de agosto de 1923 no Rio de Janeiro no bairro do Méier, sendo registrado apenas um ano depois em 27 de maio de 1924 e tendo ficado conhecido como Millôr Fernandes. Durante toda sua vida atuou como cartunista, humorista, escritor, dramaturgo, poeta, tradutor, desenhista e jornalista.

Seu pai, Francisco Fernandes era engenheiro emigrante da Espanha e morreu em 1925, com apenas 36 anos e sua mãe passou por dificuldades para sustentar os 4 filhos. Em 1935, também aos 36 anos de idade faleceu sua mãe Maria Viola Fernandes, e Millôr e seus irmãos passaram a levar uma vida ainda mais difícil.

Essa coincidência de fatos levou o autor a escrever um famoso conto, "Agonia", publicado na revista "Cigarra" em janeiro de 1947, onde afirmava: "Tenho dia e hora marcada para me ir e o acontecimento se dará por volta de 1959".

Millôr começou muito jovem a trabalhar na redação da revista “O Cruzeiro”, e por mais de 70 anos de carreira ganhou fama por suas colunas de humor em diversas publicações em revistas, jornais, livros e tinha como traço marcante, a ironia e a sátira, para criticar o poder e as forças dominantes, devido a isso, no regime militar, sofreram bastante com a censura.

Sua carreira foi marcada também pela autoria e tradução de inúmeras peças no teatro o que contribuiu para o desenvolvimento da cultura brasileira.

Foi na década de 1940 sob o pseudônimo de Vão Gogo que pela primeira vez foi editado o poema “Poesia Matemática” que estamos analisando e discutindo neste trabalho.

No ano de 2011 sofreu um acidente vascular cerebral que fragilizou sua saúde e aos 88 anos de idade em 27 de março de 2012, em sua casa no bairro de Ipanema na zona sul do Rio de Janeiro, Millôr Fernandes faleceu.

DESAFIO DE UNIR MATEMÁTICA E LITERATURA

Na busca de definições o site http://www.significados.com.br/poesia/ apresenta a seguinte definição para poesia: **Poesia** é um **gênero literário** caracterizado pela composição em versos estruturados de forma harmoniosa. É uma **manifestação de beleza e estética** retratada pelo poeta em forma de palavras. No sentido figurado, poesia é tudo aquilo que comove, que sensibiliza e desperta sentimentos. É qualquer forma de arte que inspira e encanta, que é sublime e bela.

Outra definição expressa por (Santana,1996, sf) é a de que,

> A **poesia** é a tradução em palavras do universo desconhecido das emoções, é uma esfera pouco compreendida, que tenta muitas vezes transmitir significados nas entrelinhas dos versos. Este edifício constituído pela magia das palavras revestidas de sonoridades, estruturas rítmicas e visuais, por significações latentes, desvela a alma humana, dá espaço para que ela expresse suas inquietações e anseios interiores.

Já no site *Poesia.* (sf). Recuperado em 28 de setembro de 2015 de http://pt.wikipedia.org/wiki/Poesia, a definição de poesia ou gênero lírico é a de que, a mesma,

> ... é uma das sete artes tradicionais, pela qual a linguagem humana é utilizada com fins estéticos, ou seja, ela retrata algo em que tudo pode acontecer dependendo da imaginação do autor como a do leitor. "Poesia, segundo o modo de falar comum, quer dizer duas coisas. A arte, que a ensina, e a obra feita com a arte; a arte é a poesia, a obra poema, o poeta o artífice." O sentido da mensagem poética também pode ser", ainda que seja a forma estética a definir um texto como poético. A poesia compreende aspectos metafísicos e da possibilidade de esses elementos transcenderem ao mundo fático. Esse é o terreno que compete verdadeiramente ao poeta.

Malba Tahan nos anos de 1961 e 1962 que era o pseudônimo do engenheiro Júlio Cesar de Melo e Sousa que ficou conhecido por ser um notável escritor e professor de matemática, e por ser um dos grandes responsáveis em popularizar a matemática através da literatura, e que teve seus livros traduzidos para diversos idiomas e ainda hoje é conhecido mundialmente, já em 1961 em seu livro Didática da Matemática fazia um alerta sobre a importância de que a Matemática se relacionasse com outras ciências e que mostrasse e comprovasse a sua importância em diferentes frentes, cita, por exemplo, o fato da importância de se relacionar a Matemática e a Música.

No entanto, ainda hoje quando nos referimos a Matemática, na maioria das vezes as definições têm o rigor como pré-requisito, pois reforça a importância do rigor, do estudo de axiomas, e das definições, é uma disciplina que na escola acostumou-se a trabalhar com números, e muitas vezes a inovação está apenas na interpretação dos números.

No site do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação – FNDE (*Matemática.* (sf). Recuperado em 28 de setembro de 2015 de http://www.fnde.gov.br/programas/dinheiro-direto-escola/dinheiro-direto-escola-consultas/item/4081-item-02) têm se a seguinte definição para Matemática:

> A **matemática** (grego *μάθημα*, transl. *máthēma*,"ciência"/"conhecimento"/"aprendizagem"; e *μαθηματικός*, transl. *mathēmatikós*, "apreciador do conhecimento") é a ciência do raciocínio lógico e abstrato. A matemática estuda quantidades, medidas, espaços, estruturas e variações. Um trabalho matemático consiste em procurar por padrões, formular conjecturas e, por meio de deduções rigorosas a partir de axiomas e definições, estabelecer novos resultados.

Então está posto o desafio:

1- Como unir a matemática e a poesia?

2- Como fazer com que o entrelaçar entre a matemática e a poesia cheguem às salas de aula?

É muito difícil responder, não se tem a fórmula mágica que vai resolver o problema, mas é necessário iniciar o trabalho, e na Universidade Estadual do Oeste do Paraná Campus de Foz do Iguaçu o trabalho inicia-se com a discussão da poesia de Millôr Fernandes nas aulas de matemática. O ponto inicial no curso de Matemática tem sido durante anos descobrir o erro matemático, e só depois como num passo de mágica é que ano após ano os alunos se contagiam pela magia da poesia e pela beleza das palavras do poeta.

DESCREVENDO O TRABALHO

O trabalho começa, para o espanto da maioria, discutindo com os alunos a poesia Matemática de Millôr Fernandes. Como trabalhar poesia numa aula de Matemática?

É fato que o espanto é proporcional ao desafio lançado aos alunos. Sempre começamos lendo a poesia, eles se encantam com os termos, e logo após dizemos que há erros matemáticos e que nós como matemáticos e/ou futuros matemáticos temos que descobrir e corrigir.

A aula se torna uma verdadeira bagunça neste momento! Na maioria das vezes chega se ao erro, depois vamos juntos discutir os termos matemáticos e os termos utilizados pelo autor para rimar.

A poesia de Millôr Fernandes é um clássico da literatura brasileira, tendo sido traduzida inclusive para outros idiomas como o espanhol, no entanto apresenta uma incongruência matemática que não passa despercebida ao olhar do matemático.

"Quem és tu?", indagou ele
em ânsia radical.
"Sou a soma do quadrado dos catetos.
Mas pode me chamar de Hipotenusa."

Está parte especifica da poesia apresenta uma relação incorreta, pois a hipotenusa ao quadrado é que é definida pela soma dos quadrados dos catetos.

O conhecido Teorema de Pitágoras define a hipotenusa em função dos outros lados do triângulo retângulo, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$, onde a é o comprimento da hipotenusa, b e c os comprimentos dos catetos.

Dessa forma, seria correto dizer:

“Quem és tu?”, indagou ele
em ânsia radical.
“Sou a soma do quadrado dos catetos.
Mas pode me chamar de *quadrado da* Hipotenusa.”

Este erro matemático é discutido com os alunos de forma a se compreender e entender a matemática e em nenhum momento tem-se a intensão de que a poesia perca seu brilho e seu romantismo.

Após este trabalho exaustivo, chegamos ao que consideramos o ápice, a hora de criar!

Cada futuro professor de matemática e/ou professor de matemática é desafiado a criar uma poesia e para tanto pode utilizar a criatividade. A única orientação é: Utilizem a Matemática, a Poesia e a Criatividade.

A partir da necessidade os grupos pesquisam:

O que é uma poesia? Como estruturar uma poesia?

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho tem tido bons resultados, e muitos ex-alunos e professores retornam contando a experiência de fazer o mesmo em sala de aula (ensino fundamental e médio).

No curso de licenciatura este trabalho é visto como metodologia alternativa e sempre trabalhamos junto à utilização de parábolas e músicas e tem duração geralmente de um bimestre. Já em cursos com os professores de matemática a duração é bem menor.

O trabalho com **Poesia e matemática** ao longo dos anos tem mostrado resultados positivos o trabalho é sem sombra de dúvidas uma possibilidade de estabelecer conexões interdisciplinares entre as disciplinas de Matemática e Língua Portuguesa, mas também outras, como Artes, relação a vida cotidiana dos alunos, o contexto social, histórico, dentre outros.

Acredito que "Rimar e calcular mostra-se possível e educativo, além de representar uma alternativa divertida em salas de aula dos professores de Matemática e/ou Língua Portuguesa. " (Oliveira, 2009, p.36)

A Matemática é vista muitas vezes como uma disciplina fria e sem espaço para a criatividade, este trabalho é uma oportunidade de desmistificar isso, até porque, "Com a incorporação de novas tendências da disciplina/matéria, a criatividade deve ser a grande aliada para melhor lidarmos com novas gerações de alunos "globalizados" e indiferentes às aulas estáticas, praticadas frequentemente em nossas escolas. " (Oliveira, 2009, p.37).

Na relação, ambas as disciplinas ganham e os alunos tem a oportunidade de através de uma metodologia alternativa, aprender Matemática se divertindo.

Há um desinteresse enorme pela leitura especialmente na disciplina de Matemática, como se os signos desta matéria não necessitassem ser expressos através de uma situação-problema, redigida em forma de texto. Detectamos, por exemplo, o quanto o quadro e o giz são considerados a melhor maneira de expressão que o professor tem para a transmissão dos conteúdos da Matemática. Isso nos foi apresentado pela maioria dos alunos: uma verdadeira e paradoxal reação no que diz respeito às novas tecnologias e recursos didáticos. De uma forma geral, os alunos têm uma tendência a só ler o que o professor escreve, sem questionamentos, sem participação, não se aventurando na descoberta de novas formas e sensações promovidas pelo hábito da leitura, especialmente o texto versificado. (Oliveira, 2009, p.39)

Mas é importante estar alerta para que o texto não seja um pretexto no trabalho que utiliza a matemática e a literatura, e que de fato haja interdisciplinaridade e que as disciplinas dialoguem, pois, afinal como diz Caetano Veloso no ano de 1988 na música Livros (*Livros.* (sf). Recuperado em 28 de setembro de 2015 de http://letras.mus.br/caetano-veloso/81628/), "a frase, o conceito, o enredo, o verso (E, sem dúvida, sobretudo o verso) É o que pode lançar mundos no mundo. " E é isso que queremos, uma Matemática viva, dinâmica e que converse com outras áreas do conhecimento e com outras ciências.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Livros. (sf). Recuperado em 28 de setembro de 2015 de http://letras.mus.br/caetano-veloso/81628/).

Matemática. (sf). Recuperado em 28 de setembro de 2015 de http://www.fnde.gov.br/programas/dinheiro-direto-escola/dinheiro-direto-escola-consultas/item/4081-item-02.

Morin, E. (2000). *Os Sete Saberes Necessários à Educação do Futuro*. São Paulo/SP: Cortez.

Oliveira, L. C. A. (2009). Ritmo, Poesia e Matemática: Os Caminhos Percorridos no Desenrolar da Nossa Pesquisa. *Percursos Revista.* Florianópolis, 10(02), pp. 36–55.

Poesia Matemática. (sf). Recuperado em 28 de setembro de 2015 de http://www.releituras.com/millor_poesia.asp.

Poesia. (sf). Recuperado em 28 de setembro de 2015 de http://pt.wikipedia.org/wiki/Poesia.

Santana, A. L. (1996). *Poesia.* Recuperado em 28 de setembro de 2015 de http://www.infoescola.com/literatura/poesia/.

Significado de Poesia. (sf). Recuperado em 28 de setembro de 2015 de http://www.significados.com.br/poesia/.

Tahan, M. (1961). *Didática da Matemática*. São Paulo/SP: Edição Saraiva.

Tahan, M. (1962). *Didática da Matemática*. São Paulo/SP: Edição Saraiva.

ERRORES EN EL RAZONAMIENTO DEDUCTIVO SILOGÍSTICO

Rodolfo Eliseo D ´Andrea, Graciela Rey, Patricia Sastre Vázquez
Facultad de Agronomía, Universidad Nacional del Centro de la Pcia. de Buenos Aires, Universidad Católica Argentina, Rosario (Argentina)
rodolfoedandrea@ yahoo.com.ar , grey@faa.unicen.edu.ar, pasava2001@yahoo.com.ar

Palabras clave: errores de razonamiento, silogismo categórico, razonamiento deductivo

Key words: errors reasoning, categorical syllogism, deductive reasoning

RESUMEN: En el marco de la investigación en psicología del razonamiento se distingue entre inferencias deductivas e inductivas. Entre las primeras, se ha estudiado el razonamiento silogístico, el transitivo y el razonamiento con el condicional, aunque este último también ha sido estudiado desde la perspectiva del razonamiento inductivo. En este trabajo se describe la investigación revisada sobre los errores cometidos al utilizar el razonamiento deductivo silogístico, es decir, aquel realizado con proposiciones con cuantificadores. Además, se presentan las argumentaciones que se han brindado de los diferentes modelos para explicar la aparición de los errores durante el proceso de razonar. Finalmente, se los clasifica.

ABSTRACT: In the frame of the investigation in psychology of the reasoning is distinguished among deductive and inductive inferences. Among the first ones the syllogistic reasoning and the transitive one, and the reasoning have been studied with the conditional one, although this last one has also been studied from the perspective of the inductive reasoning. In this work the investigation is described revised on the errors committed when using the deductive syllogistic reasoning, that is to say that carried out with advance with quantifier. Also, the arguments are presented that the different models have toasted to explain the appearance of the errors during the process of reasoning. Finally they are classified.

INTRODUCCIÓN

El silogismo es un tipo de argumentación en la cual partiendo de un antecedente (dos proposiciones como premisas) que compara dos términos (sujeto y predicado de la conclusión) con un tercero (término medio) se infiere o deduce un consecuente (un juicio como conclusión) que une (afirma) o separa (niega) la relación de estos términos (sujeto y predicado) entre sí. El argumento silogístico es una forma de razonamiento deductivo en el cual existen dos proposiciones como premisas y otra como conclusión siendo la última una inferencia, necesariamente deductiva, de las otras dos. La premisa que contiene el sujeto de la conclusión se llama premisa menor y la que contiene el predicado se llama premisa mayor. En el silogismo se distinguen dos variables formales que determinan la configuración del mismo: modo y figura. El modo hace referencia a la cantidad (universal y particular) y a la cualidad (afirmativa y negativa) de las premisas. La figura hace referencia al orden que ocupan los términos en las premisas. Dependiendo del lugar que ocupen los términos en las premisas, son posibles cuatro figuras, a saber: 1) A-C, B-C; 2) B-A, C-B; 3) A-B, C-B Y 4) B-A, B-C. El razonamiento silogístico, o silogismo categórico, estudia las inferencias deductivas realizadas con proposiciones que tienen cuantificadores de cantidad (universal, particular) y de polaridad (afirmativas, negativas). Combinando la cantidad y la polaridad es posible distinguir cuatro tipos de enunciados: 1) *Universal afirmativa (A):* todos los A son B; 2) *Universal negativa (E)*: ningún A es B; 3) *Particular afirmativa (I):* algún A es B y 4) *Particular negativa (O):* algunos A no son B. De las 256 combinaciones posibles (tipos de enunciados por figuras), sólo 24 son válidas. Las conclusiones correctas para todas las figuras siempre son en el orden C-A. Un error muy frecuente es que los individuos a menudo no consideran sujetos de la conclusión a los que aparecen en la premisa menor, produciendo conclusiones equivocadas del tipo A-C. Según Espino, Santamaría y García Madruga (1999), modo y figura, además de configurar el aspecto formal del silogismo determinan el grado de dificultad y los sesgos en el proceso deductivo. Según estos autores:

> "Los resultados de numerosas investigaciones han demostrado que cuando los sujetos deben generar una conclusión en una tarea silogística, la figura da lugar a un sesgo direccional" (Dickstein, 1978; Ford, 1995; García Madruga, 1982,1983, 1989; Johnson-Laird, 1975; Johnson-Laird y Steedman, 1978; Johnson-Laird y Bara, 1984). Este sesgo es conocido como «efecto de la figura» y hace referencia a la preferencia que tienen las personas por elegir o construir conclusiones en una determinada dirección más que en otra independiente de sí son o no válidas. Este efecto, tiene su máxima expresión en silogismos de la figura 1 y de la figura 2 y en menor medida en las figuras 3 y 4. En estos casos se ha encontrado que cuando las personas deben elaborar la conclusión de los silogismos de la figura 1, tienden a dar más conclusiones en el sentido A-C (en donde el primer elemento de la conclusión es el término extremo de la primera premisa) que en el sentido C-A (en donde el primer elemento de la conclusión es el término extremo de la segunda premisa). Asimismo, cuando las personas deben elaborar conclusiones de los silogismos de la figura 2, tienden a dar más conclusiones en el sentido C-A que en el sentido A-C. (Espino, Santamaría y García Madruga, 1999, p. 134)

En general, en la investigación sobre este tema, se le propone como tarea a los individuos evaluar la validez de la conclusión o elegir la respuesta correcta entre varias alternativas, donde el objetivo ha sido indagar la influencia de la estructura (modo y figura) y el contenido, sobre el rendimiento de

los sujetos. Entre las primeras hipótesis que surge en el intento de explicar la actuación de los sujetos con problemas de razonamiento silogístico, se destaca la *Hipótesis de la Atmósfera*, que se limita a observar la tendencia de los sujetos a apoyar *conclusiones particulares si se presenta al menos una premisa particular* (y universales de lo contrario) y *conclusiones negativas si al menos alguna premisa es negativa* (y afirmativas en el caso contrario). Según Woodworth y Sells (1935), los individuos construirían la conclusión basándose en la "*atmósfera"* creada por las premisas debido a: 1) La ambigüedad del lenguaje lógico respecto del lenguaje cotidiano y 2) El principio de prudencia (Sells, 1935), es decir, la tendencia a preferir las conclusiones particulares frente a las universales, pues las conclusiones universales son menos prudentes. La atmósfera creada por las premisas se resume en estos principios:

- Si ambas premisas son del mismo tipo, los sujetos mostrarán una fuerte tendencia a elegir una de la misma característica como conclusión.
- Si al menos una de las dos premisas es particular, se encuentra una fuerte tendencia a elegir una conclusión particular.
- Si al menos una de las dos premisas es negativa, se encuentra una fuerte tendencia a elegir una conclusión negativa

Según Woodworth y Sells, (1935) los individuos, para determinar la validez de las conclusiones, se guían por aspectos estructurales del silogismo. Estos autores reconocen su incapacidad para explicar el fenómeno observado y se limitan a describir la tendencia al error. Además, señalan que el efecto es diferente para razonamientos válidos e inválidos. Por último, el efecto predice siempre una conclusión sesgada. Asimismo, se observa, con frecuencia, que los sujetos responden que no hay una conclusión válida en estos términos. Chapman y Chapman (1959), con su modelo basado en la interpretación de las premisas, explican el efecto atmósfera sosteniendo dos hipótesis:

- *Conversión ilícita***:** Los errores se producen porque los sujetos convierten la universal afirmativa "Todos los A son B" en "Todos los B son A" y la particular negativa "Algunos A no son B" en "Algunos B no son A".
- *Inferencia probabilística***:** Los sujetos aplican una regla errónea consistente en creer que las entidades que comparten determinadas propiedades tienen más probabilidad de compartir otras (Ej: "Algunos A son B y Algunos C son B" lleva a pensar que también "Algunos C son A")

Para explicar los errores producidos por la conversión ilícita de las premisas, se han postulado las siguientes teorías: a) Los sujetos razonan de forma lógica pero sobre silogismos cuyas premisas son interpretadas de forma errónea (Henle, 1962). Los principales errores se deben a la aceptación de la conversión de las premisas universal afirmativa y particular negativa. Por ejemplo: Si se considera que "Todo A es B" equivale a "Todo B es A", o bien, si se considera que "Algún A no es B" equivale a "Algún B no es A". Tomando como base a la hipótesis de conversión ilícita y lícita de todas las premisas, Revlis (1975) propone un modelo que describe un razonamiento en cuatro etapas:

1) *Codificación de las premisas y de todas sus conversiones*, quedando representadas ambas versiones.
2) *Representación compuesta de las dos premisas*.

3) *Codificación de la conclusión* de modo semejante a la primera etapa.

4) *Comparación entre la representación conjunta de las premisas y la de la conclusión,* si son congruentes se acepta la validez del silogismo, si no lo son se comparan las versiones sin conversión hasta que se encuentra una conclusión válida. Sí aún así no se encuentra un argumento válido, entonces se elige una conclusión seleccionando rasgos como la cantidad o la calidad.

Así, mediante el procedimiento de selección de la conclusión, este modelo incorpora el efecto atmósfera (se producen los mismos resultados predichos por este efecto). Aquí, se observa también, el *efecto del contenido (o sesgo de creencias),* ya que es el contenido familiar el que bloquea la conversión de premisas incongruentes ("Todos los canarios son pájaros" no se convierte en "Todos los pájaros son canarios"). Es de hacer notar que el efecto del contenido se sigue manifestando aún cuando la conversión de las premisas no altera la validez del argumento. Además, el sesgo de creencias disminuye cuando el contenido entra en conflicto con la validez lógica. Según Wilkins (1928) los sujetos dan por válido un silogismo si están de acuerdo con su conclusión. Con el objetivo de encontrar una explicación para la interacción entre la validez lógica del argumento y la credibilidad de las conclusiones, Evans, postula dos modelos: 1) *Modelo del escrutinio selectivo*. (Evans, Barston y Pollard, 1983) y 2) *Modelo de interpretación incorrecta de la necesidad lógica.* (Evans *et al* ,1983). En el *modelo del escrutinio selectivo*, (Evans *et al,* 1983) sostiene que *si las conclusiones son creíbles* los sujetos no se molestan en hacer análisis lógicos. Experimentalmente se ha comprobado este efecto al solicitar a los individuos que declaren verbalmente el razonamiento que siguen. En estas circunstancias, la mayoría de los sujetos aluden sólo a la conclusión, o primero la conclusión y luego las premisas. Solamente en el caso de que las conclusiones no sean creíbles los sujetos hacen un análisis lógico del argumento. Este modelo no explica cómo afecta la validez lógica a las conclusiones creíbles, ni por qué el sesgo de creencias se sigue manifestando aún cuando se le pide al sujeto que genere las conclusiones (en este caso no habría escrutinio de la conclusión). En el *modelo de interpretación incorrecta de la necesidad lógica*, (Evans *et al,* 1983), se basa en el concepto de necesidad lógica y la interpretación errónea que de él hacen los sujetos: cuando hay argumentos con varias conclusiones posibles, pero no necesarias, los *sujetos responden de acuerdo con la credibilidad de las conclusiones.* Sin embargo, la lógica formal establece que para que un argumento sea considerado válido tiene que ser necesario, esto es, que sea imposible que haya una sola situación en la que la conclusión sea falsa, siendo sus premisas verdaderas. Evans *et al* (1983) distinguen entre dos tipos de silogismos inválidos:

- *Silogismo inválido indeterminado* que daría lugar a *conclusiones posibles* pero no necesarias (Algunos B son A, Algunos C son B, Algunos C son A)
- *Silogismo inválido determinado* que produciría *conclusiones imposibles* (Todos los B son A; Todos los C son B, Ningún C es A).

En el segundo tipo de silogismo no influyen las creencias (se aplica la lógica), pero sí en el primero. Al igual que en el modelo anterior, este modelo no explica el proceso de razonamiento sino solamente los errores. Según Begg y Harris (1982), los errores cometidos al utilizar el razonamiento silogístico corresponden a una mala interpretación de las premisas, pero no por la conversión ilícita sino por la aplicación de *criterios de uso lingüístico* a los cuantificadores, *en lugar de criterios*

lógicos (lógica intuitiva). Así, *ninguno* es interpretado como exclusión; *algunos* como intersección; *todos* como identidad (Algunos no sería válido si pudiera sustituirse por Todos). Sin embargo, no se han encontrado investigaciones con datos experimentales que apoyen que estas convenciones sean la principal fuente de errores. Según la teoría de los modelos mentales, Jonson-Laird (1983), el razonamiento se realiza en tres etapas:1) *Comprensión* en la que se construye un modelo mental de lo que viene expresado en las premisas, influido por el conocimiento previo del sujeto (sobre el lenguaje y sobre el mundo), 2) *Descripción* lo más sencilla posible en la que los modelos mentales de las premisas se combinan y se enuncia algo que no está explícito en ellos (conclusión tentativa) y 3) *Búsqueda de modelos alternativos* de las premisas (contraejemplos) que puedan falsar la conclusión tentativa alcanzada en la etapa anterior. Si no los hubiere, entonces la conclusión es válida; si se encuentran, se regresa a la 2ª etapa. Durante dos primeras etapas se realizan los procesos de comprensión y descripción, mientras que en la tercera se realiza la deducción. Los errores en el razonamiento deductivo *se explican por la cantidad de procesamientos necesarias y las limitaciones de la memoria* para considerar todas las combinaciones posibles. Al aumentar el número de modelos mentales necesarios para llegar a una conclusión válida, más difícil será el problema y mayor es la probabilidad de cometer errores. También se postula que el tipo de figura influye en la dificultad del razonamiento, ya que las conclusiones, según la Teoría de los Modelos Mentales, se leen, en el modelo mental, en el mismo sentido en que se han presentado. Para este Modelo, la figura 2 y, sobre todo, la figura 3, son más difíciles porque demandan invertir el modelo mental de las premisas. En numerosas investigaciones, se ha indicado que las creencias, las actitudes y los sentimientos de los sujetos, afectan a la resolución de los silogismos (Santamaría, García Madruga y Carretero, 1996;). Sin embargo, no hay acuerdo sobre cómo el contenido afecta al proceso deductivo. Algunos autores sostienen que el contenido puede sesgar la interpretación de las premisas y otros, señalan que puede sesgar la conclusión y por último, para otros, el contenido puede actuar sesgando tanto la interpretación de las premisas, la conclusión, o el propio proceso deductivo. Wilkins (1928) figura entre los primeros investigadores que se han ocupado de estudiar la influencia del contenido en el razonamiento silogístico. Durante su investigación utilizó silogismos con cuatro tipos de contenidos: abstracto, temático, no familiar para los sujetos (términos científicos) y concreto pero con conclusión en contra de la creencia de los sujetos. Los resultados muestran que el contenido temático facilita la resolución del silogismo pero esta facilitación se reduce cuando la conclusión no concuerda con las creencias de los sujetos. Por su parte, Morgan y Morton (1944) encontraron que cuando la conclusión concordaba con las creencias, los sujetos cometían más errores aceptando argumentos no válidos que rechazando argumentos válidos y, en caso contrario, cometían más errores rechazando argumentos válidos que aceptando silogismos no válidos.

Al hablar sobre los sesgos o falacias del razonamiento se está haciendo referencia a las tendencias sistemáticas que provocan que los individuos consideren en su razonamiento factores irrelevantes para el proceso de inferencia. *Los factores externos* que producen sesgos son aquellos que se originan fuera del sistema de procesamiento y que afectan a la selección de la información. El ser humano posee una capacidad para procesar la información que no es ilimitada. Es así que la información se selecciona eligiendo aquella que se considera relevante, lo cual produce la aparición de errores sistemáticos provocados por diferentes factores:

- *Tendencia a seleccionar los datos de mayor impacto*, aunque sean irrelevantes. El impacto puede deberse a factores emocionales, por la concreción de los datos, la proximidad temporal o espacial o por la familiaridad.
- *Importancia que se otorga a la fuente de información*: afectaría la credibilidad de la misma. Pone de manifiesto la importancia que se concede a la fuente de información, independientemente de lo que se sostenga.
- *Estructura sintáctica del problema*: la forma de presentación del problema puede conducir a cometer errores. Así, en el razonamiento silogístico, se producen:
    a) *El efecto atmósfera*, tendencia a elaborar una conclusión negativa si hay una premisa negativa, y a producir una conclusión particular si hay una premisa particular, y
    b) *El efecto figura*, tendencia a variar el orden de la conclusión en función de la figura, el sujeto adopta una conclusión dejándose llevar por las cuatro figuras del silogismo siguiendo el orden tradicional si se trata de la primera figura y el inverso si se trata de la cuarta.
- *Sesgo de emparejamiento*, tendencia de los individuos, en la tarea de selección de Wason (Wason y Johnson Laird, 1972); (Wason, 1968), a levantar las tarjetas mencionadas en la explicación de la tarea. Wason interpretó los resultados en el sentido de que el sujeto busca la confirmación de la regla enunciada, sin embargo, para Evans *et al* (1983), los sujetos "levantan" las tarjetas que vienen mencionadas en la regla y no buscan confirmar o negar la regla, solamente emparejan los términos. Según Evans et al (1983), el sesgo de emparejamiento pone de manifiesto la relevancia que adquieren los términos expresados en el condicional, y las dificultades que tienen los sujetos con la negación lógica y lingüística, mostrando en general una preferencia hacia el procesamiento de la información positiva.

Los factores internos que producen sesgos son restricciones de capacidad del sistema de procesamiento o del conocimiento del sujeto, es decir, restricciones internas debidas a:

- *Causas estructurales*, ya que la capacidad de la memoria de trabajo y los recursos de procesamiento son limitados. A mayor cantidad de información, mayor número de errores.
- *Disponibilidad de la información,* la selección de la información adecuada depende de la facilidad con que esta se recupere. Tversky y Kahneman (1974) señalan que la disponibilidad depende de:
    a) Cómo se haya organizado la información
    b) La familiaridad de la información
    c) Las expectativas de los sujetos
    d) La primacía o lejanía de la información presentada.
- *Relevancia de la información para el problema a resolver,* el hecho de tener disponible la información, no garantiza que los sujetos la seleccionen. por tanto, la información no sólo tiene que estar disponible, sino que el sujeto tiene que considerarla relevante para la situación que ha de resolver.
- *El sistema de creencias*, que provoca que se conceda mayor importancia a la evidencia congruente con los pensamientos propios, desechando aquella que los contradice.

- *Sesgo de confirmación*, los individuos tienden a buscar información confirmatoria en lugar de buscar la información que pudiera falsar las hipótesis. Para Evans *et al* (1983) el sesgo se debe a la dificultad para procesar información negativa y a la preferencia por el procesamiento de la información positiva. Los sujetos se centran en una hipótesis y luego buscan la información positiva que es congruente con ella.
- *El efecto del contenido y del contexto*, el cual se presenta en tareas de conocimiento no abstracto, conocido aunque arbitrario o familiar (que guarda relación con la experiencia propia). El contexto es el marco en el que se presenta el problema, las instrucciones de la tarea y descripciones que la acompañan. Cuando contexto y contenido son familiares puede mejorar el rendimiento de los individuos, aunque también se presenta el efecto contrario. El contenido puede inducir sesgos cuando es representativo de un dominio (o tipo de problema) tal cual ocurre en los juicios por representatividad.
- *El sesgo de creencias previas y el de confirmación* son muy parecidos, sólo que en el segundo se busca la información congruente, mientras que en el primero se sesga el procesamiento hacia una conclusión acorde con las creencias. Los sesgos son adaptativos ya que el sistema de razonamiento humano es restringido y sería imposible que pudiera poner en marcha todas las estrategias necesarias para llegar a la solución exacta de los problemas.

Los sesgos de razonamiento ocurren por la propia naturaleza del sistema humano de procesamiento de la información. El ser humano busca la aproximación a las soluciones por el principio de "racionalidad restringida" para la mejor administración de sus recursos.

CONCLUSIONES

El razonamiento deductivo se utiliza muy frecuentemente en Matemática. Como consecuencia de años de trabajo, nuestra experiencia áulica nos ha permitido enfocar la atención y detectar que los estudiantes manifiestan algunas conductas observables que evidencian en los modos de razonar, lo que se hace manifiesto en que esgrimen y hacen evidente la repetición de errores que cometen en concordancia a creencias preexistentes. Derivado de los resultados de la investigación bibliográfica y del trabajo en el aula con la utilización de razonamiento silogístico deductivo se recomienda tener en cuenta las siguientes pautas, derivadas de los resultados de las investigaciones revisadas:

a) Existe una influencia de la lógica y de las creencias en la elaboración o la aceptación de la conclusión de un argumento silogístico.

b) Las conclusiones creíbles se aceptan más fácilmente que las no creíbles.

c) Las conclusiones válidas se aceptan más fácilmente que las no válidas.

d) Existe una interacción entre lógica y creencias, de forma que el sesgo de creencias es más intenso en silogismos válidos que en silogismos no válidos

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Begg, I. y Harris,G. (1982). On the interpretation of syllogisms. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior. Vol 21, Issue 5,* 595-620.

Chapman, L. y Chapman, J. (1959). Atmosphere effect re-examined. *Journal of Experimental Psychology*, *58*, 220-226.

Dickstein, L.S. (1978). The effect of figure on syllogistic. reasoning. *Memory & Cognition, 6*, 76-83

Espino, O.; Santamaría, C. y García Madruga, J. (1999) La influencia de la figura y el contenido semántico en tareas silogísticas. *Cognitiva*, *(11) 2*, 133-150.

Evans, J. S. B. T., Barston, J. L. y Pollard, P. (1983). On the conflict between logic and belief in syllogistic reasoning. *Memory y Cognition, 11*, 295-306.

García Madruga, J. A. (1982). Un estudio sobre el efecto de la figura en el razonamiento silogístico. *Estudios de Psicología, 11*, 23-32.

García Madruga, J. A. (1983). Un modelo general sobre al razonamiento silogístico: doble procesamiento y fase de comprobación con verificación. *Revista de Psicología General y Aplicada, 38*, 439-466.

García Madruga, J. A. (1989). Inferencia y comprensión en el razonamiento silogístico. *Cognitiva, 2*, 323-350.

Henle, M. y Michael, M. (1956). The influence of attitudes on syllogistic reasoning. *Journal of Social Psychology, 44*, 115-127.

Johnson-Laird, P. (1983). *Mental models*. Cambridge. MA: Harvard University Press.

Henle, M. (1962). On the relation between logic and thinking. *Psychological Review, 69*, 366-378.

Morgan, J.J. y Morton, J.T. (1944). The distortion of syllogistic reasoning produced by personal convictions. *The Journal of Social Psychology, 20,* 39-59.

Sells, S. (1936). The atmosphere effect: an experimental study of reasoning. *Archives of Psychology, 29*, 3-72.

Johnson-Laird. P.M. y Steedman, M. (1978). The psychology of syllogisms. *Cognitive Psychology, 10,* 64-98

Johnson-Laird, P.M. (1975). *Models of deduction*. En R. J. Falmagne (Comp.), Reasoning: Representation and Process. Nueva York: Wiley

Revlis, R. (1975). Two models of syllogistic reasoning: Feature selection and conversion. Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior, 1975, 14, 180·195. (b)

Santamaría, C., García Madruga, J.A. y Carretero, M. (1996) Beyond belief bias: reasoning from conceptual structures by mental models manipulation. *Memory & Cognition, 24 (2),* 250-261.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1974). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. *Science, 185*, 1124–1131.

Wilkins, M.C. (1928). The effect of changed material on the ability to do formal syllogistic reasoning. *Archives of Psychology*, *16, Nº102*, 83

Woodworth, R y Sells, S. (1935). An atmosphere effect in syllogistic reasoning. *Journal of Experimental Psychology*, *18*, 45- 460.

Wason, P.C. y Johnson–Laird, P.N. (1972). *Psicología del razonamiento. Estructura y contenido.* Ed. Debate: Madrid.

Wason, P. C. (1968). Reasoning about a rule. Quarterly Journal of Experimental Psychology, 20, 273-281.

ALTERNATIVA METODOLÓGICA PARA EL DESARROLLO DEL TRABAJO INDEPENDIENTE EN LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA, PARA LA MODALIDAD SEMIPRESENCIAL

María del Carmen Rodríguez Ponce, Gilda Vega Cruz, Paz Fernández Oliveras, María Luisa Oliveras
Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría (Cuba), Universidad de Granada (España)
chacha@cemat.cujae.edu.cu, gilda@tesla.cujae.edu.cu, pazferol@ugr.es, oliveras@ugr.es.

Palabras clave: alternativa metodológica, trabajo independiente, modalidad semipresencial, enseñanza de las matemáticas

Key words: alternative methodology, independent work, blended learning, teaching mathematics

RESUMEN: La presente trabajo es el resultado de una investigación doctoral, en la que se prepone una Alternativa Metodológica para transformar la organización y orientación del Trabajo Independiente en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en la modalidad semipresencial.

La Alternativa se fundamenta en una concepción desarrolladora del aprendizaje, en la cual se conciben tareas de aprendizaje que incluyen acciones para promover el aprendizaje de forma independiente. Se muestra su implementación en el tema de Ecuaciones Diferenciales y se describen los resultados de su aplicación así como de la consulta a expertos, los que permitieron valorar su efectividad.

ABSTRACT: This work is the result of a doctoral research, where is proposed an alternative methodology to transform the organization and orientation of independent work in the teaching and learning of mathematics in a blended learning.

The alternative is based on a conception of learning developer, in which are conceived learning tasks that include actions to promote learning independently. It is showed its implementation in differential equations and the results of its application as well as the consulting to experts, which enable the evaluation of its effectiveness.

INTRODUCCIÓN

En Cuba el acceso a la Enseñanza Superior ha constituido una meta constante, más recientemente buscando mayores niveles de equidad y oportunidades. Este proceso denominado Universalización de la Educación Superior, ha brindado una nueva forma para realizar estudios superiores, el cual ha sido la vía para dar respuesta a las nuevas demandas sociales que la modalidad presencial no puede atender, ya sea por la carestía de la infraestructura necesaria o por las características de los estudiantes (Suárez, 2009)

El proceso de enseñanza-aprendizaje en las condiciones de Universalización, implicó profundas transformaciones en los métodos de enseñanza y cambios importantes respecto a lo que se realizaba tradicionalmente por el profesor y el estudiante en la modalidad presencial. Se conformó la modalidad semipresencial, la cual exige mayor orientación al estudiante, para lograr una formación más independiente, con mayor dedicación al estudio, con independencia y creatividad. (Llorente y Cabero 2008)

El estudiante que se inserta en este tipo de modalidad, debe emplear gran parte del tiempo a su preparación de forma independiente, debe aprender básicamente mediante la ejecución del Trabajo Independiente apoyado en los recursos didácticos elaborados con este fin (Rojas, 1979).

A partir de la importancia que adquiere Trabajo Independiente en esta modalidad, se analizaron los componentes del expediente de la asignatura Matemática para las carreras de Ciencias Técnicas en la modalidad semipresencial, a través de los cuales se realiza la orientación del Trabajo Independiente a desarrollar por el estudiante.

El análisis realizado y las vivencias acumuladas por una de las autoras, como miembro de la comisión metodológica de las asignaturas de matemática en carreras universalizadas de la Cujae, como jefa de disciplina y profesora durante varios años del Curso por Encuentros le permiten corroborar, que a pesar de las virtudes y aciertos de la modalidad semipresencial, esta debe ser perfeccionada para lograr que tanto los profesores como los estudiantes, asuman el rol que exige esta modalidad.

DESARROLLO

En el estudio realizado por las autoras, se pudo constatar que la enseñanza superior a nivel global está apostando con gran fuerza por la adopción de la modalidad semipresencial. Para ello se planifican, diseñan y transforman parte de los cursos y las asignaturas; se desarrollan nuevas estrategias y de organización, los nuevos planes disminuyen el número de horas presenciales, aumentando las no presenciales para el trabajo independiente.(Ginoris, 2009)

En el contexto cubano los cambios en las modalidades de enseñanza comenzaron con el triunfo de la Revolución Cubana en 1959 a partir de la Reforma Universitaria y más recientemente en el 2003 surge el proceso de Universalización de la Educación Superior, en el que se conformó un nuevo modelo pedagógico, a través de la modalidad semipresencial, que se aplicó en todas las sedes universitarias.

A partir de la conceptualización de esta modalidad en la educación cubana, se identifican como características esenciales: flexible, para que pueda adaptarse a diversas situaciones laborales y al ritmo individual de aprovechamiento académico del estudiante; estructurado de manera que

favorezca la organización y desarrollo del aprendizaje; centrado en el estudiante, para que este sea capaz de asumir de modo activo su propio proceso de formación y con un conjunto de actividades presenciales, que permita que los profesores guíen, apoyen y acompañen a los estudiantes de modo que no se sientan solos en este empeño.(Vega, 2005)

Diagnóstico del objeto de investigación

Con el objetivo de constatar las deficiencias que posee la modalidad semipresencial para el desarrollo del Trabajo Independiente, tanto en su puesta en práctica como en los componentes del expediente que posee la asignatura matemática, los que orientan a profesores y estudiantes en las carreras de Ciencias Técnicas, se realizaron las siguientes acciones:

- Los resultados de la investigación realizada por (Vega y Ansola, 2012), para la cual se analizaron 1799 controles a clases a partir del curso 2009-10 hasta el 1er semestre del curso 2012-13, en las filiales municipales de Ciencias Técnicas (FCT) para las carreras de Ingeniería Informática.
- Se aplicaron encuestas a profesores y estudiantes de la modalidad semipresencial de Cuba y España, para conocer desde las perspectivas de los profesores y estudiantes, cómo se realiza la orientación, ejecución y el control del Trabajo Independiente en la matemática, estos resultados fueron publicados en el artículo realizado por la autora: “Importancia del Trabajo Independiente en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.(Rodríguez, Fraga, Vega, Brito y Fernández, 2012).
- El análisis de los Planes de Estudio y de los componentes del expediente de las asignaturas de Matemática, para Ingeniería Industrial, Ingeniería Informática e Ingeniería Mecánica de la modalidad semipresencial, para investigar cómo se orienta en cada caso el Trabajo Independiente.

Los resultados de la investigación arrojaron, que la actividad presencial que se está realizando no responde a las características antes mencionadas para esta modalidad, los recursos didácticos en general y las tareas de aprendizaje en particular, no están concebidas para lograr el aprendizaje a través del Trabajo Independiente desarrollado por los estudiantes.

El análisis realizado del Plan de Estudio y de los componentes del expediente de las asignaturas de matemática para las tres carreras seleccionadas de la modalidad semipresencial, evidenciaron las limitaciones que tienen los mismos desde su concepción y en su aplicación, para lograr en los estudiantes el aprendizaje de forma independiente.

A partir de las dificultades identificadas que posee la aplicación de la modalidad semipresencial en Matemática para las carreras de Ciencias Técnicas y la necesidad de perfeccionarla, para que responda a las características establecidas, se elaboró una Alternativa Metodológica en la que se concibe el Trabajo Independiente, desde las Actividades Presenciales y las No Presenciales, con las tareas de aprendizaje y ayudas, que guíen al profesor en el proceso de enseñanza y a los estudiantes en su aprendizaje de manera independiente.

Para la elaboración de la Alternativa Metodológica se asumen las concepciones relativas al aprendizaje desarrollador, las cuales sustentadas en las posiciones vigotskianas**,** se centran en el sujeto consciente, orientado hacia un objetivo, en interacción con otros sujetos, realizando acciones con el objeto mediante la utilización de diversos recursos didácticos, las tareas de aprendizajes y

ayudas, para la elaboración de las cuales se tuvo en cuenta las concepciones desarrolladoras. (Vigotsky, 1987)

Según el concepto de Trabajo Independiente asumido en la investigación y las características que lo distinguen en la modalidad semipresencial, las autoras consideran que este transita en el proceso de enseñanza-aprendizaje por las fases: orientación, aprendizaje de nuevos contenidos, consolidación e integración de contenidos, las que se tienen en cuenta en la elaboración de la Alternativa Metodológica.

Esta tiene como objetivo organizar el Trabajo Independiente en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, para el cumplimiento de los objetivos previstos en el Plan de Estudio de la asignatura seleccionada en la modalidad semipresencial, contribuyendo intencionalmente desde la Didáctica de las matemáticas al desarrollo de las habilidades: identificar, interpretar analítica y gráficamente, fundamentar y modelar matemáticamente problemas, a través de un aprendizaje desarrollador, la cual tiene como características:

- Actividades Presenciales y No presenciales planificadas y elaboradas con igual rigor didáctico.
- Actividades que están compuestas por tareas de aprendizajes, para el desarrollo del Trabajo Independiente con el objetivo de orientar a los profesores en el proceso de enseñanza y a los estudiantes para su aprendizaje.
- Ayudas concebidas para que apoyen el aprendizaje, cuando no se logra la solución de la tarea de aprendizaje con las orientaciones generales dadas.

La Alternativa Metodológica se estructura con los siguientes componentes:

- Tema.
- Objetivo del Tema.
- Contenido del Tema.
- Actividades Presenciales (AP) y No Presenciales (ANP)
- Secuencia de Actividades.
- Guía del estudiante con las tareas de aprendizaje y ayudas.
- Guía del profesor con las tareas de aprendizaje y ayudas.
- Uso del libro de texto.
- Montaje del Tema en Plataforma Moodle.

Implementación de la Alternativa Metodológica en el tema de Ecuaciones Diferenciales

La Alternativa Metodológica propone cambios en la concepción de los tipos de actividades para orientar al estudiante, encaminadas a potenciar el desarrollo del Trabajo Independiente, a través de tareas de aprendizaje y ayudas para el cumplimiento de los objetivos por los estudiantes y contempla además la orientación al profesor para lograrlo.

Teniendo en cuenta los contenidos para alcanzar los objetivos planteados en el tema de Ecuaciones Diferenciales, se definieron los tipos y cantidad de Actividades Presenciales (AP) y No Presenciales (ANP).

Todas las actividades son concebidas con el mismo rigor didáctico y para su elaboración se tuvo en cuenta las diferentes fases por las que transcurre el Trabajo Independiente.

Para este tema según la complejidad y el alto grado de aplicabilidad que posee, se propuso 7 Actividades Presenciales (3 AP de orientación y 4 AP de retroalimentación y control), 5 Actividades No Presenciales, las cuales conforman el conjunto de actividades del tema.

Las Actividades No Presenciales representan el momento en que el estudiante realiza el Trabajo Independiente, a través de las tareas de aprendizaje y las ayudas, orientadas hacia la adquisición de los conocimientos, el desarrollo habilidades, aplicación y generalización de los contenidos adquiridos a la solución de problemas. Las tareas de aprendizaje están estructuradas hacia la búsqueda y exploración del conocimiento desde posiciones reflexivas, teniendo en cuenta las acciones a realizar en los momentos por los que transita el Trabajo Independiente, concebidas con ayudas que son utilizadas por los estudiantes según las necesiten para el logro de la adquisición de los contenidos de forma independiente.

Tienen importancia especial la atención a las diferencias individuales en la modalidad semipresencial, las que se manifiestan en la Alternativa Metodológica a través de ayudas a los estudiantes para que puedan realizar la tarea de aprendizaje, los que no lo lograron con las orientaciones dadas.

La ayuda estará en correspondencia con las capacidades cognitivas de estudiante, las que serán utilizadas según las necesiten para lograr el desarrollo de las tareas de aprendizaje orientadas en las ANP.

Si no logra responder las preguntas anteriores, estudie el ejemplo 5 del libro de texto, que demuestra que una ecuación diferencial puede tener infinitas soluciones. Observe la Figura 1.2, que muestra gráficamente un conjunto de soluciones de la ecuación diferencial. Si aún tiene dudas, proceda así:

- Estudie el ejemplo 6 del libro de texto, el que le ayudará a la comprensión de esta importante conclusión.
- Demuestre en el ejemplo 7 del libro de texto, que las funciones dadas son soluciones de la ecuación diferencial.

Ejemplo de ayudas en las de tareas de aprendizaje en una ANP :

La ayuda que se muestra, le ofrece al estudiante que no pudo responder las preguntas sobre el número de soluciones de una ecuación diferencial, la posibilidad de comprender este concepto a través de la solución dada de forma analítica y gráfica de una ecuación diferencial, lo que le permite no sólo interpretar las soluciones de la ecuación diferencial en el lenguaje matemático, sino además en lenguaje gráfico, lo que facilita la comprensión de este concepto.

Los estudiantes que aún puedan tener dificultades, se les ofrece a continuación otra ayuda donde el estudiante puede comprender paso a paso, que dos soluciones diferentes son soluciones de una misma ecuación diferencial, lo que les permitirá la comprensión del concepto estudiado.

La comprobación por parte del profesor, que el estudiante que necesitó diferentes tipos de ayudas logró el objetivo planteado, la realiza a través de la orientación de una tarea de aprendizaje de comprobación donde debe aplicar el concepto en un ejemplo sencillo. Las ayudas no implican que se ofrezca la solución de la tarea de aprendizaje, si no la información necesaria para resolverla, estas ayudas garantizan la ulterior independencia del estudiante.

Las Actividades No Presenciales que poseen la Alternativa Metodológica, tienen como regularidades:

- La orientación estableciendo nexos entre lo conocido y lo desconocido, como motivación para la adquisición de los contenidos a través del Trabajo Independiente en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- La exigencia de la reflexión, la realización de valoraciones y la toma de decisiones por parte de los estudiantes, para la realización de las acciones y operaciones en la ejecución de las tareas de aprendizaje, estimulan y propician el desarrollo a largo plazo del pensamiento y la independencia.
- Se ofrecen ayudas para aquellos estudiantes que no pueden resolver la tarea de aprendizaje con las orientaciones generales dadas.
- La cantidad de tareas de aprendizaje y el tiempo de dedicación por parte del estudiante para su solución depende de la complejidad del tema a estudiar.
- El estudiante durante la ejecución de las ANP, transita por todos los momentos por los que transcurre el Trabajo Independiente: orientación, aprendizaje de nuevos contenidos, consolidación e integración de contenidos.

Las Actividades No Presenciales están planificadas para que se ejecuten posteriores a las Actividades Presenciales de orientación.

Las AP de orientación, representan un importante componente en el proceso de enseñanza, están confeccionadas con todo el rigor didáctico que el resto de las actividades, teniendo la particularidad de ofrecer al profesor las vías para orientar el estudio de los nuevos contenidos, estableciendo los nexos con los contenidos precedentes y con otras áreas del conocimiento que sobre el objeto de estudio posee el alumno y el vínculo que pueda establecer con la profesión.

Las Actividades Presenciales de orientación tienen como regularidades:

- Motivar a los estudiantes hacia el objeto de la actividad de estudio, estableciendo nexos entre lo conocido y lo desconocido.
- Provocar en los estudiantes una actitud inestable ante el aprendizaje, hacia la búsqueda de su estabilización a través de la solución de las tareas de aprendizaje planteadas.
- Explicar los elementos esenciales del nuevo tema, para que el estudiante pueda guiar su aprendizaje con las orientaciones dadas en las ANP de forma independiente.
- Se distingue en estas actividades el momento de orientación, aunque está presente de forma continua en todo el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Modalidad Semipresencial, tanto en las AP como en las ANP.

Las Actividades Presenciales de retroalimentación y control, cierran los subtemas y el tema de estudio. En estas los estudiantes aclaran las dudas surgidas durante la autopreparación y el aprendizaje, rectifican los errores cometidos, explican las soluciones de los problemas planteados y generalizan los resultados obtenidos.

Las Actividades Presenciales de retroalimentación y control tienen como regularidades:

- Se realiza fundamentalmente por los alumnos, a través del desarrollo de las tareas de aprendizaje orientadas, la explicación de los aspectos teóricos y prácticos estudiados, y las conclusiones arribadas.
- Espacio para la retroalimentación de los estudiantes del Trabajo Independiente desarrollado, a partir de aclarar sus dudas y defender sus puntos de vistas.
- El profesor controla el cumplimiento de las tareas de aprendizaje y el avance individual de cada estudiante.
- El profesor puntualiza los elementos teóricos esenciales del tema y en los que hayan tenido mayores dificultades los estudiantes en su comprensión.
- El estudiante debe transitar esencialmente, por los momentos del Trabajo Independiente de consolidación, integración y generalización de los contenidos.

Para la aplicación de la Alternativa Metodológica se realizaron las siguientes acciones:

- Se elaboró la Secuencia de Actividades, las Guías del estudiante y del profesor, que contemplan las Actividades Presenciales y No Presenciales con las tareas de aprendizajes y las ayudas.
- Se realizó la preparación de los profesores que impartirían el tema correspondiente a la asignatura Matemática, en las carreras de Ingeniería Informática e Ingeniería Mecánica, a través de cuatro reuniones metodológicas.
- Se realizaron observaciones a clases dirigidas a comprobar la aplicación de la Alternativa Metodológica.
- Se realizó una encuesta a los estudiantes una vez culminada la aplicación, para conocer desde su percepción, la influencia de la Alternativa Metodológica en el Trabajo Independiente desarrollado en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática. Para determinar el tamaño de la muestra, se utilizó el procedimiento estadístico dado por

(Hernández, Fernández y Batista 2006). teniendo en cuenta que la escala medida es nominal y la población es finita. Para medir la confiabilidad de la consistencia interna del instrumento aplicado, se realizó la estimación del coeficiente desarrollado por J. L. Cronbach (Castillo, 2010).

- Se sometió a juicio de expertos la Alternativa Metodológica pertenecientes a universidades de Cuba y España, con el objetivo de obtener juicios críticos sobre esta y confirmar a partir de los resultados su validez teórica. Para corroborar que los profesores seleccionados se consideraran como expertos, se les aplicó una encuesta previa con el fin de valorar el coeficiente de competencia según metodología planteada por el método Delphi.

Los fundamentos filosóficos, psicológicos, sociológicos, pedagógicos y didácticos asumidos, y los resultados obtenidos de la consulta a los expertos, permitieron la elaboración y aplicación de una Alternativa Metodológica para la transformación de la organización y la orientación del Trabajo Independiente en la semipresencialidad, que guíen al profesor en el proceso de enseñanza y favorezca el aprendizaje del estudiante, apoyada en:

- El aprendizaje como un proceso tanto de realización individual como social, como un proceso de construcción y reconstrucción por parte del estudiante, apoyados en los conocimientos previos y en interacción con los recursos didácticos que se elaboren.
- Las concepciones relativas al aprendizaje desarrollador, las cuales se centran en el sujeto consciente y orientado hacia un objetivo, realizando acciones con el objeto de estudio, orientado hacia el cumplimiento de los objetivos.(Castellanos, 2001)
- La orientación a través de tareas que garanticen la estructura base del aprendizaje y expresan la relación dialéctica entre la labor intencional, orientadora del profesor y el aprendizaje desarrollador del estudiante, el cual debe asumir durante la ejecución un papel activo en su aprendizaje.
- La aplicación de ayudas, para que los estudiantes que no puedan resolver las tareas de aprendizaje con las indicaciones generales dadas, logren avanzar con mayor apoyo y alcanzar los objetivos previstos, disminuyendo la distancia entre el nivel real y el potencial.

La Alternativa Metodológica propone transformaciones desde una nueva organización y orientación del Trabajo Independiente en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, que conlleva a cambios en la conducción del aprendizaje respecto a la actuación del profesor y del estudiante. Las Actividades Presenciales y No Presenciales con las ayudas que poseen, están encaminadas a cumplir los objetivos propuestos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, a partir fundamentalmente, de la realización de tareas de aprendizaje de manera independiente, lo cual contribuirá a largo plazo a desarrollar la independencia cognitiva de los estudiantes en ese proceso e implicará llevar a planos superiores el Trabajo Independiente como importante aporte en esta modalidad.

CONCLUSIONES

El diagnóstico realizado mostró que la aplicación de la modalidad semipresencial para la formación de profesionales en las carreras de Ciencias Técnicas, ha venido revelando la necesidad de perfeccionarla, a partir de las contradicciones entre las características que la distinguen y su puesta en práctica.

El estudio realizado permitió sistematizar los fundamentos teóricos-metodológicos que sirven de base para la estructuración didáctica del Trabajo Independiente en la matemática en la modalidad semipresencial, con un enfoque desarrollador, teniendo en cuenta los presupuestos teóricos de la Didáctica de las matemáticas para la Enseñanza Superior.

La Alternativa Metodológica propone transformaciones desde una nueva organización y orientación del Trabajo Independiente en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, que conlleva a cambios en la conducción del aprendizaje respecto a la actuación del profesor y del estudiante.

Las Actividades Presenciales y No Presenciales con las ayudas que poseen, están encaminadas a lograr en los estudiante el cumplimiento de los objetivos propuestos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, a partir fundamentalmente, de la realización de tareas de aprendizaje de manera independiente.

La Alternativa Metodológica, se sometió a juicio de expertos de Cuba y España, el resultado de la valoración realizada, evidenció la pertinencia y posibilidades de su aplicación.

Se realizó una aplicación de la Alternativa Metodológica en el tema de Ecuaciones Diferenciales en las carreras de Ingeniería Informática e Industrial y los resultados de las encuestas realizadas, mostraron desde la apreciación de los estudiantes, la viabilidad y satisfacción de su aplicación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Castellanos, D. (2001). *Hacia una concepción del aprendizaje desarrollador*. La Habana: Félix Varela.

Castillo, S. A. (2010). *Estadística aplicada a las investigaciones educativas*: La Habana: Pueblo y Educación.

Ginoris, O. (2009). *Fundamentos didácticos de la Educación Superior. La semipresencialidad y sus exigencias pedagógicas y didácticas del proceso docente - educativo en las sedes universitarias municipales. Visión del profesor*. La Habana: Félix Varela.

Hernández, R., Fernández, C. y Batista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw Hill.

Llorente, M. C. y Cabero, J. (2008). *Modelos flexibles de formación: semipresencial, mixto o blended learning*. Barcelona: Davinci.

Rodríguez, M. C., Fraga, E., Vega, G., Brito, M. L. y Fernández, P. (2012). Importancia del Trabajo Independiente en la enseñanza-aprendizaje de la matemática. *Pedagogía Universitaria. Revista Electrónica de la Dirección de Formación de Profesionales Ministerio de Educación Superior., 14*(4), 28-41.

Rojas, A. C. (1979). El trabajo independiente de los alumnos. Su esencia y clasificación. Revista Varona, 1(1), 64-70.

Suárez, C. (2009). Concepción didáctica de la Universalización de la Educación Superior. La Habana: Editorial Félix Varela.

Vega, G. y Ansola, E. (2012). Del expediente de una asignatura a la Clase Encuentro en la modalidad semipresencial, un problema metodológico a resolver. *Revista Cubana de Ingeniería, 3*(3), 21-27.

Vega, G. (2005). *Educación para todos: Universalización de la Educación Superior Cubana*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Vigotsky, L. (1987). *Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores*. Ciudad de La Habana: Científico-Técnica.

CÓMO LOS ALUMNOS PASAN DEL MODELO SITUACIONAL AL MODELO MATEMÁTICO EN UN PROBLEMA DE NIVEL MEDIO BÁSICO

Luis David Benítez Lara, Lidia Aurora Hernández Rebollar y Josip Slisko
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)
dblster@gmail.com, lhernan@fcfm.buap.mx, jslisko@fcfm.buap.mx

Palabras clave: problemas contextualizados, modelo situacional, modelo matemático

Key words: word problems, situational model, mathematical model

RESUMEN: En este trabajo analizamos cómo estudiantes de nivel medio superior pasan del modelo situacional al modelo matemático cuando trabajan con un problema de nivel medio básico. El análisis se hace a través de los dibujos, que se les solicitan a los estudiantes, en un cuestionario diseñado explícitamente para esta investigación. El cuestionario contiene un problema que se encuentra en un libro de texto de educación media básica (Arriaga, 2008), y que ha sido objeto de investigación debido a que se ha detectado que el porcentaje de respuestas correctas es bajo en alumnos de los niveles medio básico, medio superior y superior (Hernández, Slisko y Benítez, 2012).

ABSTRACT: This paper analyzes how senior high students pass from the situational model to the mathematical model when they're working with a problem of basic level. The analysis is done through drawings, which were required from students in a test specifically designed for this research. The test has a problem that you could find in a textbook of high school education (Arriaga, 2008), this problem has been a research object because we have found that the percentage of correct answers of the students is low in the basic, middle and higher level (Hernández, Slisko y Benítez, 2012).

INTRODUCCIÓN

El problema al que se refiere esta investigación es el siguiente:

Cecilia participa en una competencia de salto de longitud. Si del punto límite camina 15 pasos en sentido contrario a la fosa y un paso de ella equivale a 0.70 m y su salto es de 3.80m, ¿con qué número con signo representas el recorrido previo al salto?

En Hernández, Rodríguez y Slisko (2010) se muestra que este problema describe una situación ambigua que no favorece la obtención de la respuesta considerada correcta en estudiantes de nivel medio básico. En Benítez (2014) se estudia la construcción del modelo situacional de este problema por parte de estudiantes del nivel superior y se concluye que la redacción y el vocabulario utilizado provocan la construcción de diferentes modelos de la situación. Aun en este nivel, sólo el 50% de la muestra obtiene la respuesta correcta. En cuanto al modelo matemático de este problema, se considera como tal a la recta numérica, la cual apareció escasamente en el nivel superior y no se presentó en el nivel medio básico.

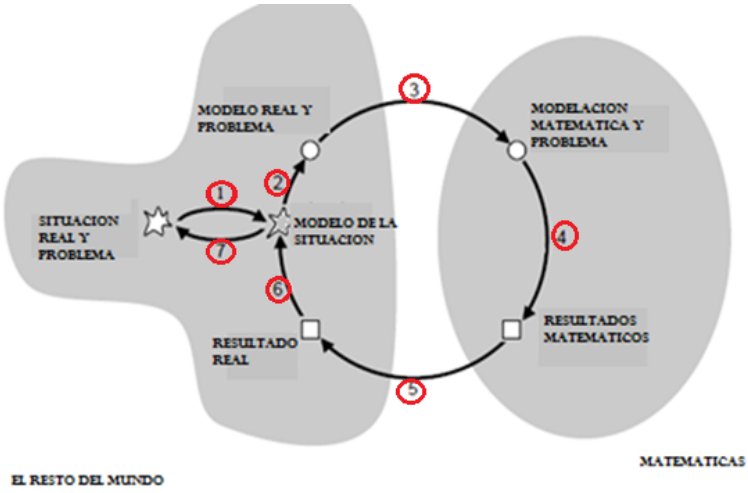
Otros resultados que se han observado en estas investigaciones previas es que cuando aparece el modelo matemático, éste aparece mezclado con el modelo situacional. En Hernández, Slisko y Benítez (2012) se prueban diferentes redacciones del problema de tal forma que éstas contribuyan a obtener la respuesta correcta. Sin embargo, la mejora fue baja, apenas de 4 puntos porcentuales.

En el estudio que presentamos ahora, utilizamos las versiones del problema propuestas en Hernández, Slisko y Benítez (2012), las presentamos a estudiantes de nivel medio superior y les solicitamos dos dibujos, uno de la situación y otro simplificado con la finalidad de explorar el tránsito del modelo situacional al modelo matemático en estos estudiantes. El objetivo es investigar de qué manera los estudiantes de nivel medio superior elaboran el modelo situacional de un problema y qué dificultades se les presentan cuando pasan al modelo matemático. Otro de los objetivos de esta investigación es averiguar si alguna de las versiones favorece la construcción de los modelos mencionados. Al modificar la redacción del problema exploramos si alguna de las dos versiones favorece la construcción del modelo situacional y del modelo matemático.

MARCO TEÓRICO

La elaboración del modelo matemático es un problema didáctico de gran interés, y se ha mostrado que es difícil, tanto para profesores como alumnos, dado que es el proceso de traducción del mundo real a las matemáticas y tiene una demanda cognitiva muy significativa (Blum y Borromeo, 2009). El ciclo de modelación de Blum y Leib (2006) describe el proceso cognitivo que se sigue cuando se resuelve un problema que requiere de la modelación matemática.

Figura 1. Ciclo de modelado de Blum y Leib (2006)



El primer paso en ese ciclo implica la construcción de un modelo de la situación. Después, esta situación debe ser simplificada, estructurada y precisada, lo que lleva a un modelo real. La matematización transforma al modelo real en un modelo matemático que generalmente consta de ciertas ecuaciones. Cuando los estudiantes se enfrentan a un problema verbal de matemáticas las tres etapas mencionadas antes se reducen a dos, construcción del modelo situacional y obtención del modelo matemático. El primer paso de este ciclo se explica con la teoría de Teun A. van Dijk y W. Kintsch (1983) la cual postula que al leer, se trabaja con 3 niveles de representación mental: el código de superficie, la base de texto y el modelo de la situación. Este último nivel puede entenderse como la imagen mental que el sujeto construye cuando comprende el problema. Tijero Neyra, T. (2009) considera que la construcción de un modelo situacional coherente es esencial para una adecuada comprensión del texto. Además Van Essen y Hamaker (1990) afirman que generar un diagrama facilita la conceptualización de la estructura del problema y es el primer paso para obtener una exitosa solución. Por lo anterior, en este trabajo consideramos que los dibujos de los estudiantes nos permiten ver cómo entienden el problema y si tienen una idea coherente con la situación. Diezmann (2000) concluye que los diagramas son una herramienta importante para la resolución de problemas, sin embargo, los beneficios de cualquier instrumento utilizado están estrechamente asociados con el conocimiento de los usuarios de éste y el desarrollo de sus habilidades cuando hacen uso de él.

En este trabajo usamos a los dibujos que los alumnos hacen de la situación, como una representación del modelo situacional, y para ayudarles a obtener el modelo matemático les solicitamos trazar un segundo dibujo, más simple que el primero, pero en el cual se conserven los elementos más importantes del problema planteado.

METODOLOGÍA

La metodología utilizada en esta investigación es de tipo cualitativo. Consistió en: (1) el diseño de 2 instrumentos con dos variantes del problema mencionado en la introducción, (2) el análisis de los dibujos solicitados a los alumnos, con la finalidad de observar la transición del modelo situacional al matemático, y (3) la comparación de los modelos construidos de acuerdo a cada una de las versiones.

Los participantes fueron 64 alumnos de 2do, 4to y 6to semestre de una preparatoria particular del estado de Tlaxcala, México en 2012. Denotamos a cada estudiante como E-*n*, donde *n* es alguno de los 64 estudiantes.

El problema al que se refiere esta investigación se encuentra en un libro de texto del segundo grado de educación secundaria distribuido por la SEP (Arriaga, 2008). A este problema le llamaremos la versión original.

En el instrumento 1 se toma en cuenta la versión original del problema, además de las siguientes instrucciones:

- En el espacio de abajo dibuja lo más fiel posible la situación descrita en el problema, tal como la entiendes tú. A cada parte importante del dibujo agrega un nombre.

  Para ayudar a construir el modelo matemático se les dio la siguiente instrucción:

- Simplifica el dibujo anterior lo más que puedas, dejando solamente lo que es necesario para la solución. Es importante que en este dibujo incluyas todos los números que aparecen en el texto del problema.

En el instrumento 2 elaboramos otra versión del problema, a la que llamaremos versión modificada, para probar si al modificar el lenguaje y la redacción se facilitaba la construcción de los modelos situacional y matemático. El instrumento 2 también cuenta con las mismas instrucciones que el instrumento 1. La versión modificada es:

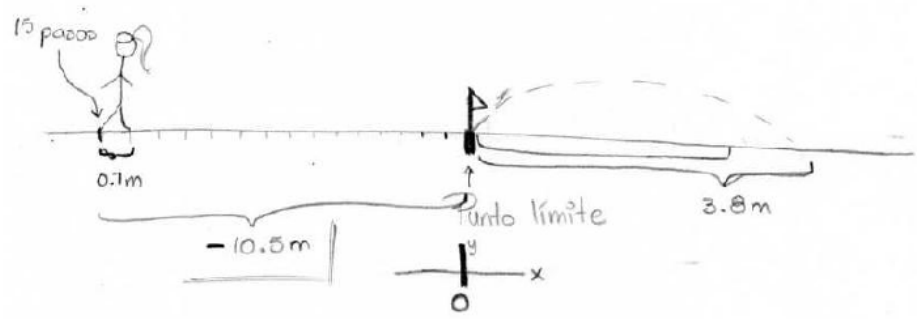
Cecilia participa en una competencia de salto de longitud. Se prepara verificando la pista donde correrá y el punto desde donde saltará. Desde el punto del salto, ella da 15 pasos para regresar a la línea de salida porque ya es su turno de competir. La longitud de su salto fue de 3.8 m.

Los resultados que presentaremos muestran que, aun cuando se les solicitó a los alumnos dos dibujos, uno de la situación que planteaba el problema, el cual se esperaba realista, y otro más sencillo, en el que se esperaba que apareciera la recta numérica, ocurrió que ellos hicieron el mismo dibujo para los dos casos. Además, otros estudiantes elaboraron el primer dibujo más sencillo que el segundo. Por tanto, esta investigación permite reflexionar sobre las dificultades que enfrentan los estudiantes para transitar del modelo situacional al modelo matemático al momento de resolver un problema y sobre las posibles intervenciones que deben hacer los docentes para favorecer este tránsito.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

En el problema de investigación, un dibujo que describe adecuadamente la situación que plantea el problema es el siguiente:

Figura 2. Dibujo que representa la situación del problema



El dibujo mostrado en la figura 2 tiene combinados los dos modelos. Es el adecuado dado que el modelo matemático para resolver este problema es la recta numérica. Los estudiantes tienen que indicar la posición de Cecilia, antes de que haga su salto en la recta después de contar los pasos.

Dependiendo de los elementos en cada dibujo y de la forma en que lo presentaron, los dibujos hechos por los estudiantes los clasificamos en 5 casos que son:

- Caso 1: Algunos alumnos, al leer la indicación de hacer los dos dibujos, repitieron el mismo.
- Caso 2: A pesar de que su dibujo ya era sencillo, lo simplifican aún más.
- Caso 3: Su primer dibujo es abstracto y cuando le piden la simplificación le agrega más detalles.
- Caso 4: El primer dibujo es sencillo, pero el segundo tiene elementos matemáticos como la recta numérica.
- Caso 5: Los dibujos no están unificados o no representan la situación.

En la tabla 1 aparece la cantidad de dibujos que hicieron los estudiantes en cada uno de los casos y separados por versión del problema. Denotamos con O a la versión original y con M a la versión modificada.

Tabla 1. El número total de dibujos separados por casos.

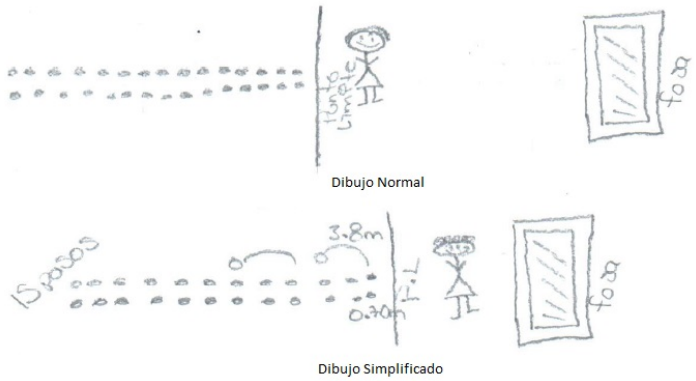
.

	Caso 1		Caso 2		Caso 3		Caso 4		Caso 5		No Dibujó		
Versión	O	M	O	M	O	M	O	M	O	M	O	M	Total
Total	9	6	6	3	1	5	6	4	9	4	2	9	64
Total	15		9		6		10		13		11		64

Podemos percatarnos que el Caso 1 (Hacer el mismo dibujo) es el que tiene más frecuencia, esto quiere decir que la mayoría de los estudiantes no supieron cómo hacer el dibujo más simplificado.

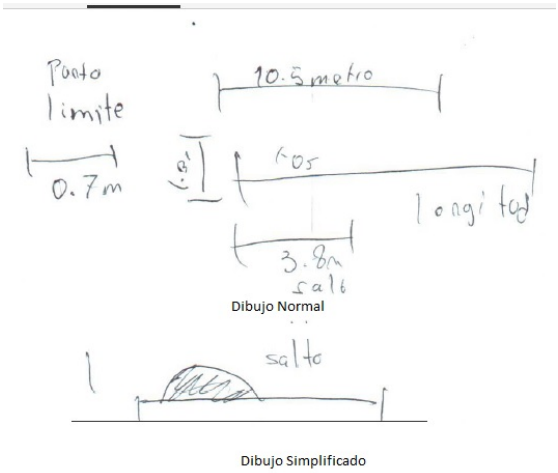
La figura 3 muestra un ejemplo de los dibujos que están considerados en el Caso 1:

Figura 3. Ejemplo del Estudiante E-34 del Caso 1.



El segundo caso con mayor frecuencia fue el Caso 5, donde los estudiantes no entendieron la situación del problema y por esta razón sus modelos no son los adecuados. En la figura 4 se muestra un ejemplo en el que el estudiante no pudo unificar todos los elementos descritos del problema ya que dibuja de manera separada cada paso, la fosa, etc. De esta forma podemos comprobar que un modelo situacional no adecuado, impide la construcción de un modelo matemático útil.

Figura 4. Ejemplo del Estudiante E-21 del Caso 5



El caso que más nos interesa es el número 4, ya que en éste aparecieron elementos matemáticos en el segundo dibujo. Algunos ejemplos de este caso son los siguientes:

Figura 5. Ejemplo del Estudiante E-12 del Caso 4

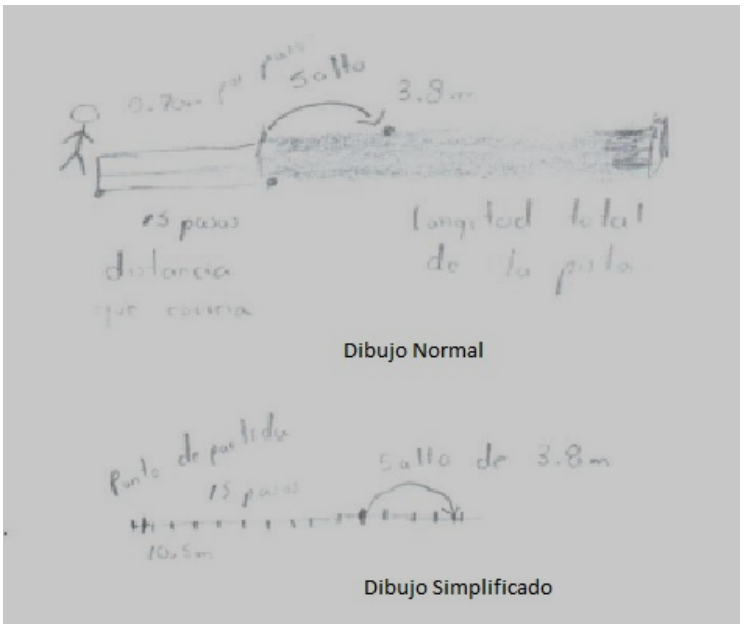
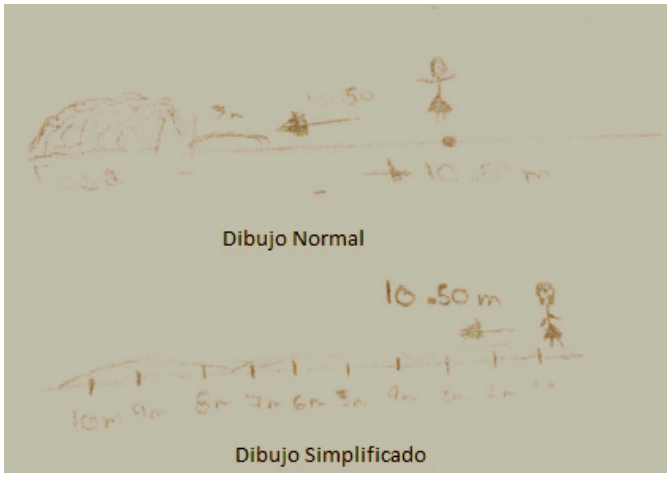


Figura 6. Segundo Ejemplo del Estudiante E-24 del Caso 4

.



En los ejemplos de las figuras 5 y 6 podemos ver que, en el segundo dibujo, ya se involucra a la recta real, que es el modelo matemático esperado. Observamos cómo estos estudiantes pasan de un modelo a otro de manera adecuada ya que el segundo más abstracto.

CONCLUSIONES

Esta investigación nos muestra que los estudiantes no están familiarizados con la elaboración de dibujos abstractos, porque al pedirles que hicieran los dos dibujos, éstos fueron hechos en su mayoría, exactamente iguales.

A pesar de que un significativo número de estudiantes dibujó la recta real como modelo matemático, su modelo situacional no fue el adecuado, dado que en unos casos confundieron el salto de longitud con salto de altura.

Los estudiantes que no tenían un modelo situacional adecuado no pudieron construir el modelo matemático.

El caso que más nos interesaba es el Caso 4, comparando las dos versiones, observamos que en la versión original (O) tuvimos más modelos adecuados a la situación planteada por el problema que en la versión modificada. Por esta razón nuestra modificación no tuvo los resultados esperados ya que pensamos que con esta modificación el número de alumnos que lograban los modelos situacional y matemático correctos aumentaría. Como no fue así, debemos idear otros cambios.

En los libros de texto de matemáticas es común encontrar, en el mismo dibujo, una mezcla del modelo situacional y del modelo matemático. Por esta razón, no es extraño que los estudiantes no lo puedan elaborar por separado de manera adecuada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arriaga Coronilla, A. (2008). *Matemáticas 2, Introducción a las competencias. Educación Secundaria*. 2da. Edición, página 20. México: Pearson Educación.

Benítez Lara, L. (2014). *La contextualización de un problema cuya solución es supuestamente un número negativo: ¿cómo los estudiantes construyen el modelo situacional y el modelo matemático?* Tesis de Licenciatura. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México.

Blum y Borromeo, (2009). *Mathematical Modelling: Can It Be Taught and Learnt?* Journal of Mathematical Modelling and Application. Vol 1, No. 1, 45-58.

Blum, W. y Leib, D (2006). *"Filling up" – The Problem of Independence-Preserving Teacher Interventions in Lessons with Demanding Modelling Tasks.* In: Bosch, M- (Ed.), CERME-4 – Proceedings of the Fourth Conference of th European Society for Research in Mathematics Education. Guixol.

Diezmann, Carmel M (2000). *The difficulties students experience in generating diagrams for novel problems. In Nakahara, T and Koyama, M, Eds.* Proceedings 25th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, pages 241-248, Hiroshima, Japan.

Hernández, Slisko y Benítez (2012). *El desempeño de los estudiantes en un problema cuya solución debería ser un número negativo: la influencia del contexto, del lenguaje y del dato sobrante.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa No. 25, pág. 95-104.

Hernández Rebollar, L. A., Rodríguez Martínez, F. J. y Slisko Ignjatov, J. (2010). *Las Dificultades de los Estudiantes de Secundaria al Resolver un Problema que Involucra los Números con Signo: una interpretación ontosemiótica.* Memorias del VIII Congreso Virtual Internacional de Enseñanza de las Matemáticas: CVEM 2010.

Tijero Neyra, T. (2009). *Representaciones Mentales: discusión crítica del modelo de la situación de Kintsch.* Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile Van Dijk, T., y Kintsch, W. (1983). *Strategies of Discourse Comprehension*. New York: Academic Press.

LA CONTRIBUCIÓN DE LA MATEMÁTICA A LA FORMACIÓN SOCIO-HUMANISTA DE LOS FUTUROS ARQUITECTOS

Miriam Caridad Crespo Estrada, María de los Ángeles González Peñalver, Karen Sanabria Ortega
Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría (Cuba)
mcrespo@cemat.cujae.edu.cu, mangeles@cemat.cujae.edu.cu, karen@arquitectura.cujae.edu.cu

Palabras clave: Formación profesional, formación socio-humanista, Disciplina Matemática, Arquitectura

Key words: Professional Training, Socio-humanist formation, Mathematics Discipline, Architecture

RESUMEN: En Cuba, el perfeccionamiento sistemático de los Planes de Estudios de la carrera de Arquitectura en las últimas décadas, ha permitido diseñar un programa de Matemática específico para sus estudiantes, el cual, además de aportarles los conocimientos necesarios para afrontar su carrera y resolver problemas profesionales, tributa a la formación socio-humanista de los futuros arquitectos. El presente trabajo muestra la contribución de la Matemática al logro de este propósito, propone direcciones de su gestión para garantizar un mejor desempeño del profesional en formación y presenta experiencias obtenidas en este sentido por la disciplina en la facultad de Arquitectura del ISPJAE.

ABSTRACT: The systematic enhancement of the Curriculum for Architectural studies in the last decades in Cuba has allowed the design of a specific mathematical syllabus for students from the School of Architecture. The importance of the syllabus relies on the fact that it has not only contributed to the acquisition of knowledge but also has helped students in solving problems related to their professional field and to their socio-humanist development. This paper is aimed at presenting the achievements of the Mathematics Discipline; suggests guidelines to warranty a better performance in the professional training of future architects and shows the results of the syllabus application in the School of Architecture at ISPJAE.

INTRODUCCIÓN

La universidad desempeña el papel de institución social por excelencia y está encargada de la preservación, desarrollo y difusión de la cultura, así como de generar nuevos conocimientos que garanticen el desarrollo humano y sostenible y, con ello, la continuidad de la civilización. (Colectivo de autores, 2004).

En Cuba, tiene la misión de formar profesionales con personalidades integralmente desarrolladas, que piensen y actúen creadoramente, capaces de resolver la diversidad de tareas técnicas y científicas que le imponga su actividad profesional, con un enfoque que tome en consideración el entorno económico, sociopolítico e ideológico, cultural y ambiental, con un alto sentido de calidad, responsabilidad y estética, que les posibilite alcanzar un mayor protagonismo social.

Una Didáctica humanista, contextualizada y a la vez problematizadora, integradora y desarrolladora, constituye hoy día una necesidad impostergable para que la Educación Superior pueda cumplir exitosamente con la tarea encomendada.

Por tales razones los planes de estudios de sus carreras, continúan sometidos a un proceso continuo de perfeccionamiento, en el cual la revisión y crítica de los programas de disciplinas y asignaturas estimulan la búsqueda de alternativas y nuevas formas de enseñanza, que sobre la base de la unidad indisoluble de educación-instrucción, conlleven al desarrollo del educando, a la gestión del conocimiento, a la autoeducación y a su crecimiento como ser humano.

No son pocos los escenarios donde se han hecho planteamientos dirigidos al mejoramiento de la calidad humanista del arquitecto y a su compromiso ético con la sociedad, para preservar la naturaleza, y defender los fundamentos culturales de la arquitectura. Por ello, la carrera de Arquitectura y Urbanismo en nuestro país, al tomar en cuenta la función social que tendrán sus egresados, enfatiza, dentro de la formación de sus estudiantes, la dimensión socio-humanista.

La disciplina Matemática para Arquitectos se ha propuesto dirigir esfuerzos en esta dirección, ayudando al estudiante a afrontar el estudio de su carrera de manera más eficiente y resolver problemas prácticos con mayor profesionalidad.

El presente trabajo muestra la contribución de la Matemática a la formación socio- humanista del futuro arquitecto, propone direcciones de su gestión para garantizar un mejor desempeño del profesional en formación y presenta experiencias realizadas en este sentido por la disciplina en la facultad de Arquitectura del Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría (ISPJAE).

FORMACIÓN SOCIO-HUMANISTA DEL ARQUITECTO EN CUBA

La arquitectura en términos generales y sintéticos está dirigida a crear condiciones espaciales apropiadas y óptimas, para que el hombre pueda realizar las actividades que le son necesarias como ser social. Los arquitectos deberán reunir no sólo conocimientos y habilidades técnicas y artísticas específicas, sino también socio-humanísticas, y una serie de valores morales que forjarán su carácter y una determinada ideología. Los conocimientos y valores del futuro arquitecto también dependerán en gran medida de la formación que reciban. Si queremos educar en aquellos valores a que aspiramos, hay que estudiarlos y trabajar el tema desde el punto de vista pedagógico. (Rojas, 2005)

En Cuba, la formación socio-humanista del arquitecto, ha sido objeto de atención de diferentes planes de estudios. Sin embargo, se podría afirmar que fue en el Plan C' (1998-2006) donde se profundizó conscientemente por primera vez en ella y en la formación de valores. En él se explicitaba el deseo de formar un profesional de amplia formación humanística y sólida formación básica profesional en lo relativo al proyecto de conservación, conformación y transformación del ambiente construido, poseedor de un sistema de valores éticos, estéticos, cívicos y patrióticos, con clara conciencia económica, ecológica, de pertenencia cultural, capacidad de comunicación y autoaprendizaje, dirección y transformación, comprometido con la ideología política y el desarrollo socioeconómico del país, capaz de asumir las diversas complejidades del mundo de hoy y del mañana.

La formación socio-humanista se puede potenciar tanto en el aspecto curricular como en el proceso docente educativo. Como ideas comunes asociadas a ella se encuentran el desarrollo de la autorreflexión y el autoconocimiento, la capacidad de trascender el pensamiento lógico racional y el poder relacionarlo con vivencias afectivas, la sustitución de la didáctica tradicional y despersonalizada de transmisión-recepción por nuevos enfoques donde la formación se centren en el estudiante, la vinculación con el medio, colocar el proceso formativo en su contexto, ser realista, objetivo, la toma de partido hacia la significación de lo social, con proyección de transformación y mejoramiento, la urgencia de propiciar al alumno condiciones para que pueda transformarse por su voluntad, y ser capaz de trascender su realidad y sus limitaciones, el reconocimiento de la importancia de la comunicación con los demás y consigo mismo, así como el logro de la coherencia entre el pensar y el actuar, ser auténtico e íntegro. (Pérez, 2009)

En la actualidad se mantiene la voluntad de fortalecer la formación socio-humanista del estudiante de esta carrera y la disciplina Matemática para Arquitectos comprometida con ello, proyecta y realiza acciones en la implementación de los programas de sus asignaturas, encaminadas en esta dirección.

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN DE ARQUITECTOS EN CUBA

Al comienzo del siglo pasado, se inicia la formación de arquitectos en Cuba y en todos los planes de estudios implementados ha estado presente la Matemática en mayor o menor medida. Hasta 1990, los programas se caracterizaron por ser un agregado de asuntos que seguían fundamentalmente la lógica de la ciencia y centraban su atención en el ordenamiento de contenidos, algunos no necesarios ni de interés para los estudiantes, y otros se concibieron tal cual como fueron diseñados para primer año de ingeniería. En las clases, se enfatizaba fundamentalmente en los métodos de cálculo y resolución de ejercicios, en detrimento de la aplicación y vinculación de los contenidos con las asignaturas de la especialidad. La fragmentación y el alejamiento entre diferentes temas, percibidos de manera independiente, frenaba la generalización de conceptos, tan frecuente en Matemática, limitando las posibilidades de ejercitar operaciones del pensamiento.

A partir de 1990, con el Plan C, comenzó una etapa significativa de acercamiento a la Matemática necesaria para la formación del futuro arquitecto. En 1998, para su perfeccionamiento, se tomaron en cuenta los contenidos del plan anterior, a partir del establecimiento de los nodos de articulación

entre los temas de Matemática y los de las demás disciplinas de la especialidad, se hicieron algunos ajustes en cuanto a la profundización en su tratamiento y se introdujeron otros, también importantes para los estudiantes de esta carrera. Su selección respondió a tres principios fundamentales, que expresarían la correspondencia entre contenidos y objetivos: los contenidos seleccionados por la lógica de la Profesión, por la lógica de la ciencia históricamente constituida y tradicionalmente sistematizada como asignatura o disciplina científica en la práctica pedagógica y por la lógica del instrumento o la etapa de realización de una tarea profesional. (Corral, Núñez, 1990)

En el curso 2007-2008 comienza la ejecución del Plan de Estudios D, y con ello la disciplina que actualmente está en implementación, "Matemática para Arquitectos" (Crespo, 2007), la cual fue el fruto de un exhaustivo análisis de las deficiencias detectadas en los planes precedentes, de la aplicación consecuente de los principios de selección de contenidos y de la estrategia de perfeccionamiento definida. Para su diseño fue necesario determinar con exactitud el verdadero papel que debe jugar la Matemática en la formación de arquitectos.

CONTRIBUCIÓN DE LA MATEMÁTICA A LA FORMACIÓN SOCIO-HUMANISTA DEL FUTURO ARQUITECTO

El papel de la Matemática en la formación de arquitectos es utilitario y formativo.

Utilitario, porque aporta al estudiante los conocimientos necesarios para su formación académica y las herramientas de trabajo que le permitan identificar, interpretar y analizar modelos matemáticos en procesos técnicos, económicos, productivos y científicos vinculados a tareas profesionales de la carrera, así como resolver los problemas que éstos conducen, identificando rasgos cuantitativos y cualitativos de los fenómenos que estudia.

Formativo, porque desarrolla el pensamiento lógico, la capacidad de abstracción, habilidades para la comprensión y comunicación de propiedades y características matemáticas de magnitudes y formas en las variantes formal, gráfica, numérica y verbal; igualmente forma una base sólida de conocimientos, integrada y sistémica, que deje huella en el proceso de aprendizaje. Sus modos de actuación promueven, además del trabajo colectivo, la evaluación crítica de los resultados, propiciando el control y el autocontrol, y desarrollando el carácter consciente, autotransformador y adiestra al estudiante en el logro de la independencia en las acciones que ejecuta.

Desde el punto de vista metodológico, aporta al estudiante métodos de trabajo organizado al estimular el pensamiento algorítmico, desarrolla la capacidad de comunicación en forma oral, escrita y gráfica, posibilitando la defensa de sus criterios en el proceso de solución de un problema, en el análisis geométrico en general y de los objetos urbano-arquitectónicos, ayudándole a organizar las ideas y contribuyendo a la toma de decisiones sobre la forma de organizar el espacio a través de la Geometría. (Crespo, Sanabria, Guerra, 2012)

Para que la Matemática juegue su verdadero papel y contribuya de manera eficaz a la formación socio-humanista del futuro profesional es necesario:

- Una estructuración sistémica de los contenidos.
- Una enseñanza desarrolladora dirigida a la educación de la personalidad del estudiante, con una implicación personal activa, consciente y reflexiva, que provoque satisfacción,

flexibilidad, independencia, perseverancia, y una actitud ante la vida responsable y autodeterminada.

- Un proceso de enseñanza-aprendizaje centrado en el estudiante, que lo convierta en sujeto activo en la construcción y reconstrucción del conocimiento, mediante el uso de nuevas formas y métodos de enseñanza, para que se sienta inmerso en su desarrollo, se comprometa y se autorrealice, en un proceso participativo que potencie junto a lo instructivo, y a través de ello, lo educativo y la formación de valores éticos, morales y estéticos.

GESTIÓN DE LA DISCIPLINA MATEMÁTICA PARA ARQUITECTOS PARA GARANTIZAR UN MEJOR DESEMPEÑO DEL PROFESIONAL EN FORMACIÓN

En la actualidad, el programa de la disciplina Matemática para Arquitectos, tiene como retos, demostrar su pertinencia en esta carrera y responder a los requerimientos que la formación de este profesional demanda y que se resumen en el plan de estudios. Sus objetivos generales, expresan los modos de actuación para su implementación práctica.

Para la ejecución del programa de la disciplina, se proyecta el trabajo en varias direcciones, algunas de ellas establecidas en las indicaciones metodológicas y de organización para la implementación del programa y otras definidas con este fin, entre las que podemos citar:

- Considerar en la disciplina, como líneas directrices, la Geometría, la resolución de problemas y la integración de contenidos, dentro de la propia Matemática y con las restantes asignaturas del Plan de Estudio donde esto sea posible.
- Concebir la tarea docente como la unidad o célula donde se concretan los objetivos, el contenido y las exigencias del proceso de asimilación, a través de la cual el profesor tiene las mayores posibilidades de desarrollar la independencia, el nivel reflexivo, creativo y consciente. Los contenidos se desarrollarán de acuerdo con las necesidades del arquitecto y de la lógica de la Matemática.
- Lograr la articulación intradisciplinaria e interdisciplinaria de los contenidos, que permitirá valorar la correcta ubicación de la asignatura en el plan, enriquecer las clases con ejercicios y problemas de aplicación y fomentar el interés de los estudiantes por la Matemática.
- Dirigir el enfoque metodológico, de la disciplina y sus asignaturas, en aras de desarrollar el pensamiento lógico y creador, sobre la base de la resolución de sistemas de ejercicios y problemas que estimulen el trabajo independiente, posibiliten el desarrollo de habilidades, hábitos y capacidades para aplicar los conocimientos e incentivarlos a investigar, aportándoles herramientas para el logro de los modos de actuación del futuro arquitecto, en especial proyectar.
- Desarrollar habilidades para la comunicación y comprensión de propiedades y características matemáticas de magnitudes y formas en las variantes formal, gráfica, numérica y verbal.
- Resolver problemas, haciendo un uso eficiente de las técnicas modernas de cómputo y de los Asistentes Matemáticos, cuando sea necesario.

- Capacitar a los docentes con menor experiencia, para que puedan desarrollar el trabajo docente-educativo específico requerido con los estudiantes.
- Fomentar el vínculo investigación-docencia.

■ EXPERIENCIAS DESARROLLADAS POR LA DISCIPLINA EN LA FACULTAD DE ARQUITECTURA DEL ISPJAE

Desde el inicio del plan D, el colectivo de profesores ha ido perfeccionando el trabajo de la disciplina. Aún sin ser propiamente un experimento pedagógico, se han diseñado y realizado experiencias pedagógicas, algunas con el objetivo de vincular aún más la disciplina con la especialidad y otras dirigidas a la implementación de las estrategias curriculares definidas en el plan de estudio de la carrera.

Las que a continuación se relacionan, han estado encaminadas, no solo al logro de los objetivos propuestos, sino también, a instrumentar adecuadamente las indicaciones metodológicas y de organización, potenciando de esa manera la formación socio-humanista de sus estudiantes.

Proyección y ejecución de experiencias pedagógicas integradoras con otras disciplinas de la carrera

Con la intención de lograr un mayor compromiso en el enfoque integracionista de la formación y de la capacitación de los docentes en la especialización para Arquitectura en general, y para Matemática en particular, se ha desarrollado un trabajo metodológico conjunto en cuanto al uso de la terminología, orden y tratamiento de los contenidos, determinación de los nodos de articulación, definición de conocimientos y habilidades, aplicación de un sistema de evaluación coherente, análisis de la posición relativa de materias según intereses de otras disciplinas de la especialidad en las secuencias de actividades docentes y en la planificación de las mismas, así como del diseño de actividades docentes y científicas.

Si bien se han desarrollado en diferentes temas, el énfasis ha estado en la Geometría Analítica, profundizando en el uso consecuente de conceptos y terminologías, propios de la Geometría Descriptiva utilizados en la disciplina Expresión Gráfica para la Arquitectura y el Urbanismo (EGAU), así como en la adquisición de habilidades en el dibujo a mano libre y/o con instrumentos de curvas, sólidos y sus proyecciones. Recíprocamente, la disciplina EGAU también utiliza los elementos de la Geometría Analítica estudiados en Matemática, con el fin de entender las construcciones geométricas, la obtención de la forma real de caras planas y, en consecuencia, la representación de desarrollos y elaboración de maquetas. En ambos casos, tanto en los procedimientos, como en la presentación de los resultados, se combinan técnicas de representación manuales y digitales, y se profundiza en el diseño gráfico plano, así como en la elaboración de portales webs y productos multimediáticos.(Crespo, Sanabria, Guerra, 2012)

Fortalecimiento del carácter científico de la enseñanza de la Matemática

El carácter científico de la enseñanza de la Matemática, exige exactitud al expresar y fundamentar las relaciones matemáticas, considerando la palabra como la expresión verbal externa de lo contenido en el pensamiento. (Hernández, 2002)

Para cumplir con este principio didáctico, en las clases se destacan las características necesarias y suficientes, necesarias y no suficiente, se establece la relación entre lo absoluto y lo relativo de una

proposición, se compara lo general y lo particular, se discuten los antecedentes históricos de determinados conceptos, se exige la precisión y exactitud de fundamentaciones o formulaciones y se utilizan contraejemplos.

Estos aspectos benefician el desarrollo del pensamiento, indispensable para que el estudiante organice sus conocimientos y se entrene en la búsqueda de relaciones; estimulan la reflexión, la defensa de sus ideas, el análisis, la autocorrección y la corrección por parte del grupo. De igual manera, permiten mostrar el movimiento de la matemática como ciencia, la historicidad de su teoría y el proceso de desarrollo de su contenido, aspectos todos con los que debe identificarse el estudiante, dejando una huella, tanto en su desempeño matemático, en su visión del mundo, como en su actitud ante la vida.

Utilización de métodos y técnicas participativas

La disciplina Matemática para Arquitectos apoya la ejecución del proyecto educativo en cada uno de los años donde está presente, en aras de contribuir a la asimilación de conocimientos, al desarrollo de valores en los estudiantes y a su formación socio-humanista. La utilización de métodos y técnicas participativas, en general de métodos activos, incide positivamente en el logro de estos propósitos y forma parte de las acciones concebidas para implementar la estrategia curricular educativa.

La discusión en pequeños grupos y el control por parejas, contribuye a fomentar la motivación por la eficacia solidaria (Motivación por la experiencia escolar del éxito en ayudar a otros compañeros o aprender mejor).

Las tareas extraclases y la preparación de seminarios por equipos contribuyen:

- Al desarrollo de la responsabilidad, pues cada estudiante aporta a la solución colectiva de la tarea y se siente responsable de su actuación dentro del colectivo a partir del rol asumido, estimulando la actuación consciente para la ejecución de la tarea con calidad, el vencimiento de obstáculos en la resolución de los ejercicios y el esfuerzo por ajustarse al tiempo que disponen para ejecutarla.
- Al desarrollo de la solidaridad, fomentando la cooperación mutua en las relaciones interpersonales y no la competencia, ofreciendo colaboración desinteresada para la realización de la tarea, compartiendo conocimientos en un marco más estrecho, sin una presión externa, desarrollando una conducta solidaria y de ayuda a sus semejantes sobre la base del respeto.

La enseñanza a través de la resolución de problemas

La enseñanza de la Matemática basada en la resolución de problemas, adquiere cada día mayor protagonismo, en tanto es un método capaz de poner en práctica el principio general de aprendizaje activo. Este método impulsa los procesos del pensamiento y pone énfasis en los de aprendizaje, en los cuales el alumno manipula los objetos matemáticos, activando su capacidad mental, ejercitando su creatividad, reflexionando sobre su proceso de pensamiento para mejorarlo conscientemente, adquiriendo confianza en sí mismo. Esto lo prepara para resolver otros problemas de la ciencia, de la profesión y de la vida. Si bien en la actualidad se ha incrementado el uso de este método, todavía no alcanza los niveles esperados, por lo que el trabajo metodológico de la disciplina debe encaminarse en esta dirección.

Profundización en el conocimiento de la historia de la matemática

El conocimiento de la historia para potenciar la argumentación lógica asociada al contenido matemático específico, acompañado del análisis de las insuficiencias y de las limitaciones de un concepto matemático en un determinado momento y su reemplazo por otro que satisfaga esas limitaciones, contribuye también a hacer dinámico el pensamiento y a entender la ciencia como un fenómeno socio-cultural.

En las clases de Matemática, siempre que es posible, se tratan con frecuencia los antecedentes históricos y la evolución de conceptos y postulados, y se resalta la labor realizada por aquellos matemáticos destacados por sus aportes a esta ciencia.

Utilización de las tecnologías de la información y las comunicaciones

En la disciplina Matemática para Arquitectos, las tecnologías de la información y las comunicaciones (TICs) son entendidas como recursos para la enseñanza y como medio para el aprendizaje, abriendo nuevas dimensiones y posibilidades en el proceso de docente, incentivando la motivación del estudiante y facilitando el estudio del contenido fuera del contexto del aula.

La utilización de recursos informáticos y audiovisuales en conferencias de Matemáticas que abordan temas vinculados a la especialidad, en la elaboración de informes y en la defensa de sus trabajos, así como en el montaje de asignaturas en plataformas, son muestra de la implementación de las tecnologías en la disciplina. Asimismo, el manejo del asistente matemático DERIVE facilita la comprobación de los resultados de los cálculos que son ejecutados manualmente, posibilitando la autocorrección, así como la representación de curvas, superficies, regiones y la resolución de cálculos complejos, difíciles de lograr con medios tradicionales.

RESULTADOS OBTENIDOS

La descripción de la implementación de las experiencias pedagógicas, ha sido recogida en un Registro Anecdótico, facilitando la determinación de aciertos y desaciertos, la realización de ajustes y sobre todo la toma de conciencia sobre la necesidad de continuar perfeccionando el proceso de enseñanza- aprendizaje.

Para conocer el efecto de las mismas, se aplicó un cuestionario a estudiantes con el objetivo de conocer sus criterios sobre la aplicación de los contenidos a su especialidad, la motivación por la Matemática, la vinculación de la teoría con la práctica, el tiempo dedicado al estudio, entre otras.

El cuestionario fue aplicado en dos momentos. En el primero, curso 2008-09, fueron encuestados 63 estudiantes, seleccionados de manera aleatoria en los años de tercero a quinto, que recibieron la Matemática del plan anterior y no fueron beneficiados con estas experiencias pedagógicas. En el segundo momento, curso 2014-15, participaron 52 estudiantes, seleccionados de igual manera, y que en mayor o menor medida participaron en experiencias implementadas en las asignaturas de la disciplina. En ambos casos la muestra representó alrededor del 30% de la matrícula de los años involucrados. (Ver tabla 1)

Tabla 1. Algunas preguntas del cuestionario aplicado y resultados más significativos.

Preguntas del cuestionario referidas a la Matemática recibida	Resultados curso 2008-09	Resultados curso 2014-15
¿En qué medida la Matemática recibida en la carrera despertó su interés? (Muchísimo, Bastante, Promedio, Algo, Nada)	El 54,9 % consideró que sólo despertó algo o nada, mientras que el 22 % consideró que fue bastante o mucho	El 50 % consideró que despertó muchísimo o bastante, mientras que el 18 % considera que despertó algo o nada.
¿En qué medida considera importante la Matemática para su formación profesional? (Muy importante, Importante, Promedio, Menos que el promedio, Nada)	El 30 % la considera importante, mientras que el 46 % la considera menos que el promedio o nada importante.	El 43 % la considera importante, mientras que el 31 % la considera menos que el promedio o nada importante.
¿En qué medida los contenidos de Matemática han sido importantes para algunas de las asignaturas que ha recibido en la carrera? (Muy importante, Importante, Promedio, Menos que el promedio, Nada). Mencione cuáles.	El 74,6 % consideró que han sido menos que el promedio, o nada importantes. Las más mencionadas fueron: Comunicación Gráfica y Estructuras.	El 69 % consideró que han sido importantes. Las más mencionadas fueron: EGAU, Teoría, Crítica e Historia de la Arquitectura, Proyectos, Estructuras y Economía y organización de la construcción.
¿Cómo describiría la actitud de sus compañeros de estudio con relación a la Matemática? (Muy favorable, Favorable, Promedio, Desfavorable, Muy desfavorable)	El 52,5 % consideró que la actitud era promedio, el 31,7 % consideró que fue desfavorable, y sólo el 15,8 % la consideró favorable.	El 46 % consideró que la actitud era favorable, mientras que el 22,7 % la consideró desfavorable.

Los resultados obtenidos muestran un incremento del reconocimiento por parte de los estudiantes de la importancia de la Matemática para su formación profesional, no sólo en asignaturas que requieran de geometría o cálculos, sino también en otras de corte humanista. No obstante, el interés y la actitud de los estudiantes distan aún de lo deseado y lo necesario, por lo que se impone el perfeccionamiento de las estrategias pedagógicas aplicadas.

CONCLUSIONES

La disciplina “Matemática para Arquitectos” desde su concepción y posterior implementación en el ISPJAE, está trabajando en función de poder demostrar su pertinencia y su impacto en la formación socio humanista del futuro arquitecto. Con sus modos de actuación contribuye a la transformación del estudiante en lo profesional, en lo social y en lo personal. En lo profesional porque le aporta conocimientos y desarrolla habilidades para su desempeño, que lo convertirán en un profesional más competitivo. En lo social porque los lleva a adquirir cada vez más una visión de transformación y mejoramiento, que le permitirá desempeñar en el futuro el encargo social que tendrá como arquitecto. En lo personal porque desarrolla sus valores, su creatividad, la coherencia entre el pensar y el actuar, la autorreflexión y el autoconocimiento, la comunicación con los demás

y consigo mismo, alcanzando ser en un profesional auténtico, íntegro y cooperativo que logre trascender su realidad y sus limitaciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Colectivo de Autores. (2004). Tendencias actuales de la didáctica en la Educación Superior. *Revista Electrónica de la Dirección de Formación de Profesionales del MES, IX(5)*

Corral, R. y Núñez, M**.** (1990). Aplicación de un método teórico a la elaboración del perfil profesional en la Educación Superior. *Revista Cubana Educación Superior, X(2).*

Crespo, M. (2007). *Programa de la Disciplina Matemática para Arquitectos (Plan D)*. La Habana: CUJAE

Crespo, M., Sanabria, K. y Guerra, C. (2012). Matemática para arquitectos: convergencias conceptuales y experiencias pedagógicas integradas con expresión gráfica. *Revista Arquitectura y Urbanismo*, *XXXIII(3)*

Hernández, H. (2002). Cambio curricular para un aprendizaje desarrollador. Experiencias en matemática. *Conferencia Plenaria del II Congreso Internacional sobre Mejoramiento de las áreas de Comunicación y Matemática en la Formación Docente.* Lima. Perú (inédita)

Pérez, E. (2009). La formación socio humanística del estudiante de Arquitectura como campo de reflexión pedagógica. *Revista Iberoamericana de Educación, 49(8)*

Rojas, A. (2005). *La formación de valores en el estudiante de Arquitectura.* (Documento no publicado)

UN NUEVO PARADIGMA EN EDUCACION A DISTANCIA: EL APRENDIZAJE DE LAS FUNCIONES VECTORIALES EN UN AMBIENTE B-LEARNING

Martha Leticia García Rodríguez, Alma Alicia Benítez Pérez, Alicia López Betancourt
ESIME-IPN, CECyT 11-IPN, UJED (México)
martha.garcia@gmail.com, abenitez@ipn.mx, abetalopez@gmail.com

Palabras clave: B-Learning, aprendizaje colaborativo, estudiante autónomo

Key words: B-Learning, collaborative learning, learner autonomy

RESUMEN: En este trabajo se analizan las características del proceso de aprendizaje de un grupo de estudiantes, en un curso de matemáticas utilizando un modelo B-Learning. Para el análisis se utiliza la propuesta de Meirinhos (2011) quién señala la emergencia de un nuevo marco conceptual relacionado con el aprendizaje y la formación. El trabajo se realizó en dos etapas: i) revisión de conceptos; ii) trabajo en actividades extra-clase Se concluye que los dos estudiantes que forman el grupo de trabajo, muestran la misma participación durante las actividades y buscan argumentos del porqué de la solución que proponen y solicitan poca o ninguna ayuda al profesor.

ABSTRACT: In this paper, we analyzed the characteristics of the learning process of a group of students in a math course using a B-Learning model. To analyze the proposal Meirinhos (2011) is used, who noted the emergence of a new conceptual framework related to learning and training. The work was in two stages: i) review of concepts; ii) work in extra-class activities. It is concluded that both students in each group show the same participation in the activities and seek arguments why the solution they propose and ask little or no teacher support.

INTRODUCCIÓN

Actualmente las tecnologías de información y comunicación (TIC) y en particular internet, facilitan las funciones de búsqueda de información y de comunicación y se han convertido en un apoyo didáctico para los profesores en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Este uso de las TIC ha caracterizado a los estudiantes que han nacido en siglo XXI y que son los que están ingresando a las instituciones de educación superior en la presente década. Pertenecen a la denominada generación NET, que tiene como una característica distintiva el uso cada vez más frecuente, y en prácticamente todos los ámbitos de su vida, de tecnologías digitales interactivas. Cuentan además con características distintivas de orden cognitivo y de procesamiento de información, relacionadas con la era digital en la que han nacido (Prensky, 2001).

Internet ha sido un parteaguas en esta transformación, al respecto, Marqués (2008) señala que internet puede contribuir para la profundización y el desarrollo de conocimientos y ofrece aplicaciones orientadas a la comunicación, como el correo electrónico, debates online y desarrollo de páginas web para utilizar en clase. El mismo autor también indica que con internet es conformar un espacio de apoyo al proceso educativo bien sea este de manera presencial, a distancia o mixto, este último llamado B-Learning.

Este modelo de educación combina elementos de la enseñanza presencial, con el modelo de enseñanza que incorpora las TIC, por lo que se puede considerar como un modelo híbrido entre el e-learning y los ambientes presenciales de aprendizaje. Las instituciones educativas, en particular las universidades han invertido una gran cantidad de recursos económicos y humanos para implementar estos nuevos ambientes de aprendizaje, por lo que se hace necesario conocer sobre los beneficios y riesgos que surgen al hacer uso de ellos. Es en este contexto que surge la presente investigación que plantea como objetivo general analizar las características del proceso de aprendizaje de un grupo de estudiantes, en un curso de matemáticas utilizando un modelo B-Learning.

ELEMENTOS TEÓRICOS

En el nuevo contexto social y ante el incremento en el uso de las TIC en el ámbito educativo, Meirinhos (2011) identifica la emergencia de un nuevo marco conceptual relacionado con el aprendizaje y la formación; algunos de los elementos distintivos de este cambio que fueron relevantes para el desarrollo de este proyecto son: a) el papel cada vez más importante de la formación continua; b) un papel más protagónico de los alumnos con respecto al profesor, en los procesos de aprendizaje; c) el uso de tecnologías cada vez más colaborativas; d) el incremento del aprendizaje virtual y e) el papel cada vez más relevante del aprendizaje colaborativo y la transformación hacia las organizaciones que aprenden:

- Para este autor la importancia de la formación continua, no elimina la relevancia de la formación inicial, estipula el reconocimiento de un proceso formativo continuo que dará paso a la formación a lo largo de la vida.
- La necesidad de realizar aprendizaje a lo largo de la vida está ligado con el desarrollo de habilidades para el autoaprendizaje, que se traducen en habilidades para buscar, organizar y gestionar la información, realizar una investigación y estrategias de resolución de

problemas. Estas estrategias, métodos y procedimientos se convierten en los nuevos contenidos de aprendizaje. Para lograr lo anterior, se requiere que el estudiante adquiera un grado de autonomía que le permita establecer prioridades, estrategias de aprendizaje y organización de su tiempo. Los profesores y los alumnos requieren de un cambio de mentalidad para participar en comunidades a distancia, en formas de trabajo colaborativas e incorporar el uso de nuevas herramientas de comunicación y materiales de aprendizaje.

- Las tecnologías colaborativas se caracterizan por establecer un alto nivel de interacción entre los usuarios durante los procesos de enseñanza y aprendizaje, esto conlleva la emergencia de un nuevo modelo mental, donde es posible combinar independencia, autonomía, cooperación y colaboración.
- Existe relación del el aprendizaje a lo largo de la vida con las tecnologías de la información y comunicación en la medida en que éstas últimas favorecen la conformación de nuevos escenarios educativos, donde se reconoce que el trabajo cognitivo (que puede ser síncrono y asíncrono) puede ocurrir a distancia, utilizando las tecnologías de la información y comunicación.
- En estas nuevas modalidades el intercambio de conocimientos y experiencias entre compañeros se convierte en uno de los medios más enriquecedores para el desarrollo de conocimiento. Se trata de “aprender a aprender” en conjunto, de llevar a cabo una autoformación colectiva, como una competencia colectiva de aprendizaje, en la que quien aprende, debe estar preparado para funcionar como sujeto social.

METODOLOGÍA

La metodología utilizada en la presente investigación es de tipo cualitativo, consistió en analizar el trabajo de 8 estudiantes de una carrera de ingeniería que cursaban la asignatura de Cálculo Vectorial en una modalidad B-Learning, en este documento se presenta el trabajo de los estudiantes en el espacio de apoyo a la clase presencial que fue implementado en la página web del campus virtual de la institución.

El trabajo de los estudiantes se llevó a cabo en dos etapas:

1. Revisión de los conceptos en clase
2. Trabajo en actividades extra-clase.

Los instrumentos utilizados para la recolección de datos fueron:

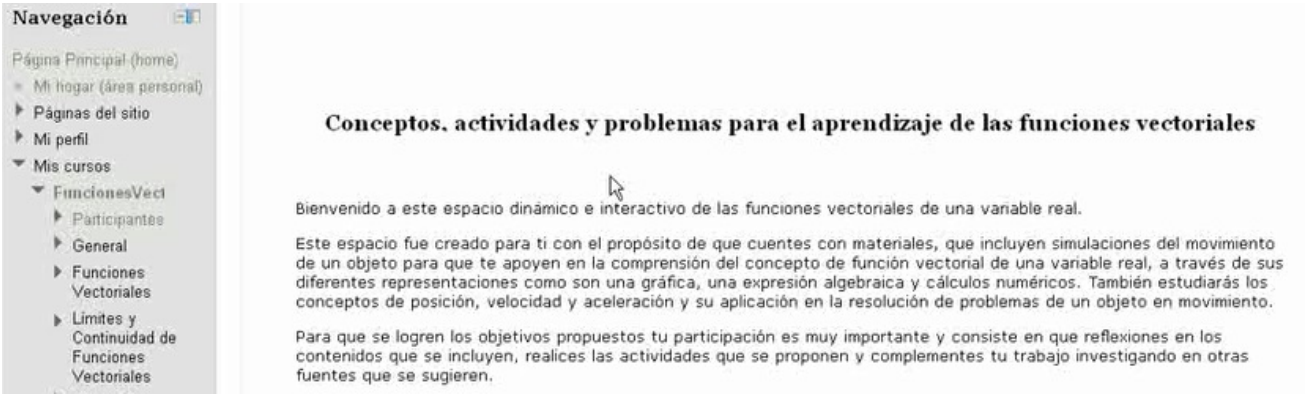
- grabaciones en audio y video
- archivos digitales, de almacenamiento de video con el trabajo realizado por los estudiantes en las computadoras.
- reportes elaborados por el profesor-investigador.

El contenido matemático: Las actividades propuestas a los estudiantes incluyeron los temas dominio y gráfica de una función vectorial, los estudiantes trabajaron con las representaciones gráfica, algebraica y verbal de las funciones vectoriales (Drijvers, Doorman y Boon, 2007).

ANÁLISIS DE DATOS

Los estudiantes tuvieron acceso a materiales diseñados e implementados en Moodle; los materiales incluyeron elementos teóricos, ejercicios interactivos y problemas (figura 1).

Figura 1. Interfaz de trabajo en Moodle.

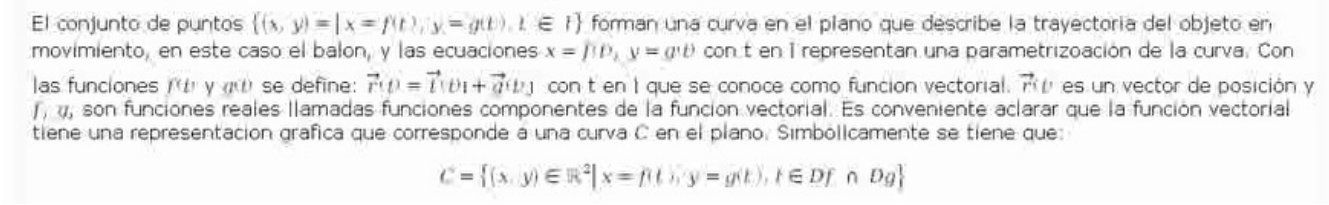


En este documento se presenta parte del trabajo de la pareja número uno de estudiantes [estudiantes A y B] en los ejercicios interactivos. El análisis del trabajo de los estudiantes se obtuvo de dos fuentes de información, el video de la interacción de los estudiantes, del que se obtuvo la comunicación verbal y el video del trabajo de los estudiantes en la computadora del que se obtuvieron las imágenes que se presentan.

La interacción que se muestra en el episodio brinda evidencia de la forma en que los estudiantes ponen en juego incipientes habilidades de autoaprendizaje y llevan a cabo el intercambio de ideas y experiencias para el desarrollo de conocimiento, durante una actividad, Meirinhos (2011) señala que estos elementos son característicos de un nuevo marco conceptual relacionado con la enseñanza y el aprendizaje mediado por las TIC.

El episodio se desarrolla en tres etapas, la división se realizó con base en el tipo de actividades y estrategias que mostraron los estudiantes. En la primera etapa los estudiantes revisan algunos elementos teóricos relacionados con el tema de funciones vectoriales, el tema había sido revisado en la clase presencial y los estudiantes tenían la indicación de revisar los materiales en la web para realizar las actividades propuestas (figura 2), en esta etapa la interacción entre los estudiantes fue mínima.

Figura 2. Elementos teóricos incluidos en Moodle.


El conjunto de puntos $\{(x, y) = | x = f(t), y = g(t), t \in I\}$ forman una curva en el plano que describe la trayectoria del objeto en movimiento, en este caso el balon, y las ecuaciones $x = f(t)$, $y = g(t)$ con t en I representan una parametrizoación de la curva. Con las funciones $f(t)$ y $g(t)$ se define: $\vec{r}(t) = \vec{f}(t)\mathbf{i} + \vec{g}(t)\mathbf{j}$ con t en I que se conoce como funcion vectorial. $\vec{r}(t)$ es un vector de posición y f, g, son funciones reales llamadas funciones componentes de la funcion vectorial. Es conveniente aclarar que la función vectorial tiene una representacion grafica que corresponde a una curva C en el plano. Simbólicamente se tiene que:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = f(t), y = g(t), t \in Df \cap Dg\}$$

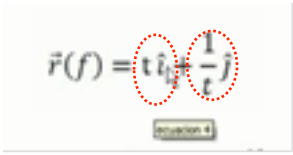
En la segunda etapa, después de revisar los elementos teóricos, los estudiantes trabajan con las actividades propuestas. En esta etapa se identifica una estrategia en el trabajo de los estudiantes, que será utilizada también en la siguiente etapa..

Instrucciones de la actividad 1. Relaciona la representación gráfica con la función vectorial y con el dominio que corresponda en cada caso [se proporcionan cuatro gráficas y una ecuación]. Los estudiantes intercambian opiniones acerca de lo que se solicita en la actividad.

A: Aquí tenemos que encontrar el dominio y la gráfica

B: Tenemos que son dos funciones f y g [dibujan con el mouse dos circunferencias para rodear cada función f(t)=t y g(t)=$\frac{1}{t}$, como se indica con las líneas punteadas]

Figura 3. Los estudiantes identifican las funciones reales f y g.



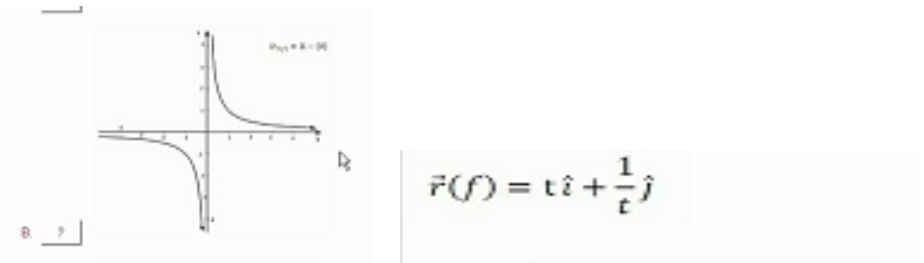
A: En esta [señala a la función f(t)=t] son todos los reales

B: y de esta sería… sería esta ¿verdad? [señala con el mouse a su compañero, una de las cuatro gráficas propuestas]

Los estudiantes recorren todas las gráficas [desplazan las gráficas en la pantalla hacia arriba y hacia abajo] y concluyen:

A: Esta sería ¿verdad? porque además si se pone cero sería una división entre cero [se refiere a la evaluación en la expresión $\frac{1}{t}$]

Figura 4. El estudiante A señala con el mouse la gráfica que representa la ecuación.



Los estudiantes continúan trabajando en la misma actividad, para identificar la correspondencia de la gráfica $r(f) = \cos ti + \sin tj + 2k;$ con su expresión algebraica.

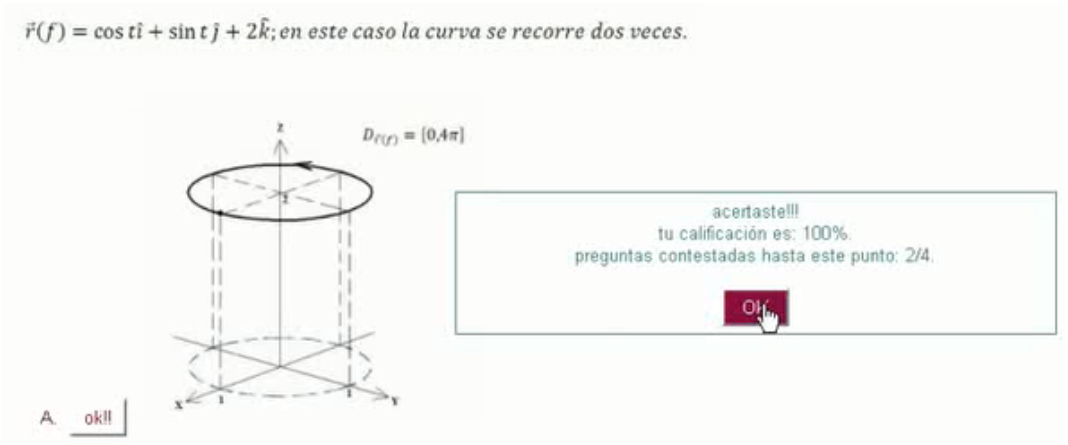
A: No puede ser de dos dimensiones porque ya usamos una antes [se refieren a la gráfica del episodio anterior], yo digo que sería esta [dudan en la selección de la gráfica]. No puede ser una circunferencia porque… [el estudiante B interrumpe]

B: No, yo digo que sería esta [señala la circunferencia] mira tienes las ecuaciones de tu círculo porque es coseno y el seno pero tienes el valor z constante, z es constante y vale 2 y… a ver, dale

para verificar [el estudiante utiliza el reforzamiento que brinda la actividad para verificar su afirmación]

A: Mira, sí.

Figura 5. El estudiante B verifica que su elección es correcta.



B: Lo que pasa es que te lo desplaza en el eje coordenado de z y seno y coseno tienen variable.

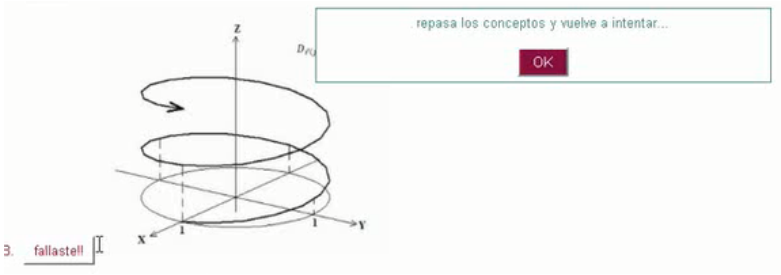
En la tercera etapa los estudiantes intentan utilizar la misma estrategia y los mismos argumentos, si la función tiene seno y coseno, la asocian con una función circular, lo que resulta incorrecto en una de las opciones.

Hasta este momento los estudiantes habían relacionado dos gráficas con su correspondiente expresión algebraica.

Estudiante B: Tiene seno y coseno [señala una gráfica]

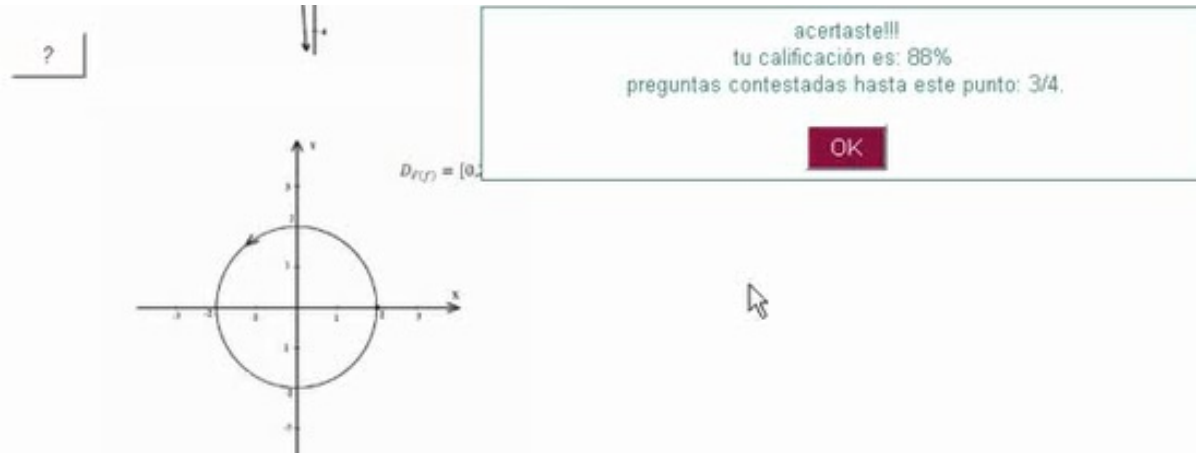
$$\vec{r}(t) = 2cost\ i + 2cost\ j$$

Figura 6. Los estudiantes fallan en el siguiente intento.



El estudiante B, guarda silencio por un momento, tratando de comprender cuál era su error. Señala otra gráfica al estudiante A para que la seleccione y esperan.

Figura 7. Los estudiantes A y B eligen la gráfica correcta.



Estudiante B: esta es la correcta porque sólo tiene dos componentes

En el trabajo de los estudiantes se identificó, como lo señala Meirinhos (2011), la conformación de un cierto grado de autonomía, en el sentido de que los estudiantes eligen los elementos que consideran útiles para resolver la actividad; también emergen estrategias de aprendizaje para utilizar lo que saben; identifican el número de componentes de la función vectorial y lo asocian con el número de dimensiones utilizadas para representar la gráfica. También es importante enfatizar que una estrategia de autoevaluación es el refuerzo que proporciona la propia actividad, por lo que es necesario solicitar a los estudiantes que argumenten sus respuestas.

CONCLUSIONES

Se identifica la misma participación de los dos estudiantes de cada pareja durante las actividades. Los estudiantes buscan argumentos del porqué de la solución que proponen y solicitan poca o ninguna ayuda al profesor. Estos elementos son evidencia de nuevas formas en la construcción del conocimiento, y de la importancia del profesor para diseñar o elegir las actividades adecuadas para favorecer el aprendizaje.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Drijvers, P., Doorman, M. y Boon, P. (2007). Tool use in a technology-rich learning arrangement for the concept of function. In Pitta-Pantazi, D. & Philippou, G. (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (1389-1390). Larnaca: Department of Education - University of Cyprus.

Meirinhos, M. (2011). *Formación y aprendizaje en la sociedad de la información: elementos de un nuevo paradigma*. Recuperado de https://bibliotecadigital. ipb.pt/handle/10198/6959

Marqués P., (2008). *Usos educativos de internet (el tercer mundo)*. Recuperado de http://www.peremarques.net/usosred2.htm.

Prensky, M. (2001). *Digital Natives Digital Immigrants. From On the Horizon University Press.* Recuperado de http://www.marcprensky.com/writing/ Prensky%20-%20Digital%20Natives,%20Digital%20Immigrants%20 %20Part1.pdf

UNA PROPUESTA DE TEXTO PARA EL ESTUDIO DEL PRE CÁLCULO EN EL BACHILLERATO MEXICANO

Silvia Elena Ibarra Olmos, Agustín Grijalva Monteverde
Universidad de Sonora (México)
sibarra@mat.uson.mx; guty@mat.uson.mx

Palabras clave: Pre-cálculo, propuesta de enseñanza, bachillerato.

Key words: Pre-calculus; teaching proposal; high school

RESUMEN: En este documento exponemos la fundamentación curricular, teórica y metodológica con la cual diseñamos un libro de texto para el estudio del pre cálculo, el cual está dirigido a estudiantes y profesores de un subsistema de bachillerato mexicano. Este proyecto tiene como marco de referencia a la Reforma Integral de la Educación Media Superior vigente desde 2008, la cual establece, entre otras cosas, que el bachillerato en este país (estudiantes entre 14 y 17 años), estará basado en un enfoque por competencias.

ABSTRACT: In this paper, we present the curriculum, theoretical and methodological foundation with which we designed a textbook for the study of pre calculation, which is aimed at students and teachers of a subsystem of Mexican high school. This project has as a reference to the Reform of School Education in force since 2008, which provides, among other things, that the school in this country (students between 14 and 17 years), will be based on a competency-based approach.

INTRODUCCIÓN

La Reforma Integral de la Educación Media Superior en México, puesta en marcha desde 2008, establece que el bachillerato en este país, (estudiantes entre 14 y 17 años), tiene entre sus ejes principales establer un Marco Curricular Común con base en competencias. Es decir, en él se definen los desempeños finales compartidos que deben desarrollar todos los alumnos de ese nivel educativo. Estos desempeños finales compartidos están dados con base en la noción de competencia, la cual se entiende como "la integración de habilidades, conocimientos y actitudes en un contexto específico." (Diario Oficial de la Federación, Acuerdo Secretarial No. 442, 2008)

Con este marco de referencia nos planteamos el problema de cómo diseñar libros de textos acordes con este enfoque, que estuvieran fundamentados teórica, curricular y metodológicamente. Lo que exponemos aquí es la concreción hecha de todos estos fundamentos para el diseño de un libro de texto de pre cálculo, el cual se encuentra actualmente en uso por estudiantes y profesores en un subsistema de bachillerato mexicano ubicado en el noroeste del país.

CARACTERÍSTICAS DEL TEXTO

El texto en cuestión, cuyo nombre formal es Matemáticas 4, (Ávila, R., Grijalva, A., Villalva, M., Bravo, J., Ibarra, S., Villaseñor, G. 2015), contiene una propuesta sobre cómo promover en los estudiantes el desarrollo de competencias matemáticas, tomando como tema el estudio de los fenómenos de variación.

Una manera tradicional de abordar los fenómenos de variación consiste en presentar el concepto de función matemática, estableciendo la relación existente entre una variable dependiente y una independiente, concentrando la atención en el álgebra funcional y, si acaso, en la graficación de funciones.

En el texto en cuestión el punto de partida es diferente, pues en él se toma como eje para el desarrollo de los distintos bloques que lo conforman, el análisis de fenómenos de variación, sean naturales o sociales, con el fin de analizar los llamados tipos básicos de variación: variación creciente, que puede ser de rapidez de crecimiento constante, acelerado o desacelerado; variación decreciente con rapidez de decrecimiento que a su vez puede ser constante, acelerada o desacelerada y, por último, "variación constante".

MARCO CURRICULAR Y FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Las competencias matemáticas que deberá desarrollar un alumno a lo largo de paso por el bachillerato mexicano son las siguientes:

- Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
- Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.
- Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Para la promoción del desarrollo de las competencias de los estudiantes, tomamos como eje estructurador los planteamientos teóricos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática. Particularmente tomamos en cuenta, por una parte, las nociones de práctica matemática y la tipología de objetos matemáticos presentados en Godino, Batanero y Font (2008), donde se concibe a la práctica matemática como toda acción que se realiza para resolver situaciones problema y comunicar resultados, identificándose como objetos matemáticos primarios a las propias situaciones problema, los lenguajes utilizados, los procedimientos empleados en la resolución de las situaciones, las propiedades que se adjudican a los objetos, los argumentos de justificación y los conceptos establecidos. Por otro lado, se hizo uso de los criterios de idoneidad didáctica, donde ésta "se concibe como la articulación coherente y eficaz de las distintas dimensiones implicadas en los procesos de estudio matemático: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica". (Godino, J.D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R., 2006).

Cada una de las dimensiones de la idoneidad puede caracterizarse a partir de un conjunto de indicadores o descriptores que dan pie a una formulación integral del tratamiento didáctico en el aula y en el texto, a la vez que nos permiten plantear desarrollos que promueven las competencias matemáticas, nos dan pie a presentar situaciones-problema de fenómenos extra e intra matemático, con una muestra representativa de problemas, del uso de los recursos tecnológicos digitales, establecer propuestas de interacción del profesor con los alumnos y entre los alumnos mismos, por citar algunos casos.

ASPECTOS METODOLÓGICOS Y ESTRUCTURA DEL TEXTO

Para cumplir con los planteamientos curriculares de estudiar la noción de función y los tipos de funciones más representativos, a la vez de atender los planteamientos de promoción de las competencias, con base en las nociones teóricas seleccionadas, el texto se estructuró mediante bloques de conocimiento, con el siguiente esquema:

Bloque 1. Variaciones y funciones lineales.

Bloque 2. Variación no lineal y variación inversamente proporcional.

Bloque 3. Variación exponencial y logarítmica.

Bloque 4. Variación periódica.

Bloque 5. Variaciones especiales y funciones inversas.

Bloque 6. Las funciones como modelo de la variación.

Es importante señalar que conceptualizamos una secuencia didáctica desde un enfoque socio formativo, (Tobón, 2013), es decir, las ubicamos como un conjunto organizado y bien articulado de actividades que parten de una situación-problema. Hitt y Cortés (2009 señalan que ésta debe ser:

> "…fácil de entender (ello no implica que sea fácil de resolver), ella debe provocar la reflexión y por tanto no puede ser un ejercicio. La matemática que debe utilizarse no debe ser explicitada en el enunciado. Es a través de la interacción de los estudiantes con la situación que… la matemática hace acto de presencia de manera natural en la discusión entre los miembros de un equipo de estudiantes…" (p.6)

Los contextos en las que se plantean las situaciones problema son intra o extra matemáticos. Cada actividad tiene un propósito bien definido y en su conjunto contribuyen a desarrollar determinadas competencias. Cada secuencia didáctica contiene la siguiente tipología de actividades:

- Inicio. En ellas se plantean las situaciones-problema, incluyendo cuestionamientos que ponen en evidencia las competencias que previamente el alumno ha desarrollado, pero dando curso a las que serán fortalecidas o creadas.
- Desarrollo. Se espera que en este espacio emerjan los nuevos conocimientos de la temática que se está tratando, así como las habilidades y actitudes necesarias para emplearlas en la resolución de las situaciones planteadas.
- Cierre. En este tipo de actividades se recapitula lo estudiado en la secuencia y se realiza un proceso de institucionalización del conocimiento matemático construido.

Además en cada bloque se agregan:

- Una sección de problemas seleccionados con diferentes grados de dificultad. Se busca con esta parte que el alumno ponga en práctica lo que ha aprendido, aunque el propósito no es la mecanización. Los problemas expuestos parten de diversos contextos que pueden ser matemáticos o extra matemáticos.
- Un apartado denominado Autoevaluación, el cual propone un proceso de reflexión personal del estudiante, y busca la concientización acerca de la matemática que se aprendió en el bloque, las dificultades que aún subsisten y el nivel de dominio alcanzado sobre los procesos comunicativos con compañeros y profesor.
- Apoyos tecnológicos vía el diseño de applets, puestos a disposición tanto de estudiantes como de profesores.

EL TRABAJO EN EL AULA

Para el desarrollo del trabajo del profesor se propone un proceso de conducción de la actividad de aprendizaje, que integra diferentes tipos de trabajo para el estudiante: individual, por equipo y grupal, en cada uno de los cuales el profesor juega un rol diferente.

El momento individual, generalmente asociado a la actividad de *Inicio* descrita líneas arriba, enfrenta al estudiante con una situación problema que sirve de punto de partida, pero al mismo tiempo da el espacio para que el alumno se familiarice con el contexto presentado y despliegue los conocimientos previos requeridos. El profesor se debe limitar a hacer la presentación e introducción apropiada y posteriormente a estar al pendiente de cómo se desarrolla el trabajo individual; debiendo también estar atento a aclarar cualquier duda que se presente.

En cambio, en el momento de trabajo en equipo, asociada a la actividad o actividades de *Desarrollo*, los estudiantes serán organizados en pequeños grupos y abordarán las actividades propuestas en discusiones restringidas a los integrantes del equipo. Nuevamente el profesor deberá seguir el hilo de las discusiones, estando al pendiente de que el trabajo de los alumnos no se empantane, dando los impulsos apropiados para que la actividad no decaiga.

Finalmente, en el espacio grupal, asociado a la actividad de *Cierre*, el profesor es quien lleva la voz rectora, pues a él corresponde, en su carácter de representante institucional, llegar al nivel de formalización matemática adecuada al nivel escolar.

UN EJEMPLO DE ACTIVIDAD DIDÁCTICA

La elaboración de un texto con las características deseadas es compleja, pues las consideraciones curriculares ya están establecidas previamente y, en esas condiciones, es necesario hacer acopio adecuado de las nociones teóricas surgidas de la matemática educativa, que permitan elaborar una propuesta armonizada de todos los elementos involucrados.

El primer aspecto que debe señalarse es que para el planteamiento de las situaciones problema, se recurrió a información de diferentes oficiales, siempre con el fin de incluir fenómenos reales, ya sean naturales, sociales, económicos o de otra índole. Para ello se hicieron búsquedas en páginas oficiales de organismos como el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI), periódicos y revistas, páginas de internet, etc.

Con base en la información presentada, se estructuraron las secuencias didácticas, iniciando con actividades de comprensión e interpretación de la información, tanto de carácter general como de naturaleza matemática, procurando que se diera pie al desarrollo de competencias para la interpretación y modelación matemática de los fenómenos, se hicieran análisis de tablas numéricas, gráficas y expresiones analíticas, se analizaran las relaciones entre las variables involucradas en los fenómenos descritos, atendiendo también al desarrollo de prácticas matemáticas adecuadas, se atendieran las diferentes dimensiones de la idoneidad didáctica y se diera pie a la emergencia de los objetos matemáticos centrales estipulados en el currículo matemático en su parte correspondiente. La información se discute grupalmente, de tal manera que se asegure la comprensión general del texto y se resuelvan las dudas surgidas entre los estudiantes.

A continuación ilustramos un caso.

Figura 1. Página 88 de la Secuencia 1 del Bloque 3, tomado de http://www.cobachsonora.edu.mx:8086/portalcobach/pdf/modulosaprendizaje/semestre4-2015/Matematicas4.pd

Desarrollo

Catástrofes ambientales: derrames de petróleo en el mar

Actividad: 2
Actividad Grupal

En contraparte a la alegría que se contagia al crecer el número de espectadores que participan en el concierto de la actividad anterior, ahora se muestra una nota de prensa en línea que publicó, en la fecha señalada, la siguiente noticia:

50.000 litros de derrame de petróleo amenazan la costa de Tailandia
http://indagadores.wordpress.com/2013/07/28/50-000-litros-de-derrame-de-petroleo-amenazan-la-costa-de-tailandia/

Publicado el 28/07/2013

"Alrededor de 50.000 litros de crudo se derramaron en el mar del Sur de China el sábado a unos 20 kilómetros (12 millas) de la costa de la provincia oriental de Rayong, en el Golfo de Tailandia. Dijo el operador de PTT Global Chemical. Al mismo tiempo, hubo temores sobre el efecto de los productos químicos utilizados para dispersar el petróleo crudo".

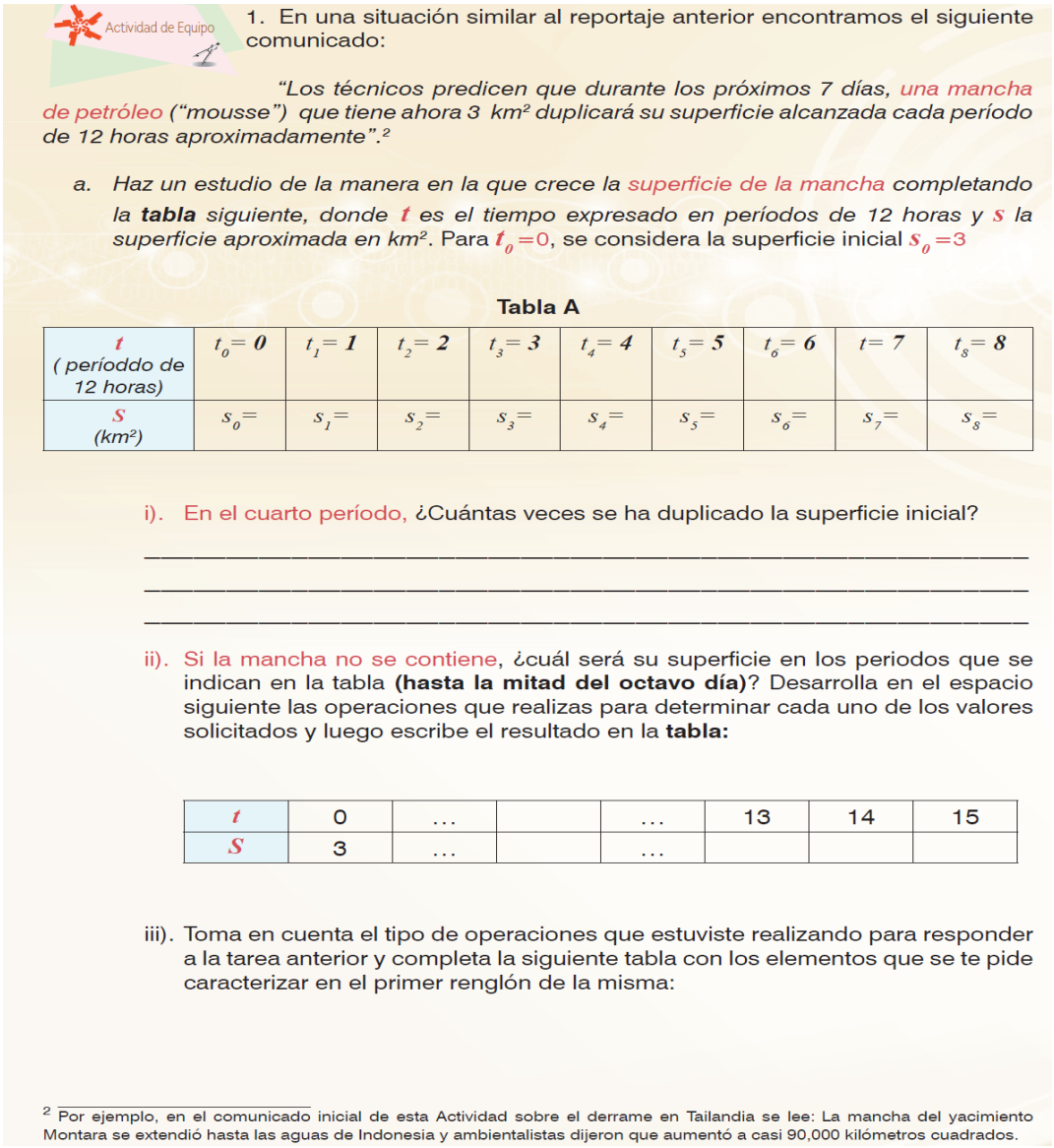
En otro reportaje *(American Journal Experts[1])*, que está reproducido en varios sitios web, leemos:

"El petróleo tiene un impacto directo sobre el agua. La composición química del petróleo se mezcla con el agua y crea una nueva sustancia conocida como "mousse". Esta mousse se vuelve aún más pegajosa que el petróleo solo, lo cual hace que se adhiera a organismos y materiales mucho más fácilmente. El mousse parece comida para una cantidad de animales y también atrae a ciertas aves curiosas y a la vida marina. Para las personas que tratan de limpiar la marea negra, la mezcla de petróleo y agua es muy difícil de eliminar y, finalmente, conserva muy poco valor como petróleo en sí".

[1] http://www.ehowenespanol.com/efectos-derrames-petroleo-sobre_148221/

Para continuar el trabajo, se organiza a los estudiantes en pequeños equipos de 3 o 4 integrantes y se inicia el análisis matemático del problema de la expansión de la mancha de petróleo derramado en el mar, primeramente con los aspectos numéricos.

Figura 2. Página 89 de la Secuencia 1 del Bloque 3, tomado de http://www.cobachsonora.edu.mx:8086/portalcobach/pdf/modulosaprendizaje/semestre4-2015/Matematicas4.pd



Actividad de Equipo

1. En una situación similar al reportaje anterior encontramos el siguiente comunicado:

"Los técnicos predicen que durante los próximos 7 días, una mancha de petróleo ("mousse") que tiene ahora 3 km² duplicará su superficie alcanzada cada período de 12 horas aproximadamente".[2]

a. *Haz un estudio de la manera en la que crece la superficie de la mancha completando la* ***tabla*** *siguiente, donde* t *es el tiempo expresado en períodos de 12 horas y* s *la superficie aproximada en km². Para* $t_0 = 0$, se considera la superficie inicial $s_0 = 3$

Tabla A

t (períoddo de 12 horas)	$t_0 = 0$	$t_1 = 1$	$t_2 = 2$	$t_3 = 3$	$t_4 = 4$	$t_5 = 5$	$t_6 = 6$	$t = 7$	$t_8 = 8$
S (km²)	$s_0 =$	$s_1 =$	$s_2 =$	$s_3 =$	$s_4 =$	$s_5 =$	$s_6 =$	$s_7 =$	$s_8 =$

i). En el cuarto período, ¿Cuántas veces se ha duplicado la superficie inicial?

_____

_____

_____

ii). Si la mancha no se contiene, ¿cuál será su superficie en los periodos que se indican en la tabla **(hasta la mitad del octavo día)**? Desarrolla en el espacio siguiente las operaciones que realizas para determinar cada uno de los valores solicitados y luego escribe el resultado en la **tabla:**

t	0	...		...	13	14	15
S	3	...		...			

iii). Toma en cuenta el tipo de operaciones que estuviste realizando para responder a la tarea anterior y completa la siguiente tabla con los elementos que se te pide caracterizar en el primer renglón de la misma:

[2] Por ejemplo, en el comunicado inicial de esta Actividad sobre el derrame en Tailandia se lee: La mancha del yacimiento Montara se extendió hasta las aguas de Indonesia y ambientalistas dijeron que aumentó a casi 90,000 kilómetros cuadrados.

La secuencia continúa con la elaboración de otras dos tablas de datos, una en la que se relacionan las variables involucradas por medio de los patrones de comportamiento y otra en la cual dichos patrones se reconocen por medio de expresiones funcionales de carácter analítico. Con ello, se solicita a los estudiantes que individualmente reconozcan la gráfica de cada una de las expresiones analíticas surgidas en la última parte.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ávila, R., Grijalva, A., Villalva, M., Bravo, J., Ibarra, S., Villaseñor, G. (2015). Matemáticas 4. Módulo de Aprendizaje. Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora. México. Grupo de Servicios Gráficos del Centro, S.A. de C.V.

Diario Oficial de la Federación. (2008). Acuerdo Secretarial No. 442, 26 de septiembre de 2008. México.

Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V.(2008). Un enfoque Onto-Semiótico del conocimiento y la Instrucción matemática.. En C. L. Oliveira (Ed.) *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática (10)*2, 7-37. Brasil.

Godino, J.D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). *Análisis y variación de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas*. España: Paradigma.

Hitt, F., Cortés C. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet (10)*1. Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica. Recuperado de www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/

Tobón, S. (2013). *Metodología de la gestión curricular. Una perspectiva socioformativa*. México: Trillas.

UN ACERCAMIENTO AL ESPACIO TRIDIMENSIONAL A TRAVÉS DE LA MANIPULACIÓN DE OBJETOS FÍSICOS Y VISUALES

Karla Liliana Puga Nathal, Leopoldo Castillo Figueroa, Enrique Gómez Peralta, Eliseo Santoyo Teyes. Felipe Santoyo Telles

Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán, Centro Universitario del Sur (México)

karlalpn4@gmail.com, polin86@prodigy.net.mx, gperalta7@hotmail.com, esantoyo25@hotmail.com, santf22@hotmail.com

Palabras clave: espacio tridimensional, vector, construcciones mentales

Key words: three-dimensional space, vector, mental constructions

RESUMEN: Cuando los estudiantes cursan la asignatura del cálculo vectorial poseen información que les permite ubicar puntos, vectores y gráficas en el plano cartesiano. En el espacio tridimensional los estudiantes deben representar y extraer información de figuras y superficies, lo cual en ocasiones resulta complicado ya que esto depende de diversos factores, no solamente cognitivos sino habilidades visuales y motrices en el trazo de figuras.

En el documento se esboza, desde una perspectiva constructivista, los resultados preliminares de una propuesta didáctica a través del uso de una serie de materiales físicamente manipulables y prácticas interactivas con GeoGebra, con la finalidad de acercar al estudiante a conceptos relacionados con vectores y el espacio tridimensional.

ABSTRACT: When students take the subject of vector calculus have information that allows them to locate points, vectors and graphs in the coordinate plane, relating only two coordinates and carrying traces of plane figures. In three-dimensional space students should not only three-dimensional graph figures on a flat surface, but analyze and extract information from them, which is sometimes complicated as this, in the first instance, it depends on your skills in stroke of grapher and other geometric representations.

The paper proposes, from a constructivist perspective, a series of physical manipulatives and interactive practices with GeoGebra, with the intention of promote to the students some concepts related to vectors and three-dimensional space.

INTRODUCCIÓN

El cálculo vectorial es una asignatura que se ubica en los primeros semestres de las carreras de Ingeniería, en ella se introduce a los alumnos al estudio de vectores, figuras y superficies en el espacio tridimensional. La importancia que tienen estos contenidos en la retícula básica es fundamental, debido a que se abordan conceptos medulares para los subsecuentes cursos de matemáticas y de otras áreas del conocimiento, por ejemplo, en el campo de la Física.

Cuando los estudiantes del tercer semestre de la carrera de Ingeniería Electrónica inician el estudio de esta asignatura, poseen información que les permite ubicar puntos, vectores y gráficas en el plano cartesiano, en donde relacionan únicamente dos coordenadas y realizan trazos de figuras planas. Al hablar del espacio tridimensional, los estudiantes deberán no solo graficar figuras en tercera dimensión en una superficie plana, sino que deberán analizarlas y extraer información de ellas de acuerdo al contexto al que pertenezcan, lo cual en ocasiones resulta complicado ya que esto, en primera instancia, depende de las habilidades que posea el estudiante en el trazo de figuras, aunado con la comprensión de los conceptos presentes. Por ello, es necesario generar escenario didácticos en los que a través de manipulaciones físicas, el estudiante se acerque a los conceptos matemáticos que conlleva el tratamiento del espacio tridimensional.

En el presente documento se describen únicamente los resultados preliminares de la aplicación de una propuesta didáctica que se desarrolló con estudiantes de tercer semestre de la carrera de ingeniería electrónica. La finalidad de tal estudio fue la evaluación y reestructuración de instrumentos y actividades que promueven la construcción del concepto de vector y espacio tridimensional. Para ello se realizó previamente lo que APOE definen como la *descomposición genética del concepto* (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews & Thomas, 2004).

ANTECEDENTES

Los vectores surgen como herramienta matemática para facilitar el análisis de los fenómenos físicos. La representación geométrica de éstos en el ámbito escolar, se basa en la ubicación de las coordenadas en un escenario bidimensional o tridimensional de los puntos que los definen (inicial y final).

La aplicación de los vectores es extensa, y en el terreno escolar el concepto de vector es tratado en las escuelas de ingeniería para modelar y analizar diversas situaciones, por ejemplo en cálculo vectorial, estática de la partícula y del cuerpo rígido, dinámica de la partícula y del cuerpo rígido, vibraciones mecánicas, termodinámica y electricidad y magnetismo, entre otras. En estos ejemplos, en la mayoría de los casos, se recurre a la idea básica de proyectar una fuerza F en un sistema de referencia, para ello la representación geométrica de ésta se torna indispensable en la mayoría de los casos y el estudiante deberá relacionar una serie de conceptos que involucra la idea de vector, como magnitud, dirección, proyecciones de vectores, productos vectoriales, etc.

Cuando la fuerza se representa en un sistema de referencia bidimensional, se ha observado que los estudiantes no presentan mayor dificultad en definir las fuerzas que generan a F y de esta forma llegar a expresiones como $F = F_x i + F_y j$. Sin embargo, el escenario se torna diferente cuando la fuerza es representada en el espacio tridimensional. Se ha observado que estudiante del tercer semestre de la carrera de electrónica, que cursan la asignatura de cálculo vectorial, carecen de

elementos que les permita, en un primer momento, visualizar un punto en R^3, identificar la dirección de la fuerza, así como proyectarla en los ejes de coordenadas para definir sus componentes.

Diversos estudios (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez, Garza, 2000; Planchart, 2002) muestran que la construcción de un concepto matemático no es una actividad inmediata, requiere de diferentes etapas que pueden ser desarrolladas en periodos de tiempo variables y además requieren de trabajo y dedicación del individuo. De acuerdo con Cantoral, et al, (2000), estas etapas implican los procesos y la construcción de objetos. Los *procesos* se entienden, como la etapa en la que una serie de operaciones pueden ser desarrolladas y coordinadas en la mente del estudiante "el alumno habrá adquirido entonces un pensamiento operacional con respecto a ese concepto…" (Cantoral et al., 2000, p.32). Cuando el proceso es internalizado y concretado en la mente de un estudiante se genera una entidad única llamada *objeto*. Una vez que el objeto ha sido adquirido el individuo ha desarrollado cierta habilidad para pensar en este concepto ya sea en forma dinámica como proceso, o estática como objeto.

MARCO TEÓRICO

La investigación se enmarca en la teoría APOE (acciones, procesos, objetos, esquemas) ya que se pretende describir y caracterizar las construcciones que tiene lugar en la mente de un estudiante universitario. La teoría APOE propone elementos que permiten reflexionar sobre la construcción de un concepto matemático. Para ello, es necesario acercarse al concepto desde su epistemología, visto desde las matemáticas mismas.

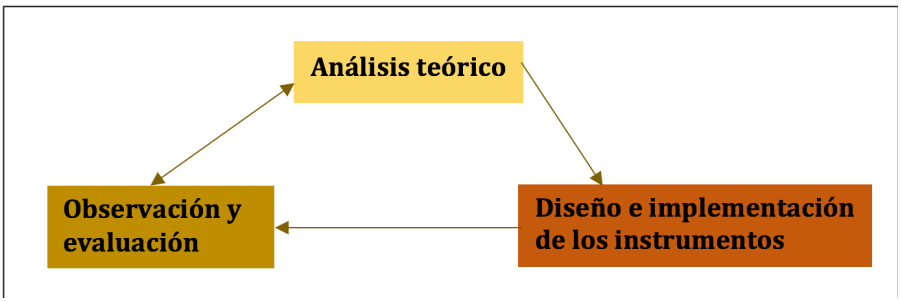
De acuerdo con APOE, el desarrollo de la construcción del concepto comienza con la manipulación de los objetos físicos o mentales previamente construidos para formar *acciones*, las acciones se interiorizan para formar *procesos*, los procesos se encapsulan para formar *objetos*, los objetos se pueden volver a desencapsular hacia el proceso desde el cual se formaron. Finalmente las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en esquemas. En la figura 1 se muestra la relación que APOE establece entre los elementos constitutivos de su teoría.

Figura 1. Evolución de esquemas mentales desde APOE.

Faltan parámetros necesarios o son incorrectos.

Parte medular en la investigación es lo que APOE denomina *descomposición genética* del concepto, esto es, "un conjunto estructurado de construcciones mentales que pueden describir cómo un concepto se puede desarrollar en la mente de un individuo" (Asiala, et al, 2004, p. 5). Para lograr una primer descomposición de los conceptos involucrados en el estudio, se recurrió al Ciclo APOE (figura 2), ya que éste permite indagar sobre el proceso que sigue el individuo en la construcción de un nuevo concepto matemático, así como para diseñar y sustentar, desde el análisis teórico, los instrumentos que promueven construcciones. Esto no es inmediato, Asiala et al. 2004 mencionan que "el ciclo se repite tantas veces sea necesario para perfeccionar tanto teoría, como tratamiento hasta que el alumno haya consolidado su nuevo esquema".

Figura 2. Ciclo APOE.



Este enfoque propone iniciar con un análisis teórico y epistemológico del concepto, el cual en el estudio permitió dimensionar y describir cómo éste puede ser construido. A partir de este análisis preliminar del concepto se diseñaron los instrumentos los cuales posteriormente fueron llevados a escena una y otra vez, lo que permitió un proceso de evaluación y ajuste de los mismos logrando así una versión que fue aplicada en estudiantes universitarios.

METODOLOGÍA

Dado que el objetivo del estudio es observar, describir y caracterizar las construcciones que tiene lugar en la mente de un estudiante en la apropiación del concepto de espacio tridimensional y vector, la investigación está enmarcada en el paradigma cualitativo (descriptivo-interpretativa) basada en un enfoque constructivista donde el método empleado será el de exploración crítica (Inhelder, 2002). Lo que se busca con el método es indagar sobre las construcciones que tienen lugar en la mente del sujeto cuando comprende los conceptos matemáticos subyacentes a los vectores y el espacio tridimensional.

DECRIPCIÓN DE LA ESTRATEGIA DIDÁCTICA

En el Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán se implementó una estrategia didáctica que consistió en una serie de materiales manipulativos diseñados para estudiantes universitarios, que por primera vez se acercan al concepto de espacio tridimensional. La finalidad fue promover la exploración y manipulación de objetos matemáticos como coordenadas tridimensionales, componentes vectoriales, dirección y magnitud de un vector, proyecciones vectoriales, entre otros que subyace a la visualización de nuevos conceptos desde su representación geométrica tales como volúmenes de paralelepípedos, áreas de paralelogramos, etc.

En el estudio, participaron dos estudiantes del tercer semestre de la carrera de ingeniería electrónica que se oferta en el Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán.

El trabajo con los estudiantes se desarrolló en dos etapas. En la primera realizaron una serie de actividades con material físicamente manipulable para representar el espacio tridimensional. Como material de apoyo utilizaron un juego de geometría y un transportador. La figura 3 muestra el prototipo del espacio tridimensional que fue construido por uno ellos, la finalidad del material fue que el estudiante visualizara los ejes, planos coordenados y octantes del espacio tridimensional y

realizara una serie de ejercicios para localizar puntos (x, y, z) sin haberlo hecho previamente en su libreta. Los segmentos color azul simulan los ejes de coordenadas y la viga de color amarillo un vector.

Figura 3. Espacio tridimensional con material de Zometool..

Después de realizar una serie de mediciones, uno de los estudiantes logró deducciones interesantes. Se le motivó para que realizara el análisis geométrico necesario para encontrar la magnitud y dirección del vector, como material de apoyo utilizó un transportador y regla. También recurrió a relaciones trigonométricas y el teorema de Pitágoras. Logró los siguientes resultados:

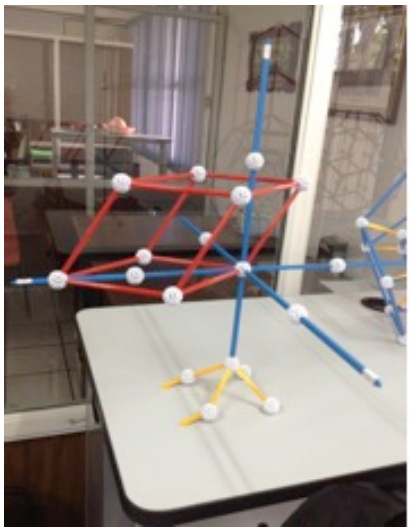
$$\cos\theta_x = \frac{d_x}{d} \qquad \cos\theta_y = \frac{d_y}{d} \qquad \cos\theta_z = \frac{d_z}{d}$$

$$F^2 = F_x^{\,2} + F_y^{\,2} + F_z^{\,2} \qquad F = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2} + F_z^{\,2}}$$

En este sentido, el estudiante pudo visualizar información importante sobre otros aspectos en el campo de los vectores, como ángulos entre vectores y proyecciones de vectores, que fueron aplicadas en la estructura que se visualiza en la figura 4.

Se muestra un paralelepípedo construido con una serie de ejes, el objetivo de la actividad consistió en que es estudiante debía deducir una fórmula para calcular su volumen. Inicialmente se solicitó que el análisis y los trazos lo realizaran en su libreta. Se les explicó que podían recurrir a conceptos previamente tratados como productos vectoriales, existencia de un vector unitario asociado, etc.

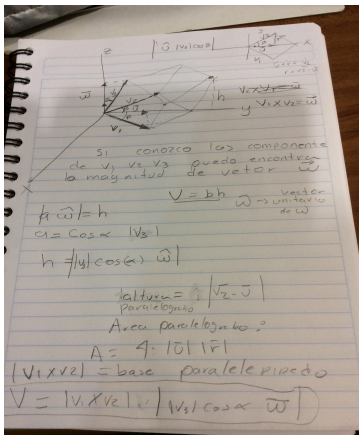
Figura 4. Paralelepípedo construido con material de Zometool



Uno de los estudiantes presentó problemas en el trazo de la figura, lo cual impidió que avanzara en su análisis. Después se le permitió utilizar la estructura, utilizó nuevamente una regla para medir y encontrar las componentes de los vectores que forman la base del paralelepípedo y recurrió a algunas relaciones trigonométricas para encontrar distancias e inclinaciones. Se observó que los estudiantes fueron capaces de inferir geométricamente la proyección de un vector sobre otro (no se trató previamente el concepto) y la magnitud de este como la longitud de una de las aristas del paralelepípedo y de este modo calcular el área de la base. Recurrieron al producto vectorial para encontrar su altura y nuevamente a la proyección de vectores.

Otro aspecto interesante que se observó fue cuando se les solicitó a los estudiantes volvieran a dibujar el paralelepípedo en la su libreta y bosquejaran todos los trazos a los que recurrieron para deducir la fórmula del volumen. Se observó que los estudiantes trazaron sin mayor dificultad la figura e indicaron los trazos necesarios para deducir la fórmula del volumen. En la figura 5 se observa el trabajo de uno de los estudiantes.

Figura 5. Solución del estudiante M1

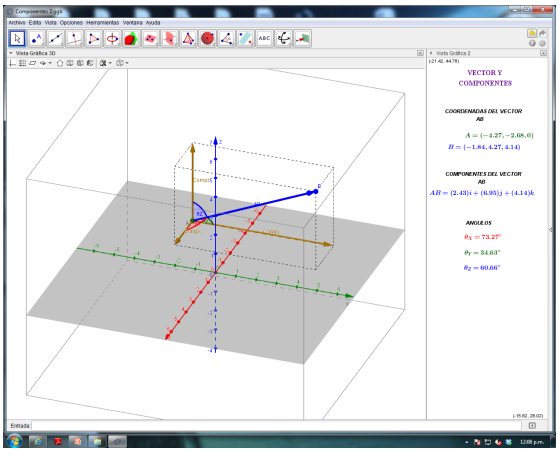


La segunda etapa de la propuesta consistió en que los estudiantes desarrollarían una serie de acciones (complementarias a las primeras) que consistieron en la manipulación de objetos visuales a través del software GeoGebra. Se eligió dicho software porque ofrece un ambiente de geometría dinámica en el que el estudiante pude dinamizar objetos matemáticos desde su representación geométrica.

Las actividades diseñadas para esta etapa, metodológicamente corresponden, al análisis de un conjunto de animaciones en las cuales, a través de un diseño instruccional, se promovió que el estudiante indague, observe, describa y registre los efectos que tienen ciertos parámetros de los vectores en cada situación matemática presentada. Todo ello encausado a la construcción de conceptos matemáticos.

Posteriormente debían desarrollar una actividad de cierre, la cual consistió en elaborar una aplicación propia en la que mostraran de una manera dinámica la relación entre la magnitud y dirección de un vector y sus componentes. En la figura 6 se muestra un producto desarrollado por uno de los estudiantes, se observó que logró dinamizar el valor de los cosenos directores del vector, su magnitud y la relación que estos parámetros tiene con las componentes del vector. Cuando el estudiante modificaba el valor de algún ángulo director, podía observa como esto repercutía en las componentes del vector. Además dedujo, geométricamente que los ángulos directores varían, información que no había sido claramente comprendida con la estructura.

Figura 6. Dinamización de los elementos de un vector en R3 con GeoGebra



Se observó que la transición del objeto manipulable físicamente al objeto visual elaborado en GeoGebra facilitó la interpretación de la tercera dimensión que mostró la pantalla de la computadora. En ocasiones los estudiantes recurrían a la estructura mostrada en la figura 1 para ubicar el punto final de algún vector y para puntualizar los ángulos directores.

OBSERVACIONES

Se comentó que la propuesta descrita forma parte de una investigación que aun se encuentra en desarrollo, sin embargo, hasta este momento y con los datos extraídos del estudio descrito, se observa que la manipulación de objetos físicos promueve la construcción de un “puente

conceptual" entre registros de representación geométricos y registros algebraicos de los conceptos abordados. El estudiante logró visualizar una perspectiva tridimensional en su forma original en una superficie plana (como la de su libreta), le permitió visualizar y dibujar trazos y extraer datos necesarios para establecer relaciones y llegar a deducciones como la expresión para calcular el volumen del paralelepípedo sin recurrir al triple producto escalar que comúnmente se propone en los libros de texto como una fórmula, carente de significados.

La manipulación de objetos físicos y visuales promueven la resignificación de las representaciones algebraicas visualizadas en un modelo físico, expresiones como

$$Proy_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\theta)\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

fueron identificadas geométricamente por el estudiante mediante de la estructura que aparece en la figura 5.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D., y Thomas, K. (2004). *A Framework for Research a Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education*. Recuperado el 2 de Septiembre del 2012 de: http://www.math.kent.edu/~edd/Framework.pdf

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero., Alanís, J., Rodríguez y R., Garza, A. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: Trillas.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática 8*(3), 24 – 41.

Inhelder, B. (2002). *Aprendizaje y estructuras del conocimiento*. España: Morata.

Planchart, O. (2002). *La Visualización y la Modelación en la Adquisición del Concepto de Función*. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma del Estado de Morelos. Recuperada el 4 de Abril del 2011 de: http://ponce.inter.edu/cai/tesis/oplanchart/inicio.pdf

UNA EXPERIENCIA ACERCA DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DEL ÁLGEBRA VECTORIAL MEDIANTE TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

Larissa Sbitneva, Nehemías Moreno Martínez, Rosalino Cortés González
Universidad Autónoma del Estado de Morelos (México)
larissa@uaem.mx, nehemias.moreno@uaem.mx, rcortesg25@gmail.com

Palabras clave: vectores geométricos, representación ostensiva, enfoque ontosemiótico

Key words: geometric vectors, ostensive representations, ontosemiotic approach

RESUMEN: En el presente trabajo se describen algunas experiencias sobre el aprendizaje de los vectores por parte de un grupo de estudiantes universitarios que cursaban la materia de Geometría. Se planteó a los estudiantes la elaboración de representaciones ostensivas de las transformaciones isométricas de ciertas figuras mediante el empleo de regla, escuadra y compás. El análisis de las representaciones mediante el Enfoque Ontosemiótico nos permitió observar que los estudiantes dieron sentido a las propiedades de operaciones con los vectores y también superaron las dificultades relacionadas con el manejo de los vectores en la solución de varios problemas de Geometría Analítica.

ABSTRACT: There is presented a brief description of some experiences concerned to significant learning of the concept of vector achieved by a group of university students within the Geometry course. Students have been engaged in the process of construction of the ostensive representations of the images of some specific geometric objects under isometric transformations by means of a straightedge, compass and set squares. Our analysis of the results, based on the Ontosemiotic Approach, allowed us to conclude that the students were able to discover the properties of the vector algebra operations, as well as to overcome the difficulties related to the vector algebra' approach in solving various problems of Analytic Geometry.

INTRODUCCIÓN

Los cursos de Geometría Analítica y Álgebra Lineal son los primeros cursos de matemáticas que se imparten en el nivel universitario. En dichos cursos, la mayoría de los conceptos fundamentales (tales como los conceptos de vector, espacio vectorial, transformación lineal, etc.) son presentados de manera rigurosa y axiomática, lo cual puede ser observado en el discurso del docente o los libros de texto en los que se analizan dichos tópicos. Tradicionalmente se considera que los estudiantes son capaces de construir dichos conceptos matemáticos complejos, en el terreno de lo abstracto, sin recurrir a los recursos de ayuda relacionados directamente con su conocimiento perceptual.

Desde nuestro punto de vista, esto plantea cierta problemática para el aprendizaje significativo de Geometría Analítica y Álgebra Lineal, pues se tiene la idea generalizada entre los docentes de prescindir de ciertos conocimientos de la vida real en la enseñanza de ciertos conceptos abstractos. Históricamente esta idea fue planteada por el matemático francés J. Dieudonné, quien sugirió evitar argumentaciones de Geometría Euclidiana en la enseñanza de Geometría Analítica, advirtiendo que ésta última podría ser reconstruida a partir del Álgebra Lineal (así como la Geometría Euclidiana). Por otro lado, él propone introducir los conceptos de Álgebra Vectorial de manera intuitiva, a través del resultado de ciertos experimentos: por ejemplo, la adición de vectores y la multiplicación de un vector por un escalar no son operaciones extremadamente abstractas y difíciles de ilustrar gráficamente debido a que la naturaleza nos proporciona un laboratorio donde podemos familiarizarnos con casos particulares de los conceptos (e.g., al jalar un objeto con dos cuerdas, la fuerza resultante podría ser descrita como la suma de vectores), y que posteriormente estos conceptos podrían ser asimilados en su forma general. En otras palabras, se trata de enseñar el álgebra como si fuera "física de espacio" (espacio tiempo en el que vivimos) con el propósito de introducir al estudiante a los conceptos surgidos en el periodo transcurrido del "apogeo de la ciencia griega a la fecha" (Dieudonné, 1969).

En el presente trabajo, partimos de la idea que es posible enseñar Geometría Analítica tomando en cuenta la experiencia perceptual del estudiante, y posteriormente, pasar a la construcción de conceptos algebraicos. Para esto proponemos la realización de algunas prácticas matemáticas (mediante el empleo de herramientas tales como la escuadra, la regla y compás) que involucran transformaciones geométricas y diagramas en las cuales emerge el objeto que representa la idea de vector (como algo necesario para llevar un punto al otro, de acuerdo con su sentido inicial del siglo XVIII). La emergencia del concepto de vector a partir de la práctica matemática es descrita con referencias a algunos elementos teóricos provenientes del Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS), tomando en consideración tanto las representaciones ostensivas como la visualización de las propiedades de operaciones con vectores.

Las actividades realizadas permitieron a los estudiantes dar sentido a las propiedades de las operaciones con los vectores, en lugar de asimilarlos como conceptos acabados. Los participantes superaron las dificultades relacionadas con el manejo de los vectores en la solución de varios problemas de Geometría Analítica que requiere de la relación de posiciones de vectores que caracterizan las figuras geométricas tales como rectas y planos.

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En este trabajo nos apoyamos en el Enfoque Ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Fernández, Gonzato y Cajaraville, 2012) para caracterizar la actividad matemática que realizan los estudiantes, cuando resuelven ciertos problemas de Geometría, en términos de prácticas y configuraciones epistémicas y cognitivas de objetos primarios, así como los procesos activados en dichas prácticas. En el EOS, se entiende por práctica matemática la realización de una secuencia de acciones, sujetas a reglas matemáticas. El análisis de dicha práctica requiere de considerar a un conjunto de objetos matemáticos primarios (lenguaje, conceptos, propiedades, argumentos, etc.) y procesos (idealización, generalización, argumentación, etc.) que intervienen en la misma.

Así por ejemplo, en la práctica de resolución de problemas de Geometría Analítica intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (que evocamos en la actividad matemática), los cuales son representados en forma textual, oral, grafica e incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas emergen nuevos objetos que se manifiestan por su organización y estructura, como los vectores en nuestro caso.

La aplicación de este planteamiento al proceso de visualización nos lleva a distinguir entre "prácticas visuales" y "prácticas no visuales" o simbólico/analíticas. Por eso, también fijamos la atención en los tipos de objetos lingüísticos y artefactos, que intervienen en una práctica, que serán considerados como visuales si ponen en juego la *percepción visual.*

Los "objetos visuales" y los procesos de visualización forman *configuraciones* o sistemas semióticos constituidos por los objetos intervinientes y emergentes en un sistema de prácticas, junto con los procesos de significación que se establecen entre los mismos. En el análisis de la visualización se considera lo siguiente: (a) los objetos primarios, que en ella participan, en los cuales se dice que hay visualización, (b) las dualidades desde las cuales se pueden considerar los tipos de objetos visuales previamente identificados. En esta fase se introducen las necesarias distinciones entre objetos visuales personales (cognitivos) e institucionales (socio-epistémicos); objetos visuales particulares (extensivos) y generales (intensivos); objetos visuales ostensivos (materiales) y no-ostensivos (mentales, ideales, inmateriales); objetos visuales unitarios (usados como un todo global) y sistémicos (formados por un sistema de elementos estructurados).

Finalmente, los objetos visuales son considerados como antecedentes o consecuentes de funciones semióticas (dualidad expresión y contenido). Cabe señalar, que la visualización en matemáticas no se reduce a “ver”, sino que también conlleva interpretación, acción y relación. En nuestra propuesta, los vectores emergen como resultado de composición de dos simetrías axiales con los ejes paralelos y son definidos por los estudiantes como desplazamientos o transformaciones de traslación. Esto constituye la componente crucial de su conocimiento personal, formando una configuración cognitiva

Los participantes fueron 8 alumnos, de entre 19 y 21 años de edad, de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos, México. Estos alumnos se encontraban cursando la materia de Geometría 1, en esencia, en dicho curso se abordan los principios básicos de Geometría Analítica.

DESCRIPCIÓN DE LAS EXPERIENCIAS

En primeras sesiones de trabajo el docente presentó a los estudiantes unas clases típicas de Álgebra Lineal, es decir, las clases tradicionales que consistían en la enunciación de definiciones, teoremas y la presentación de las propiedades y ciertas demostraciones sobre el pizarrón. Posteriormente se solicitaba a los alumnos re-escribir los axiomas de espacio vectorial que se habían abordado en las clases anteriores y dar representación gráfica correspondiente. Se observó que los estudiantes tenían dificultades de resolver problemas gráficos para establecer las igualdades de ciertas combinaciones de vectores, en particular, para establecer la asociatividad respecto a la suma, además se observaron problemas con los axiomas de multiplicación por escalar.

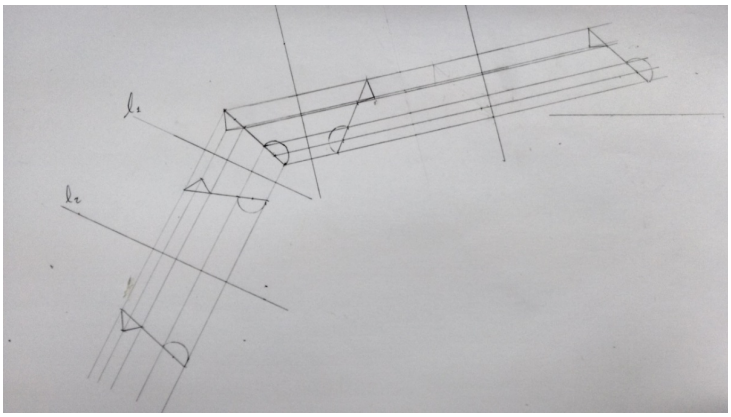
Con el objetivo de implementar acciones innovadoras centradas en el auto-aprendizaje de los estudiantes, se llevó a cabo un taller con algunas actividades lúdicas orientadas hacia la construcción del concepto de vector y la visualización de las operaciones con vectores y sus propiedades. Estas actividades consistían en la representación ostensiva de las transformaciones isométricas de ciertas figuras empleando juegos geométricos (regla, escuadra y compás).

A continuación se describen las cuatro tareas, que fueron planteadas a los estudiantes, y la actividad matemática implicada en cada una. Luego, por cuestiones de espacio, se realiza una descripción general de la práctica matemática realizada en dichas actividades en términos de algunas postulaciones teóricos del EOS.

Tarea 1. Vector como composición de dos simetrías

Se escogen dos ejes paralelos, y una figura. Se trazan las imágenes de puntos simétricos respecto a un eje y luego respecto al otro eje. Después de observaciones y mediciones descubren que cada punto “viaja”, o se traslada, en la misma dirección y en la misma distancia. Al mismo tiempo, los estudiantes deben justificar sus observaciones con argumentos teóricos. Como resultado de observación de las construcciones, los estudiantes llegan a la conclusión de que el objeto final puede ser visto como el resultado de desplazamiento del objeto inicial: así emerge el vector como transformación de traslación.

Figura 1. Vector como objeto emergente de la transformación de traslación



En el transcurso de las construcciones gráficas, los estudiantes lograron superar las dificultades en el dibujo de rectas paralelas, de trazar una recta perpendicular, de extenderla, de acomodar un compás para marcar los puntos simétricos, apoyándose en el punto sobre el eje donde se proyecta el punto inicial, entre otras cosas relacionadas con el trabajo en equipo. Con estas actividades, la enseñanza de los vectores está centrada en el alumno, pues se consideran sus propios ritmos y procedimientos para resolver el problema y se les invita a justificar sus procedimientos.

Descripción de la actividad matemática de la Tarea 1

En la parte izquierda de la Figura 1 se muestran dos simetrías axiales de un objeto respecto al eje l_2 y luego respecto al eje l_1. En la parte derecha se muestra un ensayo respecto a otros dos ejes paralelos.

Durante el proceso de visualización, los alumnos llegan a la conclusión que cada punto del objeto se traslada a lo largo de una recta, que es perpendicular a ambos ejes, en el mismo sentido y en la misma distancia, de tal modo que el objeto se desplaza rígidamente a lo largo de un segmento correspondiente.

De esta manera, el resultado se puede interpretar como un desplazamiento de la figura inicial a lo largo de un segmento dirigido (vector-flecha) que une los puntos correspondientes del objeto inicial con la imagen final, que es el resultado de la transformación compuesta respecto a dos ejes de simetría paralelos.

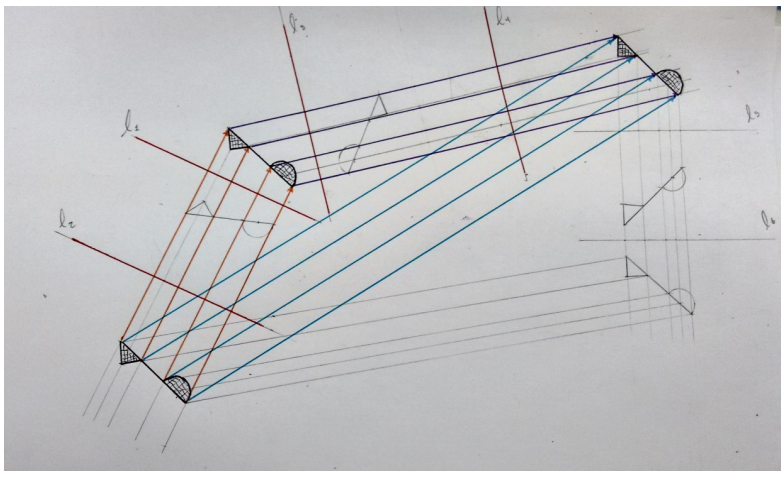
Estas observaciones son expresadas a través de la realización de una práctica simbólica/analítica (no visual) empleando la letra $\boldsymbol{F}$, la cual simboliza el objeto y sus imágenes en la Figura 1. En este sentido

$$\boldsymbol{F1 = Sl_2(F),\quad F2 = Sl_1(F1),\ F2 = \big((Sl_1)\blacksquare(Sl_2)\big)(F) = Tr_a(F)}$$

Tarea 2. La suma de dos vectores

La segunda actividad tenía como objetivo que los estudiantes observaran cómo emerge la operación de suma de vectores en el proceso de construcción de cuatro composiciones, con dos pares de ejes paralelos.

Figura 2. La suma vectorial como resultado de dos transformaciones de traslación.



Descripción de la actividad matemática de la Tarea 2

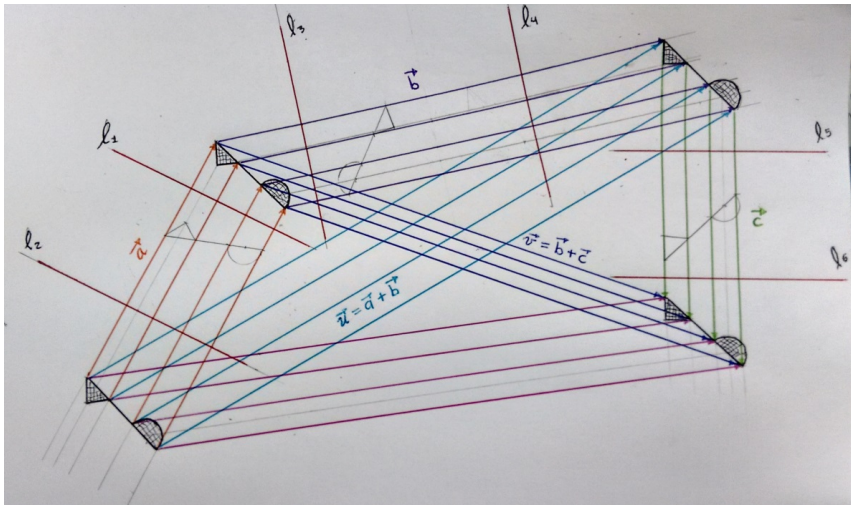
En la Figura 2 se muestra la transformación del objeto mediante la composición de simetrías respecto a l_2 seguida por la de l_1 y posteriormente mediante la composición de simetrías respecto a l_3 y l_4. Por las leyes de la lógica, se concluye que el objeto inicial es idéntico (congruente) al que corresponde la imagen final: es decir, es el resultado de una traslación por el vector (color azul) que une los puntos correspondientes del objeto inicial con el reflejado que es el resultado de dos parejas de simetrías. Entonces es preciso llamarlo como la composición de dos traslaciones, o equivalentemente, la suma de dos vectores.

También se concluye que es necesario realizar las representaciones simbólicas que describen los resultados intermedios y finales de las construcciones. Por ejemplo, el resultado de dos simetrías, respecto al eje l_2 primero (como en la Figura 2) y luego respecto al eje l_1 nos da la transformación resultante que es el traslado por el vector-flecha que une dos puntos correspondientes del objeto inicial y su imagen resultante, $\big((\boldsymbol{Sl_1})\blacksquare(\boldsymbol{Sl_2})\big)(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{Tr_a}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F2}$.

De manera similar, obtenemos la representación para la otra pareja de transformaciones isométricas, $\big((\boldsymbol{Sl_4})\blacksquare(\boldsymbol{Sl_3})\big)(\boldsymbol{F2}) = \boldsymbol{Tr_b}(\boldsymbol{F2}) = \boldsymbol{F3}$. Entonces la composición de $\boldsymbol{Tr_a}$ y de $\boldsymbol{Tr_b}$ es $\boldsymbol{Tr_u}$, que corresponde a la suma de los vectores flecha: **a+b=u.**

Tarea 3. Visualización de la ley asociativa de la suma de vectores

Figura 3. Composición con la tercera pareja de ejes de simetrías paralelos

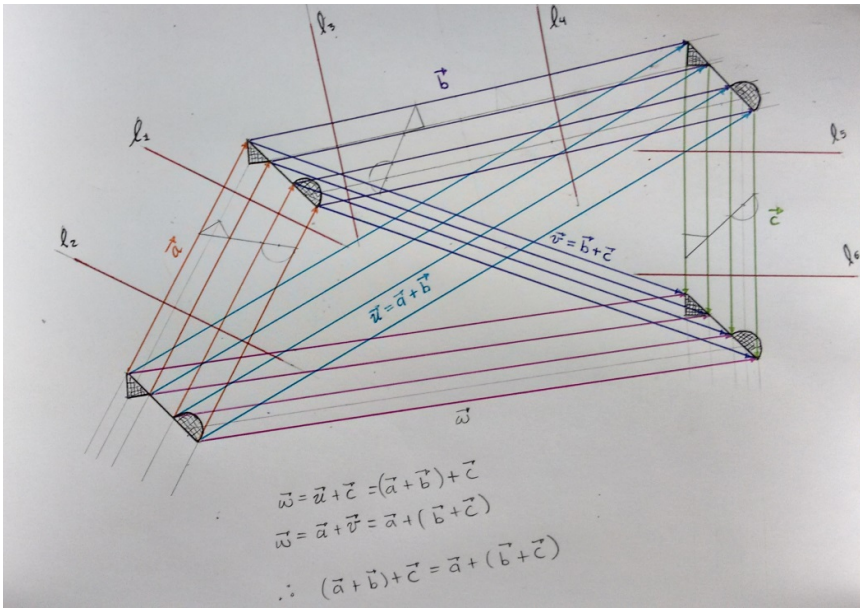


Descripción de la actividad matemática de la Tarea 3

Los estudiantes tienen que establecer y comprobar la relación entre el objeto $\boldsymbol{F}$ (inicial) y el objeto $\boldsymbol{F4}$ (final), que es el resultado de composición de dos simetrías del objeto $\boldsymbol{F3}$ respecto a los ejes l_5 y l_6. Pero como el objeto $\boldsymbol{F3}$ es el traslado paralelo del objeto $\boldsymbol{F}$, por el vector **u=a+b**, entonces $\boldsymbol{F4}$ es el traslado paralelo del objeto $\boldsymbol{F}$ por un vector que une los puntos correspondientes (color rojo).

Tarea 4. Propiedad asociativa de la suma de tres vectores

Figura 4. La ley de asociatividad emergente



La primera pareja de composiciones de traslaciones se denota como la suma **u=a+b** de los vectores correspondientes, de la primera traslación Tr_a y la segunda Tr_b. Del mismo modo la segunda traslación seguida por la tercera nos da el vector **v: v=b+c**. Pero de las construcciones se obtiene el mismo vector **w**, como la suma de **u+c=a+v,** lo cual expresa la ley de asociatividad de la suma de tres vectores de modo siguiente: **u+c=(a+b)+c=a+v= a+(b+c)**, o en la forma final **(a+b)+c=a+(b+c)**.

Una mirada desde el EOS sobre las actividades realizadas

Para resolver las tareas los estudiantes deben realizar una práctica matemática visual y simbólica que consiste en comunicar la perspectiva del objeto que se va a reflejar y las proyecciones planas de los puntos del objeto sobre el eje. Los términos "derecha", "izquierda", "eje" y los símbolos (l_1, l_2, $\vec{a}$), así como las argumentaciones que deben darse para justificar que en la Figura 1 los objetos $\boldsymbol{F1}$ y $\boldsymbol{F2}$ son reflejados del objeto $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{F1}$, respectivamente, y son elementos del lenguaje simbólico del estudiante. Sin embargo, en el contexto de la tarea se usan de manera

indexada, señalando posiciones en las representaciones del objeto evocado. El proceso de visualización requerido y sus resultados, los objetos visuales, intervienen asociados a determinadas tareas. Así se tiene, por ejemplo, la comunicación de la posición relativa de objetos en el espacio (plano), se trata de posicionar al objeto en el espacio (plano) mediante el empleo de lenguaje deíctico (izquierda, derecha; arriba, abajo). La representación del objeto y sus traslaciones en el espacio da origen también al reconocimiento de invariancias en la forma, lo cual se apoya en la discriminación visual: comparar los objetos, identificar similitudes o diferencias entre ellos. Los estudiantes también deben realizar operaciones visuales como el de (1) proyectar para reflejar a ciertos puntos del objeto, trasladar, deslizar, etc., (2) construir el objeto a partir de los puntos que

se han reflejado, (3) representar gráficamente y simbólicamente las relaciones entre las figuras, por mencionar algunas.

Por otra parte, también se emplean conceptos visuales, por ejemplo, en la realización de la práctica intervienen conceptos de representación material (dibujo, trazos sobre el papel, expresiones matemáticas ostensivas) y los correspondientes conceptos figúrales representados por medio de lenguaje visual (por ejemplo, la propiedad de asociatividad que se ilustra en el dibujo de la Figura 4). En la Figura 4 se ponen en juego los conceptos de objeto visible, objeto oculto, puntos de vista opuestos (el frente es opuesto a atrás; derecha es opuesta a izquierda), direcciones de mirada del observador (rayo visual), etc..

La realización de estas prácticas involucra también relaciones entre conceptos expresados mediante proposiciones (cuya verdad o falsedad se debe demostrar). Se tienen proposiones visuales, es decir, propiedades que intervienen en la resolución de las tareas visuales y se expresan en lenguaje visual: (a) Propiedades de los procedimientos visuales utilizados, tales como la conservación de la forma y tamaño por movimientos rígidos; (b) Propiedades del lenguaje visual utilizado, como la conservación de la forma en las imágenes (reflejados), propiedades de las isometrías y (c) Propiedades de los conceptos visuales.

Por último, la elaboración de un discurso justificativo de las proposiciones y de los procedimientos requerirá la simple presentación del objeto material, si se trata de propiedades de naturaleza empírica, o podrá requerir la elaboración de argumentaciones deductivas basadas en reglas previamente aceptadas.

En el caso de la Figura 2, teniendo en cuenta el significado atribuido a los conceptos de izquierda, derecha, los convenios de representación plana y las propiedades de los reflejados (las imágenes) se debe aceptar que si el observador se coloca frente al plano podrá observar la composición de simetrías respecto a l_2 seguida por la de l_1 y posteriormente a través de la composición de simetrías respecto a l_3 y l_4. Por lo tanto, la representación plana de la Figura 2 puede representar la suma vectorial y puede ser entendida como el resultado de dos transformaciones de traslación.

La realización de las prácticas permite la resolución de las actividades descritas anteriormente. Dichas prácticas evidencian la emergencia del concepto de vector o de sus propiedades según sea la práctica que se esté realizando.

ANÁLISIS Y CONCLUSIONES

El proceso de visualización y sus resultados (objetos visuales y visualizaciones) se encuentran asociados a las tareas descritas anteriormente. En las actividades, la visualización se puso en juego en el reconocimiento de las invariancias en las formas, o en sus representaciones, por transformaciones específicas, lo cual se encuentra apoyado en la discriminación visual como la comparación de objetos, la identificación de similitudes o diferencias.

Los estudiantes también realizaron operaciones visuales tales como simetrías respecto a una recta (los reflejos de cuerpos), las traslaciones (desplazamientos), así como las transformaciones de representaciones visuales mediante la descomposición y recomposición de las figuras. En estas operaciones visuales intervinieron tanto conceptos de representación material (por ejemplo, el objeto a ser trasladado) como conceptos figurales, los cuales estaban representados por medio de

lenguaje visual. En relación con esto último, es manifestado a través de las prácticas geométricas descritas anteriormente en que el vector emerge como un concepto figural.

Los estudiantes también emplearon diferentes propiedades de los objetos visuales involucrados: se trata de enunciados cuya verdad o falsedad se debe establecer. Por ejemplo, cuando se emplean las leyes de la lógica para mostrar que un objeto bajo traslaciones ha sido inalterado. También emplearon las propiedades de los procedimientos visuales, por ejemplo, la conservación de la forma y tamaño por movimientos rígidos.

Finalmente, en la visualización de las leyes asociativas, se requiere también de la elaboración de un discurso justificativo de las proposiciones y de los procedimientos. Es decir, de la elaboración de argumentos deductivos basados en reglas previamente establecidas.

De esta manera, en los procesos de construcción descritos anteriormente, los estudiantes dieron sentido a la importancia de los postulados de la geometría euclidiana. Además los estudiantes tenían que atender la necesidad de simbolizar sus observaciones articulados, así como de proporcionar justificación de los resultados de sus observaciones basados en la visualización y posteriormente expresarlos en la forma de demostraciones. También surgieron unas tareas que requerían de creatividad: la primera, en relación con la inquietud natural de cómo realizar las construcciones para visualizar la ley de conmutatividad de tal modo que no sea necesario usar una hoja de trabajo de tamaño demasiado grande comparando con una de cuaderno; otras tareas, en relación de construcciones para visualizar la operación de multiplicación por un escalar y sus propiedades.

Las actividades descritas permitieron a los estudiantes dar sentido a las propiedades de operaciones con los vectores, en lugar de aprenderlos como conceptos acabados.

También los exámenes finales del curso Geometría 1 mostraron resultados excelentes, lo que significa que los estudiantes superaron las dificultades relacionadas con el manejo de los vectores en la solución de varios problemas de Geometría Analítica que requieren de la relación de posiciones de vectores que caracterizan las figuras geométricas tales como rectas y planos.

Agradecimientos. Nuestro trabajo ha sido realizado en el marco del Proyecto de Investigación PICA14 con apoyo de la Secretaría de Investigación de la UAEM a través de la Dirección General de Desarrollo de la Investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Dieudonné, J. (1969). *Linear Algebra and Geometry*, Paris: Hermann.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. The International Journal on Mathematics Education, 39(1-2)*, 127-135.

Godino, J. D., Fernández, T., Gonzato, M., y Cajaraville, J. A. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 30(2),* 109-130.

LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS Y EL TRACKER EN EL AJUSTE DE POLINOMIOS: UN ESTUDIO DE CASO

Sandra Minerva Valdivia Bautista, Rafael Pantoja Rangel
Centro Universitario de Ciencias Exactas e ingenierías, Universidad de Guadalajara (México)
sandy_87siel@hotmail.com, rpantoja@prodigy.net.mx

Palabras clave: modelación matemática, ajuste de curvas, Tracker, trabajo colaborativo y representaciones semióticas.

Key words: mathematical modeling, curves adjustment, Tracker, collaborative work and semiotic representations.

RESUMEN: En el estudio se plantea como estrategia didáctica que a partir del desarrollo de actividades con diversas situaciones problema (Hitt, 2013) relacionadas con el contexto del alumno y apoyadas en la teoría de representaciones semióticas, la visualización, el trabajo colaborativo y el programa Tracker, se propicie la competencia de modelación matemática.

La modelación matemática se entiende como una práctica ejercida por profesores y estudiantes en un contexto y tiempo determinado, en respuesta a una situación del mundo externo pero cercano a la realidad del estudiante, de manera individual y colectiva, mediante el proceso de interacción (Córdoba, 2011, p. 10), motivo por el que se eligió como escenarios de grabación la unidad deportiva, el Coliseo Olímpico del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI).

ABSTRACT: In the study is raised as a didactic strategy that from the development of activities with diverse situations of the problem (Hitt, 2013) related to the student context and supported by the theory of semiotic representations, the visualization, the collaborative work and the program Traker, it will be propitiated the mathematical modeling competence. The mathematical modeling is understood as a practice exercised by teachers and students in a determined time and context, as a response to the outside world, this because of the closeness to the students reality, in an individual and collaborative manner through the process of interaction (Cordoba 2011, pag. 10). Therefore, recording scenarios as the sports unity, Coliseo Olímpico from the Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) were chosen.

La modelación matemática se considera importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje ya que permite integrar los elementos primordiales de la solución de problemas relacionados con el contexto del estudiante, el trabajo colaborativo y la obtención de un modelo matemático a partir de una situación específica mediante la puesta en escena de situaciones como el tiro a penal, tiro a canasta, movimiento de un corredor, entre otras situaciones.

Por esta razón, se propone la inclusión de la modelación matemática en prácticas escolares, además que permite la utilización de programas como el Tracker para facilitar la obtención del modelo matemático pasando por cada uno de los registros expuestos en las representaciones semióticas de Raymond Duval.

El Tracker juega un papel importante en la estrategia porque a partir de la grabación en video de la situación problema elegida, el estudiante interpreta y relaciona los datos, los gráficos y las funciones que proporciona el programa, con el desarrollo de la actividad en la que se evidencia la acción de modelar (Ezquerra, Iturrioz y Díaz, 2011; Pantoja, Ulloa y Nesterova, 2013). El programa Tracker proporciona una tabla de datos de las variables tiempo ***t***, distancia horizontal ***x*** y distancia vertical ***y*** y presenta en pantalla una serie de gráficas con los parámetros que se crea conveniente analizar y el modelo matemático que describe la trayectoria del objeto.

De este modo, el Tracker exhibe en pantalla representaciones semióticas (algebraica, gráfica y numérica) de la situación problema, que los alumnos en trabajo colaborativo relacionaron, de manera natural, con las matemáticas y que les permite interiorizar el concepto, comprender e interpretar las diferentes representaciones y explicarlas dentro del mismo contexto de la situación seleccionada.

Previo a las actividades de grabación de video, se platicó con los estudiantes sobre la importancia de su participación es este proyecto, en el que se les explicó que el objetivo de la propuesta se centra en que a partir de situaciones cotidianas relacionarán los conceptos matemáticos señalados en el programa de estudios, además de hacer patente algunas recomendaciones para el escenario, por ejemplo, que la cámara de video se ubique perpendicular al movimiento y que la unidad de medida sea detectable por el dispositivo de grabación, porque es de suma importancia ya que es la interfase entre lo real y lo mostrado en pantalla.

Los alumnos se recrearon mucho, se mostraron interesados y contentos porque se divertían en su clase de matemáticas, suceso que pocas veces habían experimentado.

Tracker

El Tracker es un programa gratuito para análisis de video y construcción de modelos matemáticos, diseñado para ser usado en la enseñanza de la Física y las Matemáticas.

La modelación de situaciones problema con video con el uso del programa Tracker, es una forma de combinar videos y modelación en computadora, razón por la cual fue elegido como recurso tecnológico para emplearlo en la propuesta.

A través de Tracker los estudiantes pueden señalar los cuadros por segundo de video, escoger el origen de la ubicación deseada y calibrar el video para valores de medida del mundo real, luego, el programa calcula valores de movimiento, construye gráficas, dibuja y manipula vectores de fuerza, velocidad y aceleración. (Ver figura 1)

Figura 1. Tratamiento del video correspondiente al movimiento de un ciclista y la herramienta que permite cambiar los parámetros en grafica.

Teoría de las representaciones semióticas de Duval

Según Chevallard (1991), Duval (1993, 1995), Godino y Batanero (1994), en matemáticas, la adquisición conceptual de un objeto necesariamente pasa por una o más representaciones semióticas, éstas están conformadas por:

- El objeto representado.
- El contenido de la representación.
- La forma de representación.

Para Duval (1995), un objeto matemático tiene dos tipos de representaciones:

- Externas: conocidas como representaciones semióticas que forman un sistema de signos que permite llevar a cabo las funciones de comunicación, tratamiento y objetivación. Por ejemplo, si se considera el objeto matemático llamado recta, las representaciones semióticas son las gráficas de la recta situada en el plano coordenado cartesiano, las situaciones reales relacionadas con la recta como el recorrido de un caballo en una carrera hasta llegar a la meta (que considere el tiempo como variable independiente y la distancia horizontal como variable dependiente), las ecuaciones de la recta en todas sus formas, la obtención del modelo matemático a partir de la representación visual (gráfica), representación numérica (conjunto de datos *x* contra *y*) o representación verbal (lenguaje común).
- Internas: son aquellas de naturaleza mental para el conocimiento matemático que son esenciales en los procesos de formación y aprehensión de las representaciones mentales.

El proceso cognitivo consiste fundamentalmente en las transformaciones de las representaciones semióticas, las cuales se clasifican en:

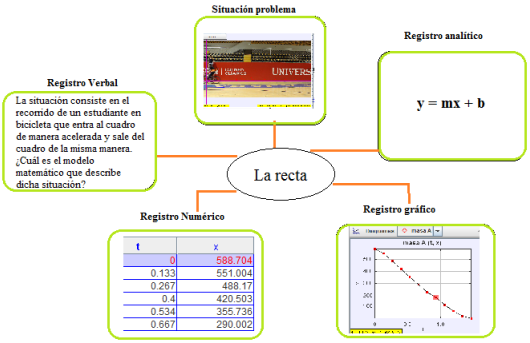
- Tratamiento: ocurre cuando se realiza una transformación dentro del mismo registro. Duval (2004, 2006). En el ejemplo del objeto matemático llamado recta, en el registro gráfico, un tratamiento ocurre cuando se desplaza la recta en el eje horizontal o vertical, o al manipular la inclinación de la recta.
- Conversión: consiste en la transformación de una representación a otra de otro registro, en la cual se conserva parcial o totalmente el concepto de la representación inicial. Duval

(1999). En el ejemplo del objeto matemático llamado recta, se realiza una conversión cuando se tiene la representación analítica en cualquiera de sus formas y se pasa al registro gráfico, numérico o verbal.

El uso de diversas representaciones semióticas, conversiones y transformaciones son fundamentales en la construcción y generación de objetos matemáticos, sin embargo, este tipo de procesos no surgen de manera espontánea, es por ello, que se propone diseñar actividades con situaciones o problemas que permitan pasar de una representación a otra o de un registro a otro.

La propuesta consiste en diseñar actividades que contenga una situación problema, que permita realizar tratamientos y conversiones e identificar el proceso de aprehensión del conocimiento matemático, la vinculación del los objetos matemáticos vistos en el salón de clases con una situación cotidiana así como las concepciones y explicaciones que da cada integrante del equipo colaborativo al aplicar tratamientos y/conversiones descritas anteriormente, aunque muchos de los estudiantes lo hagan de manera inconsciente. (Ver figura 2)

Figura 2. La recta y sus diferentes registros de representación.



METODOLOGÍA

El estudio es de tipo cualitativo, se trabajó con estudiantes del Centro Universitario de Ciencias Exactas en Ingenierías (CUCEI) en la Universidad de Guadalajara. Enseguida se describen las sesiones (con una duración de dos horas cada una), que se llevaron a cabo en la fase de experimentación:

Sesión 1. Formación de los grupos colaborativos de no más de cuatro integrantes, se explicaron las actividades a realizar como: el trabajo en grupos colaborativos, la grabación de los videos de la situación seleccionada, el uso del programa Tracker, la realización de la exposición del trabajo realizado por cada estudiante y la entrevista de alguno de los integrantes de los distintos grupos colaborativos.

Se entregó un manual elaborado especialmente para la elaboración del presente trabajo, el cual describe explícitamente lo necesario para que el estudiante realice las actividades de acuerdo al objetivo planteado, en el manual se indica la manera de importar el video, cómo situar el eje coordenado cartesiano, la barra de calibración y el trazo de la trayectoria del objeto en cuestión (de manera automática y manual).

El profesor mostró un ejemplo para la manipulación de un video para que los estudiantes se familiarizaran con el programa y ayudar al entendimiento del manual proporcionado.

Se entregó un archivo en Word con una serie de cuestionamientos sobre situaciones específicas para que trabajaran con el programa Tracker y se pidió como trabajo en casa que leyeran los archivos y el manual, que vieran los videos sin comenzar a manipular el video en Tracker ni llenar los reporte, con el propósito de que en la sesión 2, pudiera observarse el trabajo colaborativo y filmar las discusiones dadas durante el proceso.

Sesión 2. Instalación de dos video cámaras en el aula de clases para tener evidencia del proceso del trabajo colaborativo. Luego cada grupo manipuló el video en Tracker (ajustar el video, situar los ejes coordenados cartesianos, la vara de calibración y el trazo de la trayectoria), se obtuvo el modelo matemático que mejor representó (según el criterio y conocimiento del estudiante) a la situación dada mediante la técnica de mínimos cuadrados en el ajuste de polinomios (que es uno de los temas del programa del curso de métodos numéricos) se contestó el reporte y finalmente se les pidió que prepararán una exposición del trabajo realizado.

Sesiones 3 y 4. Exposición de los trabajos realizados por cada grupo colaborativo.

Sesión 5. Grabación de nuevas situaciones (elegidas por los estudiantes) en el Coliseo Olímpico de CUCEI, y se les pidió que elaboraran un nuevo reporte enfocado a la nueva situación, manipularan el video en Tracker, obtuvieran los gráficos, datos y el modelo matemático.

Sesión 6. Entrega por grupo colaborativo del trabajo resultante en la Sesión 2, la presentación del trabajo (en PowerPoint), y el trabajo resultante de la sesión 5 en formato electrónico.

Cada una de las sesiones fue grabada para transcribir los diálogos más relevantes de los estudiantes.

RESULTADOS

Enseguida se muestra partes del reporte realizado por el grupo 2, correspondiente a la situación del tiro a canasta de basquetbol (Ver figura 3).

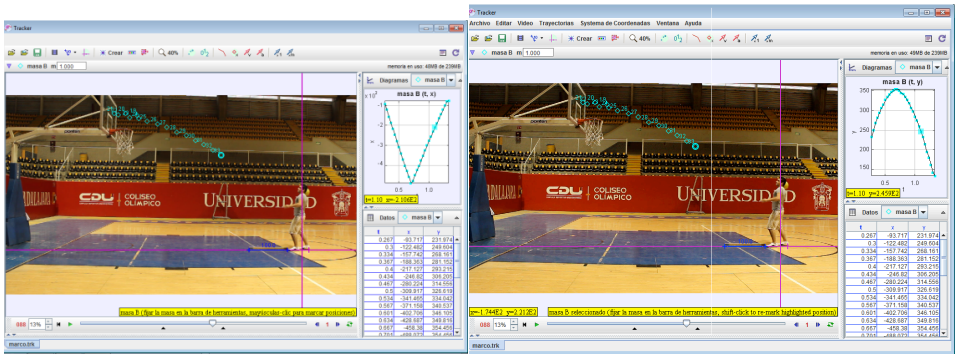
Figura 3. Lanzamiento del balón a una canasta de basquetbol

Descripción de la situación realizada por el grupo colaborativo. *"Se observa un sujeto frente a una canasta de baloncesto, éste tiene un balón en sus manos el cual es lanzado hacia el marco de la canasta, rebota y regresa.*

La situación describe un tiro parabólico con la diferencia de que en lugar de caer hasta el suelo golpea un tablero y regresa a su posición inicial por lo cual se puede observar que el balón tiene desplazamiento en el eje "x" y desplazamiento de altura en el eje y"

Trabajo realizado con el video de la situación en el programa Tracker (Ver figura 4).

Figura 4. Trabajo realizado en Tracker con el video del tiro de un balón a la canasta de Basquetbol.



Gráficos analizados por los integrantes del grupo colaborativo.

Descripción de la gráfica 1:

"en esta gráfica podemos observar los cambios de posición (distancia recorrida) en el eje "x" en cada intervalo de tiempo" (Ver figura 5).

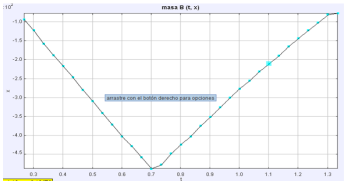
Descripción de la gráfica 2:

"En esta gráfica se observa los cambios de posición (altura) del balón en el eje "y" en cada intervalo de tiempo. Como se observa en la gráfica es un tiro parabólico" (Ver figura 6).

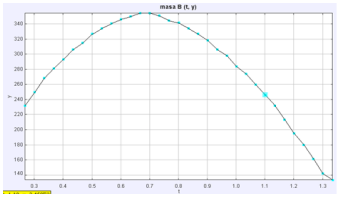
Descripción de la gráfica 3:

"en esta grafica se observa la altura alcanzada respecto con la distancia recorrida (el recorrido que apreciamos a simple vista) las cuales están ligadas ya que cuando el balón avanza cierta distancia aumenta su altura y al momento de hacer el choque comienza a disminuir la altura y la distancia recorrida" (Ver figura 7).

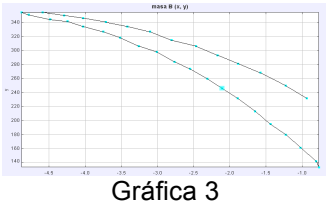
Figura 5. **Figura 6.** **Figura 7.**



Gráfica 1



Gráfica 2



Gráfica 3

Valores numéricos obtenidos en Tracker.

Figura 8. datos proporcionados por Tracker de la situación en cuestión.

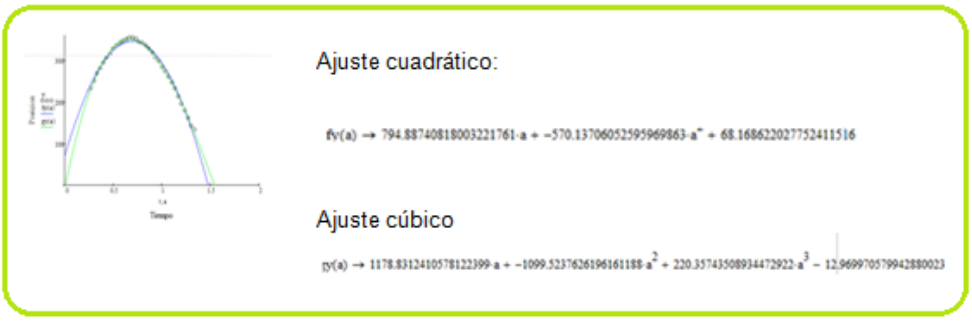
t	x	y
0.267	-93.717	231.974
0.3	-122.482	249.604
0.334	-157.742	268.161
0.367	-188.363	281.152
0.4	-217.127	293.215
0.434	-246.82	306.205
0.467	-280.224	314.556
0.5	-309.917	326.619
0.534	-341.465	334.042
0.567	-371.158	340.537
0.601	-402.706	346.105
0.634	-428.687	349.816
0.667	-458.38	354.456
0.701	-488.072	354.456
0.734	-477.866	350.744
0.767	-448.173	344.249
0.801	-424.048	341.465
0.834	-402.706	334.042
0.868	-374.869	326.619
0.901	-351.672	318.268
0.934	-325.691	306.205
0.968	-300.638	297.854
1.001	-276.513	283.936
1.034	-255.171	273.729
1.068	-231.046	259.81

Modelos matemáticos obtenidos.

El grupo colaborativo analizó cada una de las gráficas mostradas (1, 2 y 3) y relizaron el ajuste con la técnica de mínimos cuadrados con base en los datos proporcionados por Tracker (Ver figura 8).

Enseguida se muestra la comparación realizada por el grupo colaborativo (Ver figura 9) de los ajustes con los datos considerando el tiempo ***t*** y la distancia vertical **y**, (es decír, la gráfica 2).

Figura 9. Comparativo de la gráfica obtenida en Tracker (color negro), ajuste cuadrático (color azul), ajuste cúbico (color verde) y el correspondiente modelo matemático



Conclusiones del grupo colaborativo. *…"También hicimos el ajuste con un polinomio de grado 1, 2, 3, 4 y 5, pero vimos que el de grado 1 no se asemeja a nuestros datos y el de grado 2 es el mejor ajuste… Al analizar un segundo fenómeno podemos darnos cuenta de que un modelo matemático sea cual sea el caso o situación se ajusta para darnos resultados concisos los cuales nos pueden ayudar para hacer predicciones sobre que altura llevará el balón en cierto tiempo, qué distancia habrá recorrido una persona, etc.…"*

Se observa que en los fragmentos del reporte elaborado por el grupo colaborativo 2, aquí presentados, se maniefiestan los elementos de las representaciones semióticas en las dos transformaciones: tratamiento y conversión. La primera se manifiesta cuando calculan el ajuste con la técnica de mínimos cuadrados sin salir del registro analítico, y cuando a través de la misma situación obtienen gráficos diferentes al considerar los distintos parámetros (gráfica 1, 2 y 3) dentro

del registro gráfico, mientras que las conversiones se manifiestan a partir del registro verbal (descripción de la situación), hacia el registro numérico (obtención de datos proporcionados por Tracker), posteriormenete al registro gráfico (obtenidos en Tracker y los gráficos obtenidos mediante los ajustes) y finalmente al registro analítico (obtención del modelo matemático mediante el ajuste polinómico con la técnica de mínimos cuadrados).

Al analizar los reportes entregados, se observa que después de describir la situación en cuestión, fueron capaces de establecer sus propios parámetros e identificar cuáles de las gráficas tenía sentido analizar con mayor importancia, por ejemplo, en el movimiento del ciclista, el grupo expuso que los datos que trabajaron fueron la distancia horizontal y el tiempo porque la distancia vertical nunca cambiaria ya que el ciclista mediría lo mismo en todo momento, así que sólo analizaron, la gráfica distancia horizontal contra el tiempo, pero también durante la exposición identificaron otros factores que no tomaron en cuenta, enseguida se muestra un fragmento del diálogo:

Integrante1: *Puede ocurrir que el ciclista se canse o no este controlando bien la bicicleta o que no tenga bien ajustada la velocidad.*

Integrante 2: *También, es que creo, que es una bicicleta para hacer acrobacias (risas) y no puede aplicar (el ciclista) tanta velocidad a una bicicleta de ese estilo, tenía que haber sido una bicicleta especial para corredores que son más ligeras, que tienen las velocidades más blandas… que estén más ajustadas las velocidades.*

Profesora: *pero…aún con todo eso…si en nuestras manos estuviera evitar todos esos factores… ¿creen que el modelo matemático hubiera sido el mismo?...si la situación es la misma, ¿también hubieran obtenido una parábola?*

Todos: *Sí.*

Integrante 3: *Si hubiéramos resuelto todos esos problemas, que no se cansara ni nada, se supone que la aceleración tiene que ser constante y la gráfica obtenida seguiría siendo una parábola...*

Claramente se observa que aunque los alumnos identificaron otros factores, tienen la certeza que el tipo de modelo matemático no cambiaría de forma, aunque otra persona (delgada, alta, joven, adulto, hombre, mujer) fuera quien realizara el movimiento no dejaría de ser un movimiento parabólico, situación que propicia la aprehensión del conocimiento.

CONCLUSIONES

Las actividades que incluyen situaciones problema en materias de matemáticas permite efectuar tratamientos y conversiones para un mejor entendimiento de las matemáticas, junto con el empleo de la tecnología y el trabajo colaborativo propician al alumno a dejar el rol pasivo para tomar el rol activo en el propio aprendizaje ya que a través de su experiencia construyen conceptos y desarrolla habilidades; mediante la interacción con sus compañeros, se enriquecen y fortalecen las ideas, establecen acuerdos, relacionan los conocimientos adquiridos en el salón de clases, exponen argumentos, elaboran conclusiones y establecen relaciones con otras situaciones, por ejemplo, al exponer el grupo colaborativo 1, la profesora pregunta si es posible relacionar otra situación con un modelo matemático similar al obtenido con el tiro a canasta, a lo que un integrante responde:

Sí. Creemos que podría ser utilizado en otras situaciones como el lanzamiento de misiles para predecir sus trayectorias. En general, el tiro de canasta puede ser relacionado con cualquier situación que sea de tiro parabólico o movimiento de proyectiles.

Esto indica que es capaz de relacionar lo realizado con otras situaciones diferentes a las que ha trabajado, hecho que es muy importante al aprender matemáticas, ya que muchas veces los estudiantes aplican ciertas técnicas para resolver el problema, pero en otro contexto o en otra situación ya no lo hacen.

Con base en las entrevistas realizadas sobre el programa Tracker se concluye que el empleo del programa como recurso tecnológico motiva al alumno a aprender matemáticas, facilita la interpretación de datos y gráficos obtenidos a partir de situaciones cotidianas y fáciles de identificar para el estudiante, también le permite construir el conocimiento, a reflexionar sobre las técnicas empleadas, los parámetros y variables que intervienen en el análisis de un fenómeno en cuestión.

En términos generales les gustó mucho trabajar con el programa Tracker, ya que mencionan que sería muy útil en cursos en el área de física lo cual es significativo ya que motiva a seguir usando el programa. Además la participación de los estudiantes en la toma de videos en un ambiente como el Coliseo Olímpico del CUCEI en el cual pasan la mayor parte de su tiempo, los motiva y divierte pues aplican y relacionan las matemáticas con una situación tan simple como correr de un lado a otro, lanzar y patear un balón y andar en bicicleta, en las que encuentra la utilidad de conceptos y algoritmos matemáticos los cuáles no aplicaban en un contexto diferente al cual lo habían aprendido, objetivo se desea lograr durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimensión sémiotique de l'acitivité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. LSD2, IMAG, Université J. Fourier, Grenoble.

Córdoba, F. (2011). *La modelación matemática educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería.* Tesis de maestría. Instituto Politécnico Nacional. México. Distrito Federal.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Peter Lang.

Duval, R. (1999). *Semiósis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes Intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2004). *Los Problemas Fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las Formas Superiores en el Desarrollo Cognitivo*. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61,* 103-131. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z.

Ezquerra, A., Iturrioz, I., Díaz, M. (2011). Análisis experimental de magnitudes físicas a través de vídeos y su aplicación al aula. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias Universidad de Cádiz*. APAC-Eureka. ISSN: 1697-011X. DOI: 10498/14733.

Godino, J., Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3, 325-355.

Hitt, F. (2013). ¿Qué tecnología utilizar en el aula de matemáticas y por qué? *Revista Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de la Tecnología en Educación Matemática*, 1(1). 1-11.

Pantoja, R., Ulloa, R, Nesterova, E. (2013). La modelación matemática en situaciones cotidianas con software AVIMECA y MATHCAD. *Revista virtual GONDOLA*. ISSN 2145-4981 2010

LAS REPRESENTACIONES SEMIOTICAS AYUDAN A DESARROLLAR EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Jairo Alberto Garcia Pereira, Eliecer Aldana Bermúdez
Universidad del Quindío (Colombia)
jairoprofe@gmail.com, eliecerab@uniquindio.edu.co

Palabras clave: representaciones semióticas, análisis didáctico, pensamiento algebraico

Key words: semiotic representations, didactic analysis, algebraic thinking

RESUMEN: Este trabajo constituye un reporte parcial de investigación que plantea la implementación y desarrollo de secuencias didácticas, para comprender la forma como los estudiantes logran pasar de un pensamiento numérico a uno de tipo algebraico, mediante los registros de representación semiótica. El objetivo es comprender cuáles son las etapas que han superado estudiantes de grado octavo de escolaridad, desde el manejo del número en lo aritmético, hasta el aprendizaje e interpretación de expresiones algebraicas, para ello se utilizarán las diversas transformaciones semióticas de tratamiento y conversión, mediante la aplicación de la ingeniería didáctica como metodología. A partir de los resultados se pueda comprobar que los estudiantes pueden aprender e interpretar con mayor facilidad las aplicaciones algebraicas a partir de una adaptación curricular con la motivación y optimización de las prácticas educativas.

ABSTRACT: This paper is a partial research report presented by the implementation and development of teaching sequences to understand how students manage to pass a number of algebraic thinking one type by records of semiotic representation. The goal is to understand what are the stages that have passed eighth grade students of schooling, from managing the number in arithmetic, to learning and interpretation of algebraic expressions are, to do the various semiotic transformation of treatment and conversion they will be used by the application of engineering and teaching methodology. From the results can be proven that students can learn and interpret algebraic applications more easily from one educational program with motivation and optimization of educational practices.

INTRODUCCIÓN

La presente investigación se realiza luego de una larga experiencia en la enseñanza de las matemáticas en las aulas de clase; haremos una reflexión sobre nuestra práctica docente dirigiendo una mirada a la actuación de los alumnos frente a los contenidos matemáticos que nos hemos propuesto analizar en el paso de lo numérico a lo algebraico. Para lograr este objetivo nos apoyaremos en la Teoría de los Registros de las Representaciones Semióticas de Duval (1999), estudiaremos las dificultades procedimentales, cognitivas y aptitudinales que se presentan en el aprendizaje en la dicha transición. En nuestra experiencia en la enseñanza de las matemáticas, encontramos que las dificultades sobre la comprensión de las nociones matemáticas se presentan en el alumno. En la búsqueda de un marco teórico encontramos que la causa de estas dificultades según la teoría de Duval tienen dos fuentes principales: la complejidad de los tratamientos en los registros multifuncionales y la complejidad cognitiva de las conversiones de un registro a otro.

Una particularidad que tiene la matemática es que un objeto sólo puede describirse a través de alguna de sus representaciones o registros debido a que no se puede tener acceso directo al mismo mediante la percepción o por medio de una experiencia intuitiva inmediata. En este sentido, se requiere de un registro que permita realizar una serie de actividades cognitivas, a través de los cuales el estudiante pueda aproximarse a dicho objeto.

De acuerdo con (Duval, 2004), se distinguen dos tipos de operaciones cognitivas de representación en el pensamiento matemático: el tratamiento y la conversión. El tratamiento de una representación es la transformación de la misma en otra dentro del mismo registro donde ha sido formada. En cambio, la conversión requiere de un cambio de registro: es la transformación de una representación en otra, correspondiente a otro registro, en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial. Una exigencia básica para la comprensión de un concepto matemático por parte de un estudiante es la coordinación o articulación entre sus diferentes representaciones. Es decir, se puede afirmar que un alumno ha comprendido un concepto cuando éste manifieste que ha enriquecido sus redes internas de conocimiento. Y esta manifestación sólo puede hacerse a través de los sistemas de representación y mediante las actividades asociadas a los mismos. Por lo tanto, la coordinación de registros no es la consecuencia del entendimiento matemático sino que es una condición esencial debido a que cada sistema de representación permite ver una faceta diferente del objeto a estudiar y pone de manifiesto algunas de sus propiedades relevantes.

Los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción, consecuentemente se hace necesario tener representaciones de los mismos. Como lo señala el mismo (Duval, 2000, p.4) "... el uso de sistemas de representaciones semióticas para el pensamiento matemático es esencial, debido a que a diferencia de otros campos de conocimiento (botánica, geología, astronomía, física), no existen otras maneras de ganar acceso a los objetos matemáticos sin producir algunas representaciones semióticas".

PLANTEAMIENTO Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Según el Informe (Cockcroft, 1985, p. 4), "la notación simbólica que capacita a las matemáticas para que se usen como medio de comunicación, y que ayuda a hacerlas "útiles", puede también hacer las matemáticas difíciles de entender y usar". En su estructura, el álgebra como lenguaje

encierra los conceptos de variabilidad y generalización de la aritmética, que hacen, que su comprensión, presente una serie de dificultades al interiorizar los conceptos algebraicos que deben estructurar la formación académica de estudiantes hoy en día. “El álgebra parece ser fuente de gran confusión y de las actitudes negativas de muchos alumnos” (Cockcroft, 1985, p. 4).

> El conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental del álgebra se apoyan enriqueciéndose mutuamente, pues el conocimiento conceptual se beneficia del conocimiento procedimental en que los símbolos mejoran los conceptos y pueden generarlos, mientras que el conocimiento procedimental se beneficia del conocimiento conceptual en que los símbolos adquieren significado y se retienen y aplican más fácilmente los procedimientos *(Hiebert y Lefevre, 1986, p. 8).*

Diferentes autores (Kieran, 1992; Kieran y Filloy, 1989; MacGregor y Stacey, 1993; Gallardo, A., & Pizón, M. 2000) señalan las siguientes dificultades de los alumnos en la transición de la aritmética al algebra; a) *Generalización equivocada de procedimientos aritméticos*: Haber aprendido a pensar y operar con símbolos numéricos dificulta la comprensión de la operación con letras y las reglas de operación en las ecuaciones. b) *Resistencia a emplear ecuaciones*: los alumnos primero los resuelven con una operación aritmética y luego intentar adivinar la ecuación, pero sin comprender cabalmente el significado de esta. c) *Dificultades en el empleo de los signos y expresiones:* Dos dificultades centrales en el aprendizaje del algebra son la “condensación” (cuando se tiene más de un significado para una expresión) y la “evaporación” (una pérdida del significado de los símbolos). d) *Dificultades para expresar formalmente los métodos y procedimientos que se usan para resolver problema:* La confianza en métodos intuitivos y que se centren en conseguir “de alguna forma” la respuesta va en contra de que vean las relaciones enunciadas en el problema y de que sistematicen su método de solución. e) *Equivocaciones en la interpretación de las variables:* La experiencia de los estudiantes en la escuela con las letras de ecuaciones se reduce a fórmulas como $A = b \times h$; esto puede provocar que los alumnos traten las letras en ecuaciones como incógnitas con un valor fijo, más que como números generalizados o como variables. f) *Desconocimiento del significado de la igualdad*: Los alumnos manejan el signo de igual como una señal de hacer algo e ignoran el significado de la igualdad como un equilibrio entre los dos miembros de la ecuación. g) *Omisión parcial de la incógnita:* Los estudiantes no perciben la incógnita en el segundo miembro en ecuaciones; por ejemplo, en $x + 2x = 3 + x$ ignoran la x del miembro derecho y presentan $3x = 3$ como resultado de la ecuación anterior. h) *Interpretación equivocada de la concatenación de términos algebraicos:* La concatenación en aritmética denota adición; por ejemplo, 45 significa 40 + 5; sin embargo, en algebra se refiere a la multiplicación, por ejemplo $5b$ es $5 \times b$, lo que confunde a los estudiantes. i) *Conjunción de términos no semejantes:* En algebra los términos diferentes deben tratarse en forma independiente; es común que el estudiante ignore las diferencias; por ejemplo, en $3 + 5x = 8x$ los estudiantes consideran como semejantes las expresiones 3 y $5x$. j) *Inversión incorrecta de operaciones:* Los estudiantes desconocen el procedimiento que lleva a la transposición de términos en una ecuación o bien la realizan con una regla incorrecta.

Estos y otros problemáticas son tan frecuentes en muchos de nuestros estudiantes, a lo largo de su educación secundaria. En el paso de lo numérico (la aritmética) a lo algebraico, así como el dominio significativo de los conceptos aritméticos, será fundamental a la hora de reducir estas deficiencias. Pero no debemos olvidar que no se trata de evitar el error sino de provocar la

discusión acerca de los mismos para comprender la conveniencia o inconveniencia de ciertos procedimientos.

MARCO REFERENCIAL CONCEPTUAL

En este estudio se toma como referencia los sistemas semióticos de representación de (Duval 2004, p.25), quien afirma que "No es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación. […] porque no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación". El manejo de los conceptos relacionados con el número y su transición al algebra hacen que el educando utilice variadas representaciones (verbal, algebraica, diagrama, gráfica) de correspondencia y articulación entre ellas.

El aprendizaje del algebra escolar genera en los estudiantes muchas *dificultades* que tienen que ver con la complejidad de los objetos del algebra, con los procesos de pensamiento algebraico, con el desarrollo cognitivo de los estudiantes, con los métodos de enseñanza y con actitudes afectivas hacia el álgebra, que se conectan en redes que se concretan y se manifiestan dificultades, que se pueden abordar desde varias perspectivas. Asociadas a *la complejidad de los objetivos del algebra*. Estos operan a dos niveles, el nivel semántico: los signos son dados con un significado claro y preciso, el nivel sintáctico: los signos pueden ser operados mediante reglas sin referencia directa a ningún significado, estos dos aspectos son los que ponen de manifiestos la naturaleza abstracta y complejidad de los conceptos matemáticos. Asociadas a *los procesos de pensamiento en algebra*, ponen de manifiesto la naturaleza lógica del algebra. Asociadas a *los procesos de enseñanza*, tienen que ver con la institución, con el currículo y los métodos de enseñanza. Asociadas a *los procesos de desarrollo cognitivo de los estudiantes*, tiene que ver con los estadios generales del desarrollo intelectual.

Por otra parte el desarrollo del pensamiento matemático está lleno de obstáculos caracterizados como *epistemológicos*. Sin embargo estos no están especificados en términos de experiencia de enseñanzas regladas y organizadas en el sistema educativo; en el sistema escolar pueden originar obstáculos que podemos caracterizar como *didácticos*. Ahora bien, la adquisición por parte del estudiante de nuevos esquemas conceptuales, está salpicando de obstáculos que podemos considerar *cognitivos*.

METODOLOGÍA

La metodología de investigación es de tipo cualitativa, porque se trata es describir e interpretar la forma como los 30 estudiantes de un colegio de la ciudad de Cali-Colombia, de estrato 3, llegan a la comprensión de un concepto matemático. De acuerdo con (Bisquerra, R. 2009), una metodología cualitativa e interpretativa tiene como objetivo explorar las relaciones sociales y describir la realidad tal como la experimentan los sujetos de estudio, sus métodos nos permitirán seleccionar el camino para obtener la información confiable, que se acople a los requerimientos que demanda la ciencia. Se utilizó la técnica de campo que permite la observación en contacto directo con el objeto de estudio, y el acopio de información a través de test, secuencias de trabajo y entrevistas semiestructuradas, que permitan confrontar la teoría con la práctica en la búsqueda de la verdad objetiva.

Y para lograrlo nos apoyaremos en la Ingeniería Didáctica, que se sustenta en la teoría de situaciones didácticas (Brousseau,1997) y la teoría de la transposición didáctica (Chevallard,1991). En su proceso metodológico se distinguen cuatro fases: 1. análisis preliminares, 2. diseño y análisis a priori de las situaciones, 3. Experimentación y 4. análisis a posteriori y evaluación, de tipo cualitativa, descriptiva, basada en los sistemas semióticos de representación de Duval, con estudiantes de educación básica secundaria; por ello se han utilizado las secuencias de enseñanza en clase y los registros del desempeño de los estudiantes en las clase, mediante las fases siguientes: a) explicación de conceptos aritméticos relacionados con noción de expresión algebraica, b) conformación de grupos aleatorios c) planteamiento de situaciones problemas, d) metacognición por los estudiantes, d) trabajo individual de los estudiantes en registros de representación gráfico e) cambio de registro de representación gráfico al algebraico. En su proceso metodológico se distinguen cuatro fases: 1. Análisis preliminares, 2. Diseño y análisis a priori de las situaciones, 3. Experimentación y 4. Análisis a posteriori y evaluación.

ANÁLISIS DE DATOS

Para el análisis se tuvo en cuenta las fases planteadas en el diseño metodológico, durante la primera fase: *Los análisis preliminares*, que están constituidos a su vez por un conjunto de análisis a saber: el análisis de la enseñanza de las matemáticas y sus efectos, el análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución, análisis de restricciones donde se va situar la realización efectiva y finalmente los objetivos de la investigación.

En el primer análisis nos referimos a la descripción de las formas, técnicas o métodos de enseñanza, a las concepciones predominantes de lo que es la enseñanza, las estrategias de los profesores para el logro de la asimilación de los objetos matemáticos, las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución, las cuales se han compilado en forma general, relacionada con sus competencias, aptitudes o actitudes que se detectaron como resultados de otras investigaciones.

Finalmente, en esta etapa, se hace el análisis en cuanto a las formas o lugares en las que se ha dado el conocimiento de la matemática, así como las formas o métodos de su validación, también desde un enfoque cognitivo permitió distinguir o las concepciones, las características, estrategias, deficiencias o dificultades que los estudiantes tienen respecto al objeto matemático que motiva esta investigación, el tercer enfoque de este mismo análisis se hace desde el campo de lo didáctico, nos permite incidir en la forma como se ha tratado el objeto matemático en el ambiente educativo, las convenciones o desventajas, así como los conceptos o competencias que están presentes o ausentes de la actividad de aprendizaje.

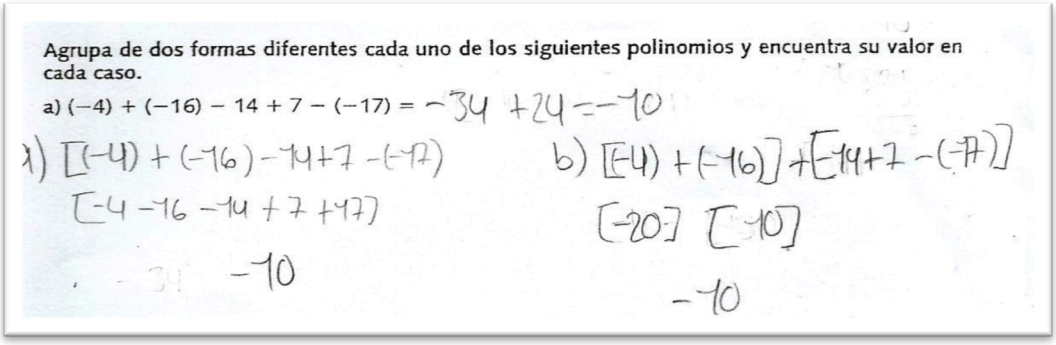
El diseño y análisis a priori de las situaciones, en esta segunda etapa de la ingeniería didáctica implico el análisis de las consideraciones asociadas al objeto matemático de estudio, para la estructuración, forma y dimensión de la estrategia didáctica, así como las variables, los medios o herramientas para el logro los objetivos, por otra parte el establecimiento de las reacciones, actitudes, habilidades y aptitudes que esperamos de los estudiantes frente a la estrategia didáctica.

En *la Experimentación*, tercera etapa de esta metodología, colocamos en marcha de la estrategia didáctica diseñada, en esta explicaremos las condiciones en las que se llevó a la práctica: el lugar,

las actividades curriculares, los alumnos, la duración, los momentos y la dinámica que se siguió para lograr en los estudiantes el desarrollo del pensamiento algebraico.

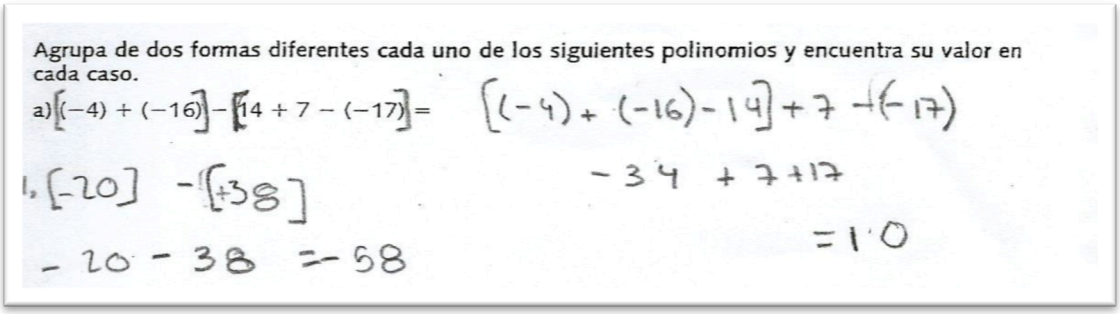
La última etapa, *Análisis a posteriori y evaluación* de la ingeniería didáctica, al momento de la elaboración de este artículo no se había desarrollado, por lo cual tomaremos como referencia los ejemplos de preguntas que corresponden a una prueba de a-priori, donde se trata de conocer los conocimiento que tienen los estudiantes sobre algunos conceptos algebraicos y el tratamiento que le dan, en relación con la apropiación de las propiedades de la aritmética, la comprensión de la igualdad en varios contextos matemáticos y la aplicación de las variables.

Grafico 1. Respuesta de un estudiante (E1)



Fuente: libro de Santillana 7

Grafico 2. Respuesta de un estudiante (E2).



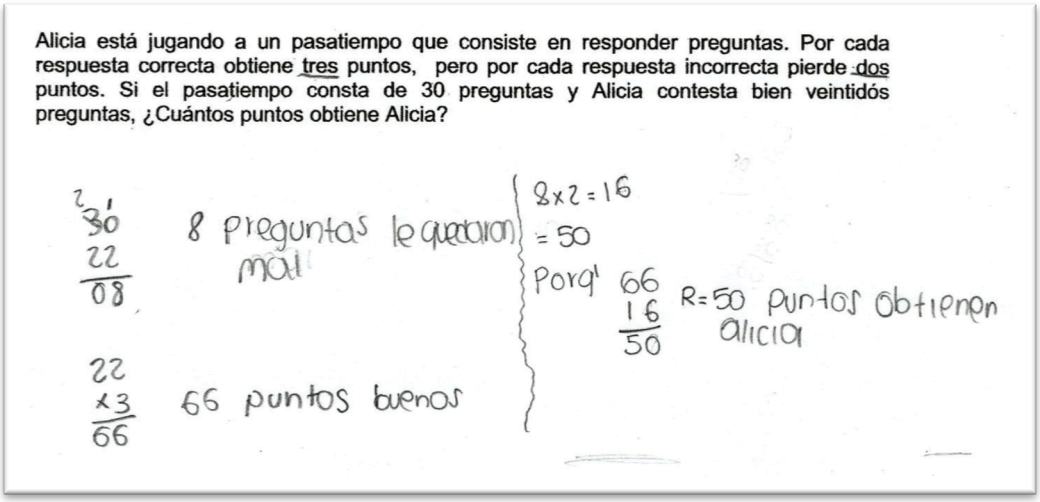
Fuente: libro de Santillana 7

De un grupo de estudiantes de grado octavo, al que se la aplicó la prueba a-priori, presentamos dos estudiantes, a los que se le indicó resolver la pregunta teniendo en cuanta lo aprendido en los grados anteriores y encontramos como las respuesta de **E1** y **E2** son totalmente diferentes, en **E1** se nota la apropiación de conceptos aritméticas relacionados con las propiedades de agrupación, que le permitieron concluir que así agrupara de dos formas diferentes la expresión el resultado deberá ser igual. Mientras que **E2**, cumplió la consigna de agrupar la expresión de dos formas diferentes, pero no se percató del hecho, de que por cada forma de agrupación le dio una respuesta diferente.

Lo cual nos permitió corroborar uno de los aspectos tratados en el planteamiento del problema al inicio del presente artículo y que se relaciona con la no aplicación correcta de los procesos de agrupación, que forma parte de los preconceptos que un estudiante debe tener para iniciar la comprensión de las operaciones con expresiones algebraicas.

En otro punto de la prueba planteamos la siguiente pregunta.

Grafico 3. Respuesta de un estudiante (E1)



En esta pregunta vemos como **E1** centra su proceso de solución del problema, en aplicación de procedimientos fundamentados en operaciones aritméticas como son la suma, resta y multiplicación, no se observa la incorporación de variables como una estrategia válida para encontrar la solución del problema planteado

Las demás etapas de la investigación están en proceso de ejecución y no se tiene datos que nos permitan establecer un comentario, pero se espera lograr en la segunda fase, la conformación de grupos aleatorios, dichos grupos son formados por filas sin tener en cuenta características de afinidad, ni desempeño académico. Es en esta fase se nombra un monitor por cada grupo conformado, en la tercera fase se plantean problemas de diversas situaciones, los cuales pueden ser contextualizados y en la cuarta fase los estudiantes analizan e interpretan. Este proceso consiste en realizar los aportes personales, teniendo en cuenta conceptos aprendidos.

CONCLUSIONES

De los resultados obtenidos por los diferentes instrumentos podemos afirmar que se confirman las dificultades y obstáculos relacionados en otras investigaciones frente al proceso de construcción conceptual y procedimental, de los objetos matemáticos que no les permiten comprender temas de mayor complejidad algebraica.

El acercamiento semiótico al lenguaje algebraico, mediante la integración de textos problema que permitan la conjugar lo numérico y lo geométrico donde las fuentes de significado y los sistemas de representación semióticas de tratamiento y conversión como las planteadas por Raymond Duval

(1999), solidados en una secuencias didáctica constituyen un enfoque coherente para la consolidación del pensamiento algebraico.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bisquerra, R. (2009). *Metodología de la Investigación Educativa.* Madrid: La Muralla

Brousseau, G. (1997). *Research in mathematical education*, Regular Lecture en el 10th. International Congress on Mathematics Education (ICME10). Dinamarca.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique*. Du savoir savant au savoir enseigné. (2a Edición en colaboración con Marie-Alberte Joshua), Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage, Editions.

Cockcroft,W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan*. Informe Cockcroft. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (Traducción de Miryam Vega). Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2000), *Basic Issues for Research in Mathematics Education (Plenary Address)*, Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychologie of Mathematics Education (tome I), Editors: Taddao Nakahara an Masataka Koyama, Hiroshima University (Japan), pp. 55-69.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano Registros Semióticos y Apendizajes Intelectuales*. Santiago de Cali: PeterLang S.A.

Gallardo, A., y Pizón, M. (2000). *Semantica versus sintaxis en la resolución de ecuaciones lineales*. Educación matemática, 12(2), 81.

Hiebert, J.; y Lefevre, P. (1986). Conc*eptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis*, en Hiebert, J. (Ed.). Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1992). *The learning and teaching of school algebra*, in D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). *El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. Enseñanza de las Ciencias*, 7 (3), 229- 240.

MacGregor, M.; Stacey, K. (1993). *Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations*. Journal for Research in Mathematics Education, 24 (3), 217-232.

UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS TRANSFORMADA EM PRÁTICA DOCENTE

Cláudia Maria Pinotti de Almeida, Nielce Meneguelo Lobo da Costa, Rosana Jorge Monteiro Magni
Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil)
claudiapalmeida@professor.sp.gov.br; nielce.lobo@gmail.com; rosanamagni@ig.com.br

Palavras chave: sólidos geométricos, pirâmides, prismas, classificação, planificação.

Key words: geometric solids, pyramids, prisms, classification, planning.

RESUMO: Este relato apresenta a discussão ocorrida com um grupo de professores do Ensino Fundamental sobre uma prática docente envolvendo o estudo de Sólidos Geométricos. O plano de aula discutido evidencia como desenvolver as atividades voltadas para a participação e descobertas dos alunos através da manipulação, observação, classificação e planificação de figuras geométricas, com apoio da Teoria de Van Hiele. Ao longo das discussões foram descritos os resultados sobre o aprendizado e a participação dos alunos para o grupo e foi possível, a partir da prática docente discutida, compartilhar e construir conhecimentos pedagógicos.

ABSTRACT: This report presents the discussion that took place with a elementary school teachers group on a teaching practice involving the study of Geometric Solids . The lesson plan discussed shows how to develop activities for the participation and discoveries of students through manipulation, observation , classification and planning of geometric figures , with support from the Van Hiele Model . Throughout the discussions were described results on learning and student participation to the group. and it was possible, from the discussed teaching practice, share and build teaching skills.

INTRODUÇÃO

Este é um relato de uma prática docente que aborda o conteúdo de Sólidos Geométricos apresentado para discussão em um grupo de estudos, composto por cinco professoras de Matemática do Ensino Fundamental da rede estadual de ensino de São Paulo, uma pesquisadora e uma formadora da universidade.

Esse grupo se reunia para discutir, analisar e criar atividades para um ensino de matemática que levasse à participação ativa e investigativa dos alunos. Em um dos encontros do grupo, foi sugerida a escolha de uma prática de qualquer das participantes, considerada significativa para ser desenvolvida em sala de aula; por ter envolvido a maioria dos alunos e apresentar potencial para gerar conhecimentos. Tais quesitos deveriam ter sido percebidos pelas observações e discussões ocorridas nas aulas de matemática ao longo da aplicação dessa prática. A partir da escolha, tal prática seria discutida no grupo de estudos, de modo que se pudesse: (1) analisar a dinâmica da aula proposta; (2) discutir o que poderia ser acrescentado no conteúdo para aquela turma; (3) analisar a adequação da abordagem do conteúdo com o nível educativo dos alunos; (4) conhecer e discutir as dúvidas das professoras sobre o conteúdo escolhido ou o plano de aula apresentado. A prática escolhida para a discussão no grupo, da professora “A”, foi a denominada: “Sólidos Geométricos”.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Esta prática baseou-se na teoria de Van Hiele (1986) que sugere cinco níveis hierárquicos de aprendizagem em Geometria, são eles: Básico (Reconhecimento); Nível 1 (Análise); Nível 2 (Síntese ou abstração); Nível 3 (Dedução) e Nível 4 (Rigor). O Nível Básico corresponde àquele em que o aluno identifica, compara e nomeia as figuras geométricas de acordo com sua aparência passando pelas seguintes fases: informação, orientação guiada, explicitação, orientação livre e integração. O Nível 1 corresponde à análise das figuras em termos de suas propriedades, de seus componentes, utilizando-as para resolver problemas. O Nível 2 destaca-se pela necessidade de uma definição precisa, de síntese ou abstração. O Nível 3 corresponde ao domínio do processo dedutivo e o Nível 4 se identifica no rigor nas demonstrações e ou comparações. Nessa prática foram envolvidos o Nível Básico e o Nível 1.

METODOLOGIA

A discussão da prática com o grupo foi iniciada pelo relato do ocorrido em classe: apresentação do plano da aula, seus objetivos, forma de aplicação do plano, etapas de desenvolvimento e comentários sobre a participação e desempenho dos alunos. Na sequência, as participantes do grupo passaram pela experiência como se estivessem no papel de alunas e discutiram a teoria que embasa essa prática, assim como detalhes didáticos e pedagógicos a ela ligados.

DESENVOLVIMENTO DA PRÁTICA

A prática sobre Sólidos Geométricos partiu de um plano de aula, baseado na teoria de Van Hiele (ver anexo 1). Segundo a professora “A”, os níveis de compreensão mencionados nessa teoria colaboraram para organizar cada etapa da atividade. Ela acredita que essa teoria pode ajudar os

professores a entenderem como desenvolver o trabalho em classes de 6º e 7º ano do Ensino Fundamental. A aula foi iniciada entregando os sólidos aos alunos, que os manipularam e trocaram entre si, de modo a desenvolverem o que Van Hiele classifica como Nível Básico de conhecimento. Nesse sentido, o plano de aula contemplou o uso de muitos sólidos geométricos para que os estudantes pudessem "ver as figuras com as mãos", pois a manipulação colabora na transposição do concreto para o abstrato e a presença dos sólidos geométricos permite também a identificação de outras situações do dia a dia dos estudantes em que esses sólidos aparecem, como por exemplo, uma caixa de creme dental. Nessa etapa a professora "A" relatou que alguns dos alunos souberam nomear certos Sólidos corretamente, mas o que percebeu foi que a maioria não os conhecia. O Nível Básico de conhecimento refere-se à visualização, sendo o momento em que o aluno identifica, compara e nomeia as figuras geométricas de acordo com sua aparência passando pelas fases: informação, orientação guiada, explicitação, orientação livre e integração.

Figura 1. Manipulação dos Sólidos Geométricos –

Fonte: Acervo pessoal – São Paulo.

Após a manipulação dos Sólidos (figura 1) a professora "A" relatou que iniciou uma conversa com os alunos para saber se já tinham visto ou conheciam os Sólidos que circulavam pela sala e também seus nomes, sem revelar a eles o nome de cada um dos Sólidos neste momento.

Nessa conversa, muitos alunos mencionaram casquinha de sorvete, dado, caixa de creme dental, caixa de sapato, embalagem do chocolate "Toblerone" e alguns falaram o nome correto dos Sólidos, principalmente o das pirâmides, sem se referirem, entretanto, ao polígono da base.

Após se familiarizarem com os Sólidos, a professora "A" solicitou aos alunos que os colocassem em cima de uma mesa e propôs que estes fossem divididos em dois conjuntos, justificando o critério usado para a divisão. A ideia é que entre os critérios surgisse o da separação de corpos redondos dos poliedros.

Nesse momento do relato para o grupo, a professora "A" comentou que, se esse critério não surgir, pode-se fazer esse tipo de separação e perguntar para a classe se alguém sabe qual foi o critério usado. Na aplicação da prática pela professora "A" um aluno disse: *"Essas figuras tem um círculo"*.

Nesse momento a professora apresentou aos alunos os corpos redondos e perguntou, mostrando os Sólidos para a classe, se eles sabiam os nomes dos corpos redondos, e alguém respondeu: *"Cone e cilindro".* Para prosseguir a professora lançou outra pergunta para a classe: *"Se esses são corpos redondos, qual o outro que está faltando?"* Muitos responderam que é a bola e poucos disseram esfera. Depois os corpos redondos foram guardados, restando os poliedros na mesa, que na verdade era o foco da aula. A professora explicou à classe que os Sólidos sobre a mesa são poliedros, explicou o significado da palavra poliedro e foi analisando com os alunos suas características, ou seja, seus elementos: vértice, faces e arestas.

Novamente distribui os poliedros para a classe e pede para identificar em cada um deles os elementos, de modo a que desenvolvessem o Nível 1 de conhecimento, segundo Van Hiele. Algumas perguntas foram feitas, como por exemplo: *"Qual a figura com menor número de faces? Quais figuras têm todas as faces triangulares? Quais figuras têm todas as faces quadradas?".* A professora "A" relatou que pediu novamente aos alunos que dividissem os poliedros que estão na mesa em dois grupos. Neste segundo momento alguns alunos se sentiram mais à vontade para separarem os poliedros, mas não souberam justificar o critério de separação em dois conjuntos. A ideia da professora A era que eles separassem os poliedros de Platão (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro). Notou que alguns dos alunos separaram as pirâmides das outras figuras e ficaram na dúvida se colocavam o octaedro ou não no conjunto. Neste aspecto, a professora "A" solicitou aos alunos que pesquisassem sobre os Poliedros de Platão e enfatizou para o grupo a importância de estabelecer a nomenclatura correta com os alunos, por exemplo: as faces dos poliedros são formadas por polígonos, pois os alunos confundem esses nomes. A professora "A" perguntou novamente aos alunos que critério foi usado na separação das figuras e eles responderam mostrando que todas as faces são formadas pelo mesmo polígono e orientou a classe até que percebessem que de cada vértice sai o mesmo número de arestas.

Os poliedros de Platão foram guardados e novamente foi pedido para que separassem as figuras espaciais em dois conjuntos. Dessa vez os alunos se sentiam cada vez mais à vontade para tentar e dessa vez aparecem muitos alunos. A separação em dois conjuntos aconteceu, mas ficou a dúvida em relação ao prisma de base triangular, pois o colocaram junto com as pirâmides por ter faces triangulares. Alguns alunos questionaram porque o tetraedro foi incluído no conjunto dos poliedros. Nem todos os alunos perceberam que os prismas têm duas bases paralelas, diferentemente das pirâmides.

Na próxima etapa, a professora "A" pediu que os alunos observassem as figuras e identificassem as características comuns para as pirâmides e para os prismas. Assim, ela foi anotando na lousa o que os alunos diziam para construir com eles uma definição de pirâmide e de prisma. Novamente estava sendo trabalhada a construção de conhecimento no Nível 1 de Van Hiele. A professora pôde "mostrar", por exemplo, que os prismas são o empilhamento de polígonos congruentes e que possuem duas bases paralelas. Neste momento, segundo a professora "A" relatou ao grupo, a maioria dos alunos percebeu que o prisma de base triangular não é uma pirâmide.

A etapa seguinte foi classificar as pirâmides e os prismas em relação ao número de vértices, faces e arestas, sempre com os alunos tendo as figuras em suas mãos. A professora "A" fez uma tabela onde estão separadas as pirâmides dos prismas (ver plano de aula – anexo1), seus respectivos vértices, faces e arestas e uma coluna para o número de lados do polígono da base. As figuras foram distribuídas e os alunos foram preenchendo essa tabela de acordo com as figuras que

estavam manipulando. Na tabela há referência a pirâmides e prismas de base heptagonal e octogonal que não estão entre os 20 sólidos manipulados e inicialmente distribuídos, mas pelo que preencheram da tabela e observaram das outras figuras perceberam e contaram mentalmente a quantidade de vértices, faces e arestas para essas figuras imaginadas mentalmente. Esse foi o momento em que a professora "A" observou que os alunos estavam passando de percepção concreta para a abstração. A última linha da tabela (ver anexo 1) é uma generalização em relação ao número de lados do polígono da base "n". A primeira generalização, a professora "A" orientou os alunos para que entendessem o raciocínio e pudessem preencher as outras linhas. Os alunos preencheram a tabela e em seguida realizam cálculos sobre número de vértices, faces e arestas. Para finalizar, a professora "A" distribuiu as figuras de maneira aleatória, as pirâmides e os prismas, entre os alunos, solicitou que fosse feita a planificação das figuras espaciais. Surgiu a ideia de se colocar o Sólido no papel, desenhar seu contorno e ir girando-o para desenhar todas as suas faces mostrando como fica a planificação das pirâmides e dos prismas sem "desmontar" o Sólido. Ocorreu que alguns alunos planificaram a pirâmide como uma flor, ou seja, desenharam a base e em cada aresta da base, o triângulo. Na planificação foi pedido que o aluno escrevesse o nome do poliedro e dos polígonos que compõem suas faces.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante a apresentação da professora "A", o grupo fez diversas perguntas sobre a mediação da aula, especialmente quanto ao fato da prática descrita se iniciar com a participação e observações dos alunos. Ao analisarem a dinâmica da aula proposta discutiram quais as dúvidas que surgiram no desenvolvimento da aplicação da atividade com os Sólidos. A professora "A" relatou que por ser uma aula com a participação significativa dos alunos foi necessário organizar bem a atividade, pois há vários momentos em que eles irão falar o que estão observando, discutir as informações, as ideias; e há momentos em que o professor terá que organizar as informações para que sejam formalizadas e anotadas pela classe, como por exemplo, as diferenças entre as pirâmides e os prismas.

Esse tipo de aula para os alunos também é diferente, pois o que acontece usualmente são os professores exporem o conteúdo na lousa para que copiem. Como a aula teve a participação dos alunos a todo o momento, o professor pôde avaliar o desempenho destes durante as aulas em que o conteúdo for apresentado, como por exemplo: a discussão dos argumentos para a separação em dois grupos das figuras, os exercícios sobre seus elementos e a planificação. Na sequência o grupo discutiu o que mais poderia ser explorado quanto aos Sólidos com aquela turma e concluiu que a abordagem foi adequada ao nível de conhecimento dos alunos. A professora "A" ao discutir no grupo sua experiência de ensino dos Sólidos Geométricos transformada em prática docente, considerada bem-sucedida por ela, compartilhou os conhecimentos pedagógicos construídos; assim possibilitou a construção de conhecimentos e a condução de uma atividade apoiada na Teoria de Van Hiele.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

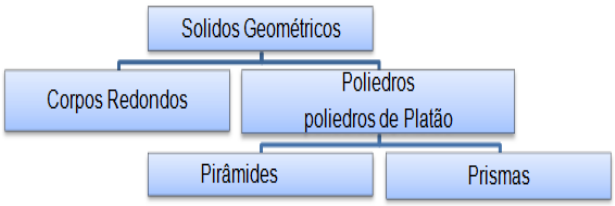
Pires, C. M., Curi, E., Campos, T. M. (2000). *Espaço e Forma: a construção de noções geométricas pelas crianças das quatro séries iniciais do ensino fundamental.* São Paulo: Proem.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: a theory of mathematics education.* New York: Academic Press.

ANEXO 1 - PLANO DE AULA: SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Justificativa: Os alunos precisam ser apresentados às figuras geométricas de uma forma concreta, ou seja, precisam ver as figuras "com as mãos", reconhecê-las em outros contextos (como, por exemplo, em embalagens), observar suas características e assim conseguirem transpor do concreto para o abstrato e assim imaginarem uma figura ou fazer generalizações a partir de figuras conhecidas. Esta atividade é proposta para os 6º e 7º anos do Ensino Fundamental.

Objetivo:



- Apresentar os sólidos, separando-os em dois conjuntos até chegar aos poliedros;

- Separar os poliedros em pirâmides e prismas;

- Fazer o levantamento das características de cada um;

- Apresentar seus elementos (vértices faces e arestas);

- Fazer a classificação desses elementos a partir do polígono da base e a generalização para o cálculo de vértices, faces e arestas; e

- Fazer as planificações dos prismas e pirâmides.

Cronograma: (Algumas etapas podem durar mais que uma aula)

– Conhecendo os sólidos – manipulação dos sólidos e perguntas sobre as figuras;

– Separação dos Sólidos em conjuntos (ver organograma);

– Estudo dos Poliedros e seus elementos (vértices, faces e arestas);

– Estudo das Pirâmides e dos Prismas – levantamento de suas características;

– Classificação das pirâmides e dos prismas em relação à base;

– Exercícios: pirâmides e prismas cálculo de números de vértices, faces e arestas;

– Pirâmides e prismas – projeção dos seus elementos (carimbo);

– Pirâmides e prismas – planificação a partir do sólido.

Pré-Requisitos: Para os alunos estudarem os sólidos geométricos precisam conhecer os polígonos, seus nomes e seus elementos.

Metodologia: Distribuindo os sólidos para os alunos observarem e com os pré-requisitos citados, sugerimos as seguintes etapas:

I - Conhecer os Sólidos (manipulação)

1. O que você entende por sólido geométrico?
2. Observe o formato do sólido. Quais são parecidos?
3. Você já viu figuras parecidas com estas? Onde?
4. Que nome daria para cada uma das figuras?

II - Separar os Sólidos em grupos

1. Oriente os alunos para separar os sólidos em dois grupos;
2. Pergunte por que separaram dessa maneira;
3. Em cada grupo de sólido separado informar o nome das figuras;

(O professor discutirá com a classe a separação apresentada pelos alunos para se chegar a um consenso, porém se não conseguirem separar em dois grupos o professor o fará, perguntando aos alunos qual critério usaram)

III - Os Poliedros e seus elementos

1. O que une duas figuras?
2. O que une três ou mais figuras?
3. Quais os polígonos que se observam na figura?
4. Quais os elementos que foram carimbados?

IV – Classificação das Pirâmides e dos Prismas

A partir dos elementos e características dos poliedros, construir uma definição para pirâmides e prismas com os alunos e fazer uma tabela para classificá-los. Também podem ser feitos exercícios depois da classificação.

	PIRÂMIDES			PRISMAS		
Base n - número lados	Vértices	Faces	Arestas	Vértices	Faces	Arestas
Triangular – 3						
Quadrangular - 4						
Pentagonal – 5						
Hexagonal – 6						
Heptagonal – 7						
Octogonal – 8						
Generalização						

V - Planificação dos Prismas e Pirâmides:

Entregar para as duplas de alunos uma folha de papel, uma pirâmide ou um prisma e pedir para fazerem a planificação sem abrir a figura. Pedir para colocarem o nome da figura, os números de vértices, faces e arestas e o nome dos polígonos que compõem suas faces.

VI - Material: prancha com os 20 sólidos geométricos

As figuras foram montadas para serem apresentadas aos alunos prontas: cone, cilindro, pirâmide de base triangular, tetraedro, pirâmide de base quadrada, pirâmide de base retangular, pirâmide de base pentagonal, pirâmide de base hexagonal, prisma obliquo de base quadrada, prisma de base triangular, cubo, paralelepípedo, prisma de base trapezoidal, prisma de base losangular, prismas de base pentagonal, prisma de base hexagonal, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

COMPRENSIÓN DEL ENFOQUE FRECUENCIAL DE PROBABILIDAD AL INICIO DEL BACHILLERATO TECNOLÓGICO

Rogelio Martínez García, Ana María Ojeda Salazar
CECyT No 4 "Lázaro Cárdenas", DME-Cinvestav del IPN (México)
rogeliomartinez@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx

Palabras clave: Errores aleatorios, enfoque frecuencial probabilidad

Key words: Random errors, frequency approach probability

RESUMEN: Se investigó cualitativamente (Vasilachis, 2006) la comprensión de 42 estudiantes de primer semestre de bachillerato tecnológico del enfoque frecuencial de la probabilidad. Este enfoque no es explícito en el programa de estudio (DEMS, 2014). Los docentes de Física y Matemáticas acordaron vincular sus enseñanzas (véase Martínez, Giordano y Ubaldo, 2013) para considerar la aleatoriedad de los errores en mediciones físicas y el tratamiento estadístico de los datos experimentales. Las respuestas a un cuestionario que antecedió al curso Matemáticas I delataron una educación matemática básica insuficiente. Los desempeños de los estudiantes durante la enseñanza y entrevistas semiestructuradas (Zazkis y Hazzan, 1999) a tres de ellos revelaron incomprensión de la media, desconocimiento de las medidas de dispersión, de las combinaciones, de la frecuencia relativa para estimar la probabilidad.

ABSTRACT: This qualitative research (Vasilachis, 2006) focused on 42 students' understanding of the frequency approach to probability at their entrance into the technological high school. This approach is not explicit in the syllabus (DEMS, 2014). The teachers of Mathematics and Physics agreed to link their teaching (see Martinez, Giordano and Ubaldo, 2013) to consider the randomness of errors in physical measurements and the statistical processing of experimental data. Answers to a questionnaire applied before the Mathematics I course started revealed students' insufficient basic mathematical education. The students' performances during the teaching and the semi-structured interviews (Zazkis and Hazzan, 1999) to three of them showed their unawareness of the mean, of the dispersion measurements, of combinations and of the relative frequency to estimate the probability.

INTRODUCCIÓN

En el marco de un acuerdo académico interinstitucional (CECyT No 4 IPN/DME Cinvestav), los docentes de Matemáticas y de Física conjuntamente identificaron objetivos vinculantes (véase Martínez, Giordano y Ubaldo, 2013) entre las unidades de aprendizaje de Matemáticas y de Física, para promover la aplicación de conceptos matemáticos en el estudio de situaciones presentadas en otras disciplinas. El laboratorio de Física devino el escenario empírico para que los estudiantes obtuvieran datos del resultado de los experimentos, dotaran de sentido a su tratamiento matemático e integraran conceptos de las dos disciplinas. A partir del ciclo escolar 2014-2015A, el Instituto Politécnico Nacional implementó nuevos programas de estudio para algunas unidades de aprendizaje del bachillerato tecnológico. En particular, es de nuestro interés el de Matemáticas I (DEMS, 2014), común a las diferentes ramas del conocimiento y que se imparte obligatoriamente en el primer semestre. La propuesta institucional prescribe desarrollar las competencias (conocimientos, habilidades y actitudes) de los alumnos (DEMS, 2014), así como el logro de aprendizajes significativos para su formación integral**.** Esas competencias a desarrollar suponen lograr abstracciones aritméticas, estadísticas y probabilísticas, mediante el descubrimiento por los estudiantes de situaciones de su entorno académico y social que requieran la toma de decisiones y la solución de problemas (que ellos identifiquen) que promuevan tales logros; además, son de especial utilidad para el resto de los cursos de matemáticas, así como para todas las Unidades de Aprendizaje de Física y Química. La Unidad *Matemáticas I* incluía números reales, estadística descriptiva, técnicas de conteo, axiomas de probabilidad y probabilidad condicional.

Sin embargo, debido a los desacuerdos de la Asamblea General Politécnica relativos, entre otras cuestiones, a esa propuesta institucional, se interrumpió la enseñanza respectiva a partir del 25 de septiembre de 2014 y se le reanudó hasta el 7 de enero de 2015 (http://comunicacionsocial.ipn.mx/documents/ gaceta/biss%201175.pdf), por lo que a la generación 2014-2017 sólo se le impartió la enseñanza de la primera unidad, “Números Reales”, con su correspondiente evaluación y se regresó al plan de estudios anterior (DEMS, 2008), con la unidad de aprendizaje “Álgebra”.

Por tanto, la investigación referida a estocásticos que planteamos se inició con un grupo de estudiantes de nuevo ingreso al bachillerato, de quienes recopilamos los primeros datos para considerar las preguntas de investigación planteadas. No obstante, se hizo un seguimiento de los casos que, por esos primeros datos, se consideraron de interés para nuestro proyecto. Para ese grupo, los contenidos de Matemáticas para el primer semestre fueron: números reales, lenguaje algebraico y operaciones con polinomios, funciones, ecuaciones lineales y funciones y ecuaciones cuadráticas. La investigación continuó con otro grupo (estos resultados no se incluyen aquí), en el curso de “Probabilidad y Estadística” del plan de estudios 2008 (DEMS), propuesto para sexto semestre y obligatorio para los estudiantes de todas las especialidades.

MARCO DE REFERENCIA

Heitele (1975) encuentra un primer marco relacional para sus puntos de vista de la enseñanza de estocásticos en la exposición de Bruner. Una de sus propuestas es ofrecer a los niños actividades de estocásticos tan pronto como en las etapas pre-operacional y de las operaciones concretas, para que las desarrollen como ‘*intuiciones auxiliares*’, sobre las cuales se pueda construir la enseñanza más analítica en los grados superiores. Subraya la importancia de vincular la

enseñanza de estocásticos a experiencias intuitivas. Heitele propone diez ideas fundamentales de estocásticos: 1) Medida de probabilidad, 2) Espacio muestra, 3) Adición de probabilidades, 4) Regla del producto e Independencia, 5) Equiprobabilidad y Simetría, 6) Combinatoria, 7) Modelo de urna y Simulación, 8) Variable estocástica, 9) Ley de los grandes números, 10) Muestra. En particular, la introducción de la idea de ley de los grandes números en la enseñanza ofrece una oportunidad para promover experiencias empíricas concretas de los estudiantes con esa red conceptual, que implica la consideración de la intervención del azar en repeticiones de un fenómeno, de las ideas de variable estocástica, muestra, independencia, espacio muestra, medida de probabilidad. Fischbein (1975, pp. 58-65) se ha referido al desarrollo de las intuiciones probabilísticas de los niños y también ha puesto de relieve la conveniencia de la enseñanza de la probabilidad desde etapas tempranas, puesto que conforme avanza la edad se dificulta la idea de azar. El autor ha definido la intuición como un programa de acción parcialmente autónomo dentro de la cognición y que es una síntesis de la experiencia individual en un dominio dado. Desde esta óptica, los juegos de probabilidad son la expresión de una intuición particular, la intuición de la frecuencia relativa, que es la base para introducir el enfoque frecuencial de la probabilidad.

Pollatsek, Lima y Well (1981) ya han señalado en particular las dificultades de los estudiantes para comprender la media ponderada y señalan que el aprendizaje de una fórmula de cálculo para sustituir en ella los datos no es suficiente para comprensión del concepto subyacente.

Shaughnessy y Ciancetta (2002) se han referido a dificultades de los estudiantes para reconocer la variabilidad en un entorno de probabilidad y destacan la importancia de que la consideren para dar sentido a los datos.

Una importante contribución al desarrollo de la probabilidad provino de la repetición de mediciones, las cuales constituyen un componente básico en los experimentos. A los errores de medición se agregan los aspectos inherentes de aleatoriedad. El concepto de error en las ciencias está asociado a la incertidumbre y se procura en toda medición conocer los límites de esta incertidumbre y el mejor valor de la magnitud x (objeto de las mediciones) con cierta probabilidad. Se entiende por error la diferencia entre el valor obtenido de una medida y el valor “verdadero” de la magnitud. Este último permanece desconocido, pero en su lugar se puede utilizar el valor más probable. Entre las clases de errores más frecuentes están los errores aleatorios que son consecuencia de las múltiples fluctuaciones incontrolables e independientes de los factores que intervienen en una medición, es decir, pueden ocurrir en una medida y en otra no (Hainaut, 1978); también afectan a las medidas en ambas direcciones (por exceso o por defecto). Si afectan a todas las medidas de una serie de mediciones ocurren los errores sistemáticos debidos: a un instrumento de medición, al método de observación, a una desatención del observador a un incidente en la medición; en particular, la diferencia de posición para la lectura de la línea que nos indica el valor depende del ángulo donde se observe y el error se denomina de paralaje. Los conceptos básicos implicados en el tratamiento de los errores aleatorios en las mediciones son: medidas de tendencia central, medidas de dispersión y ciertos índices de la variabilidad del conjunto de observaciones que se estudian. De acuerdo a Swijtink (1987):

> Un paso decisivo en la justificación probabilística de cualquier método para resolver conjuntos inconsistentes de observaciones fue tomado dado por Thomas Simpson en 1755, cuando introdujo la noción de probabilidad de cometer un error de un cierto tamaño conectado con una sola observación independiente del propio valor verdadero. Esto condujo a la idea de una

distribución de probabilidad de los errores relacionados con un determinado procedimiento de medición. (p. 272)

MÉTODO E INSTRUMENTOS

Investigación documental (Cortés y García, 2003). Para la propuesta institucional, programa de estudios (DEMS, 2014), así como la correspondencia entre las actividades planteadas en éste y su contribución para alcanzar esos objetivos.

Cuestionario de diagnóstico. Para conocer acerca de su conocimiento matemático adquirido en su educación básica, los docentes diseñaron un cuestionario de diagnóstico en dos modalidades: la modalidad A, con dos secciones, está constituida por ocho reactivos de preguntas abiertas en la primera sección y, dos preguntas abiertas en la segunda sección; la modalidad B está constituida por 15 reactivos, todos de opción múltiple. Los contenidos de matemáticas a los que se refirieron los reactivos planteados, excepto el reactivo 15 de la modalidad B, están incluidos en el programa de estudios de matemáticas de la educación secundaria (SEP, 2011). La Tabla 1 resume la caracterización de los reactivos de estocásticos incluidos en los cuestionarios de diagnóstico. El cuestionario se presentó a los estudiantes impreso, para su contestación individual manuscrita, en el aula de matemáticas a la hora de la clase, en una sesión de 2 horas. No se permitió borrar.

Tabla 1. Caracterización de los reactivos de estocásticos en el cuestionario de diagnóstico.

Criterio		Reactivos Modalidad A					Reactivos Modalidad B			
		3I	6I	4II	7II	8II	11	13	14	15
Ideas fundamentales de estocásticos	Medida de probabilidad						☑		☑	
	Espacio muestra					☑				
	Combinatoria	☑								
	Variable estocástica		☑		☑			☑		
	La idea de Muestra			☑						
Otros conceptos matemáticos	Razones y proporciones			☑			☑			
	Operaciones aritméticas	☑	☑	☑	☑		☑	☑	☑	
Recursos semióticos	Lengua natural escrita	☑								
	Arreglos tabulares							☑		
	Diagramas de Venn									☑
	Signos matemáticos				☑				☑	
Términos empleados	Sin orden	☑								
	Media		☑							
	probabilidad								☑	

Estrategia de enseñanza. Por la colaboración entre docentes de Física y de Matemáticas indicada en la introducción, el laboratorio de Física fue el escenario para introducir en la enseñanza el enfoque frecuencial de la probabilidad, que los estudiantes efectuaran sus propias mediciones experimentales, que trataran los errores aleatorios en las mediciones y que comprobaran sus propias conjeturas para obtener la mejor medida. Para poner en juego esta estrategia, de los 42 estudiantes del primer semestre, 12 se incorporaron al laboratorio de Física I con un grupo del tercer semestre, para recibir la enseñanza y la práctica de "Mediciones directas y calibrador lineal", con el Vernier, siguiendo el practicario habitual.

Entrevista semiestructurada. De los 12 estudiantes que asistieron al laboratorio de Física, por su desempeño durante la enseñanza y su disposición, se aplicó una entrevista semiestructurada individual (Zazkis y Hazzan, 1999) a tres de ellos (a quienes identificamos como "E_1","E_2", "E_3"), para profundizar en su comprensión de los conceptos de estocásticos incluidos en el cuestionario de diagnóstico y en la práctica de errores aleatorios. Las tres entrevistas se videograbaron y transcribieron para su análisis.

Criterios de análisis. A los datos recopilados se les aplicó la célula de análisis (Ojeda, 2006): ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos, recursos semióticos, términos empleados, situaciones de referencia.

RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE DATOS

La caracterización de los contenidos de estocásticos especificados en la red por competencias (DEMS, 2014, p. 7) para *Matemáticas I* al aplicar la célula de análisis (véase Ojeda, 2006) se resume en la Tabla 2.

Tabla 2. Contenidos de estocásticos especificados en el programa de estudios (DEMS 2014)..

Criterio	Competencia particular 1	Competencia particular 2	Competencia particular 3
Ideas fundamentales de estocásticos		Muestra (datos no agrupados y agrupados), variable estocástica (medidas de tendencia central y de dispersión, cuartiles)	Medida de probabilidad, combinatoria, espacio muestra, adición de probabilidades, probabilidad condicional, modelo de urna y simulación, regla del producto e independencia
Otros conceptos matemáticos	Propiedades de los números reales, razones y proporciones, noción de función.	Números reales, su orden y operaciones, Proporciones. Porcentajes. Particiones. Recta real. Producto cartesiano. Círculo y sector circular	Razones y proporciones, números racionales,
Recursos semióticos	Notación matemática simbólica, lengua natural escrita	Lengua natural escrita, Simbología matemática. Diagrama tallo y hojas, circular, de barras; histograma, polígono de frecuencias, ojiva.	Diagramas de árbol, Tablas y gráficas estadísticas.

Términos empleados		Diagrama circular, histograma, polígono de frecuencias, ojiva, diagrama tallo y hojas, cuartiles, rango, desviación media, varianza y desviación estándar	Evento, probabilidad de ocurrencia, predicción, azar, por lo menos, a lo más, urna, con repetición o sin repetición
Situaciones referentes	Otras áreas del conocimiento y en la vida cotidiana	Del Entorno académico y social	Análisis de tablas y graficas estadísticas que representan relaciones funcionales asociadas a situaciones reales

Cuestionario de diagnóstico. La Tabla 3 presenta los porcentajes de aciertos en la contestación del cuestionario de diagnóstico por modalidad. Hemos indicado con azul los reactivos correspondientes a ideas de estocásticos.

En general, para los estudiantes la modalidad B fue más fácil que la modalidad A, presumiblemente porque todos los reactivos de la primera fueron de opción múltiple; sin embargo, en las contestaciones fue notorio el desorden en la escritura de los resultados, la omisión de unidades y las respuestas sin procedimientos.

Para la unidad A, a sus reactivos 3 y 6, correspondientes a combinatoria y a medidas de tendencia central, respectivamente, se dio el mismo porcentaje de respuestas correctas 28% .Ningún estudiante dio una respuesta correcta al reactivo 5, referente a calcular la altura de un triángulo isósceles. De igual manera ocurrió con el reactivo 8 concerniente a determinar las raíces de una ecuación de segundo grado que contenía un radical en uno de sus miembros.

Tabla 3. Número de aciertos por reactivo por modalidad del cuestionario de diagnóstico.

..

Reactivo	Tema	Aciertos	% Aciertos
Modalidad A 1ª sección, 19 estudiantes			
1	Escalas o razones y proporciones	15	83
2	Regla de tres	5	28
3	Combinaciones	5	28
4	Graficar con ayuda de tabla	6	33
5	Calcular una altura de un triángulo isósceles	0	0
6	Medidas de tendencia central	5	28
7	Relaciones trigonométricas	1	6
8	Ecuación de 2º grado	0	0
2ª sección, 19 estudiantes			
1	Proporcionalidad inversa	10	56
2	Máximo común divisor	9	50
3	Regla de tres	1	6
4	Porcentajes	11	61
5	Razón	11	61
6	Recta numérica	4	22

7	Frecuencia relativa	9	50
8	Estimación	10	56
Modalidad B, 23 estudiantes			
1	Mínimo común múltiplo	14	56
2	Operaciones con polinomios	16	50
3	Operaciones con monomios	14	6
4	Obtención de un término en una sucesión	19	61
5	Obtención de regla general de una sucesión	10	61
6	Ecuación de primer grado	17	22
7	Criterios de congruencia	5	50
8	Razones trigonométricas	19	56
9	Ecuación de primer grado	14	56
10	Proporcionalidad inversa	4	50
11	Porcentajes	13	6
12	Representación de una función lineal	6	61
13	Medidas de tendencia central	12	61
14	Probabilidad de eventos	7	22
15	Diagramas de Venn	18	50

Entrevistas semiestructuradas. Presentamos un fragmento de la entrevista al caso E_3. El guion de entrevista incluyó preguntas referidas a las respuestas del estudiante al cuestionario diagnóstico, así como a sus respuestas a la práctica sobre mediciones.

El investigador "I" pidió a "E_3" que midiera el ancho y largo de una hoja con tres reglas de 30, 15 y 10 cm (véase la Figura 1). E_3 obtuvo dos lecturas iguales de las tres. Al mostrar E_3 sus resultados se produjo el intercambio verbal siguiente:

I ¿Cuál es la medida más confiable?
E_3 No sé, pero la que se repite … o a la mejor me equivoqué …
I ¿En qué pudiste haberte equivocado?
E_3 En el cero, que no coincide exactamente.
I Si la hoja fuera más grande, ¿cómo tendrías que colocarte para hacer la lectura?
E_3 Derecho y viendo de frente.

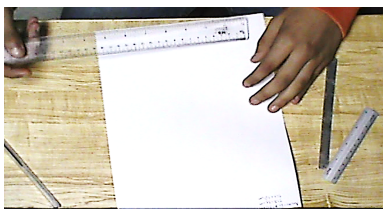
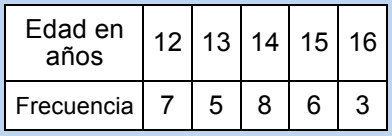
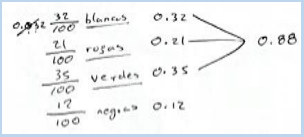
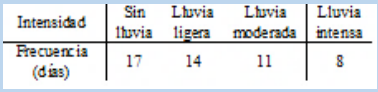
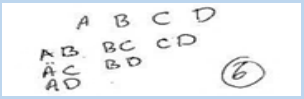
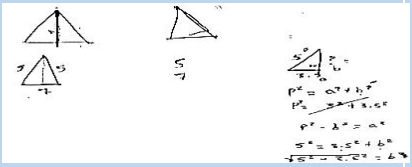


Figura 1. Las tres reglas diferentes.

El estudiante inadvierte la intervención del azar en las mediciones y, en consecuencia, se atribuyó el papel de "valor de la magnitud medida" a la moda, en lugar de a la media aritmética, que es el valor más probable del conjunto de mediciones, que en este caso el mismo realizó y obtuvo los valores correspondientes.

La Tabla 4 presenta ejemplos de las dificultades en esos reactivos de los tres estudiantes considerados para las entrevistas.

Tabla 4. Ejemplos de las principales dificultades en los reactivos de estocásticos del cuestionario diagnóstico

Contenido	Ejemplos	Consideraciones
Medidas de tendencia central		Para la media, no considera la frecuencia de cada dato, en acuerdo con Pollatsek et al. (1981) e inadvierte la variabilidad (Shaughnessy y Ciancetta, 2002), lo que dificultará comprender la idea de variable estocástica.
Medidas de dispersión		Tiene dificultad para comprender que el rango es una medida de dispersión de los datos.
Frecuencia relativa		Se le pide proponer la proporción del contenido de una urna con 10 objetos de cuatro tipos a partir de las frecuencias obtenidas en 100 extracciones al azar con reemplazo. Comete errores de redondeo.
Espacio muestra y medida de probabilidad variable estocástica		Se le dificulta identificar al evento complementario en el enunciado, “no lluvia intensa”, y otros conceptos matemáticos deficientes (fracciones equivalentes).
Combinatoria y recursos semióticos		Su arreglo es tabular, no en árbol. El enlistado superior revela la especificación de elementos para el caso particular (en extensión), sin generalizar.
Estimación analógica.	3.5------3 y 1.2-------2	Al estudiante se le pide que haga una estimación; su proceso de redondeo revela dificultad con valor posicional y orden en los reales.
Altura de un triángulo isósceles y teorema de Pitágoras		Sustituye en el teorema de Pitágoras el valor de la hipotenusa como si fuera un cateto.

OBSERVACIONES

En general en los reactivos de estocásticos del cuestionario de diagnóstico, el desempeño de los estudiantes fue deficiente. Como ya se señaló, desconocen la variación de la frecuencia de un conjunto de datos, la media ponderada, cómo estimar la probabilidad a partir de la frecuencia relativa y el conteo de combinaciones; también mostraron algunas concepciones erróneas en conceptos matemáticos. Estos conocimientos son algunos de los necesarios para lograr las competencias indicadas en el programa de estudio (DEMS, 2014), pero los más básicos. En las entrevistas se evidenció la incomprensión del objetivo de la práctica de laboratorio, el desconocimiento de la intervención del azar en las mediciones y, en consecuencia, el del papel de su media aritmética como el valor más probable de la medición de la magnitud en cuestión; en su

lugar, los estudiantes consideraron la moda. A causa del regreso a los programas de estudio 2008 (DEMS) se interrumpió la enseñanza de Probabilidad y Estadística en primer semestre y se impartió Álgebra. Por lo tanto, se continúa con la investigación y la puesta en juego de estrategias de enseñanza con un grupo del sexto semestre. El enfoque frecuencial de probabilidad no aparece explícitamente en el programa (DEMS, 2014). Los resultados concuerdan con lo señalado por (Salcedo, 2013), de que el recorrido desde las ideas intuitivas hasta los conceptos formales de estocásticos sería posible si se iniciara la enseñanza de la probabilidad desde un enfoque frecuencial.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cortés, G. y García, S. (2003). *Investigación Documental.* México: Escuela Nacional de Biblioteconomía y Archivonomía.

DEMS (2014). Dirección de Educación Media Superior. *Programa de Estudios de Matemáticas I.* México: Instituto Politécnico Nacional.

Hainaut, L. (1978). *Cálculo de incertidumbres en las medidas.* México: Trillas.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. En M. Goos (Ed.), *Educational Studies in Mathematics*. 6, 187-205. Holanda: Dordrecht.

Fischbein, E. (1975). *Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Netherlands: Reidel.

Martínez, R., Giordano, M.A. y Ubaldo, P.J. (2013). Matemática y Laboratorio de Física: Hacia una enseñanza interdisciplinaria. En L. Sosa, J. Hernández, y E. Aparicio (Eds.), *Memoria de la XVI Escuela de Invierno en Matemática Educativa,* 379-386. México: Red Cimates.

Ojeda, A.M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: Un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En E. Filloy (Ed.), *Matemática educativa, treinta años* (pp. 195-214). México: Santillana-Cinvestav.

Pollatsek A., Lima S. y Well A. D. (1981). Concept or Computation: Students' Understanding of the Mean. En M. Goos (Ed.), *Educational Studies in Mathematics* 12, 191-204. Holanda: Dordrecht.

Salcedo, J. (2013). *Razonamiento Probabilístico en el Bachillerato Tecnológico.* Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav.

Shaughnessy, M. y Ciancetta, M. (2002). Students' understanding of variability in a probability environment. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics,* 295-312. Holanda: International Statistics Institute.

Swijtink, Z. G. (1987). The Objectification of Observation: Measurement and statistical methods in the nineteenth century. En Krüger, Daston y Heidelberger, (Eds.) *The probabilistic revolution*, 1, 261-285. Cambridge, MA: MIT.

Vasilachis, I. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa*. Barcelona: Gedisa.

Zaskiz, R., Hazzan, O. (1999). Interviewing in Mathematics Education Research: Chosing the Questions. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(4), 429-439.

EL JUEGO COMO LÚDICA Y HERRAMIENTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE FRACTALES

Luz Amalia Acosta Morales, Sandra Peña Alonso, Blanca María Peralta Guachetá.
Secretaría de Educación de Bogotá, Universidad Santo Tomás (Colombia)
luz.acosta@ustadistancia.edu.co

Palabras clave: juego, lúdica, herramienta didáctica, enseñanza, fractales

Key words: game, fun, educational tool, teaching, fractals

RESUMEN: La educación matemática desde los distintos escenarios de enseñanza ha emprendido investigaciones tratando de encontrar los cambios didácticos y el modelo pedagógico pertinente, que satisfaga los nuevos requerimientos de los estudiantes que conviven en un contexto de condiciones difíciles para lograr su éxito académico y responder a la vez a políticas educativas. Por ello el objetivo principal es proponer a través del juego, una lúdica y herramienta didáctica que permita a los estudiantes de segundo grado, mejorar sus procesos de pensamiento matemático a través del conocimiento y exploración de los fractales.

ABSTRACT: Mathematics education from the various stages of education has undertaken research trying to find the educational changes and relevant educational model that meets the new requirements of the students who live in a context of difficult conditions to achieve academic success and respond at once educational policies. Therefore, the main objective is to propose through the game, a fun and educational tool to enable second graders improve their mathematical thinking processes through knowledge and exploration of fractals.

INTRODUCCIÓN

Los fractales son figuras repetidas a distintas e infinitas escalas con la característica que cada fragmento posee el todo y cada partícula posee dentro de sí la totalidad del universo. Los fractales hacen parte de la geometría fractal, una teoría poco conocida y explorada en los escenarios educativos, por varias razones. Una de ellas porque el sistema educativo ha minimizado los tiempos y temáticas de la geometría y otra por los constantes y los variables cambios de las políticas educativas que poco da lugar al reconocimiento de las experiencias pedagógicas de cada contexto y menos aún a su socialización entre pares profesionales para crear métodos propios.

DESARROLLO

La propuesta se desarrolla en tres fases, una primera de diagnóstico y formulación del problema, una segunda del desarrollo de la propuesta y una tercera fase de análisis de resultados y elaboración del informe final.

En la fase de diagnóstico, se evidencia que los padres de familia tienden a vender una idea negativa y equivocada frente a la matemática ante lo cual los niños llegan predispuestos a la escuela; impidiendo así, al estudiante desde antes de llegar a las aulas, disfrutar la posibilidad de experimentar y crear su propia percepción matemática; además los estudiantes presentaron bajos niveles académicos en geometría y matemáticas en los procesos y resultados de la clase.

Teniendo en cuenta que la educación matemática desde los distintos escenarios de enseñanza ha emprendido investigaciones tratando de encontrar los cambios didácticos y el modelo pedagógico pertinente que satisfaga los nuevos requerimientos, se planteó para el desarrollo del proyecto como objetivo principal proponer a través del juego, una lúdica y herramienta didáctica que permita a los estudiantes de segundo grado, mejorar sus procesos de pensamiento matemático a través del conocimiento y exploración de la geometría fractal.

Se justificó la realización del presente proyecto porque los fractales son un tema divertido presente en el entorno natural lo que produce un aprendizaje más significativo para los estudiantes. Se destaca que al respecto no existen investigaciones ya que la mayoría que se refieren a educación, están involucradas sólo con estudiantes de décimo y undécimo grado. Fue aplicado a estudiantes de segundo grado, jornada mañana, en edades comprendidas entre los 7 y 9 años. Está población es parte de un colegio que cuenta con más de 1.500 estudiantes en las dos jornadas y sedes que ofrece la institución. Corresponden en su mayoría a una población flotante de los estratos 1 y 2, con familias disfuncionales, provenientes de distintas partes del país, especialmente costeños y santandereanos; también de las comunidades indígenas ecuatorianas. La mayoría de familias llegaron en busca de nuevas oportunidades y otras por desplazamiento forzado.

La calidad de vida y las características culturales de los estudiantes se ve marcada por la carencia de estudio de la mayoría de padres de familia que se dedican a vender mercado en la plaza y a las actividades de venta informal. La realidad social del barrio también afecta el comportamiento académico y convivencial de los estudiantes, debido a la existencia de moteles en la zona, expendios de droga, delincuencia común, calles en mal estado, etc. Muchos de los estudiantes carecen del acompañamiento de sus padres por las razones expuestas lo que dificulta sus procesos de aprendizaje ya que el contexto refuerza a veces de manera negativa los avances en cultura ciudadana.

La propuesta se fundamenta desde la educación matemática en las situaciones didácticas:

> "…saber matemáticas no es solamente saber definiciones y teoremas para reconocer la ocasión de utilizarlos y aplicarlos, sino que implica ocuparse de problemas para aprender que las matemáticas son una herramienta…" Brousseau (1993)

Desde lo pedagógico se fundamentó en la necesidad de una nueva forma de enseñanza de la geometría en la cual se incluye la geometría fractal. Desde lo metodológico se enmarcó en las orientaciones de Rosana Guber al aplicar una investigación de tipo etnográfica donde no solamente se observó, interpretó situaciones sino que también se intervino a la comunidad educativa con propósitos claros.

Una característica importante es precisamente la contextualización, lo que significa que todos los datos fueron interpretados sólo en el contexto de la situación. Como consecuencia de la implementación de la propuesta se logró mejores ambientes de aprendizaje con estrategias didácticas nuevas que han facilitado la labor del docente en las prácticas pedagógicas y que motivaron a los estudiantes en su proceso de aprender, a la vez permitió respetar los diferentes ritmos de aprendizaje de los estudiantes, permitiendo que experimenten cada una de las etapas necesarias para la construcción de su propio conocimiento con espontaneidad y diversión como lo debe ser todo para quienes son niños, y la puesta en marcha de enseñar temas complejos para niños pequeños, logrando una participación activa y asertiva que se ha visto reflejada en mejores habilidades matemáticas frente a su cotidianidad.

Es importante destacar que se rescata la motivación natural de los estudiantes en la exploración de su aprendizaje y la satisfacción de enseñar, haciendo de lo difícil algo fácil, agradable y divertido para todos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brousseau, G. (1993): Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas, México: Cinvestav.

Cardoso, E.O. (Ed.). (2008) El desarrollo de las competencias matemáticas en la primera infancia.*Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática.* Consultada el 23 de Abril de 2014 de file:///C:/Users/alex0_000/Downloads/2652Espinosav2.pdf

Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico IDEP (2005). Proyecto innovación e investigación de las matemáticas en el aula. Alcaldía Mayor de Bogotá.

Guber, R. (2001) La etnografía. Método, campo y reflexividad. Enciclopedia Latinoamericana de Sociocultura y Comunicación. Editorial Norma.

Guzmán, M. (2007), Enseñanza de las ciencias y la matemática", Revista Iberoamericana de Educación N.º 43, pp. 19-58, Madrid.

Kilpatrick, J. et al. (1998). Errores y dificultades de los estudiantes. *Educación matemática.* Bogotá: Universidad de los Andes. Consultada el 25 de Abril de 2014 de http://funes.uniandes.edu.co/679/1/KilpatrickEducacion.pdf#page=11

Figueiras, L. et al. (2000). Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de los fractales. *SUMA* 35 pp. 45-54 Consultada el 25 de Abril de 2014 de http://revistasuma.es/sites/revistasuma.es/IMG/pdf/35/045-054.pdf

Restrepo, A.M. (2011). Seminario de Matemáticas. Educación Matemática.

Consultada el 20 de Febrero de 2014 de http://matematicas.uniandes.edu.co/archivos/TeoriaPracticas2011/8.EducacionMatematica.pdf

Sadovsky, P. (2011), La Teoría de las situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. Consultada el 27 de Agosto de 2014 de http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/cepa/teoria_situaciones.pdf

Waldegg Casanova, G. (1998) La educación matemática ¿Una disciplina Científica? Consultada el 20 de Febrero de 2014 de http://www.uv.mx/cpue/coleccion/n_29/la_educaci%C3%B3n_matem%C3%A1tica.htm

UN AMBIENTE DE APRENDIZAJE COMO PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Fermín Acosta Magallanes, Elvia Rosa Ruiz Ledezma
UPIITA-IPN, CECyT Wilfrido Massieu-IPN (México)
ferminacosta66@hotmail.com, ruizelvia@hotmail.com

Palabras clave: ambiente de aprendizaje, actitudes, motivación

Key words: learning environment, attitudes, motivation

RESUMEN: Presentamos los resultados de la aplicación de un cuestionario sobre actitudes hacia las matemáticas, como primera fase en la construcción de un ambiente de aprendizaje. El estudio se llevó a cabo en una escuela de nivel medio superior perteneciente al Instituto Politécnico Nacional (IPN) en la Ciudad de México. El análisis de las respuestas, se efectuó estadísticamente con el software STATA y se contrastaron con el promedio de calificaciones obtenidas en tres evaluaciones escritas. La postura que hemos adoptado es desde la investigación acción, participando un equipo de cinco profesores de distintas escuelas y asignaturas y estudiantes de quinto semestre del nivel medio superior. Así obtuvimos evidencia de las actitudes que presentan los estudiantes, sirviéndonos esta información para presentarles opciones y elaborar estrategias, como parte de nuestro ambiente de aprendizaje.

ABSTRACT: We present the results of a questionnaire on attitudes towards mathematics, as a first step in building a learning environment. The study was conducted in a senior high school belonging to the Instituto Politécnico Nacional (IPN) in Mexico City. The analysis of responses, was performed using STATA statistical software and were compared with the average scores on three written assessments. The position we have taken is through action research, involved a team of five teachers from different schools and subjects and students of fifth semester of high school. Thus, we obtained evidence of the attitudes that students present, serving us this information to present options and develop strategies as part of our learning environment.

INTRODUCCIÓN

En las últimas tres décadas, surge como alternativa en los investigadores, en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, la necesidad del estudio de los aspectos emocionales del estudiante (actitudes, creencias y emociones) que permitirán comprender situaciones y dar soluciones pertinentes. En esta temática nuestro trabajo se circunscribe a la construcción de un ambiente personal de aprendizaje en donde se incluyen actitudes de los estudiantes hacia la asignatura, esfuerzo y motivación hacia el trabajo en clase, desde la investigación-acción.

Primeramente a través de un cuestionario, compuesto por tres rubros; el afectivo, las creencias y conductas, indagamos las actitudes iniciales de los estudiantes hacia las matemáticas y hacia la clase de matemáticas.

Específicamente en este documento incluimos los resultados de un primer cuestionario del trabajo sobre actitudes hacia las matemáticas, que se aplicó a dos grupos de quinto semestre, que estaban cursando la asignatura de cálculo integral, contrastándose las respuestas con el promedio de tres evaluaciones escritas, bajo un estudio estadístico con el uso del software STATA.

PROBLEMÁTICA Y EL PROPÓSITO DE LA INVESTIGACIÓN

Dadas las reformas actuales, en los diferentes niveles educativos, que responden a los cambios en los ámbitos social, político, tecnológico y científico; se marcan como prioritarias, solicitando que los profesores sean preparados para los nuevos modelos educativos (NME) tomando en cuenta las debilidades y fortalezas del sistema educativo. Además de que sean evaluados, bajo el esquema de la aplicación de pruebas estandarizadas a los estudiantes, tal es el caso de PISA (Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos) como evaluación internacional y ENLACE (Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares) como evaluación nacional. En donde nos percatamos que más del 50% de los estudiantes mexicanos se ubica en niveles de bajo desempeño en las competencias fundamentales (lectura, matemáticas y ciencia), marcadas en los planes y programas de estudio; implicando que el sistema educativo no ha fortalecido el potencial de los jóvenes para hacer de ellos ciudadanos productivos y competitivos.

Es esta nuestra realidad por lo que nos propusimos construir un ambiente personal de aprendizaje, basándonos en las actitudes de los estudiantes.

Como propósito inicial de nuestra investigación, indagamos las actitudes iniciales de nuestros estudiantes en asignaturas de física y matemáticas, posteriormente obtuvimos evidencia de qué actitudes positivas o negativas tienen los alumnos y así poder facilitarles los elementos necesarios (lecturas, tutoría, asesoría, supervisión de tareas, etc.) para que completaran con éxito sus cursos.

CONSIDERACIONES TEÓRICAS

Nuestra investigación precisaba de un trabajo en grupo para propiciar que por diversos ángulos se introdujera el ambiente de aprendizaje a los grupos de trabajo. La investigación colaborativa se considera un subconjunto de la investigación acción, en este sentido nuestro trabajo se enmarca en este tipo de investigación, con la participación de varios profesores de distintas escuelas y asignaturas incluidas en las ciencias básicas. Ante todo, sin embargo consideramos los puntos de vista y opiniones del equipo de investigadores, diseñando un protocolo de investigación, que nos

ha permitido mantener las posturas primarias y avanzar conjuntamente en la puesta en escena de la propuesta.

Entendemos por ambiente de aprendizaje una dimensión dual, física y actitudinal, para facilitarle al cerebro del sujeto su desarrollo con un sentido de aprender un arte, una ciencia, una habilidad y una conducta. En el mundo físico están los recursos: (¿con qué?) y métodos (¿cómo?), que se utilizan en el proceso enseñanza aprendizaje (Andere, 2015).

Por lo que se refiere al tema central de nuestra investigación (actitudes), autores como, Mandler (1989), Mcleod (1992), Gómez-Chacón (2005); entre otros, ponen el acento en las actitudes, creencias y, sobre todo, en las relaciones emocionales de los estudiantes con las matemáticas. Tratan de determinar si la afectividad hacia la asignatura influye en los resultados académicos; obteniendo como conclusión: que las creencias sobre las matemáticas influyen en el éxito o fracaso del estudiante. Es indudable que cada asignatura tiene sus propias características muy particulares, pero el trabajo sobre las actitudes, se extiende a una gama de unidades de aprendizaje y como tal puede ser tratada desde varias vertientes.

Gómez-Chacón (2009) distingue en el proceso enseñanza- aprendizaje de las matemáticas, dos tipos de actitudes: actitudes hacia las matemáticas y actitudes matemáticas.

Las actitudes hacia las matemáticas se refieren a la valoración y aprecio de esta disciplina y al interés por su aprendizaje; en donde la componente afectiva predomina sobre la cognitiva. Las actitudes matemáticas, por el contrario, tienen un carácter marcadamente cognitivo y se refieren al modo de utilizar capacidades generales, como la flexibilidad de pensamiento, la apertura mental, el espíritu crítico, la objetividad, etc.

METODOLOGÍA INVESTIGACIÓN-ACCIÓN

Presentamos la investigación-acción como un modelo en el que los investigadores-educadores, de diferentes unidades de aprendizaje (matemáticas y física), así como de diferentes instituciones de nivel medio y nivel superior del IPN. Colaboramos reflexionando, analizando e investigando, la práctica pedagógica con el propósito de relacionar la investigación con procesos de innovación en la construcción de un ambiente personal de aprendizaje para la enseñanza de las matemáticas.

Etapas del Modelo.

1.- Diagnóstico. Identificar y diagnosticar las actitudes iniciales de los sujetos de estudio (cuestionario 1).

2.- Implementar materiales que permitan a los estudiantes un cambio de actitud (lecturas, tutorías, asesorías).

3.- Reflexionar sobre las acciones al implementar los materiales (formatos de reflexión).

4.- Ajustar o reformular las hipótesis iniciales (cuestionario 2).

5.- Proponer soluciones al trabajo continuo de los estudiantes (cuestionario 3).

6.- Formar estudiantes como incidentes en la investigación-acción (PIFI).

DESARROLLO DE LA FASE UNO DEL MODELO (DIAGNÓSTICO)

Planteamiento de la hipótesis.

"El desempeño escolar en la asignatura de matemáticas, depende de habilidades emocionales".

Para esto, utilizamos un cuestionario de actitudes, referido en investigaciones de Mandler (1989), Mcleod (1992) y Gómez-Chacón (2005); que incluye una parte afectiva, otra de creencias y una última de conductas; contrastándolo con el promedio de tres exámenes institucionales, que incluían una parte algorítmica y otra de problemas de aplicación.

Especificación del modelo estadístico.

- Modelo

$y= \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \ldots + \beta_{19} x_{19} + \mu$

-Identificación de variables (cuestionario).

1.- Me da gusto cuando descubro nuevas formas de solucionar un problema en matemáticas.

2.- Siento curiosidad para buscar la solución de un problema o ejercicio matemático.

3.- Cuando resuelvo un problema de matemáticas estoy tranquilo.

4.- Siento angustia cuando resuelvo un problema de matemáticas.

5.- Lo importante en un problema es dar el resultado final correctamente.

6.- Las matemáticas son conceptos y procedimientos que tengo que memorizar.

7.- Las matemáticas tratan de resolver problemas y son útiles.

8.- Confío en mis capacidades para resolver un problema.

9.- Comentar un problema con los demás ayuda a resolverlo.

10.- Las matemáticas son muy abstractas para mis capacidades.

11.- Aprendo rápidamente los nuevos conceptos matemáticos.

12.- Me cuesta trabajo entender matemáticas.

13.- No me limito a resolver los problemas que el profesor me propone en la clase, busco otros para resolver.

14.- Busco diferentes maneras de resolver un problema matemático.

15.- Si fracaso al resolver un problema lo intento de nuevo.

16.- No considero necesario revisar el planteamiento del problema.

17.- Considero emplear semanalmente un tiempo específico para resolver los ejercicios y problemas.

18.- Resuelvo la mayoría de los ejercicios de tarea.

19.- Las dudas que resuelve el profesor, las vuelvo a intentar resolver.

- Peso asignado a las variables.

Se trabaja con variables dummy con 0 y 1. Cada pregunta del cuestionario representa una variable, haciendo un total de 19 variables.

-Objetivo.

Relacionar el promedio de la calificación final como variable dependiente con el modelo de regresión lineal de variables independientes.

Obtención de datos.

Se implementó un cuestionario de 19 preguntas, se aplicó a dos grupos de nivel medio superior de quinto semestre 5IM1y 5IM15, con un total de 45 alumnos.

Estimación de los parámetros del modelo estadístico.

Con la ayuda del programa STATA se obtuvieron los siguientes resultados.

Figura 1. Prueba global de las actitudes mostradas en el cuestionario, con respecto a la evaluación.

```
. reg  promedio var1 var2 var3 var4 var5 var6 var7 var8 var9 var10 var11 var12 var13 var14 var15 var16 var17 var18 var19
note: var1 omitted because of collinearity
```

Source	SS	df	MS		
Model	10.4124241	18	.578468008	Number of obs	= 45
Residual	13.4393259	26	.51689715	F(18, 26)	= 1.12
				Prob > F	= 0.3883
Total	23.85175	44	.542085228	R-squared	= 0.4365
				Adj R-squared	= 0.0465
				Root MSE	= .71896

promedio	Coef.	Std. Err.	t	P>|t|	[95% Conf.	Interval]
var1	0	(omitted)				
var2	.1117037	.2847006	0.39	0.698	-.4735067	.6969141
var3	.4512248	.3284728	1.37	0.181	-.2239607	1.12641
var4	-.0806148	.3187014	-0.25	0.802	-.7357149	.5744854
var5	.5116964	.2949769	1.73	0.095	-.0946372	1.11803
var6	-.1863933	.287773	-0.65	0.523	-.7779192	.4051326
var7	-.4289888	.4430468	-0.97	0.342	-1.339685	.4817069
var8	.3455611	.4144406	0.83	0.412	-.5063338	1.197456
var9	-.1843496	.2769688	-0.67	0.512	-.7536671	.3849679
var10	.0743978	.345624	0.22	0.831	-.6360424	.784838
var11	-.0966868	.3192562	-0.30	0.764	-.7529274	.5595537
var12	-.0635977	.2775607	-0.23	0.821	-.6341319	.5069366
var13	.2647141	.2582015	1.03	0.315	-.2660267	.7954549
var14	.0122493	.2730245	0.04	0.965	-.5489607	.5734592
var15	-.5144571	.397443	-1.29	0.207	-1.331413	.3024987
var16	-.485366	.4177758	-1.16	0.256	-1.344117	.3733845
var17	.482556	.2587895	1.86	0.074	-.0493933	1.014505
var18	.4522292	.35366	1.28	0.212	-.2747294	1.179188
var19	-.4081347	.3002851	-1.36	0.186	-1.02538	.2091102
_cons	1.505226	1.099571	1.37	0.183	-.7549737	3.765426

Para explicar nuestro modelo estadístico, la tabla lo que nos sugiere, es que no todas las variables son significativas, primero observamos que Prob> $F = 0.3883$ y debe ser menor a 0.05, por lo que en seguida revisamos $P > |t|$ individualmente en cada variable, eliminando las variables con mayor valor P en las pruebas individuales t, reduciendo el modelo a las variables var5, var8, var17, var18, que se muestra a continuación y posteriormente poder aplicar las pruebas de validación.

Figura 2. Pruebas individuales para mejorar el modelo.

```
. reg promedio  var5 var8 var17 var18, noconstant
```

Source	SS	df	MS		
Model	106.047378	4	26.5118444	Number of obs	= 45
Residual	17.7088725	41	.43192372	F(4, 41)	= 61.38
				Prob > F	= 0.0000
Total	123.75625	45	2.75013889	R-squared	= 0.8569
				Adj R-squared	= 0.8429
				Root MSE	= .65721

promedio	Coef.	Std. Err.	t	P>|t|	[95% Conf.	Interval]
var5	.4606694	.2127004	2.17	0.036	.0311122	.8902266
var8	.5760096	.1894201	3.04	0.004	.193468	.9585511
var17	.5237189	.1828577	2.86	0.007	.1544304	.8930074
var18	.6730219	.2035882	3.31	0.002	.2618673	1.084177

Pruebas Estadísticas de validación.

Prueba de no multicolinealidad

Se usa para verificar que las variables son independientes.

Figura 3. Resultados de prueba de no multicolinealidad.

```
. corr var5 var8 var17 var18
(obs=45)
```

	var5	var8	var17	var18
var5	1.0000			
var8	0.1091	1.0000		
var17	-0.0741	-0.1091	1.0000	
var18	0.3273	-0.0286	-0.3273	1.0000

Prueba de Homoscedasticidad.

Verifica que la variancia es constante, es decir los errores tienen dispersión constante.

Figura 4. Resultados de la prueba de homoscedasticidad, donde la variancia es constante.

```
Breusch-Pagan / Cook-Weisberg test for heteroskedasticity
         Ho: Constant variance
         Variables: fitted values of promedio

         chi2(1)      =     0.47
         Prob > chi2  =   0.4910
```

No Endogeneidad.

Verifica que la media de los errores sea cero.

Figura 5. Resultados de la prueba de no endogeneidad, donde la media se considera cero.

```
. sum error
```

Variable	Obs	Mean	Std. Dev.	Min	Max
error	45	.0326418	.6335493	-1.209701	1.750968

Errores no correlacionados con las variables independientes

Los errores no deben estar correlacionados, pues si presentan correlación, el modelo es factible de mejorar.

Figura 6. Resultados de los errores no correlacionados con las variables independientes.

```
. corr  error var5 var8 var17 var18
(obs=45)
```

	error	var5	var8	var17	var18
error	1.0000				
var5	-0.0638	1.0000			
var8	-0.0975	0.1091	1.0000		
var17	-0.0425	-0.0741	-0.1091	1.0000	
var18	-0.0975	0.3273	-0.0286	-0.3273	1.0000

RESULTADOS

El modelo lineal referido al cuestionario al cumplir con las pruebas estadísticas, valida la hipótesis "El desempeño escolar en la asignatura de matemáticas, depende de habilidades emocionales".

El estudio estadístico lo que nos está mostrando es que ciertas actitudes, creencias y conductas como las presentadas en el cuestionario, influyen en el desempeño escolar, bajo los supuestos del modelo y las características del examen escrito.

Aunque esta información no es concluyente, pues se pueden presentar correlaciones espurias, pero también habría que estudiar ciertas creencias y conductas más a fondo como las representadas por las variables 5, 8, 17 y 18, correspondientes a las preguntas del cuestionario, marcadas con los mismos números, las cuáles enfatizan las creencias, actitudes, esfuerzo, perseverancia y motivación de los estudiantes.

CONCLUSIONES

Las variables 5, 8, 17 y 18 representan las creencias y conductas que los dos grupos, sujetos de estudio consideran importantes para su aprendizaje en su curso de matemáticas.

Así nos damos cuenta que los alumnos comparten la creencia de que poseen los conocimientos matemáticos suficientes, al mismo tiempo tienen mucha confianza en su capacidad y facilidad para resolver problemas y creen que aprenden matemáticas fácilmente, este sentimiento de eficacia para resolver las tareas matemáticas, está muy por encima de su verdadera ejecución, lo cual se evidencia en los resultados de sus evaluaciones escritas. Esta sobreestimación de sus capacidades, no es funcional para el éxito académico, es necesario que estén consciente de sus limitaciones y la necesidad de dedicar un tiempo específico para tareas y resolución de dudas con las asesorías personalizadas u otras formas de ayuda. Aunque saben que el hacer tareas y acudir a asesorías es indispensable, no tienen la actitud de hacerlo, por lo que consideramos importante seguir con la construcción de nuestro ambiente personal de aprendizaje, donde se conjuguen: la motivación, las actitudes, el esfuerzo y la perseverancia, reguladas por intervenciones endógenas (autorreguladas) o exógenas (externamente dirigidas).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andere, E. (2015). *¿Cómo es el aprendizaje en escuelas de clase mundial?* México: Pearson Education.

Gómez Chacón, I. (2005). Investigar las influencias afectivas en el conocimiento de la matemática. *Enfoques e instrumentos. Líneas de Investigación en Educación Matemática*, *1*, 165-201.

Gómez-Chacón, I. (2009). Actitudes matemáticas: Propuestas para la transición del

Bachillerato a la Universidad. *Educación Matemática, 21*(3), 5-32.

Mandler, G. (1989). Affect and learning: Causes and consequences of emotional interactions. En D. B. McLeod y V. M Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*. New York: Springer-Verlag.

Mcleod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education. A reconceptualization. En A. Gros Douglas (Ed.), *Handbook of research on Mathematics teachins and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 575-596). New York: Macmillan Publishing.

PROPUESTA PARA EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN MEDIANTE ACTIVIDADES DE VISUALIZACIÓN

Juan Martín Casillas González, Ruth Jocabed Camacho Mosqueda, Marisol Radillo Enríquez
Universidad de Guadalajara (México)
martin.casillas70@gmail.com, jocabed.is4028@gmail.com, marisol.radillo@red.cucei.udg.mx

Palabras clave: visualización, representaciones semióticas, cálculo, derivada

Key words: visualization, semiotic representations, calculus, derivative

RESUMEN: Se presentan los resultados preliminares de una investigación cuyo objetivo es evaluar el efecto de una propuesta didáctica que involucra representaciones semióticas de la derivada de una función, sobre los resultados de aprendizaje de los estudiantes. Las actividades propuestas se diseñaron para que los estudiantes construyan el concepto de la derivada de una función mediante la articulación de sus representaciones numéricas, gráficas y analíticas, con apoyo de la computadora. Se trata de una investigación mixta, de diseño cuasiexperimental con grupo de control no equivalente y pretest.

ABSTRACT: In this paper we present the preliminary results of an investigation whose aim is to prove the effect produced by the use of the didactic proposal which involves several semiotic representation registers of the derivative of a function, by students learning outcomes about that concept. Learning activities are designed to construct the concept of the derivative of a function through the articulation of its analytical, graphical and numerical representations, by using the computer. It is a quantitative and qualitative research, quasi-experimental design with non-equivalent control group pretest.

INTRODUCCIÓN

Para que los estudiantes de los primeros grados universitarios logren la comprensión del concepto de la derivada de una función en un punto, se requiere de un proceso que involucra diversas representaciones semióticas. Si se aborda el significado geométrico, se recurre a la representación gráfica de la función y la recta tangente a ella en un punto dado; la representación analítica o algebraica es más adecuada si se desea construir el significado de la derivada como el límite de un cociente (Radillo, González y Martínez, 2015).

El material que presentamos a continuación forma parte de una propuesta más amplia para el aprendizaje de la derivada. Se presentan los resultados de la prueba piloto de un bloque de tres actividades mediadas por computadora, con apoyo del programa *GeoGebra,* las cuales se pueden abordar justo después de trabajar con el tema de límites para que el estudiante construya activamente la noción de la derivada como razón de cambio, así como su significado geométrico. Nuestro propósito es propiciar que el estudiante reflexione sobre diversos aspectos de la derivada, para enriquecer así el proceso de construcción de dicho concepto.

SOPORTE TEÓRICO-METODOLÓGICO

La base teórica de la propuesta está conformada por el concepto de visualización y la premisa de que para lograr la comprensión de toda noción matemática es necesario conocer sus principales representaciones, sus significados, así como articular sus diferentes formas de representación (Duval, 1998; Font, s/f). La visualización es abordada como el proceso de formar imágenes con el apoyo de la computadora y utilizar dichas imágenes para la comprensión del concepto de la derivada de una función (Zimmermann y Cunningham, 1991).

El concepto de representación que utilizamos es el de una “señal externa que muestra y hace presente un concepto matemático, también como signo o marca con el que los sujetos piensan las matemáticas e, incluso, como aquellos esquemas o imágenes mentales con los que la mente trabaja sobre ideas matemáticas” Rico (2000).

El soporte teórico de la propuesta incluye el empleo de diferentes sistemas de representación de una función, pues compartimos la opinión de autores tales como Hitt (2003) y Font (2007), quienes afirman que la Enseñanza de las Matemáticas debiera centrarse en las múltiples formas de representación y en lograr que los estudiantes puedan “transitar” entre ellas de manera fluida, ya que estas representaciones y sus posibles interpretaciones son fundamentales para la comprensión de las Matemáticas, y por lo tanto, para su aprendizaje.

Ahora bien, dado que es deseable que los estudiantes construyan los significados de los conceptos matemáticos mediante el uso de sus diversas representaciones semióticas, el uso de la tecnología, ya sea la computadora y/o calculadora, constituye una práctica didáctica útil y apropiada. Tal es la opinión de Cuevas y Pluvinage (2009), quienes afirman que “visualizar un curso de cálculo diferencial sin el uso de la tecnología, sería desaprovechar uno de los recursos más importantes con los que un profesor puede contar hoy en día”.

Se eligió el programa *GeoGebra* porque la sintaxis de sus comandos es muy similar a la sintaxis del lenguaje matemático, además de ser libre y gratuito. Aun así, se diseñó una actividad inicial

denominada “Práctica cero” para que aquellos estudiantes que nunca han utilizado el *GeoGebra*, se familiarizaran con dicho programa.

La propuesta consta de una serie de actividades con apoyo de la computadora, para un total de 4 sesiones de dos horas cada una, adicionales a las sesiones en el aula del curso “Teoría del Cálculo I”. Se llevó a cabo una prueba piloto de la propuesta didáctica, bajo un diseño cuasiexperimental de dos grupos, pretest-postest. Se trabajó con 31 estudiantes, 12 de los cuales integraron de manera voluntaria el grupo experimental, mientras que el resto conformó el grupo de control. Todos los alumnos cursaron la materia con el mismo profesor.

A ambos grupos se les aplicó un pretest, para verificar las condiciones iniciales y equivalencias de los grupos. Los temas incluidos en el pretest son: la pendiente de una recta, la ecuación de una recta tangente a una curva dada, la función desplazamiento y su relación con la velocidad de un cuerpo interpretada mediante lectura de gráficas. Posteriormente, los estudiantes que voluntariamente integraron el grupo experimental realizaron las actividades de la propuesta de manera adicional al curso regular. Al finalizar el curso se aplicó un postest, para recopilar información cuantitativa sobre los resultados del aprendizaje de los estudiantes.

El postest estuvo integrado por un bloque de 2 preguntas y 3 problemas que formaron parte de una prueba de aprendizaje que aplicó el profesor del grupo. El análisis de resultados no solo se limitó a considerar las respuestas como correcta o incorrecta, ya que también se analizaron todos y cada uno de los procedimientos seguidos por los estudiantes en la solución de los problemas.

Debido a factores que escapan al control de los investigadores, 7 estudiantes del grupo estudiantes no terminaron las actividades y tampoco todos los estudiantes realizaron el postest, por lo que fueron excluidos del estudio (muerte experimental).

Actividades de aprendizaje

La práctica 1 tiene como objetivo que el alumno calcule la pendiente de una recta tangente a una curva, en un punto dado. Se introduce el concepto de razón de cambio a partir de la definición de pendiente de una recta, usando incrementos y se realizan algunos ejercicios a lápiz y papel, para después comprobarlos mediante el uso de la computadora. En la segunda parte de esta práctica se guía al alumno para determinar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado, como el límite de las pendientes de las rectas secantes que pasan por ese mismo punto.

El objetivo de la práctica 2 es relacionar la pendiente de la tangente a la curva en un punto, con el valor del punto mismo, para formar una nueva coordenada perteneciente a la función. De esta manera se espera que el alumno construya el concepto de la derivada de una función como función misma y que sepa distinguirla de la derivada de la función en un punto específico.

Las actividades de esta segunda práctica intercalan el uso de la computadora con actividades a lápiz y papel. Para comenzar, se muestra la representación tabular o numérica de una función cuadrática y se pide al estudiante que deduzca la expresión analítica correspondiente. Enseguida el estudiante debe determinar la pendiente de las rectas secantes que pasan por diversos pares de puntos provenientes de la tabulación (figura 1).

Posteriormente se utiliza la computadora para graficar la función dada, que es una parábola y se proporcionan los pasos necesarios para que el alumno observe la variación de los valores de la recta secante y sus representaciones analítica, gráfica y numérica o tabular (figura 2).

La parte final de la práctica se apoya en las herramientas geométricas de *Geogebra,* para encontrar la pendiente de la recta tangente en un punto dado, y después se determina el mismo valor, a lápiz y papel, mediante límites. El cierre de la actividad consiste en guiar las observaciones del alumno hacia la diferencia entre la derivada como función y la derivada en un punto dado, con base en las actividades realizadas.

La tercera práctica está diseñada para que el alumno analice los casos en los cuáles una función carece de derivada en un punto dado (figura 3), mediante el uso de varios registros semióticos, alternándolos para cada caso, haciendo uso de enunciados con lenguaje formal. Se pretende que, como resultado de estas actividades, el estudiante logre formalizar la noción de la diferenciabilidad de una función.

Figura 1. Fragmento de la práctica 2. Pendiente de rectas secantes a una curva.

1. Definición de la Derivada.

Observa cuidadosamente la siguiente tabla:

x	y
-1	-1
-0.8	-1.36
-0.6	-1.64
-0.4	-1.84
-0.2	-1.96
0	-2
0.2	-1.96
0.4	-1.84
0.6	-1.64
0.8	-1.36
1	-1
1.2	-0.56
1.4	-0.04
1.6	0.56
1.8	1.24
2	2
2.2	2.84
2.4	3.76
2.6	4.76
2.8	5.84
2.4	3.76
2.6	4.76
2.8	5.84
3	7

a) ¿A qué función polinómica corresponden las coordenadas de la tabla anterior? Descríbela con palabras. De ser posible deduce o aproxima su fórmula algebraica.

b) Para recordar la fórmula de la pendiente, completa:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-}{-}$$

c) Supongamos que se trazan rectas secantes que pasan por un punto $A = (2, 2)$ y por cada uno de los puntos de la tabla. Calcula la pendiente de algunas de ellas:

i) $(-1, -1)$ y $(2, 2)$:

ii) $(0, -2)$ y $(2, 2)$:

iii) $(1, -1)$ y $(2, 2)$:

iv) $(1.6, 0.56)$ y $(2, 2)$:

v) $(1.8, 1.24)$ y $(2, 2)$:

vi) $(2.2, 2.84)$ y $(2, 2)$:

Figura 2. Fragmento de la práctica 2. Pendiente de la recta tangente a una curva, como límite de las pendientes de las rectas secantes que pasan por el punto de tangencia.

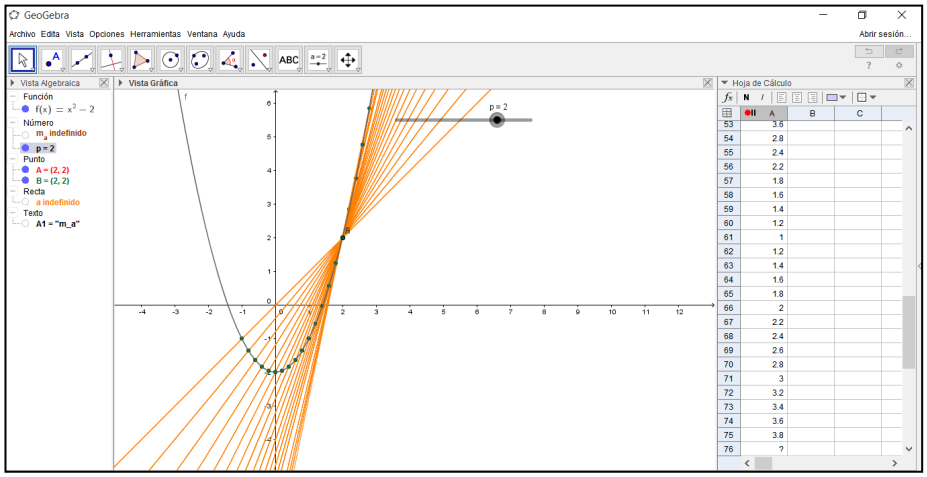
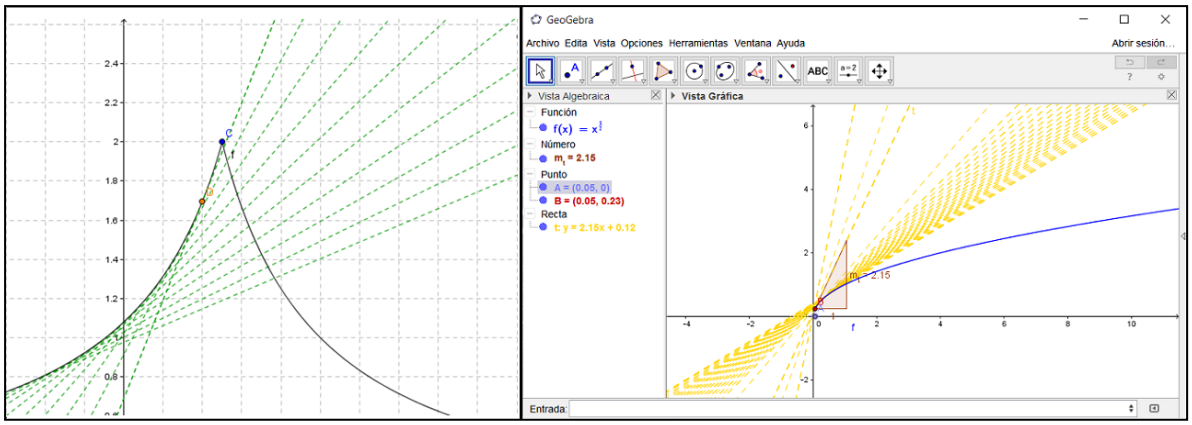
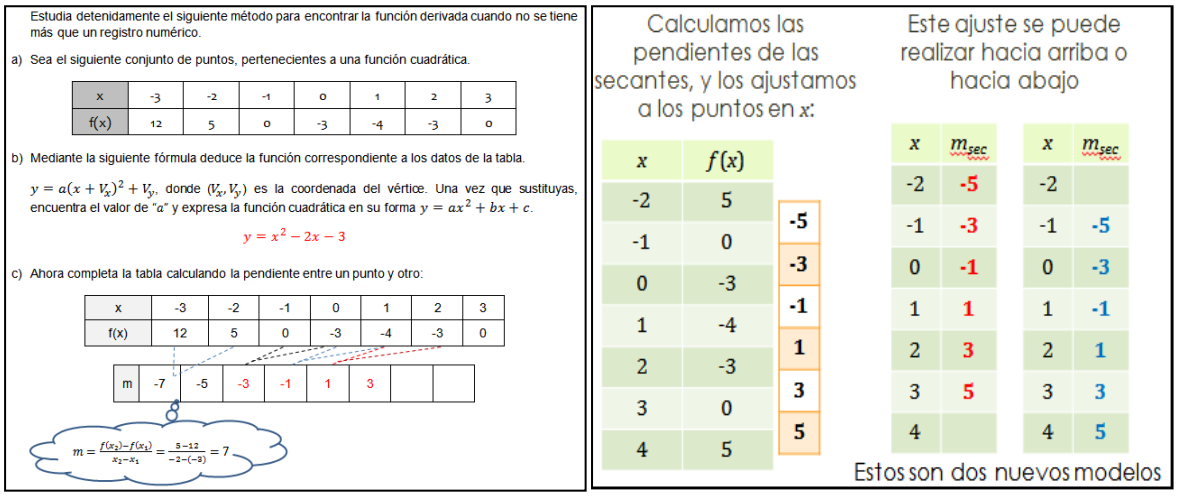


Figura 3. Dos casos analizados en la práctica 3.



Finalmente, se añade un ejercicio especial al final de las tres prácticas, para que el estudiante explore la relación entre los valores numéricos de una función ($f(x) = x^2 - 2x - 3$) y el valor de la pendiente que pasa por cada par de los puntos proporcionados en la tabulación, es decir la pendiente de rectas secantes a la curva (figura 4).

Figura 4. Actividad final: relación entre los valores numéricos de la función y la función derivada



Al relacionar los valores de las pendientes con las abscisas de la función f, se determinan dos rectas paralelas, en este caso $g_1 = 2x - 1$, y $g_2 = 2x - 3$. Solo entonces se utiliza *GeoGebra* para graficar y comparar estas dos rectas con la derivada de $f(x)$, y se encuentra no solamente que las rectas g_1 y g_2 son paralelas a $f'(x)$, sino que ésta se encuentra justo en lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de g_1 y g_2. Con este hallazgo se pueden plantear diversas reflexiones sobre la derivada que serán abordadas a lo largo del curso, como es el caso del teorema del valor medio.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Se presentan tanto los resultados cuantitativos (pretest y postest), como cualitativos (encuesta de opinión y bitácora del investigador).

Pretest

Para verificar las condiciones iniciales del grupo se realizó un análisis del pre-test. La hipótesis nula supone medias poblacionales iguales ($\mu_A=\mu_N$) y la hipótesis alternativa plantea medias poblacionales diferentes ($\mu_A \neq \mu_N$).

La hipótesis alternativa fue seleccionada como bilateral con el fin de reconocer si existe alguna diferencia entre los dos grupos formados.

El estadístico de prueba en este caso es $t_c = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_N - (\mu_A - \mu_N)}{S\sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_N}}} = 1.48025$

Para los datos del pretest y con un nivel de significancia α=0.05 la región de rechazo se encuentra a partir de $t_{\alpha/2,\nu}$ =2.09302.

Como $t_{\alpha/2,\nu} > t_c$, se concluye que no es posible rechazar la hipótesis nula, en consecuencia, los datos no muestran evidencia para suponer que los promedios globales en los resultados del pretest sean diferentes.

En la figura 5A se muestra una gráfica de caja y bigote que muestra la forma en que se comportaron los grupos en el pretest

Postest

El postest tiene como propósito evaluar los conceptos que los estudiantes han trabajado a lo largo del curso, como la pendiente de una recta, la ecuación de una recta tangente, la función desplazamiento y su relación con la velocidad de un cuerpo mediante diversas representaciones semióticas.

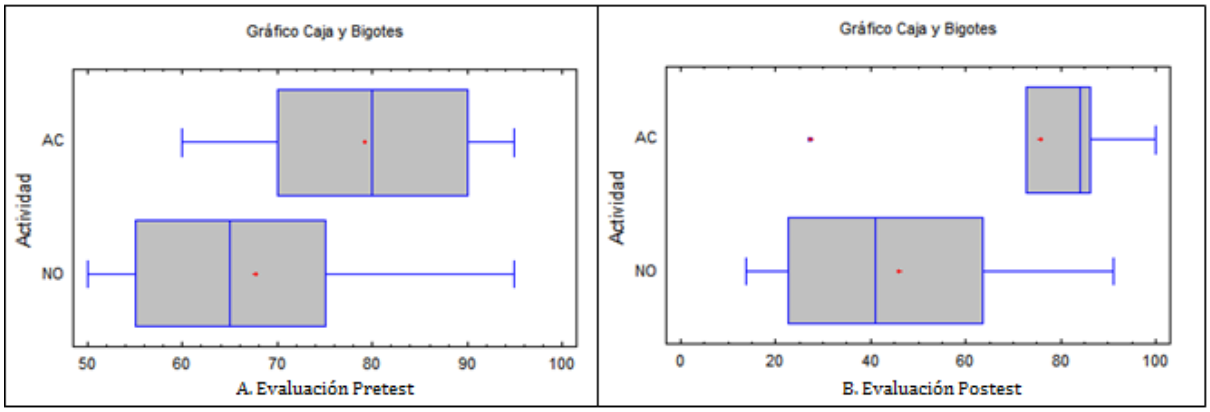
Para analizar cuantitativamente los resultados se propuso como hipótesis nula la igualdad de medias poblacionales ($\mu_A = \mu_N$), mientras que la hipótesis alternativa se consideró como $\mu_A > \mu_N$, de una sola cola con el fin de reconocer si las actividades realizadas por los estudiantes influyen en los resultados de la evaluación postest.

El estadístico de prueba utilizado es $t_c = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_N - (\mu_A - \mu_N)}{S\sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_N}}} = 2.47574$

Al contrastar el estadístico calculado $t_c = 2.47574$ con el estadístico de prueba para los datos del postest $t_{\alpha,\nu}$=1.72913. Como $t_{\alpha/2,\nu} < t_c$ se concluye que no es posible aceptar la hipótesis nula, en consecuencia, los datos muestran evidencia para suponer que el promedio global de los estudiantes que realizaron la actividad son mayores al promedio global de los estudiantes que no la hicieron.

En la figura 5B se muestra una gráfica de caja y bigote que muestra la forma en que se comportaron los grupos en el postest. AC señala al grupo experimental y NO indica los datos del grupo de control.

Figura 5. Resultados del pretest y postest, en gráfica de caja y bigotes.



El análisis de resultados del postest muestra que los alumnos del grupo experimental reflejaron un mejor desempeño en su evaluación postest.

Análisis cualitativo

En cuanto al aprendizaje de la derivada, los alumnos comentan que el material fue bastante novedoso, y que la derivada como objeto matemático fue apareciendo poco a poco hasta poder concluir con la definición formal. Ellos concuerdan en que estas prácticas guiadas con *GeoGebra* les ayudaron en la construcción del significado de este objeto matemático.

En el tema referente al manejo de diversas representaciones semióticas, los alumnos señalan que, a pesar de ser mucho de su agrado las actividades, esperaban mayor cantidad de oportunidades para trabajar con los objetos matemáticos que componen la derivada, así como la derivada misma, en sus diferentes representaciones para manipularlos, redefinirlos, etcétera; uno de ellos menciona que esperaba un ejercicio de modelado a partir una función en su representación tabular, como conclusión a estas actividades con *GeoGebra*.

CONSIDERACIONES FINALES

Los tipos de problemas que se presentan en los alumnos, reflejados en la evidencia de las evaluaciones se pueden englobar en tres grupos:

1. Deficiente identificación del problema planteado, así como de las herramientas adecuadas para resolverlo.
2. Resultados incorrectos y poco concretos a la resolución de un problema.
3. Carente o nula capacidad para identificar componentes implícitos y patrones ocultos en ejercicios en los que el alumno debe formular una conclusión a partir de la observación.

Estas dificultades tienen la característica en común de la falta de dominio de los objetos matemáticos básicos, como conceptos fundamentales y esenciales para la construcción del conocimiento del cálculo, específicamente de la derivada.

Más tarde, mediante el análisis de respuestas y procedimientos del postest, se puede afirmar que los estudiantes del grupo experimental, tuvieron un desempeño considerablemente superior al resto de los alumnos del curso, y mostraron una mayor organización y planificación en sus procedimientos y presentación de resultados.

En general, los estudiantes del grupo experimental fueron capaces de construir conjeturas a partir de la observación de los resultados que obtuvieron en uno de los problemas planteados en el postest. Esta construcción representa un logro importante en el aprendizaje, ya que representa una competencia que no es fácil desarrollar.

Con respecto a la motivación que hubo de parte de los estudiantes hacia las actividades, se observó que, no solo resolvían las preguntas consecuentes a cada actividad guiada, sino que se aventuraban a hacer acercamientos para hacer observaciones más cercanas a las construcciones que hacían. En algunos casos modificaban las configuraciones de los parámetros especificados en el material, o repetían determinada actividad con mayor cuidado, e inclusive repetían algún paso probando con herramientas del software similares a las que la actividad proporcionaba y comprobar resultados, etcétera;

Los resultados en la prueba piloto solo reflejan el comportamiento del grupo de estudiantes en cuestión. Para que poder medir el impacto de las actividades en el aprendizaje se deben realizar pruebas con una cantidad mayor de individuos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cuevas, C., Pluvinage, F. (2009). *Cálculo y tecnología*. Consultado el 20 de noviembre de 2014 en http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/Dc2l3taQW10.pdf

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemática Educativa II*. México: Grupo Editorial Iberoamérica

Font, V. (2007). Comprensión y contexto. Una mirada desde la Didáctica de las Matemáticas. *La Gaceta de la RSME 10(2),* 419-434.

Font, V. (s/f). *Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas.* Consultado el 27 de Agosto de 2009 en http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome14/font.pdf

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos con ambiente de tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana X(2),* 213-223

Radillo, M., González, L., Martínez, M. (2015). Construcción del concepto de derivada, con apoyo de la computadora. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 28,*1629-1637

Rico, L. (2000). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación y comprensión sobre la educación matemática.* IV Simposio SEIEM. Huelva. Consultado el 8 de noviembre de 2006 en http://www.ugr.es/~seiem/Actas/Huelva/LRico.htm

Zimmermann, W., Cunningham, S. (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics.* USA: Mathematical Association of America.

RAZONAMIENTO INDUCTIVO EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

P. Sastre Vázquez, A. Cañibano, R.E. D´Andrea
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Universidad Católica Argentina. Campus Rosario (Argentina)
pasava2001@yahoo.com.ar; rodolfoedandrea@yahoo.com.ar

Palabras clave: estudiante universitario, razonamiento inductivo, validación

Key words: college student; inductive reasoning; validation.

RESUMEN: El estudiante universitario de Argentina utiliza el razonamiento inductivo, específicamente en el proceso de generalización. El proceso no finaliza al encontrar la expresión de generalización, sino que se requiere de su validación. El objetivo de este trabajo fue describir el razonamiento inductivo manifestado por el estudiante universitario al realizar demostraciones matemáticas y analizar como estableció la validez de la expresión hallada utilizando el principio de inducción. Para el logro de estos objetivos se realizó un estudio longitudinal con tres cohortes consecutivas de ingresantes a una facultad de Ingeniería. Durante cada año se desarrolló un trabajo de campo donde el estudiante debía resolver una serie de ejercicios, partiendo de algunos casos particulares, debía obtener una expresión de generalización y luego validarla. Los estudiantes en su mayoría lograron establecer la generalización pedida, sin embargo tuvieron dificultades durante el proceso de validación.

ABSTRACT: The College student of Argentina uses inductive reasoning, specifically in the process of generalization. The process does not complete with finding generalized expression because this requires a validation process. The aim of this study was to describe the inductive reasoning used by University student to perform mathematical proofs and analyze as it established the validity of the expression obtained, using the principle of induction. For the achievement of these goals was realized a longitudinal study with three consecutive cohorts of freshmen engineering students. Each year was developed a field work where the student had to solve a series of exercises, on the basis of some particular cases, and get a generalized expression and then validate it. Most of students had obtained the requested generalization, but had difficulties during the validation process

INTRODUCCIÓN

Este trabajo forma parte de una tesis doctoral en curso sobre la caracterización del razonamiento de estudiantes universitarios de Ingeniería en demostraciones matemáticas, realizado en el programa del Doctorado en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales con mención en Matemática, realizado en la Universidad Nacional del Comahue situada en Neuquén, Argentina.

Castro, Cañadas & Molina (2010) consideran al razonamiento inductivo o de generalización como un proceso cognitivo que permite obtener leyes generales, a partir de un patrón común observado en ciertos casos individuales. Al deliberar acerca de la naturaleza del razonamiento que le es propio a Matemática, Poincaré (1963) hizo alusión a la inducción como la vía necesaria para alcanzar el conocimiento en cualquier ciencia, haciendo foco particularmente en Matemática, desde la consideración de casos particulares y a partir de estos, la observación de pautas que permiten alcanzar la generalización. Asimismo, Pólya (1965) coincide con Poincaré (1963) considerando al razonamiento inductivo como gestor del conocimiento científico, y cuyo método consiste en el encuentro de leyes universales a partir de la observación de casos puntuales.

Desde hace cuatro décadas aproximadamente, el estudiante universitario de Argentina utiliza el razonamiento inductivo en los cursos de matemática, específicamente en la generalización. El proceso no finaliza cuando se encuentra la fórmula de generalización, ya que se requiere adicionalmente de un proceso de validación sustentado por el denominado principio de inducción matemática o inducción completa. El principio de inducción completa consiste en un proceso de validación para funciones proposicionales donde alguna de las variables es natural. En ciertos casos, esta función proposicional puede tener otras variables no naturales pero el énfasis de validación se hace en la variable natural. El proceso consiste en probar la validez de la función proposicional hallada para el primer natural para el cual tiene sentido. Luego se genera hipótesis de inducción que consiste en suponer que la proposición tiene sentido para n=k (o eventualmente para n=k–1). Finalmente se prueba la validez de la expresión hallada para n=k+1 (o eventualmente para n=k si se supuso verdadera la fórmula para n=k–1). Una descripción no ortodoxa del principio antes detallado puede ser ilustrada por el comportamiento de una secuencia de piezas de dominó cayendo una detrás de otra, como en una reacción en cadena. El proceso precedentemente descripto no es otro que el denominado "*efecto dominó*". Con este trabajo se pretenden alcanzar los siguientes objetivos:

General: Describir el razonamiento inductivo puesto de manifiesto por el estudiante universitario al realizar demostraciones matemáticas.

Específico: Analizar como el estudiante estableció la validez de la expresión hallada utilizando el principio de inducción.

METODOLOGÍA

Para el logro de los objetivos descriptos se realizó un estudio longitudinal con tres cohortes consecutivas de ingresantes: 2012, 2013 y 2014 en la Facultad de Química e Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica Argentina del Campus Rosario situado en Rosario, provincia de Santa Fe, Argentina.

Los grupos estuvieron conformados por estudiantes de Ingeniería de dos especialidades: Ingeniería Industrial e Ingeniería Ambiental. Estos grupos fueron producto de tres convocatorias voluntarias cada uno de los tres años, en la que se pedían como requisitos que el postulante tuviera 18 años y el curso de ingreso aprobado. Adicionalmente se solicitó también que el postulante no trabajara. Cada año se generó un grupo de 20 estudiantes para el estudio, considerándose igual número de varones y de mujeres. Para realizar el estudio que se proponía esta investigación se utilizó un portfolio de cinco ejercicios que resolvieron los estudiantes voluntarios, durante el primer cuatrimestre del curso anual de Álgebra y Geometría. Los estudiantes que realizaron los ejercicios previamente habían recibido instrucción sobre nociones elementales acerca del lenguaje y de la epistemología matemática. Estas nociones básicas incluyeron las estructuras elementales del álgebra proposicional tales como: funciones proposicionales; conectores lógicos; principales leyes del Álgebra proposicional; métodos de demostración: directo, indirecto y absurdo; diferencia entre la acción de verificar y demostrar; diferencia entre el rol de ejemplos y contraejemplos, etc.

Algunos de los ejercicios que constituían el portfolio, se muestran a continuación:

1. Considera la siguiente secuencia numérica: $1+3=4=2^2$
$1+3+5=9=3^2$

En base a esta secuencia, se pide: a. A partir de los casos particulares que se exhiben y utilizando tantos nuevos casos como sean necesarios, escribir una expresión que generalice el comportamiento. b. Probar la validez de la expresión hallada en a. utilizando el principio de inducción.

4. Considera la siguiente secuencia de desigualdades: $2^2 > 2;$
$3^2 > 3;$

En base a esta secuencia, se pide: a. A partir de los casos particulares que se exhiben y utilizando tantos nuevos casos como sean necesarios, escribir una expresión que generalice el comportamiento. b. Probar la validez de la expresión hallada en a. utilizando el principio de inducción.

De cada uno de los cinco ejercicios que constituían el porfolio, a continuación se detallan en orden secuencial, cada una de las expresiones a la que los estudiantes debían arribar como producto de la generalización en la parte a.

1. $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2;$

2. $\sum_{i=1}^{n}2^i=2^{n+1}-2;$

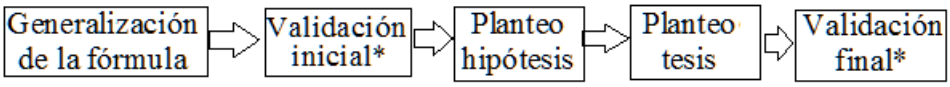
3. $\forall n\in N_2 : n^2>n, \quad N_2=\{2,3,4,...\};$

4. $\forall z\in C:\forall n\in N:\left|z^n\right|=\left|z\right|^n;$

5. $\forall z\in C:\forall \alpha\in R:\forall n\in N: z=\left|z\right|_{\alpha} \Rightarrow z^n=\left|z\right|_{n\alpha}^{n}$

Categorías emergentes

El estudio y análisis de los datos obtenidos a través de los ejercicios realizados por cada una de las tres cohortes, permitió generar categorías. Estas categorías emergentes, se generaron como consecuencia del proceso de generalización y validación implícito en cada ejercicio. Este proceso tiene una secuencia que puede describirse a través del esquema, que se detalla a continuación:



*El proceso de validación tiene dos etapas: una inicial y una final. La etapa inicial consiste primero en determinar, cuál es el primer natural para el que tiene sentido la fórmula (función proposicional en una variable natural y eventualmente otras variables reales). Es decir, determinar el dominio de validez de esta expresión. Hecha esta determinación, se debe realizar el proceso de validación asociado a ese valor, es decir, o el estudiante debe verificar que la función proposicional (fórmula) evaluada en ese valor, 'funciona' (Ejercicios 1, 2 y 3) o debe realizar la prueba que valida a la función proposicional evaluada en ese valor (Ejercicios 4 y 5).

La etapa final consiste en el proceso de validación correspondiente a la tesis de inducción.

En base a la secuencia descripta precedentemente y el análisis de los resultados obtenidos, se detallan a continuación las categorías emergentes del estudio:

Generalización. Es una categoría establecida para reflejar el *nivel* de generalización alcanzado por los estudiantes, subdividiéndose en:

- Consumada con pocos casos adicionales: el estudiante pudo realizar y escribir la generalización, luego de considerar algunos casos particulares adicionales a los dados para llegar a la meta.
- Consumada con muchos casos adicionales: el estudiante pudo realizar y escribir la generalización, luego de considerar muchos casos particulares adicionales a los dados para llegar a la meta.
- Consumada parcialmente con pocos casos adicionales: el estudiante escribió la fórmula o proposición final que constituye la generalización pero con ligeras falencias, habiendo generado esta luego de considerar algunos casos particulares adicionales a los dados.
- Consumada parcialmente con muchos casos adicionales: el estudiante escribió la fórmula o proposición final que constituye la generalización pero con ligeras falencias, habiendo generado esta luego de considerar muchos casos particulares adicionales a los dados.
- Fallida: el estudiante por diferentes razones, no pudo realizar la generalización.

Validación inicial: Es una categoría que se establece para determinar como el estudiante aborda el *proceso de validación inicial*, subdividiéndose en:

- Consumada: El estudiante indica cuál es el primer natural para el cual tiene sentido la ley y valida este proceso.

- Omitida con sentido: El estudiante indica cuál es el primer natural para el cual tiene sentido la ley y escribe la ley para ese caso, pero no efectúa el proceso de validación que sostiene este caso.
- Omitida: El estudiante omite por completo, el proceso de validación inicial.

Planteo Hipótesis/Tesis inductivas. Es una categoría que se establece para determinar cómo el estudiante escribe la *hipótesis y la tesis de inducción*, subdividiéndose en:

- Consumado: El estudiante escribe ambas adecuadamente.
- Omitido: El estudiante no escribe una proposición o ninguna de ambas.
- Fallido: El estudiante escribe una o ambas erróneamente.

Validación final. Es una categoría que se establece para determinar como el estudiante aborda el *proceso de validación final*, subdividiéndose en:

- Consumada: El estudiante realiza la prueba de validación de la proposición a demostrar e indica en el proceso en qué momento utiliza la hipótesis de inducción.
- Consumada con hipótesis velada: El estudiante realiza la prueba de validación de la proposición a demostrar pero no justifica en qué momento del desarrollo de la prueba, utiliza la hipótesis de inducción.
- Fallida por interrupción: El estudiante intenta el abordaje de la prueba, y llega a un determinado eslabón de la cadena argumentativa, deteniéndose y no arribando a la meta.
- Fallida con prueba 'círculo vicioso': El estudiante realiza la prueba pero a partir de la consideración de los mismos casos particulares abordados para la generalización de la fórmula, completa de este modo un 'círculo vicioso' carente de sentido. **
- Omitida: El estudiante omite completamente el proceso de prueba de la tesis de inducción.

** Esta categoría tiene una reminiscencia con la categoría denominada "*empirismo näif o ingenuo*" postulada por Balacheff (2000) para hacer referencia a un modo de demostrar del estudiante consistente en la elección de ejemplos aleatorios, sin criterio alguno, para validar una proposición. La diferencia aquí radica, en que el estudiante considera casos particulares ordenados que repiten el proceso inicial y cierran en un círculo carente de sentido, como prueba de validez de la fórmula obtenida.

RESULTADOS

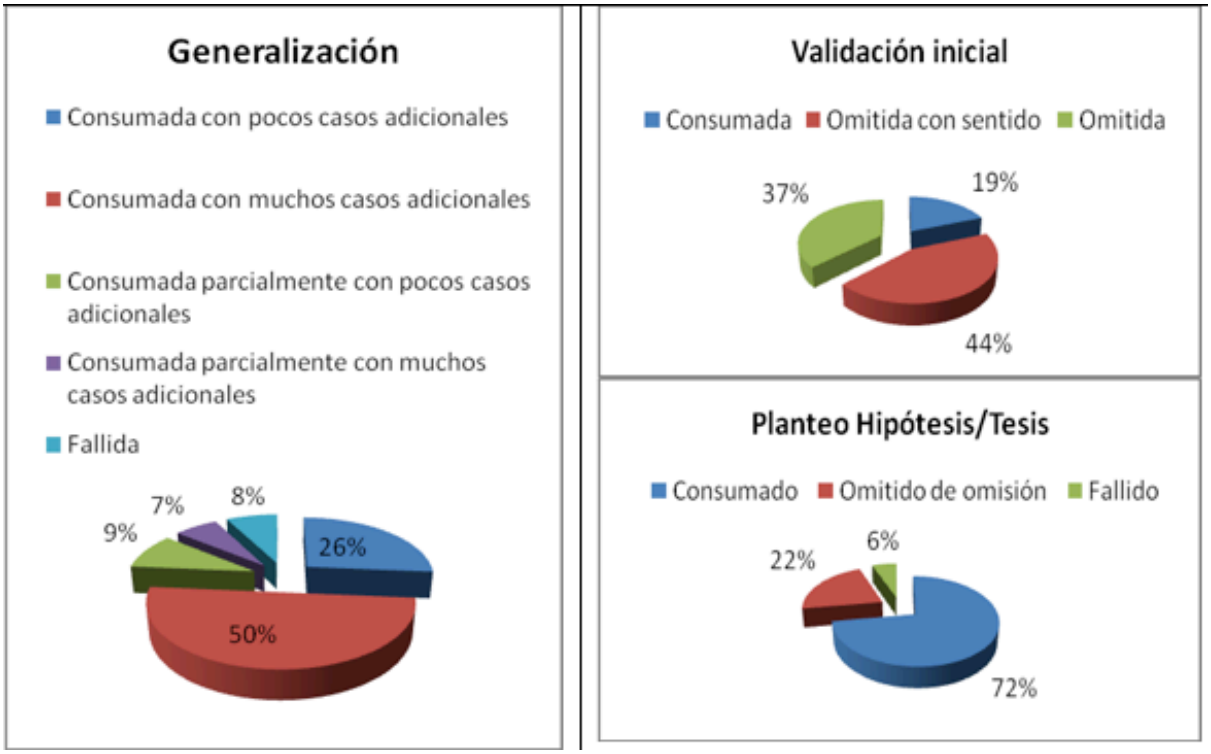
El 75% del total de los estudiantes, con variación en la cantidad de casos particulares utilizados, fue capaz de encontrar la expresión de la generalización en la totalidad de los ejercicios. Las dificultades se presentaron en el proceso de validación de las fórmulas. En los tres primeros ejercicios, aproximadamente la cuarta parte de los estudiantes realizó el proceso de validación para sostener la fórmula para el primer natural para el cual tiene sentido la ley. Este proceso para los tres primeros ejercicios consistía en una verificación. En algunos casos, los estudiantes omitieron el proceso por completo y en otros lo excluyeron pero dejaron indicado a partir de que natural tenía sentido la ley. Este porcentaje se redujo a un 10% en los dos últimos ejercicios, donde el proceso de validación iba más allá de una verificación, requiriéndose una prueba de

mayor complejidad que excedía la acción de verificación. El proceso de escribir la hipótesis y la tesis de inducción fue desarrollado por aproximadamente un 70% de los estudiantes.

Aproximadamente un 40% de los estudiantes omitieron la validación final. El 30% de los estudiantes quedaron encuadrados dentro de la categoría: 'fallida con prueba 'círculo vicioso''.

Aproximadamente un 25% de los estudiantes validó la prueba y un 10% de los estudiantes intentaron realizar la prueba pero no arribaron a la meta, deteniéndose en alguna fase de la secuencia argumentativa. En el conjunto constituido por el 25% de los estudiantes que validaron la fórmula obtenida, pudieron distinguirse dos grupos: a. Aquellos que realizaron el proceso de prueba identificando la secuencia argumentativa donde se muestra la incidencia de la hipótesis de inducción. b. Aquellos que realizaron la prueba pero sin indicar la secuencia. Los dos tipos mencionados tuvieron porcentajes similares.

Los resultados obtenidos se muestran a través de las siguientes diagramas:



CONCLUSIONES

El análisis de los resultados permite presuponer que los estudiantes realizaron los ejercicios de una forma ritual. Esta suposición es generada por la ausencia de los procesos de validación inicial y final en más de la mitad de los estudiantes, observándose que estos conocen el mecanismo de aplicación del principio de inducción, pero parecerían no comprender la necesidad del proceso de validación. Las acciones de escribir la hipótesis y la tesis y el dominio de validez de la expresión hallada no requieren de un importante esfuerzo intelectual. La generación de hipótesis y tesis de inducción consisten en una simple sustitución y la obtención del dominio de validez de la expresión obtenida que se quiere validar, una verificación. Los procesos de validación demandan del estudiante cierta creatividad y el empleo del raciocinio y abstracción. Los estudiantes seleccionados para este trabajo recibieron, durante la cursada de una asignatura, instrucción elemental sobre lenguaje matemático y epistemología matemática. Por ende, el estudiante que realizó estos ejercicios tiene cierta madurez intelectual para abstraer y generalizar una expresión pero la ausencia general del proceso de validación muestra de forma aparente, desconocimiento de cuestiones epistemológicas elementales acerca de la demostración, lo que plantea una contradicción. El estudiante posmoderno, en general, no comprende la dimensión de lo que significa la construcción del conocimiento, en particular del conocimiento matemático. El estudiante ingresante a la Universidad proviene, en general, de un ciclo medio que muestra a la Matemática, no la demuestra. Según expresión textual de los estudiantes, Matemática es 'sentarse a hacer ejercicios'. La construcción de las expresiones generalizadas, debe recordarse, fue inducida en el enunciado del ejercicio, a partir de un par de casos particulares dados, a los efectos de que el estudiante continúe el proceso generando nuevos casos y en base a estos pueda llevar a cabo la generalización.

El estudiante que ha recibido instrucción sobre epistemología y lenguaje matemático, tiene un patrón en su mente acerca de la prueba. Si la proposición que se quiere validar es falsa, exhibe un contraejemplo. Si la proposición que se quiere validar es verdadera, considera algunos casos particulares para 'convencerse' inicialmente del significado de la proposición pero es consciente que la prueba trasciende el ejemplo y se requiere de una cadena argumentativa para validar la propiedad. En general, el proceso de validación que el estudiante mejor puede abordar es aquel que posee una argumentación lineal, sin artificios ni construcciones que puedan obstruir el camino desde la hipótesis a la tesis. Se presume que en el proceso inductivo, si se intenta pensar como el estudiante, la secuencia argumentativa tiene otro orden al de un razonamiento deductivo lineal.

Luego de considerar algunos casos particulares, el estudiante genera una expresión generalizada, y luego para establecer su certeza, debe realizar la prueba de validez. Los esquemas en su pensamiento se descolocan, de ahí la omisión de los procesos de validación inicial y final y en ciertos casos, la generación de un razonamiento de tipo 'círculo vicioso' que culmina con la búsqueda de casos particulares nuevamente. Este proceso tiene cierta analogía con la actitud del estudiante que tiene que abordar una prueba y al no saber qué camino abordar, busca ejemplos aleatorios según la clasificación de Balacheff (2000) correspondiente a este modo de demostrar del estudiante denominado empirismo ingenuo, ya citada en la subcategoría IV.4., al caracterizarse las categorías emergentes. D´Andrea y Sastre Vázquez (2013) consideran que el estudiante tiene claridad sobre lo que se pide, cuando se le exige una demostración y reconoce que la verificación es exigua como prueba. Asimismo sigue recurriendo a ésta como mecanismo de validación cuando no sabe cómo abordarla. Resulta que la verificación es un método usual en la vida cotidiana y en las ciencias fácticas y probablemente la actitud esté asociada a este hecho.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Una empresa docente. Universidad de los Andes.

Castro, E.; Cañadas, M.C.; Molina, M. (2010). El Razonamiento inductivo como generador de Conocimiento Matemático*. Uno. (54), 55 – 67.*

D´Andrea, R.E.; Sastre Vázquez, P. (2013). El proceso de verificación en el esquema de validación. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. CLAME: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. (26), 185 – 194.*

Poincaré, H. (1963). *La ciencia y la hipótesis.* Madrid: Espasa – Calpe.

Pólya, G. (1965). *Como plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

ÁLGEBRA BÁSICA: UM ESTUDO SOBRE A RELAÇÃO INSTITUCIONAL PARA SEU ENSINO NO BRASIL E NA ESPANHA

Marlene Alves Dias, Miriam do Rocio Guadagnini, Valdir Bezerra dos Santos Júnior
UNIAN, UNIPE, UFPE (Brasil)
alvesdias@ig.com.br, miriamguadagnini@hotmai.com, valdir.bezerra@gmail.com

Palavras chave: álgebra; relações institucionais; estudo comparado

Key words: álgebra; institutional relationship; comparative study

RESUMO: As dificuldades dos estudantes brasileiros em relação às noções básicas de álgebra nos fizeram considerar que elas estão associadas às expectativas institucionais esperadas e existentes para sua introdução e desenvolvimento. Assim, decidimos analisar as expectativas institucionais de outros países, iniciando pela Espanha, na tentativa de compreender as regularidades e diferenças existentes. Para atingir nosso objetivo, utilizamos a Teoria Antropológica do Didático como referencial teórico central. Analisamos documentos oficiais e livros didáticos do Brasil e da Espanha. O resultado das análises permitiu encontrar novas configurações de trabalho que podem ajudar os estudantes a compreenderem as noções básicas de álgebra.

ABSTRACT: The difficulties of Brazilian students in relation to the basic notions of algebra made us believe that such difficulties are associated with existing institutional expectations for the introduction and development of algebra. Being so, we have decided to analyze the institutional expectations of other countries, beginning with Spain, in an attempt to understand the existing regularities and differences. To achieve our goal, we use the Anthropological Theory of Didactics as central theoretical framework. We have analyzed official documents and textbooks in Brazil and Spain. The results of the analyses allowed us to find new work settings that can help students understand the basics of algebra.

INTRODUÇÃO

A introdução das noções básicas de álgebra parece ser um dos momentos mais difíceis para o desenvolvimento da matemática escolar nas instituições de ensino brasileiras, passível de observação, por meio dos resultados dos estudantes do Ensino Fundamental em relação às macroavaliações. Em particular, citamos os estudantes de São Paulo que, segundo o relatório anual da Secretaria de Educação desse estado, São Paulo (2013), parecem estagnar sua aprendizagem a partir da introdução dessas noções (estudantes entre 12 e 14 anos).

Em razão dessa constatação, tal problema nos parece estar associado às expectativas institucionais esperadas e existentes para a introdução da álgebra básica nas escolas brasileiras.

A partir dessa hipótese, nós colocamos como questão: "Quais as regularidades e diferenças existentes na forma de abordar a álgebra básica em outros países?"

Essa questão foi considerada a partir das reflexões de Artigue (2004) sobre a transição entre Ensino Secundário e Superior, as quais nos conduziram a identificar problemas como: a proposta da educação básica obrigatória para todos, as dificuldades dos professores com as novas propostas curriculares, a pouca influência das pesquisas na sala de aula, o número cada vez maior de alunos que não se interessam pelas Ciências Exatas, bem como as dificuldades de implementação das novas tecnologias.

Assim, nosso objetivo é analisar as expectativas institucionais e existentes para a introdução da álgebra na Educação Básica no Brasil e em outros países. Neste trabalho, estudamos essas expectativas para os casos do Brasil e da Espanha, uma vez que, em ambos os países, a escolha pedagógica para o desenvolvimento das disciplinas nas escolas é o modelo fundamentado no estudo sobre as noções de capacidade e competência respectivamente.

Para atingir o objetivo acima, consideramos como referencial teórico central a Teoria Antropológica do Didático, proposta por Chevallard (1992, 1994, 1997, 1998, 2002), mais particularmente, as ideias de relação institucional e pessoal, praxeologias, ostensivos e não ostensivos, momentos didáticos e níveis de codeterminação, e como referencial teórico de apoio, a noção de quadro, conforme definição de Douady (1992) e níveis de conhecimento esperado dos estudantes, segundo definição de Robert (1998).

REFERENCIAL TEÓRICO

Iniciamos apresentando as noções da Teoria Antropológica do Didático que retivemos para desenvolver nossa pesquisa.

Segundo Chevallard (2002), a relação pessoal com um determinado objeto do saber depende da relação institucional ou relações institucionais a que uma pessoa se submete.

Dessa forma, a aprendizagem é considerada como o acesso a essa relação pessoal, ou seja, a diversidade de relações institucionais a que o sujeito se submete. Assim, as diferentes relações institucionais permitem considerar o estudo como uma modificação das relações pessoais e o ensinar, como uma ajuda ao estudo, ou seja, ajuda dada ao estudante no sentido de que ele possa estabelecer uma relação com o saber, modificando-o de modo a torná-lo adequado às expectativas apresentadas em uma determinada relação institucional.

Conforme Chevallard (1998), as instituições são obras de um tipo particular, ou seja, parte de um complexo de organizações praxeológicas e, mais especificamente, podem ser somente um componente material como um livro, uma mesa, um *data show*. Assim, uma instituição é um dispositivo social "total", que pode ter somente uma extensão reduzida no espaço social, o que supõe inclusive a existência de microinstituições.

Dessa forma, para Chevallard (1992, 1998), uma instituição é que permite e impõe a seus sujeitos, isto é, às pessoas que vêm a ocupar diferentes posições nela oferecidas, suas maneiras próprias de fazer, e mais amplamente, adotando praxeologias determinadas, as quais definimos na sequência.

Assim, dados um objeto (*o)*, uma instituição (I) e uma posição (*p)* em (*I)*, denominamos relação institucional a(*o)* em posição(*p)*, e indicamos $R_I(p, o)$, a relação com o objeto(*o)* que deveria ser, idealmente, aquela dos sujeitos de (*I)* em posição (*p)*. Portanto, dizer que (*x)* é um bom sujeito de (*I)* em posição (*p)*, é o mesmo que afirmar que a relação pessoal do indivíduo (*x)* está em conformidade ou é adequada à relação institucional em posição (*p)*.

Deste modo, por exemplo, um livro didático é uma obra e a classe que viabiliza a utilização desse livro é uma instituição, em que as duas posições essenciais são as do professor e de estudante, da mesma forma que o estabelecimento, onde aparecem outras posições, também é uma instituição englobante e que fusiona diversas posições que constituem o sistema educativo.

Consideramos ainda a noção de praxeologia, pois segundo Chevallard (1998), todas as atividades humanas são organizadas por meio de praxeologias. Essa organização é constituída por: tipos de tarefas e técnicas que formam o bloco do saber fazer e um discurso tecnológico-teórico que forma o bloco do saber. As tecnologias justificam racionalmente a técnica, ou seja, a explicam e a tornam inteligível, enquanto a teoria é a tecnologia da tecnologia, ou seja, ela justifica, explica e torna inteligível a tecnologia.

Para levar em conta as representações externas e internas introduzidas quando da análise das praxeologias, consideramos as noções de objetos ostensivos e não ostensivos, sendo os ostensivos definidos por Chevallard (1994) como aqueles que têm para nós uma forma material, sensível, podendo assim ser manipulados, já os não ostensivos, denominados usualmente de noções, conceitos, ideias etc, só podem ser evocados através da manipulação dos ostensivos associados, o que, segundo Chevallard, conduz à existência de uma dialética necessária entre eles.

Na sequência, consideramos a definição de momentos didáticos ou momentos de estudo, que, de acordo com Chevallard (1997), são os gestos didáticos que devem ser cumpridos em determinada organização didática.

Observamos que Chevallard (1997) distingue sete momentos, explicitando que eles podem repetir-se várias vezes em uma mesma organização didática. Os sete momentos são:

- O *primeiro momento de estudo*, ou seja, aquele do primeiro encontro com a organização matemática estudada.
- O *momento de exploração do tipo de tarefa e de elaboração de uma técnica* que corresponde ao estudo e à realização de um problema de determinado tipo, que acompanha sempre a

constituição de um embrião de técnica, a partir da qual uma técnica mais desenvolvida poderá eventualmente emergir.

- O *momento de elaboração tecnológico-teórica relativa a uma técnica* corresponde a um momento que tem relação estreita com os outros momentos.
- O *momento de trabalho da técnica* que deve aperfeiçoar a técnica, tornando-a mais eficaz e mais confiável, além de aumentar o domínio que dela temos.
- O *momento da institucionalização,* que é aquele em que o objeto de estudo é especificado, o que corresponde exatamente à elaboração da organização matemática.
- O *momento da avaliação* que se articula com o momento da institucionalização.

Consideramos ainda a noção de níveis de codeterminação introduzida por Chevallard (2002), segundo o qual, o problema de fazer funcionar organizações didáticas concebidas segundo um ponto de vista conduz a enfrentar restrições que distorcem a estrutura e eliminam as funções, quando deixam de ser apenas um mundo no papel.

Assim, Chevallard (2002) define a seguinte escala dos níveis de codeterminação: tópicos ↔ temas ↔ setores ↔ domínios ↔ disciplinas ↔ pedagogia ↔ escola ↔ sociedade ↔ civilização, observando que no processo de difusão das praxeologias, as condições e restrições são cultivadas e centralizadas com a ajuda da escala desses níveis, de modo que essas condições e restrições podem situar-se em um determinado nível da escala e se exprimir em outro, o que não permite isolar o que se passa na classe do conjunto do sistema de ensino.

Os níveis de codeterminação são interligados, ou seja, se modificamos as condições e restrições de um determinado nível, teremos repercussões sobre os outros níveis.

Após considerar a escala acima, Chevallard (2002) explicita que as restrições para fazer funcionar as organizações didáticas, quando associadas às diferentes hierarquias dos níveis de codeterminação, propiciam mostrar que o interesse desses níveis é permitir a triagem das restrições que dirigem o estudo escolar e a escolha daquelas que serão consideradas de maneira a evitar um desequilíbrio muito flagrante.

Ainda consoante Chevallard (2002), os níveis de codeterminação possibilitam identificar a ecologia das organizações matemáticas e didáticas, ou seja, verificar como os saberes vivem nas instituições. Como exemplo, ele considera o caso da ausência da associação do tópico ou tema com os níveis superiores setores e domínios e da própria disciplina, o que, segundo o autor, torna impossível pensar a relação de motivação entre os tipos de tarefas, pois a organização do estudo de um tópico ou tema conduz a considerar os níveis superiores da hierarquia de codeterminação matemática.

Chevallard (2002) explicita, para este exemplo, que se os professores ficam confinados aos níveis, temas e tópicos, as diferentes esferas da *noosfera* cuidam dos níveis superiores – setores, domínios e disciplinas, o que conduz a transferir o controle de determinados domínios da Matemática a instâncias de capital científico e político.

Após esta breve apresentação dos elementos da TAD que retivemos para nossa pesquisa, apresentamos a noção de quadro, segundo Douady (1992), que nos auxilia a compreender melhor

os diferentes quadros e as mudanças de quadros necessárias, quando do desenvolvimento do domínio da álgebra.

A noção de quadro, conforme Douady (1992):

> [...] constituído de objetos de um ramo das matemáticas, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais associadas a esses objetos e essas relações. Essas imagens têm um papel essencial e funcionam como ferramentas dos objetos do domínio. Dois quadros podem conter os mesmos objetos e diferir pelas imagens mentais e problemáticas desenvolvidas (Douady,1992, p.135).

Consideramos ainda a noção de três níveis de conhecimento esperados dos estudantes, conforme Robert (1998), a saber:

O *nível técnico* corresponde a um trabalho isolado, local e concreto. Está relacionado principalmente às ferramentas e definições utilizadas em uma determinada tarefa. Por exemplo: Resolva a equação $x^2 +1=10$.

O *nível mobilizável* corresponde a um início de justaposição de saberes de certo domínio, podendo até corresponder a uma organização. Vários métodos podem ser mobilizados. O caráter ferramenta e objeto do conceito estão em jogo, mas o que se questiona é explicitamente pedido. Se um saber é identificado, ele é considerado mobilizado, se estiver acessível, isto é, se o estudante o utiliza corretamente. Por exemplo: No Brasil, a temperatura é medida em graus Celsius. Nos Estados Unidos, em graus Fahrenheit. A temperatura em graus Fahrenheit (f) pode ser transformada em graus Celsius (c) pela fórmula $c = \frac{5(f-32)}{9}$. Calcule a temperatura em Fahrenheit correspondente a 30°C.

O *nível disponível* corresponde a saber responder corretamente o que é proposto sem indicações; de poder, por exemplo, dar contraexemplos (encontrar ou criar), mudar de quadro (fazer relações), aplicar métodos não previstos.

Esse nível de conhecimento está associado à familiaridade, ao conhecimento de situações de referência variadas por parte do estudante (servem de terreno de experimentação), ao fato de dispor de referências, de questionamentos, de uma organização. Pode funcionar para um único problema ou possibilitando fazer resumos. Por exemplo: No Brasil, a temperatura é medida em graus Celsius. Nos Estados Unidos, em graus Fahrenheit. Calcule a temperatura em Fahrenheit correspondente a 30°C.

METODOLOGIA DA PESQUISA

A metodologia utilizada é a análise documental, conforme Lüdke e André (1986), que corresponde a uma técnica da pesquisa qualitativa que permite complementar informações obtidas por outras técnicas e/ou desvendar aspectos de um tema ou problema.

Os documentos analisados são as propostas de ensino da Espanha e do Brasil, que estão associadas às relações institucionais esperadas. Já as relações institucionais existentes são analisadas via livros didáticos, Tudo é Matemática de Dante (2009) para estudantes brasileiros e Matemátiques Nou Vèrtex de Palenzuela (2014) para estudantes espanhóis, ambos direcionados para crianças com idades entre 12 – 13 anos.

A análise das propostas institucionais foi realizada por meio dos documentos oficiais, dando-se ênfase ao momento em que se introduz a álgebra, e a análise das relações institucionais existentes foi efetuada por meio da análise de um livro didático para cada país, indicados acima, para os quais desenvolvemos uma análise geral da obra por meio de um organograma, que segue modelo utilizado por Tavignot (1991), o qual permite compreender a articulação das noções desenvolvidas no conjunto da obra.

O organograma de Tavignot (1991) corresponde a identificar os diferentes setores relacionados aos domínios propostos, para serem desenvolvidos num determinado ano escolar. Estes setores serão associados aos temas propostos por meio de um verbo que indica, por exemplo, definir e/ou representar e/ou aplicar um objeto matemático, suas propriedades. Quantos aos setores identificados, estes são articulados por meio de um verbo que indica a relação entre eles.

Fizemos na sequência uma análise das praxeologias matemáticas e didáticas existentes, utilizando uma grade de análise construída para esse fim, na qual identificamos as praxeologias propostas, assim como os ostensivos e não ostensivos usados nas tarefas, as mudanças de quadros e o nível de conhecimento esperados dos estudantes em relação às noções em jogo nas tarefas que lhe são propostas.

RESULTADOS DAS ANÁLISES

A análise das relações institucionais esperadas via documentos oficiais nos proporcionou identificar que a proposta brasileira foi construída em conjunto com educadores de todo o País, sendo que seus objetivos foram definidos em termos de capacidades associadas aos respectivos conteúdos que devem ser tratados por meio de conexões intra e extramatemáticas. A metodologia de resolução de problemas é considerada apenas como ponto de partida e é proposta ainda a introdução da história da matemática, das novas tecnologias e do jogo.

Quanto à proposta espanhola, observamos que o documento segue as metas da união europeia, mas cada departamento espanhol pode exercer autonomia pedagógica a partir de uma estrutura curricular definida. No documento da Catalunha, foi possível identificar que os objetivos estão associados às competências básicas e estas aos conteúdos, sendo que o método de ensino privilegiado é a resolução de problemas.

Ambos os documentos dão apenas orientações para o desenvolvimento da Matemática, a maior diferença entre eles é que um considera a questão da capacidade e outro, das competências.

A análise das relações institucionais existentes foi feita por meio do estudo de um livro didático para cada país, sendo que em ambos os países, os conteúdos apresentados são praticamente os mesmos. A maior diferença está na divisão e articulação dos conteúdos, uma vez que no livro espanhol, eles são introduzidos, revisitados e articulados com novos conhecimentos, sendo tratados por meio de problemas intra e extramatemáticos, ou seja, enquanto o livro espanhol

desenvolve um trabalho gradativo, no qual os diferentes momentos didáticos aparecem continuamente. O livro brasileiro introduz todas as noções relativas a um determinado conteúdo num mesmo momento, ficando a cargo de professores e alunos identificarem as articulações propostas.

As praxeologias encontradas tanto no livro de Dante (2009) quanto no livro de Palenzuela (2014) dão ênfase à introdução das técnicas de resolução de equações de primeiro e segundo graus e sistemas de equações lineares que são utilizadas na resolução de problemas. Dante (2009) considera aplicações sobre ângulos e triângulos e determinação de perímetros de quadriláteros. Em Palenzuela (2014), após cada setor, são propostos problemas, o que está em conformidade com a proposta de enfatizar a resolução de problemas. Além disso, os autores ampliam o estudo das equações e sistemas de equações para as equações fracionárias e sistemas de equações fracionárias, o que pode ser considerado como o momento de elaboração tecnológico-teórica relativa a uma técnica.

Observamos ainda que sempre que possível, Dante (2009) e Palenzuela (2014) articulam quadro algébrico com o quadro da geometria e com situações extramatemáticas, em particular, as que correspondem às aplicações das outras ciências. Assim, os três níveis de conhecimento são considerados e os estudantes têm a oportunidade de se apropriar das técnicas e de aplicá-las em diferentes tipos de tarefas.

Ambos os livros seguem as orientações dos documentos oficiais, o que precisa ser visto pelos professores como um material auxiliar para o desenvolvimento de suas aulas, mas não deve ser tratado como um receituário, que deve ser seguido sem considerar as condições específicas de cada grupo de estudantes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Assim, o estudo das relações institucionais esperadas e existentes mostra como duas propostas muito próximas podem ser trabalhadas de formas bastante diferentes, o que nos auxilia a encontrar novas configurações de trabalho que permitam retomar os diferentes momentos didáticos, o que pode ajudar os estudantes a compreenderem as noções básicas de álgebra e a aplicá-las quando necessário.

As propostas institucionais apresentadas nos dois documentos colocam em evidência que os professores têm a possibilidade de atuar sobre os níveis setor e domínio, em particular, para o documento brasileiro, que deixa a cargo de cada escola construir o seu projeto de estudo. Certamente, este projeto tem características indicadas pela noosfera disciplinar e pela política, pois, para os níveis disciplina, pedagogia e escola, existem indicações explícitas sobre as expectativas de trabalho.

Ressaltamos aqui que ambos os documentos consideram para o nível escola: uma lista de capacidades para serem desenvolvidas, quando consideramos o documento brasileiro e uma lista de competências, se consideramos o documento espanhol, ou seja, a escola brasileira e a escola espanhola utilizam dois pontos de vista próximos, mas diferentes, o que, na ótica de Chevallard (2002), não cria as mesmas condições para desenvolver um mesmo tópico de estudo, mas é justamente esta diferença que nos auxilia na identificação de novas formas de trabalho que

precisam ser estudadas e compreendidas, se queremos utilizá-las e integrá-las no desenvolvimento de um determinado domínio; no nosso estudo, no domínio da álgebra.

Assim, o estudo de diferentes propostas, que correspondem a pontos de vista

distintos, pode nos auxiliar a levar os professores a refletirem sobre como articular esses pontos de vista, o que pode favorecer a que eles ultrapassem os níveis temas e tópicos e procurem nas diferentes propostas como domínios e setores são desenvolvidos, permitindo-lhes fazer escolhas mais conscientes sobre o como trabalhar determinados temas e tópicos sem ficar confinados a seguir as indicações do livro didático ou outros materiais como se fossem receitas a serem utilizadas, sem ponderar se podem ou não ser eficazes para o grupo de estudantes com os quais se pretende desenvolvê-las.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (2004). *Le défi de la transition secondaire-supérieur. Que peuvent nous apporter les recherches en didactique des mathématiques?.* Acesso em 13 de fevereiro de 2015 de http://pedagogie.ac-toulouse.fr/math/liaisons/post_bac/informations/colltoulouse.pdf

Chevallard,Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques 12(1),* 73-112.

Chevallard,Y. (1994). *Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique*. Acesso em 20 de janeiro de 2015 de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=125

Chevallard, Y. (1997). *Familière et problématique, la figure du professeur*. Acesso em 15 de setembro de 2015 de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=24

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. Acesso em 10 setembro de 2015 de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=27

Chevallard, Y. (2002). *Organiser l'étude 3 : Ecologie e Régulation.* Acesso em 17 de fevereiro de 2015 de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=53

Dante, L. R. (2009). *Tudo é Matemática*. São Paulo: Ática.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. Repères IREM, n. 6.

Lüdke, M. e André, M.E.D.A. (1986). *Pesquisa em educação:* abordagens qualitativas. São Paulo: EPU.

Palenzuela, L. P. (2014). *Matemátiques Nou Vèrtex 1, ESO*. Barcelona: Vicens-Vives Editorial.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques 18(2),* 139-190.

São Paulo (2013). *Relatório Pedagógico: SARESP 2012 – Matemática*. São Paulo: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

Tavignot, P. (1991). *L'analyse du processus de transposition didactique, l'exemple de la symétrie orthogonale au collège*. Tese de Doutorado, Université René Descartes. França.

PERFIL DEL TUTOR UNA ESTRATEGIA EN MATEMÁTICAS PARA ABATIR REPROBACIÓN Y DESERCIÓN EN BACHILLERATO

Gadiel Recillas Miranda, María del Carmen Asseneth Velázquez López, María Leticia Rodríguez González
Centro de Bachillerato Tecnológico No. 1 (México)
gad_re1974@hotmail.com, assevelazquez@hotmail.com, marletrg@hotmail.com

Palabras clave: perfil del tutor, reprobación, deserción, estrategia matemática

Key words: tutor profile, failure, dropout, mathematical strategy

RESUMEN: Los alumnos que ingresan al bachillerato carecen de los conocimientos matemáticos mínimos para adaptarse al nuevo régimen de estudio que exige la Educación Media Superior. El presente trabajo de investigación se centra en la implementación de un "Proyecto Institucional de Tutorías" en el campo de las matemáticas, focalizando en el perfil del tutor como una estrategia de intervención en el proceso de aprendizaje de los alumnos sin demeritar todos los esfuerzos que el entorno del estudiante pueda proporcionarle; la acción tutorial constituye el seguimiento tanto individual como grupal en el proceso de formación integral de los alumnos, fomentando la mejora de las estrategias dirigidas a estimular el crecimiento de habilidades y destrezas de los estudiantes con el único objetivo de alcanzar la eficiencia y eficacia para mejorar el nivel académico.

ABSTRACT: Students entering high school to our lack the skills to adapt to the new regime which requires study average higher. This research focuses on the implementation of an institutional mentoring project in the field of mathematics, focusing on the profile of the tutor as an intervention strategy in the learning process of students without discrediting all efforts to the environment student can provide, the tutorial is both individual monitoring and group in the process of integral formation of students , encouraging the improvement of strategies to stimulate the growth of skills and abilities of students for the sole purpose of acquiring effectiveness within a consistent and adequate academic level.

INTRODUCCIÓN

Al interior de las aulas del Centro de Bachillerato Tecnológico, CBT. No. 1 Dr. Gustavo Baz Prada, Lerma; México, existe una preocupación generalizada que comparten todos los maestros de matemáticas, con respecto a las habilidades y destrezas de los alumnos de nuevo ingreso, esto derivado de los exámenes diagnósticos que se aplican, donde se revelan notables carencias conceptuales de esta asignatura, desventaja que se traduce a través del tiempo en un alto índice de reprobación, alcanzando hasta el 60% en las aulas.

Esto confirma que las matemáticas siguen siendo un problema para los estudiantes mexicanos de 15 años. El 55% de ellos no alcanza el nivel de competencias básicas según la prueba PISA (PISA, 2012; OCDE, 2013).

El Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI, 2015) ubica a la deserción escolar en un 50.5% y una reprobación del 39.2%, acentuándose en la Educación Media y Superior, nuestra institución no es ajena a estos estadísticos ya que la deserción y reprobación se encuentran muy cercanos a estos parámetros, donde el mayor índice de reprobación es en matemáticas.

Por este motivo es necesario desarrollar proyectos de apoyo con la intención de reforzar todas aquellas actividades curriculares y extracurriculares que permitan, como un mecanismo de prevención, disminuir dichos porcentajes.

Atendiendo esta área de oportunidad se implementa una estrategia, enfocada en el perfil ideal del Tutor en Matemáticas, donde el docente contextualiza un conjunto de acciones dentro y fuera del aula, permitiendo mejorar su interacción al dar tutorías, esa intervención debe ser dinámica, reflexiva y crítica, por lo cual su actualización continua es primordial, de esta manera le permitirá transformar su práctica docente, identificando las competencias que requiere desarrollar para consolidarse como un tutor modelo, que además fortalecerá el cuerpo colegido y enseñanza de esta ciencia en la escuela; De acuerdo a Freire (1977) todo proceso educativo debe partir de la realidad que rodea a cada individuo. Los resultados provenientes del salón de clase necesariamente deben contribuir a la restructuración y adaptación de los programas como el de tutorías.

MARCO DE REFERENCIA

Una de las mayores preocupaciones del sistema educativo contemporáneo en México así como en todo el mundo es el rezago y la deserción escolar dentro de todos los niveles de educación, en nuestro caso Bachillerato Tecnológico en Educación Media Superior para contribuir a la disminución de estos índices, es necesario considerar los diferentes factores que influyen en este proceso, donde la propuesta es que la Tutoría (profesor – tutor) acompañe a los alumnos a través de la asesoría permanente para fortalecer sus procesos de aprendizaje de las matemáticas.

Este programa está fundamentado en los Lineamientos de Acción Tutorial (LAT), basado en las recomendaciones de la UNESCO, analizaremos su accionar dentro de nuestra escuela con la intención de incidir en los índices de reprobación y deserción, la tutoría es una estrategia para disminuir estos dos grandes retos, la cual se define "*Como la ayuda y el apoyo que brindan las personas que no son maestros profesionales en el aprendizaje de otros de una manera interactiva,*

decisiva y sistemática. Generalmente se efectúa de persona a persona o en pareja" (Topping, 2000, p. 7).

Sin embargo, la operatividad del Programa de Tutoría ha sido complicada, pues no existe claridad en los criterios para seleccionar a los profesores que fungen como tutores; la supervisión, la asesoría y la orientación carece de seguimiento y pertinencia pedagógica o bien no se realiza; además incorpora a la práctica docente funciones y actividades complementarias a las prácticas curriculares que exigen del profesor tutor y del estudiante tutorado un nuevo perfil, nuevos compromisos y responsabilidades (Tinto,1989).

En nuestra institución los lineamientos institucionales de este programa se han ido implementando a base de ensayo y error, lo que ha llevado a que se propongan maestros con una deficiente formación matemática, generando que se vean imposibilitados para ofrecer un apoyo de asesoría y acompañamiento a los alumnos con bajo índice de aprovechamiento en Matemáticas. Dando como resultado que el tutor se vea rebasado por los múltiples problemas del alumno, limitándose con frecuencia a sólo apoyar al dicente en los aspectos anímicos, descuidando y minimizando su función para que los alumnos adquieran los conocimientos matemáticos básicos. Es por ello, que este trabajo propone un Proyecto Interno de Autocapacitación, que abarque desde la revisión de sus conocimientos matemáticos, de acuerdo con el Programa Curricular de Educación Media Superior; centrarse en las dificultades que la investigación en Matemática Educativa ha identificado, específicamente el paso del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico; reconstrucción de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

FUNDAMENTO PEDAGÓGICO

El desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje que posibilite a los alumnos la construcción de su conocimiento matemático, sólo se puede promover a partir de la interacción de los actores en su contexto, conceptualizando al maestro como el agente socializador a través de diversas estrategias didácticas en las que los alumnos analicen y reflexionen los contenidos matemáticos de una forma práctica y vivencial, permitiendo la movilización de las Zonas de Desarrollo Real a las Zonas de Desarrollo Próximo. (Vygotsky (1980), citado por Vallejo, García y Pérez (1999).

Bajo esta óptica el concepto de Tutor adquiere un mayor sentido, en este medio el aprendizaje puede ser potencializado con la ayuda de todas las posibilidades cognitivas que el alumno posee, orientado para llevarlo a peldaños más elevados del mismo conocimiento, bajo los límites que se requieran. Se desarrolla entonces por parte del Tutor nuevos proceso de seguimiento continuo ofreciendo los apoyos y soportes que se puede considerar, con participación y actividades relevantes. (Alonso y Blázquez, 2010, p. 125)

A través del Tutor se pueden proveer ayudas de muchos tipos, pero la ayuda pedagógica tiene el componente de continuidad e interconexión para colaborar en la mejora del proceso de aprender así como conceptos, procedimientos, actitudes y valores, mientras se desarrolle y siempre que esta ayuda sea necesaria, es decir, sin caer en que el alumno dependa del tutor y no pueda desarrollar su conocimiento de un modo personal y autónomo (Coll, 1990).

El Modelo Constructivista, se sustenta en la interacción que se establece entre el sujeto-objeto del conocimiento, es decir, concibe a los estudiantes como responsables de la construcción de su

propio proceso de aprendizaje en interacción con su medio, tomando en cuenta los conocimientos previos que poseen y a su vez incorporando los nuevos saberes, mediante el desarrollo de las habilidades cognitivas que permiten consolidar sus estructuras matemáticas.

Bajo esta perspectiva, se propone que en el colegiado docente, se diseñe el programa de actualización interna como Proyecto de Intervención, con los siguientes ejes rectores: 1) El proceso cognitivo que siguen los adolescentes en la construcción del conocimiento matemático. 2) Conocimiento del planteamiento curricular de Matemáticas en el Bachillerato. 3) El diseño de una estructura metodológica en la que los Tutores puedan diseñar secuencias didácticas lúdicas y atractivas para que los alumnos se involucren de forma natural.

PROPUESTA O PROYECTO DE INTERVENCIÓN

Considerando el programa de tutorías que se lleva a cabo actualmente en el plantel como nuestro objeto de estudio, analizaremos sus diferentes etapas para ubicar nuestra propuesta de intervención de esta manera generar estrategias que desde el aula mejoren sustancialmente la trayectoria de los educandos.

Objetivo general

Disminuir los índices de reprobación y deserción a partir de la acción tutorial, sistemática, comprometida y de acompañamiento con los estudiantes, para abatir la reprobación de la asignatura de matemáticas en el bachillerato, desde la óptica del Tutor su perfil y preparación constante en esta área de estudio.

Objetivo específicos

a) Proponer un plan de restructuración institucional de selección y actualización de tutores, garantizando el perfil del docente para abordar los problemas de deserción y reprobación en matemáticas.
b) Dar seguimiento al desarrollo de la tutoría asegurándose de lograr que el aprendizaje permita valorar la capacidad del estudiante y del tutor a partir de los resultados del diagnóstico, desarrollo en clase y la acción tutorial.
c) Facilitar el proceso de adaptación de la Secundaria al Bachillerato Tecnológico.
d) Mejorar el rendimiento académico de los estudiantes de Primer Curso y a través de su trayectoria académica por medio de la acción tutorial para evitar la deserción y reprobación.
e) Facilitar la relación entre Profesores, Alumnos y Tutores.
f) Generar estrategias de apoyo para corregir las deficiencias escolares a partir de los resultados con años anteriores.

Bajo la premisa que todo estudiante es el eje central de todas las actividades académicas y administrativas dentro de nuestra institución (Ver Figura. 1).

Figura 1. Actores que intervienen en la acción tutorial.

El proceso de asesoría y seguimiento continuo del Programa de Tutoría se forma de tres etapas:

a. El diagnóstico: Identificar las necesidades y carencias académicas del estudiante.
b. La acción tutorial: Es donde se elabora un programa de apoyo para los estudiantes que presentan bajas calificaciones en las evaluaciones parciales y finales.
c. Seguimiento y evaluaciones: Donde los profesores identifican los problemas en el ámbito académico en clase y proponen alternativas de solución.

De acuerdo al LAT, seleccionar a los profesores que cumplan con el perfil en matemáticas y aceptar participar en el equipo colegiado docente para diseñar, realizar y evaluar el Proyecto de Intervención, propuesto en dos etapas:

Primera

a) Conceptualización: Revisión conceptual de los conocimientos matemáticos presentes en la currícula oficial.
b) Diagnóstico: A través de la evaluación como herramienta metodológica, revisar y analizar las fortalezas y debilidades en la planeación, diseño de situaciones didácticas lúdicas y procesos de valoración de los avances y obstáculos que tienen los alumnos.

Segunda

a) Operatividad: Registrar en diversos instrumentos el desarrollo de las asesorías y estrategias de acompañamiento, para valorar los avances y obstáculos de los alumnos en su aprovechamiento matemático.
b) Valoración: En colegiado diseñar los indicadores que permitan valorar los alcances y dificultades del impacto del Proyecto de Intervención.

APORTACIONES DE LA PROPUESTA

Dentro de la practica reflexiva, la profesionalización, trabajo en equipo, por proyectos, autonomía, responsabilidad ampliadas, tratamiento de la diversidad, énfasis en las situaciones de aprendizaje y sensibilidad con el conocimiento, conforman un escenario para un nuevo oficio, que representa un marco de crisis que desafía las aptitudes del profesor (Perrenoud, 2004). Retomando los datos proporcionados por la UNESCO y OCDE, donde se muestra las deficiencias en Matemáticas que se tiene a todos los niveles en México, es importante proponer un cambio de conceptualización de las tutorías, ya que aplicarlas sin considerar estos datos duros y la problemática de cada institución nos conduciría a resultados no apropiados.

De tal manera, implicando a los diferentes actores dentro de nuestro contexto, es importante fomentar los cambios, adaptaciones que se pueden realizar en el proceso, por ejemplo el Sistema Nacional de Tutorías Académicas (SiNaTA) establece dentro de las funciones de la Dirección del plantel los siguientes Lineamientos:

- Crea las condiciones operativas para la organización y operación del SiNaTA.
- Promueve la organización del Programa Institucional de Tutorías Académicas.

Para lograr un impacto en el contexto matemático, es necesario desarrollar un esquema que permita la evolución y retroalimentación del Tutor en matemáticas con un espectro más amplio de actuación dentro de la acción Tutorial, para lo cual sugerimos los siguientes puntos:

- Participar dentro de la escuela para elaborar un proyecto institucional donde se genere la figura del Tutor en matemáticas a partir de un adecuado manejo de los recursos humanos y administrativos.
- Dicho Tutor ideal en matemáticas tendrá como características: Un sólido conocimiento de la materia, experiencia en el área de las matemáticas, ser una referencia eficaz para el alumnado, transmisora de valores y disposición a la formación continua.
- Coordinar y fomentar la inclusión dentro de la escuela de todos los componentes o contexto de los estudiantes (desarrollo extraescolar, interacción con la comunidad, asociaciones de padres, profesores y cultura de origen).
- Organizar y hacer evolucionar la participación de los alumnos bajo estrategias adecuadas para lograr una mejor comprensión del conocimiento matemático.

Esto implica que desde la misma llegada de un alumno de nuevo ingreso la preocupación de la escuela se debe centrar en focalizar sus deficiencias matemáticas, como lo marca los estudios realizados dentro y fuera de la institución, en el marco de este esquema los conocimientos y experiencia del profesor son puestos a prueba, no sólo es orientar, animar, resolver dudas, exige un todo donde el maestro se encuentra inmerso en un constante cambio de paradigmas (Tobón, 2010, p. 7).

Por otro lado, la participación de la Subdirección Académica es fundamental para que se realicen las siguientes actividades:

- Promueve la gestión de actividades y acciones del Programa Institucional de Tutorías Académicas.
- Propone los tutores.

Donde una actividad a desarrollar dentro de la escuela en conjunto con la subdirección se compone de la autocapacitación de los tutores en matemáticas, proponiendo las siguientes acciones:

- La actualización y capacitación continua para los coordinadores y profesores Tutores en matemáticas.
- El tutor debe dominar los contenidos curriculares en matemáticas, planificar así como anticipar los problemas y sugiere soluciones.
- Estableciendo metas para favorecer la perseverancia, desarrolla hábitos de estudio y de aprendizaje, fomenta la autoestima y la metacognición para aprender a aprender (Quiñónez y Tébar, 2003).

Se propone una Coordinación de Tutorías Académicas especializada en matemáticas que cumpla con las siguientes funciones:

- Integrar el modelo del Tutor en matemáticas así como el funcionamiento dentro del Programa Institucional de Tutorías Académicas.
- Supervisar su accionar y viabilidad dentro de la escuela.

COMENTARIOS FINALES

Los planes y proyectos realizados a partir de las sugerencias de las organizaciones mundiales tiende a no ser escuchadas dentro del ámbito escolar, concretamente dentro del aula, por su falta de seguimiento y adaptación dentro de las instituciones, esto limita el campo de desarrollo de los actores que conforman el contexto del salón de clase, es por este motivo que el profesor común se debe hacer notar en el horizonte del aprendizaje, con fundamentaciones que refuercen estas iniciativas logrando una retroalimentación unidireccional para una mejor enseñanza de las matemáticas y una mejor calidad educativa de los alumnos.

Es necesario que el Tutor en Matemáticas tenga completo conocimiento del trabajo que va a realizar con sus alumnos dentro del acompañamiento en tutorías, saber su contenido y finalidad, qué deben hacer, cómo debe actuar ante las situaciones que el alumno presenta, y sobre todo cómo evaluar e interpretar los datos, producto de las dinámicas de trabajo con los estudiantes, por otro lado, propicia la comunicación con los profesores de Matemáticas y establece el puente entre la asesoría y acompañamiento con el desarrollo académico de los alumnos en su aula regular de matemáticas.

Es por este motivo, que es indispensable que el tutor esté en constante preparación, desarrollo, crecimiento personal y profesional para cubrir todos los aspectos que demandan las tutorías.

La tutoría académica especializada en Matemáticas deberá de intervenir antes de que se presente un problema académico o realizar los ajustes para que los estudiantes continúen con su formación de forma oportuna en un sentido preventivo desde su ingreso hasta la conclusión del último semestre.

La creación de Áreas Técnicas o Académicas y Personal Docente que cumplan con las siguientes funciones:

- Promueve la organización y elaboración del Plan de Acción Tutorial en matemáticas de acuerdo a sus necesidades específicas del plantel.
- Define asesores académicos en coordinación de la Subdirección Académica

- Participan como tutores (escolares y/grupales)
- Participan como asesores de las asignaturas en Matemáticas.
- Organizar y animar situaciones de aprendizaje.
- Gestionar la progresión de los aprendizajes.
- Elaborar y hacer evolucionar dispositivos de diferenciación.
- Implicar a los alumnos en su aprendizaje y en su trabajo.
- Trabajar en equipo

Es importante promover la participación de equipos colegiados como una práctica de formación continua, idea que luce sencilla pero en la práctica es compleja, (Perrenoud, 2009) sin embargo, prometen ser una alternativa eficiente dentro de nuestra institución, porque nada se logra sin el trabajo conjunto de todos los actores involucrados.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alonso, L. y Blázquez, F. (2010). El profesorado de acciones formativas presenciales y virtuales. *Campo abierto revista de educación. 29(1),* 123-144.

Coll, C., Marchesi A. y Palacios J. (1990). *Desarrollo psicológico y educación. 2. Psicología de la educación escolar.* Madrid: Alianza.

Freire, Paulo. (1977) *La Praxis Educativa*. Antología México: Ediciones garnica.

Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI) (2011). *Estadístico de educación, Serie boletín de estadísticas continuas, demográficas y sociales*: México, México: Auor.

Lineamientos de Acción Tutorial (sf) Recuperado el 13 de marzo de 2015 de http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/04-actividadesparaescolares/accionTutorial/FI-LAT.pdf

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) (2012). *Perspectivas OCDE: México Reformas para el Cambio.* México, México: Autor

Perrenoud, P. (2004). *Diez nuevas competencias para enseñar*. México: Secretaría de Educación Pública.

Perrenoud, P. (2009). *El arte de construir competencias*, original en portugués en Nova Escola (Brasil, 2000)19-31. México. Trad. y ed. Esmeralda Viñals Garmendia para la Especialización en Competencias Docentes UPN.

Quiñónez, J. y Tébar, B. (2003): *El perfil del profesor mediador*. Madrid: Aula XXI, Santillana. Recuperado 15 de febrero 2016 de http://campus.usal.es/~teoriaeducacion/recensiones/n4_rec_jqc.htm

Sistema Nacional de Tutorías Académica Para el Bachillerato General Tecnológico y Profesional Técnico. Recuperado 13 de marzo de 2015 de http://cbta197.edu.mx/informacion/tutorias/Manual_SINATA.pdf

Tinto, V. (1989). *El abandono de los estudios superiores: una nueva perspectiva de las causas del abandono y su tratamiento*. México. UNAM-ANUIES. p. 268.

Tobón, S. (2010). *Formación basada en competencias. Pensamiento complejo, diseño curricular y didáctica*. Bogotá: Ecoe.

Topping, K. (2000). Tutoría. *Serie Prácticas Educativas* 5, 1-45.

Vallejo, A., García, B. y Pérez, M. (1999). Aplicación de un procedimiento basado en la zona de desarrollo próximo en la evaluación de dos grupos de niños en tareas matemáticas. En: REVISTA DE EDUCACIÓN “NUEVA ÉPOCA”. No. 9. Recuperado el 21 de mayo de 2016 de http://www.jalisco.gob.mx/srias/educacion/09/9almava.html

ESTUDIO DIAGNÓSTICO DE LA INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE LA PRIMERA, SEGUNDA Y TERCERA DERIVADA

Cynthia C. Castro, Lorenza Illanes
Tecnológico de Monterrey (México)
ccling@itesm.mx, lillanes@itesm.mx

Palabras clave: Cálculo Diferencial, Análisis Cualitativo, Funciones, Derivadas

Key words: Differential Calculus, Qualitative Analysis, Functions and Derivatives

RESUMEN: En la Matemática Educativa se tienen diversos enfoques del estudio de las funciones y sus derivadas: geométrico, de situaciones didácticas, del pensamiento y lenguaje variacional, epistemológico y socioepistemológico. En este último, se basa la presente investigación. Se trabajó con cinco grupos de estudiantes de Cálculo para Ingeniería. A los estudiantes se les aplicó un pre-test y pos-test de la gráfica de la función y sus derivadas; los cuales se analizaron estadísticamente. En base a los resultados se proponen actividades de la derivada para mejorar el aprendizaje del cambio y las variaciones con problemas de Ingeniería.

ABSTRACT: In mathematics education there are different researches and approaches of the function and its derivative studies: geometric, didactic situations, thinking and variational analysis, epistemological and socioepistemological theory. This research is based on this last one approach. The work was done with five groups from engineering carrier of the Calculus lecture. The students had done a pre-test and post-test of the graph function and its derivatives. A statistical analysis was done of these tests. Based on the results, a set of activities on engineering problems was proposed to study the change and variations from functions, in order to improve the function derivatives learning.

INTRODUCCIÓN

La Matemática Educativa es una disciplina del conocimiento cuyo origen se remonta desde la segunda mitad del siglo XX y se ocupa del estudio de los fenómenos didácticos relacionados al saber matemático (Cantoral y Farfán, 2003; Robert y Speer, 2001). El estudio de las derivadas se ha hecho desde diferentes enfoques: el enfoque geométrico de las derivadas sucesivas (Contreras, 1999), el enfoque de Situaciones Didácticas (González, 1999), el enfoque del pensamiento y lenguaje variacional (Cantoral, 2004), el enfoque epistemológico (Cordero 2001), el enfoque socioepistemológico (Cantoral, 2004; Cantoral, 2013). En base a éste último enfoque se realizó la presente investigación.

El objetivo de la investigación fue estudiar los fenómenos de aprendizaje de la variación y el cambio. El cambio se refiere a una modificación de estado, y la variación como la medida de ese cambio (Cantoral, 2013). Para lograr este objetivo se propuso hacer una investigación diagnostica de la interpretación gráfica de la primera, segunda y tercera derivada de una función que tienen los estudiantes que estuvieron en un curso de Matemáticas I para Ingeniería con una propuesta didáctica integral (Salinas. Alanís y Pulido, 2011).

El interés por el desarrollo de este trabajo surge para tener un primer acercamiento e identificar evidencias de las interpretaciones gráficas que realizan los estudiantes de las razones de cambio de una función, al llevar dentro del curso una propuesta integral donde el Cálculo Newtoniano y el Cálculo Leibniziano están didácticamente integrados (Alanís y Salinas, 2010; Salinas. Alanís y Pulido, 2011). En el desarrollo de este estudio se consideran dos aspectos: a) el análisis semiótico (Duval, 1999) que se requiere en el manejo de gráficas y b) el concepto de la derivada en ingeniería, pues en ellas se aborda a la primera derivada como la velocidad, la segunda derivada como la aceleración y la tercera derivada que describe el cambio en la aceleración (Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo, y Garza, 2011). En el desarrollo de este estudio se considera el concepto de la derivada en ingeniería, pues en ellas se aborda a la primera derivada como la velocidad, la segunda derivada como la aceleración y la tercera derivada que describe el cambio en la aceleración.

Para describir esta investigación que tiene como objetivo identificar evidencias de las interpretaciones gráficas que realizan los estudiantes de las razones de cambio de una función, el presente escrito se estructuro de la siguiente manera: una primera sección de introducción, que es la presente sección donde se describió el objetivo de investigación y el marco teórico; una segunda sección con la metodología de investigación donde se describe la muestra y los pasos que se siguieron para el estudio; una tercera sección en donde se reportan y analizan los resultados obtenidos; posteriormente, una sección de conclusiones en donde se resaltan los resultados importantes y las ideas que generaron esta investigación, dentro de ellas también se expone una pequeña descripción de las actividades propuestas para mejorar el estudio de las funciones y su derivadas; finalmente, se presenta la bibliografía correspondiente.

METODOLOGIA

Esta investigación es de corte cuantitativo, la muestra esta conformada por 5 grupos de una universidad del noreste del México, con estudiantes de ingeniería en el curso de Matemáticas I para Ingeniería (Cálculo Diferencial) de primer semestre. El total de la muestra la configuraron 180 estudiantes.

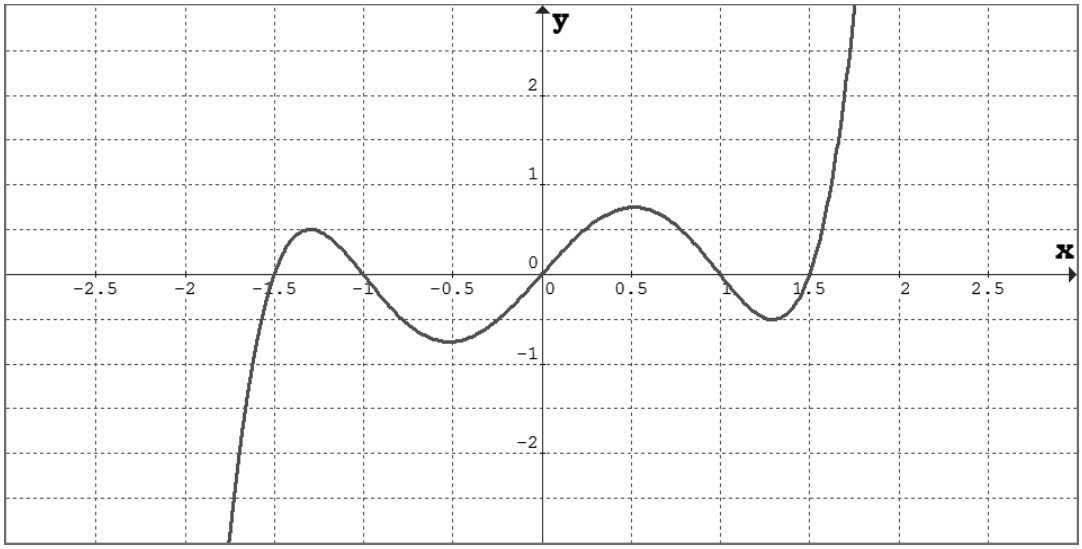
Para obtener este diagnóstico, a los estudiantes de todos los grupos se les aplicó un pre-test para evidenciar sus concepciones de la derivada mediante un análisis gráfico. Posteriormente, se abordó en las clases del curso de cada grupo el concepto de la derivada dentro del contexto de magnitudes que cambian, aplicada a problemas de Ingeniería y se les aplicó un pos-test para analizar si habría evidencias de alguna mejora en la concepción gráfica de primera, segunda y tercera derivada en los estudiantes.

Para este pre-test y el pos-test se utilizaron un conjunto de 4 gráficas ya trabajados en investigaciones anteriores (Cantoral 2013), en donde los estudiantes deben marcar sobre la gráfica la porción en donde se cumpla los siguientes casos: $f(x)>0$, $f'(x)>0$, $f''(x)>0$ y $f'''(x)>0$ respectivamente. En la gráfica de la Figura 1 se puede observar la función que se da para este diagnóstico.

La gráfica de la Figura 1 aparece cuatro veces en el diagnóstico, con diferentes preguntas:

1) Marca sobre la gráfica de la función f(x), que aparece en seguida la porción que consideres cumple con la condición f (x)>0. Es importante que dibujes sobre la gráfica la región que satisfice la pregunta.
2) Marca sobre la gráfica de la función f(x), que aparece en seguida la porción que consideres cumple con la condición $f'(x)>0$. Es importante que dibujes sobre la gráfica la región que satisfice la pregunta.
3) Marca sobre la gráfica de la función f(x), que aparece en seguida la porción que consideres cumple con la condición $f''(x)>0$. Es importante que dibujes sobre la gráfica la región que satisfice la pregunta.
4) Marca sobre la gráfica de la función f(x), que aparece en seguida la porción que consideres cumple con la condición $f'''(x)>0$. Es importante que dibujes sobre la gráfica la región que satisfice la pregunta.

Figura 1. Función original del diagnóstico f(x)



Los aspectos fundamentales observados en este diagnóstico fueron los siguientes:

a) Se reconocen las partes donde la función y sus respectivas derivadas son positivas.

b) Se reconoce dónde están los máximos o mínimos de f(x).

c) Se proporciona la gráfica de las derivadas dada la f(x).

d) Se proporciona la ecuación de la función o de alguna de las derivadas.

e) Se establecen las concavidades de la función o sus derivadas.

f) Se proporciona algún argumento sobre donde la función era creciente o decreciente.

g) Se señala como solución el área bajo la curva de la función dada.

h) La solución solo es colocada en el primer y cuarto cuadrante.

i) Resultado correcto o incorrecto del ejercicio para cada pregunta.

De todos estos aspectos sus frecuencias fueron registradas para cada grupo, también se capturo observaciones generales que iban arrojando los resultados, si había alguna respuesta que no hubiese sido considerada en las aspectos fundamentales predeterminados. Tanto para el pre-test como para el post-test se realizó una análisis de frecuencia de los resultados. Posteriormente, se elaboró un análisis estadístico en donde se muestran las evidencias obtenidas de esta investigación.

ANALISIS DE RESULTADOS

Los resultados de las frecuencias obtenidas del pre-test como para el post-test se dividieron en 6 categorías de análisis: a) Marco el contorno de $f(x)$; b) Confunde los positivos $f(x)\rangle 0$; c) Señala el área bajo la curva; d) Obtuvo la gráfica de la derivada; e) resultado Correcto; y resultado incorrecto. Estas categorías se analizaron para cada una de las preguntas, las cuales se denominaron PI, P2, P3 y P4 respectivamente. A continuación (Tabla 1) se presenta las frecuencias y frecuencias porcentuales del pretest en donde se puede observar que solo 107 de los 180 estudiantes pudieron señalar correctamente $f(x)\rangle 0$, 66 estudiantes trazaron correctamente $f(x)'>0$, 59 obtuvieron correctamente el trazo de $f(x)''>0$ y 42 obtuvieron bien el resultado de $f(x)'''>0$. Como vemos hay una tendencia a la baja al subir de orden la derivada.

Tabla 1. Frecuencias y Frecuencias porcentuales del Pre test

Pregunta	Marco el contorno de $f(x)$		Confunde los positivos $f(x)\rangle 0$		Señala el área bajo la curva		Obtuvo la gráfica de la derivada		Resultado Correcto		Resultad Incorrecto	
P1 $f(x)$	98	54.4	15	8.3	46	25.5			107	59.4	73	40.56
P2 $f'(x)$	86	47.7	10	5.5	28	15.5	78	43.3	66	36.6	114	63.33
P3 $f''(x)$	83	46.1	25	13.8	24	13.3	51	28.3	59	32.7	121	67.22
P4 $f'''(x)$	37	20.5	10	7.7	14	7.7	40	22.2	42	23.3	138	76.67

Posteriormente, se abordó en las clases del curso de cada grupo el concepto de la derivada dentro del contexto de magnitudes que cambian, aplicada a problemas de Ingeniería, en donde se aborda a la primera derivada como la velocidad, la segunda derivada como la aceleración y la tercera derivada que describe el cambio en la aceleración (Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo, y Garza, 2011).

Tabla 2. Frecuencias y Frecuencias porcentuales del Pos-Test

Pregunta	Marco el contorno de $f(x)$		Confunde los positivos $f(x)\rangle 0$		Señala el área bajo la curva		Obtuvo la gráfica de la derivada		Resultado Correcto		Resultado Incorrecto	
P1 $f(x)$	127	70.5	17	9.4	90	50.0			141	78.3	39	1.6
P2 $f'(x)$	94	52.2	25	13.8	59	32.7	106	58.8	93	51.6	87	.3
P3 $f''(x)$	80	44.4	27	15.0	60	33.3	82	45.5	82	45.5	98	54.4
P4 $f'''(x)$	61	33.8	26	14.4	38	21.1	51	28.3	57	31.6	123	68.3

Al terminar el curso se aplicó el mismo diagnóstico y se elaboraron los correspondientes análisis (Tabla 2), en el cual se puede observar en el Post-Test que 78.3% de los estudiantes pudieron señalar correctamente $f(x)\rangle 0$, 51.6% estudiantes trazaron correctamente $f(x)'>0$, el 45.5% obtuvieron correctamente el trazo de $f(x)''>0$ y 31.6% obtuvieron bien el resultado de $f(x)'''>0$. Como vemos hay una tendencia a mejorar con respecto al pre-test, sin embargo, sigue decreciendo la tendencia al aumentar el orden de la derivada.

Se analizó también (Figura 2 y Figura 3) un comparativo grafico de las frecuencias y las frecuencias porcentuales del pre-test y pos-test en donde se puede observar como en las preguntas 1, 2, y 4 hubo un incremento en el número de respuestas correctas, para la pregunta 3, no fue tan evidente como en las otras.

Figura 2. Frecuencias del diagnóstico Pre test y Post test.

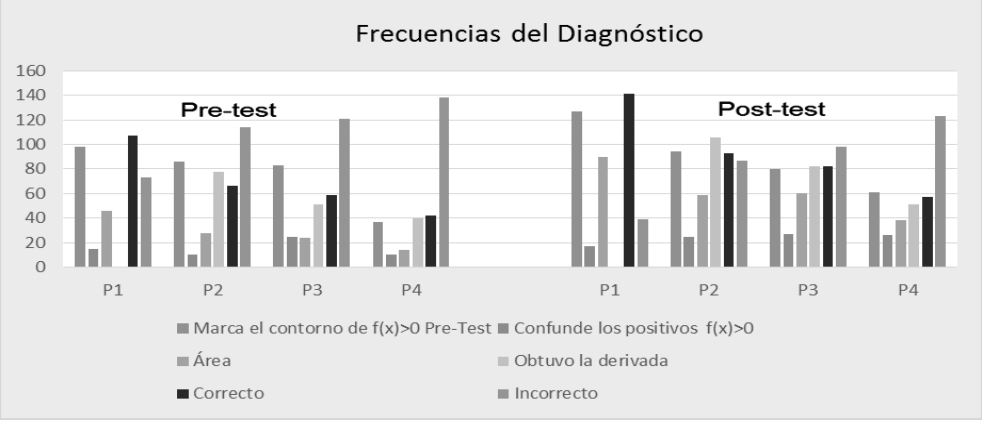
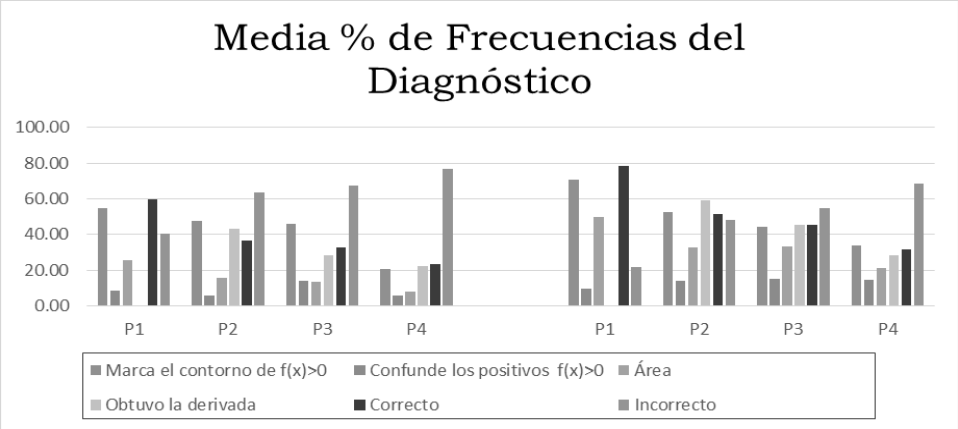


Figura 3. Porcentaje de Medias de Frecuencias del diagnóstico Pre test y Post test.



Las observaciones generales (Tabla 3) que iban arrojando los resultados, dieron lugar a hallazgos interesantes los cuales fueron agrupados por pregunta y de ellos se obtuvieron características que debemos de considerar para la configuración de actividades que nos den la mejora esperada.

Tabla 3. Hallazgos encontrados en el estudio.

<table>
<tr><th>Pregunta</th><th colspan="3">Observaciones</th></tr>
<tr><td>P1 $f(x)$</td><td rowspan="4">a) Se utilizan intervalos para precisar la solución
b) No se consideran los extremos como parte de la función.</td><td colspan="2">c) Se marcan pendientes</td></tr>
<tr><td>P2 $f'(x)$</td><td rowspan="2">c) Se señala como respuesta, únicamente cuando $f(x)\rangle 0$ y creciente.
d) Se marca los puntos de intersección con el eje de las x's.
e) Se utilizan intervalos para precisar la solución.
f) Solo se trata de ubicar por concavidades la solución.</td><td>g) Se marca la región positiva de la derivada</td></tr>
<tr><td>P3 $f''(x)$</td><td>g) Señalan sólo cuando es cóncava hacia arriba en f(x).</td></tr>
<tr><td>P4 $f'''(x)$</td><td>g) Se subraya toda la gráfica como solución.
h) Se realiza la gráfica de la $f'''(x)$ sin señalar la parte positiva.
i) Señalan sólo cuando es cóncava hacia abajo en f(x).</td></tr>
</table>

A continuación, se expresan las conclusiones del estudio y algunas ideas de actividades que nos permitirían mejorar el aprendizaje de la primera, segunda y tercera derivada en su expresión gráfica.

CONCLUSIONES

Los resultados evidencian que el curso que aborda a la primera derivada como la velocidad, la segunda derivada como la aceleración y la tercera derivada que describe el cambio en la aceleración (Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo, y Garza, 2011), corrige un poco la

interpretación gráfica de las funciones y sus primeras

El análisis cualitativo de las gráficas de la primera, segunda y tercera derivada es una herramienta que favorece la compresión gráfica de un modelo determinado. A la luz de los resultados, se encontraron las siguientes evidencias:

a) Los alumnos mejoraron en el diagnóstico, después de abordar el tema.

b) Se considera conveniente reflexionar en realizar actividades de predicción diferentes de los cambios, debido a que en las actividades propuestas se realiza el análisis por separado (magnitud a predecir/razón de cambio) suponiendo que el alumno puede reflexionar en la información que manejan ambas gráficas.

c) Hay indicios de que los estudiantes en este tipo de ejercicios, confunden entre la parte positiva de la variable independiente y de la parte positiva de la función a analizar.

d) El termino porción dentro de la redacción confunde a los estudiante ya que en lo cotidiano es como una parte con volumen.

e) Señalan en área bajo la curva y la función.

En esta dirección, se recomienda como puntos a fortalecer dentro del proceso de aprendizaje del curso de Calculo I mediante la visualización y percepción espacial (Cantoral, 2013) con actividades contextuales que traten las relaciones entre las derivadas de diferentes órdenes establecidas en Cantoral y Testa (2006) complementadas con otras actividades que establecen las relaciones de la segunda derivada con la primera derivada y de la primera derivada con la función; el valor numérico de la segunda derivada y sus relaciones con la función y su primera derivada; trabajar derivadas mayor que dos. Con estas actividades se espera que el aprendizaje en los futuros cursos fortalecerán los conceptos de cambio, variabilidad y la representación gráfica de las derivadas sucesivas de las derivadas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alanís, J.A. y Salinas, N.P. (2010). Cálculo de una variable: acercamientos newtoniano y leibniziano integrados didácticamente. *El Cálculo y su Enseñanza, 2(1),* 1-14.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En J.Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18,* 1-9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: Estudio sobre la construcción social del conocimiento*. México: Gedisa.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 6(1),* 27-40.

Cantoral, R. y Testa, Y. (2006). Procesos de resignificación del valor numérico de la función derivada segunda: Un estudio en el sistema escolar uruguayo. En J.Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 19*, 845-850. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Contreras, L. (1999). *La interpretación geométrica de las derivadas sucesivas.* Tesis de Maestría

no publicada. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 4(2),* 103-128.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Colombia: Universidad del Valle, Grupo de Educación Matemática.

González, R. (1999). Estudio paralelo de la presentación de la derivada en diversos textos de cálculo. Tesis Doctoral no publicada.CINVESTAV, IPN. México.

Robert, A. y Speer, N. (2001). Research on the teaching and learning of Calculus / Elementary analysis. En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 283-299). Holland: Kluwer Academic.

Salinas, P., Alanís, J.A. y Pulido, R. (2011). Cálculo de una variable.

Reconstrucción para el aprendizaje y la enseñanza. *Didac, 56-57(1)*, 62-69.

Salinas, P., Alanís, J. A., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J. C., y Garza, J. L.

(2011). *Cálculo Aplicado: Competencias matemáticas a través de contextos.* México: CENGAGE Learning.

CONSTRUCCIÓN COGNITIVA DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL; UNA MIRADA DESDE LA TEORÍA APOE

Andrea Vergara Gómez, Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)
andrea.vergara.gomez@gmail.com, marcela.parraguez@pucv.cl

Palabras clave: distribución binomial, variable aleatoria, teoría APOE, proceso Bernoulli, distribución de probabilidad

Key words: binomial distribution, random variable, APOS theory, Bernoulli process, probability distribution

RESUMEN: Este estudio aborda la problemática del aprendizaje de las distribuciones de probabilidad, en enseñanza secundaria. Se analizó específicamente la distribución binomial, en un estudio de caso instrumental simple, con estudiantes de 16 años. El marco teórico utilizado es la teoría APOE, que permite la descripción de los estados de construcción mental necesarios para que los estudiantes aprendan conceptos matemáticos. Un análisis epistemológico reveló que la noción de modelo de distribución de probabilidad es anterior a la definición formal de función de probabilidad y variable aleatoria, de ahí que se propone una construcción cognitiva del objeto distribución binomial, sin la presencia explícita del concepto función. Los resultados de este estudio apuntan a que la variable aleatoria generada por la repetición de un experimento Bernoulli puede ser reemplazada por el proceso de definir un criterio cuantitativo de partición del espacio muestral.

ABSTRACT: This study addresses the problem of learning the probability distributions in secondary education. It was analyzed the binomial distribution specifically, in a simple instrumental case study with students aged 16. The theoretical framework used is the APOE theory, which allows the description of states of mental construction necessary for students to learn mathematical concepts. An epistemological analysis revealed that the notion of probability distribution model is prior to the formal definition of function of probability and random variable, in consequence is proposed building a cognitive object binomial distribution without the express presence of the function concept. The results of this study suggest that the random variable, generated by the repetition of a Bernoulli experiment, can be replaced by the process of defining a quantitative criterion partition of the sample space.

INTRODUCCIÓN

La presente investigación corresponde a un estudio concerniente al aprendizaje de la distribución binomial. La enseñanza de esta distribución ha despertado gran interés en el último tiempo en el programa oficial de estudio que dispone el Ministerio de Educación de Chile, incluyéndose desde los ajustes curriculares del año 2009.

Un aspecto relevante a la hora de comprender la problemática es la relación entre la matemática y la estadística, que como disciplinas científicas, en el último tiempo, se perfilan cada vez más distintas, según lo exponen Cobb y Moore (1997), quienes además sostienen que la enseñanza de la estadística no es un subcampo de la matemática. Ahora bien, existen propuestas relativas a la posibilidad de experimentar métodos de enseñanza que, desde la matemática, se adapten a la naturaleza específica de la estadística (Batanero, 2001). Es precisamente desde esta perspectiva que la presente investigación espera armonizar aspectos procedimentales de la matemática discreta con las formas del razonamiento probabilístico.

Por otra parte, Alvarado y Batanero (2007), en su investigación acerca de la aproximación normal a la distribución binomial, sostienen que, a pesar de los procesos de simulación y manipulación de datos, la aplicación de estas distribuciones en la resolución de problemas sigue siendo compleja, evidenciándose esto en la aparición persistente de multiplicidad de errores.

En este estudio se instala la necesidad de analizar primeramente cómo los estudiantes reconstruyen cognitivamente la distribución binomial, antes que cómo la usan para resolver problemas, pues como señala Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews, y Thomas (1996), los estudiantes enfrentan situaciones problemáticas, reflexionando sobre la solución, en la medida que construyen y reconstruyen estructuras de construcción mental. De ahí, que la investigación se sustenta en la Teoría APOE, desarrollada y actualizada por Dubinsky y sus colaboradores (Asiala et al., 1996).

Ahora bien, en el caso de investigaciones centradas particularmente en el aprendizaje la distribución binomial (Killian & Kepner, 1976; Miltiadis, 2009), estas se limitan al estudio de algunas características y aplicaciones para la asignación de probabilidades y no a las dificultades en torno a su aprendizaje. No obstante lo anterior, cabe destacar que la noción de modelo de distribución de probabilidad se asienta sobre varios conceptos, cuyas dificultades de aprendizaje han sido investigadas por separado desde la perspectiva cognitiva de la teoría APOE, como el conteo y la probabilidad (Salgado & Trigueros, 2009 y Vásquez & Parraguez, 2012). Por otra parte, en cuanto al concepto de espacio muestral, Chernoff (2009) sostiene que el estudio de todas las posibles particiones que pueden hacerse sobre el espacio muestral permite una amplitud de focos para la investigación. Esta afirmación justifica el presente supuesto de investigación, el cual establece que la variable aleatoria puede ser sustituida por un criterio cuantitativo que particione el espacio muestral, permitiendo la designación de categorías.

El interés de este estudio está en determinar cómo estudiante de secundaria puede construir el modelo de distribución asociado a la repetición de un experimento aleatorio dicotómico, sin recurrir a la definición formal de variable aleatoria. Así, el objetivo es identificar estructuras y mecanismos de construcción mental relacionados con el rol de la variable aleatoria, que puedan organizar la propuesta de un modelo de construcción cognitiva de la distribución binomial como *objeto* bajo el enfoque de la teoría APOE.

La pregunta de investigación apunta a determinar la relevancia de los elementos matemáticos formales que se prescriben para la distribución binomial en la construcción cognitiva de esta última como *objeto*; ¿es necesaria la definición formal de variable aleatoria y cuál es su estado de construcción mental? A partir de esta interrogante, el presente estudio pretende constatar, mediante un estudio de caso, si los sujetos de investigación que logran identificar el carácter dicotómico de un experimento aleatorio pueden activar *procesos* para asignar probabilidades a los posibles resultados, recurriendo a la idea de variable aleatoria, sin conocer la definición formal de esta.

MARCO TEÓRICO

La teoría APOE de Dubinsky (1991) es una teoría cognitiva que considera como base la epistemología genética de Piaget. Específicamente se fundamenta en la idea de la *abstracción reflexiva* para establecer que los individuos realizan construcciones mentales que pueden pasar por distintos estados. Estas construcciones mentales son: *acciones, procesos, totalidades, objetos y esquemas*, las cuales no necesariamente ocurren de manera secuencial. El paso de uno de estos estados de construcción a otro, se realiza precisamente mediante procesos de abstracción reflexiva, considerados como los mecanismos mentales que permiten al estudiante, entre otras cosas, inferir propiedades, establecer relaciones y organizar la información.

Esta teoría sostiene que sin importar el ámbito al que pertenezca el concepto matemático, éste puede ser descrito en términos de cómo se construye para ser aprendido. Esta descripción es presentada mediante una *descomposición genética* que representa una hipótesis o modelo cognitivo para la adecuada construcción del concepto en estudio. La *descomposición genética* es un instrumento de investigación en la teoría APOE, que modela tanto los elementos constructivos del conocimiento matemático que se desea investigar como los aspectos metodológicos relacionados con la enseñanza de dicho conocimiento (Arnon, Cottill, Dubinsky, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros & Weller, 2014).

METODOLOGÍA

La teoría APOE, como ya se había señalado antes, tiene incorporado un ciclo de investigación, que constituye a su vez un ciclo metodológico de investigación, el cual ha sido validado e implementado por el grupo Research in Undergraduate Mathematics Education Community [RUMEC]. Esta propuesta metodológica posee un enfoque cualitativo y para llevarla a la práctica incorpora elementos definidos en el método de estudio de caso, porque para APOE es fundamental realizar un estudio a profundidad de la problemática en un sistema o grupo bien delimitado.

Este ciclo consta de 3 etapas: Primera Etapa: Análisis teórico del concepto o descomposición genética. Segunda Etapa: Diseño e implementación de la enseñanza. Tercera Etapa: Análisis y verificación de datos.

Sin embargo, la presente investigación no considera la componente de Diseño e implementación de la enseñanza y adapta la componente de Análisis y verificación de datos, separándolas en dos sub-etapas, como ya se ha realizado antes en otras investigaciones, por ejemplo Parraguez (2009)

plantea y utiliza un ciclo con tres etapas, donde la etapa 2 es reemplazada por el Diseño y Aplicación de instrumentos.

En la primera etapa de este ciclo se diseña una *descomposición genética* (DG), para construir el concepto distribución binomial. Para lograr esto se hacen dialogar las bases epistemológicas y matemáticas con otros antecedentes asociados a investigaciones previas en Didáctica de la Matemática.

Esta DG hipotética adquiere la forma de un diagrama explicativo y su función es describir las construcciones mentales y mecanismos de abstracción reflexiva que propician la cognición del concepto matemático en estudio.

En la segunda etapa se utiliza la DG hipotética diseñada, para construir instrumentos y recoger datos. Para ello, la DG hipotética se secciona en partes significativas. Estas partes de la DG actúan como criterios para la elaboración del instrumento, mientras más se ajuste o de cuenta de estas secciones mejor reafirma su grado de validez interna.

En este estudio no se pone a prueba toda la DG, sino que una de sus componentes específicas, la relacionada al espacio muestral y las posibles particiones sobre éste. Junto con lo anterior se realizó un análisis a priori de las posibles respuestas de los sujetos informantes, con el fin de utilizar éstas como parámetros para realizar la tercera etapa del ciclo y así categorizar los resultados. Para probar experimentalmente la DG, como afirma Arnon et al., (2014), se aplicaron los instrumentos de acuerdo a la planificación del estudio de caso.

En la tercera etapa de este ciclo se analiza la información recogida; principalmente dando ejemplos de estudiantes que parecen haber alcanzado ciertas estructuras de construcción y otros que no.

ESTUDIO DE CASO, INFORMANTES E INSTRUMENTOS

Los 21 estudiantes, que conforman el estudio de caso, cursaban tercero de secundaria en un establecimiento particular subvencionado de Valparaíso, Chile. El grupo fue seleccionado porque, al momento de realizar la investigación, ya habían estudiado, a nivel escolar y según lo prescribe el currículum oficial chileno, los conceptos de espacio muestral, experimento aleatorio y probabilidad, pero desconocían las definiciones formales de variable aleatoria y distribución de probabilidad.

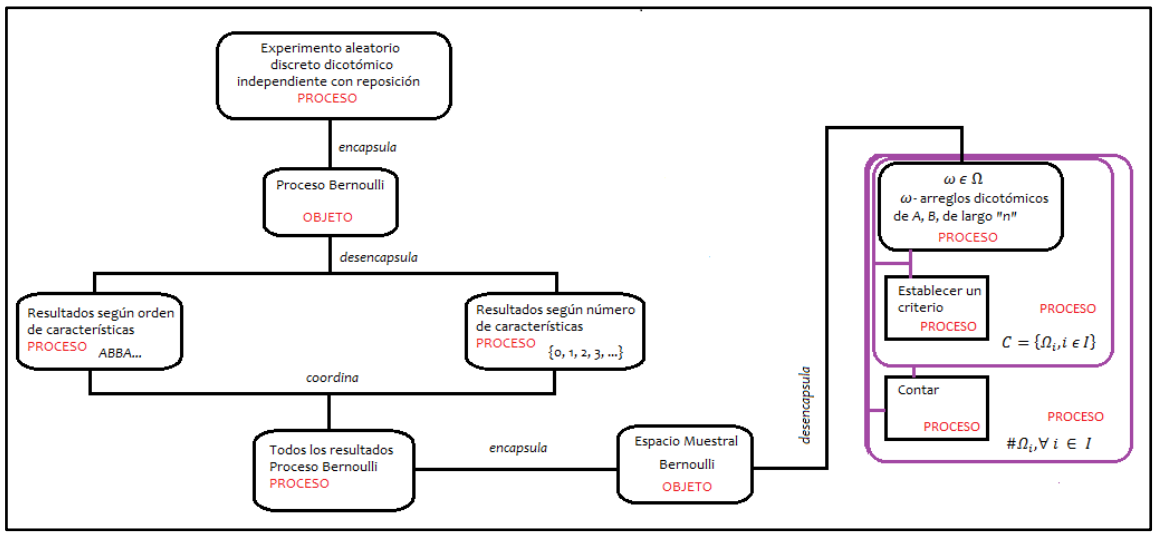
La DG hipotética

Esta se sustenta partir de 4 componentes, que atienden las distintas estructuras de construcción y mecanismos mentales requeridos en la construcción cognitiva de la binomial. Estas componentes se han denominado respectivamente: resultados de un experimento aleatorio dicotómico, variable aleatoria y triángulo de Pascal, cálculo de probabilidades y distribución Binomial. En este escrito, se abordará la primera componente y algunos aspectos de la segunda componente.

Los elementos del análisis teórico permitieron desplegar una DG que propone un camino de construcción que prescinde de elementos matemáticos muy abstractos, pues se basa en procesos cognitivos pre-operacionales, como la seriación, la ordenación y la clasificación. Estos procesos ocurren sobre el conjunto finito de sucesos que determina el espacio muestral. De este modo, la DG no contempla conceptos como función, variable aleatoria, recorrido de la variable aleatoria o números combinatorios, pero sí considera conceptos relativos al *objeto* espacio muestral y proceso Bernoulli.

Para abordar la primera componente y algunos elementos de la segunda componente se elaboró un cuestionario, donde cada una de las preguntas tiene una relación directa con un par de construcciones y un mecanismo, determinados en la DG propuesta (ver Figura 1).

Figura 1. Componente 1 y parte de la componente 2 de la DG para la distribución binomial



Básicamente el cuestionario se basa en la presentación de una situación simple de extracción de una cantidad específica de bolitas, con reposición, de una urna que posee 3 bolitas rojas y 2 bolitas azules. En este cuestionario de respuesta abierta, se les solicita que determinen resultados posibles del experimento para 3 y 4 extracciones. Además se les pide que clasifiquen los sucesos del espacio muestral para el caso de las 4 extracciones, conforme a algún criterio. En este cuestionario no se hace alusión al cálculo de probabilidades.

En términos generales, los métodos empleados para recoger los datos se basan en la interpretación de los registros escritos de las producciones de los estudiantes, ya fueran las respuestas del cuestionario como las transcripción de la entrevista. La interpretación se realizó en base al análisis a priori de los instrumentos, el cual consistió en explicitar la relación entre las preguntas hechas y las estructuras de construcción mental involucradas. De este modo, para cada pregunta se establecieron posibles respuestas, según el estado de construcción mental comprometido.

RESULTADOS

A continuación se expondrá el análisis de resultados para la pregunta 5, en la que debían realizar 4 extracciones de bolitas y pintar el color obtenido en un casillero, de izquierda a derecha, en un listón de papel. Esta tarea está estrechamente vinculada a los *procesos* de establecer criterios y manipular los elementos del espacio muestral.

Análisis de resultados para la pregunta 5

Pregunta 5: *Con los listones resultantes, establece un criterio para clasificar los listones, de modo que cada listón pertenezca a una sola categoría y ningún listón quede sin categoría. Señala claramente:*

a) El criterio de clasificación y una explicación de tu elección (con palabras)

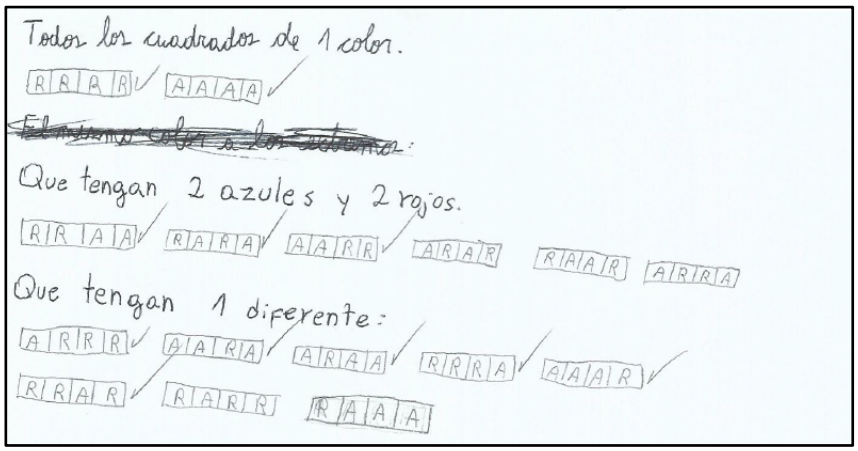
b) Las categorías o grupos y los listones pertenecientes a cada categoría o grupo (con dibujos o símbolos)

c) ¿Cuántas categorías?... ¿cuántos listones en cada categoría? (con palabras y dibujos)

Este ítem debió analizarse de manera segmentada. Para las preguntas 5.a) y 5.b), 12 de los estudiantes no elaboran respuestas. Otros 6 estudiantes dan señales de una estructura mental acción para las preguntas 5.a), 5.b) y 5.c), pues aunque intentan describir un criterio, las explicaciones no son claras y no existe coherencia interna entre los apartados. Junto con lo anterior, la noción de criterio de clasificación se confunde con algunos intentos calculatorios errados.

De los 21 estudiantes, solamente 3 logran explicar un criterio de clasificación del espacio muestral y bajo el establecimiento de dicho criterio contestan adecuadamente todas las preguntas del ítem, mostrando un estado de estructura mental *proceso* tanto para establecer el criterio como para describir las categorías asociadas. En los tres casos el criterio usado es mixto, esto es, se basa en el número de características y en la combinación de estas a la vez. Ahora bien, de los 12 estudiantes que no contestan los primeros ítems, existen 4 registros que consignan respuestas para el apartado 5.c). En estos 4 casos se recuentan brevemente las categorías consideradas y, aunque el criterio no está declarado, es posible inferirlo a partir de la descripción genérica del tipo de elemento perteneciente a cada categoría, como se puede apreciar en la Figura 2.

Figura 2. Ejemplo de estructura mental proceso para establecer un criterio de clasificación del espacio muestral y describir las categorías asociadas.



En la Tabla 1 es posible apreciar los tipos de respuesta de acuerdo a la estructura de construcción mental subyacente para la tarea asignada en la pregunta 5.

Tabla 1. Clasificación de Estructuras Mentales para la pregunta 5 del cuestionario 1

Estado de la Estructura Mental	N° de Alumnos
Sin respuesta para 5.a) y 5.b)	12
Acción, para establecer un criterio	6
Proceso 1, para establecer un criterio	3
Proceso 2, para describir las categorías establecidas	7

Dado el análisis anterior, resultaba innegable la débil presencia de la estructura mental *proceso* para la clasificación del espacio muestral conforme a algún criterio cuantitativo claro y bien definido. Si bien fue posible detectar algunos elementos que permitían evidenciar el uso del triángulo de Pascal como elemento para ordenar el conteo de los elementos del espacio muestral resultante de un proceso Bernoulli si se aumentaba el número de ensayos, no hubo suficiente evidencia para relacionar este recurso con la categorización de los sucesos.

CONCLUSIÓN

Si el proceso Bernoulli se encuentra en estado mental *objeto* es posible la construcción de este espacio muestral en estado *objeto.* De este modo, el estudiante puede realizar *acciones* sobre el espacio muestral y *desencapsular procesos* a partir de éste, que se asientan en el conteo y la ordenación.

Por otra parte, los estudiantes que poseen el estado mental *objeto* pueden, no solo determinar todos los sucesos del espacio muestral y a la vez clasificarlos, de acuerdo a algún criterio, sino que también relacionar los sucesos con arreglos o listas con dos características. El *proceso* determinar todos los resultados del proceso Bernoulli implica comprender que el orden de los elementos influye en la distinción de los sucesos compuestos Lo anterior coincide con las conclusiones obtenidas por Fischbein, Nello y Marino (1991) quienes señalan que no hay una comprensión natural de que los posibles resultados de un espacio muestral deben distinguirse, de acuerdo al orden de sus componentes elementales.

En lo concerniente al *objeto* espacio muestral, la relación entre la búsqueda heurística de resultados posibles y las medidas de probabilidad es estrecha, pero esta misma cercanía impide una representación clara de los sucesos, especialmente si estos son compuestos. Entonces, se tiene que la búsqueda y descripción de todos los resultados posibles es difícil siendo estos compuestos, pero igualmente se recurre a la idea de qué tan probable es cada suceso para enunciarlos. Como señala Fischbein et al., (1991) dependiendo del tipo de problemas, los estudiantes pueden mostrar un cierto sentido natural del papel de la magnitud o probabilidad de una parte del espacio muestral. En este estudio, de hecho, algunos estudiantes no pueden describir todos los resultados posibles, pero sí logran caracterizar lo que puede ocurrir, según sea más o menos probable.

En relación al *proceso* variable alealtoria, la construcción de la función $X: \Omega \rightarrow R_X$ ocurre de manera tácita, a través de la *coordinación* de *procesos* sobre el espacio muestral, de modo que la variable aleatoria puede ser reemplazada por un criterio de partición de este último. Este criterio debe ser específico y, si bien posee carácter cuantitativo, no puede desentenderse de la concepción de los sucesos como arreglos, de largo n, con n igual al número de repeticiones del experimento. Lo anterior implica que el *proceso* de clasificación de los elementos del espacio muestral depende de otros dos *procesos* que ocurren simultáneamente; estos son el conteo y la ordenación. Estos aspectos podrían resultar decisivos para que un estudiante de secundaria se aproxime a construir el modelo de distribución binomial en términos de la asignación de probabilidades para cada una de las categorías definidas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alvarado, H., & Retamal, L. (2015). La aproximación binomial por la normal: una experiencia de reflexión sobre la práctica. *Paradigma*, *31*(2), 89-108.Arnon, I., Cottill,

J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory, A Framework for Research and Currículum Development in Mathematics Education.* New York Heidelberg Dordrecht London: Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.*), Research in Collegiate Mathematics Education* II (pp.1–32). U.S.A.: American Mathematical Society

Batanero C. (2001). *Didáctica de la Estadística.* Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Granada, España. Recuperado en http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/didacticaestadistica.pdf.

Cobb, G., & Moore, D. (1997). Mathematics, Statistics, and Teaching*. The American Mathematical Monthly*, *104*(9), 801 – 823.

Chernoff, E. (2009). Sample space partitions: An investigative lens. *The Journal of Mathematical Behavior 28*, 19 – 29.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123), Dordrecht: Kluwer.

Fischbein, E., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 523 – 549.

Killian, C., & Kepner, H. (1976). Pascal Triangle and the Binomial Probability Distribution. *Mathematics Teacher*, *69*(7), 561 – 563.

Miltiadis, C. (2009). The Binomial Distribution in Shooting. *Teaching Statistics*, *31*(3), 87-89.

MINEDUC (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media*. Santiago de Chile: MINEDUC.

Parraguez, M. (2009). *Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial* (Tesis doctoral no publicada). Instituto Politécnico Nacional, México.

Salgado, H., & Trigueros, M. (2007). Conteo: una propuesta didáctica y su análisis. *Educación Matemática*, *21*(1), 91 – 117.

Vásquez, C., & Parraguez, M. (2012). Construcción del concepto probabilidad: una perspectiva desde la teoría APOE. *En P. Lestón (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25, 573-582.*

IBSN: 978-607-95306-5-5. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS: DIFICULTAD O FORTALEZA EN EL APRENDIZAJE DE LOS ESTUDIANTES EN EL TRABAJO CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

Miguel Fernández, Edwin Moreno, Karen Ortega, Wendy Tous, Tulio Amaya
Universidad de Sucre (Colombia)
migue_12@hotmail.es, mpedwin595@gmail.com, kagiorpel125@hotmail.com, dina-24@hotmail.es y tuama1@hotmail.com

Palabras clave: Estrategias Didácticas, Dificultad, Fortaleza, Aprendizaje, Fracciones Algebraicas.

Key words: Teaching Strategies, Difficulty, Strength, Learning, Algebraic Fractions.

RESUMEN: El propósito de esta investigación es establecer las fortalezas y debilidades que traen consigo las diferentes estrategias que utilizan los docentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje, con respecto a la formulación y desarrollo de operaciones con fracciones.

ABSTRACT: The Purpose of this research is to establish the strengths and weaknesses the different strategies used by teachers in the teaching and learning process with regard to the formulation and development of operations with fractions.

INTRODUCCIÓN

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se presentan fortalezas y debilidades, teniendo en cuenta que los estudiantes reflejan diferencias cognitivas en la inclusión de nuevos conocimientos. Es por esto que el docente debería orientar la temática de una forma clara y concisa apoyándose en estrategias didácticas que estén afín con su objetivo, permitiéndole al estudiante un mejor desarrollo teórico y práctico en la construcción de nuevos conocimientos (*Osses y Jaramillo, 2008*). En el transcurso de este proceso aparece el contrato didáctico, en el cual según Chamorro (2005, p. 53) "… el alumno y el profesor ocupan posiciones asimétricas en la relación didáctica, fundamentalmente en relación con el saber". Al analizar el planteamiento anterior, se nota que el profesor debe ser un letrado matemático y por ende está en la obligación de establecer los modelos de enseñanza de la forma más apta para el aprendizaje del alumno.

Según D'Amore, (2006) algunos docentes están imposibilitados para desarrollar habilidades de pensamiento que le permitan al estudiante realizar operaciones con fracciones algebraicas, es decir, el docente no lleva al estudiante a que reflexione sobre los procesos de construcción del conocimiento matemático.

La variación de la influencia del profesor sobre el alumno forma parte de las estrategias para el desarrollo y la autodirección del mismo, como también puede conducirlo a consecuencias inesperadas, es decir, a que no adopte debidamente los conocimientos apropiados para su formación coherente y razonable (Rosales, 2013).

En lo planteado por Rosales (2013) se observa que los cambios que realiza el docente en los patrones de instrucción, representan un factor importante para determinar el desarrollo del aprendizaje, teniendo en cuenta que el docente puede llegar a ignorar las consecuencias de dichos cambios, debido a que no reflexiona en torno a su aplicación.

Por otra parte Chamorro (2005) dice que algunas elecciones del profesor, aquellas que resultan fundamentales por la significación… se llaman variables didácticas. En este sentido las variables didácticas son de importancia en el proceso de enseñanza y aprendizaje, puesto que son los docentes quienes seleccionarán los elementos que les permitirán observar las debilidades estudiantiles para así trabajar en el mejoramiento de éstas, logrando que el estudiante adquiera los nuevos conocimientos matemáticos.

Partiendo de los planteamientos anteriores, se puede inferir que las orientaciones del docente en la construcción de los conocimientos, donde debe hacer uso de estrategias didácticas para mejorar la inserción de los nuevos saberes, son fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Es por esto que el dominio de dichas estrategias didácticas permite un mejoramiento favorable a la práctica docente, las cuales deben escogerse de acuerdo al objetivo que se busque para no perder el sentido del trabajo. Por tanto al identificar las dificultades que presentan los estudiantes de un determinado grado, es preciso utilizar esas variaciones como influencia para realizar acciones que generen la construcción del conocimiento en los estudiantes. De igual forma debe tenerse en cuenta que las variaciones didácticas y el debido uso de las estrategias de trabajo lograrán que el estudiante alcance este desarrollo cognitivo, permitiéndole un mejor desenvolvimiento y dominio conceptual y práctico sobre la temática que se esté abordando.

Hay que tener en cuenta que la tarea del educador matemático conlleva entonces una gran responsabilidad, puesto que las matemáticas son una herramienta intelectual potente, cuyo

dominio proporciona privilegios y ventajas intelectuales; es por ello que mediante el aprendizaje de las matemáticas los alumnos no sólo desarrollan su capacidad de pensamiento y de reflexión lógica sino que, al mismo tiempo, adquieren un conjunto de instrumentos eficaces para explorar la realidad, representarla, explicarla y predecirla; en suma, para actuar en y para ella (Ministerio de Educación Nacional, 1998).

En fin, la tarea del docente conlleva un deber ya que la enseñanza de las matemáticas es una tarea de cuidado y compromiso, donde este orientará al educando a que conozca y domine una determinada temática utilizando una serie de estrategias didácticas que le faciliten al estudiante una mejor comprensión al analizar la temática.

Conforme al problema presentado se deriva que el proceso de enseñanza - aprendizaje tiene como fin la formación del estudiante integral (Chamorro, 2003), y teniendo en cuenta que en este proceso hay un sujeto que conoce, que puede enseñar, quiere y sabe enseñar (docente) y otro que desconoce, que puede aprender, quiere y sabe aprender (estudiante), donde se necesita que ambos estén dispuestos para llevar a cabo dicho proceso. De igual forma están los elementos curriculares, es decir, lo que se quiere enseñar o aprender y los instrumentos o medios que se utilizan para enseñarlo o aprenderlo con el fin de lograr los objetivos que se han propuesto.

Por ende se utilizan diferentes herramientas de investigación que permiten ver la realidad educativa, logrando ver qué aspectos deben ser mejorados para seguir brindando un mejor trabajo educativo, ya que debido a los cambios actuales los docentes deben replantear su quehacer y reflexionar acerca del para qué de su labor. Es así como los profesores de las nuevas generaciones deben modificar el concepto de enseñanza hacia uno que busque comprender las necesidades de la sociedad del conocimiento (o del aprendizaje) a través del procesamiento de la información, de manera que se logre el aprendizaje máximo, se estimule la creatividad y se desarrolle la capacidad de iniciar el cambio y enfrentarse a él (Hargreaves, 2003).

En consecuencia, Giroux (1990) trabaja el concepto de reflexión, pero agrega la idea de que ésta debe ser realizada con un carácter crítico y social. Este autor plantea que las escuelas funcionan principalmente como agencias de reproducción social que preparan trabajadores dóciles y obedientes. Desde esta perspectiva, la formación del futuro docente se replantea, rechazando la visión del profesor como técnico que enseña un conocimiento escolar que representa de manera particular la cultura dominante.

Partiendo de lo anterior y tomando como muestra de investigación a la Institución Educativa Madre Amalia, se desarrolló una observación directa al grupo de estudiantes del grado octavo C, donde se logró evidenciar fortalezas y debilidades en el proceso educativo, ya que al dar una mirada más a fondo sobre la problemática de las estrategias didácticas y la importancia en el quehacer educativo, fue notorio ver ciertos vacíos teórico - prácticos en el educando, los cuales son evidentes en el desarrollo de la temática de expresiones algebraicas en el área de las matemáticas, más exactamente en la contextualización de situaciones, tal vez por los diferentes estilos de aprendizaje de cada estudiante. En consecuencia el problema en la evaluación de aprendizajes matemáticos, que se manifiesta por la falta de unificación de significados y diversidad de formas que se lleva a cabo por parte de los profesores, refleja deficiencias eminentes en donde, a pesar de las orientaciones ofrecidas, la carencia persiste.

Por consiguiente se quiere enfatizar la investigación en establecer las fortalezas y debilidades en las estrategias de enseñanza utilizadas por los docentes de matemáticas en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Tomando como base temática las operaciones con fracciones algebraicas, se consolida la pregunta problema de la siguiente forma:

¿Las estrategias que emplean los docentes en la enseñanza de las fracciones algebraicas en el grado octavo, constituyen fortalezas o debilidades en el aprendizaje de los estudiantes?

METODOLOGÍA

Población y Muestra

Se trabajó con 37 estudiantes colombianos del grado octavo de educación básica de una Institución educativa de carácter público, con edades entre 12 y 14 años.

Técnicas e Instrumentos

Dentro de la investigación se utilizó:

- Una observación directa de la clase con el profesor de matemáticas, aplicada a los estudiantes de octavo C, para determinar la relación de las estrategias de enseñanza con el aprendizaje adquirido por éstos y así enriquecer la investigación.
- Una entrevista, con el fin de conocer las concepciones del docente de matemáticas acerca de la implementación o utilización de las estrategias utilizadas por él en la transmisión de conocimientos.
- Se aplicó un cuestionario con situaciones contextualizadas, en un contexto geométrico, que involucra fracciones algebraicas.

Procedimiento

Se realizó un análisis cualitativo en donde se buscó determinar el comportamiento de la muestra al responder el cuestionario, para identificar aquellas dificultades que presentan los estudiantes, teniendo en cuenta los propósitos del modelo social cognitivo, los cuales son la mejora del discente en todos los ámbitos de su vida y el logro exitoso del aprendizaje. Para el tratamiento de la información clasificaron las pruebas por categorías, teniendo en cuenta aspectos como el rango de calificación, el tipo de errores (tales como errores de entrada, de escritura y epistemológicos), las respuestas correctas e incorrectas, y el número de preguntas resueltas. Luego, este proceso arrojó resultados que medimos por porcentajes y que luego fueron ingresados a los informes respectivos, que contribuyeron al desarrollo de esta investigación. La entrevista se le hizo sólo a aquellos estudiantes cuyas respuestas resultaron de difícil interpretación. Mientras que la observación de las clases sirvió para fundamentar ideas iniciales, por las que se indagó posteriormente, con las que se fundamentaron tipos de estrategias utilizadas en otros contextos.

RESULTADOS Y ANÁLISIS

Para identificar las dificultades o fortalezas presentadas, se aplicó una prueba diagnóstica relacionada con los conceptos de perímetros y áreas de figuras planas, utilizando expresiones

algebraicas para la medida de los lados. De forma general, se observó que estas giraban en torno al proceso de Transición de la aritmética al álgebra, las cuales fueron:

Ley de los signos:

El 56,75% (21) de los estudiantes presentan dificultades a la hora de efectuar el producto y adición entre dos fraccionarios de signo contrario, lo que condujo a una errada solución de la situación problema. Un ejemplo que permite evidenciar lo anterior es:

(-5) + (3) = -8

Esto refuerza lo reportado por Carrión (2007), y refleja notablemente uno de los errores más frecuentes que presentan los estudiantes en la solución de actividades donde tengan que manipular polinomios aritméticos o expresiones algebraicas. Este estudiante manifestó que el signo negativo resulta de la multiplicación de los signos de los sumandos. Por el porcentaje de aciertos se puede inferir que en la realización de operaciones aditivas como las que se les presentaron, este grupo de estudiantes presenta más dificultades que fortalezas.

Producto de polinomios:

En el desarrollo de la situación, el 48,64% de los estudiantes cometieron errores en la multiplicación de polinomios. El más notorio fue que no tuvieron en cuenta que se debe dejar la misma base y sumar los exponentes. Es aquí donde los estudiantes mostraron serias dificultades, por no fijar la base y el grado del polinomio, resultado del producto.

El Algoritmo o Procedimiento de resolución de los problemas:

En este aspecto, se denota el conocimiento que poseen algunos estudiantes para darle solución a este tipo de problemas; las dificultades radican en el hecho de determinar el paso a seguir, en la secuencia del algoritmo para lograr una solución. Estas son las más frecuentes en la solución de este tipo de situaciones.

De tipo Epistemológico:

La base de conocimientos o conocimientos previos que debían tener los estudiantes, no parecen ser los más adecuados, ya que no utilizaban, no se sabe si por desconocimiento o por olvido, los conceptos de perímetro ni de área de las figuras, como base para iniciar con la solución de las situación.

Con la homogeneidad/heterogeneidad de las fracciones algebraicas:

Otra dificultad fue al operar las medidas de los lados de las figuras, dado que eran fracciones algebraicas: no determinaban a simple vista la forma más básica de operarlas como fracciones homogéneas, realizando operaciones más dispendiosas, que los llevó a cometer errores. Al operar lo hacían sin tener en cuenta la variable “x”, es decir, solo la suprimían de la expresión y operaban sin tenerla en cuenta.

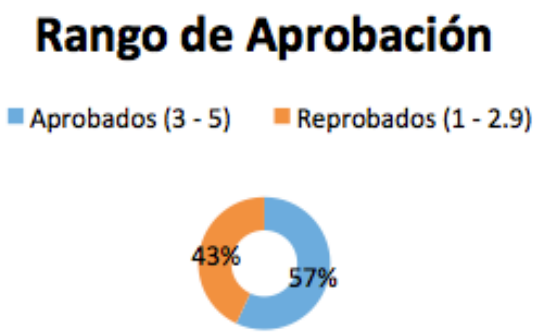
Para explicar esta transición, Valdivé y Escobar (2011), Romero, Rojas y Bonilla (2010) utilizan la dualidad proceso-objeto (trabajo conjunto entre el proceso de instrucción y el objeto que se busca). Según estos autores, una de las grandes diferencias entre la aritmética y el álgebra, es que en la primera las expresiones simbólicas (en este caso numéricas) son interpretadas como procesos; mientras que en la segunda, han de interpretarse como procesos y como objetos.

Por lo cual en el trabajo con expresiones algébricas es frecuente que los estudiantes actúen "sin pensar", trasformando las expresiones por medio de técnicas algebraicas aprendidas e ignorando sus significados, sin embargo, es fundamental tener la capacidad de recuperar los significados de dichas expresiones cuando se requiera hacerlo. Lo anterior en razón de que un buen dominio del álgebra requiere comprender ambas concepciones de las expresiones algebraicas (objeto y proceso) y flexibilidad en el paso de una a otra en la resolución de tareas según sea necesario (Romero, Rojas y Bonilla, 2010). De este modo, el trabajo con expresiones algebraicas requiere la conjugación flexible de conocimiento procedimental y conceptual (Sepulveda y Santos Trigo, 2006) que facilite una mejor comprensión de los conceptos estudiados.

Las deficiencias presentadas en esta situación, inciden potencialmente en la producción de nuevas dificultades en el desarrollo de las siguientes temáticas, incitando un bajo nivel intelectual en los estudiantes.

El enfoque inductivo que se utiliza para la introducción al algebra, asume que las relaciones matemáticas, que son el verdadero objeto de la representación algebraica, son familiares al alumno debido a su aprendizaje de la aritmética, por lo cual durante la enseñanza del álgebra se les presta poca atención. Sin embargo, diversos estudios muestran que muchos alumnos poseen una pobre comprensión de las relaciones y estructuras matemáticas y muestran una falta de relación entre sus conocimientos aritméticos y sus conocimientos algebraicos (Valdivé y Escobar, 2011). Dichos trabajos evidencian que esta forma tradicional de introducir el álgebra no es eficaz en el desarrollo de las habilidades de los alumnos para reconocer y usar la estructura matemática. A esto Kieran (1992) añade la comprensión del significado de las letras y el cambio de convenciones, como otras de las principales dificultades en la introducción del álgebra.

Culminando esta investigación, se realizó una prueba escrita sobre expresiones algebraicas estructurada por cinco interrogantes en relación a un problema, lo que permitió ver y analizar el desarrollo de la temática abordada y determinar si las dificultades persisten o ya han sido superadas en este grupo; obteniendo las siguientes estadísticas:



Este apartado permite inferir el notorio avance de los estudiantes con respecto a esta temática (división de polinomios), que a pesar de las dificultades presentadas en el desarrollo de las clases los estudiantes poco a poco lograron superar las deficiencias, gracias al esmero y trabajo grupal ya que en algunas ocasiones algunos de estos que comprendían mejor el tema explicaban aquellos que aún presentaban dudas, obteniendo así el rango de aprobación que se muestra en el gráfico.

CONCLUSIONES

Al analizar los porcentajes de aciertos de los estudiantes de la muestra se puede inferir que en la realización de operaciones aditivas y multiplicativas con expresiones algebraica como las que se les presentaron, este grupo de estudiantes presenta más dificultades que fortalezas. Además, utilizan la ley de los signos indistintamente en operaciones aditivas o multiplicativas. Esto a pesar de que las indicaciones dadas por el docente a cargo de la asignatura fueron adecuadas, con situaciones contextualizadas, produciendo y relacionando diferentes representaciones, por lo que podría esperarse que los estudiantes fueran más asertivos en sus procesos y por tanto en sus respuestas a la situación planteada, contradiciendo en cierto modo lo propuesto por Rosales (2013), quien manifiesta las estrategias utilizadas por el docente tienen influencia directa en el actuar de los estudiantes, sin embargo, no tenemos registros del actuar y de las estrategias utilizadas por otros profesores que pudieron orientar a este grupo de estudiantes en el pasado.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Carrión, V. (2007). Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, N° 11, pp. 19-57.

Chamorro, M.C. (2005). *Didáctica de la Matemáticas:* Madrid: Pearson.

Chamorro, M.C. (2003). "Didáctica de las Matemáticas para primaria". Madrid: Pearson Educación.

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá: Editorial Magisterio.

Giroux, H. (1990) *Los profesores como intelectuales*. Barcelona: Piados

Hargreaves, A. (2003). *Enseñar en la sociedad del conocimiento (La educación en la era de la inventiva)*. Barcelona: Octaedro.

Kieran, C. (1992). El aprendizaje y la enseñanza del álgebra *escolar En D. Grouws (Ed.). Manual de investigación sobre la enseñanza de las matemáticas y el aprendizaje.* (Págs. 390 a 419). Nueva York: Macmillan Publishing Company.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos curriculares*. Santa Fe de Bogotá, D.C.

Osses, S. & Jaramillo, S. (2008). Metacognición: un camino para aprender a aprender. Estudios Pedagógicos 34(1), 187-197.

Romero, J., Rojas, P. & Bonilla, M. (2010). Modificación de un conflicto semiótico en un ambiente de trabajo colaborativo. *Revista Paradigma, 31(1), 161- 182.*

Rosales, C. (2013). Competencias específicas curriculares que ha de adquirir el estudiante del título de grado de maestro Profesorado. *Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 17(3), 73-90*.

Sepúlveda, A. & Santos Trigo, L. (2006). Desarrollo de episodios de comprensión matemática. Estudiantes de bachillerato en procesos de resolución de problemas. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 11(31), 1389-1422.*

Valdivé, C. & Escobar, H. (2011). Estudio de los polinomios en contexto. *Revista Paradigma, 32(2),* 85-106.

INTEGRACIÓN DE LA ENSEÑANZA DE MATEMÁTICA Y PROGRAMACIÓN PARA RESIGNIFICAR CONCEPTOS Y REMODELAR SITUACIONES

Malva Alberto, Fernanda Golobisky, Marta Castellaro, Daniel Ambort
Facultad Regional Santa Fe, Universidad Tecnológica Nacional (Argentina)
mtoso@frsf.utn.edu.ar, mfgolo@santafe-conicet.gov.ar, mcastell@frsf.utn.edu.ar
dambort@gmail.com

Palabras clave: Aprendizaje con tecnologías, Estrategias de Enseñanza Integradas.

Key words: Learning with technology, Integrated Teaching Strategies.

RESUMEN: En este trabajo se describen la metodología utilizada, las actividades más significativas llevadas a cabo desde las cátedras universitarias y los aportes concretos realizados para integrar la enseñanza de temas de matemática con la enseñanza de programación. Los objetos de estudio del cálculo, del álgebra, de la matemática discreta y de la programación requieren abstracción, comprensión, comprobación, validación y resolución de problemas para ser comprendidos y transferidos a nuevas situaciones. Los tiempos de clases son insuficientes para abordar casos completos y significativos. Las actividades de aprendizaje demandan además competencias grupales y computacionales. Por ello, las acciones implementadas en matemática y programación han permitido resignificar conceptos y remodelar situaciones, favoreciendo tempranamente el anclaje de competencias profesionalizantes.

ABSTRACT: This paper describes the methodology used; the most significant activities carried out on university-level subjects and specific contributions made to integrating the teaching of math and programming topics. The objects of study of calculus, algebra, discrete mathematics and programming require abstraction, comprehension, testing, validation and troubleshooting in order to be understood and transferred to new situations. Class schedules are inadequate to address comprehensive and significant case studies. Learning activities also demand group and computer skills. Therefore, the actions implemented in mathematics and programming have enabled resignify concepts and remodel situations, favoring early anchoring of professionalizing skills.

INTRODUCCIÓN

Se pretende que los futuros profesionales comiencen tempranamente a trabajar sobre estas competencias y las renueven constantemente como personas flexibles, capaces de continuar formándose, de actuar en distintos ambientes y de adaptar y aplicar lo aprendido en el aula universitaria en distintos contextos profesionales. Esto exige a los profesores de tecnologías (programación, computación) y de ciencias básicas (matemática), redoblar esfuerzos para poder intervenir e incidir adecuadamente en la educación de estas nuevas juventudes y a diseñar espacios (físicos, en línea) y ambientes (de estudio, de trabajo, de colaboración) donde realmente estas competencias académicas y sociales pueden ejercitarse, desarrollarse y anclarse. La resolución de problemas compartidos en matemática y programación da la posibilidad de brindar un escenario cierto para resignificar conceptos y remodelar buenas situaciones de aprendizaje.

Este trabajo sintetiza experiencias desarrolladas por el equipo de investigación y describe una manera de intervenir en la docencia universitaria, en los cursos de matemática y programación, para que una enseñanza integrada mejore la calidad educativa que se imparte y se recibe. Se hace inicialmente un recorrido de la investigación teórica compartida por el grupo docente que llevó a cabo la lectura bibliográfica y el registro de las observaciones. El camino se completa con el recorrido de las actividades más significativas y los conocimientos ya existentes, mencionando los aportes concretos realizados en distintos momentos y que fueron parte del proyecto. Se integraron contenidos entre distintas cátedras de Matemática, tales como Cálculo y muy especialmente Matemática Discreta, con la cátedra de Algoritmos y Estructuras de Datos (Programación). Todas estas cátedras se dictan en forma paralela durante el primer período lectivo y de inicio, en la carrera Ingeniería en Sistemas de Información de la Facultad Regional Santa Fe de la Universidad Tecnológica Nacional, en Argentina.

SEGUIMIENTO DE DISTINTAS LÍNEAS METODOLÓGICAS

El trabajo gira en torno de las siguientes líneas metodológicas: por un lado se considera la acción de los profesores de distintas cátedras y el consenso de una metodología de trabajo, al contar con un equipo que lleva a la praxis educativa una enseñanza abierta, con capacidad de reflexión, de diálogo y dispuesto a recibir comentarios y opiniones de otros, con capacidad de cambio y renovación. El marco metodológico elegido, es el de la investigación-acción (Elliott, 2000; Latorre, 2004), ya que ésta implica una acción inmediata y correctiva con el propósito de mejorar la práctica educativa hacia el interior y exterior del aula de clases y atender al perfeccionamiento de quienes están verdaderamente comprometidos con este accionar.

Esta acción metodológica centra la mirada en actividades concretas de reflexión y acción del equipo docente y como síntesis, pone énfasis en la secuencia didáctica y la figura del que aprende.

Respecto de la secuencia didáctica, se conforma una espiral de actividades que comprende como mínimo la observación y el diagnóstico de una situación problemática en la práctica; la formulación de estrategias para resolver el problema; la implementación y evaluación de las acciones y la discusión, aclaración y diagnóstico posteriores de nuevas o más complejas situaciones problemáticas. Trabajar bajo el marco de esta metodología permitió al equipo docente profundizar la comprensión, en el sentido del diagnóstico y discusión del problema y adoptar una postura exploratoria frente a la problemática planteada para encontrar soluciones factibles.

Respecto de la figura del que aprende, se atiende a sus cargas motivacionales, el desarrollo de sus habilidades metacognitivas, el inicio del aprendizaje de habilidades y capacidades para el mejoramiento de los desempeños como futuro profesional de la ingeniería y la ayuda educativa que puede requerir (Serrano y Pons, 2011). El objetivo planteado fue facilitar los escenarios para hacer posible el desarrollo sus competencias académicas (de comprensión, resolución, validación), de investigación (en el sentido de indagación, de búsqueda y averiguación) y sociales (comunicación, respeto por las opiniones diversas, responsabilidad, trabajo en equipo), durante el tránsito por el primer año universitario, a partir de resolución de problemas compartidos en matemática y programación que permitan resignificar conceptos y remodelar buenas situaciones de aprendizaje. Se enumeraron además valores implícitos subyacentes y en continua revisión, para los miembros de la comunidad de aprendizaje. Adherimos a que los alumnos deben tener libertad para:

1. Plantear problemas a investigar que atiendan a la resolución de situaciones.

2. Expresar ideas y desarrollar soluciones.

3. Comprobar sus soluciones frente a pruebas pertinentes y suficientes, es decir, realizar procesos de comprobación y validación.

4. Discutir con los demás sus ideas, asumiendo actitudes colaborativas.

Por su lado, los profesores, respetan estos principios iniciales:

- Procurar no obstruir la acción de los alumnos.
- Intervenir para ayudar a los alumnos a actuar en relación con los puntos anteriores.

Otra línea metodológica considera la necesidad de formación de ingenieros para el desarrollo del país (Morano, 2012) y que, en nuestro caso concreto, opera sobre la necesidad de revisión del currículum de las carreras de ingeniería, comenzando con medidas concretas para la articulación, continuando con la amplitud y selección de los contenidos de ciencias y tecnologías básicas para lograr un equilibrio entre las demandas del campo disciplinar, la construcción de guías de estudio adecuadas, el ofrecimiento de actividades compartidas entre las cátedras, el uso de recursos tecnológicos o aplicaciones para la resolución de problemas y validación de cálculos, el tiempo destinado a los trabajos extracurriculares y la atención a los procesos de evaluación y difusión de las actividades realizadas por docentes y alumnos.

■ DISEÑO DE ACTIVIDADES Y PROBLEMAS DE INGENIERÍA COMPARTIDOS EN MATEMÁTICA Y PROGRAMACIÓN

El equipo de investigación está integrado por docentes de las áreas de ciencias (matemática) y tecnologías básicas (programación). La enseñanza de la programación utiliza entre otras estrategias, la resolución de problemas a través del uso de computadoras y la metodología modular descendente. Este proceso se descompone en varias etapas: interpretación del enunciado del problema, modelado de una solución, selección de las estructuras de datos más adecuadas a la situación planteada, indagación de la librería de funciones disponibles, escritura del algoritmo, implementación en un lenguaje de programación de alto nivel y la optimización del uso de los recursos disponibles para el desarrollo de un programa (González y Madoz, 2013). La actividad práctica es fundamental para comprender y adquirir las capacidades deseadas. La intervención

docente, el empleo de técnicas y herramientas adecuadas, el uso de distintas metodologías y de nuevos recursos tecnológicos pueden constituirse en el andamiaje educativo que requiere el estudiante. El aprendizaje basado en problemas es un proceso de indagación que permite resolver preguntas, dudas o incertidumbres, que permite la fragmentación de un problema complejo en otros de menor complejidad y que generalmente se desarrolla en grupos de trabajo pequeños que operan en forma colaborativa (Morales y Fitzgerald, 2004).

Entre las actividades desarrolladas, se cuentan:

- Desarrollo de trabajos prácticos de resolución de problemas de ingeniería, diseñando herramientas de apoyo a la matemática: UTNaprox. La herramienta aproxima cálculos con fracciones, funciones, sumas finitas, integrales, series.
- Propuesta de tareas de desafío extracurriculares, tal es el caso de la participación de los alumnos en la resolución de problemas matemáticos presentados en sitios en línea (Project Euler, por ejemplo) que requieren para su solución del diseño de algoritmos que incluyen funciones recursivas, números primos, ecuaciones diofánticas, tratamientos de tipos de datos abstractos sobre rectas, conjuntos. Las actividades 1. y 2. son desarrolladas en la siguiente sección.
- Inclusión en los casos de estudio de programación, de problemas matemáticos susceptibles de tratamiento computacional: fracciones, números reales, complejos, puntos, rectas, etc. Por ejemplo, una recta desde el punto de vista de la geometría analítica puede describirse como un conjunto infinito de puntos del plano que verifica una determinada condición que se traduce algebraicamente en una ecuación de primer grado con dos variables y se enseñan conceptos asociados como paralelismo, intersecciones, distancias. Pero el tratamiento computacional requiere primero de una remodelización de la recta que debe ser representada a través de un conjunto finito de parámetros. Por ejemplo, dos puntos del plano como cuatro números reales; pendiente y ordenada al origen como dos números reales; coeficientes de la ecuación implícita de la recta como tres números reales. Una vez definido el modelo de representación de la recta que se usará, los equipos estudiantiles, deben programar las funcionalidades de acuerdo a esa representación.
- Participación en una competencia, TECNOMATE, como parte de un proceso de desafío conjunto y con ambiente restringido, donde los problemas seleccionados se buscan recuperando y resignificando la matemática (Ambort, 2015). Está ideada para que puedan participar alumnos de los distintos niveles de la carrera, así como alumnos de escuelas medias (posibles aspirantes) en una jornada común, con momentos y algunas pautas comunes, buscando los objetivos antes planteados, pero permitiendo que cada alumno pueda hacerlo desde su nivel. La experiencia es opcional y en el caso de las escuelas secundarias se trabaja con los directivos y docentes para que faciliten la participación de los estudiantes, en las etapas de preparación y en la jornada. La preparación de los alumnos se realiza con el cursado de un gabinete extracurricular generado para apoyar este tipo de actividades durante el año, y con tutorías ofrecidas. En el caso de la escuela media, para los alumnos que cursan orientaciones de informática, se los invita a participar de las reuniones semanales del gabinete. Los alumnos de la escuela secundaria pueden optar por sumarse a grupos de alumnos del primer año de la

Facultad, y trabajar en lenguajes como C o C++, o bien participar de la categoría de juegos, trabajando con una herramienta denominada “Alice”. La competencia dura 4 horas, durante las cuales los equipos (de 3 integrantes) tienen que resolver un conjunto de problemas. Para los alumnos de la UTN (en cualquier nivel), los mismos deben codificarse en lenguaje C ó C++, y ser subidos a un sitio juez (Spoj), para su evaluación.

EXPERIENCIAS INTEGRADORAS Y FAVORECEDERAS DE COMPETENCIAS

En carreras de ingeniería es frecuente que la resolución de problemas implique cálculos numéricos complejos. Para ello, los alumnos cuentan con una herramienta muy conocida: la calculadora científica, que brinda resultados exactos cuando éstos existen, o bien, aproximaciones con muchas cifras decimales. En este caso, las calculadoras utilizan un método predefinido y una precisión predeterminada. Sin embargo, existen múltiples formas para obtener tales aproximaciones. Los alumnos no siempre son conscientes de esto y en general no reflexionan sobre la forma en que se obtiene la respuesta. Integrando las áreas de matemática y programación, se gestó la aproximadora "UTNaprox", con el objetivo de hacer visible esta observación.

En la cátedra de Algoritmos y Estructuras de Datos (AED), se solicitó a los alumnos la construcción de una herramienta, denominada UTNaprox, que permita aproximar números irracionales y algunas funciones trigonométricas y del cálculo en general.

La aplicación UTNaprox posibilita al usuario seleccionar y parametrizar el método con el que se entrega el resultado, calculándolo mediante diferentes algoritmos y con una precisión determinada desde diferentes opciones. Como complemento adicional se solicitó a los alumnos una indagación histórica sobre los métodos de aproximación que fueron descubiertos hace varios siglos atrás, por distintos matemáticos. Así por ejemplo, si el usuario (alumno de primer año) deseaba una aproximación del número Pi, se le propuso recoger varios métodos para obtenerla y aparecieron aproximaciones dadas por la Fórmula de Leibniz (1670), o bien el Producto de Wallis (1655), o la Fórmula de Euler (1725), o la Fórmula de Basilea (que fue resuelta por Euler en 1735), entre otros. Esta actividad permitió contextualizar la historia de la matemática. Luego de seleccionar uno de los métodos, el usuario desarrollador debe indicar si quiere obtener el resultado mediante el cálculo de un número fijo de términos o cortar por precisión (en caso de que algún término sea menor que un cierto error), así como también, si quiere ver la aproximación término a término, o sólo visualizar el resultado final. Las aproximaciones disponibles son para números: e, pi; para algunas funciones trigonométricas: seno, coseno; para funciones trigonométricas inversas de seno y coseno; para el cuadrado del seno; para funciones exponenciales y logarítmicas de base e. Estas funciones permitieron la integración con temas de Análisis Matemático I (AMI). Obtenida la aproximación, la aplicación UTNaprox, le sugiere al usuario utilizar una aproximación asociada, la que es obtenida a partir del siguiente digrafo de relaciones, usando conceptos desarrollados en Matemática Discreta (MAD):

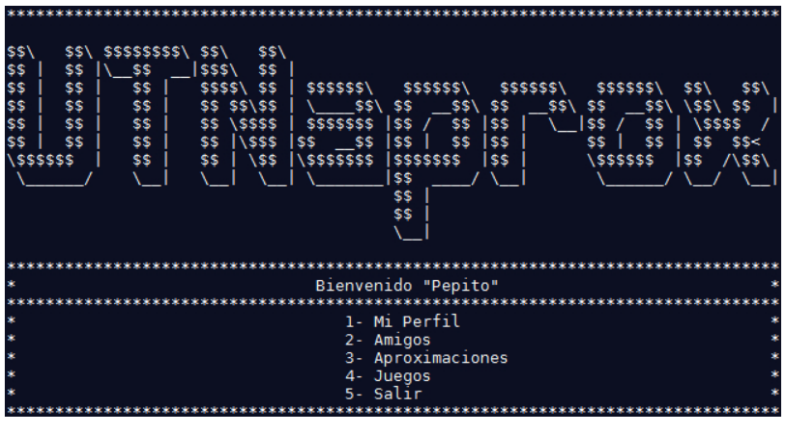
Tabla 1. Digrafo de relaciones

Aproximación	Nro de aproximación	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
e	0		X								X							
pi (Leibniz)	1	X		X	X	X	X	X				X	X					
pi (Wallis)	2	X	X		X	X	X	X				X	X					
pi (Euler)	3	X	X	X		X	X	X				X	X					
pi (Basilea)	4	X	X	X	X		X	X				X	X					
pi (Euler 2)	5	X	X	X	X			X				X	X					
pi (Frac. Cont)	6	X	X	X	X	X	X					X	X					
arcsen	7											X		X		X		
arctang	8											X	X		X			
e^x	9	X															X	X
sen	10								X				X	X		X		
cos	11											X						
arcsen	12								X			X				X		
arctang	13									X		X	X					
sen^2	14								X			X		X				
ln(x)	15	X									X							X
ln(x+1)	16	X									X						X	

Así por ejemplo, el número e tiene asociadas las aproximaciones para obtener el número pi con la fórmula de Leibniz y e^x.

Al iniciar el programa, se muestra un menú desde el cual los usuarios pueden ingresar su opción: Registrar usuario, inicio de sesión, salir. Para registrarse el usuario debe ingresar algunos datos personales (Documento Nacional de Identidad, Nombre, Apellido, correo electrónico) y una vez registrado está en condiciones de iniciar sesión, ingresando su documento y correo. Estos datos se validan y si son correctos se da acceso a la aplicación presentando el siguiente submenú que se visualizan en la Figura 1.

Figura 1. Submenú de UTNaprox



La aplicación se realizó mediante un diagrama modular; se accede a la información de los usuarios operando a manera de red social, permitiendo definir amigos, eliminarlos y compartir datos entre ellos. Estos datos se almacenan en un archivo binario. Es posible obtener un listado con las 3 últimas aproximaciones que el usuario utilizó (tomado de un archivo binario de los historiales), además de un listado con las últimas aproximaciones que utilizaron los amigos directos del usuario y los amigos directos de ellos (lista enlazada con la información de las aproximaciones más usadas por los amigos y primeros amigos indirectos del usuario).

AED usó fuertemente las fórmulas matemáticas indagadas. La consigna del trabajo se divididió en dos etapas. Durante la primera fase se solicitó la versión inicial de UTNaprox 1.0 con la implementación del registro de usuario, inicio de sesión, las aproximaciones, un juego y la lista completa de menús, con su correspondiente navegabilidad, donde los datos solicitados se pierden al cerrar el programa y con la mitad de las funcionalidades implementadas. Todo ello desarrollado haciendo uso de las estructuras estáticas y técnicas de programación aprendidas en la cátedra. Para la versión final de UTNaprox 2.0 se solicitó implementar las funcionalidades restantes haciendo uso de estructuras de datos dinámicas y más eficientes con la información organizada en listas enlazadas y una completa implementación de las funcionalidades.

Para atender a la propuesta extracurricular de resolución de problemas de ingeniería intercátedras, se diseñó una actividad didáctica armada utilizando problemas identificados y seleccionados utilizando el sitio Project Euler que proporciona problemas de matemática y de programación y que deja trazabilidad del trabajo de los alumnos en distintas instancias. Se trata de problemas elementales que pueden resolverse con conceptos básicos de matemática, utilizando: (a) lápiz y papel, pero esto podría demandar mucho tiempo; (b) luego, si se piensan de una manera más abstracta se puede encontrar un algoritmo sencillo para resolverlos, con una herramienta simple como Python; y (c) finalmente, pueden hacerse más eficientes si se emplean otros recursos como la recursión o estructuras de datos dinámicas.

Como ejemplo, se indican algunos de los problemas seleccionados, identificados como Problema 1, Problema 2, Problema 3 (Figura 2), correspondientes a la unidad de aprendizaje “Teoría de Números e Inducción” que se desarrolla en MAD y que es la más adecuada para la comprensión de los números primos, propiedades, algoritmo de la división, algoritmo de Euclides, ecuaciones diofánticas, descomposición factorial de un entero positivo, inducción y ternas pitagóricas.

Figura 2. Problemas de la propuesta pedagógica intercátedras

Problema 1: El mayor factor primo

Los factores primos de 13195 son 5, 7, 13 y 29. Cuál es el mayor factor primo del número 600851475143?

Problema 2: Diferencia de la suma de cuadrados

La suma de los cuadrados de los primeros diez números naturales es:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + 10^2 = 385$$

El cuadrado de la suma de los primeros diez números naturales es:

$$(1 + 2 + \ldots + 10)^2 = 55^2 = 3025$$

Por lo tanto, la diferencia entre la suma de los cuadrados de los primeros diez números naturales y el cuadrado de la suma es $3025 - 385 = 2640$.

Encontrar la diferencia entre la suma de los cuadrados de los primeros cien números naturales y el cuadrado de la suma.

Problema 3: La tripleta Pitagoreana

Una tripleta Pitagoreana es un conjunto de tres números naturales, $a < b < c$, para la cual:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Por ejemplo, $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$.

Existe una única tripleta Pitagoreana para la cual $a + b + c = 1000$. Encuentre el producto a*b*c.

La propuesta generada se trató en distintas asignaturas: En MAD, se presentó la herramienta tecnológica (el sitio juez) viendo la forma de acceder a los problemas, acompañando a los alumnos a trabajar con herramientas adecuadas que son propias (Software MATDIS 2.0), haciendo hincapié en que los problemas matemáticos por más simples que parezcan requieren ser pensados y resueltos adecuadamente en tiempo, cantidad y forma. Una vez lograda la forma de resolverlo, se resaltó el hecho de que se requiere un trabajo manual muy intenso y que un algoritmo que sea procesado por una computadora podría ser de gran ayuda. En paralelo, en AED, se trabajó pensando los algoritmos y escribiéndolos con las herramientas que disponían (estructuras de control básicas: secuencia, selección, repetición), utilizando el lenguaje Python, versión 3.3.2.

Los algoritmos encontrados involucraron diferentes niveles de complejidad, de acuerdo a la naturaleza del problema a resolver. Se trabajó de nuevo con el sitio juez SPOG, pero viendo las soluciones con programas concretos y observando los tiempos empleados. Finalmente, en AED, cuando se avanzó con el estudio de nuevos conceptos de programación, se empleó nuevamente el sitio juez, pero esta vez para evaluar soluciones nuevas y más eficientes, utilizando otros recursos de flujo y de datos.

Los enunciados de los problemas fueron seleccionados por los docentes de las cátedras intervinientes, y publicados en SPOJ, a fin de que los alumnos vayan subiendo sus soluciones y éstas fueran evaluadas por el mismo sitio. Con las aceptadas, se generó un ranking. Las soluciones enviadas pudieron estar escritas en diferentes lenguajes de programación (Python, C, C++, entre otros). Esto resultó de particular importancia para los alumnos, ya que permitió que todos puedan aportar sus soluciones sin limitar su participación con respecto a los conocimientos de programación que poseían. Asimismo, el hecho de contar con un ranking los movilizó a tratar de encontrar la mejor solución en base a los criterios que se evaluaron: corrección en la escritura, tiempos de respuesta y utilización de la memoria.

CONCLUSIONES

Como síntesis de la evaluación realizada, destacamos:

La importancia de la investigación - acción reside en que no intenta explicar de forma teórica la práctica social y educativa, sino, aportar recursos metodológicos que ayuden a la realización de la práctica docente.

El accionar que los profesores de las diferentes materias intervinientes en esta línea de trabajo vienen desarrollando, demuestra que el equipo se encuentra totalmente involucrado en todo el proceso, que se inicia en la articulación con la escuela secundaria, en un espacio escolar incipiente como es la informática y continúa dentro de la universidad con el desarrollo de propuestas didácticas que dejan huellas enriquecedoras donde se integran una buena selección de contenidos y actividades para el afianzamiento de las habilidades y destrezas más requeridas dentro en áreas de ciencias y tecnologías básicas.

El uso de las diferentes tecnologías empleadas durante el aprendizaje constituyó un medio para despertar el interés, la motivación, y la participación activa de los estudiantes en la solución de los problemas que se les presentaron.

Las aplicaciones y competencias propuestas los predispuso a querer superase, mejorar sus soluciones, perfeccionarse para destacarse con los demás y de esta manera que se favorezcan mejores desempeños para la futura práctica profesional.

El desarrollo de herramientas tecnológicas propias permitió atender la problemática del conocimiento de los contenidos matemáticos curriculares (para los usuarios), al mismo tiempo que favoreció en los alumnos el ejercicio de la formación experimental y resolución de problemas en ingeniería.

Los problemas planteados permitieron a los estudiantes ejercitar la capacidad de manejo de situaciones bajo incertidumbre; consolidar actitudes para la solución de problemas no tradicionales, estimular la creatividad, la iniciativa personal, el trabajo interdisciplinario y la innovación en el área tecnológica; desarrollar en los estudiantes capacidad de abstracción y de reflexión crítica; ejercitar una lengua extranjera y dar un uso intensivo a las herramientas que le brinda la informática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Ambort, D. (2015). Tecnomate 2015. *Revista CIE. 36, 21-23*. Recuperado el 10 de setiembre de 2015 de http://issuu.com/cie1santafe/docs/cie_36_2

Elliott, J. (2000). *La investigación acción en educación*. Cuarta Edición. Madrid: Ediciones Morata, S.L.

González, A., Madoz, M.C.(2013).*Utilización de TIC para el desarrollo de actividades colaborativas para la enseñanza de la programación*. Red de Universidades con Carreras en Informática - TE & ET 2013. Recuperado el 15 de agosto de 2015 de http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/27525

Latorre, A. (2004). La investigación acción. En R. Bisquerra Alzina. (Coord). *Metodología de la investigación educativa, 370-394*. Madrid: Editorial La Muralla.

Morales B. P. , Fitzgerald V. (2004). Aprendizaje Basado en Problemas. *Revista Theoria, Vol. 13. 145-157*. Recuperado el 15 de agosto de 2015 de:http://campus.usal.es/~ofeees/NUEVAS_METODOLOGIAS/ABP/13.pdf

Morano, D.(2012). *Plan Estratégico para la formación de ingenieros 2012 – 2016*. Recuperado el 10 de diciembre de 2014 de http://portales.educacion.gov.ar/spu/calidad-universitaria/plan-estrategico-de-formacion-de-ingenieros-2012-2016/.

Project Euler. Recuperado el 15 de agosto de 2105 de: http://projecteuler.net/

Python. Versión 3.3.2. Recuperado el 15 de agosto de 2105 de:http://www.python.org

Serrano, J. M. ; Pons, R. M. (2011). El constructivismo hoy: enfoques constructivistas en educación. En *Revista Electrónica de Investigación Educativa,13(1).* recuperado el 15 de agosto de 2015 de:http://redie.uabc.mx/vol13no1/contenido-serranopons.html

Spoj. Sitio de juez en línea. Recuperado el 15 de agosto de 2105 de:http://www.spoj.com/

INTELIGENCIAS MÚLTIPLES EN EL APRENDIZAJE HÍBRIDO DE LOS PRODUCTOS NOTABLES: UN ESTUDIO DE CASO

Roberto Retes, Lorenza Illanes, Leopoldo Zúñiga
Universidad Tecnológico de Monterrey, México.
A01317090@itesm.mx, lillanes@itesm.mx, lzs@itesm.mx

Palabras clave: Aprendizaje híbrido, inteligencias múltiples, productos notables, aprendizaje presencial, aprendizaje virtual.

Key words: Blended learning, multiple intelligences, special products, face to face learning, virtual learning.

RESUMEN: Esta investigación tiene como propósito mejorar el aprendizaje de los Productos Notables, mediante el Aprendizaje Híbrido combinado con el tipo de inteligencia de cada uno de los estudiantes que conforman la muestra de esta investigación. Para determinar el tipo de inteligencia se usó el test y la clasificación de Inteligencias Múltiples. En esta investigación la muestra consta de 30 estudiantes. Como resultado de este estudio se obtuvo más autonomía en el estudiante a través del Aprendizaje Híbrido, y se redujo la varianza del aprovechamiento académico al diseñar actividades que estaban de acuerdo al desempeño académico del estudiante y su tipo de inteligencia. Los resultados de estos hallazgos se presentan.

ABSTRACT: This research focuses on improving the learning of the Special Products by using the Blended Learning model combined with the type of intelligence of each one of the students who compose the sample of this investigation. In order to determine the type of intelligence, classification of multiple intelligences was used. The sample of this investigation consists of 30 students. The results obtained show that the student who learned by the blended learning model gained more autonomy. As the activities were designed according to each student performance and type of intelligence the variance of the academic performance decreased for each student. The results of these findings will be presented.

INTRODUCCIÓN

Continuamente se ha comentado que el objetivo de las teorías educativas consiste en identificar y entender los procesos de conocimiento que usualmente se presentan en las prácticas de aprendizaje a nivel escolar, así como investigaciones especificas en el área (Méndez, 2012) y como consecuencia intentar encontrar métodos que permitan que el aprendizaje sea más efectivo. Así mismo, a raíz del uso cada vez más generalizado de las tecnologías de la información para comunicarse e instruirse (Cabero y Román, 2008; Cabero, Llorente, y Puentes, 2010), se propone centrar la atención sobre la producción de conocimientos y desafíos de interpretación actual. Mientras la discusión sobre la inteligencia aún sigue abierta. Uno de los aspectos importantes en atender es el de las Inteligencias Múltiples (Gardner, 1993), en donde a partir de las investigaciones sobre la naturaleza del potencial humano se ha centrado la atención en la diversidad. Si es posible movilizar la totalidad de las habilidades humanas, no solamente los individuos serán más competentes y tendrían una mejor percepción de sí mismos, sino que tendrían la posibilidad de comprometerse y colaborar con la sociedad (Gardner, 1993).

El contexto actual exige a los alumnos demandar de la escuela respuestas para combinar aprendizaje con realidad (Castillo, 2008). Este escenario genera la posibilidad de utilizar modelos distintos, entre ellos está el de aprendizaje híbrido (Horn; Johnson, 2011). *Blended learning* no es lo mismo que la instrucción basada en tecnología. Va más allá de uno a uno con computadoras y aparatos de alta tecnología (Christensen, 2008). *Blended learning* implica el aprovechamiento de Internet para dar a cada estudiante una experiencia de aprendizaje más personalizada, lo que significa un mayor control del estudiante sobre el tiempo, el lugar, la ruta y/o el ritmo de su aprendizaje (Horn; Johnson, 2011). Frente a la heterogeneidad del grupo se considera que los estudiantes cuentan con diferentes ritmos de aprendizaje (Gil y Luna, 2008) y como consecuencia necesitan diversas formas de atención, se ha abierto en los profesores una natural preocupación sobre la manera de atender al grupo reconociendo esas diversidades (Navarro, 2008). El problema que se presenta a partir de esta variedad en las formas de aprendizaje y a partir del conocimiento de las inteligencias múltiples de los estudiantes, se genera la pregunta ¿Cómo el modelo de aprendizaje híbrido conjuntamente con el uso de las inteligencias múltiples puede constituirse en una estrategia que mejore el rendimiento académico en el aprendizaje de los Productos Notables? En tal sentido, se aborda el tema inicialmente mediante la revisión de la literatura especializada para a continuación describir la metodología empleada para la investigación, en donde se describe la composición de la muestra, las fases del estudio y los instrumentos utilizados. Posteriormente se desprende el análisis e interpretación de los resultados para finalizar con la discusión, conclusiones y recomendaciones generadas.

MARCO TEÓRICO

Asumiendo la máxima de que la enseñanza debe adaptarse al estudiante, y no al revés, es decir, es el estudiante el que debe ocupar el centro de todo acto educativo y, a medida que adquiere madurez, debe sentirse cada vez más libre de decidir por sí mismo lo que quiere aprender y en lo que desea formarse. Por tanto, en consecuencia, la docencia es cada día más un arte, además de una profesión, en la que se impone la calidad en todas sus actividades profesionales y humanas (Hochleitner, D., 1998). Por otro lado, dentro de la enseñanza de las matemáticas se necesita de un sistema variado y lo menos rígido posible de tal forma que resulte sencillo representar objetos y

estructuras. Justamente sobre este punto Kaput (1987) apunta una serie de tareas matemáticas que se presentan dentro de las actividades de la docencia. Usualmente este tipo de tareas implica la utilización de representaciones algebraicas, graficas o numéricas. Por ello, las investigaciones recientes evitan centrarse en el saber matemático en sí, y lo hacen más bien en la formación del ser humano que aprende matemáticas para que, en este caso, sus competencias matemáticas evidencien la presencia de tres aspectos, claramente diferentes y absolutamente complementarios. Estos son: el cognitivo, el afectivo y la tendencia de acción, los cuales se ocupan del grado de entendimiento de la materia, la predisposición para el trabajo y de manifestarse ante algún estimulo interno o externo y en cuanto a la constancia y dedicación respectivamente (D'Amore, Godino y Fandiño, 2008). Alonso (1992) indica que las investigaciones cognitivas han demostrado que las personas piensan de manera distinta, captan la información, la procesan, la almacenan y la recuperan en forma diferente. En consecuencia, resulta interesante darle una mirada de cerca a la Teoría de las Inteligencias Múltiples (Gardner, 1999) y al modelo de Aprendizaje Híbrido (Horn, 2010) que sobre esto último tienen un enfoque particular, dado que de una manera directa buscan asistir a académicos y diseñadores curriculares a identificar actividades pedagógicas cada vez más efectivas.

METODOLOGÍA

Se plantea para el desarrollo de la investigación un modelo de investigación de enfoque cualitativo que permita por una parte tabular y graficar los resultados y de esta manera poder darle una lectura más precisa con validez estadística a los hallazgos. Mientras que por otro lado el Test de Inteligencias Múltiples de Howard Gardner (1999) y la observación tendrán un rol importante dentro del trabajo en virtud de la posibilidad que presentan para resaltar algunas características importantes durante el proceso. Se plantea para la elaboración de la investigación realizar el trabajo siguiendo 4 etapas bien definidas: Fase 1, subdividida en cuatro; la realización de una prueba inicial Pre-Test la cual permita la medición de la condición que precede a la investigación y a su tratamiento, que permita conocer el nivel matemático original en que se encuentran los investigados, no sólo en el tema de productos notables sino también en el manejo del algebra, la observación; la cual se realizará durante el momento mismo de la prueba inicial y durante el proceso de enseñanza y de esta manera se pueda registrar los comportamientos de los estudiantes, sus actitudes y tiempo de desarrollo de la prueba, el Test de Inteligencias Múltiples diseñado por Howard Gardner (1999), que se llevará a cabo también al inicio de la investigación y éste permitirá conocer más de cerca sobre los intereses y genere la posibilidad de utilizar diferentes fuentes y metodologías de enseñanza así como actividades orientadas a cada tipo de inteligencia encontrada, y la elaboración de un informe inicial, en donde se describen los hallazgos percibidos.

Posteriormente la Fase 2: el proceso de enseñanza; en donde se ha programado separar a los estudiantes en 3 grupos de 10 alumnos cada uno. Dichos grupos estarán conformados tanto por hombres como por mujeres, lo cual no se cree pertinente diferenciar en este trabajo y por distintas edades que oscilan entre los 13 y 17 años, lo cual tampoco se considera importante diferenciar a partir de los logros alcanzados durante el proceso del estudio. Con cada uno de estos tres grupos se utilizarán modelos de enseñanza distintos: con el primer grupo se utilizará el modelo tradicional, es decir, solo haciendo uso en el aula de una pizarra, el texto escolar, tarjetas visuales y el docente

investigador encargado del proceso de enseñanza. El segundo grupo estará bajo el modelo de aprendizaje virtual, es decir, sólo se utilizarán herramientas tecnológicas para su enseñanza. Se hará uso de programas matemáticos libres de la red; de tal manera que el investigador docente pueda encargarse de guiar el trabajo de los estudiantes y encaminar el proceso de aprendizaje. El tercer y último grupo utilizará el modelo de aprendizaje híbrido, el cual busca combinar el modelo tradicional y virtual. Se iniciará con explicaciones presenciales en el aula y con el desarrollo de la temática de interés y se reforzará con herramientas tecnológicas de programas de matemáticas virtuales, los mismos que se adecuarán para conseguir actividades que estén en función de las inteligencias múltiples.

La Fase 3 involucra la realización de una prueba final Post-Test, la misma que permitirá medir los aprendizajes obtenidos durante el periodo de enseñanza bajo los distintos modelos empleados, la elaboración de una tabla de frecuencias acompañado de sus respectivas gráficas, los que permitan visualizar el cambio generado a partir de las actividades realizadas y la elaboración de un informe final que incluya las observaciones que el investigador encuentre durante el proceso de enseñanza. Finalmente, la fase 4, que implica el análisis de los resultados, que se generarán a partir de la información obtenida.

En cuanto a la estrategia del análisis de resultados se plantea una triangulación de los datos, que contemple los resultados encontrados a través de cada instrumento utilizado categorizando los resultados cualitativos y los resultados numéricos recogidos lo que permitirá una mayor certeza de los resultados encontrados.

RESULTADOS

Los resultados preliminares del desempeño académico muestran una media de 10.27 puntos sobre 20 preguntas, es decir, un 51.35% de efectividad promedio, una varianza de 14.86 y una desviación estándar de 3.92 para el grupo de 30 alumno. De tal forma que el grado de dispersión es moderadamente significativo. Así mismo, se observó durante la realización del Pre-Test que muchos estudiantes llegaron a la respuesta correcta en algunas preguntas, sin embargo, el tiempo que les tomo conseguirlas fue largo. Esto surgió a raíz de que el método utilizado en el desarrollo no fue el de productos notables, sino más bien el de multiplicación de término por término. Justamente fue en gran parte de estos casos que o dejaron en blanco o cometieron errores en los productos cúbicos. Sólo el 10% de los estudiantes utilizó el sistema de productos notables, en cuyo caso el tiempo de desarrollo que se observó fue mucho menor.

Se observa que los alumnos del grupo A que forman parte del modelo tradicional de enseñanza tienen un puntaje más bajo a aquellos estudiantes con inteligencia verbal e intrapersonal más desarrollada. Estas características servirán para poder notar posteriormente la evolución que dichas inteligencias presentan durante el desarrollo del proceso de investigación. Los resultados de los estudiantes del grupo B que forman parte del modelo virtual reflejan una media más baja de 9.9 respecto al grupo total de alumnos, adicionalmente muestra una dispersión más alta con varianza de 23.09 y desviación estándar de 4.81. Esto permite notar que en este modelo se inicia con un grupo B de estudiantes de un nivel de conocimientos más heterogéneo sobre productos notables respecto al de los otros modelos. Entre los resultados estadísticos preliminares encontrados en el grupo C dentro del modelo híbrido de enseñanza se refleja una de media similar al del grupo total

de 10.6 aunque con una dispersión mucho menor con una varianza de 4.84 y desviación estándar de 2.2. Esto muestra el hecho de que el modelo se inicia con un grupo C de estudiantes con un nivel de conocimientos sobre los productos notables más homogéneo. Al cabo de tres semanas se tomó una prueba que permitió registrar el progreso de cada estudiante a partir de las actividades realizadas. Paralelamente se expusieron los tipos de inteligencia utilizado en cada estudiante, información que se recogió del Test de Inteligencias Múltiples (Gadner, 1999) tomado al inicio de la investigación.

La información del Post Test revela que a la luz de los resultados obtenidos el modelo híbrido del grupo C muestra un promedio mayor respecto a los otros dos. Aunque respecto a este parámetro el modelo tradicional del grupo A se generó un nivel similar. Por otro lado, cuando se observa el resultado de la varianza y la desviación estándar el modelo virtual de enseñanza del grupo B muestra una dispersión mucho mayor respecto de los otros dos. Posteriormente se resumen los resultados obtenidos al inicio y al final del proceso de investigación dando un enfoque al tipo de inteligencia utilizada. De esta síntesis se observa que tanto la inteligencia verbal como la de lógico-matemático fueron las que mostraron un mejor aprovechamiento académico, mientras que la inteligencia kinestésico-corporal y musical-rítmica fueron las que alcanzaron un menor progreso en términos relativos. La información que se recogió refleja un mayor aprovechamiento académico en el modelo híbrido (grupo C) de enseñanza, mientras que el modelo tradicional (grupo A) también muestra resultados muy positivos.

Luego de evaluar y comparar el comportamiento de los estudiantes con marcada fortaleza en la inteligencia verbal se percibió que en el modelo tradicional de enseñanza el crecimiento fue notoriamente más acentuado respecto a los otros dos modelos. El crecimiento fue de 125% y 85.7% en los alumnos que aprendieron mediante las actividades desarrolladas durante el proceso de enseñanza. El hecho de poner énfasis en la repetición de la explicación y propiciar que los estudiantes mencionen con sus propias palabras los pasos que van siguiendo durante su desarrollo se vio evidenciado en sus progresos. La capacidad para percibir detalles visuales fue potenciada con el uso del modelo virtual (grupo B) que permitió un progreso del 60% según los datos obtenidos. Este modelo cargado de imágenes, lleno de colores y con la modelación requerida abre la posibilidad de sacar el máximo provecho a aquellos estudiantes con marcada inteligencia visual. Sin embargo, siempre fue necesaria la dirección del docente-investigador. Por otro lado, si el modelo virtual (grupo B) fue efectivo en aquellos estudiantes con inteligencia visual, bajo el sistema de aprendizaje híbrido (grupo C) estos superaron las expectativas. La etapa presencial fue bien aprovechada con las herramientas diversas utilizadas, aunque en el momento oportuno esta actividad dio paso a una fase más tecnológica que sirvió para variar el estilo, aunque siempre orientando el proceso de aprendizaje a esta inteligencia. Las imágenes mentales dieron paso a la visualización con precisión y el resultado final alcanzo el 100% de progreso. Un punto aparte merece el uso del tipo de inteligencia interpersonal, bajo el modelo de aprendizaje híbrido (grupo C), debido a que las actividades colaborativas utilizadas al inicio del proceso permitieron un progreso significativo, el cual se fortaleció en la generación de un trabajo en equipo de manera virtual (grupo B) con quienes el proceso previo haya generado empatía. Dicho de otra manera, el modelo hibrido (grupo C) se encaminó de tal manera que siempre se pudo conseguir el mejor rendimiento del estudiante.

Luego de realizar el proceso de enseñanza con cada uno de los modelos se registró un comportamiento favorable en cada uno de ellos en vista de los resultados obtenidos. El promedio del grupo de 30 alumnos mejoró en más del 50%. Cuando se analiza el progreso en cada modelo de aprendizaje, independientemente de la inteligencia utilizada se muestra un crecimiento mayor en el modelo de aprendizaje híbrido (grupo C), seguido del modelo tradicional (grupo A) y finalmente el modelo virtual (grupo B). La lectura que se le da a estos resultados radica en el hecho de que el aprendizaje combinado permitió, tal como lo sostiene Bonk y Graham (2006), una riqueza pedagógica a partir de la semipresencialidad, la misma que promueve el aprendizaje autónomo en el que el alumno avanza a su propio ritmo para adquirir información basada en prácticas presenciales centradas en el aprendizaje activo y en la aplicación de experiencias. Es así que el promedio alcanzado bajo el modelo híbrido, independientemente del tipo de inteligencia utilizado fue de 86% al cabo de las tres semanas.

Un factor importante que se consideró fue el hecho de registrar el grado de dispersión en las calificaciones de los estudiantes en los distintos modelos. Para tal fin se utilizó la varianza y la desviación estándar que finalmente mostraron un menor nivel de dispersión en el caso del modelo híbrido (grupo C) con desviación estándar de 1.72, lo cual refuerza la idea planteada por el aprendizaje mixto según Horn (2010), el cual combina la fuerza de cara a cara y el aprendizaje potenciado por la tecnología.

DISCUSIÓN

Los alumnos están familiarizados con las herramientas tecnológicas lo cual abre una gran oportunidad para los maestros para intentar verter los contenidos a través de este medio. Sin embargo, los resultados muestran que se debe tener un cuidado especial en cuanto al uso que se les dé a estas herramientas, ya que los estudiantes hacen uso desmedido y de forma independiente del aprendizaje virtual presentan una serie de deficiencias académicas al finalizar el proceso. Sin embargo, hay quienes muestran, a partir del uso del test de inteligencias múltiples, fortalezas en el uso de la tecnología como herramienta visual, requieren de ciertos rasgos de personalidad que podrían aún no haber desarrollado o que se muestren en proceso de conseguirlos, tales como la autodisciplina, la autonomía en el trabajo, la automotivación, entre otras que son indispensables para poder conseguir los resultados esperados bajo un modelo de aprendizaje virtual en estudiantes de secundaria.

El modelo tradicional (Grupo A) demostró a la luz de los resultados obtenidos ser una forma efectiva de aprendizaje pero que no llega a ser el más efectivo en la medida que sólo utiliza una fuente de información: el maestro. Éste se muestra limitado en la generación de independencia por parte del estudiante, el cual sólo espera que el profesor indique los pasos que hay que seguir para el correcto desarrollo de la tarea. Este modelo se fortalece cuando el uso de las inteligencias múltiples encamina las actividades a desarrollar dentro del aula, de acuerdo a los datos obtenidos en lo referente al hecho de que el profesor hiciera hincapié en la repetición de la explicación y promoviera una explicación por parte de los estudiantes. Sin embargo, su uso se complica en la medida que en un salón de clase exista una diversidad grande de estudiantes con tipos de inteligencia distinta entre ellos.

Dentro de los resultados obtenidos en cuanto a las varianzas y desviaciones estándar encontradas, se rescata el hecho de que el grado de dispersión en el modelo de aprendizaje híbrido (grupo C) fue menor que en cualquier otra circunstancia. Esto se deduce o se explica por del uso que se le dio a la información desprendida de los tipos de inteligencia. Se consideró vital para este propósito el resultado del Test de Inteligencias Múltiples (Gardner, 1999) para poder encontrar la combinación que cada estudiante requería. Se puede afirmar a partir de los hallazgos de la investigación que no existe una combinación perfecta para los estudiantes como lo muestran los resultados encontrados, no hay una receta única. La combinación ideal que el modelo híbrido (grupo C) permite es generar un equilibrio a partir del conocimiento que el maestro pueda ir obteniendo de sus estudiantes. Dicho de otra manera, la obtención de los resultados esperados se podrá conseguir en tanto el maestro pueda ir ajustando la combinación de fuentes de información y pueda crear actividades orientadas a permitir un mejor entendimiento de los procesos a partir del uso de cada tipo de inteligencia.

CONCLUSIONES

Como consecuencia de la presente investigación se encontraron elementos que pueden crear ambientes de aprendizaje más estimulantes y por ende más provechosos para los estudiantes. De ahí que se propone investigar más sobre las ventajas del modelo híbrido (Grupo C) en estudiantes en edad escolar orientando la atención hacia el fortalecimiento del aprendizaje autónomo y el reforzamiento de habilidades de adaptación a distintos modelos, en el marco de una sociedad cambiante y como resultado, de requerimientos de adecuación constantes.

Se recomienda también diseñar actividades de aprendizaje combinado que tengan en cuenta la edad del estudiante, su madurez y su predisposición para el trabajo independiente, a fin de esperar resultados positivos en su desarrollo académico dentro de la escuela.

Se aconseja incorporar la teoría de las inteligencias múltiples (Gardner, 1999) en la formulación de actividades de aprendizaje del currículo de las escuelas en los temas de matemática.

Se invita a analizar de qué forma los factores ambientales y de contexto pueden contribuir o perjudicar los resultados del aprendizaje por medio de herramientas tecnológicas.

Con la intención de conocer más sobre este tema, se propone orientar futuras investigaciones a contestar las siguientes preguntas: ¿De qué manera el modelo de aprendizaje híbrido puede contribuir a realizar un mejor tipo de evaluación del aprendizaje por parte de los maestros? ¿En qué medida el uso de estrategias que atiendan a las inteligencias múltiples debe orientar a la formación de maestros para su buena adaptación?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alonso, C. (1992). *Estilos de aprendizaje: Análisis y diagnóstico en estudiantes universitarios.* Madrid, España: Universidad Complutense.

Bonk, C.; Graham, C. (2006). *The handbook of blended learning: Global perspective local designs*. San Francisco: Pfeiffer.

Cabero, J.; Román, P. (2008). E-Actividades. Un referente básico para la formación en internet. Madrid, España: Editorial MAD, S.L.

Cabero, J; Llorente, C; Puentes, A; (2010) *La satisfacción de los estudiantes en red en la formación semipresencia*l. Sevilla, España: Comunicar, N°35, V. XVIII, 2010, Revista Científica de Educomunicación, p.p 149-157. Recuperado de: http://dx.doi.org/10.3916/C35-2010-03-08

Castillo, S. (2008*) Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.*: Distrito federal, México. pp. 171-194: Revista Latinoamericana de Investigación Educativa

Christensen, C.M. (2008) *Disruptive class. How disruptive innovation will change the way the world learns*. McGraw-Hill: New York.

D'Amore, B.; Godino, J.; Fandiño, M. (2008). *Competencias y Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Hochleitner, D. (1998). *Nuevo marco de la tarea docente: Aprender para el futuro*. Madrid: Editorial Santillana.

Gardner, H. (1993) La mente no escolarizada. *Como piensan los niños y como deberían enseñar en las escuelas.* Barcelona, España: Paidós

Gardner, H. (1999) *La Inteligencia Reformulada: Las Inteligencias Múltiples en el Siglo XXI*. Barcelona, España: Paidós.

Gil, D; Luna, A. (2008) *Los estilos de aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas:* Madrid, España: Revista complutense de educación. Universidad Complutense de Madrid

Horn, M. (2010). Virtual schooling. Disruptive the Status Quo. *Clayton Christensen Institute*. Recuperado de http://3jrru23si058xyg03oiyzu9p.wpengine.netdna-cdn.com/wpcontent/uploads/2013/04/PolicyBrief_VirtualSchool_HornMay10.pdf

Horn, M.; Johnson, C. (2011). *Disrupting class: How disruptive innovation will change the way the world learns*. McGraw-Hill: United States.

Kaput, J. (1987). *Representation Systems and Mathematics: Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale: LEA.

Méndez; P. (2012) Mundos Cambiantes: La tecnología y la educación 3.0. Revista Complutense de Educación. Volo.23 Num.1. Recuperado de:

http://revistas.ucm.es/index.php/RCED/article/viewFile/39099/37712

Navarro, M.J. (2008) *Cómo diagnosticar y mejorar los estilos de aprendizaje*.

Asociación Procompal, España.

CONCEPTUALIZACIÓN: CURVAS B-SPLINE

Rogelio Ramos Carranza, Armando Aguilar Márquez, Frida María León Rodríguez, Omar García León, Juan Rafael Garibay Bermúdez

Universidad Nacional autónoma de México (México)

egorrc@gmail.com, armandoa@unam.mx, fridam@unam.mx egor1131@unam.mx.

Palabras clave: Curvas B-spline, teoría de aproximación, modelado numérico, transposición didáctica

Key words: B-spline curves, approximation theory, numerical modeling, didactic transposition

RESUMEN: Partiendo de los principios de la transposición didáctica, la que se entiende como un proceso mediante el que se modifica un contenido del saber matemático para su enseñanza, transformando el saber sabio en saber enseñado y así, poner al alcance del estudiante el objeto numérico, curvas B-spline; apropiándose de los conceptos requeridos en la definición de dichas curvas. Es decir, se piensa que conociendo, y manejando los fundamentos necesarios para la descripción del objeto aquí considerado, se podrá conseguir el propósito deseado, de ponerlo al alcance de los estudiantes para su apropiación. Por tanto se trata de una investigación en proceso cuyo propósito es mostrar y poner al alcance de los estudiantes, los fundamentos requeridos en el algoritmo B-spline; por lo tanto en este documento se describirán los conceptos fundamentales que serán transformados del conocimiento erudito al conocimiento enseñado.

ABSTRACT: Based on the principles of the didactic transposition, which is understood as a process by which a content of mathematical knowledge for teaching is changed, transforming the wise knowledge taught and thus make available to the student the numeric object, curves B-spline; appropriating the concepts required in defining these curves. That is, it is thought that knowing and managing the necessary foundations for the object description considered here, students can achieve the desired purpose, to make it available to them for their appropriation. Therefore it is an ongoing investigation whose purpose is to show and to make available to students the basics required in the B-spline algorithm; therefore in this paper the fundamental concepts that will be transformed from scholarly knowledge to knowledge taught will be described.

INTRODUCCIÓN

La mayoría de las formas son demasiado complicadas para definir usando una sola curva. Una curva spline es una secuencia de segmentos de curva que se conectan entre sí para formar una sola curva continua.

Por ejemplo, una colección de trozos de curvas, en las que los extremos inicial y final están conectados, puede ser llamada una curva spline.

La palabra “spline" se utiliza a veces como un adjetivo que significa trazador al igual que algunas curvas Bézier cúbicas ".

En la teoría de aproximación, spline se define como un polinomio de grado n a trozos (Ramos, Aguilar, 2014) cuyos segmentos tienen continuidad C^{n-1} (continuidad de orden n-1).

La palabra "spline" viene de la industria de la construcción naval, en el que originalmente se refería a una delgada tira de madera que usarían los dibujantes, como una curva francesa flexible, usando pesas de metal (llamadas patos) las cuales se colocan en la superficie de dibujo y la spline se ha enhebrado entre los patos como en la Figura 1.

Figura 1. Ejemplo del uso de la herramienta spline

Sabemos por la mecánica estructural que el momento de flexión M es una función infinitamente continua a lo largo de la curva mostrada en la figura 1, excepto en un punto, donde M es por lo general solamente de continuidad C^0.

Puesto que la curvatura de la spline es proporcional a M (k = M / EI), la spline tiene la curvatura continua en todas partes.

La continuidad de la curvatura es un requisito importante para la industria de la construcción de barcos, así como para muchas otras aplicaciones.

Por ejemplo las vías de ferrocarril tienen siempre curvatura continua, de otra manera un ferrocarril en movimiento experimentaría sacudidas severas.

Los cuerpos de los automóviles tienen suavizamiento G^2, (significa suavizamiento de orden 2) de otra manera la reflexión de rectas podría aparecer como de suavizamiento de orden cero, G^0.

MARCO TEÓRICO REFERENCIAL

Cuando la continuidad C^1 es recta hacia adelante es fácil de alcanzar mediante curvas de Bézier (por ejemplo, en el software popular de diseño, tal como el Adobe Illustrator utiliza curvas de Bézier y automáticamente impone la continuidad de la tangente cuando traza una curva), la continuidad de orden 2, C^2 y superiores son engorrosas.

Aquí es donde las curvas B-spline son utilizadas. Las curvas B-spline (De Boor, 2008) pueden ser consideradas, como un método para definir una secuencia de curvas de Bézier de grado n que se unen de forma automática con continuidad C^{n-1}, independientemente de dónde sean colocados los puntos de control.

Mientras que una curva abierta, consistente de m curvas de Bézier de grado n, implica nm + 1 distintos puntos de control (los puntos de control compartidos cuentan una sola vez), que la misma curva, construida mediante curvas de Bézier, se puede expresar usando sólo m + n puntos de control B-spline (suponiendo que todas las curvas adyacentes tiene continuidad de orden n-1, C^{n-1}).

La más importante operación que hay que entender para tener un conocimiento práctico de los B-splines, consiste en cómo extraer, los elementos que constituyen las curvas Bezier.

El enfoque tradicional de la enseñanza de B-Splines se centra en las bases del tratamiento de las relaciones de funciones de recurrencia.

La experiencia ha demostrado que la forma polar y los intervalos definidos por nodos (Sederberg, 1983) proporcionan a los estudiantes un conocimiento práctico con mayor rapidez que las relaciones de recurrencia; siendo esta formulación, una de las formas en las que pueden ser descritos los B-splines; como se explica en todos aquellas referencias en las que se trata el objeto matemático B-spline.

HIPÓTESIS

Es posible que a través de la búsqueda de elementos conceptuales del objeto matemático B-spline, los estudiantes lo puedan manejar adecuadamente para su dominio y aplicación en las distintas áreas de la ingeniería, mediante la aplicación de la metodología de la transposición didáctica con el objeto de recobrar y sumar significados, y considerar nuevas estrategias de estudio,

METODOLOGÍA

En la búsqueda de elementos que den cuenta de la forma en la que el estudiante se acerca o aproxima a la aprehensión del conocimiento se pueden plantear preguntas tales como; ¿qué mecanismos operan en el fenómeno?, ¿qué otros elementos matemáticos intervienen?, y sobre todo ¿bajo qué concepciones están operando estos fenómenos? (Castañeda, 2004)

La investigación en educación matemática adopta estas preguntas tratando de explicitar las concepciones que tienen los estudiantes en relación al conocimiento matemático escolar, cuestionando la transparencia de dicho conocimiento.

Al trasponer esta idea a la didáctica, equivale a decir, que una primera condición para que un estudiante sepa un conocimiento, es que el estudiante tenga la certeza de que dicho conocimiento tenga una utilidad práctica.

Bajo la cubierta de estas ideas fundamentales, en el presente estudio breve, se propone identificar todos los elementos conceptuales que intervienen en el desarrollo matemático del objeto b-spline, con la finalidad de establecer la forma en la que estos operan y sobre todo de su significado y con ello dar cuenta de su definición, significado, y operación para su comprensión. Una vez tratados

todos aquellos elementos conceptuales en forma individual se podrán integrar para poder visualizar el desarrollo matemático que involucre el objeto matemático aquí considerado. En concreto en el aspecto social del conocimiento de esta comunicación breve es considerar la documentación escrita, existente del objeto matemático tratado como fuente de información, para después revisar el concepto del objeto B-spline desde la matemática misma; y por último analizar el concepto del B-spline desde el punto de vista de los libros de texto actuales

DESCRIPCIÓN Y DESARROLLO DEL OBJETO MATEMÁTICO

Forma Polar

La forma polar puede ser pensada como simplemente un método alternativo de señalización de los puntos de control de una curva Bézier o curva B-Spline. En esta forma las etiquetas hacen referencia a valores polares. En esta sección se resumen las propiedades y aplicaciones de forma polar, sin ahondar en las derivaciones. El estudiante interesado puede estudiar los artículos de Ramshaw (Ramshaw, 2012). Todos los algoritmos importantes para las curvas Bézier y B-spline se pueden derivar de la siguiente cuatro reglas para los valores polares.

1). Para una curva Bézier de grado n, $P_{[a,b]}(t)$, los puntos de control son re etiquetados mediante $P_i = P(u_1, u_2, \dots, u_n)$, donde $u_j = a, si\ j \leq n - i$ de otra manera $u_j = b$. Para una curva Bézier de grado dos $P_{[a,b]}(t)$,

$$P_0 = P(a,a);\ P_1 = P(a,b);\ P_2 = P(b,b)$$

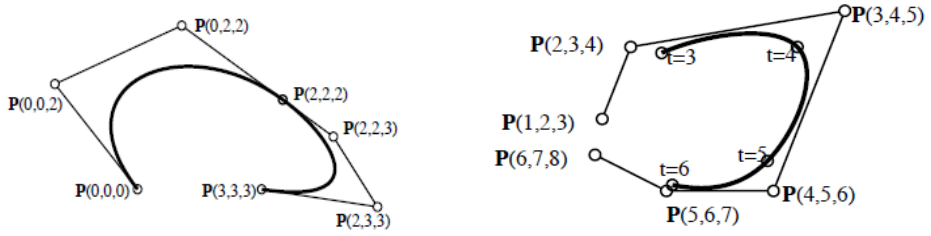
Para una curva Bézier de grado 3 $P_{[a,b]}(t)$,

$$P_0 = P(a,a,a);\ P_1 = P(a,a,b);\ P_2 = P(a,b,b);\ P_3 = P(b,b,b)$$

Y así, sucesivamente, para grado cuarto, quinto, etc.

La figura 2 muestra dos curvas Bézier etiquetadas usando valores polares,

Figura 2. Etiquetas Polares



a) Curva Bézier con etiquetas polares b) Curva B-spline con etiquetas polares

En la figura 2, en el caso a) se define en el intervalo paramétrico [0, 2] y en el caso b) se define en el intervalo paramétrico [2, 3].

Se debe tomar en cuenta que $P(t,t,t,\dots,t)$ es el punto de una curva Bézier correspondiente al valor del parámetro t.

2. Para una curva B-spline de grado n con un vector nodo

$$[t_1, t_2, t_3, t_4, \dots],$$

Los argumentos de los valores polares consisten en grupos de n nodos adyacentes del vector nodo, con el i-esimo valor polar, siendo $P(t_i, \dots, T_{i+n-1})$, como se muestra en la figura 2b.

3. Un valor polar es simétrico respecto de sus argumentos. Esto significa que el orden de los argumentos puede ser cambiado sin cambiar el valor polar. Es decir,

$$P(1,0,0,2) = P(0,1,0,2) = P(0,0,1,2) = P(2,1,0,0), etc.$$

4. Dados $P(u_1,\ u_2, \dots, u_{n-1},\ a)$ y $P(u_1,\ u_2, \dots, u_{n-1}, b)$ se puede calcular $P(u_1,\ u_2, \dots, u_{n-1}, c)$, donde c es cualquier valor:

$$P(u_1,\ u_2, \dots, u_{n-1}, c) = \frac{(b-c)P(u_1,\ u_2, \dots, u_{n-1},\ a) + (c-a)P(u_1,\ u_2, \dots, u_{n-1}, b)}{(b-a)}$$

$P(u_1,\ u_2, \dots, u_{n-1}, c)$, se dice que es una combinación lineal de $P(u_1,\ u_2, \dots, u_{n-1},\ a)$ y de $P(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, b)$; esto es:

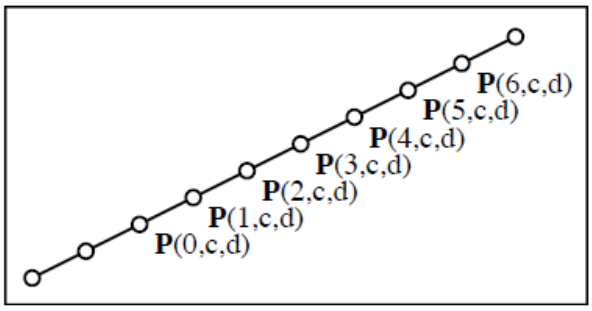
$$P(0,t,1) = (1-t)\times P(0,0,1) + t\times P(0,1,1),$$

$$P(0,t) = \frac{(4-t)\times P(0,2) + (t-2)\times P(0,4)}{2}$$

$$P(1,2,3,t) = \frac{(t_2-t)\times P(2,1,3,t_1) + (t-t_1)\times P(3,2,1,t_2)}{(t_2-t_1)}$$

Esto significa que geométricamente, si varía un parámetro de un valor polar mientras mantiene todas las demás constantes, el valor polar barrerá una línea a una velocidad constante, como en la Figura 3.

Figura 3. Mapa de propiedades afines de valores polares



Subdivisión de Curvas Bézier

Para ilustrar cómo funcionan los valores polares, se muestra como se derivan del algoritmo de De Casteljau, utilizando solo las tres reglas para los valores polares.

Así, dada una curva cúbica de Bézier $P_{[0,1]}(t)$, queremos dividirlo en $P_{[0,t]}$ y $P_{[t,1]}$. Los puntos de control de la curva original están etiquetados

$$P(0,0,0), \quad P(0,0,1), \quad P(0,1,1), \quad P(1,1,1).$$

Las cantidades en las que se subdivide el problema para definir valores polares

$$P(0,0,0), \quad P(0,0,t), \quad P(0,t,t), \quad P(t,t,t).$$
$$P(t,t,t), \quad P(t,t,1), \quad P(t,1,1), \quad P(1,1,1).$$

Estos nuevos puntos de control se pueden derivar mediante la aplicación de la simetría y las reglas del mapa para los valores polares. Refiriéndose a la Figura 4, se puede calcular:

Paso 1.

$$P(0,0,t) = (1-t)\times P(0,0,0) + (t-0)\times P(0,0,1);$$
$$P(0,1,t) = (1-t)\times P(0,0,1) + (t-0)\times P(0,1,1);$$
$$P(t,1,1) = (1-t)\times P(0,1,1) + (t-0)\times P(1,1,1);$$

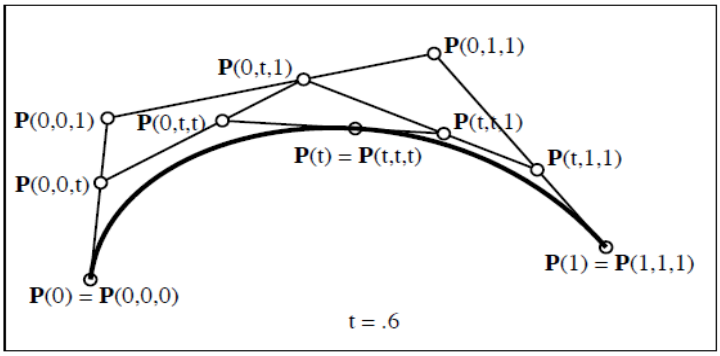
Paso 2.

$$P(0,t,t) = (1-t)\times P(0,0,t) + (t-0)\times P(0,t,1);$$
$$P(1,t,t) = (1-t)\times P(0,t,1) + (t-0)\times P(t,1,1);$$

Paso 3.

$$P(t,t,t) = (1-t)\times P(0,t,t) + (t-0)\times P(t,t,1);$$

Figura 4. Subdivisión de una curva Bézier cúbica



Vectores Nodo

Un vector nodo es una lista de los valores de los parámetros, o nodos, que especifican los intervalos de parámetros para curvas individuales Bézier que conforman un B-spline. Por ejemplo si una curva B-spline cúbica, se compone de cuatro curvas Bézier con intervalos de parámetros [1, 2], [2, 4], [4, 5] y [5, 8], el vector de nodos sería:

$$[t_0, t_1, 1, 2, 4, 5, 8, t_7, t_8].$$

Observe que hay dos (uno menos que el grado) nodos adicionales antepuestos y anexos al vector de nodos. Estos nodos controlan las condiciones finales de la curva B-spline.

Por razones históricas, los vectores nodos son tradicionalmente descritos de tal manera que se requirieren n nodos-condición final, y en el mundo real siempre se definirá un nodo adicional al comienzo y al final de un vector de nodo. Por ejemplo, el vector de nodo en la Figura 2b sería:

$$[t_0, t_1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, t_9\,],$$

donde los valores de t_0 y t_9 no tienen absolutamente ningún efecto sobre la curva. Por lo tanto, dejamos de lado estos valores nodos ficticios en nuestra discusión, pero se debe estar conscientes de que aparecen en la literatura B-spline y en el software correspondiente. Obviamente, un vector de nodo debe ser la secuencia de los números reales no decreciente. Si cualquier valor nodo se repite, este se reconoce como un nodo múltiple. Una curva B-spline cuyo vector de nodo está espaciado uniformemente se conoce como un B-spline uniforme. Si el vector de nodo no está espaciado de manera uniforme, la curva se denomina B-spline no uniforme.

Extracción de Curvas Bézier de curvas B-spline

Ahora estamos listos para discutir la cuestión práctica central para B-splines, a saber, ¿cómo encontrar los puntos de control para las curvas Bézier que conforman un B-spline? Este procedimiento a menudo llamado el Algoritmo Böhm.

Considere la B-spline en la Figura 2b consiste en curvas Bézier sobre los dominios [3, 4], [4, 5] y [5, 6]. Los puntos de control de esas tres curvas Bézier tienen valores polares

$$P(3,3,3), P(3,3,4), P(3,4,4), P(4,4,4),$$

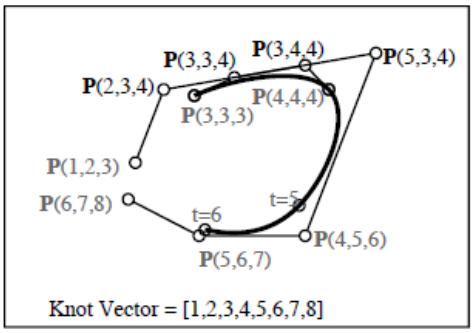
$$P(4,4,4), P(4,4,5), P(4,5,5), P(5,5,5),$$

$$P(5,5,5), P(5,5,6), P(5,6,6), P(6,6,6),$$

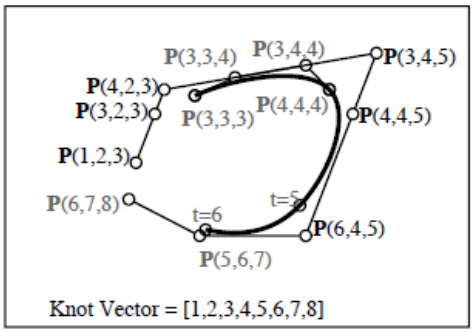
Respectivamente. Nuestro rompecabezas es aplicar las propiedades de simetría y afinidad para encontrar esos valores polares, dados los valores polares-B spline.

Para la curva Bézier sobre [3, 4], primero determinamos que $P(3,3,4)$ es 1/ 3 del camino desde $P(2,3,4)$ a $P(5,3,4)$= $P(3,4,5)$. Del mismo modo, $P(3,4,4)$ es 2/ 3 del camino desde $P(3,4,2) = P(2,3,4)$ a $P(3,4,5)$. Vea la Figura 5a.

Figura 5. Representación del algoritmo de Böhm



a) Primera etapa



b) Segundo etapa

Antes de que podamos localizar $P(3,3,3)$ y $P(4,4,4)$, debemos encontrar los puntos auxiliares $P(3,2,3)$ (2/3 de la distancia desde $P(1,2,3)$ a $P(4,2,3)$) y $P(4,4,5)$ (2/3 de la distancia de $P(3,4,5)$ a $P(6,4,5)$), como se muestra en la figura 5b. Finalmente, $P(3,3,3)$ se ve que está a la mitad del camino entre $P(3,2,3)$ y $P(3,3,4)$, y $P(4,4,4)$ se ve que está a la mitad del camino entre $P(3,4,4)$ y $P(4,4,5)$.

Tenga en cuenta que los cuatro puntos de control de Bézier se derivaron de exactamente cuatro puntos de control B-spline; $P(5,6,7)$ y $P(6,7,8)$ no estaban involucrados. Esto significa que $P(5,6,7)$ y $P(6,7,8)$ se puede mover sin que afecte a la curva Bézier sobre [3, 4]. En general, la curva Bézier sobre $[t_i, t_{i+1}]$ es sólo influenciada por puntos de control B-spline que tienen t_i o t_{i+1} como uno de los parámetros de valor polares. Por esta razón, se dice que los B-splines tienen la propiedad de control local, ya que cualquier punto de control dado puede influir en la mayoría de los n segmentos de la curva.

REFLEXIONES FINALES

Es importante destacar en este apartado que, la presente comunicación es tan solo una componente de un proyecto de investigación en el área del pensamiento numérico en general y enfocada en particular en el estudio de los B-splines; Se considera pertinente mencionar que este como otros temas del modelado y aproximación numéricos discutidos usando el objeto B-spline y que resultan de uno de los tratados publicados por los expertos a nivel internacional; se han ido presentando en los últimos años y se tiene como propósito presentarlos en eventos de corte internacional. Las temáticas que componen a la indagatoria que se está realizando por un grupo de académicos universitarios son los polinomios de Bernstein, las curvas Bézier, curvas racionales Bézier, B-splines, aproximación, curvas splines, splines multivariados, superficies y sólidos, y el elemento finito.

En concreto es importante mencionar que en esta comunicación breve solo se tratará con una de las temáticas que conforman la investigación en su totalidad; y así, aclarar que no se trata de un caso aislado. Se espera que se despierte el interés tanto, de la comunidad dedicada a la matemática educativa, como de los estudiantes en las distintas áreas de la ingeniería, de las ciencias y de la tecnología; con objeto de incorporar a los investigadores, profesores y estudiantes para la realización y puesta en marcha del proyecto que incluye el tema u objeto matemático que aquí se trata y que por tanto es parte de un contenido más amplio.

Se espera de manera muy particular la motivación de estudiantes que al incorporarse se produzcan los documentos y artículos necesarios para poner al alcance de la comunidad universitaria de habla hispana, los conceptos necesarios para la comprensión y manejo del objeto matemático B-spline. Los citados documentos a producir mediante la indagatoria del proyecto incluyen tesis de licenciatura, maestría y doctorado; por lo que resulta muy importante la participación de investigadores de distintas áreas temáticas dentro de la matemática educativa.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

De Boor, C. (2008). *A Practical Guide to splines*. New York: Springer.

Ramos, R., Aguilar A. (2014). *Interpolación, Derivación e Integración Numéricas*. México: Comité Editorial de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán de la UNAM.

Sederberg, T. (1983). *Implicit and parametric curves and surfaces for computer aided geometric design*. Recuperado 07 de julio de 2013 de http://search.proquest.com/docview/

Ramshaw, L. (2012). Béziers and B-splines as multiaffine maps. In R. A. Earnshaw (Ed.), *Theoretical Foundations of Computer Graphics And CAD* (pp. 757-776), USA: Springer-Verlag.

DIFICULTADES DE COMPRENSIÓN DEL DISEÑO INSTRUCCIONAL EN LOS LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

María Leticia Rodríguez González, Patricia Blásquez Morales
Escuela Primaria "Andrés Osuna", SEP (México)
marletrg@hotmail.com, pablmo@gmail.com

Palabras clave: mediación docente, diseño instruccional, aprendizaje

Key words: Teacher mediation, instructional design, learning

RESUMEN: Las dificultades a las que se enfrentan maestros y alumnos de Educación Primaria, para comprender el Diseño Instruccional del libro de texto oficial de Matemáticas "Desafíos" es una constante que se vive en las aulas mexicanas. En este anteproyecto se propone analizarlo en tres dimensiones: a) Pertinencia de las prácticas de enseñanza y aprendizaje con la Propuesta Curricular Oficial; b) Dificultades de los alumnos para la comprensión de las tareas del libro de Matemáticas "Desafíos"; c) El docente como Mediador entre el aprendizaje matemático de los niños y el uso del libro de texto oficial. Como resultado se espera concretar una propuesta de sensibilización de formación conceptual matemática para los profesores en servicio, que les permita articular las dimensiones mencionadas.

ABSTRACT: The difficulties that teachers and primary school students face, to understand the Instructional Design official textbook of Mathematics "Challenges", is a constant that exists in Mexican classrooms. This draft proposes to analyze in three dimensions: a) Relevance of the practices of teaching and learning with institutional Curricular Proposal; b) difficulties students for understanding of the tasks of the book Math "Challenges "; c) the teacher as a mediator between the mathematical learning of children and the use of the official textbook . As a result, expects to finalize a proposal mathematical conceptual awareness training for teachers in service, enabling them to articulate the dimensions mentioned.

INTRODUCCIÓN

Los bajos resultados en la asignatura de Matemáticas de los estudiantes de Educación Básica y Media Superior en las evaluaciones internas: Evaluación Nacional del Logro Académico (ENLACE) y externas Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA) y de acuerdo con el INEE en 2013 evidenciaron el bajo impacto que brinda el Sistema Educativo Nacional (SEN). En 2012 la prueba PISA reportó que el 55% de los estudiantes no alcanzan un nivel de suficiencia, el 41% está en un nivel intermedio y sólo el 4% está en niveles altos. Estos porcentajes colocan a México en niveles muy por debajo de la media de los países miembros de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). Sin embargo, los alumnos que obtuvieron alto nivel de desempeño alcanzaron 539 puntos; y comparados con los resultados de otros países como por ejemplo en Japón, la media de desempeño de sus estudiantes promedio es de 536.

La Reforma Educativa de 2011, amén de ser una estrategia político-económica para promover cambios significativos en el rumbo de las acciones institucionales, se ha centrado en mejorar la calidad de la educación a través de la capacitación, evaluación y certificación de los docentes en diferentes áreas del conocimiento y desarrollo de habilidades tecnológicas (Estándares de Desempeño Docente - UNESCO). Estos cambios datan desde la Reforma Educativa de 1994, donde centró su atención en resignificar la práctica docente con una perspectiva de facilitación y promoción del aprendizaje, con los referentes teóricos del constructivismo representados básicamente por Piaget, Vigotsky y Ausubel, el aprendizaje de las matemáticas fue reconceptualizado como un proceso de construcción de acuerdo con los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos y su contexto; las situaciones didácticas propuestas se centraron en escenarios de la vida cotidiana. El Libro de Texto Oficial y Gratuito, recupera esta propuesta didáctica; pero el problema ha sido que el maestro frente a grupo no ha comprendido su intención metodológica ni cómo trabajarlo en el aula; lo que implica un rompimiento epistemológico en su estructura; trabajándolo desde una perspectiva tradicional de la enseñanza.

Ante este contexto este trabajo se cuestiona: ¿Cuáles son las dificultades que los maestros para poder comprender la estructura teórico - metodológica del Libro de Texto Gratuito de Matemáticas?, ¿Qué tanto el docente conoce a sus alumnos en relación a su proceso de desarrollo cognitivo, social y cultural y qué implicación tiene en el aprendizaje del conocimiento matemático? ¿Cómo resuelve la problemática del incipiente dominio del Sistema de Escritura que tienen los niños para comprender y realizar las tareas y actividades del libro de Matemáticas: “Desafíos”?

CONTEXTUALIZANDO NUESTRA REALIDAD

En el ejercicio de la práctica profesional docente, en la asignatura de matemáticas nos hemos enfrentado al impacto del lenguaje y no precisamente el lenguaje matemático, sino al uso de la lengua materna, que en muchas ocasiones genera barreras entre lo académico y lo cotidiano; sumando por un lado las dificultades de los alumnos en el dominio del sistema de escritura lo que complejiza la comprensión de las instrucciones propuestas en cada Desafío Matemático que se propone en las lecciones del libro de Texto Oficial Gratuito de Matemáticas “Desafíos”; por otro lado, escuchando a compañeros con el argumento: “*si no entienden lo que leen, ¿Cómo van a resolverlos?”,* dejando en evidencia el desconocimiento de la Propuesta curricular, incluyendo el libro, contradiciendo su función mediadora para promover el aprendizaje. No han logrado asumirse en su función de Andamiaje, para que los niños no se centren en las dificultades del Sistema de

Escritura; sino en la propia tarea matemática. De acuerdo con Vigotsky, la Zona de Desarrollo del Docente servirá de enlace para que ellos vayan comprendiendo las instrucciones escritas en el libro; el cual tiene como intención didáctica: en primer momento que los alumnos lean y resuelvan sin ayuda del profesor; en el segundo momento comparen sus resultados; en el tercer momento después de la resolución expliquen cómo le hicieron para resolverlo.

Esta propuesta metodológica ha generado angustia en los docentes, pues prefieren dar la clase explicando y mostrando cómo se resuelve y después plantearlo como un ejercicio de repaso, con el argumento de que se pierde mucho tiempo y no se avanza; en otros casos el libro de texto se deja de tarea en casa; o bien, no se usa y en su lugar se apoyan de ejercicios fotocopiados que los niños recortan y pegan en sus cuadernos. Pocos son los docentes que se atreven a promover actitudes diferentes: de acompañamiento y asesoramiento para sean los mismos niños quienes vayan descubrimiento sus potencialidades de aprendizaje matemático.

Para seguir el hilo conductor de estas ideas, se propone hacer el análisis en tres dimensiones: a) Pertinencia de las prácticas de enseñanza y aprendizaje con la Propuesta Curricular Oficial; b) Dificultades de los alumnos para la comprensión de las instrucciones del libro de Matemáticas "Desafíos"; c) El docente como Mediador entre el aprendizaje matemático de los niños y el uso del libro de texto oficial.

Pertinencia de las prácticas de enseñanza y aprendizaje con la propuesta curricular oficial

En las escuelas se genera un amplia brecha entre la vida cotidiana y la vida académica, olvidando que las matemáticas están presentes en todo momento, que forman parte del Perfil de Egreso de Educación Básica (Plan de Estudios 2011); paradójicamente la *descolarización* a la que aluden Ferreiro y Teberosky (1979) no tiene espacio de actuación; estas autoras han cuestionado las prácticas escolares consistentes en copias y mecanizaciones, que sólo tienen sentido en la escuela, pero no en la vida cotidiana. Esto nos permite afirmar que el aprendizaje de conocimientos matemáticos ha sido uno de los principales problemas pedagógicos que históricamente no se ha logrado resolver. No hay garantía de que el aprendizaje escolar consolide las herramientas conceptuales de los niños para proponer, interpretar y resolver problemas matemáticos de la vida diaria.

En el devenir de la Matemática Educativa representada en diversas instituciones de investigación Educativa nacionales e internacionales, han evidenciado que los docentes de educación básica tienen dificultades conceptuales y metodológicas, que van desde el desconocimiento de la asignatura como campo del conocimiento hasta la operatividad de su diseño didáctico. A pesar de que la formación académica de los docentes en México va desde Normal Básica, licenciatura y estudios de posgrado, es una realidad que no han comprendido en qué consisten los enfoques teórico - metodológicos de los programas de las asignaturas y de qué manera se articulan; tampoco tienen una estructura conceptual matemática sólida, lo que complejiza la aplicación y diseño de situaciones didácticas congruentes al planteamiento del currículum. Transforman el sentido didáctico de las tareas propuestas en los libros "Desafíos", en actividades tradicionales de enseñanza; lo que se traduce en serias dificultades para poder orientar y guiar a los alumnos en la realización de tareas propuestas en los libros de "*Desafíos"*. Muchos de los maestros argumentan que traducen las actividades propuestas en los libros de texto, en actividades de enseñanza tradicional, porque consideran que los niños no han logrado un dominio competente del Sistema de Escritura, para comprender las instrucciones escritas. Es en este punto donde las sustentantes,

identifican que no se ha logrado concretar la Mediación Pedagógica del docente, al centrar su atención en la estructura del texto escrito descuidan el sentido didáctico de la actividad matemática, es decir, se pierde la esencia matemática.

Esta preocupación ha sido objeto de estudio en diversas investigaciones de posgrado; donde se analiza la importancia que tiene el libro de texto como una forma de "identificar rasgos conceptuales del enfoque didáctico o la forma de organización del saber son comunes en las obras escolares y que han conformado un rasgo característico para la clase de matemáticas" (Flores, 2010, p. 28-29); es decir, trazan una ruta teórico – metodológica para orientar el actuar de los maestros y alumnos, "…en el libro de texto se consolidan las visiones institucionalizadas del conocimiento" (Cantoral, Montiel, Reyes - Gasperini (2015, p. 11); por lo que es fundamental que el profesor reconozca estas implicaciones y el potencial en el que se convierte como promotor del conocimiento matemático con el libro como un eje de la práctica docente. Sin embargo, la realidad empírica dista mucho de esta intención, así lo revela estudio comparativo de las prácticas docentes de Educación Básica, con el uso del libro de Texto en Tegucigalpa Honduras, y encontró:

> En las observaciones de clase y en los planes de clase consultados, se observó que hay ciertas debilidades en cuanto a su uso para el desarrollo de la clase de matemáticas, evidenciando que los procesos de formación inicial, en el procesos de formación inicial, en el proceso de formación profesional a través de las capacitaciones y el instructivo para el uso y manejo establecido en la Guía para el Maestro. Los docentes no alcanzan a apropiarse de la metodología para la enseñanza de la matemática en formación de formadores de docentes para educación básica" (Cárcamo, 2012, p. 100)

Esta realidad hemos podido constatarla en nuestras funciones como maestras de grupo, asesoras técnico pedagógica y directoras de escuela primaria. Reconocemos que el docente carece de las herramientas conceptuales tanto matemáticas como didácticas para usar el libro de texto "Desafíos" de forma óptima, como un recurso didáctico y no como un obstáculo.

Por lo que se propone comprender las dificultades conceptuales y metodológicas de los docentes como mediadores del aprendizaje de los alumnos y el uso de materiales de apoyo, entre ellos el libro "Desafíos" de Educación Primaria, a través de asesoría y acompañamiento a la práctica docente.

Dificultades de los alumnos para la comprensión de las instrucciones del libro de Matemáticas "Desafíos"

La expectativa institucional presupone a través del diseño del texto los niños asumen el trabajo en equipo naturalmente, que van a conversar, analizar los procedimientos que van a desarrollar; sin embargo, la realidad y la experiencia nos muestra escenarios totalmente diferentes, pues la confusión que se genera en los niños los lleva a preguntar constantemente: *¿Qué se va a hacer? ¿Cómo se va a hacer? ¿Cómo se empieza?* Generando en ellos sentimientos de frustración, angustia y baja autoestima, expresándolo verbalmente como "*no puedo" "no entiendo" "es muy difícil para mí".*

Es preocupante para las sustentantes, el que se le reste importancia a la dirección de los procesos en la estructura del libro de Matemáticas "Desafíos". Esto no significa que se proponga una postura

conductista y/o tradicional; pero hay momentos en que se requiere precisar y/o ayudar al estudiante a anclar sus conocimientos matemáticos a través de la ayuda del profesor.

"*Si lo platican, los orientan, lo resuelven"* puede ser una premisa simple, pero que reconoce los factores afectivos y de comprensión que afectan o se implican en los procesos de resolución de las tareas, por esta razón consideramos que es necesario la reconceptualización de la intervención docente en las clases de matemáticas con el uso del libro de texto: "Desafíos".

Con esta propuesta, nos estamos enfrentando al vínculo de la conexión entre las matemáticas y la asignatura de español, pues en los primeros grados de educación primaria, los niños aun no logran consolidar la apropiación de la lengua escrita. También es el mejor escenario académico para que vayan consolidando el Sistema de Escritura a partir de desarrollar su comprensión lectora con el uso textos científicos y matemáticos, pues aprenden a que no sólo se leen textos literarios, sino también los matemáticos; van descubriendo que existen muchos nombres para los números, que hay gráficas que representan otra forma de escritura, la cual se puede leer, que hay distintos tipos de números, de formas de operarlos, que a través de la imaginación pueden hacen construcciones geométricas maravillosas.

Sin embargo, esta intención sólo se va a lograr en la medida en que el docente se atreva a vivir la experiencia de Mediador y Andamiaje con el uso del libro de Texto.

El docente como mediador entre el aprendizaje matemático de los niños y el uso del libro de texto oficial

La intervención docente se enfrenta a severos problemas de precisión conceptual y metodológico, "…en México, según estadísticas presentadas por el INEE (2011), la mayoría se desempeña sin haber recibido una formación específica sobre la materia que impartirán, sin tener experiencia docente, sin haber sido evaluados para su ingreso." (Flores, 2014, p. 54), además de esta deficiencia institucional, las prácticas docentes se han ido estructurando histórica y culturalmente a partir de la conducción de la enseñanza, en donde el maestro es quien dirige toda la actividad, evitando el desorden que se genera en las actividades en las que los alumnos interactúan de diversas formas, es él quien da las explicaciones para la resolución de las actividades propuestas en las lecciones de los libros de texto de matemáticas; en otros casos, dejándolas de tarea; o bien, si identifica el contenido matemático transforma los ejercicios perdiendo su esencia conceptual y metodológica de construcción.

En este escenario pedagógico la docencia tiene una excelente oportunidad para crear el puente entre el Diseño Instruccional y los alumnos en la resolución de la tarea que se proponen en cada lección, parafraseando a Cantoral, et. al (2000), a través del diseño de situaciones didácticas, el docente puede disponer de un conjunto de secuencias de clase para orientar la realización de un proyecto de clase. Pues si bien en el libro para el maestro, se señalan algunos aspectos como ideas clarificantes para desarrollar la lección, éstas no consideran aspectos que tienen que ver con la comprensión, el contexto, el trabajo en equipo, la adecuación del lenguaje y el enfrentarse a la frustración; perdiendo el sentido metodológico y didáctico propuesto por Vergnaud (1999). Esto implica que el docente conozca la situación contextual de sus alumnos, los procesos de desarrollo y cómo articularlos en el aula. Por lo que se propone sensibilizar al maestro de Educación Básica, en la necesidad de ir construyendo su propio proceso de formación en el que se articule:

conceptualización de sus conocimientos matemáticos, contenidos y estrategias didácticas, a través de la asesoría técnica, el acompañamiento y el trabajo en colegiado.

Por lo que es necesario potencializar nuestros procesos de formación, partiendo de la revisión y comprensión de las propuestas curriculares, en donde reflexionemos el sentido y significado del Perfil de Egreso en la asignatura de Matemáticas del Plan de Estudios 2011:

> "Argumenta y razona al analizar situaciones, identifica problemas, formula preguntas, emite juicios, propone soluciones, aplica estrategias y toma decisiones. Valora los razonamientos y la evidencia proporcionados por otros y puede modificar, en consecuencia, los propios puntos de vista. Busca, selecciona, analiza y utiliza la información proveniente de diversas fuentes". (Plan de Estudios, 2011, p. 53)

Así al reconocer que en el aula de matemáticas convergen múltiples referentes culturales, sociales y étnicos y las complejidades sociales, culturales, económicas y psicológicas, los docentes tendrán mayores oportunidades de reconceptualizarse como verdaderos mediadores entre los alumnos y la promoción del aprendizaje del conocimiento matemático, optimizando el uso de recursos didácticos, como el Libro de Texto de Matemáticas, materiales concretos, recursos web, entre otras.

El maestro de matemáticas en las nuevas sociedades donde la globalización y la tecnología están presentes en todos los espacios de la vida de los seres humanos, tiene el Desafío de recuperar y reconstruir su imagen de maestro como aquel sujeto que además de estar en formación permanente; que invita, disfruta, promueve, facilita, colabora y orienta los procesos de construcción del aprendizaje, para eficientizar las competencias matemáticas de sus alumnos.

Lo que hemos presentado, pretende consolidar un anteproyecto de investigación, apoyándonos metodológicamente con los Modelos Teórico Locales y sus cuatro componentes: de Modelo de Enseñanza; Modelo para los procesos Cognitivos, Modelo de Competencia Formal y el Modelo de Comunicación; ya que éste nos va a permitir abordar las dificultades de la Mediación docente, el aprendizaje del conocimiento Matemático y el uso de los libros de texto en Educación Primaria. Esta propuesta de investigación metodológica, implica dos fases: la observación empírica del uso que hacen los maestros del libro de texto, la organización de sus clases y su pertinencia con la Propuesta Curricular Oficial; entender las dificultades conceptuales de matemáticas que tienen los maestros; identificación del desarrollo cognitivo de los niños y su experiencia escolar; así como vislumbrar posibilidades de generalización para que el docente pueda reconocer su acción mediadora para promover y potenciar aprendizajes en el aula con el uso del libro de texto de Matemáticas "Desafíos".

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez, Garza (2000) *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México, Editorial Trillas.

Cantoral, R., Montiel, G., & Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepestemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 9 – 28.

Cárcamo, D. (2012) Uso de los libros de texto de Matemática en el proceso de enseñanza: un análisis comparado. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán. Tegucigalpa, Honduras.

Ferreiro, E. Teberosky A, (1979) *Los Sistemas de Escritura en el desarrollo del niño*. México, Editorial Siglo XXI.

Flores D. C. (2014) *La Formación de Profesores de* Matemáticas*. En C. Dolores, M. S. Hernandez, L. Sosa (Eds), Matemática Educativa: La Formación de Profesores* (51-71), México: Universidad Autónoma de Guerrero y Ediciones Díaz de Santos.

Flores, R. (2010) Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria. Tesis de Maestría no publicada. Instituto Politécnico Nacional. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. México.

INEE (2013) *México en Pisa 2012.* Recuperado el 15 de septiembre de 2015 de www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/.../Mexico_PISA_2012_Informe.pdf

SEP (2011) Plan de Estudios 2011, México

Vergnaud, G. (1999). *El Niño, las matemáticas y la realidad*. México. Editorial Trillas.

SEP (2011) Desafíos 2º grado. Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos. México

CONOCIMIENTOS DE ESTOCÁSTICOS DE UN ESTUDIANTE DE NUEVO INGRESO AL BACHILLERATO TECNOLÓGICO

Jesús Salcedo Prado, Ana María Ojeda Salazar
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN (México)
jsalcedo@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx

Palabras clave: Probabilidad, Determinista, Medio Superior

Key words: Probability, Deterministic, High School

RESUMEN: Para explorar la forma en que la solución de los problemas de probabilidad podría promover la dotación de sentido a otros conceptos matemáticos necesarios en el proceso, entrevistamos a un estudiante de primer semestre de bachillerato tecnológico para profundizar en su comprensión de algunas ideas fundamentales de estocástica. Planteamos al entrevistado dos problemas de probabilidad que implican conceptos geométricos y algebraicos. El estudiante dio evidencia de conocer las ideas de: espacio muestral, al referirse al volumen, a la superficie total y a sus particiones; medida de probabilidad, como la proporción de un área particular respecto a la total; adición de probabilidades, asociada a la suma de las áreas; y equiprobabilidad, relacionada con áreas de una misma superficie. El procedimiento que se aplicó a uno de los problemas se sometió a modificaciones para satisfacer el requerimiento del otro.

ABSTRACT: In order to explore how the solving of probability problems might promote making sense of other mathematical concepts needed in the process, we interviewed a freshman from the technical high school to deepen in his understanding of some fundamental ideas of stochastics. Two probability problems involving geometric and algebraic concepts were posed to the interviewed. The student applied the ideas of: sample space, by referring it to the total volume and area; probability measure, as the proportion of a particular area to the total one; addition of probabilities, associated to the sum of areas; and equiprobability, related to equal areas from the same surface. The procedure applied to solve one of the problems went through modifications to fulfill the requirement of the other one.

INTRODUCCIÓN

El presente reporte de un estudio de caso forma parte de un proyecto para investigar cómo, del estudio de situaciones probabilísticas propuestas a estudiantes de bachillerato tecnológico, se pudiera promover que ellos dotaran de sentido a otros conceptos matemáticos necesarios para dar cuenta de esas situaciones. Fischbein (1975) ha señalado al concepto de probabilidad como "síntesis de azar y necesidad, de lo aleatorio y lo determinista, [por lo que] a veces involucra confrontaciones en el desarrollo del intelecto" (p. 19). Este autor también ha recomendado que la formación en probabilidad se inicie en edades tempranas para prevenir los sesgos del pensamiento. En la enseñanza de la matemática en el bachillerato tecnológico son de esperarse dificultades de los estudiantes para aprehender conceptos de estocásticos, pues se privilegia un enfoque determinista en los cinco primeros semestres propuestos en el plan de estudios respectivo, para los que los contenidos corresponden a Aritmética, Álgebra, Geometría y Trigonometría y Cálculo Diferencial e Integral; en estas unidades se ejercita el estudiante en determinar un único resultado de la solución de un problema. El sexto semestre se dedica a Probabilidad y Estadística, que consideran lo posible.

Dada esta problemática, planteamos estas preguntas de investigación: *¿Cómo solucionan un problema de probabilidad que requiera del uso de otros conceptos matemáticos? ¿Qué predomina, un razonamiento determinístico o uno probabilista?*

Gatusso (2006) realizó una investigación con estudiantes de nivel básico, a quienes planteó tareas que incluían conceptos estadísticos y que a la vez permitieran ejercitar otros conocimientos matemáticos: por ejemplo, al analizar un conjunto de datos es necesario realizar operaciones aritméticas; se utilizan números ordinales, cardinales y racionales; al trazar gráficas, como los diagramas circulares, es necesario calcular proporciones respecto a 360° para obtener los sectores correspondientes a cada grupo de datos; al final de su investigación señala que La interacción entre matemáticas y estadística es factible.

Es común que la educación matemática derive en una visión fragmentada de los temas, sin la vinculación de sus contenidos y que se finalice con los de Probabilidad y Estadística, por lo que el docente no dispone de tiempo conforme a su planeación y omite su enseñanza (por ejemplo, DGDC, 2011). Biehler (1994) resalta esta fragmentación; incluso para la enseñanza de estocásticos hay quienes privilegian la de la Estadística a costa de la Probabilidad; en contra parte, hay quienes argumentan que la enseñanza de la Probabilidad debería anteponerse a la de la Estadística. Para Biehler se deberían plantear problemas para los que los estudiantes tengan que seleccionar muestras, tomar datos, analizarlos y realizar predicciones con base en ellos; es decir, conjugar los dos temas en una sola tarea.

ELEMENTOS TEÓRICOS

En una perspectiva epistemológica, consideramos la propuesta de Heitele (1975) para la educación en estocásticos, el triángulo de la constitución del concepto matemático (Steinbring, 1991) y la propuesta de Piaget (1982) para la evolución en el niño de la idea de azar. Desde un punto de vista cognitivo nos remitimos a los resultados de las investigaciones del uso de modelos didácticos intuitivos realizados por Fischbein (1977).

Ideas fundamentales de estocásticos. Heitele (1975) ha propuesto diez ideas fundamentales de estocásticos para la enseñanza de probabilidad y de estadística en todos los niveles educativos que sigan un curriculum en espiral. Considera las ideas fundamentales como:

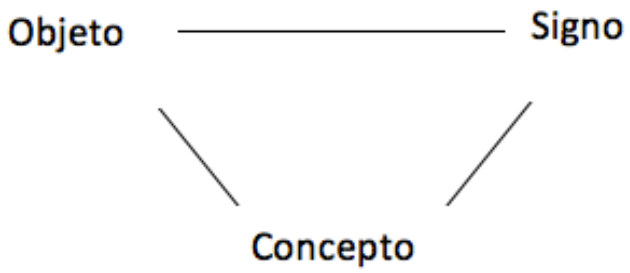
> …aquéllas que proporcionan al individuo modelos explicativos en cada etapa de su desarrollo, tan eficientes como sea posible y que se distingan en los distintos niveles cognoscitivos, no de manera estructural, sino sólo en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración.
>
> (Heitele, 1975, p. 188)

Su propuesta considera que: el objetivo de la enseñanza de un tópico es la transmisión de ideas fundamentales, necesarias como una guía desde la educación preescolar hasta la universitaria para garantizar cierta continuidad; las ideas fundamentales y los conceptos se tratan en los distintos niveles cognoscitivos y lingüísticos a lo largo de un currículum en espiral; la transición a un nivel cognoscitivo más alto se facilita si durante las primeras etapas cognoscitivas se ha diseñado una presentación apropiada del tópico principal; los resultados de la psicología del desarrollo con respecto a las ideas de estocásticos; las diversas fallas de los adultos en situaciones estocásticas; la historia de la probabilidad.

Entonces, el autor propone como ideas fundamentales: Medida de probabilidad, espacio muestra, adición de probabilidades, regla del producto e independencia, equiprobabilidad y simetría, combinatoria, variable estocástica, modelo de urnas y simulación, ley de los grandes números y muestra. El autor aclara que estas ideas constituyen un modelo para construir un curriculum coherente en estocásticos, más que para resolver problemas. La utilidad de este modelo se muestra al aplicarlo en la enseñanza a todos los niveles. Heitele propone integrar en la educación básica, lo más temprano posible, actividades de estocásticos a las de aritmética y geometría, para desarrollar conexiones significativas con la realidad y prevenir sesgos del pensamiento. Para ello, señala, es necesario que los profesores sepan lo que es realmente fundamental en estocásticos.

Triángulo epistemológico. De acuerdo con Steinbring (1991), el conocimiento probabilístico tiene un carácter de sistemas complejos en cada nivel de desarrollo. Este conocimiento se crea como una forma relacional o un mecanismo de unión entre los aspectos de cálculo formales y los contextos interpretativos. Esta forma relacional del significado matemático se caracteriza como el triángulo epistemológico del conocimiento matemático (véase la Figura 1):

Figura 1. Triángulo epistemológico del conocimiento matemático



El triángulo epistemológico representa un diagrama relacional en el cual el significado del conocimiento no puede ser deducido desde uno de los vértices, siempre requiere un balance entre todos ellos.

Lo posible y lo necesario. Para centrar el problema de la producción de las novedades por el sujeto, Piaget (1982) y sus colaboradores lo enfocaron desde la evolución de los posibles en el niño. Para el niño pequeño, todo lo que ocurre a su alrededor se justifica porque así lo ha observado durante toda su experiencia. Él aún no piensa en posibilidades y no considera que los fenómenos se desarrollen bajo una lógica funcional. Conforme el infante crece comienza a conocer las reglas lógicas que regulan el comportamiento de los fenómenos; éste es el inicio de lo que en un estado maduro será la capacidad de realizar deducciones lógicas. De la misma forma, a mayor edad es capaz de aplicar operaciones combinatorias, tanto a objetos concretos como a los elementos que intervienen en el desarrollo de los fenómenos; de esta manera comienza a identificar las posibilidades. La comprensión de lo necesario ocurre cuando el niño comienza a analizar su experiencia y se desarrolla siempre como en una línea recta, siguiendo la misma dirección. Lo posible se desprende también de ese análisis pero se desarrolla en una línea en dirección distinta a la anterior, línea a la que podríamos imaginar con un carácter más elástico y flexible que el de la anterior. Las operaciones del pensamiento son "…una resultante de la formación de los posibles", de modo que "… una vez diferenciados y coordinados lo posible, lo real y lo necesario, subordinamos simultáneamente los posibles y las estructuras operatorias … al equilibrio entre las diferenciaciones e integraciones" (*ibídem*, p. 184). Lo posible es específico de una "dinámica interna" (*ibídem*, p. 185) de reequilibraciones.

Modelos generativos. Desde un punto de vista cognitivo, Fischbein (1977) establece la hipótesis de que los modelos didácticos, específicamente los modelos intuitivos, deben tener una capacidad heurística, como sucede con los modelos científicos, porque los modelos, ya sean científicos o didácticos, deben constituir una componente viable para el pensamiento productivo. Esto lo plantea igualmente para los modelos pictóricos:

> …un buen modelo es, necesariamente, generativo. Un modelo es genuinamente útil al pensamiento productivo si puede representar correctamente un número ilimitado de situaciones diferentes, usando un número limitado de elementos o reglas. El sistema de reglas que establece un modelo para expresar unívoca y estructuralmente al original constituye la sintaxis del modelo.
>
> (Fischbein, 1977, p. 155)

Heitele (1975) señaló también la pertinencia de los modelos pictóricos en la enseñanza básica de estocásticos. La importancia de las operaciones combinatorias es clara en el caso discreto, pues al asignar probabilidades es relevante la tendencia a subestimar la cardinalidad de los eventos (Fischbein, 1975). Con el uso de los diagramas de árbol, basado siempre en las mismas convenciones, se obtiene respuesta a las posibles preguntas referentes a combinatoria y pertenecientes a la misma clase, cuando se pide la cantidad de arreglos posibles en la ordenación de objetos. El modelo es consistente internamente; expresa un principio, un método para construir los arreglos. El modelo es una herramienta intelectual: con él se resuelve el problema y no sólo se describe la solución. Con un modelo tal se aprende a pensar efectivamente y a comprender activamente. Los diagramas de Venn también constituyen una técnica consistente para expresar

operaciones con conjuntos. Es una técnica visual generativa, que usa una lógica figurativa; la solución a las operaciones con conjuntos, qué representan, se puede obtener usando consistentemente el lenguaje figurativo.

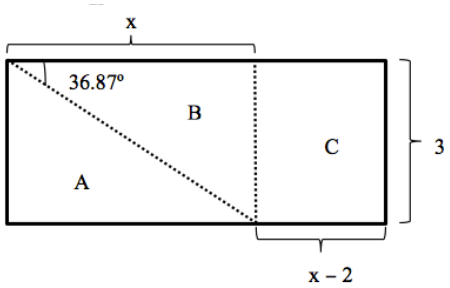
MÉTODO E INSTRUMENTO

En el presente estudio instrumental de caso (Stake, 1995) se entrevistó a un estudiante de 16 años de edad de nuevo ingreso al bachillerato tecnológico, que fue seleccionado por medio de la experienciación (Maturana, 1995) de la enseñanza inicial de *Matemáticas I* en el aula de bachillerato tecnológico. La razón de elegirlo consistió en que fue el estudiante con mejor desempeño en la clase y por haber obtenido un 80% de respuestas correctas a un cuestionario diagnóstico diseñado por docentes de esa institución, integrado por 15 preguntas de opción múltiple, aplicado al inicio del semestre y relativo al contenido matemático indispensable para el ingreso al bachillerato, que está prescrito en el plan de estudios de secundaria (DGDC, 2011). El estudio consistió en una entrevista semiestructurada (Zazkis y Hazzan, 1999), se profundizó en su conocimiento matemático adquirido y en su comprensión de algunas ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975). Se le plantearon dos problemas de probabilidad (véase la Figura 2).

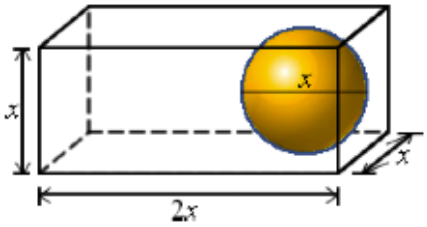
Figura 2. Problemas planteados durante la entrevista

1. En una parcela un tractor se encuentra preparando la tierra para la siembra de maíz. La trayectoria que sigue dentro del terreno es la siguiente:

Si la parcela está segmentada en las áreas A, B y C, ¿cuál es la probabilidad de que en un momento dado, independiente del tiempo en que comenzó su recorrido, el tractor esté en alguna de ellas?



2. En una pecera con forma de ortoedro un pez se mueve al azar dentro de ella. ¿Cuál es la probabilidad de que en un momento dado esté nadando dentro de la esfera mostrada, cuyo diámetro mide X?



La Tabla 1 resume el contenido de estocásticos de los problemas, corresponde a la idea de lo posible en la propuesta de Piaget.

Tabla 1. Ideas fundamentales de estocásticos contenidas en cada problema.

Ideas Fundamentales implicadas	Medida de probabilidad	Espacio muestra	Adición de probabilidades	Equiprobabilidad
Problema 1				
Problema 2				

La Tabla 2 muestra los otros conceptos matemáticos a poner en juego para calcular las probabilidades requeridas, son los correspondientes a la identificación de las necesidades por parte de Piaget.

Tabla 2. Otros conceptos matemáticos contenidos en cada problema.

Otros conceptos matemáticos implicados	Operaciones algebraicas	Área geométrica	Relaciones trigonométricas	Volumen geométrico
Problema 1	Despeje de la incógnita	Triángulos y rectángulos	Tangente de ángulo no notable	
Problema 2	Multiplicación algebraica			Esfera y ortoedro

Los problemas se le presentaron al estudiante impresos en hojas, enunciados en lengua natural escrita, figuras geométricas y signos matemáticos. El estudiante registró sus procedimientos en forma manuscrita con pluma, sin poder borrar. La entrevista duró 47 minutos, se videograbó y transcribió para su análisis. Se utilizó calculadora sólo para determinar la tangente de un ángulo. El interrogatorio se desarrolló en el proceso de solución a los dos problemas.

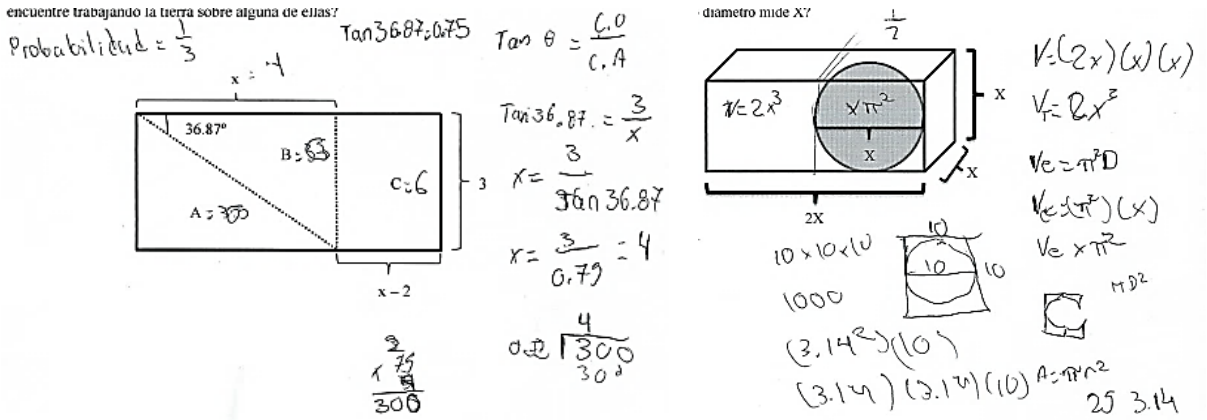
RESULTADOS

En el Problema 1 el estudiante mostró un acercamiento a las ideas de *medida de probabilidad* y de *espacio muestra*. Expresó que podría calcular la probabilidad conociendo la medida de las áreas y relacionarlas con el total de ellas, con lo que también expresó correctamente la idea de adición de

probabilidades. En cuanto a los otros conceptos matemáticos implicados, reconoció correctamente la relación de tangente y realizó las operaciones algebraicas implicadas correctamente (véase la Figura 3); se le proporcionó una calculadora para que determinara el valor de la tangente correspondiente.

Figura 3. Respuestas del estudiante a los problemas.

Problema 1 **Problema 2**



En el Problema 2 el estudiante aplicó el mismo razonamiento al relacionar el volumen indicado respecto al volumen total, aunque en el proceso no recordó la fórmula del volumen de la esfera. Para tratar de superar esta limitación simplificó el problema: se dio cuenta que el radio de la esfera era igual tanto a la mitad del largo de la base del ortoedro como a su ancho y consideró sólo la mitad del volumen de la pecera, que corresponde a la probabilidad ½, con lo que trató de solucionar el problema calculando la relación entre las áreas de un círculo inscrito en un cuadrado; se basó en un diagrama que trazó con el círculo inscrito en el cuadrado (véase la Figura 3, derecha). Al final no logró obtener el valor de la probabilidad solicitado, lo que advirtió al considerar su resultado mucho menor que ½.

La vinculación entre lo posible y lo necesario. La Tabla 3 resume la relación entre lo posible (ideas fundamentales de estocásticos) y lo necesario (otros conceptos matemáticos)

Tabla 3. Las relaciones entre los posibles y las necesidades establecidas por el estudiante al solucionar los problemas.

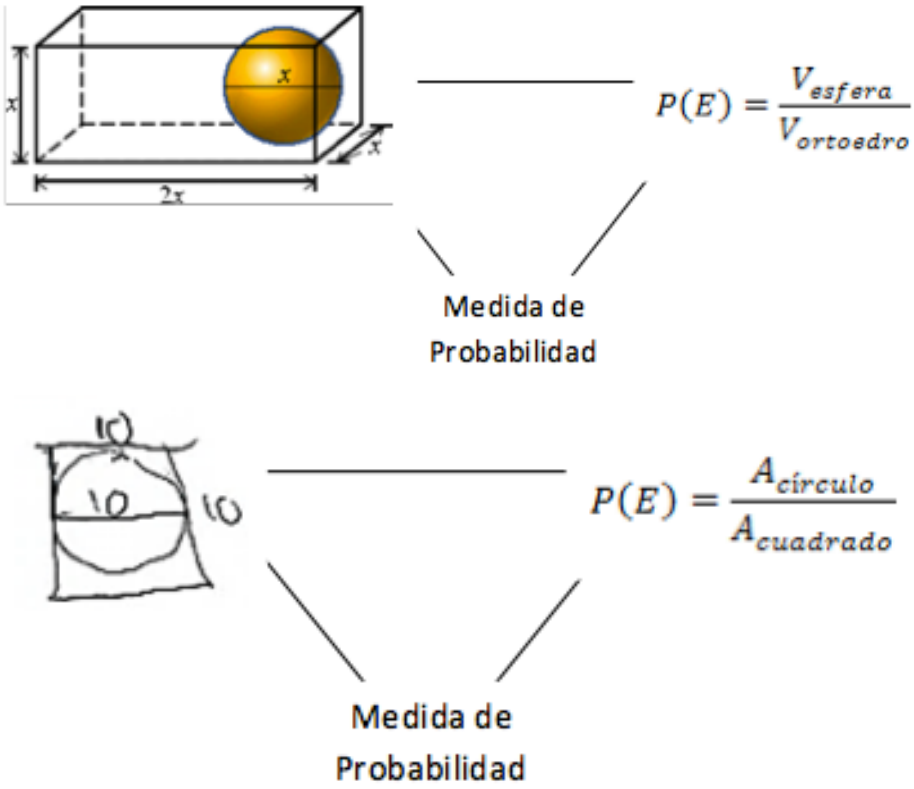
Lo posible: Ideas fundamentales de estocásticos	*Lo necesario*: Otros conceptos matemáticos
Medida de Probabilidad	Relación entre un área/volumen particular y la/el total
Espacio Muestra	Área/volumen total
Adición de Probabilidades	Suma de áreas/volúmenes
Equiprobabilidad	Áreas/volúmenes de igual superficie/espacio

El estudiante estableció correctamente todas las relaciones entre las ideas fundamentales presentes y sus correspondientes geométricos. Esta relación se establece al representar el espacio muestra y los eventos de interés mediante diagramas de Venn.

Las respuestas del entrevistado sugieren un acercamiento intuitivo. El valor de estos resultados es que el estudiante procedió sin que el tema se le hubiera enseñado recientemente; en todo caso, aplicó sus conocimientos adquiridos en su educación básica.

Los recursos semióticos presentados y los empleados. El procedimiento del estudiante se orientó por la idea de *medida de probabilidad* en el segundo problema (véase la Figura 4): la situación de referencia requiere identificar la relación entre un volumen esférico respecto al volumen de una pecera ortoédrica que lo contiene; este objeto fue reinterpretado por el estudiante como la relación entre el área de un círculo respecto al área del cuadrado en el que se inscribe. La reinterpretación del estudiante no alteró la idea de relacionar la parte con el todo (lo necesario, en este caso) por lo que en cuanto al vértice de signo, sólo cambió la relación entre volúmenes por la relación entre las áreas; en su intento por encontrar la solución de una manera alternativa estableció una relación geométrica que no correspondía a la que plantea el problema.

Figura 4. El triángulo epistemológico en la parte superior muestra las relaciones entre un concepto dado, su objeto y su signo presentes en el problema; en la parte inferior, el triángulo epistemológico muestra una interpretación del estudiante para ese concepto en el problema.



CONCLUSIONES

En este estudio instrumental de caso hemos realizado un acercamiento a conceptos geométricos a partir de algunas ideas fundamentales de estocásticos, con tan sólo dos problemas y el caso particular de un estudiante con buen desempeño al ingreso al bachillerato. En sus respuestas el estudiante mostró un dominio de los conocimientos básicos necesarios de las matemáticas que son indispensables para ingresar al bachillerato, lo que reafirma que sea el de mejor desempeño dentro de su grupo. También mostró que aún si poseía los conocimientos para responder al carácter aleatorio de la situación planteada, no recuperó los otros conocimientos requeridos para ello en el Problema 2. No obstante, obtuvimos evidencia de cómo la exigencia de un problema, como el problema 2, promovió modificaciones posibles de un procedimiento para desembocar en lo necesario, aún si no se determinó el resultado correcto.

Surgen las preguntas de cuáles son las ideas fundamentales de estocásticos y otros conocimientos matemáticos de secundaria que poseen otros estudiantes de nuevo ingreso con diferentes niveles de desempeño y cómo se puede promover la aplicación y comprensión de otros conceptos matemáticos al requerir su aplicación para solucionar problemas de probabilidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Biehler, R. (1994). Probabilistic thinking, statistical reasoning, and the search for causes – Do we need a probabilistic revolution after we have taught data analysis? *Fourth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS-4)*. (http://www.mathematik.uni-kassel.de/didaktik/biehler/publications).

Dirección General de Desarrollo Curricular (DGDC). (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas*. México: SEP.

Fischbein, E. (1975). *Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Netherlands: Reidel.

Fischbein, E. (1977). Image and concept in learning mathematics. *Educational Studies of Mathematics*, **8**, 153-165.

Gattuso, L. (2006). Statistics and mathematics: is it possible to create fruitful links? *Seventh International Conference on Teaching Statistics (ICOTS-7).*

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics* **6** (2), 187-205.

Maturana, H. (1995). *Desde la biología a la psicología*. Santiago de Chile: Lumen.

Piaget, J. (1982). *Le possible et le nécessaire: 1 L'e evolution des possibles chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Steinbring, H. (1991). The Concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowledge. *Educational Studies of Mathematics*, 22, 503-522.

Zazkis, R., Hazzan, O. (1999). Interviewing in mathematics education research: choosing the questions. *Journal of mathematical behavior*, **17** (4), 429-439.

PERSPECTIVA ONTOSEMIÓTICA DE LA VISUALIZACIÓN ESPACIAL Y EL RAZONAMIENTO DIAGRAMÁTICO

Juan D. Godino, Belén Giacomone, Miguel R. Wilhelmi, Teresa F. Blanco, Ángel Contreras
Universidad de Granada (España), Universidad Pública de Navarra (España), Universidad de Santiago de Compostela (España). Universidad de Jaén (España)
jgodino@ugr.es, belen.giacomone@gmail.com, miguelr.wilhelmi@unavarra.es, teref.blanco@usc.es, afuente@ujaen.es

Palabras clave: diagramas, razonamiento matemático, lenguajes visuales, lenguajes secuenciales, objetos no ostensivos
Key words: diagrams, mathematical reasoning, visual languages, sequential languages, non – ostensive objects

RESUMEN: Los diagramas, y en general el uso de visualizaciones y materiales manipulativos, desempeñan un papel importante en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este trabajo aplicamos algunas herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático para analizar la diversidad de objetos y procesos implicados en la actividad matemática, que se realiza con apoyo de representaciones diagramáticas. Esto permite apreciar las relaciones sinérgicas entre los objetos ostensivos (lenguajes visuales y secuenciales) y los objetos no ostensivos (entidades abstractas y mentales) imbricados en las prácticas matemáticas.
ABSTRACT: Diagrams, and in general the use of visualizations and manipulative materials play an important role teaching and learning of mathematics. In this paper, we apply some theoretical tools from the onto-semiotic approach to mathematical knowledge to analyze the diversity of objects and processes involved in mathematical activity, carried out with the support of diagrammatic representations. This allows us to appreciate the synergistic relationship between ostensive objects (visual and sequential languages) and non - ostensive objects (abstract and mental entities) interwoven in mathematical practices.

INTRODUCCIÓN

Para favorecer el aprendizaje de las matemáticas se propone el uso de diversas representaciones, visualizaciones, diagramas, materiales manipulativos, asumiendo el supuesto de que tales materializaciones constituyen *modelos* de los conceptos matemáticos y de las estructuras en las cuales se organizan. Se supone que el uso de representaciones materiales es necesario no solo para comunicar las ideas matemáticas sino también para su propia construcción.

El problema que abordamos surge de la constatación de que algunos trabajos sobre el razonamiento diagramático, y en general sobre el uso de visualizaciones en educación matemática, no abordan de manera explícita la naturaleza y diversidad de objetos matemáticos representados mediante los diagramas y demás visualizaciones. Los objetos matemáticos son considerados como abstractos mientras que los diagramas lo son como concretos o perceptibles, y se insiste en no confundirlos, pero las relaciones entre ambos tipos de objetos no son abordadas de manera explícita. No es de extrañar esta situación dado que clarificar lo que sean los objetos abstractos y su relación con el mundo empírico es un problema filosófico y psicológico de primera magnitud que es abordado desde diversos paradigmas y marcos teóricos.

En este trabajo pretendemos progresar en la identificación de los objetos involucrados y en la descripción de su naturaleza. Para ello, utilizaremos la perspectiva semiótica y antropológica propuesta por el "enfoque ontosemiótico" (EOS) del conocimiento matemático (Godino, 2002; Font, Godino y Gallardo, 2013).

VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO DIAGRAMÁTICO

Godino, Gonzato, Cajaraville y Fernández (2012) analizan la noción de visualización aplicando las herramientas del enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático (EOS) (Godino, 2002; Font et al., 2013) y proponen distinguir entre "prácticas visuales" y "prácticas no visuales" o simbólico/analíticas. Fijan la atención en los tipos de objetos lingüísticos y artefactos que intervienen en una práctica, los cuales son considerados como visuales si ponen en juego la percepción visual. Las representaciones simbólicas (lengua natural o lenguajes formales), aunque consisten en inscripciones visibles, no son consideradas como inscripciones propiamente visuales, sino como analíticas o sentenciales. Los *lenguajes secuenciales* (por ejemplo, lógicas simbólicas, lenguajes naturales) usan solo la relación de concatenación para representar relaciones entre objetos. Por el contrario, en los diagramas se hace uso de relaciones espaciales para representar otras relaciones.

El rol de los diagramas en el trabajo matemático

En las investigaciones analizadas en el campo de la educación matemática se proponen diferentes concepciones sobre el uso de diagramas. Arcavi lo incluye como un recurso visual más que articula con la visualización; pero según la literatura sobre razonamiento diagramático, los diagramas, entendidos en el marco de la *semiótica peirceana* (Dörfler, 2005; Bakker y Hoffmann, 2005; Rivera, 2011), constituyen un recurso esencial del razonamiento matemático, así como en otros campos y disciplinas científicas (Shin y Lemon, 2009).

Encontramos que dichas investigaciones presentan una doble concepción sobre la noción de diagrama. Una concepción amplia en la que casi cualquier tipo de inscripción que hace uso del posicionamiento espacial en dos o tres dimensiones (derecha, izquierda; delante, detrás; arriba, abajo; inclusión, intersección, separación; acumulación, …) es un diagrama (figuras geométricas;

gráficos cartesianos; matrices; grafos; mapas conceptuales; organigramas; croquis y mapas, …). Otra concepción más restringida requiere poder realizar con dichas representaciones determinadas transformaciones, combinaciones y construcciones según ciertas reglas sintácticas y semánticas específicas. Las partes constituyentes de un diagrama pueden ser cualquier tipo de inscripción como letras, numerales, signos especiales o figuras geométricas.

El razonamiento diagramático implica tres pasos (Bakker y Hoffmann, 2005, p. 340): en primer lugar, construir uno o varios diagramas mediante un sistema de representación; en segundo lugar, experimentar con los diagramas; y en tercer lugar, observar los resultados de la experimentación y reflexionar sobre ellos. Cualquier experimentación con un diagrama se está ejecutando dentro de un sistema de representación y es una regla o actividad, situado dentro de una práctica.

CONFIGURACIONES ONTOSEMIÓTICAS

En el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS) se postula que en las prácticas matemáticas intervienen seis tipos de objetos los cuales pueden ser contemplados desde cinco pares de puntos de vista duales (Font et al., 2013). Se propone la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios:

- *Lenguajes* (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.).
- *Situaciones-problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios).
- *Conceptos- definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función).
- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos).
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
- *Argumentos* (enunciados usados para justificar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo).

Tanto las dualidades como los objetos se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto. La emergencia de los objetos primarios (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, ...) y argumentación. Por otra parte, las dualidades dan lugar a los siguientes procesos cognitivos/ epistémicos: institucionalización – personalización; generalización – particularización; análisis/descomposición – síntesis/reificación; materialización /concreción – idealización/ abstracción; expresión/representación – significación.

Esta manera antropológica de entender la abstracción, esto es, la emergencia de objetos generales e inmateriales que constituyen las estructuras matemáticas, tiene importantes consecuencias para la educación matemática ya que el aprendizaje matemático debe tener lugar mediante la progresiva participación de los estudiantes en los juegos de lenguaje matemáticos realizados en el seno de comunidades de prácticas matemáticas (instituciones o grupos socioculturales). De esta manera, el diálogo y la interacción social cobran un papel clave, en contraposición a la mera manipulación y visualización de objetos ostensivos.

Detrás del razonamiento diagramático, del uso de visualizaciones y manipulativos para facilitar el aprendizaje matemático, hay la adopción implícita de una posición empírico - realista sobre la naturaleza de las matemáticas, que no concede el papel esencial al lenguaje y la interacción social en la emergencia de los objetos matemáticos. En cierta manera, se supone que el objeto

matemático “se ve”, se abstrae de manera hipostática de cualidades empíricas de las colecciones de cosas. Frente a esta posición proveniente de la epistemología y semiótica peirceana se encuentra la concepción antropológica de las matemáticas, según la cual los conceptos y proposiciones matemáticas se deben entender, no como abstracciones hipostáticas de cualidades perceptibles, sino como *regulaciones* de las prácticas operativas y discursivas realizadas por las personas para describir y actuar en el mundo social y empírico en el que vivimos.

En trabajos previos venimos desarrollando una técnica de análisis semiótico de las prácticas matemáticas mediante la cual tratamos de desvelar la trama de objetos matemáticos que se ponen en juego en dichas prácticas. En la sección 4 mostramos una versión del análisis semiótico que consideramos más operativa y eficaz para mostrar la configuración de prácticas, objetos y procesos matemáticos puestos en juego en la resolución de un problema. Consideramos que esta técnica puede estar al alcance de los profesores de matemáticas y puede ayudar a que tomen conciencia de las relaciones entre los diversos tipos de lenguajes y sus relaciones con los objetos y procesos matemáticos. Ello requerirá, no obstante, el diseño, implementación y evaluación de procesos formativos específicos.

CONFIGURACIONES ONTOSEMIÓTICAS IMPLICADAS EN EL RAZONAMIENTO DIAGRAMÁTICO

En esta sección analizamos los tipos de prácticas, objetos y procesos que se ponen en juego en la resolución de un problema sobre fracciones aplicando un procedimiento que involucra el uso de razonamiento diagramático. Se tratará de mostrar que acompañando al lenguaje visual – diagramático es necesario el concurso del lenguaje secuencial – analítico, y que junto a los objetos ostensivos, consustanciales con ambos tipos de lenguajes, está siempre presente una configuración de objetos abstractos que participan de la práctica matemática. Así mismo, mostraremos que la resolución del problema implica la realización de procesos de particularización de objetos abstractos previamente compartidos y procesos de materialización (construcción y manipulación de diagramas).

Problema del cóctel de Martini (fracción de alcohol)

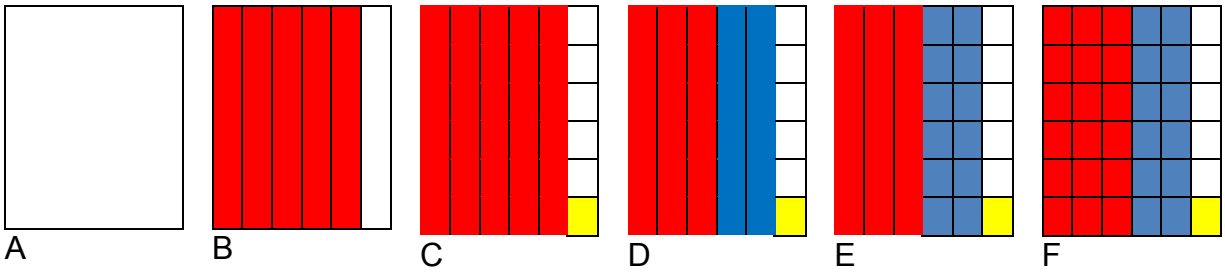
Un Martini es un cóctel que se hace con 5 partes de ginebra y 1 parte de vermut. Supongamos que 2/5 de la ginebra es alcohol y que 1/6 del vermut es alcohol. ¿Qué porcentaje de alcohol lleva un Martini?

La secuencia de diagramas de áreas de la figura 1 es explicativa del proceso de resolución para alguien que conozca las convenciones asumidas, así como los conceptos y procedimientos implicados. Sin embargo, la justificación y explicación de la solución requiere realizar la siguiente secuencia de prácticas discursivas y operativas:

1) La cantidad unitaria de Martini se representa mediante un cuadrado (figura 1A).
2) El cuadrado se divide en 6 partes iguales verticalmente (figura 1B).
3) La fracción de ginebra son los 5/6 del cuadrado unidad (color rojo, figura 1B).
4) La fracción de vermut son 1/6 de dicho cuadrado (color blanco, figura 1B).
5) El rectángulo blanco que representa la cantidad de vermut se divide en 6 partes iguales de las cuales 1 parte corresponde a la cantidad de alcohol (1/6 de 6) (figura 1C).
6) La cantidad de alcohol de la ginebra se representa por las dos barras azules de la figura 1D (2/5 de 5).

7) Las cantidades de alcohol en la ginebra y el vermut se deben expresar en la misma unidad de medida, para lo cual los dos rectángulos azules que representan la cantidad de alcohol en la ginebra se debe dividir horizontalmente en 6 partes iguales (figura 1E).
8) La cantidad total de alcohol en el Martini serán 12 + 1 = 13 cuadraditos (figura 1E).
9) La cantidad total de Martini representada por el cuadrado inicial se debe medir también con la misma unidad que se mide las cantidades de alcohol, para lo cual se prolongan las seis líneas horizontales (figura 1F).
10) La fracción de alcohol del Martini será 13/36 (figura 1F).
11) Puesto que la proporción (tanto por uno) de alcohol del Martini es 13/36 ≈ 0,3611, el porcentaje (aproximado) será del 36,11%.

Figura 1. Diagramas de áreas para resolver el problema del Martini



En términos de la teoría de los registros de representación semiótica de Duval (2006) se comienza con una conversión, pasando del registro secuencial de la lengua natural (enunciado de la tarea) al registro gráfico (diagramas de áreas); dentro de este registro se realizan determinados tratamientos para finalmente pasar de nuevo al registro secuencial: *La fracción de alcohol del Martini es 13/36*. Pero como se muestra en la secuencia de prácticas 1) a 9) el registro secuencial acompaña necesariamente al registro gráfico. Así mismo, las prácticas operativas y discursivas puestas en acción están guiadas por la trama de objetos y procesos *no ostensivos* que desvelamos en la tabla 1.

Tabla 1. Configuración de objetos y significados

.

OBJETOS OSTENSIVOS (Medios de expresión)	OBJETOS NO OSTENSIVOS (SIGNIFICADOS) (Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)
Enunciado:	
Un Martini se hace con 5 partes de ginebra y 1 parte de vermut (LS, lenguaje ordinario)	*Concepto:* Un todo unitario de volumen *Procedimiento*: Composición de un todo unitario a partir de partes iguales *Particularización:* Una cantidad unitaria de volumen de Martini se compone de 6 partes, 5 de las cuales son ginebra y 1 parte vermut
2/5 (LD, diagrama aritmético)	*Concepto:* fracción; un todo unitario se divide en partes iguales de las cuales se individualiza una parte. *Particularización:* Aquí se particulariza la división a 5 partes iguales y se consideran aparte 2.

2/5 de la ginebra es alcohol (LD y LS)	*Concepto:* Fracción de alcohol en un volumen unitario de ginebra. *Particularización:* Un volumen unitario de ginebra se divide en 5 partes iguales; 2 de dichas partes son alcohol
1/6 del vermut es alcohol (LD y LS)	(IDEM)
¿Qué porcentaje de alcohol lleva un Martini? (LS, lenguaje ordinario)	*Conceptos*: Todo unitario; fracción, parte de un todo dividido en partes iguales; porcentaje. *Particularización:* El todo unitario es un volumen indeterminado de Martini; la parte fraccionaria corresponde al alcohol contenido en el todo.
Resolución	
1) La cantidad unitaria de Martini … (figura 1A) [LD, diagrama de áreas; [LS, descripción en lengua natural del significado del cuadrado]	*Concepto:* cantidad unitaria *Particularización:* un cuadrado de dimensiones arbitrarias representa la cantidad unitaria de Martini.
2) El cuadrado se … (figura 1B) [LD y LS]	*Procedimiento:* división de la unidad en partes iguales *Particularización:* el cuadrado unitario se divide en 6 partes iguales
3) La fracción de … (figura 1B) [LD, diagrama gráfico y aritmético] [LS, descripción del significado de los diagramas]	Concepto: fracción como parte de un todo dividido en partes iguales Particularización: el cuadrado se divide en 6 partes y se marcan 5 de rojo para representar 5/6. Convención: la fracción se expresa de dos maneras equivalentes, con un diagrama aritmético (5/6) y un diagrama gráfico
4) La fracción de …. (figura 1B) IDEM	IDEM
5) El rectángulo blanco,… se divide en 6 partes… (figura 1C) [LD y LS]	Procedimiento: división de una unidad en partes iguales Concepto: fracción como operador Particularización: al caso del rectángulo que representa la cantidad unitaria de vermut
6) La cantidad de alcohol de la ginebra …(figura 1D) [LD y LS]	Concepto: fracción como operador Particularización: al caso de la cantidades de ginebra consideradas como nueva unidad (2/5 de 5).
7) Las cantidades de alcohol y ginebra … (figura 1E) [LD y LS]	Concepto: unidad de medida; medida Procedimiento: medir un área con una unidad dada. Particularización: al caso del rectángulo que representa el alcohol de la ginebra, medido con la cuadra pequeño que representa la cantidad de alcohol del vermut.
8) La cantidad total de alcohol … (figura 1E) [LD y LS]	Concepto: magnitud volumen (sumable) Procedimientos: conteo y adición Particularización: cantidad total de alcohol en el Martini
9) La cantidad total … (figura 1F) [LD y LS]	Procedimiento: medir un área con una unidad dada. Concepto: producto cartesiano de números naturales Particularización: al caso del cuadrado que representa la cantidad de Martini (6 × 6 = 36).
10) La fracción de alcohol … (figura 1F) [LD y LS]	Concepto: fracción como parte de un todo Proposición: La fracción del alcohol en el Martini es 13/36 Argumentación: está formada por la secuencia de pasos 1) a 10), apoyada en el uso de los diagramas aritméticos y de áreas y del lenguaje secuencial natural Particularización: al caso de la fracción de alcohol en el Martini
11) Puesto que la proporción	Conceptos: número racional; proporcionalidad; fracción;

… 36,11% [LS] (conversión de expresión fraccionaria a decimal y porcentaje)	aproximación decimal Procedimientos: Obtención de la expresión decimal mediante el cociente del numerador y denominar; paso a la expresión porcentual. Particularización: al caso del racional 13/36.

Nota 1. Usamos las abreviaturas: LD, Lenguaje Diagramático y LS, Lenguaje Secuencial

Además de los procesos indicados en la tabla 1 el sujeto que resuelve el problema basando su razonamiento en el uso de diagramas de áreas realiza procesos de *materialización* de los conceptos y operaciones con fracciones implicadas en el enunciado y de *composición* de los resultados parciales que va obteniendo. La solución la encuentra finalmente mediante un procedimiento aritmético de conteo de las fracciones unitarias que ha representado en el último diagrama mediante un proceso de *idealización* (la razón del número de cuadraditos azules al número total de cuadraditos es la fracción de alcohol del Martini).

REFLEXIONES FINALES

En este trabajo hemos mostrado que existe una estrecha imbricación entre los objetos que intervienen en la actividad matemática, específicamente entre

- los lenguajes diagramáticos - visuales y los lenguajes secuenciales,
- los objetos ostensivos (materiales) y los no ostensivos (inmateriales),
- los objetos extensivos (particulares) y los intensivos (generales).

El uso de diagramas en la práctica matemática debe ir acompañado de otros medios de expresión no visuales para lograr la justificación y explicación de las tareas matemáticas y las prácticas operativas y discursivas implicadas en su realización. La génesis del conocimiento matemático se sitúa en un punto medio entre ambos lenguajes, donde es necesaria su interrelación e reinterpretación mutua. Pero además hemos mostrado que los medios de expresión son "artefactos" empíricos que conllevan el uso implícito de un sistema de objetos no ostensivos de naturaleza conceptual, proposicional, procedimental y argumentativa, que constituyen la esencia de la actividad matemática realizada con el apoyo de los objetos ostensivos. También hemos desvelado algunos procesos de particularización, generalización; descomposición, composición; materialización, idealización que se ponen en juego en el proceso demostrativo – explicativo realizado.

La manera de entender los diagramas tiene importantes consecuencias para la educación matemática toda vez que el uso de estos recursos penetra en toda la actividad matemática escolar. Consideramos que es necesario superar posiciones empiristas ingenuas sobre el uso de manipulativos y visualizaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático: acompañando a las necesarias materializaciones que intervienen en las situaciones - problemas y las prácticas matemáticas correspondientes hay siempre una cohorte de objetos no materiales intervinientes que son imprescindible para la solución de tales situaciones. Esta visión ontosemiótica de las prácticas matemáticas (antropológica y pragmatista) ayuda a tomar conciencia que tales objetos inmateriales no proceden de un mundo inaccesible sino que son de este mundo social en que vivimos y están implicados en nuestra práctica cotidiana.

El profesor de matemáticas debe tener conocimiento, comprensión y competencia para discriminar los distintos tipos de objetos que intervienen en la práctica matemática escolar, apoyada en el uso de diversos sistemas de representación y siendo consciente de las relaciones sinérgicas entre los mismos. Debe ser competente para diseñar y gestionar procesos de materialización e idealización de los objetos matemáticos, junto con los correspondientes procesos de particularización y generalización.

Reconocimiento: Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-31869 y EDU2013- 41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bakker, A. y Hoffmann, M.H.G. (2005). Diagrammatic reasoning as the basis for developing concepts: a semiotic analysis of students' learning about statistical distribution. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 333-358.

Dörfler, W. (2005). Diagrammatic thinking. Affordances and constraints. En M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard y F. Seeger (Eds.), *Activity and sign-Grounding Mathematics Education* (pp. 57-66). Springer.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103-131.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 97-124.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D., Gonzato, M., Cajaraville, J. A., y Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(2),163-184.

Shin, S-J. y Lemon, O. (2008). Diagrams. *Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Recuperado el 22 de septiembre de 2015 de

http://plato.stanford.edu/entries/diagrams/

Rivera, F. D. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum. Research, theory, practice, and issues*. Dordrecht: Springer.

DINAMIZACIÓN DE LA REGLA DE LOS CUATRO PASOS. UN CAMINO HACIA LA CONSTRUCCIÓN DE LA DERIVADA EN EL MARCO DE LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA

Adriana Engler
Facultad de Ciencias Agrarias, Universidad Nacional del Litoral (Argentina)
aengler@fca.unl.edu.ar

Palabras clave: socioepistemología, derivada, prácticas sociales

Key words: Socioepistemology, derivative, social practices

RESUMEN: Las actividades que despliegan los profesionales están marcadas por la introducción sistemática e ininterrumpida de métodos matemáticos. El estudio de la derivada es fundamental para su formación. En este trabajo se busca mostrar cómo los alumnos se ponen en camino hacia la construcción de la derivada a través de dinamizar la Regla de los Cuatro Pasos mediante el Teorema del Binomio partiendo de un estudio socioepistemológico y describiendo las prácticas que están inmersas en la regla. Se aborda la problemática de la construcción de la derivada proporcionando un diseño y puesta en marcha de una situación de aprendizaje intencional.

ABSTRACT: The activities carried out by professionals are marked by the systematic and continuous introduction of mathematical methods. The study of the derivative is fundamental to their training. This article seeks to show how students set off towards the construction of the derivative through dynamic Rule of Four Steps by the Binomial Theorem starting from a socioepistemological study and describing the practices that are embedded in the rule. The problem of the construction of the derivative providing design and implementation of intentional learning situation is addressed.

INTRODUCCIÓN

Los profesionales requieren una base sólida de conocimientos matemáticos para interpretar y dar respuesta a interrogantes del saber de su especialidad. En el marco del Cálculo, si bien la construcción de la derivada presenta dificultades para estudiantes de ingeniería, su significado y uso en la resolución de problemas en la vida profesional es indispensable. Este trabajo es parte de una investigación que tuvo su origen y motivación en el aula de Matemática de la carrera Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias (FCA) de la Universidad Nacional del Litoral (UNL) en Esperanza, provincia de Santa Fe, Argentina. A lo largo del trabajo se estudió cómo los alumnos se ponen en camino hacia la construcción de la derivada a través de dinamizar la Regla de los Cuatro Pasos (RCP) mediante el Teorema del Binomio de Newton (TBN) partiendo de un estudio socioepistemológico de la misma y describiendo las Prácticas de Referencia (PR) y las Prácticas Sociales (PS) que intervienen y están inmersas en la regla. La idea de dinamizar se comprende como la posibilidad de hacer que la regla sea más *funcional* y *entendible* para el aula (Camacho, 2011), de manera que ayude en la construcción de la derivada. Habiendo logrado la dinamización, la investigación se centró en dos pilares. Por un lado se realizó un estudio socioepistemológico de la regla ya dinamizada a través de la utilización del TBN y, por otro, se abordó la problemática de la construcción de la derivada proporcionando un diseño de una situación de aprendizaje (SA) intencional. Este artículo se centra en la presentación de la situación de aprendizaje intencional surgida del estudio realizado.

MARCO TEÓRICO

La investigación se desarrolló en el marco de la Socioepistemología (SE). La SE reconoce la construcción social del conocimiento y comprende que se lleva a cabo en un escenario determinado y a veces se transfiere a otros, en tanto estudia la manera en la que se produce esa transferencia (Cantoral, 2013). Así, el énfasis está puesto en las prácticas que están inmersas en la RCP, con el fin de generar una situación de aprendizaje para la intervención didáctica. Las dimensiones que contempla la SE aparecen reflejadas en la SA diseñada y puesta en escena con los alumnos estudiantes de Ingeniería Agronómica. Es en este escenario, donde se ve reflejada la relación entre la derivada, la RCP, el TBN y las PR y PS que aparecen inmersas en la regla. A través de sus interacciones, buscando el reconocimiento del significado de cada uno de los pasos de la regla en relación a un problema de ingeniería, es que se muestra evidencia de cómo se coloca al alumno en camino hacia la construcción de conocimiento. Desde una mirada socioepistemológica se *problematiza el saber escolar* dado que se busca cambiar el estatus que tiene en tanto se reconocen otros desde donde es posible resignificarlo.

LA REGLA DE LOS CUATRO PASOS

La regla constituye la estructura matemática usada como técnica para la determinación de la derivada de una función. Se describe en algunos de los libros de texto de cálculo diferencial para ingeniería, de la siguiente manera:

> Primer paso. Se sustituye en la función x por $x + \Delta x$, y se calcula el nuevo valor de la función $y + \Delta y$.

Segundo paso. Se resta el valor dado de la función del nuevo valor y se obtiene Δy (incremento de la función).

Tercer paso. Se divide Δy (incremento de la función) por Δx (incremento de la variable independiente).

Cuarto paso. Se calcula el límite de este cociente cuando Δx tiende a cero. El límite así hallado es la derivada buscada (Granville, 1980, p. 30).

En sí misma, es un conjunto ordenado de proposiciones de orden variacional que permite organizar a su alrededor los diferentes significados de la derivada.

Estudio socioepistemólogico de la Regla de los Cuatro Pasos

Un objeto o hecho es y tiene su lugar como tal según el marco conceptual y el sistema de prácticas establecidas dentro de las comunidades científicas. Las prácticas se hacen parte de una época, de una sociedad y de una cultura con su propia historicidad pero, a la vez, aportan en la construcción del presente teniendo en cuenta su incidencia en el entorno y permiten vislumbrar una meta hacia adelante, creando una idea de futuro. Es posible pensar en un modelo de aprendizaje como emergente de la participación en dichas prácticas poniendo énfasis en el aspecto activo de la aprehensión del mundo.

En el análisis histórico de corte socioepistemológico se lograron identificar tres PR que resultan fundamentales en esta obra: la observación, la geometrización y la modelización así como dos PS: la analiticidad y la predicción que están inmersas en la RCP al ser dinamizada a través del TBN (Engler, 2014). Así, la epistemología planteada en relación a la RCP y la intervención del TBN en la dinamización de la misma es de naturaleza social y, precisamente dado el carácter social atribuido al conocimiento se hace necesario que el aspecto didáctico aborde cuestiones relativas a los contextos argumentativos y mecanismos que faciliten la argumentación y llegar a consensos.

EL TEOREMA DEL BINOMIO DE NEWTON

A partir del descubrimiento del binomio, Newton tuvo la intuición de que se podía operar con series infinitas de la misma manera que con expresiones polinomiales finitas. El binomio se presenta como una entidad que emerge paulatinamente de un sistema de prácticas socialmente compartidas y relacionadas con la solución de planteos que necesitan de la predicción. En la interpretación para la resolución de los problemas cobran relevancia cada uno de los pasos de la RCP descriptos anteriormente. El TBN es el que permite el desarrollo de los binomios en el juego algorítmico planteado para el cálculo de derivadas y, en principio, permitiría hacer más dinámico el uso de la regla para determinar la derivada. Así, se puede decir que, los argumentos que hacen posible la dinamización de la regla están en el teorema. De hecho el teorema es una herramienta variacional poco usada en el contexto de la enseñanza del cálculo actual y a la que habrá que darle un lugar en la práctica diaria en el salón de clases.

LA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

La SA constituye la forma en la que se *problematiza el saber escolar*; en tanto se cambia el estatus que tiene la regla y se busca reconocer otros desde donde resignificarla. A través de este diseño se busca promover la construcción social del conocimiento teniendo como base la racionalidad

contextual, el relativismo epistemológico y el fomento de una resignificación progresiva de los conocimientos del estudiante, principios y pilares de la SE (Cantoral, 2011). Se propicia el rediseño del discurso matemático escolar hacia un escenario para la construcción de conocimiento matemático. Como se enunció, el propósito de la investigación fue colocar a los estudiantes de Ingeniería Agronómica en proceso de construcción del objeto derivada a través de la regla. Como técnica dominante en el discurso escolar, la regla permite resolver solamente cierto tipo de tareas y no integra ni permite reconocer los significados asociados a cada uno de los pasos. Fue necesario involucrar y hacer aparecer el TBN para poder dinamizarla y ampliar el número de tareas posibles de resolver. La incorporación del mismo justifica la entrada en el salón de clases de las prácticas anteriormente mencionadas.

Diseño de la situación de aprendizaje.

El diseño se contextualizó en la cotidianeidad del estudiante. Se proponen enunciados situados que lo enfrentan a desafíos interesantes que puedan ser abordados de manera individual o grupal, ayudados por la docente si fuese necesario, y en el que se pongan en juego los saberes que surjan de la puesta en marcha del mismo. A través de las actividades se busca que los alumnos realicen descubrimientos en dos sentidos. Por un lado, la necesidad de utilizar el teorema del binomio para lograr aplicar los cuatro pasos de la regla y llegar al cálculo tanto de la derivada de la función en un punto como de la función derivada y, por otro, el análisis, en base a un problema concreto, de otro escenario de variación más allá del relacionado con el problema físico de la velocidad, logrando detectar qué magnitudes cambian, cuánto cambian y cómo cambian. La SA los lleva a caracterizar variaciones entre magnitudes, a través del cálculo de razones de cambio que permitan a su vez la exploración de cómo la pendiente de la recta secante y/o tangente a la gráfica de una función está relacionada con el concepto de razón de cambio. Si bien se espera que los alumnos logren reconocer lo importante de la incorporación del teorema del binomio para el trabajo con funciones analíticas y la simplicidad de los cálculos ante problemas de dificultad algebraica, deberán además poder inferir el significado de cada paso de la regla. Las actividades se presentan en registros diferentes (verbal, gráfico, numérico y analítico) y requieren hacer transformaciones en un mismo sistema y transitar de uno a otro. En un nivel de representación más abstracto, se tiene en cuenta la generalización mediante las expresiones algebraicas y analíticas. Las gráficas, expresiones en lenguaje coloquial y representaciones algebraicas y analíticas, que contienen la misma información, ponen en juego diferentes procesos cognitivos, relacionados entre sí. La situación pretende transitar de lo sencillo – elemental – a lo abstracto en términos de un eje principal, la construcción del objeto derivada a través de los cuatro pasos descriptos en la regla y su dinamización en términos del teorema del binomio.

La situación consta de cuatro fases y cada una de ellas incluye una serie de actividades. En el inicio de la misma se oculta el significado de cada uno de los pasos de la regla. Sin embargo, a lo largo de todas las fases se incorporan las ideas variacionales que subyacen a cada uno de éstos. Los alumnos deberán inferir el significado de cada paso (cambio, diferencia, razón de cambio media, razón de cambio instantánea, derivada) ayudados también por las gráficas que se dan a lo largo de las diferentes actividades. Es importante resaltar que los alumnos conocían la definición de derivada pero, hasta el momento de la aplicación, no habían tenido acceso a las reglas de derivación. En la Tabla 1 se explicita la estructura global.

Tabla 1. Estructura global de la SA (El enunciado de todas las actividades se puede solicitar a la autora)

Fase	Actividades
1. Familiarización con la RCP para llegar a la definición de derivada	*Actividad 1.* Emergencia del significado de cada paso de la regla y la definición del objeto derivada. *Actividad 2.* Desarrollo algebraico de cada paso de la regla para tres funciones analíticas.
2. Aplicación de la RCP a una situación diferente	*Actividad.* Aplicación de los pasos de la regla buscando la resolución de un problema de ingeniería en el que la función surge de la experimentación.
3. Utilización del TBN para la obtención de la derivada a través de la dinamización de la RCP	*Actividad 1.* Emergencia de la necesidad de utilizar el TBN para llegar a la definición analítica de la derivada luego de la aplicación de los cuatro pasos. *Actividad 2.* Análisis y conclusiones al trabajar los desarrollos binomiales a través del teorema.
4. La RCP dinamizada a través del TBN se aplica al problema no resuelto de la Fase 2	*Actividad 1.* Aplicación de los pasos de la regla, dinamizada, buscando la resolución de un problema de ingeniería en el que la función surge de la experimentación y se busca determinar la derivada de la función en un punto. *Actividad 2.* Se utiliza el mismo problema para buscar llegar a la expresión analítica de la función derivada a través del TBN buscando la dinamización de la regla. *Actividad 3.* Emergencia del significado de cada uno de los pasos de la regla y valoración sobre la utilización del TBN.

A continuación se describen los objetivos perseguidos y las actividades que componen cada fase.

Fase 1. En esta fase se busca que el alumno comience a reconocer, desde sus conocimientos previos, lo que se está calculando en cada paso de la regla y sea capaz de desarrollar algebraicamente cada uno de ellos. Para lo anterior se proponen dos actividades. En la primera se busca que el alumno sea capaz de explicar con sus palabras qué es lo que está calculando en cada paso de la regla. En la segunda actividad se presentan tres funciones a las que se les deben aplicar los cuatro pasos. Las funciones que se presentan no son polinomiales. Se busca que relacionen los cuatro pasos con el concepto de derivada y que manifiesten su opinión en relación a la complejidad de los cálculos realizados.

Fase 2. Se presenta un problema relacionado con el trabajo profesional. Se trabaja un artículo de investigación que presenta una función de potencia, obtenida experimentalmente, que permite estimar la biomasa aérea total en *Pinus patula* Schl. *et* Cham en función del diámetro normal del árbol. La función es $B(DN) = 0{,}0357DN^{2{,}6916}$ (Díaz, L.; Acosta, M.; Carrillo, F.; Buendía, E.; Flores, E. y Etchevers, 2007). Se busca que el alumno, habiendo tenido dificultades para cumplir con lo requerido en la *Actividad 2* de la fase anterior, y ante la necesidad de dar respuesta a un problema concreto de ingeniería, considere oportuno buscar otra forma de llegar a la resolución

algebraica solicitada y además despierte en él la curiosidad de por qué sería interesante aplicar los cuatro pasos de la regla a esta situación particular. El alumno se plantea la necesidad de emergencia de la técnica que le permitirá resolver el trabajo algebraico que le quedó pendiente.

Fase 3. Ante la dificultad de resolver el problema planteado en la Fase 2 por la imposibilidad de desarrollar la función incrementada que resulta del planteo del segundo paso de la regla, surge la necesidad de utilizar el TBN para la dinamización de la misma y desencapsular los binomios que en cada paso aparecen. Para que el alumno pueda hacer suya esta técnica, se les da a conocer el alcance del teorema del binomio y se les propone la actividad correspondiente.

Fase 4. En esta etapa se retoma el problema enunciado en la Fase 2 tratando de que el alumno descubra por qué resulta importante, desde el punto de vista del significado, cada uno de los pasos de la regla y qué información se logra obtener de cada paso con relación al problema. Se presentan dos actividades buscando la asociación, en cada una de ellas, con la definición de derivada de una función en un punto y con la propia función derivada. La primera actividad se plantea buscando afianzar el trabajo hacia la definición de la derivada de la función en un punto. Se pretende resignificar en el contexto de un problema de ingeniería (dasonomía) la definición de derivada y el análisis de cada uno de los pasos que se realizan para obtener la expresión analítica de la misma y dar un significado de los mismos en términos del problema. En la siguiente actividad se consideran los cuatro pasos para cualquier valor del dominio de la función y no para un valor particular. Se pretende introducir la noción de función derivada y los aspectos variacionales que en ella aparecen, los cuales se evidencian en los cuatro pasos, más allá del cálculo de la expresión algebraica de la misma. Con el desarrollo de la última actividad, se busca que los alumnos reflexionen con relación a lo que estuvieron trabajando en las etapas anteriores y, en especial, en la Fase 4. En este sentido la meta es acercar a los alumnos al concepto de derivada teniendo en cuenta los argumentos variacionales que surgen en cada paso de la regla y la valoración de la utilización del TBN para los desarrollos binomiales necesarios en la resolución de las diferentes actividades propuestas.

El contexto y la puesta en escena

Las actividades se desarrollaron en el aula, en los horarios habituales de clases, con todos los alumnos cursantes de la asignatura Matemática II del plan de estudio de la carrera. De esta manera, se garantizó que la componente social esté presente en todo este estudio al considerar las condiciones de la institución educativa donde se genera el problema y se lleva adelante la experiencia. Para su aplicación, quedó integrada en la planificación de la asignatura en tres sesiones de clase con un total de seis horas.

El trabajo de los alumnos

A lo largo de la primera sesión, los alumnos interpretaron rápidamente las consignas establecidas y entendieron el objetivo propuesto. Entre todos acordaron que trabajarían en forma individual realizando solos las actividades propuestas y tratando de avanzar lo máximo posible con cada una de ellas según lo indicado en los enunciados. Se establecieron acuerdos en relación al tiempo de trabajo individual que fueron respetados sin inconvenientes. Trabajaron muy entusiasmados y cumplieron claramente con todas las consignas propuestas. Es importante destacar que fue una jornada muy intensa y que los alumnos participaron con eficacia en todas las actividades, debates y puestas en común propuestas por la docente, más allá del cansancio que por momentos manifestaron. Fueron interesantes las inquietudes surgidas en la presentación del problema con

relación a la experimentación y prácticas realizadas hasta la obtención de la función propuesta para llevar adelante parte de esta investigación.

Al inicio de la segunda sesión los alumnos prestaron atención a los interrogantes planteados y respondieron de manera amena a las diferentes inquietudes a medida que se aclaraban y/o surgían dudas. Interpretaron rápidamente la necesidad de buscar alguna alternativa que permitiera, por un lado, lograr desarrollar los binomios que aparecían en cada paso de la regla y, por otro, buscar que la técnica de derivación por incrementos (RCP) fuera más dinámica para poder resolver el problema dasonómico que había quedado pendiente de la segunda fase. Respetaron las consignas establecidas y entendieron el objetivo propuesto. Si bien la docente, a través de preguntas relacionadas con los conocimientos que habían adquirido al trabajar anteriormente potencia de un binomio, trató de establecer un método para hacer surgir su desarrollo, no lo pudo lograr. Fue necesario resolver en el pizarrón el primer ítem de la actividad y cambiar la forma de trabajo acordada. Como el objetivo de este encuentro era lograr que adquirieran un buen manejo del teorema, a fin de dinamizar la regla, se decidió cambiar la estrategia de trabajo y hacer que dos alumnos pasaran al pizarrón. Los alumnos aceptaron trabajar y lo hicieron con la guía de sus compañeros y la docente. De esta manera, pudieron cumplir con todas las consignas propuestas. Al finalizar el tiempo de trabajo compartieron la presentación con diapositivas preparadas por la docente con la resolución de los cuatro pasos de la regla para cada función enunciada y, más allá de que algunos demoraron más en lograr llegar al final, todos pudieron encontrar la expresión para la derivada. Evidentemente que esto los motivó, puesto que en el primer encuentro no lo habían logrado. Fue importante además el momento para debatir el valor de las prácticas de analiticidad y predicción y trabajar con ellos estas ideas, que con más fuerza se iban a retomar en la jornada siguiente. Se los notó trabajar convencidos de que era la manera de llegar a la resolución del problema de biomasa que había quedado pendiente.

Con relación a la Actividad 2, pudieron manifestarse sobre las posibilidades que brinda el conocer el TBN para hacer que la regla resulte dinámica y, obviamente que todos eligieron trabajar de esta manera para evitar todas las dificultades que les produce el trabajo algebraico rutinario y engorroso. Los alumnos pudieron interpretar claramente la idea de dinamización de una regla. Al finalizar la clase y puesta en común, fueron los alumnos los que dijeron que, a partir de ese momento, estaban en condiciones de poder resolver el problema de biomasa y diámetro normal que había quedado inconcluso.

Al comienzo de la tercera sesión de trabajo, los alumnos escucharon con atención la revisión realizada por la profesora y participaron activamente respondiendo a las preguntas e interrogantes planteados. Luego, entre todos, fortalecieron la idea de variable independiente y variable dependiente, logrando asociar el DN y la B, que aparecían en el problema, con cada una de ellas. Definieron verbal y simbólicamente el concepto de imagen de una función en un punto y dejaron en claro el significado de cada punto de la gráfica de una función. Se acordaron cuestiones de notación. Compartieron en grupo las ideas de observación, geometrización, modelación, analiticidad y predicción, desprendidas de los cuatro pasos de la regla así como la incorporación del TBN en la dinamización de la RCP en vías de la obtención de la derivada por incrementos, todo ello sin tener el conocimiento de las reglas prácticas de derivación de funciones de diferentes tipo.

VALORACIÓN DE LOS RESULTADOS

Como primer aspecto a resaltar es que quedó en evidencia que los alumnos no tienen incorporado el TBN en sus prácticas habituales y se confirmó que presentan dificultades con el trabajo algorítmico y algebraico. Se observó la falta de dominio de nociones matemáticas estudiadas en períodos anteriores. Sin embargo, evidenciaron interés y buen nivel de participación en todas las actividades más allá de las dificultades. El trabajo en grupo durante las puestas en común fue muy enriquecedor. Con las actividades planteadas en la primera sesión, todos llegaron a descubrir que necesitaban encontrar una manera de resolver ejercicios y un problema que, con las herramientas que disponían hasta el momento, no podían hacerlo. La cuestión planteada fue ¿no tiene solución o con lo que sabemos hasta ahora no tenemos la manera de encontrar la solución? Entre todos fueron capaces de acordar que seguramente habría manera de resolverlo y que debían encontrarla. Durante la segunda sesión fue posible descubrir que lo que había quedado planteado tenía solución y que sólo era cuestión de llevar al aula un contenido que había sido tratado durante el cursado de Matemática I. Las actividades promovieron el estudio de diversos aspectos variacionales. En la tercera jornada se buscó que los alumnos obtuvieran información relevante y explicaran sus conjeturas e interpretaciones a través de las gráficas presentadas en las diferentes actividades. Se intentó en todo momento que obtuvieran la máxima información de cada una de las situaciones representadas, a fin de beneficiar el desarrollo de su capacidad de análisis. Trabajaron cómodamente en el plano de lo algorítmico y algebraico (aunque cometieron algunos errores), presentando problemas al momento del trabajo gráfico y para interpretar los resultados. El manejo de las diferentes nociones matemáticas desarrolladas fue satisfactorio. Los alumnos debieron explorar varios aspectos variacionales: la idea de variación o cambio en las diferentes variables, la manera en la cual la pendiente de una recta está relacionada con el concepto de razón de cambio media o razón de cambio instantánea, lo que implica calcular cambios cada vez más pequeños, y el manejo de la noción de límite. Al resolver las actividades manifestaron conocer cómo calcular los diferentes pasos de la regla aunque la expresión algebraica de la función les resultara un tanto compleja. Fueron capaces de interpretar, tanto desde el punto de vista de la disciplina como desde los significados en el problema, lo que estaban calculando en cada paso. A través del planteo del problema desde la lectura y de la manera en que experimentalmente se obtuvieron los datos y la función a trabajar, reconocieron las prácticas que estaban inmersas en los pasos de la regla y fueron capaces de identificar las ideas variacionales que se esconden en la definición de derivada que, sin los cuatro pasos de la regla y calculando directamente las derivadas a través de las reglas prácticas de derivación pasan desapercibidas para ellos. Distinguieron la diferencia entre trabajar la derivada de una función (función derivada) y la derivada de una función en un punto.

Las actividades planteadas en cada sesión se revelaron adecuadas según los objetivos planteados y favorecieron el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Se puede afirmar que los objetivos planteados para las diferentes sesiones se cumplieron, destacando que los aspectos que no pudieron descubrir individualmente los alumnos, o que no les surgieron en la resolución de las actividades, fueron abordados luego en el debate grupal. Según lo observado durante las distintas sesiones, con las actividades propuestas se logró motivar a los alumnos para trabajar activamente y movilizar sus ideas y sus conocimientos a fin de ponerse en camino hacia la construcción de otros nuevos así como de resignificar los que ya tenían. Todos se mostraron capaces de enfrentar los desafíos y el conocimiento esperado fue emergiendo tanto en el trabajo individual, con la consulta con la docente, el intercambio con algún compañero como en la puesta en común de toda

la clase. La metodología de trabajo propuesta logró que todos se involucraran y se dispusieran a realizar las actividades planteadas según las consignas propuestas en algún caso por la profesora y en otras consensuadas con el grupo. Se trató de un trabajo situado en un contexto particular y permitió llegar al aula buscando construir y resignificar conocimiento. El trabajo realizado permitió también comprobar que, para lograr resultados, es necesario considerar no solamente las prácticas que dan significado o resignifican el propio saber matemático sino también cómo dichas prácticas aparecen en lo cotidiano entre alumnos y docentes en el trabajo en el aula.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Camacho, A. (2011). Socioepistemología y prácticas sociales. Hacia una enseñanza dinámica del cálculo diferencial. *Revista Iberoamericana de Educación Superior-UNIVERSIA 2*(3), 152-171. Recuperado el 2 de febrero de 2011 de http://ries.uni versia.net/index.php/ ries/article/view/84

Cantoral, R. (2011). *Fundamentos y Métodos de la Socioepistemología.* [Video]. Simposio en Matemática Educativa, 22 al 26 de agosto de 2011. D.F., México: Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. Recuperado el 10 de octubre de 2011 de http://www.youtube.com/watch?v=byH KKFnAq5Y&feature=share

Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social de conocimiento. México: Gedisa Editorial.

Díaz, L.; Acosta, M.; Carrillo, F.; Buendía, E.; Flores, E. y Etchevers, J. (2007). Determinación de ecuaciones alométricas para estimar biomasa y carbono en *Pinus Patula* Schl. *et* Cham. *Revista Madera y Bosques. 13 (1)*, 25-34. Recuperado el 10 de julio de 2012 de http://redalyc.uaemex.mx/pdf /617/61713103.pdf

Engler, A. (2014). La regla de los cuatro pasos. Análisis socioepistemológico. En P. Lestón (*Ed.*), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27*, 1593-1602. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Granville, W. (1980). *Cálculo Diferencial e Integral*. Primera reimpresión. México: Grupo Noriega Editores, LIMUSA.

ACTIVIDADES CON MAPAS CONCEPTUALES EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS

Mabel Susana Chrestia
Universidad Nacional de Río Negro (Argentina)
mchrestia@unrn.edu.ar

Palabras clave: mapas conceptuales, aprendizaje significativo, herramientas didácticas, actividades en el aula, proceso de enseñanza-aprendizaje.

Key words: concept maps, significant learning, didactic tools, activities in the classroom, teaching-learning process.

RESUMEN: Este artículo resume la experiencia de haber dictado el curso corto denominado "Actividades con mapas conceptuales en la clase de matemáticas" en el contexto de la XXIX Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, celebrada en la ciudad de Panamá.

En el presente texto se realiza una introducción al tema, comentando antecedentes y características de los mapas conceptuales. Luego, se describen cuatro de las nueve actividades desarrolladas en el curso, propuestas para ser implementadas con alumnos tanto de nivel medio como superior. A continuación, se comenta acerca del software CMapTools, mostrando las ventajas de su uso.

Los participantes del curso se introdujeron en la temática de los mapas conceptuales, y pudieron experimentar con este recurso didáctico, descubriendo sus beneficios, y sus diferentes aplicaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

ABSTRACT: This article summarizes the experience of having dictated the short course named "Activities with concept maps in the class of mathematics" in the XXIX RELME celebrated in Panama City.

In the present text an introduction is realized to the topic, commenting on precedents and characteristics of the concept maps. Then, there are described four of nine activities developed in the course, proposed to be implemented by pupils so much of secondary school as university. Later, it is commented brings over of the software CMapTools, showing the advantages of its use.

The participants of the course got in the subject matter of the conceptual maps, and could experiment with this didactic resource, discovering his benefits, and his different applications in the teaching-learning process.

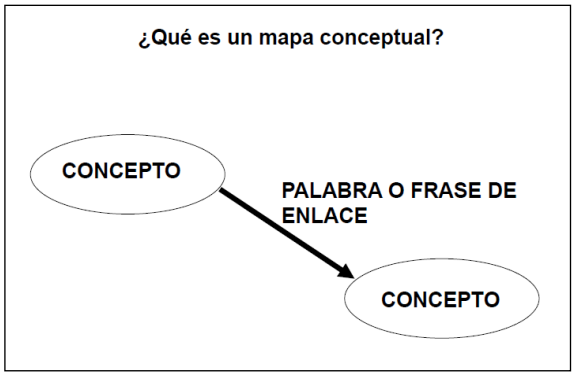
INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

En este artículo relataré lo acontecido en el curso corto denominado “Actividades con mapas conceptuales en la clase de matemáticas” en el contexto de la XXIX Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, celebrada en la ciudad de Panamá. Asistieron a este curso quince docentes de niveles medio y superior de diferentes países, los cuales pudieron conocer esta útil herramienta, y realizaron diversas actividades apropiadas para aplicar en el aula.

Los mapas conceptuales constituyen un instrumento muy eficaz que puede utilizarse en diferentes momentos del proceso de enseñanza–aprendizaje. Es posible implementar actividades que van desde la etapa de diagnóstico, para indagar acerca de los conocimientos previos de los alumnos, hasta la evaluación (Chrestia, M., Dondo- Bühler, M., Quijano, M., 2012). Ayudan a lograr un aprendizaje más cercano al significativo que a uno mecánico y memorístico. Se pueden utilizar en cualquier área del conocimiento y nivel educativo.

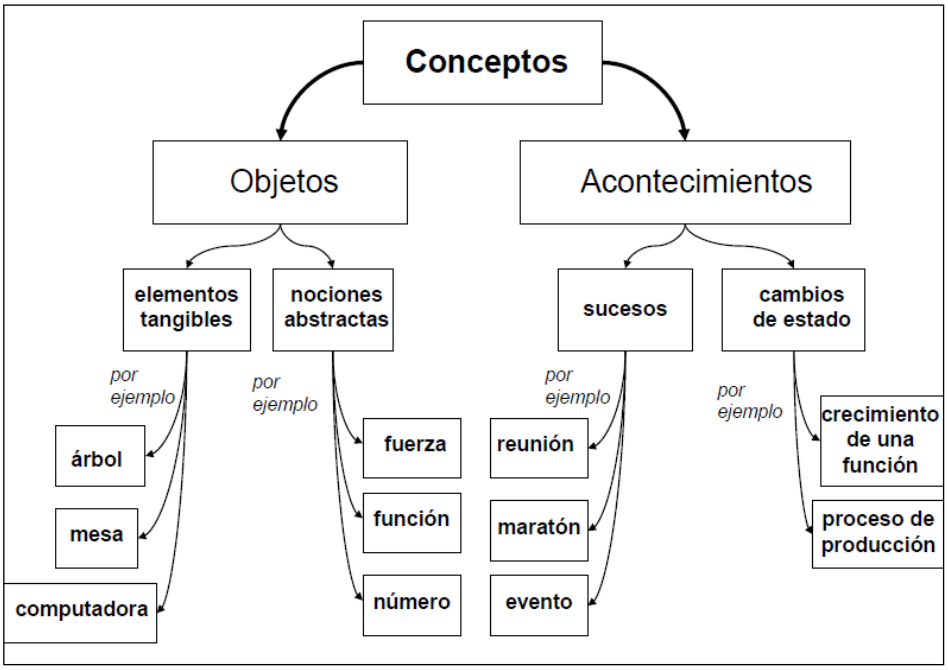
El uso de mapas conceptuales comenzó a desarrollarse en Estados Unidos a mediados de la década de los setenta por Joseph Novak y sus colaboradores. Estos mapas son representaciones gráficas del conocimiento sobre un tema, que incluyen tanto conceptos como relaciones entre conceptos. “Los mapas conceptuales tienen por objeto representar relaciones significativas entre conceptos en forma de proposiciones. Una *proposición* consta de dos o más términos conceptuales unidos por palabras para formar una unidad semántica.”(Novak y Gowin, 1988, p.4). (Figura 1)

Figura 1. ¿Qué es un mapa conceptual? (diapositiva del curso)



En la construcción de un mapa conceptual se distinguen los elementos *conceptos*, *palabras de enlace* y *proposiciones*. Los conceptos son aquellas palabras clave, que pueden ser objetos o acontecimientos. Las palabras de enlace nos sirven para relacionar dos conceptos entre sí, formando una proposición o frase. Toda esta explicación puede visualizarse utilizando justamente un mapa conceptual, cuyo concepto principal es, valga la redundancia, el término “*Conceptos*”. Este ejemplo nos muestra una de las ventajas de usar esta herramienta, la cual radica en el poder de utilización de representaciones gráficas y esquemas en reemplazo de textos extensos, que ayudan a una mejor comprensión de un tema dado. (Figura 2)

Figura 2. Mapa conceptual del término "Concepto" (diapositiva del curso)



Numerosas publicaciones relatan experiencias del uso de los mapas conceptuales en diversas asignaturas. Específicamente en matemática, muchos trabajos (Antomil Ibias, J., Arenas Parra, M., Bilbao Terol, A., Pérez Gladish, B. y Rodríguez Uría., M.V., 2006; Cuevas, A., 2003; Pérez Flores, R., 2006) muestran las ventajas de su utilización, tanto para el alumno como para el docente.

MAPAS CONCEPTUALES Y APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO

La herramienta de mapas conceptuales está basada en la teoría cognitiva del aprendizaje de David Ausubel, cuyo concepto básico es el de aprendizaje significativo.

Para aprender significativamente es necesario relacionar los nuevos aprendizajes a partir de las ideas previas del alumno. El nuevo conocimiento "adquiere significados para el aprendiz a través de una especie de anclaje en aspectos relevantes de la estructura cognitiva preexistente en el individuo, o sea en conceptos, ideas, proposiciones ya existentes en su estructura de conocimientos (o de significados) con determinado grado de claridad, estabilidad y diferenciación" (Moreira, 1988).

Contrario al aprendizaje mecánico, en el que la nueva información simplemente se "conecta" de manera arbitraria con la ya existente en la estructura cognitiva del alumno, el aprendizaje significativo involucra la modificación y evolución de la nueva información, así como de la estructura cognitiva envuelta en él. Este proceso de aprendizaje es, entonces, dinámico, y así es como el conocimiento va siendo construido.

En base a esta teoría, el uso de mapas conceptuales es un instrumento muy eficaz para lograr un aprendizaje significativo. En los mapas los conceptos se relacionan con una coherencia interna y una conexión adecuada, proporcionando al estudiante un referente gráfico que facilita la construcción del conocimiento a partir de la relación de la nueva información con estructuras cognitivas que él ya ha desarrollado. De esta manera, los nuevos conceptos son asimilados en estructuras existentes en vez de permanecer aislados, memorizados y finalmente olvidados.

CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL CURSO

El curso corto que da título a este trabajo formó parte de la RELME 29 y tuvo como objetivos generales los siguientes: a) Conocer las características principales de los mapas conceptuales; b) Conocer diferentes actividades relacionadas con las matemáticas, que pueden realizarse con mapas conceptuales en el aula; c) Conocer un software para crear mapas conceptuales.

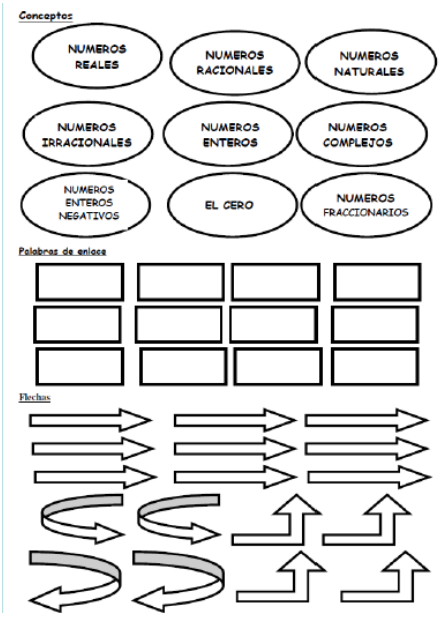
Realizada la introducción, relataré a continuación las actividades propuestas para llevar a cabo en clases de matemáticas usando mapas conceptuales. Las mismas fueron realizadas por los asistentes al curso, en forma grupal, para ellos descubrir por sí mismos las ventajas y dificultades que se pueden presentar a la hora de realizarlas en el aula.

Se presentan entonces de manera sintética cuatro de las nueve actividades que formaron parte del curso:

Actividad 1: *Armar un mapa conceptual sobre los conjuntos numéricos.*

Se les entrega a cada grupo una página que puede verse en la Figura 3. La misma contiene los diferentes elementos con los que debe construirse un mapa conceptual cuyo concepto principal sea “Conjuntos Numéricos”. Se les entrega también un papel tipo “afiche” sobre el cual deben pegar las diferentes partes. Cada grupo arma su propio mapa, teniendo en cuenta las diferentes inclusiones que existen entre los conjuntos numéricos. También se les solicita agregar ejemplos numéricos concretos. Finalmente, cada grupo muestra sus producciones.

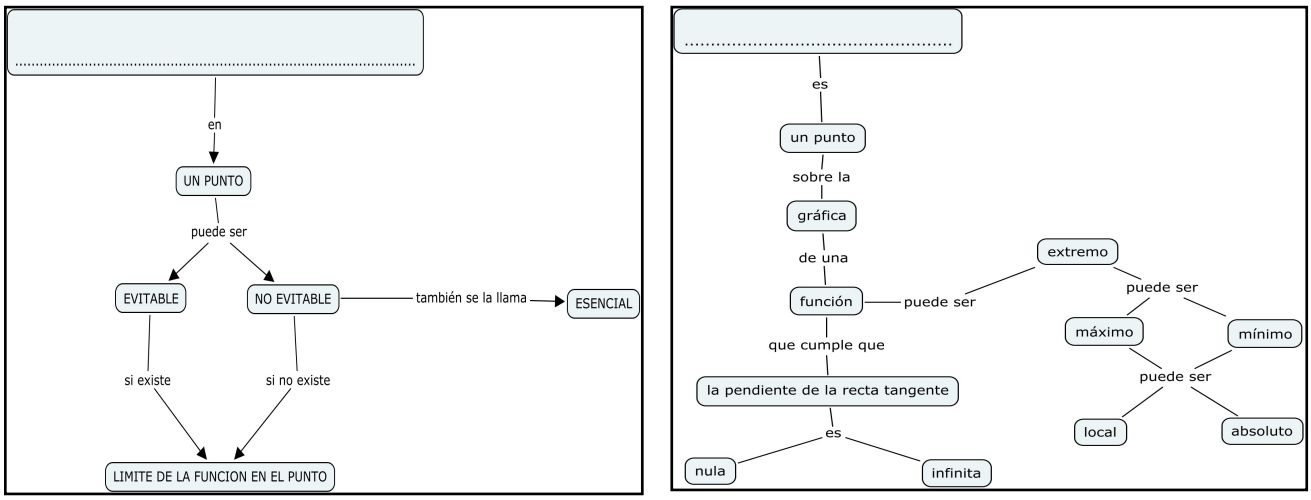
Figura 3. Ficha entregada para la Actividad 1.



Actividad 2: *Dado un mapa conceptual incompleto, deducir cuál es el concepto principal.*

En esta actividad los alumnos visualizan tres mapas a los que les falta indicar el concepto principal. Deben recorrer cada mapa, atendiendo a los conceptos incluidos en él y a las palabras de enlace, para armar proposiciones y deducir el tema del cual trata. Se pueden observar dos de los mapas de la actividad en la Figura 4, cuyos conceptos principales son “Discontinuidad de una función” y “Punto crítico”, respectivamente.

Figura 4. Mapas conceptuales de la Actividad 2.

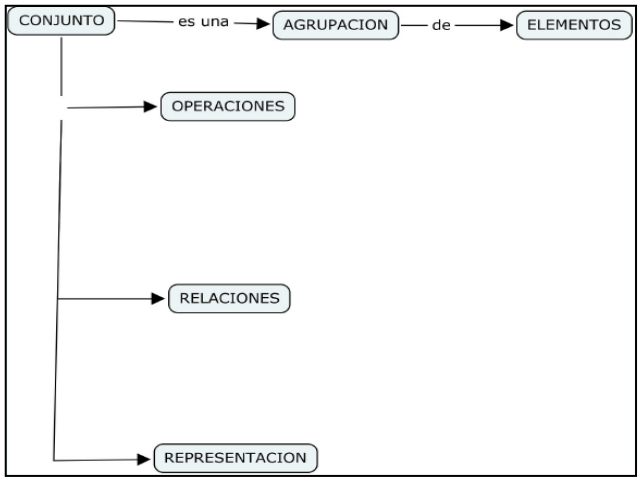


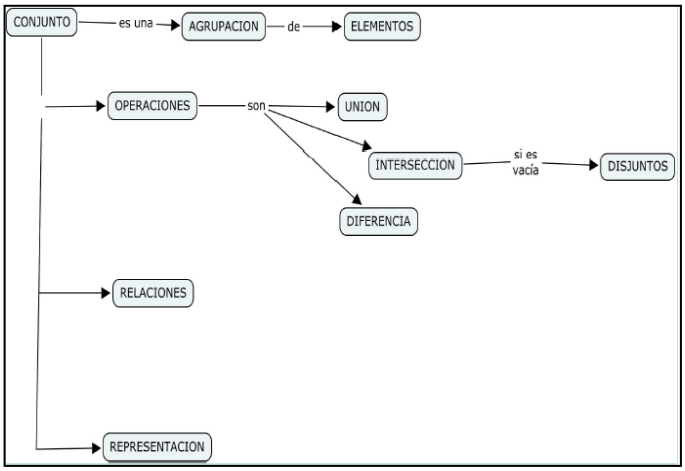
Actividad 3: *Armar un mapa conceptual a partir de una estructura dada.*

En esta actividad se propone a los asistentes una actividad que consiste en diseñar un mapa conceptual sobre un tema amplio, como por ejemplo “Conjuntos”. Debido a lo abarcativo del concepto, se propone iniciar el armado del mapa utilizando una estructura “base”, sobre la cual se construirá el mapa.

Se muestra en la Figura 5 los diferentes momentos de construcción del mapa. Este se considerará terminado dependiendo del grado de conocimiento o profundidad al que se desee llegar sobre el tema, y también del nivel de enseñanza escolar.

Figura 5. Construcción de un mapa conceptual partiendo de una estructura dada.





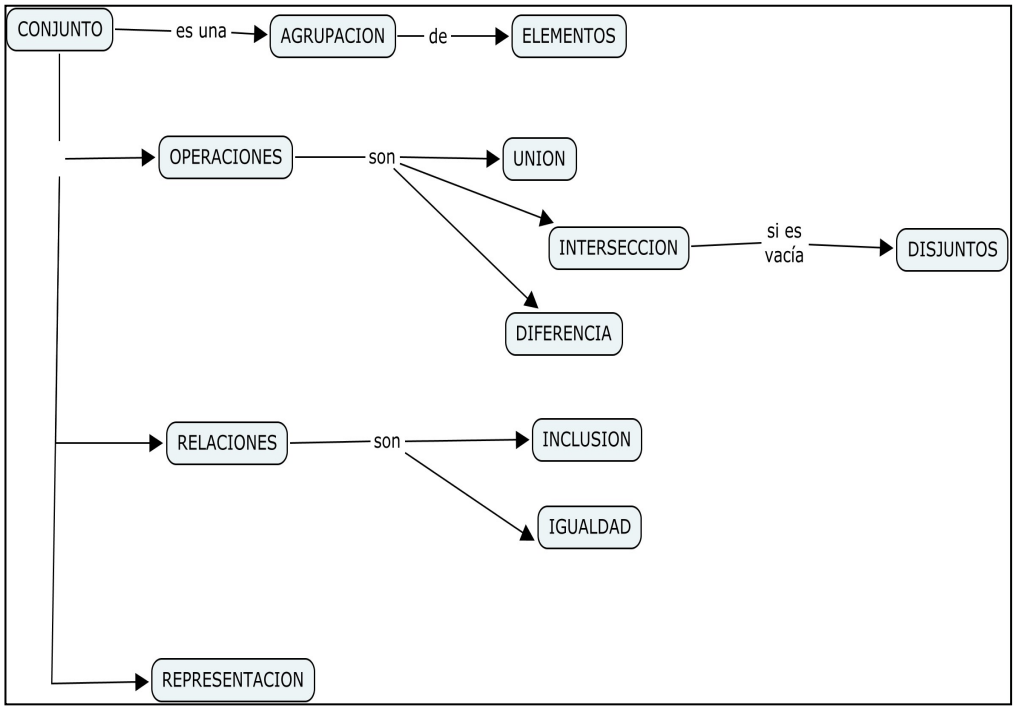
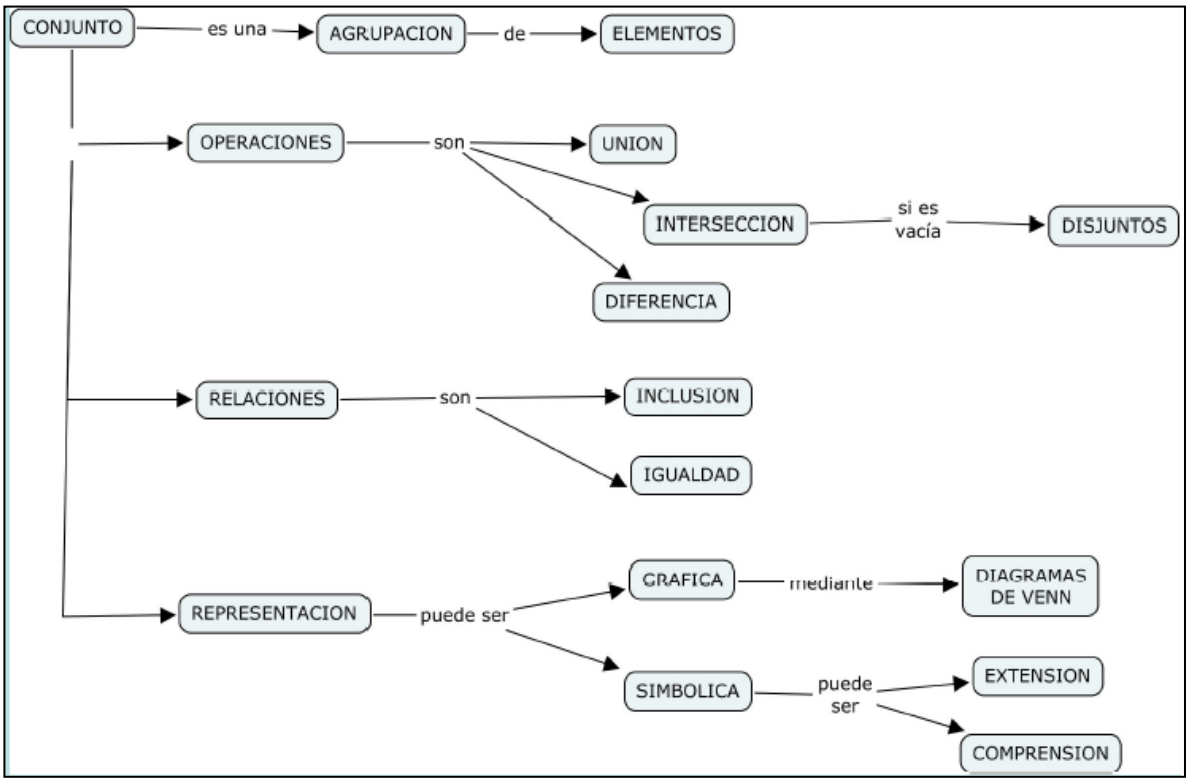


Figura 5 (continuación). Construcción de un mapa conceptual partiendo de una estructura dada.



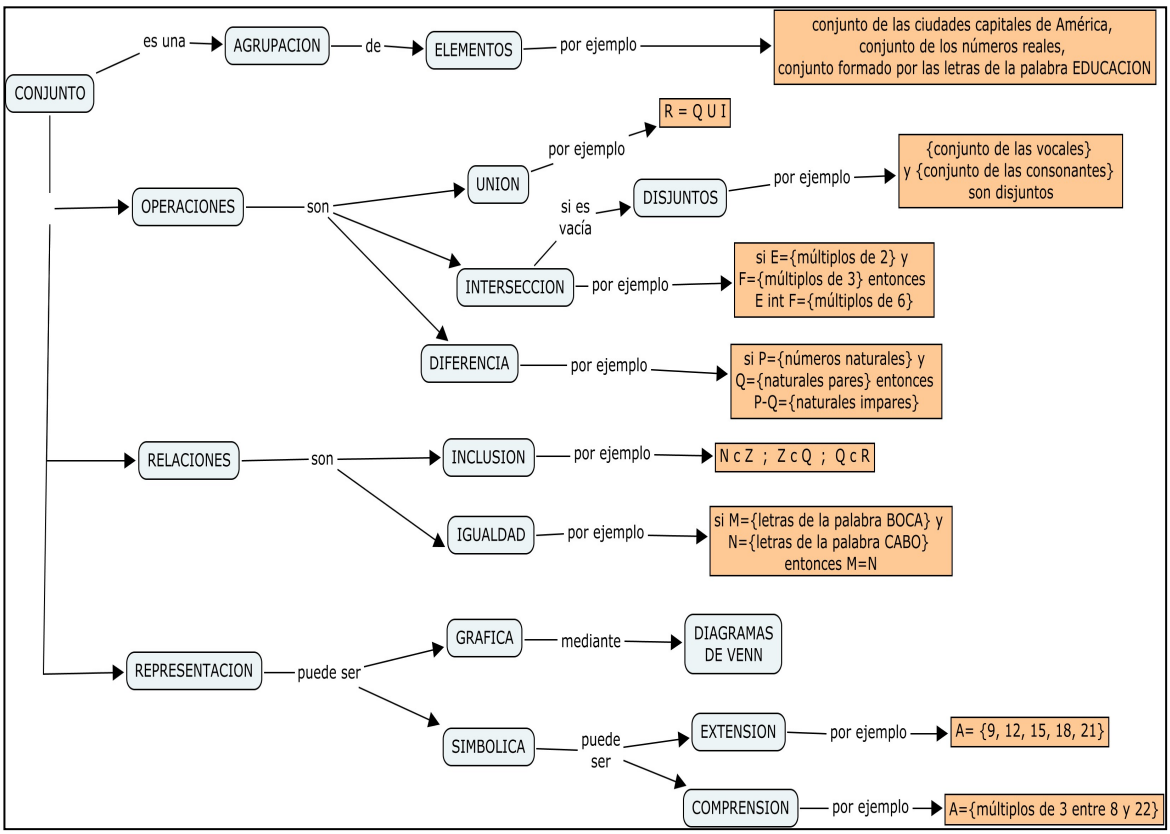
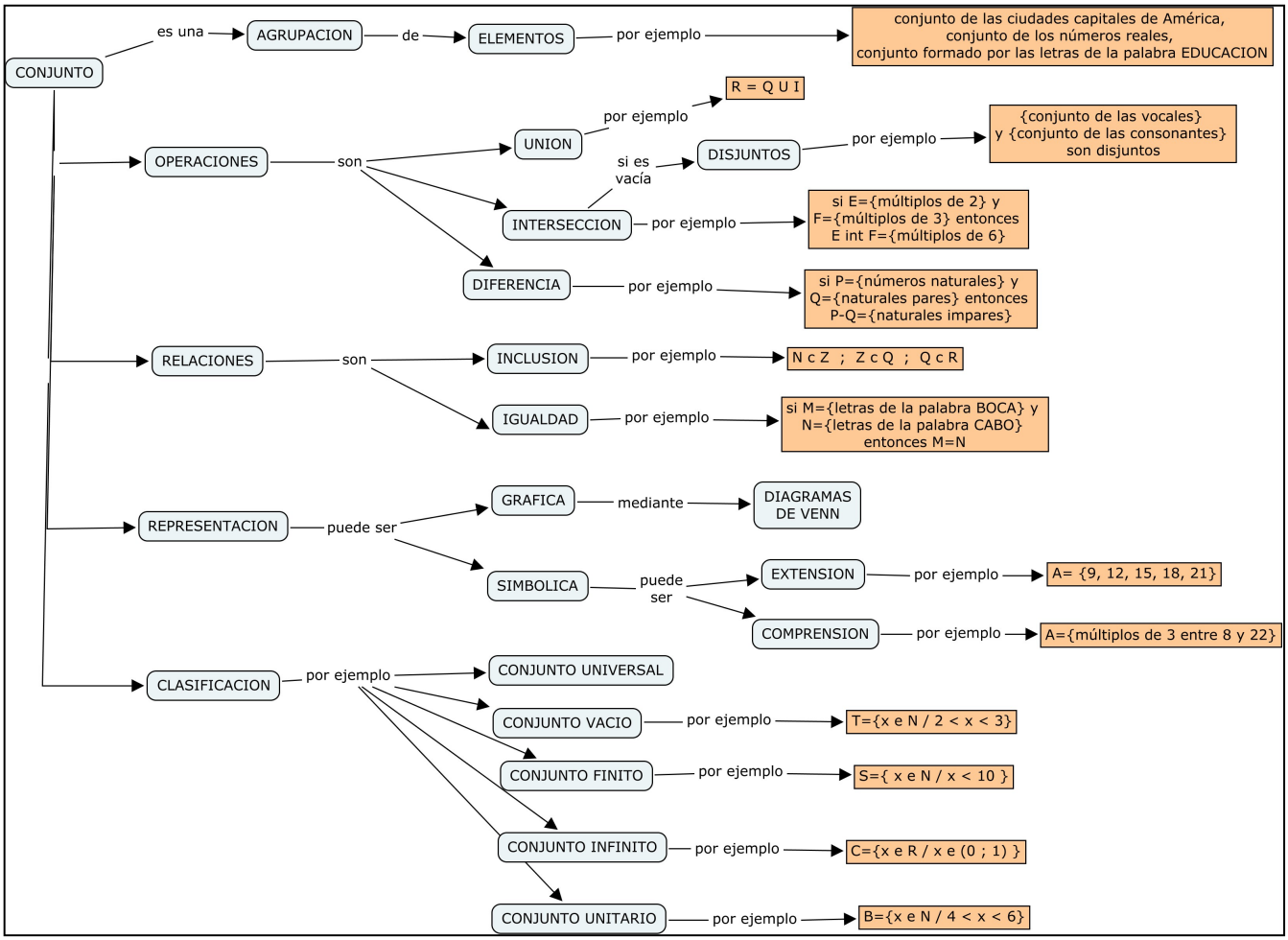


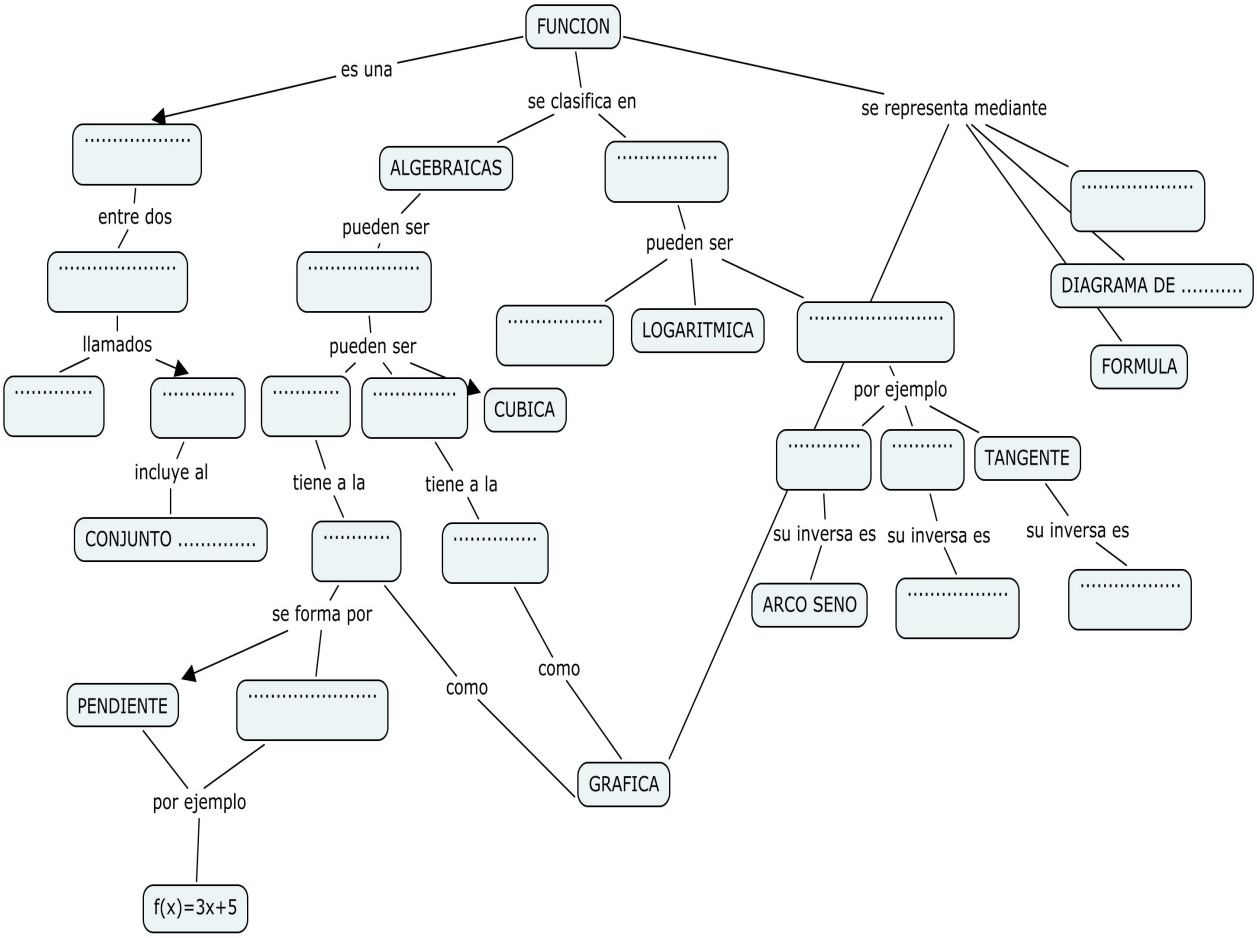
Figura 5 (continuación). Construcción de un mapa conceptual partiendo de una estructura dada.



Actividad 4: *Completar un mapa conceptual dado con los conceptos faltantes.*

Se entrega a cada grupo el mapa conceptual que se observa en la Figura 6. En el mismo falta incluir veinte conceptos. Esta actividad es muy recomendable para repasar un tema (en este caso Funciones) o bien para hacer una evaluación. Novak & Gowin (1988) aconsejan ponderar cada concepto faltante para poder determinar el puntaje obtenido por el alumno. En este ejemplo se propone asignar 0,5 puntos a cada concepto agregado de manera correcta, de modo que aquel alumno que complete bien todos los términos faltantes obtendrá un puntaje de 10 (diez).

Figura 6. Mapa conceptual para completar.



Culminadas las actividades, se realizó una introducción a un software diseñado especialmente para construir mapas conceptuales. Este programa denominado CMapTools es de uso libre y gratuito, y entre otras ventajas se destacan las siguientes: es fácil de utilizar; hay en existencia gran disponibilidad de ejemplos y manuales en la web; permite personalizar mapas conceptuales; permite guardar los mapas en diferentes formatos; permite la búsqueda de palabras dentro de un mapa; se pueden añadir imágenes, videos, sonidos; permite añadir archivos adjuntos; permite incluir enlaces a otras páginas; se puede acceder a servidores en los cuales se comparten mapas conceptuales.

Asimismo se comentó a los asistentes acerca de otros programas que permiten crear y trabajar con mapas conceptuales.

CONCLUSIONES Y REFLEXIONES FINALES

Considero que este curso permitió a los asistentes introducirse en la temática de los mapas conceptuales, conociendo sus principales características, sus elementos y ejemplos de ellos.

Mediante las nueve actividades realizadas, pudieron apreciar la versatilidad de este recurso didáctico, ya que puede usarse tanto para actividades de diagnóstico, de repaso y de generalización como para también evaluar los conocimientos que los alumnos poseen sobre un tema.

Los docentes que estuvieron presentes en el curso se mostraron satisfechos y moti-vados para seguir indagando acerca de los mapas conceptuales. Asimismo, despertó su interés el uso y conocimiento del software presentado, que permite diseñarlos de una manera fácil y comprensible.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Antomil Ibias, J., Arenas Parra, M., Bilbao Terol, A., Pérez Gladish, B. y Rodríguez Uría., M.V.(2006). La utilización de mapas conceptuales en las asignaturas de matemáticas para la economía en el marco del espacio europeo de educación superior. Recuperado el 10 de marzo de 2012 de http://www.uv.es/asepuma/XIV/comunica/110NUEVO.pdf

Cuevas, A. (2003). Propuesta de aplicación de los mapas conceptuales en un modelo pedagógico semipresencial. Revista Iberoamericana de Educación. Recuperado el 15 de marzo de 2012 de http://www.rieoei.org/deloslectores/493Cuevas.PDF

Chrestia, M., Dondo-Bühler, M., Quijano, M. (2012). La incorporación de los mapas conceptuales como medio para aprender y evaluar. En N. Ferreyra y M. Ascheri (Eds.) Memorias de la IV Reunión Pampeana de Educación Matemática, 163-173. Santa Rosa: EdUNLPam.

Moreira, M. (1988). Mapas conceptuales y aprendizaje significativo. Recuperado el 10 de mayo de 2014 de http://www.if.ufrgs.br/~moreira/mapasesp.pdf

Novak, J., Gowin, D. (1988). Aprendiendo a aprender. Barcelona: Ediciones Roca.

Pérez Flores, R. (2006) Mapas conceptuales y aprendizaje de matemáticas. Recuperado el 15 de marzo de 2012 de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/view/533/525

LOS OBJETOS FRACTALES: UN RECURSO PARA EL ACERCAMIENTO INTUITIVO DEL ESTUDIO DEL LÍMITE

Noé Sanmartín Román
Instituto Superior de Ciencias de la Educación de Estado de México (México)
bsanmandelbrotin@gmail.com

Palabras clave: fractales, límite, infinito

Key words: fractals, limit, infinity

RESUMEN: Se propone introducir a los objetos fractales en el contexto de la educación media superior a partir de construcciones iterativas que permitan visualizar procesos infinitos y comportamientos numéricos, para que con la concepción de los fractales como límites de procesos infinitos se genere un acercamiento intuitivo sobre el concepto del límite. Se utilizarán figuras fractales para establecer expresiones que en su forma general puedan escribirse como funciones cuya variable independiente se relacione con su magnitud, por ejemplo, la longitud de la figura que representa el conjunto de Cantor y el área del triángulo de Sierpinsky, entre otros.

ABSTRACT: We propose introduce the fractal objects in the context of high school from iterative constructions, able to displaying infinite processes and their numerical behavior, so as the concept of fractals as limits of infinite processes generates an intuitive approach to the limit concept. Fractal figures can be used to set expressions that in their general form can be written as functions whose independent variable is related to their size, for example, the length of the figure representing the Cantor set and the Sierpinsky triangle's area among others.

LOS OBJETOS FRACTALES

El interés que han generado los objetos fractales y la dinámica de su geometría hoy día se ha popularizado no solo entre las comunidades interesadas en el estudio de las matemáticas, sino entre los docentes de matemáticas de los niveles básico y medio superior, tales docentes reconocen en estos objetos fractales un recurso que permite abordar la matemática escolar de estos niveles de una forma distinta. Muchos docentes de matemáticas e investigadores preocupados por la educación matemática han diseñado estrategias para incluir estos objetos en las aulas de los diferentes niveles educativos, Peitgen, Jürgens, y Saupe (1991) proponen en su obra Fractals for the Classroom una serie de actividades que permiten introducir las nociones de fractales y sistemas dinámicos en los contextos escolares elementales y preuniversitarios, estas estrategias didácticas permiten que los alumnos adquieran el conocimiento de la geometría fractal y puedan utilizarla como herramienta para facilitar la comprensión de algunos conceptos de la matemática escolar, tales como el de límite, es decir, como estructuras que son el resultado de procesos infinitos generados por construcciones geométricas infinitas y que pueden representarse como el límite de determinados procesos infinitos.

Para introducir estas estructuras en el contexto escolar de la educación media superior, es necesario enfatizar la construcción iterativa que, desde esta dinámica, permite visualizar el proceso infinito y el comportamiento de los valores que esta toma en cada iteración, en este sentido, se considera que la introducción de algunas figuras geométricas fractales elementales como la recta que representa el conjunto de Cantor y el triángulo de Sierpinsky, así como sus dinámicas de construcción, la cuales pueden ser entendidas como procesos infinitos, permite que los alumnos tengan un acercamiento intuitivo sobre la noción del límite.

Figuras fractales en la enseñanza de la matemática en el nivel medio superior.

El conjunto de Cantor

Con figuras geométricas fractales elementales y el análisis de la dinámica de construcción, es posible establecer expresiones numéricas que corresponden a cada una de las iteraciones asociadas a su longitud, área o volumen, dichas expresiones en su forma general pueden escribirse como funciones cuya variable independiente está precisamente relacionada con una magnitud, por ejemplo, la longitud de la figura que representa el conjunto de Cantor, el cual, se construye a partir de un segmento de recta a la que se le quita el tercio central y que de forma iterada se repite en cada etapa, es una función de la forma $L_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ en donde *n* representa las iteraciones que se han hecho, la tabla 1 muestra las primeras cuatro iteraciones de la recta que representa el conjunto de Cantor.

Tabla 1. Expresiones numéricas asociadas a la longitud el conjunto de Cantor.

	$L_0 = 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$
	$L_1 = \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^1$
	$L_2 = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$
	$L_3 = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

Esta estructura geométrica puede utilizarse para analizar lo que sucede con L_n cuando n toma valores cada vez más grandes, así como introducir expresiones que permitan comprender aspectos como el siguiente: Si $n \to \infty$, (si n se aproxima a un valor muy grande) entonces $L_n \to 0$, (L_n se aproxima a un valor, que es positivo, pero muy pequeño) lo que puede conducir al establecimiento de expresiones como:

$\lim_{n\to\infty} L_n = 0$ que equivale a $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

Con esta figura geométrica también es posible analizar lo que sucede con la cantidad de rectas que se obtienen en cada una de las etapas, la tabla 2 muestra las rectas que se obtienen luego de hacer las divisiones correspondientes.

Tabla 2. Expresiones numéricas asociadas a la cantidad de rectas del conjunto de Cantor.

	$C_0 = 1 = 2^0$
	$C_1 = 2 = 2^1$
	$C_2 = 4 = 2^2$
	$C_3 = 8 = 2^3$

Al analizar lo que sucede con C_n cuando n toma valores cada vez más grandes, se concluye lo siguiente: Si $n \to \infty$, entonces $C_n \to \infty$, lo que nos conduce a la expresión: $\lim_{n\to\infty} C_n = \infty$, es decir, $\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$

Aunque es posible hoy día, con la ayuda de las computadoras, construir geométricamente el conjunto de Cantor, su dinámica puede comprenderse mejor con una construcción analítica que permita calcular rápidamente los intervalos componentes del conjunto para valores de *n* muy grandes.

Recientemente con el uso del conjunto de Cantor en los sistemas dinámicos y el estudio de bifurcaciones, se han planteado cuestiones sobre lo que hace interesante su estudio. El conjunto de Cantor es disconexo, lo cual significa que entre dos puntos del conjunto, existen puntos que no pertenecen al conjunto de Cantor. El que este conjunto contenga huecos infinitos hace que correctamente se le llame polvo de Cantor.

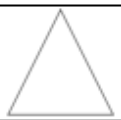
Una propiedad notable del conjunto de Cantor es que dado cualquier número real *x* en el intervalo [0, 1], existen dos elementos del conjunto, *p* y *r*, tales que *x* = *p* – *r*. En otras palabras las sumas *p* + *r* de dos elementos del conjuntos de Cantor llenan el intervalo [0, 2].

En matemáticas este conjunto es útil para el planteamiento de ejemplos en topología y análisis, sin embargo, en la matemática de la educación media superior, la construcción analítica de este conjunto puede acercar de forma intuitiva a los alumnos a un tipo de matemática que está ausente en sus programas de estudio.

El triángulo de Sierpinsky

Otro ejemplo de figura fractal elemental es el Triángulo de Sierpinsky, el cual se construye al quitar iterativamente el cuarto central de un triángulo equilátero que se ha dividido en 4 partes iguales, como se muestra en la tabla 3.

Tabla 3. Expresiones numéricas asociadas al área del triángulo de Sierpinsky.

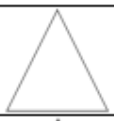
	$A_0 = 1 = \left(\frac{3}{4}\right)^0$
	$A_1 = \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^1$
	$A_2 = \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$
	$A_3 = \frac{27}{64} = \left(\frac{3}{4}\right)^3$

Al igual que con la recta del conjunto de Cantor, con esta figura es posible generar expresiones como las siguientes: si $n \to \infty$ entonces $A_n \to 0$, dicho de otro modo: $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$ que equivale a

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

Análogamente, la cantidad de triángulos que se obtienen en cada etapa se muestra en la tabla 4.

Tabla 4. Expresiones numéricas asociadas a la cantidad de triángulos.

	$T_0 = 1 = 3^0$
	$T_1 = 3 = 3^1$
	$T_2 = 9 = 3^2$
	$T_3 = 27 = 3^3$

Con las figuras anteriores de puede concluir que si $n \to \infty$ entonces $T_n \to \infty$, es decir, $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$ que equivale a $\lim_{n\to\infty} 3^n = \infty$

Quizá el conjunto más representativo de la geometría fractal sea el triángulo de Sierpinski, este triángulo con propiedades específicas, al igual que el conjunto de Cantor, es utilizado en el contexto de los sistemas dinámicos. Barnsley (1993) expuso algunos procedimientos para construir figuras fractales como sistemas iterados de funciones, muchos de los cuales pueden entenderse como una función del conjunto de Cantor. La definición formal del triángulo de Sierpinski, con base a su construcción clásica, se reduce a la intersección de una familia de conjuntos que resulta de un atractor de un sistema iterado de funciones. Al igual que el conjunto de Cantor, este triángulo y su construcción analítica permite que los alumnos construyan intuitivamente conceptos importantes en su formación matemática, tales como el límite.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barnsley, M. (1993) *Fractals Everywhere*. Second Edition. Academic Press, Inc.

Peitgen, H., Jürgens, H., Saupe, D. (1991) *Fractals for the Classroom Part One*: Introduction to fractal and chaos. New York: Springer – Verlag.

FORMACIÓN DE INGENIEROS DESDE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Ruth Rodríguez, Bertha Ivonne Sánchez, Alberto Camacho, Ismael Arcos, Hipólito Hernández
Tecnológico de Monterrey, Instituto Tecnológico de Ciudad Jiménez, Instituto Tecnológico de Chihuahua II, Universidad Autónoma del Estado de México, Universidad Autónoma de Chiapas, Universidad Autónoma de Chiapas (México)
ruthrdz@itesm.mx, ivonnesanchez10@yahoo.com, camachoalberto@hotmail.com, ismael_arcos@msn.com, polito_hernandez@hotmail.com

Palabras clave: formación de ingenieros, matemática educativa, modelación matemática.

Key words: engineers' training, educational mathematics, mathematical modeling

RESUMEN: El objetivo del grupo es reflexionar sobre la enseñanza de la matemática en escuelas de ingeniería desde cinco grandes temas: 1) El tipo de matemáticas que debe ser enseñada y aprendida, 2) El reconocimiento de la pluralidad de enfoques geopolíticos que se tienen sobre ¿qué es una escuela de ingeniería? 3) La relación de las matemáticas con las ciencias de la ingeniería, 4) El rol que juega el ingeniero en la transformación del conocimiento matemático hacia un saber práctico, y de qué manera ese saber práctico puede volverse al aula, 5) Las formas de modelización pertinentes en esos niveles.

ABSTRACT: The goal of this group is to reflect on the teaching of mathematics in engineering schools from five major themes: 1) The types of mathematics which should be taught and learned, 2) Recognizing the plurality of the geopolitical views on "What is an engineering school?" 3) The relationship between mathematics and engineering sciences, 4) The role played by the engineer in transforming mathematical knowledge into practical knowledge, and how that knowledge can be used in the classroom 5) Modeling pathways pertaining to those levels.

INTRODUCCIÓN

El presente escrito pretende mostrar parte de las discusiones que tuvieron lugar durante la RELME 29 en Panamá donde se reúne por primera vez un grupo de profesores investigadores en el marco de un evento latinoamericano. Existen dos importantes antecedentes de esta reunión, un primer grupo en RELME en el 2010 (Guatemala) y posteriormente una reunión de un grupo de profesores-investigadores de la Matemática Educativa que se reúnen en la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa realizada en Oaxaca, Oaxaca, 2014 (Rodríguez, Sánchez y Camacho, 2014 y Rodríguez, Sánchez, Camacho, Arcos, Hernández, de la Cruz, Covián y Cajas, 2015).

Se presentan 4 apartados en los cuales los integrantes del grupo exponen sus ideas alrededor de una o varias de las preguntas que rigen esta discusión y descritas previamente en el resumen de este escrito.

EL MATEMÁTICO EDUCATIVO EN LA FORMACIÓN DE INGENIEROS

Una de las temáticas a tomar en cuenta en el grupo y que ha sido abordada desde RELMEs anteriores (por ejemplo Costa Rica, 1994), así como en otros foros y publicaciones, es la que resulta de preguntarse si hay más de una matemática a ser estudiada por comunidades de profesionales (en nuestro caso ingenieros).

Hasta la década de los ochenta del siglo pasado, la formación matemática de los ingenieros estaba de acuerdo con la concepción idealista platónica de la Educación Matemática, según la cual «[se] considera que el alumno debe adquirir primero las estructuras fundamentales de las matemáticas de forma axiomática. Se supone que una vez adquirida esta base, será fácil que el alumno por sí solo pueda resolver las aplicaciones y problemas que se le presenten» (Godino, Batanero y Font, 2003).

Sin embargo, la experiencia en las aulas mostró que tal cosa no ocurría, y a partir de entonces, parece haber un proceso de reconocimiento de la legitimidad y necesidad de unas Matemáticas para Ingenieros (Rugarcía, 1997) y por lo tanto de una matemática escolar cuyos contenidos, metodología didáctica y sistema de evaluación de los aprendizajes, sean especialmente diseñados e instrumentados para la formación escolar de los futuros ingenieros.

En este contexto, se considera que un matemático educativo podría participar en escuelas de ingeniería desarrollando actividades relacionadas con alguno(s) de los siguientes aspectos:

1. Determinación de los propósitos generales del conjunto de cursos de Matemáticas, como parte de la formación escolar de los futuros profesionales de la ingeniería. Por lo tanto, en la determinación más o menos precisa de los contenidos específicos de esos cursos.
2. Propuesta y exploración de las posibles maneras en las que esas temáticas deben atenderse en las aulas y en otros espacios de aprendizaje.
3. Diseño y elaboración de textos y otros materiales para la enseñanza de las Matemáticas en escuelas de Ingeniería.
4. Diseño y exploración de actividades de aprendizaje con o sin la ayuda de elementos y herramientas tecnológicas.

5. Diseño y exploración de instrumentos de evaluación de los aprendizajes.

De esta manera, todas aquellas actividades de indagación bibliográfica, hemerográfica o aquellas desarrolladas en aula o en cualquier otro escenario en donde puedan ocurrir aprendizajes de Matemáticas por parte de los estudiantes de una escuela de ingeniería, bien pueden denominarse actividades de investigación en Matemática Educativa.

Bajo esta perspectiva, deseamos retomar el trabajo desarrollado por Sánchez y Camacho al respecto de entender mejor el tipo de Matemáticas que se utiliza en la formación de Ingenieros, principalmente las diversas formas de modelación y/o modelización que surgen en el aula escolar y que permite eventualmente desarrollar conocimientos en los alumnos.

MODELIZACIÓN ESCOLAR COMO FUENTE DE CONOCIMIENTO

La recreación en el aula de diversas actividades de modelización, es una técnica utilizada con resultados comprobables en los cuales se integran las nociones relativas a los diferentes espacios de trabajo, a saber: macro-espacio, donde se establecen relaciones experimentales entre actividades prácticas; meso-espacio, se refiere a la apropiación que puedan hacer los profesores derivada de la actividad, y micro-espacio que se refiere a la manera en que los estudiantes las desarrollan. Esta modelización es diseñada por el profesor, quien involucra los temas y/o conceptos propios de la asignatura en cuestión, para lo cual utiliza instrumentos y conocimientos prácticos (de contexto).

Un primer ejemplo lo tenemos con el diseño de una tabla trigonométrica a partir del dibujo de un círculo de radio conocido, con mediciones cada 20 grados a través de la formación de triángulos rectángulos cuyos catetos nos permiten establecer las razones trigonométricas en forma proporcional (Sánchez, Camacho y Moreno, 2010). El objetivo de la práctica es que los estudiantes vivan por si mismos la experiencia de dibujar las razones trigonométricas a partir de una relación entre catetos.

Otro ejemplo de ello es la actividad de medir terrenos irregulares, en este caso, se hizo una adecuación del micro-espacio de trabajo para inducir a los alumnos a las actividades topográficas que sirvieron de tránsito para institucionalizar el conocimiento en el salón de clase. Comprendió el uso de instrumentos de observación, métodos para visar ángulos a través de dichos instrumentos (grafómetro), medición de distancias inaccesibles en la forma en que lo hicieron los topógrafos durante el siglo pasado, etc. Actividades que, incluso, fueron comentadas en el contexto del aula a los estudiantes, para así dar paso a la transposición instrumental y de saberes en el micro-espacio, sin mediar en justificar su inmersión en este último (Camacho, Sánchez, Engler y Valenzuela, 2013). La transposición del espacio real ideal del terreno al micro-espacio, resultado de la geometrización, se experimentó al confrontar el grafómetro con el uso del transportador y al cordel con la regla graduada.

Por su lado, la métrica de uso para el espacio real, se guarda a través de la escala utilizada durante la geometrización del micro-espacio. De aquí que esta última sea una actividad que se ubica en ambas experiencias.

Un tercer ejemplo de actividad de modelación (con la utilización del grafómetro), es aquella en la cual se pide a los estudiantes obtener ángulos para luego interpretar estos como la pendiente. Los

resultados indican la influencia que tiene en los estudiantes el método para encontrar la pendiente mediante los catetos de un triángulo rectángulo, y como ello no les permite reconocer la utilidad del ángulo medido.

Con la recreación en el aula de este tipo de actividades se pretende:

1. La búsqueda en la historia del espacio real de la ingeniería donde se ubica la práctica y se gestó el conocimiento.
2. El establecimiento de un micro-espacio de la práctica que responda a las expectativas propuestas. Este micro-espacio representa un modelo a escala del espacio real.

Después de la modelización, es necesario realizar actividades alternativas que refuercen los conocimientos adquiridos. La propuesta se basa en el diseño, aplicación y el control de las interacciones de los estudiantes durante su desarrollo.

A continuación se describen un ejemplo similar al anterior sobre las formas de modelación que toman lugar en el aula escolar, aunque en esta ocasión está dirigido a estudiantes de Ingeniería y alrededor de un contexto muy específico de drenado de un tanque. La modelación que tiene lugar es en un curso de Ecuaciones Diferenciales en una universidad pública del sureste de México.

Argumentaciones de los estudiantes en la modelación y experimentación de la ley de Torricelli

En esta experiencia abordaremos a la modelación matemática como una construcción del conocimiento de un individuo cuando se enfrenta a una tarea matemática en la que pone en juego su saber en la contextualización de fenómenos físicos. La finalidad es caracterizar los fenómenos físicos por medio de las prácticas sociales a fin de diseñar situaciones que involucren la modelación matemática en sus enfoques tanto numérico, gráfico y analítico con el propósito de construir un conocimiento matemático funcional que deberá integrarse a la vida para transformarla.

A partir del análisis de un desarrollo histórico del conocimiento matemático, de su inmersión en el sistema didáctico y de una caracterización de las producciones de los estudiantes, se identifican las prácticas de referencia arraigadas a la naturaleza de ese mismo conocimiento y se proponen secuencias didácticas de modelación matemática entendida como la reconstrucción de significados que dan forma a las situaciones que crean los humanos y que participan en ellas (Suárez y Cordero, 2008).

En el presente trabajo reportamos una experiencia didáctica del salón de clases de la asignatura de ecuaciones diferenciales de la carrera de ingeniería civil, la experiencia consiste en la comparación de la modelación matemática del teorema de Torricelli y el resultado de la experimentación de esta ley, en donde se calcula la variación de la columna de un líquido con respecto al tiempo, es decir, el caudal de salida de un líquido por un orificio, análogo a "La velocidad de un líquido en un recipiente, por un orificio, es la que tendría un cuerpo cualquiera, cayendo libremente en el vacío desde el nivel del líquido hasta el centro de gravedad del orificio".

El objetivo de la práctica en clase es verificar experimentalmente que se cumplen las condiciones para la aplicación de la ley de Torricelli y estudiar la relación entre el tiempo transcurrido y la altura de líquido en un depósito. Entre las contribuciones científicas de Torricelli, se halla que las velocidades del agua que sale de un tanque perforado son proporcionales a la raíz cuadrada de

las profundidades por debajo de la superficie libre de los orificios correspondientes (Levi, 1989; Zill, 2007).

En el trabajo se procedió con el siguiente procedimiento metodológico: se utilizó un recipiente con un orificio pequeño en la parte inferior para que fluyera el agua con una altura inicial de agua. En el experimento se realizó mediciones de tiempo por intervalos y la variación de la altura del agua en la cual se generó una tabla de valores para obtener su gráfica y hacer la comparación entre los cálculos analíticos y el experimental de la variación de la velocidad con respecto a la altura y obtener la comprobación del teorema de Torricelli.

Resultados preliminares del estudio

En la modelación matemática consideramos el área del bote y la sección transversal del orifico hecho en la parte inferior del recipiente: Ah = πrh2 área del orificio pequeño, Aw = πrw2 área superior del bote. Por tanto el modelo matemático es $\frac{dh}{dt} = -\frac{A_h}{A_w}\sqrt{2gh}$

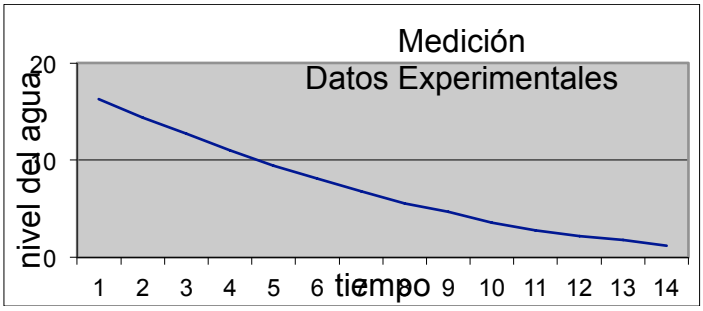
Considerando la condición inicial, para el tiempo $t = 0$ segundos y la altura de agua en bote es de 16.3 centímetros. La constante de integración es $c = 8.074651694$

Considerando la condición inicial, para el tiempo $t = 0$ segundos y la altura de agua en bote es de 16.3 centímetros, donde la constante de integración es $c = 8.074651694$. Por tanto, en la tabla 1, se tienen los datos de las mediciones obtenidas de la práctica (ver gráfica 1) y los datos calculados en forma analítica (ver gráfica 2).

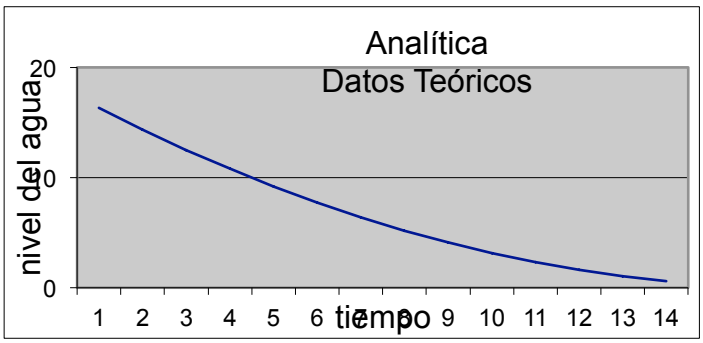
Tabla 1. Valores experimentales y teóricos

t (seg)	Altura del agua (cm)	
	Datos experimentales	Analítica
0	16.3	16.3
5	14.4	14.3354877
10	12.7	12.4970804
15	11	10.7847778
20	9.45	9.19858018
25	8.1	7.73848738
30	6.8	6.40449945
35	5.55	5.19661638
40	4.7	4.11483817
45	3.6	3.15916483
50	2.8	2.32959634
55	2.2	1.62613272
60	1.8	1.04877397
65	1.2	0.59752008

Gráfica 1. Representación de las mediciones.



Gráfica 2. Representación de datos teóricos



En las argumentaciones de los estudiantes dicen que “al culminar el proceso experimental de la ley de Torricelli, y de realizar los cálculos analíticos con la ecuación diferencial que esta nos proporciona, concluyen que esta ley es totalmente cierta, pues los resultados obtenidos en la práctica se asemejan a los cálculos analíticos, al mismo tiempo estamos consientes de que no es posible llegar a tener los resultados de la práctica idénticos al proceso analítico, ya que siempre hay un rango de error en el que influyen diversos factores, pero los resultados nos parecen satisfactorios, porque tomando en cuenta estos factores el experimento aún se acercó mucho al valor real. Este tipo de actividades refuerzan nuestro aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en la modelación matemática y su experimentación”. El comentario que hacen los estudiantes sobre los errores de medición es debido a que el experimento fue realizado en forma rudimentaria, es decir, con materiales hechizos y no en un laboratorio.

Reflexiones y conclusiones preliminares del trabajo de Hernández (2015)

El presente trabajo reporta una experiencia didáctica del salón de clases de la asignatura de ecuaciones diferenciales de la carrera de ingeniería civil, la experiencia consiste en la comparación de la modelación matemática del teorema de Torricelli y el resultado de la experimentación de esta ley, en donde se compara los datos experimentales y los datos

calculados teóricamente de la variación de la columna de agua con respecto al tiempo, es decir, el caudal de salida de un líquido por un orificio.

Al culminar el proceso experimental de la ley de Torricelli, y de realizar los cálculos analíticos con la ecuación diferencial que esta nos proporciona, el equipo puede concluir que esta ley es totalmente cierta, pues los resultados obtenidos en la práctica se asemejan a los cálculos analíticos, al mismo tiempo estamos conscientes de que no es posible llegar a tener los resultados de la practica idénticos al proceso analítico, ya que siempre hay un rango de error en el que influyen diversos factores, pero los resultados nos parecen satisfactorios, porque tomando en cuenta estos factores el experimento aún se acerco mucho al valor real.

La experiencia que se aporta es que como profesores debemos de buscar alternativas de enseñanza aprendizaje con la finalidad de que los estudiantes realicen modelación matemática y comprueben experimentalmente el comportamiento del fenómeno físico. Finalmente deseamos resaltar en este escrito una referencia importante en un curso de ED aunque en esta ocasión en un contexto diferente en una universidad privada del noreste de México.

Sobre formas de diversas de modelación en un curso de ED

En la misma tónica del trabajo presentado por Hernández, desde el año 2010 se ha trabajado de manera importante en el diseño de un curso de ED basado en la modelación y simulación de fenómenos reales (Rodríguez, 2015), de naturaleza física y social. Hemos reconocido al igual que el trabajo de Ismael Arcos previamente presentado, el hacer una distinción importante entre la Matemática que necesita aprender un futuro ingeniero respecto a su funcionalidad, el uso de las nociones matemáticas como herramientas para entender su realidad. Por otro lado, se ha trabajado principalmente en ambientes de aprendizaje activo (Zavala, Domínguez y Rodríguez, 2013) donde otras competencias transversales serán de gran valor para la formación del futuro ingeniero como las habilidades de comunicación, de trabajo en equipo, de aplicar conocimiento y otras. Por otro lado, se ha identificado de manera importante a la modelación como un eje transversal para la enseñanza de un curso de Ecuaciones Diferenciales, así como la simulación computacional asociada. Por lo anterior, las competencias de uso de tecnología diversa en los estudiantes es de gran valor para nosotros. Se comparte a continuación una lista donde se proponen diversos usos de distintas tecnologías en función de qué tanto ésta permite al estudiante acercarse a la realidad que pretende comprender y modelar.

Los usos son:

- Experimentación a través de sensores, como el ejemplo mostrado por Hernández
- Laboratorios Remotos
- Uso de video análisis para modelar la realidad de manera diferente (no directamente pero a través del uso de software como Tracker)
- Uso de simuladores predeterminados pero orientados a un fin en particular, como PhET para el caso de las ED
- Uso de simuladores de otra naturaleza como lo es Vensim, software especializado en modelar con un lenguaje especial

De las cuestiones que podemos capitalizar del trabajo ya planteado anteriormente, es que la enseñanza de las Matemáticas si deben estar ligadas a una funcionalidad del conocimiento en áreas disciplinares.

CONCLUSIONES FINALES

El modelar actividades de enseñanza a través de problemas específicos de la matemática escolar, favorece en los estudiantes la comprensión de conceptos a través de instrumentos que se simulan a partir de situaciones de la vida cotidiana dentro de la propia ingeniería. En este sentido se establecen relaciones experimentales entre actividades prácticas y la forma en que los estudiantes las abordan.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Camacho, A., Sánchez, B.I., Blanco, R y Cuevas, J. H. (2011). Geometrización de una porción del espacio real. *Educación Matemática, 23 (3)*.

Camacho, A., Sánchez, B.I., Engler, A. y Valenzuela, V. (2013). Organización didáctica de un embrión del gradiente. En: L. Sosa, J. Hernández y E. Aparicio (Eds.), *Memorias de la XVI Escuela de Invierno de Matemática Educativa*, 127-136, México: Red de Centros de Investigación en matemática Educativa A.C.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/

Levi, E. (1989). *El agua según la ciencia*. México: Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. Ediciones Castell Mexica, S. A.

Rodríguez, R. (2015). A Differential Equations Course for Engineers through Modelling and Technology. In G. Stillman, W. Blum & M. S. Biembengut (Eds), *Mathematical Modelling in Education, Research and Practice. Cultural, Social and Cognitive Influences*, 545-555. New York: Springer.

Rodríguez, R., Sánchez, I. y Camacho, A. (2015). Formación de Ingenieros desde la Matemática Educativa: aportes y retos. En: F. Rodríguez y R. Rodríguez (Eds.), *Memorias de la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa.* La Profesionalización Docente desde los Posgrados de Calidad en Matemática Educativa, 440-448. Oaxaca: Red de Centros de Investigación en matemática Educativa A.C.

Rodríguez, R., Sánchez, I., Camacho, A., Arcos, I., Hernández, H., de la Cruz, A., Covián, O. Y Cajas, F. (2016, en proceso). Formación de Ingenieros y técnicos desde la Matemática Educativa. En F. Rodríguez y R. Rodríguez (Eds.). *Memorias de la XVIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa* Oaxaca: Red de Centros de Investigación en matemática Educativa A.C.

Rugarcía, A. (1997). La formación de ingenieros. México: Universidad Iberoamericana.

Sánchez, B.I., Camacho, A. y Moreno, G. (2010). Construcción de razones trigonométricas en un microespacio de trabajo. En Rodríguez, E. Aparicio, M. Jarero, B. Ruiz, F. Rodríguez, J.

Lezama y M. Solís (Eds.), *Memorias de la XIII Escuela de Invierno de Matemática Educativa,* 23-28*. México:* Red de Centros de Investigación en matemática Educativa A.C.

Suárez, L. y Cordero, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias 3(1),* 51-58. Recuperado de http://www.exa.unicen.edu.ar/reiec/

Zavala, G., Domínguez, R. y Rodríguez, R. (2013). *ACE: Innovative Educational Model to Teach Physics and Mathematics for Engineering Students*. American Society of Engineering Education (ASEE) Annual Conference and Exposition, Conference Proceedings. Atlanta, Estados Unidos. Recuperado de: http://www.asee.org/public/conferences/20/papers/7988/view

Zill, D. (2007). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*. México:

LA FUNCIÓN LINEAL EN EL BACHILLERATO TECNOLÓGICO: UN PUNTO DE VISTA DESDE EL CURRÍCULUM

Rebeca Flores García
CICATA-IPN (México)
rebefg@gmail.com

Palabras clave: Currículum, función lineal, profesor, bachillerato tecnológico

Key words: Curriculum, linear function, teacher, technological high school

RESUMEN: Los estudios relacionados con el desarrollo curricular ofrecen alternativas curriculares para un sistema educativo y en los últimos años se ha centrado en el profesor, de ahí la importancia de esta investigación, la cual pretende analizar y describir las transformaciones que construyen alrededor del concepto de función lineal tres profesores que laboran en el nivel medio superior técnico en México. Para desarrollar el estudio se acude al estudio de caso, el cual está dirigido a comprender las dinámicas presentes en contextos muy particulares, adoptando distintos métodos para la recopilación de evidencia. Se pretende profundizar entre lo que sucede entre el currículum escrito y el currículum implementado; para ello el estudio utilizó como marco de análisis el modelo propuesto por Stein, Remillard y Smith (2007) el cual está integrado por cuatro componentes: currículum escrito, currículum planeado, currículum implementado y el aprendizaje de los estudiantes.

ABSTRACT: Studies related to curriculum development offer curricular options for an educational system and in recent years have focused on the teacher, hence the importance of this research, which aims to analyze and describe the transformations built around the concept of linear function three teachers who work in the technical high school level in Mexico. To develop the study comes to the case study, which is aimed at understanding the dynamics present in very particular contexts, adopting different methods for gathering evidence. It aims to deepen between what happens between the written curriculum and implemented curriculum; for this study used as the analytical framework proposed by Stein, Remillard and Smith (2007) model which consists of four components: written curriculum, planned curriculum, implemented curriculum and student learning.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El estudio del concepto de función en la enseñanza de las matemáticas en el nivel medio superior desempeña un papel importante en el aprendizaje de los estudiantes, no sólo por estar relacionado con temas de otras asignaturas, sino porque permite representar situaciones reales (Hitt, 2002). Cabe resaltar además, los dilemas que se gestan cuando se emprenden estudios ligados al concepto de función o a un tipo función, para el caso que nos ocupa la focalización se hará sobre la función lineal. Por ejemplo, Díaz (2008) advierte que en el aspecto curricular la noción de función es una hebra que atraviesa desde los niveles básicos hasta los universitarios, advirtiendo además de las dificultades que enfrentan los estudiantes por entender este concepto; también señala cómo esta noción ha generado un conjunto creciente de investigaciones, desde los que estudian los problemas de su enseñanza, las dificultades de su aprendizaje, los que proponen marcos teóricos, hasta los que se centran en la multiplicidad de interpretaciones de la noción de función.

Diversos son los autores que se han dedicado a trabajar sobre la noción de función. Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) quienes en la década de los ochenta realizaron una revisión bibliográfica que cubre una década aproximadamente, en la cual muestran las dificultades que los estudiantes enfrentan al tratar de conceptualizar la idea de función, cuestiones ligadas a la correspondencia, la linealidad, la representación de funciones, además de su lectura e interpretación. Por otro lado, en la investigación desarrollada por Birgin (2012) se reconocen a las funciones lineales como una idea compleja, de múltiples facetas cuyo poder y riqueza permean casi todas las áreas de la matemática. Agregando que dadas sus diversas aplicaciones en el mundo real, refuerzan la comprensión de temas más avanzados como aquellos provenientes del Cálculo.

Si bien es cierto, el concepto de función lineal ha sido ampliamente estudiando desde una perspectiva cognitiva, también es cierto que existen ámbitos desde los cuales aún no se han estudiado, tal es el caso de esta investigación, la cual se plantea como pregunta de investigación lo siguiente: ¿Cuáles son las transformaciones que el profesor de matemáticas de bachillerato tecnológico genera al abordar el concepto de función lineal en el curso de Pensamiento algebraico y de funciones? Este curso es impartido en el segundo semestre del plan de estudios propuesto en el bachillerato tecnológico.

INVESTIGACIONES ALREDEDOR DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN LINEAL EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

En esta sección se pretende dar cuenta de la naturaleza de algunos estudios que proveen información relacionada con el objeto matemático que este estudio se presenta, mostrando parte de la tendencia de las investigaciones generadas en los últimos años.

El trabajo generado por Even (1993) se muestra un estudio relacionado con 152 profesores de nivel secundario, en el que se explora el conocimiento de un contenido pedagógico, en este caso se trata de la enseñanza del concepto de función. El análisis evidencia que muchos de los sujetos no tenían una concepción actualizada de la función. La apreciación de la naturaleza arbitraria de funciones faltaba, y muy pocos podrían manifestar la trascendencia y el origen de la exigencia univalencia. Se trata entonces, de una concepción limitada y que ha influenciado su pensamiento pedagógico. Mientras que en la investigación desarrollada por Lloyd y Wilson (1993) se exponen ideas ligadas al impacto de las concepciones de los profesores en relación a funciones y su

implementación en una reforma curricular. Por otro lado, Gilbert (2003) plantea una experiencia de desarrollo profesional, relacionada con un análisis de estudios de caso basados en vídeo para los profesores de matemáticas de secundaria en funciones lineales y en el estudio propuesto por Chávez, Grouws, Tarr, Ross y McNaught (2009) se presentan hallazgos relacionados con profesores de matemáticas de secundaria en el uso de materiales curriculares, de manera particular tocan el contenido de la función lineal. Finalmente, en el estudio de Acosta (2011) se propone que la linealidad a través de sus significados, y su antecedente la proporcionalidad, son nociones que han evolucionado en la historia. Aseverando además que la didáctica de la matemática, no ha incorporado los elementos de vínculo entre nociones de linealidad, que se presentan entre temas de matemáticas, y mucho menos entre cursos. Como se plantea en estos estudios, aún prevalece un interés por estudiar el concepto de función lineal y esta investigación se propuso hacerlo desde el currículum.

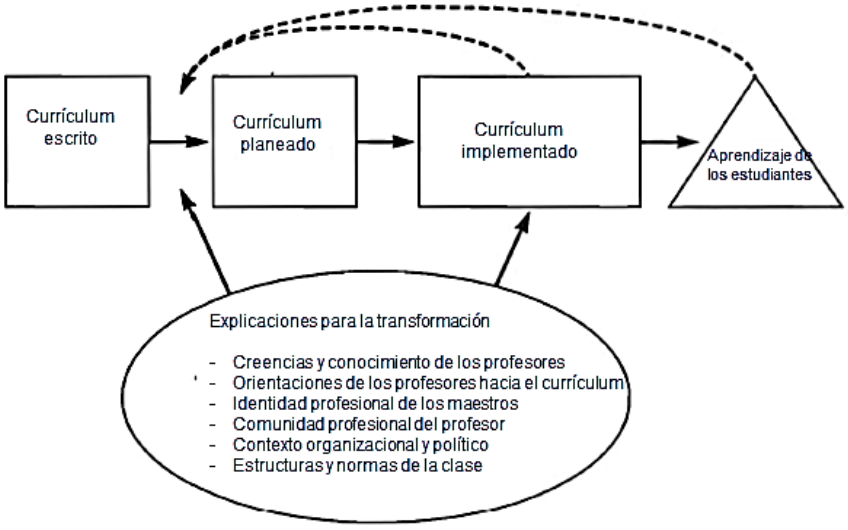
MARCO REFERENCIAL

La noción de currículum y la adopción de un modelo

La literatura reconoce que el concepto de currículum ha evolucionado. Por ejemplo, en el trabajo de Rico (1998) se advierte que desde la década de los sesenta predominaba un interés particular por el desarrollo de trabajos relacionados con el currículum, estableciéndose así el desarrollo de investigaciones en la matemática educativa y recalcándose los estudios longitudinales en trabajos más recientes y como los expuestos en Kilpatrick (1992). De ahí que Investigadores como Burkhardt (2014) coincidan en que el término currículum se utiliza con múltiples significados. Por su parte Hirsch y Reys (2009) utilizan el término currículum para referirse a la construcción teórica que incluye tanto lo que la sociedad valora y espera que se aprenda en un sistema escolar en términos de contenido matemático, así como los materiales utilizados por los profesores para impartir la enseñanza de las matemáticas a los estudiantes.

Para el desarrollo de este estudio se adoptó el modelo propuesto por Stein, Remillard y Smith (2007) el cual está compuesto por cuatro amplias categorías representadas en la Figura 1.

Figura 1. Modelo propuesto por Stein, Remillard y Smith (2007, p. 322).



A continuación, se describen las características de este modelo:

- El currículum escrito: Se refiere al plan de estudios, representado a través de los materiales curriculares y todos aquellos recursos didácticos que le sean conferidos por parte del subsistema escolar correspondiente.
- Currículum planeado: Esta componente considera las intenciones del profesor, es decir; las actividades que diseña y planea para llevarlas al aula.
- Currículum implementado: Aquí se contemplan todos los procesos involucrados mientras se desarrollan las actividades en el aula.
- Aprendizaje de los estudiantes: Esta componente tiene que ver con el aprendizaje que logran los estudiantes.

Cabe mencionar que sólo se utilizaron tres de las cuatro componentes del modelo, ya que el estudio está centrado en el profesor del nivel medio superior técnico. Este modelo provee elementos que ningún otro modelo procura, tal es el caso de la segunda componente, la del currículum planeado, ya que recupera las intenciones, ideas y actividades que el profesor construye, así como los recursos que utiliza. Nótese además que existen vínculos entre las componentes que permiten profundizar un poco aspectos relacionados con las transformaciones generadas por el profesor alrededor de la función lineal, tal es el caso de las creencias y conocimiento de los profesores, entre otros.

MÉTODO

Para desarrollar esta investigación, se recurrió al método de investigación denominado estudio de caso, el cual de acuerdo con Eisenhart (1989) se trata de una estrategia de investigación dirigida a comprender las dinámicas presentes en contextos muy particulares, adoptando distintos métodos para la recopilación de evidencia con el fin de describir, verificar o generar teoría. De acuerdo con Yin (2009) existen distintas fuentes de evidencia para desarrollar los estudios de caso, por ello es que en este estudio se recurrió a la revisión del programa de estudios oficial, la revisión de las planeaciones de los profesores y a la grabación de clases.

Este estudio se desarrolló en cinco etapas considerando el modelo propuesto por Stein et al (2007) para abordar los tres primeros componentes: currículum escrito, currículum planeado y currículum implementado.

- Etapa 1: Revisión de los documentos oficiales, estos incluyen documentos oficiales, guías de apoyo e incluso libros de texto que no necesariamente son considerados como oficiales.
- Etapa 2: Elaboración y aplicación de un instrumento para identificar información general de los tres profesores involucrados en el estudio.
- Etapa 3: Recopilación de los materiales de apoyo que el profesor utiliza para el desarrollo de su curso denominado Pensamiento algebraico y de funciones.
- Etapa 4: Grabaciones de clase cuando los profesores aborden el tema en cuestión durante su curso.
- Etapa 5: Construcción de un marco de análisis y las categorías a utilizar en el análisis de la información.

RESULTADOS INICIALES

a) En relación al currículum oficial:

El plan de estudios oficial del curso Pensamiento Algebraico y de Funciones (2009), en dos de las cuatro unidades se presentan elementos de la función lineal. De manera implícita se detectaron cinco representaciones de la función lineal que el profesor podría considerar, una de ellas es la representación verbal, otra lo tabular, lo algebraico, lo gráfico y como ecuación.

b) En relación al currículum planeado:

En la revisión hecha a las planeaciones de los tres profesores involucrados en el estudio, se encontró que una de las profesoras (Profesora Lulú) propuso dos situaciones en las que aborda contenidos de la función lineal, la primera está relacionada con el rendimiento del combustible de un vehículo en el que involucra el manejo de nociones como plano cartesiano, función, graficación, tabulación y la segunda está referida al recorrido que realiza una atleta de la cual desprende preguntas que genera el despeje de la fórmula de velocidad para calcular distancias, la generación de una tabla de valores, una expresión algebraica además de una representación gráfica. El profesor (lo llamaremos profesor Israel) aun cuando si tiene sus planeaciones, no detalla las actividades a desarrollar, sólo coloca los contenidos propuestas en el programa oficial del curso y la profesora (la llamaremos Iris) no proporcionó sus planeaciones para ser revisadas.

c) Currículum implementado:

Para analizar el currículum implementado se realizaron 20 videograbaciones en las que los profesores presentaron elementos relacionados con la noción de función lineal y conceptos asociados. Dichas grabaciones se transcribieron en forma de registros de clase. Se detectó que los profesores utilizan varias representaciones de la noción de función y con respecto a la función lineal emergieron las siguientes: relación, correspondencia entre conjuntos, tabla de valores, pares ordenados, gráfica, relación entre variables, fórmula y ecuación. La que no aparece es la de caja negra: modelo de entrada – salida; la cual es requerida por los profesores en el nivel elemental más que en el nivel medio superior, sobre todo cuando se trabaja con actividades relacionadas con números desconocidos. Una de las representaciones que de manera natural es abordada por la profesora Lulú y el profesor Israel *fue la correspondencia entre conjuntos* –la cual no se incluye en el programa oficial del curso; es decir, ellos adicionaron esta representación para introducir el concepto de función e incluso esa representación les permitió distinguir a una función de una *relación*.

En cuanto a los elementos de la función lineal abordados por los profesores en las clases, ellos hicieron alusión al concepto de función, función constante, función lineal, dominio, codominio, rango, pendiente y valor de la ordenada al origen.

El siguiente fragmento ilustra cómo la profesora Lulú introduce el concepto de función lineal.

Transcripción 1. La profesora Lulú plantea una forma generaliza de la función lineal.

...

258. P: Entonces, es importante que lo tengan bien presente siempre, ¿sale?
259. P: Otra de ellas es la función lineal, las funciones lineales tienen una forma generalizada que puede ser $y = mx \pm b$, ¿sí? Esas son las funciones lineales.
260. P: m nos indica la pendiente y.
261. P: b el desplazamiento que va a tener una recta, ¿sí? Porque su gráfica de estas va a ser una línea recta, ¿sale?, bueno.
262. P: Es una función lineal. ¿Cuál puedo contar como una función lineal?
263. P: A pues $y = 5x$, $y = 8x$, $y = -3x$, $y = 12x + 12$, $y = -5x + 8$; todas estas son funciones lineales. ¿Sale?

…

Transcripción 2. El profesor Israel esboza elementos de la función lineal.

En este otro fragmento se ilustra lo que el profesor Israel les plantea respecto a la función lineal

…

258. Y con base en su investigación, si graficamos una función lineal ¿qué ocurre?
259. Ao: Pasa por el origen.
260. P: Pasa por el origen, ¿qué más?
261. Ao: Es un ángulo de cuarenta y cinco grados.
262. P: Es un ángulo de cuarenta y cinco grados, bueno… en este caso. [Señala a $y = x$]
263. P: Y si yo le pongo que $y = x + 1$… digo que este es, más uno.
264. P: ¿Qué ocurre?
265. Ao: Sube arriba.
266. P: Sube, entonces ya no pasa por el origen… o su origen va a estar ¿en dónde?
267. Ao: En el uno.
268. Aa: En el uno.
269. P: En el uno.
270. P: Va a estar en una posición arriba.
271. P: ¿Y dejaría de ser lineal si no pasa por el cero?
272. Ao: No.
273. Aa: Pero, ¿podría ser una recta?
274. P: Es una recta, muy bien.
275. P: Entonces, se podría decir que la función lineal forma una recta o su comportamiento es una línea recta.
276. P: Ok. En este caso, sabemos que tiene cierta inclinación, ¿qué más podemos rescatar de la tarea?

277. P: A ver, quién hizo… las personas que hicieron la tarea, díganme.
278. Ao: Tanto x como y son proporcionales.
279. P: Siempre son proporcionales. Ok, se cumple una razón, ahí hay una razón.
280. P: De acuerdo a… por ejemplo, aquí; en todos los valores de y siempre van a ser igual a x.

…

Como se observa en cada fragmento de las transcripciones, ambos profesores plantean elementos distintos en relación a la función lineal. En lo que respecta a la profesora Lulú, la forma de plantear la forma generaliza de la función lineal ($y = mx \pm b$) la cual enfatiza con el manejo de dos signos, el positivo y el negativo, esto sugiere posibles dificultades en la interpretación de $y = mx + b$. Sin embargo, les menciona a que se refiere cada componente de la expresión, la cual aborda tanto a la pendiente como la ordenada al origen aunque no las profundiza, al menos no en este fragmento que se presenta.

En el caso del profesor Israel, realiza algunas afirmaciones que generan algunas contradicciones. Tal es el caso de lo establecido en los renglones 277-280, en el que se afirma que si la función pasa por el origen o si pasa fuera del origen tanto las variables x como y se mantienen proporcionales. Aquí valdría la pena cuestionar al profesor la interpretación que hace en relación a esta aseveración. Ya que el estudio de las funciones lineales puede hacerse desde lo que establece la Geometría Analítica y el Cálculo y la que proviene desde el Álgebra Lineal.

Cuestiones como estas y otras, han ido emergiendo en el estudio, el cual sigue en proceso y pretende generar una aportación con una mirada distinta a las que se han desarrollado, estudiar a la función lineal desde el currículum y desde el profesor, ya qué en el caso de México, hasta hace algunos años; la inserción a la docencia en el nivel medio superior no requería una formación específica, bastaba con tener una carrera universitaria para impartir clases de matemáticas. De ahí que, un ingeniero o un arquitecto podrían dar clases de matemáticas. Tal es el caso de los profesores involucrados en el estudio. Su formación en la docencia ha sido sobre la marcha, conforme a los requerimientos de sus instituciones, sólo una de las profesoras estudió en una escuela normal.

A MANERA DE CONCLUSIÓN

Los resultados indican la existencia de grupos de investigadores interesados en desarrollar modelos teóricos para estudiar el currículum de matemáticas, le brindan un lugar muy específico al libro de texto como lo señalan Hirsch y Reys (2009); otros los incluyen como parte del currículum oficial como el modelo propuesto por Flanders (1994). Además, se reconoce que el objeto función lineal tiene un papel específico dentro del currículum, que quizá el profesor no necesariamente lo identifique: uno proveniente de la Geometría Analítica y el Cálculo y otro proveniente del Álgebra lineal.

Por otro lado, la formación de los profesores involucrados en el estudio, deja entrever la influencia de su entorno, así como elementos de su formación (en el contenido matemático) y el cómo estas influyen en el tratamiento que dan a la función lineal.

Una hipótesis que se mantiene es que lo que se establece en el currículum oficial, no se desarrolla tal cual en la implementación en el aula de clase, he ahí el papel del docente, sus ideas, sus pensamientos, sus concepciones y el cómo estos influyen en su tratamiento del objeto matemático en cuestión.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acosta, J. (2011). *La noción de linealidad. Una aproximación epistemológica, didáctica, cognitiva y sociocultural.* Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.

Birgin, O. (2012). Investigation of Eighth-Grade Students' Understanding of the Slope of the Linear Function. *Boletim de Educação Matemática* 26 (42), 139-162.

Burkhardt, H. (2014). Curriculum design and systemic change. En Y. Li & G. Lappan (Eds.), *Mathematics curriculum in school education*, (pp. 13-34). Dordrecht: Springer. doi: 10.1007/978-94-007-7560-2

Chávez, Ó., Grouws, D.A., Tarr, J.E, Ross, D.J., y McNaught, M.D. (2009). Mathematics Curriculum Implementation and Linear Functions in Secondary Mathematics: Results from the Comparing Options in Secondary Mathematics Project. *American Education Research Association, San Diego, CA*. Recuperado de: http://cosmic.missouri.edu/aera09/ChavezGrouwsTarrRossMcNaught2009.pdf

Departamento de Bachillerato Tecnológico (2009). Programa de estudios: Pensamiento algebraico y de funciones. México.

Díaz, J.L. (2008). El concepto de función. Investigaciones y enseñanza. En E. Rodríguez, S. Sosa, F. Luque, C. Robles y M. Urrea (Eds). *Memorias de la XVIII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas 27* (p.p. 35-40). Sonora: Mosaicos Matemáticos.

Eisenhardt, K. M. (1989). Building theories from case study research. *Academy of Management Review*, *14*(4), 532-550.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education 24*(2), 94-116.

Flanders, J. R. (1994). Textbooks, teachers, and the SIMS test. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(3), 260-278.

Gilbert, M. (2003). *A professional development experience: An analysis of video case-based studies for secondary math teachers in linear functions*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Washington

Hirsch, C. y Reys, B. (2009). Mathematics curriculum: A vehicle for school improvement. *ZDM*, *41*(6), 749-761. doi: 10.1007/s11858-009-0218-0

Hitt F. (2002). *Funciones en contexto.* México: Pearson Educación (Prentice Hall).

Kilpatrick, J. (1992). The history of research on mathematics education. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* (pp. 3-38). New York: Macmillan.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. M. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.

Lloyd, G. W. y Wilson, M. (1998). Supporting innovation: the impact of a teacher's conceptions of functions on his implementation of a reform curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education 29* (3), 248-274.

Rico, L. (1998). Concepto de currículum desde la educación matemática. *Revista de Estudios Curriculares*, *1*(4), 7-42.

Stein, M. K., Remillard, J., y Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 319-370). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Yin, R. K. (2009). *Case study research. Design and methods.* Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y LA ENSEÑANZA DE TENSIONES EN EL LABORATORIO DE FÍSICA EN EL BACHILLERATO TECNOLÓGICO

Pedro Javier Ubaldo Salinas, Liliana Flores Jiménez, Ana María Ojeda Salazar
CECyT No 4 "LC", DME Cinvestav, Instituto Politécnico Nacional (México)
pubaldos@ipn.mx, lflores@ipn.mx, amojeda@cinvestav.mx

Palabras clave: ecuaciones lineales, tensiones, equilibrio.

Key words: linear equations, tensions, equilibrium

RESUMEN: En el marco de un proyecto interinstitucional sobre docencia e investigación en matemática educativa, se indagó con estudiantes de tercer semestre en el laboratorio de física su comprensión de las tensiones en un cuerpo suspendido en equilibrio y de la resolución del sistema de ecuaciones que lo modela. Aunque los estudiantes comprendieron el fenómeno físico, no dieron sentido al modelo matemático. Los resultados obtenidos apuntan a la necesidad de investigar acerca de la forma en que la enseñanza pueda hacer efectiva para el estudiante la interrelación entre las distintas Unidades de Aprendizaje de las diferentes disciplinas, con miras al logro de los objetivos de los Programas de Estudios del bachillerato tecnológico.

ABSTRACT: In the framework of an inter-institutional project in high school mathematics education, a research was carried out about third semester students' understanding of the tensions in a body suspended in equilibrium and the resolution of the corresponding modeling system of linear equations. Although these students understood the physical phenomenon, they did not understand the meaning of the mathematical model. The results obtained point to the need of searching a way in which the teaching becomes effective for the students to grasp the interrelationship between the different subjects from distinct disciplines, in order to achieve the aims of the technical high school syllabus.

INTRODUCCIÓN

En el marco de un proyecto interinstitucional sobre docencia e investigación en matemática educativa, se indaga acerca de la comprensión de conceptos de matemáticas de los estudiantes, revelada cuando los aplican para describir fenómenos físicos que se estudian como tal, de forma tradicional, en el laboratorio de Física. Informamos aquí de la comprensión de los estudiantes de tercer semestre de bachillerato tecnológico del fenómeno de un cuerpo suspendido en equilibrio mediante dos fuerzas de tensión y de su descripción matemática mediante un sistema de ecuaciones lineales, luego de la enseñanza del tema en el curso de Física I (DEMS, 2009).

MARCO DE REFERENCIA

El tema de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas se incluye en el programa de estudios del bachillerato tecnológico en la unidad de aprendizaje de *Álgebra* para el primer semestre (DEMS, 2009). Le siguen las unidades *Geometría y Trigonometría* para el segundo semestre y *Geometría Analítica* para el tercero. Esta secuencia lleva a suponer que el estudiante del tercer semestre ha alcanzado un cierto dominio de las expresiones simbólicas matemáticas. También para el tercer semestre se prescribe en el curso de Física I la impartición del tema de tensiones, antecedida por la del tema de descomposición de fuerzas en sus componentes rectangulares; la enseñanza teórica se complementa con la experimental respectiva en el laboratorio mediante el experimento "mesa de fuerzas". Con los antecedentes en Álgebra, se espera que en Física I el estudiante utilice el sistema de ecuaciones lineales para el cálculo de las tensiones de las fuerzas que soportan al peso suspendido en equilibrio estático. La resolución del sistema de ecuaciones lineales permite obtener el valor de cada tensión aplicada a las cuerdas que mantienen al cuerpo suspendido en equilibrio. No obstante, ya Barojas, Covarrubias, Gallegos, López y Vega han señalado que los estudiantes utilizan una representación *escolarizada* de los conceptos científicos "para dar respuesta a las demandas escolares y que sólo forman parte de su memoria y que manifiestan sólo en procesos declarativos y operacionales" (1997, p. 217).

El orden mismo de las asignaturas transgrede el de la evolución del conocimiento, señalada por Born (1956) con su origen en la experiencia con problemas o preguntas referidas a situaciones concretas, para culminar con su formulación matemática abstracta, no al revés. En la misma línea, en su propuesta psicogenética de la evolución del pensamiento del individuo, Piaget e Inhelder (1985) han señalado que los esquemas formales se construyen progresivamente a partir de los anteriores, en el mismo orden y sin que pueda omitirse alguno de ellos, y subrayaron la importancia de la acción del individuo en situaciones concretas del entorno para dar lugar a la abstracción. No obstante, misma la enseñanza tradicional de la Física incluye primero la descripción matemática del fenómeno y luego su confirmación experimental (DEMS, 2009).

MÉTODOS E INSTRUMENTOS

La Tabla 1 muestra la correspondencia de los contenidos, de interés aquí, de la asignatura de Matemáticas (M) con el tema de Física (LF) y sus semestres respectivos en números romanos. Si bien en el segundo semestre también se incluye el tema de funciones trigonométricas en la unidad de aprendizaje de *Geometría y Trigonometría*, su estudio es anterior al tema de tensiones en Física, por lo que se puede suponer un dominio de estos temas por parte de los estudiantes.

Tabla 1. Articulación de contenidos

Matemáticas (M)	Competencia Particular: Contenido	Semestre		Laboratorio de Física (LF) Practicario
		M	LF	
Álgebra	**CP2**: Sistema de ecuaciones lineales	I	III	Física I (4): 4-Fuerzas concurrentes Física I (5):5-Resultante de Varias Fuerzas concurrentes
Geometría y Trigonometría	**CP3**: Emplea funciones trigonométricas para la resolución de triángulos	II	III	Física I (6): 6-Fuerzas concurrentes Tensiones

Durante los primeros 30 minutos previos al comienzo de la enseñanza de tensiones, a un grupo de 24 alumnos se le aplicó el cuestionario C_1, con el fin de obtener datos de sus conocimientos previos del tema por enseñar. C_1 planteó cinco preguntas: cuatro con preguntas abiertas y un problema de resolución de sistema de ecuaciones lineales. La estrategia de enseñanza fue la prescrita por el programa de estudios respectivo (DEMS, 2009); se basó en el libro de texto recomendado (Pérez, 2011) y consistió en tres sesiones de aula de una hora cada una y otra de laboratorio de dos horas, videograbada, con guión (Práctica propuesta) y hoja de control para el registro de los cálculos de las magnitudes de las tensiones, así como de las conclusiones de la experimentación. Luego se aplicó el cuestionario C_2, impreso, que planteó seis reactivos, de los cuales uno fue de resolución de un sistema de ecuaciones y cinco fueron preguntas abiertas; la contestación duró 50 minutos. El objetivo de C_2 fue obtener datos de la comprensión de los estudiantes del fenómeno de tensiones y de su descripción matemática al término de la enseñanza del tema.

Para el cuestionario C_1, los reactivos (en segundo renglón de la Tabla 2) fueron:

1. ¿Qué entiendes por equilibrio? ,

2. ¿Cuándo está un cuerpo en equilibrio?,

3. ¿Cuáles son las condiciones de equilibrio?,

4. Explica qué es una fuerza de tensión,

5. Resolución del sistema de ecuaciones lineales.

Para el cuestionario C_2, los reactivos (en primera columna de la Tabla 2) fueron:

1. *¿Qué condiciones requiere el sistema mostrado en la figura para estar en equilibrio?,*
2. *¿Cómo determinas el valor de las tensiones?,*
3. *Si los ángulos de la figura mostrada fueran iguales ¿Cómo serían las tensiones? Explica por qué,*
4. *Plantea el modelo matemático que describe la situación de equilibrio del sistema en la figura,*
5. *Resuelve el modelo planteado en tu respuesta anterior,*
6. *Traza el diagrama de cuerpo libre correspondiente al siguiente sistema.*

Durante el desarrollo de las sesiones del estudio de tensiones se reforzaron los conceptos de descomposición de vectores en sus componentes rectangulares y obtención de la resultante a partir de dos vectores ortogonales. A través de la resolución de un problema de tensiones, se planteó la necesidad de replantear un sistema de ecuaciones lineales, para la obtención de la tensión en cada cuerda.

Para desarrollar la práctica el grupo se organizó en equipos de seis estudiantes; uno de ellos colocó el transportador metálico en la intersección de las cuerdas y el peso suspendido, después hizo la lectura de los ángulos; otro revisó que las cuerdas estuvieran en las poleas; otro leyó el valor del peso del cuerpo suspendido; los demás estudiantes registraban los datos en sus hojas de control. Con esos datos efectuaron el planteamiento del sistema de ecuaciones lineales para su resolución. En la realización de las operaciones se utilizó calculadora (véanse las Figuras 1 y 2).

Luego, en sesión de aula se aplicó el cuestionario C_2, impreso, que planteó seis reactivos, de los cuales uno fue de resolución de un sistema de ecuaciones, cuatro fueron preguntas abiertas y otro para la realización de un diagrama a partir de un sistema lineal de dos ecuaciones (véase cuadro dos, renglón siete); la contestación duró 50 minutos. El objetivo de C_2 fue obtener datos de la comprensión de los estudiantes del fenómeno de tensiones y de su descripción matemática al término de la enseñanza del tema.

Figura 1. Resolución del sistema planteado

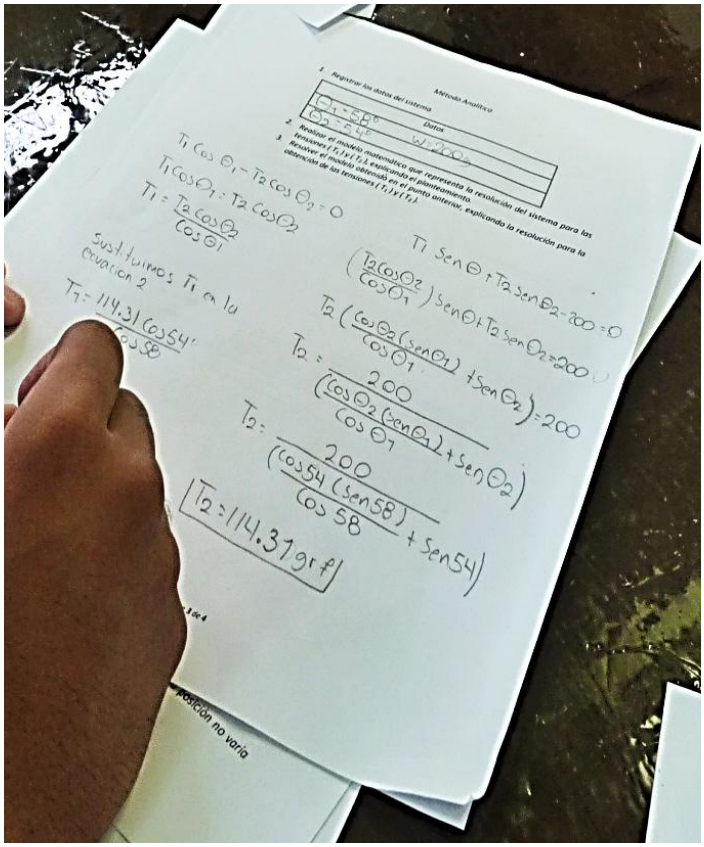


Figura 2. Resultados de mediciones y conclusiones en la hoja de control

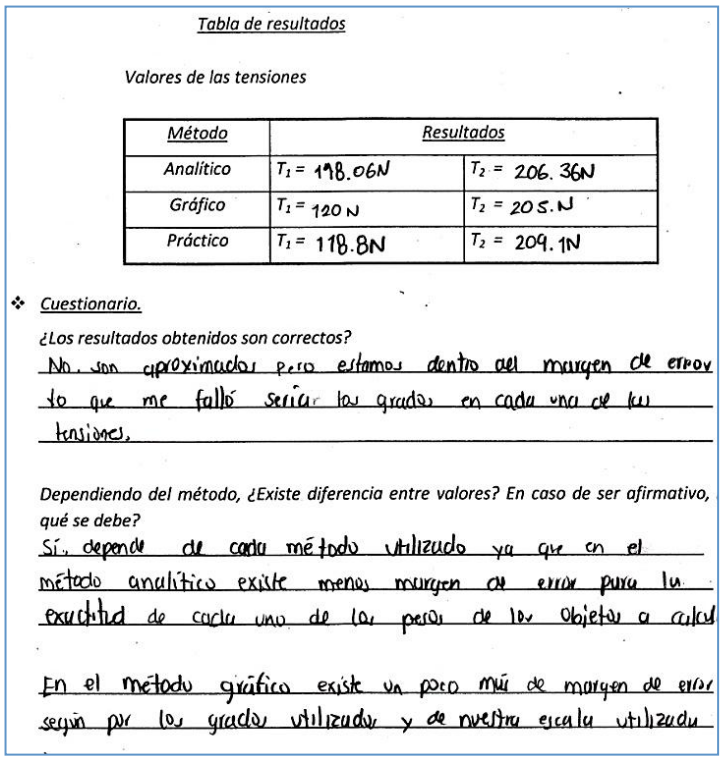


Tabla de resultados

Valores de las tensiones

Método	*Resultados*	
Analítico	T_1 = 198.06N	T_2 = 206.36N
Gráfico	T_1 = 120 N	T_2 = 205 N
Práctico	T_1 = 118.8N	T_2 = 209.1N

❖ *Cuestionario.*

¿Los resultados obtenidos son correctos?

No, son aproximados pero estamos dentro del margen de error lo que me falló sería los grados en cada una de las tensiones.

Dependiendo del método, ¿Existe diferencia entre valores? En caso de ser afirmativo, qué se debe?

Sí, depende de cada método utilizado ya que en el método analítico existe menos margen de error para la exactitud de cada uno de los pesos de los objetos a calcular

En el método gráfico existe un poco más de margen de error según por los grados utilizados y de nuestra escala utilizada

La Tabla 2 resume los reactivos de cada cuestionario, su correspondencia por contenido común y las frecuencias de respuestas correctas proporcionadas a cada reactivo, para C_1 en el primer renglón y para C_2 en la celda que corresponde al contenido común con el reactivo en C_1.

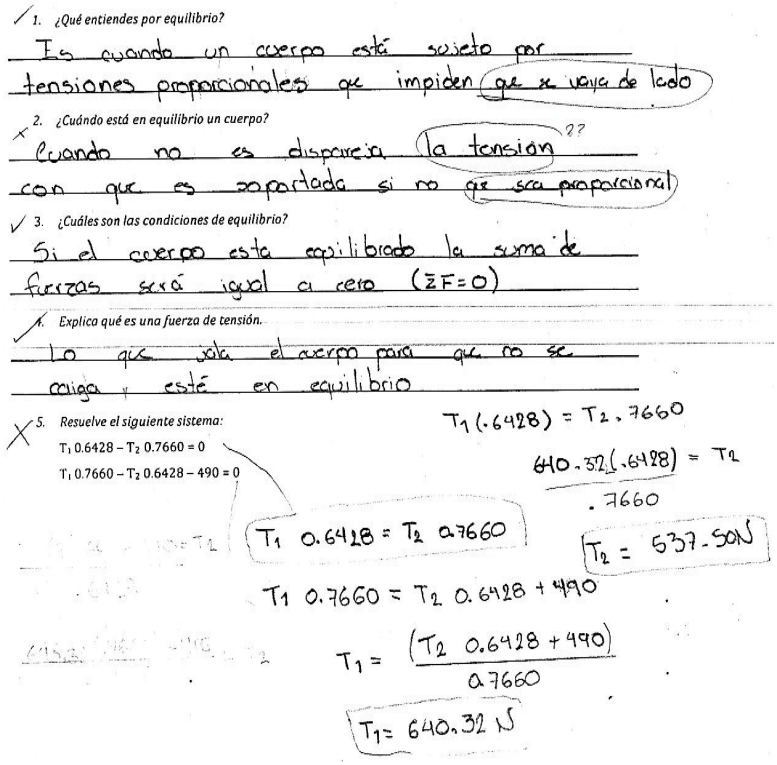
Tabla 2. Frecuencias de respuestas correctas a los reactivos de C1 y de C2.

Reactivos						
C_1 / C_2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\%C_2$
	19	19	10	14	2	
1		22				92%
2			20			83%
3					22	92%
4			14			58%
5					12	50%
6				10		42%
$\%C_1$	79%	79%	42%	58%	8%	

Antes de la enseñanza, en C_1, los alumnos expresaron una noción general de las condiciones de equilibrio y desconocimiento de la resolución de un sistema de ecuaciones lineales (véase primer renglón de la Tabla 2).

Después de la enseñanza, los resultados de C_2 indican que los estudiantes comprendieron las condiciones de equilibrio (véanse segundo y tercer renglones, Tabla 2) y supusieron tensiones iguales para ángulos iguales a partir del diagrama de cuerpo libre (véase cuarto renglón, Tabla 2), pero tuvieron dificultad al plantear el sistema de ecuaciones que lo modela, así como para solucionarlo (véanse quinto y sexto renglones, Tabla 2). Los datos obtenidos en el laboratorio muestran la comprensión de valores experimentales y su planteamiento en un sistema de ecuaciones; los resultados de C_1 (véase la Figura 3) y C_2 (véase sexto renglón, Tabla 2) muestran la inhabilidad en la solución del modelo matemático.

Figura 3. Respuestas comunes al cuestionario C1.



Después de la enseñanza, los resultados de C_2 indican que los estudiantes comprendieron el fenómeno de tensiones (véase cuarto renglón, Tabla 2), pero no como la suma de fuerzas en los ejes *x* e *y*, para cuya resolución se requiere plantear un sistema de ecuaciones lineales (véase quinto renglón, Tabla 2).

Contribuyó a este resultado la centración en la operatividad (véase la Figura 4).

Figura 4. Cuestionario C2: planteamiento de un sistema de ecuaciones lineales

4. *Plantea el modelo matemático que describe la situación de equilibrio del sistema en la figura.*

$-t_2 \cos 20 + t_1 \operatorname{sen} 30°$

$t_2 \operatorname{sen} 20 + t_1 \cos 30° + 30N$

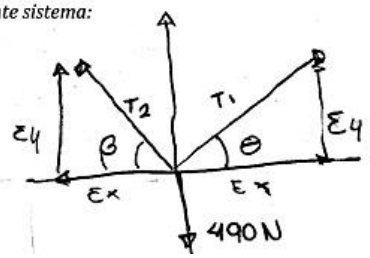
Otra causa del bajo desempeño en la descripción matemática del fenómeno fue la desatención al sistema de referencia para la asignación de signos (véase la Figura 5).

Figura 5. Cuestionario C2: Obtención del diagrama a partir de las ecuaciones

6. *Traza el diagrama de cuerpo libre correspondiente al siguiente sistema:*

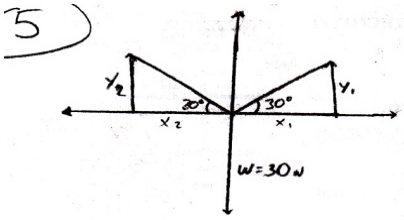
$T_1 \cos\theta - T_2 \cos\beta = 0$

$T_1 \operatorname{sen}\theta - T_2 \operatorname{sen}\beta - 490 = 0$



Fue también frecuente la omisión de pasos en la secuencia para la resolución del sistema de ecuaciones lineales, los errores en la realización del despeje de una incógnita, así como la omisión de unidades (véase la Figura 6).

Figura 6. Planteamiento y resolución de un sistema de ecuaciones lineales



$\Sigma F = 0$

$\Sigma F_{y1} + \Sigma F_{y2} = 0$

$\operatorname{Sen}\theta = \frac{C.O}{Hip}$ $\quad \operatorname{Sen}\theta = \frac{C.O}{Hip}$

$Hip \operatorname{sen}\theta = C.O$ $\quad Hip \operatorname{sen}\theta = C.O$

$T_1 \operatorname{sen} 30° = y_1$ $\quad T_2 \operatorname{sen} 20° = y_2$

$T_1 (.68)$

$T_1 \operatorname{sen} 30° + T_2 \operatorname{sen} 20° - w = 0$

$T_1 (0.5) + T_2 (0.34) - 30_N = 0$

$T_1 (0.5) - 30_N = -T_2 (0.34)$

$T_1 - 30N = T_2 (0.34)$

$T_1 - 30N = \frac{T_2 (0.34)}{(0.5)}$

$T_1 = \frac{T_2 (0.34)}{0.5} + 30_N$

$T_1 = T_2 (.68) + 30N$

$T_2 (.68) + 30N + T_2 (0.34) - 30N = 0$

$T_2 (.68) + T_2 (.34) = 0$

$T_2 (.68) = T_2 (.34)$

$T_2 = \frac{T_2 (.34)}{(.68)}$

$T_2 = T_2 (0.5)$

Las hojas de control de la práctica (para un ejemplo véase la Figura 7) evidencian la primacía de la operatividad, pero sin la dotación aparente de sentido a los signos implicados, ya que mismo en la tabla de resultados de la hoja de control o bien se omitieron las unidades correspondientes, o bien se les cambió. Además, en las conclusiones se anotó que el error fue mínimo por algunos gramos, cuando en la tabla de resultados ningún registro de las tensiones estuvo en gramos.

Figura 7. Resultados y conclusiones de la práctica

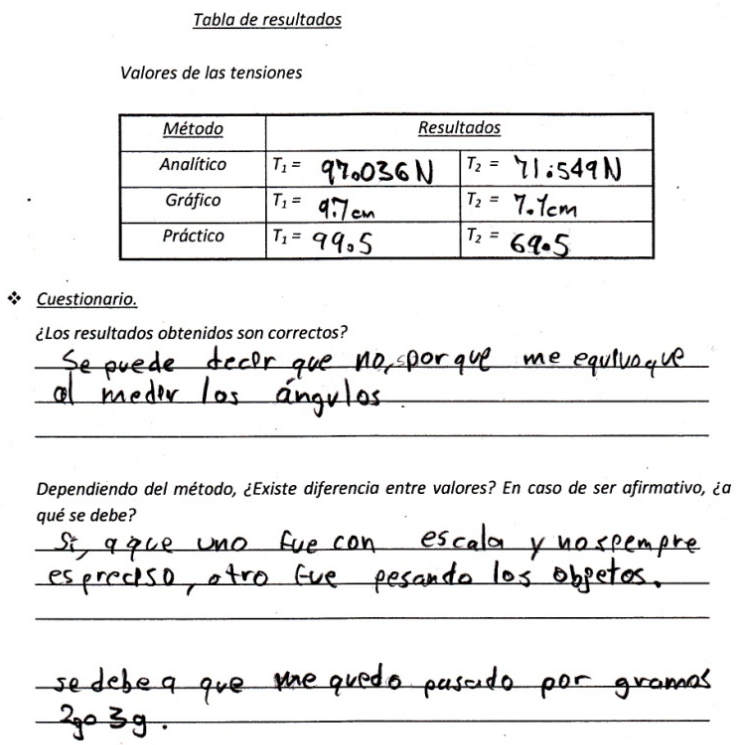


Tabla de resultados

Valores de las tensiones

Método	Resultados	
Analítico	T_1 = 97.036 N	T_2 = 71.549 N
Gráfico	T_1 = 9.7 cm	T_2 = 7.1 cm
Práctico	T_1 = 99.5	T_2 = 69.5

❖ *Cuestionario.*

¿Los resultados obtenidos son correctos?

Se puede decir que no, porque me equivoque al medir los ángulos

Dependiendo del método, ¿Existe diferencia entre valores? En caso de ser afirmativo, ¿a qué se debe?

Si, que uno fue con escala y no siempre es preciso, otro fue pesando los objetos.

se debe a que me quedo pasado por gramos 2go 3g.

Por los resultados de los cuestionarios C_1 y C_2 considerados respecto a la correspondencia de conceptos mostrada en la Tabla 2, los estudiantes comprendieron el concepto de equilibrio y las condiciones para que un cuerpo esté en equilibrio, pero no así el concepto de tensión ni el planteamiento del modelo matemático de un sistema de ecuaciones lineales y su resolución (reactivos 1 y 2 de C_1 y reactivos 1 y 3 de C_2).

CONCLUSIONES

La memorización escolarizada de formas de representación en el ámbito matemático y el énfasis en la operatividad (véase la Figura 6), son algunas de las principales causas de una interpretación inconveniente para el análisis del fenómeno físico en estudio. La insuficiencia en la adquisición de los conocimientos previos requeridos para el estudio de temas nuevos, tales como las reglas de transposición, los sistemas de medidas y la sintaxis algebraica, obstaculizaron la identificación de las ecuaciones lineales como descriptores de sumas de fuerzas proyectadas en los ejes.

El tema de equilibrio, un caso particular tensiones, como cualquier nuevo tema a estudiar en el Programa de Estudios de Física I, es en un inicio difícil para el alumno. Sin embargo, las ecuaciones que modelan este movimiento y su resolución son otras causas del bajo desempeño de nuestros educandos. Por otra parte, surge la interrogante de la conveniencia de que la experimentación efectiva en el laboratorio de Física anteceda al estudio en el aula de la descripción matemática de las tensiones.

Los resultados obtenidos apuntan a la necesidad de investigar acerca de la forma en que la enseñanza pueda hacer efectiva para el estudiante la interrelación entre las distintas Unidades de Aprendizaje de las diferentes disciplinas, con miras al logro de los objetivos de los Programas de Estudios del bachillerato tecnológico.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barojas, H., Covarrubias, F., Gallegos, L., López, A., Vega, E. (1997). Transformación de concepciones epistemológicas y de aprendizaje en procesos de física en el nivel medio superior. *Memorias del IV Congreso Nacional de Investigación Educativa* (Waldegg, G., ed.) pp. 216-229. México: COMIE.

Born, M. (1956). *Experiment and Theory in Physics*. USA: Dover.

Dirección de Educación Media Superior (DEMS). (2009). *Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: Álgebra*. México, D. F.: IPN

Dirección de Educación Media Superior (DEMS). (2009). *Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: Física I*. México, D. F.: IPN

Pérez, H. (2011). *Física General*. México: Patria.

Piaget, J., Inhelder, B. (1985). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. 6ª. ed. España: Paidós Ibérica.

EL MODELO DE LA SITUACIÓN, LA GENERALIZACIÓN Y EL RAZONAMIENTO CIENTÍFICO EN ESTUDIANTES DE NIVEL SUPERIOR

Lidia Aurora Hernández Rebollar, Josip Slisko Ignjatov, Ana Laura Pérez Castro, José Antonio Juárez López
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México
lhernan@fcfm.buap.mx, jslisko@fcfm.buap.mx, jajul@fcfm.buap.mx

Palabras clave: modelo de la situación, generalización, modelación matemática

Key words: situation model, generalization, mathematical modeling

RESUMEN: En este trabajo exploramos la relación entre el grado de abstracción del modelo de la situación, el nivel de razonamiento científico y el desempeño en la resolución de un problema matemático de patrón de cambio mostrado por estudiantes del primer semestre de la licenciatura en matemáticas aplicadas de una universidad pública. Para este fin, se diseñó un cuestionario con el problema conocido como "El problema de las mesas". La cantidad de dibujos realizados para resolver el problema cuando el número de mesas aumenta, las soluciones al problema de los estudiantes encuestados y sus justificaciones, se relacionaron con el puntaje que obtuvieron en la prueba conocida como "prueba de Lawson".

ABSTRACT: We explore the relationship among the abstraction degree of the situation model, the level of scientific reasoning, and the performance in solving a mathematical problem by students of applied mathematics from a public university in Puebla, México. For this purpose, a questionnaire with the problem known as "The problem of the tables" is designed. We relate the score obtained in the test named "Lawson Test" with the amount of drawings used to solve the problem as the number of tables increase, the justifications, and the problem solutions given by the students surveyed.

INTRODUCCIÓN

La importancia de la generalización como una actividad algebraica es ampliamente reconocida dentro de la investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza del álgebra. Kieran (1996) se refiere a la primera de tres categorías de las actividades algebraicas, como actividades generacionales. Por ejemplo, l*as ecuaciones que incluyen una incógnita que representan situaciones problemáticas cuantitativas, expresiones de generalidad de patrones geométricos o secuencias numéricas y expresiones de las reglas que gobiernan relaciones numéricas* (p. 272). Diversos investigadores han señalado las dificultades que los estudiantes encuentran al producir expresiones formales escritas de generalizaciones (Macgregor y Stacey, 1993). Sin embargo, son escasas las investigaciones que relacionan los niveles de pensamiento formal y el rendimiento en tareas matemáticas (Villagrán, Guzmán, Pavón & Cuevas, 2002).

Es por esto que en esta investigación nos propusimos estudiar el proceso de generalización de un patrón de cambio en estudiantes de nivel superior, relacionar este proceso con el nivel de su desarrollo cognitivo, y con el grado de abstracción del modelo situacional que construyen cuando se enfrentan a un problema matemático.

El nivel de razonamiento científico se midió con la prueba diseñada por Lawson (1995), y el desempeño de los estudiantes se determinó con el número de respuestas correctas que éstos dieron a cuatro preguntas que se les plantearon en el cuestionario.

MARCO TEÓRICO

Prueba de Razonamiento Científico o Prueba de Lawson

El razonamiento científico es una capacidad fundamental para estudiar exitosamente carreras de ciencias. En este trabajo planteamos que el perfil cognitivo de los estudiantes se puede conocer a través de la "Prueba de aula para el razonamiento científico" diseñada por Lawson (1995). La Prueba consta de 24 preguntas con respuesta de opción múltiple que requieren de diferentes tipos de razonamiento científico, mismas que se agrupan en 12 pares, conformados por la pregunta y su justificación. Cada par se toma como correcto solo si la pregunta y su justificación son correctas. Esta prueba ha sido validada para su uso en el aula por Coletta y Phillips (2005) y ha sido muy útil porque permite una rápida y eficiente comparación con otras poblaciones. De acuerdo con el número de aciertos obtenidos por un estudiante, a éste se le ubica en uno de los tres niveles o estadios de razonamiento, considerando que la prueba de Lawson ha sido diseñada para evaluar la capacidad de razonamiento científico de acuerdo a las propuestas de Piaget.

Empírico–Inductivo (Concreto): Estudiantes que no son capaces de probar hipótesis involucrando agentes causales observables. Pueden llevar a cabo experimentos mentales. Las operaciones que usan son concretas, se relacionan directamente con objetos y no con hipótesis verbalizadas.

Transición o intermedio (Transición): Para alcanzar este estadio deben haber desarrollado previamente el pensamiento concreto. Estudiantes inconsistentemente capaces de probar hipótesis involucrando agentes observables causales. En este estadio el individuo es capaz de razonar con proposiciones sin la necesidad de objetos, formular hipótesis y probarlas.

Hipotético–Deductivo (Formal): Estudiantes consistentemente capaces de probar hipótesis involucrando agentes causales observables o probar hipótesis involucrando entidades que no están observando, pueden formular hipótesis y probarlas.

Se considera a la Prueba de Lawson como predictor del rendimiento estudiantil, útil para establecer una clasificación gruesa de estudiantes en riesgo (Concreto) y de probable éxito (Formal). Los estudiantes en riesgo son aquellos que tienen una alta probabilidad de tener un bajo rendimiento en el primer año de la carrera o incluso abandonarla, e inversamente sucede con los estudiantes exitosos. Los estudiantes en la zona intermedia serían también de algún riesgo. Esta clasificación nos permite identificar los estudiantes para los cuales sería necesario proponer acciones que les permitiera superar sus dificultades para adaptarse al trabajo académico.

La Modelación y el Modelo de la Situación de un problema matemático

En el proceso de resolución de un problema matemático que requiere de la modelación, Blum y Borromeo (2009) reconocen una etapa de construcción intermedia denominada Modelo de la Situación. En sus propias palabras ellos afirman: “se inicia con una situación del mundo real, la situación tiene que ser simplificada, estructurada y precisada por quien resuelve el problema, lo que lleva a la creación de un modelo de la situación. Luego, el modelo es traducido al lenguaje matemático produciendo un modelo matemático de la situación”. Se puede decir que el Modelo de la Situación (MS) es la representación mental de la situación que el sujeto construye cuando lee el texto del problema. Para Van Dijk y Kintsch (1983) la comprensión textual pasa por tres niveles: el “código de superficie”, que corresponde con el aspecto perceptual y verbal del lenguaje e incluye la identificación de palabras y el reconocimiento de las relaciones sintácticas y semánticas entre ellas. El segundo nivel es el “texto-base” que se refiere al aspecto semántico del lenguaje y queda representado mediante proposiciones. El tercer nivel es el MS, el cual se construye a partir de la información del texto-base y su interacción con el conocimiento previo del comprendedor. Por ello, el MS puede concebirse como una ocurrencia específica de un tipo de situación y es esencial para la comprensión, es una interpretación individual del texto que está condicionada por las experiencias previas del individuo.

METODOLOGIA

Ésta es una investigación de tipo mixto. En primer lugar, se presenta un análisis cuantitativo (a través de frecuencias y porcentajes) de las variables: cantidad de dibujos realizados, nivel de razonamiento científico y desempeño en la resolución de un problema de generalización de un patrón de cambio. En segundo lugar, se presenta un análisis cualitativo que explora la forma en que los estudiantes encuestados transitan del MS al modelo matemático cuando resolvieron el problema, con el fin de obtener conclusiones sobre este proceso en cada uno de los grupos que se generaron por el nivel de razonamiento de los estudiantes (concreto, en transición y formal). En ambos análisis suponemos que el grado de abstracción del MS es alto cuando el estudiante no necesita hacer dibujos para resolver el problema, y que el grado de abstracción disminuye cuando el estudiante requiere hacer varios dibujos.

Participantes

De todos los estudiantes de recién ingreso a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, se eligió a un grupo de 34 alumnos que cursaban el

primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas en el periodo de otoño de 2013. A este grupo se le aplicaron dos instrumentos de investigación: la Prueba de Lawson y un cuestionario que contenía un problema de matemáticas. La coordinación de tutorías de la institución les aplicó a todos los estudiantes de nuevo ingreso la Prueba de Lawson, en la primera semana de clases, y los resultados de la muestra elegida fueron proporcionados para ser usados en esta investigación. El segundo instrumento se aplicó en el horario de clases y se informó que sus respuestas se utilizarían en este estudio.

Primer instrumento de investigación

Como mencionamos antes, la prueba de Lawson consta de 12 preguntas con respuestas de opción múltiple que deben ser justificadas. De acuerdo con los puntajes obtenidos en dicha prueba los estudiantes se clasificaron en tres sub-grupos: los alumnos que obtuvieron un puntaje de 0 a 4 (razonamiento concreto), los que obtuvieron un puntaje de 5 a 8 (en etapa de transición) y por último, los alumnos con puntaje de 9 a 12 (razonamiento formal).

Segundo instrumento de investigación

Este instrumento fue un cuestionario que contenía un problema de matemáticas denominado “El problema de las mesas” (Bednarz, 2001; Bednarz, Kieran y Lee, 1996) de búsqueda y generalización de un patrón:

Para una fiesta se tienen disponibles mesas rectangulares. Alrededor de una mesa pueden sentarse 6 personas. Al juntar dos mesas pueden sentarse 10 personas.

Si lo crees necesario, realiza un dibujo que te ayude a responder las preguntas siguientes:

1. *Al juntar 4 mesas, ¿cuántas personas podrán sentarse?*
2. *Al juntar 10 mesas, ¿cuántas personas podrán sentarse?*
3. *Al juntar 100 mesas, ¿cuántas personas podrán sentarse?*
4. *Al juntar N mesas, ¿cuántas personas podrán sentarse?*

Justifica cada una de tus respuestas.

Notemos que después de presentar el problema la primera instrucción fue que realizaran un dibujo que les ayudara a contestar las preguntas, pero solamente si lo consideraban necesario. Después se les plantearon cuatro preguntas acerca del mismo problema y se les pidió que justificaran sus respuestas.

RESULTADOS

En esta muestra se obtuvo que el 47% de los estudiantes eran pensadores concretos, 47% estaban en etapa de transición y sólo dos, (6%), eran pensadores formales.

Tabla 1. Cantidad de estudiantes que no hicieron un dibujo o que hicieron al menos un dibujo

Cantidad de dibujos	Frecuencia	Porcentaje de estudiantes
No hacen dibujos	7	20.5%
Hacen al menos un dibujo	27	79.5%

En la Tabla 1 se aprecia que casi un 80% tuvo necesidad de hacer un dibujo para resolver el problema. En la tabla siguiente clasificaremos a los alumnos que no hicieron ningún dibujo de acuerdo con su nivel de razonamiento científico.

Tabla 2. Alumnos que no hicieron dibujos por nivel de razonamiento.

Nivel de razonamiento científico	Alumnos que no hicieron dibujos	Porcentaje
Concreto	1	6.25%
En transición	4	25.00%
Formales	2	100%

Entre los alumnos que tienen un nivel de razonamiento concreto solo uno no hizo un dibujo (6.25%), mientras que en el grupo de estudiantes en etapa de transición la cuarta parte de ellos no necesitó hacer un dibujo. Los dos estudiantes con pensamiento formal no necesitaron de un dibujo para resolver el problema.

Ahora observemos la cantidad de dibujos que hicieron los estudiantes con pensamiento concreto y los de pensamiento en transición.

Tabla 3. Cantidad de dibujos que realizaron los estudiantes con pensamiento concreto y los de pensamiento en transición..

	Concretos		En transición	
Cantidad de Dibujos	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
cero	1	6.25%	4	25%
uno	0	0%	4	25%
dos	7	43.75%	1	6%
tres	4	25.00%	2	13%
cuatro	1	6.25%	5	31%
cinco	1	6.25%	0	0%
siete	1	6.25%	0	0%
ocho	1	6.25%	0	0%

En la Tabla 3 se puede observar que cerca de la mitad de los alumnos con nivel de razonamiento concreto hizo dos dibujos, la cuarta parte de estos alumnos hizo tres y hubo quien necesitó hacer hasta ocho dibujos.

Por su parte, la mitad de los alumnos en etapa de transición hizo solo un dibujo o ninguno y un porcentaje bajo hizo dos o tres dibujos. También observamos que, aunque una tercera parte necesitó hacer cuatro dibujos, en este grupo ya no encontramos quienes hayan hecho cinco dibujos o más.

Recordemos que los dos estudiantes con pensamiento formal no realizaron ningún dibujo.

De acuerdo con estos resultados, en este grupo ocurrió que, entre más alto era el nivel de razonamiento científico de los estudiantes menos dibujos necesitaron hacer.

Relación entre el nivel de razonamiento científico y la generalización

En esta sección se mostrará, a través de tablas de frecuencias y porcentajes, que entre mayor fue el nivel de razonamiento científico mejor desempeño tuvieron los estudiantes encuestados. También se presenta un análisis de corte cualitativo de la forma como lograron la generalización y la construcción del modelo situacional.

En la parte cuantitativa, el desempeño se midió por el número de respuestas correctas, de 0 a 4, acerca del problema de las mesas. Recordemos que las primeras 3 preguntas del cuestionario se refieren a la cantidad de personas que pueden sentarse en 4, 10 y 100 mesas, es decir, las preguntas se refieren a datos concretos. Por lo tanto, los estudiantes, en las dos primeras preguntas, podrían dibujar las mesas y contar los lugares. Para responder la tercera pregunta es necesario haber encontrado el patrón y, para la cuarta pregunta, en la que se pide lo mismo pero para N mesas, los estudiantes deben generalizar y expresar simbólicamente la relación entre el número de personas con el de las mesas, el cual es P = 4N + 2, si P representa al número de personas. Por todo lo anterior, fue común que los estudiantes que tuvieron entre 0 y 3 respuestas correctas fallaran precisamente en la cuarta pregunta, a excepción de dos estudiantes, los cuales tuvieron 3 respuestas correctas pero fallaron en la primera y no en la última.

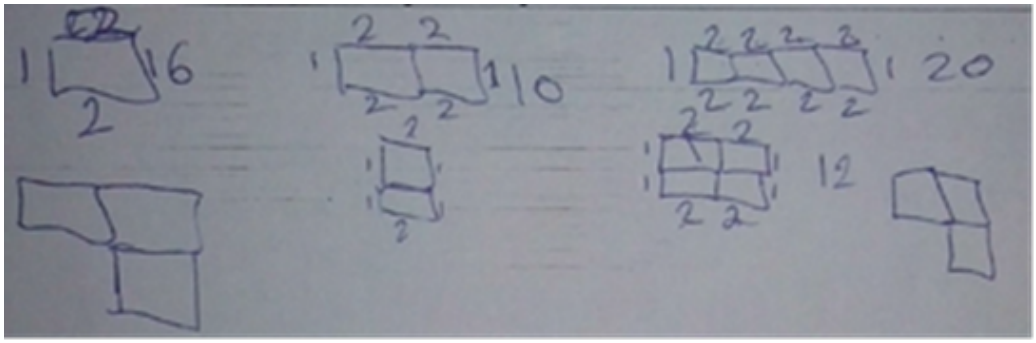
Tabla 4. Cantidad de respuestas correctas de los estudiantes con pensamiento concreto.

Respuestas correctas	Frecuencia	Porcentaje
cero	1	6%
una	0	0%
dos	2	12.5%
tres	3	19%
cuatro	10	62.5%

En este grupo, 10 estudiantes lograron encontrar el patrón y escribir la expresión general 4N + 2 para el número de personas que pueden sentarse en N mesas. El resto tuvo dificultades desde la

construcción del modelo situacional. Por ejemplo, E28 obtuvo la expresión general correcta, pero contestó erróneamente la primera pregunta porque en sus dibujos consideró otras formas de unir las mesas y, aunque se quedó con la correcta (ver Figura 1), respondió: "*20 personas, si se sigue el patrón de 1 y 2 mesas llegaremos a que se juntan pegando las mesas en el lado menor y sólo desperdiciando un lugar*".

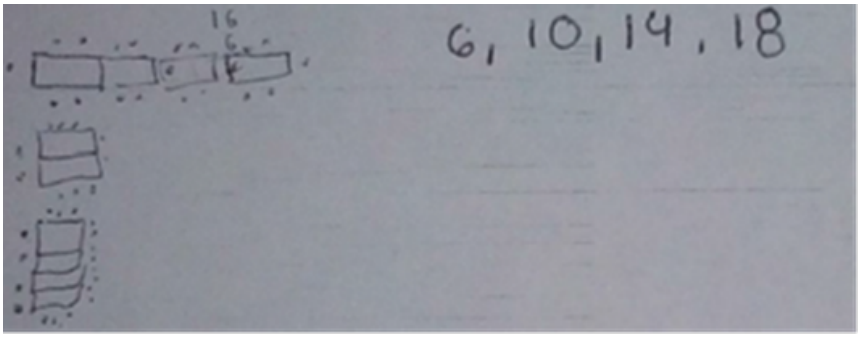
Figura 1. Dibujos de E28 para la pregunta 1.



Otros, como E28, encontraron obstáculos para deducir de los datos, que la única forma de unir las mesas era por el lado más corto, se equivocaron al contar o contestaron "20 lugares" porque sumaron dos veces 10, que es el número de personas que pueden sentarse en 2 mesas (ilusión de la linealidad).

En este grupo hubo dos estudiantes (E34 y E25) que obtuvieron incorrectamente la expresión 6 + 4N. Uno de ellos, E25, explica "*Al juntar 4 mesas se pueden sentar 18 personas, ya que conforme se aumentan las mesas se pueden ir sentando 4 más que al principio*", ver Figura 2.

Figura 2. Dibujos y respuesta de E25 a la pregunta 1.



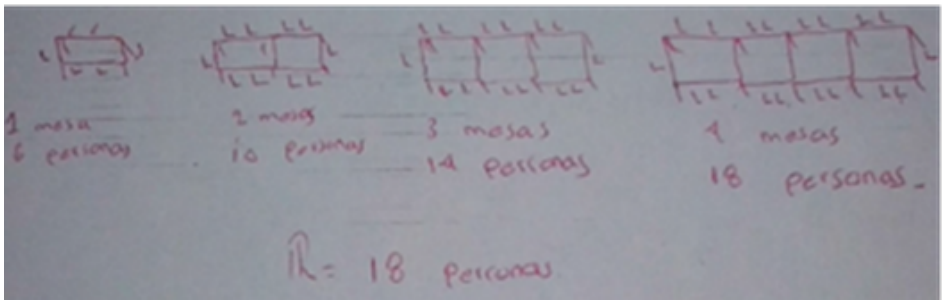
Estos estudiantes imaginaron la primera mesa con 6 lugares y luego al juntar las mesas se dieron cuenta de que aumentaban 4 lugares. Sin embargo, no se percataron de que ni la primera ni la última mesa tenían seis lugares, lo que los llevó a un modelo incorrecto. En la pregunta 3, E25 ya no hizo dibujos y respondió: "*Empezamos una sucesión con 6, ya que es la primera mesa entonces 6 + 4(N), N es el número de mesas, 6 + 4(0) = 6, 6 + 4(100) = 406*".

Tabla 5. Cantidad de respuestas correctas de los estudiantes en etapa de transición.

Respuestas correctas	Frecuencia	Porcentaje
cero	0	0%
una	0	0%
dos	2	12.5%
tres	2	12.5%
cuatro	12	75%

En este grupo, 11 de los 16 estudiantes obtuvieron la expresión general 4N + 2 para el número de personas que se pueden sentar en N mesas. Otro más, E9, obtuvo la expresión equivalente "Número de personas = 6N - (N - 1)2".

Figura 3. Respuesta de E9 a la pregunta 1.



En su justificación E9 explica "*Dado que si 1 mesa caben 6 personas al juntar 2 mesas serían 12 personas menos 2 por lo que se pierden al juntar las mesas en general si tenemos 4 mesas juntas tendremos 24 lugares menos 6 lugares perdidos*".

En la respuesta de la pregunta 2, E9 no hace dibujos y escribe: "*Siguiendo el mismo razonamiento se tiene que la regla es 6n – (n – 1)2, 60 lugares – 18 lugares perdidos serían 42 personas*". En su justificación escribe "*Dado que la regla o fórmula obedece a 6n – (n – 1)2 se tiene que Número de personas = 6n – (n – 1)2. Aunque debería probarse por inducción matemática*".

Desempeño de los estudiantes con pensamiento formal

Los dos estudiantes con nivel de razonamiento formal contestaron correctamente las cuatro preguntas y no hicieron dibujos. Desde la pregunta 1 encuentran el patrón pero cada uno construye un modelo diferente. Uno de ellos, E2, observa que en cada mesa se pueden sentar 4 personas más dos en las orillas, por lo que usa la expresión P = 4N + 2 para responder todas las preguntas.

El otro estudiante con pensamiento formal, E1, explicó en la pregunta 4:

"$6N - (2(N-2)+2) =$ *Al número de lugares. Porque a 6 por el número de mesas le tenemos que restar los asientos que se pierden y se pierden N-2 es el número de mesas que no son orilla se multiplica por dos porque de cada mesa se pierden 2 y se le suma dos por los que se pierden en la orilla.*"

ANÁLISIS

La mayoría de los estudiantes concretos obtuvieron el patrón dibujando y observando los casos particulares. Los estudiantes en transición utilizaron menos dibujos y obtuvieron el patrón desde la primera respuesta. Los dos formales no necesitaron hacer dibujos para determinar el patrón y obtener la expresión general desde el inicio.

La mayoría de los estudiantes imaginaron las mesas juntas y se dieron cuenta que cabían 4 personas en cada una, más 2 en los extremos. Algunos imaginaron las mesas separadas con 6 sillas y al unirlas observaron que se perdían dos lugares en la mesas de en medio y uno en las mesas que son orilla. Entre los concretos hubo dos que imaginaron la primera mesa con 6 y al ir pegando otras mesas se dieron cuenta que se agregaban 4 lugares. Este modelo situacional erróneo los llevó a la sucesión 6, 10, 14, 18, 22,… y al modelo matemático incorrecto "número de personas = 6N+4". Fue en este grupo de estudiantes donde se detectaron dificultades en la construcción de un modelo situacional coherente, lo cual les impidió resolver el problema correctamente.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos muestran que el 94% de los estudiantes con pensamiento concreto necesitaron hacer al menos un dibujo para resolver el problema, este porcentaje disminuyó en el grupo de pensadores en transición y fue nulo en los pensadores formales. Con respecto a la construcción del modelo situacional se obtuvo que la mayoría logró construir un modelo de la situación coherente con los datos del problema y pasó al modelo matemático correcto, quienes no lo hicieron así no lograron generalizar el patrón ni expresar un modelo matemático correcto. Los datos mostraron que fueron más los estudiantes de pensamiento concreto quienes estuvieron en esta situación.

Esta investigación nos muestra que el uso de los dibujos como apoyo en la resolución de problemas de matemáticas es una estrategia útil y necesaria para el estudiante con un nivel de desarrollo cognitivo concreto y que, por tanto, debe ser fomentada por el profesor. Por esta razón, es importante conocer el nivel de desarrollo cognitivo de nuestros alumnos y diseñar secuencias de aprendizaje que tomen en cuenta esta información.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bednarz, N. (2001). A problem-solving approach to algebra: Accounting for reasonings and notations developed by students. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra 1,*(pp. 69-78). Australia: University of Melbourne.

Bednarz, N., Kieran, C., y Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Blum, W., y Borromeo, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application*, *1* (1), 45-58.

Coletta, V. P., y Phillips, J. A. (2005). Interpreting FCI scores: Normalized gain, preinstruction scores, and scientific reasoning ability. *American Journal of Physics, 73(12),* 1172-1182.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. En C. Alsina, J. M. Alvares, B. Hodgson, C. Laborde y A. Pérez (Eds.), Proceedings of the *8th International Congress on Mathematics Education: Selected Lectures* (pp. 271- 290). Seville, Spain: S. A. E. M. Thales.

Lawson, A. E. (1995). *Science teaching and the development of thinking*. Belmont, CA: Wadsworth Publishing Company.

Macgregor, M. and Stacey, K. (1993). Seeing a pattern and writing a rule. En I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu and F. L. Lin (Eds.), *Proceedings of 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, *1* (pp.181-188). Japan: University of Tsukuba.

Van Dijk, T. A.y Kintsch, W. (1983). *Strategies of discourse comprehension*. New York: Academic Press.

Villagrán, M. A., Guzmán, J. I. N., Pavón, J. M. L., & Cuevas, C. A. (2002). Pensamiento formal y resolución de problemas matemáticos. *Psicothema, 14*(2), 382-386.

ACERCAMIENTO INFORMAL A LA INFERENCIA ESTADÍSTICA

Gudelia Figueroa Preciado, Irma Nancy Larios Rodríguez, María Elena Parra Ramos
Universidad de Sonora (México)
gfiguero@mat.uson.mx, nancy@mat.uson.mx, meparra@mat.uson.mx

Palabras clave: p-valor, nivel de significancia, nivel de confianza, inferencia estadística.

Key words: p-value, significance level, confidence level, statistical inference.

RESUMEN: La estadística es cada vez más utilizada en diversas áreas del conocimiento ya que permite, no sólo la toma de decisiones, sino el poder cuantificar la probabilidad de tomar éstas equivocadamente; cuantificación que es posible, por lo general, a través de técnicas estadísticas como son estimación de parámetros y pruebas de hipótesis. Estas técnicas requieren el manejo de ciertos conceptos estadísticos tales como nivel de significancia, nivel de confianza, p-valor, etcétera. En este trabajo se presentan diversas actividades que con el uso de simulación computacional, análisis descriptivo de datos y un cálculo sencillo de probabilidades, permiten realizar un acercamiento informal a la estadística inferencial y con ello tomar decisiones sin la necesidad de conocer los conceptos antes mencionados.

ABSTRACT: Statistics is widely used in many fields of knowledge because it not only allows us to take decisions, but quantify the probability of taking these incorrectly; the quantification of these decisions is usually posible throughout some statistical techniques, like parameter estimation and hypothesis tests. These techniques require the correct use of some statistical concepts like level of significance, confidence level, p-value, etcetera. In this work we present some activities involving the use of computer simulation, descriptive data analysis and some very simple probability computations; these activities allow students to have an informal approach to statistical inference and to take some decisions with no prior knowledge of the statistical concepts previously mentioned.

INTRODUCCIÓN

La estadística, cada vez más utilizada en diversos campos del conocimiento, nos permite tomar decisiones y cuantificar el grado de incertidumbre de éstas, razón por la cual se ha vuelto de uso común ya que es posible justificar de manera cuantitativa las decisiones que se toman, tanto en problemas científicos como aquellos que surgen en el quehacer diario. Esta toma de decisiones generalmente involucra herramientas como son la estimación de parámetros, pruebas de hipótesis y pruebas de significancia, que son técnicas muy útiles, ampliamente utilizadas hoy en día, pero cuyo uso y comprensión sigue siendo difícil para muchos estudiantes o usuarios de ellas, tal como lo señalan Garfield y Ahlgren (1998), Vallecillos y Batanero (1997), así como Figueroa, Larios y Parra (2014), quienes abordan las dificultades que presentan la mayoría de los estudiantes cuando se introducen los conceptos necesarios en la aplicación de la inferencia estadística, así como en el razonamiento inductivo que ésta conlleva.

Por otra parte, al analizar la currícula de muchas de las licenciaturas que se imparten en la Universidad de Sonora, se puede constatar que en varias de ellas sólo se incluye un curso de estadística descriptiva, por lo que, los estudiantes finalizan su carrera sin un conocimiento que les permita tomar decisiones con base en el análisis sencillo de una muestra. Aunado a lo anterior, en las carreras donde se incluye un curso de estadística inferencial, éste no considera muchas de las pruebas estadísticas que posiblemente el estudiante requerirá usar en su futuro desempeño profesional. Sin embargo, el objetivo no es aumentar la currícula con más cursos de estadística, sino desarrollar en los estudiantes un razonamiento intuitivo que les permita tomar una decisión, con base en la muestra observada y sin necesidad del manejo de los conceptos formales utilizados en estadística inferencial. Este razonamiento se lo proporciona el trabajar actividades que involucren un acercamiento informal a la estadística inferencial, el cual puede lograrse fácilmente con el uso de simulaciones computacionales, que hoy en día pueden efectuarse en software diverso y que permiten cuantificar la probabilidad de observar la muestra obtenida, bajo un supuesto establecido.

En el presente trabajo se muestran dos actividades en las que se resuelven problemas que requerirían el uso de pruebas de hipótesis o bien pruebas de significancia, pero que, con el manejo de simulaciones computacionales, que se realizaron en el software estadístico R, fue posible cuantificar la probabilidad de observar dichos datos, bajo un supuesto establecido y tomar una decisión.

REFERENTE TEÓRICO

La mayoría de los cursos de estadística, a nivel universitario, tienen como propósito llegar a desarrollar y utilizar algunos métodos de inferencia estadística. A pesar de la valiosa utilidad de la estadística inferencial, diversos estudios de investigación como los publicados por Hubbard y Bayarri (2003), Garfield y Ahlgren (1998), concuerdan con respecto a la dificultad que muestran los estudiantes tanto para comprender, como para utilizar técnicas inferenciales. Dicha problemática ha generado preocupación en el seno de la comunidad académica y ha propiciado el buscar alternativas menos formales para comprender el razonamiento que conlleva el tomar una decisión, con base en la probabilidad de ocurrencia de la muestra observada.

Investigadores como Makar, Baker y Ben-Zvi (2011), así como Garfield y Ben-Zvi (2008), proponen desarrollar un razonamiento informal de la estadística inferencial, incluso desde los niveles básicos de educación. El término inferencia informal o razonamiento informal de la inferencia estadística, ha sido tema de interés en recientes investigaciones en educación estadística, de forma tal que en los años recientes se ha publicado un gran número de artículos al respecto; en ellos se explica que un razonamiento inferencial informal se puede desarrollar con el uso de actividades que permitan obtener conclusiones de manera informal, o bien realizar predicciones acerca de la población partiendo de la observación de patrones, representaciones, medidas estadísticas y modelos estadísticos de muestras aleatorias, mientras que al mismo tiempo se presta atención a las limitaciones que el tamaño de la muestra puede tener al realizar estas inferencias. De la misma manera, Zieffler, Garfield, Delmas y Reading (2008), opinan que este término se refiere a la forma en la cual los estudiantes utilizan un razonamiento informal para elaborar argumentos que soporten inferencias acerca de poblaciones no conocidas, a partir de muestras observadas, e indican también que se debe ir más allá de los datos al realizar generalizaciones, esto es, se deben utilizar los datos como evidencia y hacer uso de un lenguaje probabilístico para expresar la incertidumbre que conllevan estas generalizaciones.

METODOLOGÍA

A continuación se presentan dos actividades en las que se debe tomar una decisión acerca del parámetro o parámetros en estudio. Estas actividades se han utilizado exitosamente durante varios semestres y sólo requieren el uso de algún software que permita realizar las simulaciones que en las misma se detallan.

Primera actividad

Esta primera actividad resulta muy familiar a los estudiantes ya que consiste en lanzar varias veces una moneda que supondremos es legal, es decir, una moneda donde la probabilidad de cara es igual a la probabilidad de sello, ambas fijas en 0.5. La variable en estudio puede ser el contabilizar el número de caras que resultan en cierto número de lanzamientos. Para abordar este tipo de problema los estudiantes deben haber visto previamente distribuciones discretas de probabilidad, de esta manera logran identificar fácilmente a esta variable, como una variable aleatoria que sigue una distribución binomial con parámetros n y p, que denotan el número de lanzamientos independientes realizados y la probabilidad de éxito, en este caso la probabilidad de obtener cara.

Se recomienda que el número de ensayos a realizar sea tal que permita calcular fácilmente probabilidades de ocurrencia de la variable aleatoria. Aprovechando la familiaridad que los estudiantes tienen con este experimento, se les pregunta cuáles son los resultados más probables de ocurrir, si suponemos que la moneda a utilizar es legal y se realizan veinte lanzamientos. Las respuestas que externan comúnmente son el considerar muy probable que el resultado sea 8, 9, 10, 11 o bien 12 caras; otros eventos les resultan improbables o raros, si la moneda es legal, esto es, si $p = 0.5$.

En un momento posterior y después de analizar los resultados que consideraron más probables cuando $p = 0.5$, se les solicita proponer posibles resultados, de los veinte lanzamientos, si la moneda lanzada tuviera una probabilidad de $p = 0.6$, $p = 0.7$ y $P = 0.8$, de que el lanzamiento resulte en cara. Una vez discutidos los posibles resultados propuestos por los estudiantes y con el

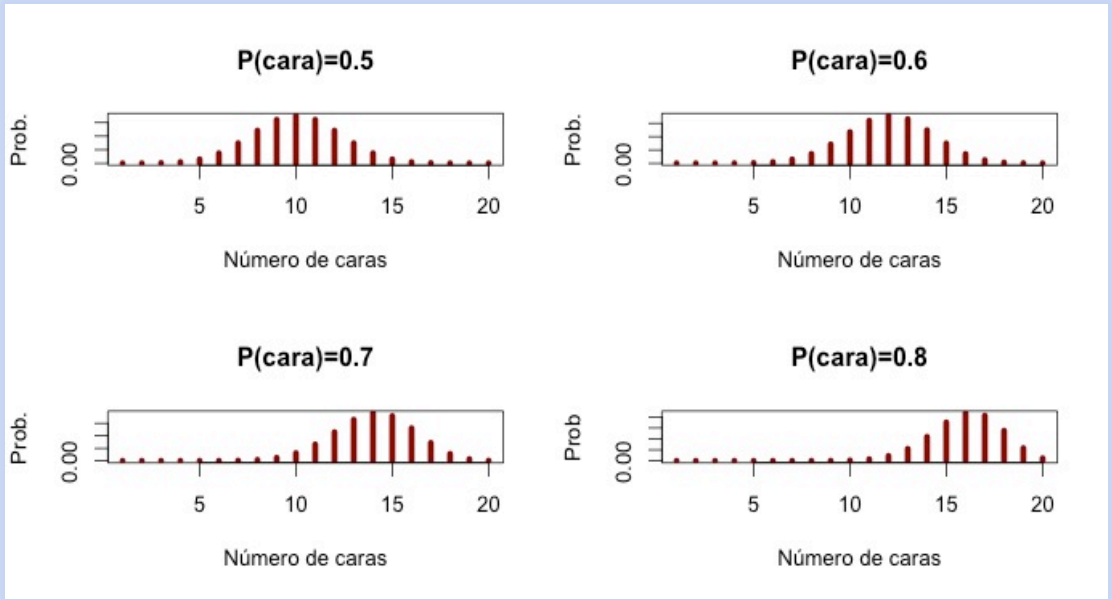
apoyo de algún software estadístico, aquí se utilizó el software libre R, se calcula la probabilidad de obtener desde cero hasta veinte caras, en veinte lanzamientos. Este cálculo se realiza suponiendo primero que la moneda es legal, esto es, que $p = 0.5$., y después se repite este procedimiento suponiendo que la probabilidad de que la moneda caiga en cara, es de $p = 0.6$, $p = 0.7$ y $P = 0.8$. Las probabilidades asociadas a los eventos $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, …, $P(X = 20)$, se muestran en la Figura 1.

Después del análisis anterior se plantea a los estudiantes el suponer que se obtuvieron 16 caras, en los veinte lanzamientos de la moneda y se les solicita que, analizando las distribuciones mostradas en la Figura 1, respondan: ¿cuál de ellas concuerda más con la muestra observada? Luego se les solicita considerar como cierto el supuesto de que la moneda es legal y seleccionar el escenario que mejor respalda dicho supuesto.

Cuando los estudiantes observan los diagramas presentados en la Figura 1 deciden, casi de manera unánime, que el evento de obtener diez y seis caras, en veinte lanzamientos, está respaldado mayormente cuando la probabilidad de cara al lanzar la moneda, es $P = 0.8$, seguida de $P = 0.7$, pero ese evento lo consideran raro si $P = 0.6$, y más raro aún cuando $P = 0.5$; así pues, de esta manera tan sencilla, los estudiantes han decidido rechazar el supuesto de que la moneda es legal cuando observen la ocurrencia de diez y seis caras en veinte lanzamientos. Esto es, han realizado de manera informal una prueba de significancia sin necesidad de hablar o calcular un p-valor.

Es muy útil retomar esta actividad posteriormente, cuando se introduce el tema de pruebas de significancia o bien, cuando se presenta el enfoque de pruebas de hipótesis, pues los diagramas presentados en la Figura 1 permiten visualizar de una manera muy sencilla, el rechazo de la hipótesis nula para diferentes niveles de significancia.

Figura 1. Distribuciones binomiales para n=20 y diferentes valores de p.



Segunda actividad

A continuación se propone una actividad que permite al estudiante realizar, de una manera informal y sencilla, la comparación de las medias de dos poblaciones.

Consideremos la situación de comparar dos diferentes tipos de empaques de carnes. Uno de ellos es un empaque al vacío y el otro utiliza CO2. Para llevar a cabo esta comparación se dispone de siete cortes de carnes, similares entre sí. Se seleccionan aleatoriamente tres de ellos y se empacan al vacío, mientras que los cuatro restantes se empacan utilizando una mezcla de CO2. Después de cinco días de permanecer en una temperatura controlada, similar al ambiente que tendrían en un exhibidor de supermercado, se cuenta el número de bacterias presentes en cada uno de los cortes de carne. Para analizar este tipo de resultados, es muy común trabajar con el logaritmo del número de bacterias, obteniendo:

Empaque al vacío: 4.48, 5.43, 4.84.

Empaque con CO2: 3.53, 3.38, 3.63, 3.74.

Analicemos de una manera descriptiva estas muestras, que sólo tienen tres y cuatro datos respectivamente, y de las cuales se obtienen las siguientes medidas:

Tabla 1. Medidas descriptivas para los dos tipos de empaque

Tipo de empaque	Mínimo	Máximo	Media	Desviación estándar
Al vacío	4.48	5.43	4.917	0.4796
Con CO2	3.38	3.74	3.570	0.1530

La diferencia entre los conteos promedios de bacteria observados con el empaque CO2 y el empaque al vacío resulta:

3.570 - 4.917 = -1.347

Las preguntas que surgen, de manera natural, son: ¿Cómo interpretar esa diferencia? ¿Cómo utilizar esta información para decidir si los dos tipos de empaques de carne producen, en promedio, la misma cantidad de bacterias?

Para responder las preguntas anteriores debemos analizar si el valor -1.347 representa un resultado que podría esperarse, o presentarse, cuando los dos tipos de empaque producen, en promedio, el mismo número de bacterias. Para realizar este análisis, volvamos a los resultados observados en la muestra de siete cortes de carne, de acuerdo al tipo de empaque:

Tabla 2. Resultados obtenidos con los dos tipos de empaque

4.48	5.43	4.84	3.53	3.38	3.63	3.74
VACIO	VACIO	VACIO	CO2	CO2	CO2	CO2

¿Podrían estos resultados haber ocurrido por azar o en realidad el conteo observado de bacterias sí depende del tipo de empaque utilizado? Si suponemos que dichos resultados ocurren por azar, entonces el conteo de bacterias observado en la muestra, ocurriría independientemente del tipo de empaque que se utilizara; ésto podemos simularlo fijando el renglón de datos y permutando los tipos de empaque; con ello estamos suponiendo que los resultados ocurren por azar y no dependen del tipo de empaque.

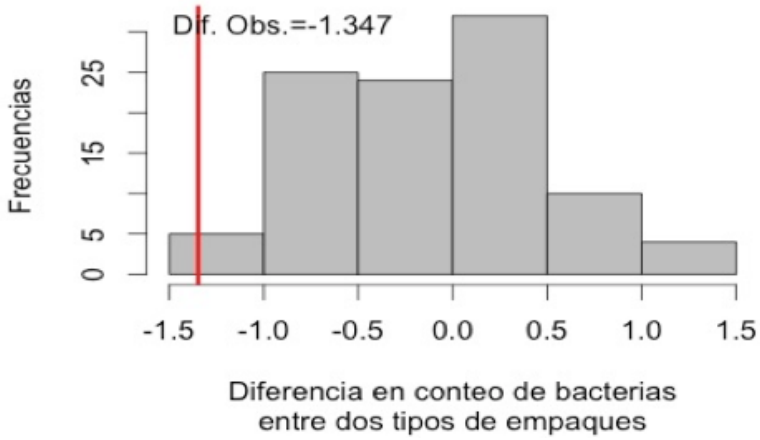
La permutación de las etiquetas “Vacío”, “Vacío”, “Vacío”, “CO2”, “CO2”, “CO2” y “CO2”, pueden realizarse fácilmente en un software como R, y el repetirla digamos cien veces, nos permite analizar el comportamiento que el azar arrojaría. A continuación se muestra una parte de las cien permutaciones realizadas en el software R.

Tabla 3. Cien permutaciones de las etiquetas de los tipos de empaque.

4.48	5.43	4.84	3.53	3.38	3.63	3.74
VACIO	CO2	CO2	VACIO	VACIO	CO2	CO2
CO2	VACIO	VACIO	VACIO	CO2	CO2	CO2
VACIO	VACIO	VACIO	CO2	CO2	CO2	CO2
CO2	VACIO	CO2	CO2	VACIO	VACIO	CO2
			.			
			.			
			.			
VACIO	CO2	VACIO	CO2	CO2	VACIO	CO2

El siguiente paso es calcular, para cada una de las cien muestras simuladas, la diferencia entre los conteos promedios de bacterias obtenidos con el empaque que contiene CO2 y el empaque al vacío. Con estas cien diferencias de medias muestrales se construyó el histograma que se muestra en la Figura 2. Ubiquemos ahora, en este histograma, la diferencia media obtenida, en el experimento realizado con los siete cortes de carne, o sea, el valor de -1.347, pues esto permite visualizar qué tan probable o improbable resulta el observar una diferencia de -1.347, cuando el histograma se construye suponiendo que los conteos de bacterias observados pueden ocurrir bajo cualquier tipo de empaque; esto es, que los dos tipos de empaque pueden originar cualesquiera de los siete datos observados.

Figura 2. Histograma de las diferencias de medias obtenidas en la simulación



Cuando el estudiante nota que lo observado en la muestra no es un evento que ocurra comúnmente por azar, pues es un evento que se localiza en la cola inferior de resultados construidos bajo el supuesto de que las bacterias crecen por igual en los dos tipos de empaque, le resulta fácil concluir que los empaques deben producir, en promedio, un conteo de bacterias diferente. Inclusive, observando las medias de la Tabla 1, puede decir que es más conveniente utilizar el empaque donde se utiliza CO_2.

Es importante señalar que para resolver el problema planteado en esta segunda actividad, no fue necesario el verificar supuestos distribucionales, el plantear hipótesis, el definir nivel de significancia o bien el calcular un p-valor. La conclusión se obtuvo de un análisis muy intuitivo que puede ser fácilmente comprendido desde un nivel descriptivo de la estadística y sin la necesidad de introducir conceptos de inferencia estadística.

CONCLUSIONES

La experiencia obtenida al utilizar actividades que involucran un tipo de razonamiento informal de la inferencia estadística, como las presentadas en los dos ejemplos incluídos, ha mostrado que éstas permiten al estudiante tomar una decisión, con base en la muestra observada, que es equiparable a la decisión que obtendría realizando pruebas de hipótesis o bien pruebas de significancia.

Es innegable la gran ayuda que el uso de software brinda para la realización de estas actividades, por lo que se sugiere enormemente su uso ya que éste permite al estudiante familiarizarse con el aspecto de cuantificar un evento ocurrido, en términos de una probabilidad calculada bajo un supuesto establecido.

Finalmente, es importante mencionar que todos los aspectos que se analizan de manera muy intuitiva en estas actividades, facilitan la presentación de conceptos como p-valor, hipótesis nula, nivel de significancia, etcétera, que se presentarán posteriormente en los temas de inferencia estadística.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Figueroa, G., Larios, N., & Parra, M. (2014). ¿Prueba de hipótesis, intervalo de confianza o prueba de significancia? *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 27*, págs. 491-498. P. Leston (Ed).

Garfield, J. B., & Ben-Zvi, D. (2008). Connecting Research and Teaching Practice. En *Developing Students' Statistical Reasoning.* The Netherlands: Springer.

Garfield, J., & Ahlgren, A. (1998). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education , 19* (1), 44-63.

Hubbard, R., & Bayarri, M. (2003). Confusion Over Measures or Evidence (p's) Versus Errors (α´s) in Classical Statistical Testing. *The American Statistician , 57* (3), 171-182.

Makar, K., Bakker, A., & Ben-Zvi, D. (2011). The reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning , 13* (1-2), 152-173.

Vallecillos, A., & Batanero, C. (1997). Conceptos activados en el contraste de hipótesis estadísticas y su comprensión por estudiantes universitarios. *Recherches en Didactique des Mathematiques* (17), 29-48.

Zieffler, A., Garfield, J., Delmas, R., & Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal , 7* (2), 40-58.

APOYANDO LOS PROCESOS DE APRENDIZAJE Y LA PERCEPCIÓN A TRAVÉS DE LA EXPLORACIÓN DE LOS SENTIDOS DE UNA POBLACIÓN EN CONDICION DE VULNERABILIDAD

Luz Elena Tinoco Robledo, Diana Pahola Suárez Mendoza
Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Colombia)
lunena11@gmail.com , dipasume@gmail.com

Palabras clave: inclusión, educación especial, educación matemática, realidad

Key words: inclusion, special education, mathematical education, reality

RESUMEN: El trabajo realizado reporta procesos que debe tener en cuenta un docente en el momento de trabajar matemáticas con población en condición de vulnerabilidad, especialmente con discapacidad visual. Las concepciones se obtienen tras unos acompañamientos realizados con estudiantes pertenecientes a una institución regular con procesos de inclusión. En el estudio se evidencia que las dificultades que tienen los estudiantes radican en la poca conexión que hay entre la matemática y la realidad, la falta de adaptaciones que permitan suplir la necesidad específica del estudiante no solo para lograr la obtención de un concepto matemático, sino también el reconocimiento del mundo.

ABSTRACT: The paper reports processes that must be taken into account by a teacher when working mathematics with vulnerable population, especially with visual impairment. The conceptions are obtained after some accompaniments made with students belonging to a regular institution with processes of inclusion. The study shows that students' difficulties lie in the lack of connections between mathematics and reality, the lack of adaptations to meet the student's specific need not only to obtain a mathematical concept, but Also the recognition of the world.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, en Colombia y en muchas partes del mundo se habla de propósitos educativos en torno a la inclusión escolar, lo que lleva a problematizar las necesidades educativas especiales (NEEs) que con el pasar del tiempo han venido siendo foco de atención y discusión sobre sus "formas de atención"

Por ello es necesario revisar los elementos, actividades y estrategias que como docentes permiten equilibrar la accesibilidad que pueden tener los estudiantes con discapacidad (específicamente discapacidad visual) los conceptos y temáticas del ambiente escolar, y más aún cuando los conocimientos están orientados hacia la disciplina matemática, que suele ser considerada como una de las herramientas necesarias para ser "un ciudadano competente". Es por ello que se hace hincapié en la importancia que debe tener un acompañamiento efectivo en cada uno de los espacios que compone el estudiante no vidente en la institución educativa.

MARCO TEÓRICO

Inicialmente es importante resaltar que según Fernández (2006) no existe relación directa entre la ceguera y las dificultades que puedan encontrarse en el aprendizaje de los contenidos propios del área de matemáticas, sin embargo hay que tomar lo que dice Socas (1997) en general, algunos alumnos casi siempre, y algunas veces casi todos, tienen dificultades y cometen errores en el aprendizaje de la matemática"(p.126), por lo cual el docente debe generar estrategias y recursos que le facilite a los estudiantes ciegos o de baja visión concebir cabalmente los conceptos de la misma forma que los videntes.

Aunque ya se mencionó que no necesariamente hay unas dificultades específicas en matemáticas por tener discapacidad visual, cabe resaltar que hay unas dificultades generales propuestas por Socas (1997) que también son comunes de para alumnos con déficit visual por ejemplo:

"Diferentes conflictos asociados a la comprensión y comunicación de objetos matemáticos" (Socas, 1997. P 127) Esta dificultad aparece ligada a las propias características del lenguaje matemático y se hace aún más difícil para el alumno con deficiencia visual que ve la necesidad de transcribir todas las explicaciones del docente al sistema Braille, este sistema es lineal por ende el docente debe tener cuidado con el lenguaje que transmite alguna explicación ya que el estudiante no vidente puede transcribir la información de manera errónea.

"Cambio de registros simbólicos" En matemáticas es muy común cambiar constantemente de registro simbólico es decir hacer cambio de representaciones como por ejemplo representar una función a nivel gráfico o numérico, por ello es importante que el docente cuente con diferentes recursos que le permita al estudiante ciego o de baja visión contemplar el cambio de una representación a la otra.

"Adquisición de un nuevo concepto" Cuando un estudiante se enfrenta a un nuevo conocimiento en matemáticas debe tener unas concepciones previas, generalmente se crea dificultad al no tener las bases necesarias para establecer una conexión entre conceptos anteriores y nuevos. Por lo tanto es importante que el docente trabaje con el estudiante ciego muy bien las nociones previas que necesita para pasar de un tema a otro.

Retomando los apartados anteriores se debe prestar atención a las diferentes adaptaciones curriculares, haciendo uso de materiales accesibles a la discapacidad visual y usar una metodología sensible a la falta de visión, de esta forma se tiene en cuenta lo descrito por Lourdes (2013) quien afirma que lo significativo es adaptar el material según las necesidades de cada alumno, sea preescolar, primaria o secundaria, además se debe procurar que en áreas como matemáticas el material sea el mismo que se usa para el vidente, por ello se habla de la importancia de la adaptaciones en relieve.

Al implementar nociones adaptadas y que se acercan al reconocimiento del mundo real como mediciones de terrenos, reconocimientos de figuras básicas y sus caracterizaciones, se evidencia que los estudiantes invidentes y múltiples (hace referencia a estudiantes que tienen otra discapacidad asociada junto con la visual) tienen un incremento significativo en la comprensión de temas matemáticos y espaciales, ya que únicamente no se les está brindando un conocimiento científico sino también se está aportando su relación con el reconocimiento del mundo ya que al carecer de visión se deben generar abstracciones por medio de los demás sentidos y los recursos que se implementen para la conceptualización que es deseada por la persona que enseña.

En este orden de ideas, un aspecto que es importante tener en cuenta es lo mencionado por Gentili (2011) “Los docentes que trabajan con personas ciegas o con baja visión deben crear la mejor estrategia para que el chico adquiera un aprendizaje bastante eficaz con ayuda de material y de vivencias significativas” (p.32) esto evidencia que los materiales que se use en cada clase con los estudiantes con deficiencia visual deben ser acordes a la necesidad que cada uno tenga y debe contribuir en el proceso de aprendizaje.

Según González (2010, p.17) los materiales didácticos se emplean en matemáticas con tres objetivos diferentes:

1) Para favorecer la adquisición de rutinas: este tipo de material es el que está diseñado para favorecer la ejercitación de procedimientos.
2) Para modelizar ideas y conceptos: Son los materiales que permiten ver el concepto matemático de una forma menos abstracta y más concreta.
3) Para plantear y resolver problemas: materiales que permiten al estudiante generalizar conceptos adquiridos.

Acompañamientos

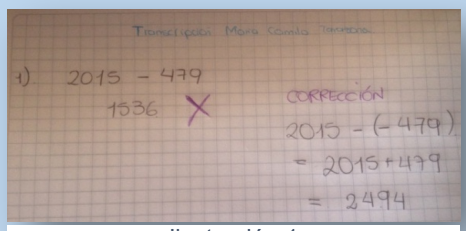
Tabla 1. Descripción de la población.

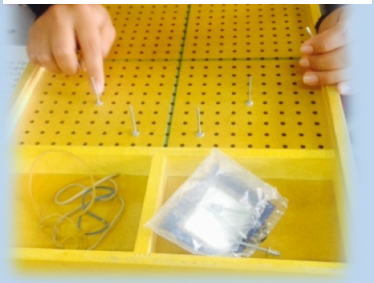
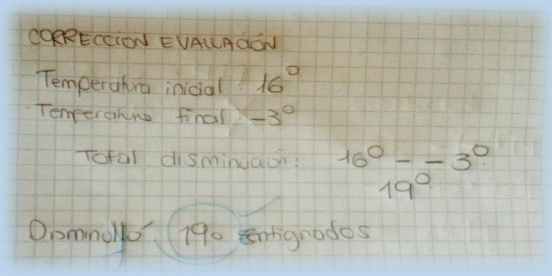
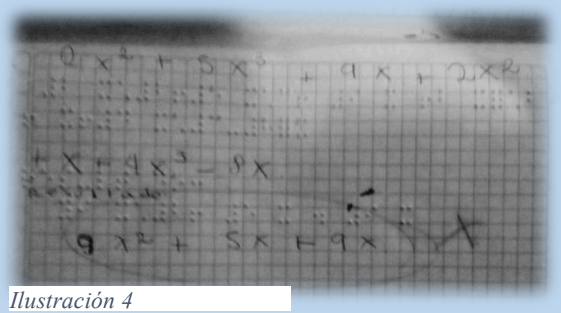
Estudiante	Edad	Tipo de ceguera	Características en el Braille – Ábaco y otros elementos
1	10 años	Ceguera total a causa de retinoblastoma (tumor canceroso) inicialmente perdió la visión de un ojo y progresivamente la del otro	Usa el ábaco desde primero de primaria, escribe en el números hasta miles de billones, hace operaciones básicas en él. Usa braille desde los cinco años, tiene conocimientos de estenografía. se debe hacer refuerzo en simbología matemática y ortografía
2	13 años	Ceguera total a causa de Hidrocefalía	Maneja ábaco con operaciones básicas sin embargo tiene dificultades al operar. Usa Braille desde primero de primaria, se debe hacer refuerzo en simbología matemática y ortografía.
3	12 años	Baja visión. Distrofia hereditaria de la retina (se va perdiendo la visión progresivamente)	No usa braille (tiene compromiso de aprender el sistema braille), tiene conocimientos básicos sobre ábaco, pero no lo usa constantemente en clase.
4	13 años	Baja visión, déficit cognitivo leve.	No usa braille, aprendiendo a usar ábaco.
5	14 años	Ceguera total a causa de desprendimiento de retina en ambos ojos en consecuencia a una miopía alta.	Maneja ábaco y Braille desde los ocho años que perdió la visión, en cuanto a la escritura braille tiene conocimientos de simbología matemática, necesita refuerzo en ortografía.
6	12 años	Ceguera total, el estudiante asegura que cuando era muy pequeño vio, pero no se acuerda. Según su historia clínica tuvo secuelas de retinopatía de la prematuridad en ambos ojos.	Usa Braille y tiene excelente manejo de ábaco, en cuanto a la escritura braille necesita refuerzo en ortografía y simbología matemática.
7	16 años	El estudiante presenta ceguera total, además de otras discapacidades asociadas a atención dispersa.	Usa el sistema de Lecto-escritura Braille, aunque presenta errores ortográficos. Conoce el ábaco y el plano cartesiano, y los utiliza cuando las actividades los requieren.
8	14 años	Ceguera total a causa de un glaucoma congénito.	La estudiante utiliza el sistema Braille, además de hacer uso de la tabla positivo-negativo para representar la recta numérica. Para aspectos relacionados a geometría se hace uso del plano cartesiano.

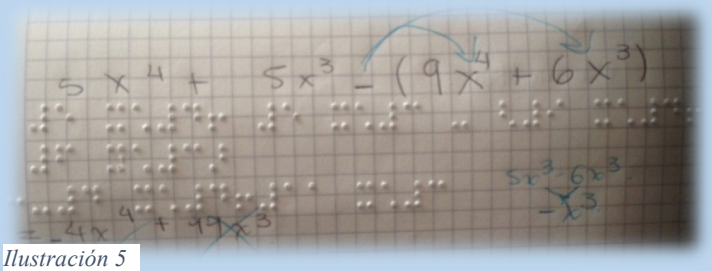
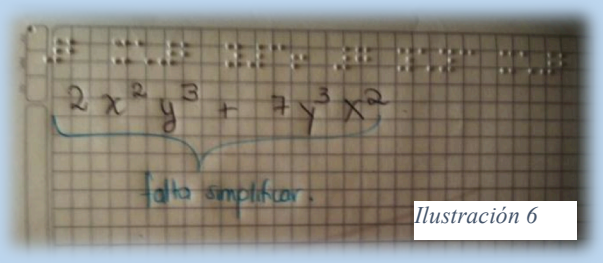
9	15 años	Estudiante de baja visión. Pérdida total de la visión en uno de sus ojos debido a un desprendimiento de retina.	El estudiante escribe con tinta, pero dentro de sus propósitos está aprender el sistema Braille, debido a la gran posibilidad de perder totalmente la visión. No utiliza el ábaco, ni otros elementos de tiflología. Utiliza guías amplificadas.
10	11 años	Baja visión-Astigmatismo hipermetrópico	El estudiante reconoce escritura en tinta, usa el sistema de lecto- escritura braille y el ábaco, el estudiante usa gafas.

Registro de los acompañamientos. Con cada uno de los estudiantes se realizó un seguimiento personalizado de forma que se pudiera evidenciar un registro sobre las dificultades y/o fortalezas que tenía el estudiante en un nivel inicial y como se pudo o no mejorar las habilidades matemáticas por medio de los acompañamientos realizados, a continuación se muestra una parte del registro realizado con uno de los estudiantes (estudiante 7):

Tabla 2.

Objeto matemático: Operaciones entre números enteros y racionales.	
Estado inicial	El estudiante comete algunos errores al operar números enteros y racionales. En parte algunos de los errores surgen de las dificultades que tiene el estudiante en cuanto a la comprensión de problemas. Por otra parte las dificultades se asocian a la forma en la que opera los números y comprende las características de los mismos. Las problemáticas se pueden relacionar con lo descrito por Polya en cuanto a la comprensión inadecuada de los problemas, que no permite la identificación de las características de los datos y el desarrollo correcto en términos aritméticos (Polya, 1962; citado por Grupo Azarquiel, 1993). Ejemplo: Se presentan dos fechas en una situación problema, una de ellas corresponde a 479 A.C y la segunda a 483 A.C. Al preguntar al estudiante el proceso que se debe realizar para conocer cuántos años sucedía cada uno de los acontecimientos planteados, ella indica que debe hacer una resta entre el año actual y la fecha dada, olvidando que la fecha dada corresponde a un entero negativo, lo que termina convirtiéndose en una adición. Así:  Ilustración 1

Proceso	Se trabaja con el uso de la recta numérica para entender la adición de enteros positivos como la distancia desde determinado punto hacia la derecha, y los enteros negativos como la distancia hacia la parte izquierda de la recta numérica. Para los números racionales se hace un recuento de la forma en la que el estudiante ha trabajado, lo que implica el cálculo mental. Este estudiante hace uso regular del plano cartesiano para simular la recta y las distancias recorridas que representan tanto enteros. *Ilustración 2* 
Estado final	El estudiante es capaz de resolver situaciones problema que involucran operaciones entre números enteros. Propone estrategias (para problemas que contienen tanto números enteros como racionales.) que recurren al cálculo mental, más allá de la representación tangible de los elementos que constituyen en la recta (Pues conlleva un mayor tiempo que el ejercicio mental).  *Ilustración 3*
Objeto matemático: Reconocimiento de términos semejantes	
Estado inicial	El estudiante confunde las características que pueden relacionarse para deducir la semejanza entre términos. En gran parte las dificultades que presenta se deben a su falta de atención y al poco interés que presta en las situaciones propuestas, que tienen como consecuencia errores en el reconocimiento de las características que conducen a deducir la semejanza entre términos. Las principales problemáticas del estudiante radican en lo que define Fernández (2006) dentro de las formas de actuar de los estudiantes frente a la resolución de problemas, como "**Negación consciente"** definido como: "Pertenecen a este grupo los sujetos que se han rendido ante la resolución de problemas. Creen que es algo inaccesible para ellos. Suelen dejar el problema en blanco, ni lo intentan. Aunque, en ocasiones, se limitan a rellenar el espacio que se deja para su resolución con un dibujo, o copian algún dato del enunciado que expresan de distinta forma a como aparece en el problema". (P. 31)  *Ilustración 4*
Proceso	Se realizan ejercicios que procuran la ejercitación del reconocimiento de las características que consideran la semejanza de los términos, con el fin de que el estudiante sea capaz de agrupar los términos de un polinomio de acuerdo a la igualdad en la parte literal de cada uno de los monomios. Se realizan ejercicios pertenecientes al saber matemático que permiten mediante otro tipo de actividades reconocer las características y las formas en las que aparece el aspecto literal de cada término. Con la aparición de nuevas actividades se reconoce la irrelevancia de la posición en la que se encuentran las letras que componen la parte literal reconociendo como semejantes términos como: $2\,x^2y^3$, $5y^3x^2$

Estado final	El estudiante conoce las partes que componen un monomio, y utiliza las características de cada uno para agrupar y posteriormente desarrollar la agrupación de términos, entendiendo la semejanza a partir de los elementos que componen, diferencian y relacionan cada término del polinomio.
Objeto matemático: Adición y sustracción de polinomios	
Estado inicial	El estudiante no simplifica algunos términos del monomio, puesto que considera que éstos no son semejantes. En cuanto a la sustracción tiene algunos inconvenientes cuando se presenta un signo negativo previo a un polinomio ubicado dentro de paréntesis. Estas dificultades son consideradas consecuencias de posibles problemáticas del estudiante con temas anteriores, puesto que por una parte al no simplificar elementos como $2\,x^2y^3$, $5y^3x^2$, es posible indicar que no reconoce la conmutatividad en el producto. Por otra parte el no considerar los signos previos al paréntesis es un problema proveniente desde las operaciones aritméticas entre enteros, más allá de la adición o sustracción de polinomios.  *Ilustración 5*
Proceso	Socas (1997) menciona algunas de las dificultades que pueden tener los estudiantes frente al aprendizaje de las matemáticas. Dentro de ellas plantea la problemática alrededor de la **"Adquisición de un nuevo concepto",** que indica que cuando un estudiante se enfrenta a un nuevo conocimiento en matemáticas debe tener unas concepciones previas, lo que generalmente crea dificultad, debido a que no se tienen las bases necesarias para establecer una conexión entre conceptos anteriores y nuevos. Es por esto que el proceso con el estudiante implica retomar conceptos previos, ejercitarlos y constituirlos como base para los diversos nuevos aprendizajes, consiguiendo así enfrentar las dificultades presentadas inicialmente. Estos conceptos, que resultan previos hacen relación a la adición entre números enteros, el reconocimiento de las consecuencias del signo que antecede a un paréntesis y la consideración de la semejanza entre términos.  *Ilustración 6*
Estado final	El estudiante hace uso de los conceptos previos para realizar nuevos procesos matemáticos, como la adición y sustracción de polinomios que requieren del conocimiento de aspectos como la propiedad conmutativa en el producto y la modificación de los signos de los elementos inmersos en un paréntesis cuando a éste le antecede un signo negativo.

CONCLUSIONES

Durante los acompañamientos realizados fue posible visualizar que las estrategias didácticas que se utilizan para construir pensamiento matemático en los niños videntes, difieren en ocasiones de aquellas que resultan ser más eficientes para los estudiantes con discapacidad visual, por ejemplo en el trabajo algebraico los algoritmos enseñados convencionalmente son entendibles para los niños videntes, pero para la persona con discapacidad visual, esto genera un doble esfuerzo ya que hay un problema no solo conceptual si no de notación, pues es muy complicado trabajar algoritmos convencionales en el sistema de lectoescritura braille.

Por lo anterior se considera que las actividades deben ir dirigidas hacia estrategias que involucren el acercamiento de los estudiantes al proceso matemático, a través no solo del tacto y la escritura, sino también a partir de las lecturas y la comunicación que se puede llegar a establecer entre docente- estudiante. Motivar el interés de los estudiantes invidentes es tanto un reto como una oportunidad para crear espacios en los que la comunicación, la interacción, el cálculo mental y los esquemas mentales se construyan paralelos a los algoritmos y a las explicaciones tradicionales que se dan en el aula de matemáticas.

La adaptación de material es necesaria y debe ser un objetivo constante de las personas involucradas en la educación de los estudiantes invidentes. Ya que hace falta adaptar diferentes materiales con los que se pueda trabajar en el proceso de aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes con discapacidad visual. Ahora bien, para adaptar un material y hacer que sea útil dentro del proceso de enseñanza de la población con discapacidad visual, basta con ser creativos y con desarrollar un genuino interés por aproximar a tal población a un concepto matemático particular, aun mas, cuando el profesor cuenta con muchas facilidades para adquirir conocimiento en diferentes áreas particulares, sin dejar de lado la intensión y precio conocimiento del uso y beneficio que llevara el material al estudiante. La relevancia esta en considerar la necesidad como el obstáculo a vencer, y éste se consigue creando cosas buenas, de calidad, y útiles para la población ciega.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Fernández, M. (2006). *Discapacidad visual y técnicas de estudio*. Madrid: ONCE.

Gentili, P. (2011). *Pedagogía de la igualdad. Ensayos contra la educación excluyente*. Buenos Aires: Siglo Veintiuno Editores.

González. M. (2010). *Recursos, Material didáctico y juegos y pasatiempos para Matemáticas en Infantil, Primaria y ESO: consideraciones generales* España: Universidad de Málaga

Grupo Azarquiel. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra.* Madrid: Síntesis.

Lourdes, P. (2013). *Estrategias para enseñar contenidos matemáticos a alumnos ciegos o con baja visión*. Uruguay: Instituto de Profesores Artigas,

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en Educación secundaria. En L, Rico (coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.

LA ESCALA, SUS ELEMENTOS Y LA FORMA EN QUE SE PERCIBEN

Asela Carlón Monroy, Sergio Cruz Contreras
Universidad Nacional Autónoma de México (México)
asela.carlon@gmail.com, correoaselasergio@gmail.com

Palabras clave: escala, gráficas, funciones, aprendizaje con comprensión

Key words: scaling, graphs, functions, learning with understanding

RESUMEN: En este artículo se explora en qué medida estudiantes de bachillerato identifican los elementos que involucra trabajar con escalas en los ejes cartesianos y cómo los relacionan. Todo esto, después de que tales alumnos muestran dominio en el trabajo con bosquejos de gráficas. Los resultados obtenidos sugieren tres tipos de confusiones que catalogamos como: "escala-unidad de medida", "longitud de intervalo-escala" y "longitud de intervalo-unidad de medida".

ABSTRACT: In this paper we explore in what extent high school students identify and relate the elements involved in scaling tasks. Such tasks take place after the students have mastered graph sketching. From the results we identify three types of confusions: "scale-unit measure", "interval length-scale" and "interval length-unit measure".

INTRODUCCIÓN

Es deseo compartido de los profesores de matemáticas, promover aprendizajes con comprensión. Una de las bondades que esto implica, es que "hace el aprendizaje subsecuente más fácil" (NCTM, 2000, p. 20). Si se considera que la representación gráfica de una función es fundamental en las matemáticas escolares y en el ámbito práctico extraescolar de la matemática, es necesario que los estudiantes aprendan con comprensión los elementos que entran en juego al asignar la escala en los ejes cartesianos: longitud de los intervalos, longitud de las unidades de medida (u.m.) y, el número asignado en el extremos de cada intervalo (la escala propiamente dicha). De acuerdo a Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990), el estudio de la escala es importante en virtud de que, por ejemplo, "una gráfica no puede ser interpretada completamente sin tomar en cuenta sus escalas" (p.19). La investigación que se reporta, se inscribe en esta temática.

EL ESTUDIO

Población. El trabajo se realiza con 47 alumnos que cursan el 4º semestre de bachillerato en el Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México y cuyas edades oscilan entre los 16 y 17 años.

Condiciones que le anteceden. En lo fundamental, se pueden señalar las siguientes: i) los 47 estudiantes participan en un proceso de enseñanza-aprendizaje cuyo propósito es promover, por un lado, el dominio en la conversión de las representaciones gráficas y algebraicas en funciones polinomiales de la forma $y = ax^n + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $n = 1, 2, 3$ por la vía global cualitativa y por otro, un aprendizaje con comprensión de las referidas funciones; ii) 44 alumnos (≈ 94%), proporcionan evidencias de haber alcanzado el dominio en la conversión señalada: abordan con éxito una prueba de rendimiento que se elabora para tal fin. Cabe hacer hincapié que, durante la instrucción, la mayor parte del trabajo que llevan a cabo los estudiantes con las representaciones gráficas del tipo de funciones arriba señalado, es de corte *global cualitativo*. Es decir, trabajan con bosquejos de gráficas cartesianas en sistemas de coordenadas sin escalas en los ejes.

El paso siguiente en el aprendizaje de los estudiantes es enfrentar tareas que demandan trabajo con gráficas de funciones (no con bosquejos). Esto requiere sistemas de coordenadas cartesianas con escalas en los ejes. Ante esta situación surge el estudio que aquí se reporta y cuyo propósito se enuncia a continuación.

Propósito. Explorar cómo perciben estos 47 estudiantes los elementos que entran en juego al establecer escalas en los ejes cartesianos y cómo los relacionan.

MARCOS DE REFERENCIA

De las distintas posiciones teóricas que se asumen para llevar a cabo este estudio (por ejemplo, aprendizaje con comprensión, escala, trabajo en grupos pequeños), en este apartado, sólo se enuncian dos: las referidas a la comprensión matemática y a la escala.

Marco de referencia para la comprensión matemática. En este punto, se acepta la posición de Hiebert y Carpenter (1992), quienes consideran, entre otras cosas, que: i) el conocimiento se representa interna y externamente; ii) las representaciones internas se conectan formando una estructura (redes); iii) las conexiones entre representaciones externas, pueden estimular las

conexiones entre las respectivas conexiones internas; iv) la forma en la cual un estudiante trata con una representación externa revela "algo" de cómo tiene representada esa información internamente y, v) la comprensión crece cuando las redes se hacen más largas y organizadas.

Marco de referencia para la escala. Se asume la posición de Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990), quienes hacen afirmaciones como las siguientes: i) la escala es "la asignación de valores a los intervalos entre las líneas del sistema cartesiano" (p. 4); ii) "una gráfica no puede ser interpretada completamente sin tomar en cuenta sus escalas" (p. 19); iii) una comprensión completa de las representaciones gráficas significa darse cuenta de qué características visuales de la gráfica no cambian bajo el cambio de escalas y qué características cambian cuando se alteran las escalas; iv) cuando se cambian las escalas para graficar la misma función, la "imagen" resultante puede ser completamente diferente; v) la escala llega a ser más fundamental al usar tecnologías para graficar; vi) la forma de la gráfica se mantiene cambiando, dependiendo de la escala.

METODOLOGÍA

Realización del estudio. Para el estudio, i) se diseña y elabora una prueba de rendimiento a fin de valorar cómo perciben los estudiantes los elementos que entran en juego al establecer escalas en los ejes cartesianos; ii) los alumnos, distribuidos en 15 equipos (13 equipos de 3 alumnos y dos, de cuatro), enfrentan la prueba mencionada; iii) a cada equipo se le asigna al azar un número del uno al 15 con el cual son referidos al presentar los resultados; iv) los resultados se analizan, a la luz de los referentes teóricos.

Instrumento para valorar los elementos involucrados en la escala. El instrumento es una prueba de rendimiento de base común que contiene tres preguntas. La intención de estos cuestionamientos es explorar si los estudiantes identifican cómo es la longitud de la unidad de medida (mayor, menor o igual) en el Eje de las Abscisas (E.A.) comparada con la del Eje de las Ordenadas (E.O.) Este aspecto se considera importante en virtud de que la "deformación" que sufre una gráfica depende de la longitud de la unidad de medida (u.m.) en cada uno de los ejes cartesianos. A continuación, se transcribe la prueba de rendimiento.

En cada uno de los sistemas de coordenadas cartesianas que se presentan a continuación (Figura 1, 2 y 3), *la longitud del segmento con el que se realiza la partición en el E.A. es la misma que la del E.O*. Observen detenidamente *las escalas* de *cada uno* de los ejes de los tres sistemas de coordenadas cartesianas y contesten las tres preguntas que se enuncian después de dichos sistemas.

Figura 1.

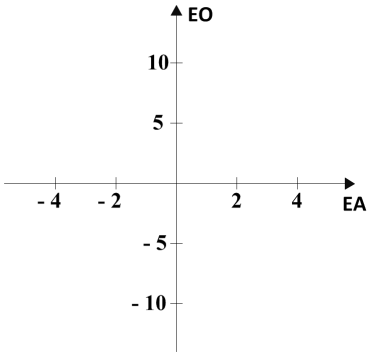


Figura 2.

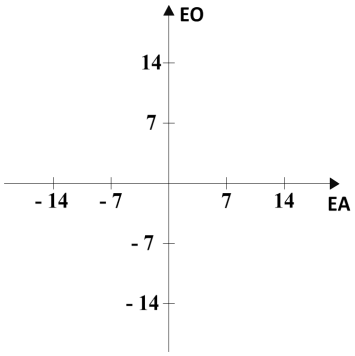
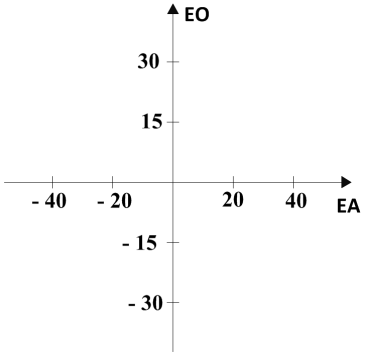


Figura 3.



PREGUNTA 1. ¿Qué pueden decir de las *longitudes de las unidades de medida de los ejes* para el sistema que se muestra en la Figura 1?

PREGUNTA 2. ¿Qué pueden decir de las *longitudes de las unidades de medida de los ejes* para el sistema que se muestra en la Figura 2?

PREGUNTA 3. ¿Qué pueden decir de las *longitudes de las unidades de medida de los ejes* para el sistema que se muestra en la Figura 3?

RESULTADOS Y COMENTARIOS

Antes de proceder a enunciar los resultados cabe señalar que éstos se presentan, en primer lugar, por pregunta y posteriormente, se muestran concentrados. Cuando se exponen por pregunta, en términos generales, las respuestas se clasifican en grupos.

Pregunta 1

RESPUESTAS CORRECTAS. Ocho equipos: el 1, 2, 4, 5, 6, 10, 12 y el 15.

RESPUESTA: "u.m. en el E.A. *mayor* que la u.m. en el E.O".

RESPUESTAS INCORRECTAS. Seis equipos: el 3, 7, 8, 11, 13 y el 14. Estas respuestas se presentan clasificadas en los tres grupos que se describen a continuación.

Grupo 1. Cuatro equipos: el 3, 7, 8 y el 14.

Respuesta: "u.m. en el E.A. *menor* que la u.m. en el E.O".

Comentarios: Al parecer, los estudiantes consideran que, cuando la escala en el E.A. es menor que la del E.O. entonces, la u.m. en el E.A. es menor que la u.m. en el E.O. Una posible explicación de la respuesta de estos equipos es que prevalece en ellos la relación de orden que existe entre los Reales positivos (números en los que centran su atención al asignar e indicar la escala) sobre la longitud de las unidades de medida: menos unidades por intervalo, menor longitud de las unidades. En otras palabras, al parecer, se impone la visión numérica sobre la geométrica. Estimamos que este proceder lo podemos catalogar como "confusión escala—unidad de medida".

Grupo 2. Un equipo: el 11.

Respuesta: “la escala es la misma solo cambia la u.m.”

Comentarios: A la luz de la primera parte de la respuesta, es factible suponer que los integrantes de este equipo consideran que si la longitud de los intervalos en el E.A. es la misma que la de los del E.O. entonces, la escala es la misma. En decir, la escala está determinada por la longitud de los intervalos. En este caso, parece que predomina la visión geométrica (longitud de los intervalos). Este razonamiento es posible etiquetarlo como “confusión longitud de intervalo-escala”.

En relación a la segunda parte de la respuesta (sólo cambia la u.m.), no es clara su posición porque, aunque efectivamente las unidades de medida son diferentes, no especifican cómo cambian dichas unidades es decir, cuál es menor o mayor.

Grupo 3. Un equipo: el 13.

Respuesta: “la unidad de medida es la misma en ambos ejes”.

Comentarios: De los tres elementos que entran en juego en el tratamiento de la escala (longitud de los intervalos, unidad de medida y la escala propiamente dicha es decir, el número asignado en el extremo de cada intervalo), este equipo presenta dificultades en los dos primeros. De tal manera que, al parecer, consideran que si la longitud de los intervalos en el E.A. es igual a la de los del E.O., la unidad de medida es la misma, independientemente de la escala marcada. Su respuesta, permite entrever que ellos centran su atención en el aspecto geométrico y dejan a un lado el numérico. Este proceder, es posible etiquetarlo como “confusión longitud de intervalos-unidad de medida”.

RESPUESTAS IMPRECISAS: Un equipo: el 9.

RESPUESTA: “La inclinación estará más cerca al E.A. y la abertura será abierta”.

COMENTARIOS: Los integrantes de este equipo, describen correctamente cómo sería la “deformación de la gráfica” en ese sistema pero, no dicen nada sobre las unidades de medida.

Pregunta 2

RESPUESTAS CORRECTAS. 13 equipos: el 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14 y el 15.

RESPUESTAS: “Las unidades de medida en ambos ejes son iguales” o bien, “u.m. en el E.A. *igual* a la u.m. en el E.O.”

COMENTARIOS: El número de equipos que contestan correctamente en esta ocasión es considerablemente mayor a los que lo hicieron en la pregunta anterior y a los que lo harán en la pregunta siguiente (la 3). Una explicación a este hecho es que, a los estudiantes les es más accesible determinar cómo son las unidades de medida en un sistema con estas características (o similares). Pero, también puede suceder que esta respuesta correcta encubra interpretaciones inadecuadas de algunos de los elementos involucrados en el tratamiento de la escala como por ejemplo, la “confusión unidad de medida-longitud de intervalos”.

RESPUESTAS INCORRECTAS. Un equipo: el 11.

RESPUESTA: “La escala es la misma sólo cambia la u.m.”

COMENTARIOS: Prácticamente los mismos que los de la pregunta anterior.

RESPUESTAS IMPRECISAS. Un equipo: el 9.

Respuesta: “La inclinación o abertura de la gráfica, será “normal””.

Comentarios: El tipo de respuesta es completamente similar a la emitida en la pregunta anterior por lo que, los comentarios son los mismos que se anotaron en dicha pregunta.

Pregunta 3

RESPUESTAS CORRECTAS. Cinco equipos: el 1, 2, 4, 5 y el 12.

RESPUESTA: “u.m. del E.A. *menor* que la u.m. del E.O.” o bien, “u.m. en el E.O. *mayor* que la u.m. en el E.A”.

RESPUESTAS INCORRECTAS. Nueve equipos: el 3, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 14 y el 15.

Grupo 1. Cinco equipos: el 3, 6, 7, 8 y el 14.

Respuesta: “u.m. E.O. *menor* que u.m. E.A.” o bien, “u.m. E.A. *mayor* que u.m. E.O”.

Comentarios: La respuesta de todos estos equipos, excepto la del seis, es de la misma naturaleza que la emitida en la pregunta uno. Por lo que se puede decir que, dichos equipos incurren, nuevamente, en la “confusión escala-unidad de medida”. En cuanto al equipo seis, es la primera ocasión que muestra este proceder.

Grupo 2. Un equipo: el 11.

Respuesta: “la escala es la misma solo cambia la u.m”.

Grupo 3. Un equipo: el 13.

Respuesta: “La escala es dif. en cada eje, mientras que la u.m. es la misma en ambos ejes”.

Comentarios: La esencia de la respuesta de estos dos equipos (11 y 13), es la misma que la que emitieron en la Pregunta 1. De donde, los comentarios que amerita en esta ocasión son los señalados renglones arriba.

Grupo 4. Un equipo: el 15.

Respuesta: “La u.m. de E.O. representa $\frac{3}{4}$ partes de la u.m. del E.A”.

Grupo 5. Un equipo: el 10.

Respuesta: “La UM en el EO es $\frac{1}{3}$ menor que en el EA”.

Comentarios: Al parecer, el equipo 15 considera que: como 15 (escala en el E.O.) es $\frac{3}{4}$ partes de 20 (escala en el E.A.) entonces, esa es la relación entre las unidades de medida.

Por su parte, el equipo 10, posiblemente, sigue un razonamiento como el siguiente: como $\frac{1}{3}$ de 15 (escala en el E.O.) es cinco y la diferencia de 15 a 20 (escala en el E.A.) es cinco entonces, la unidad de medida en el E.O. es $\frac{1}{3}$ menor que la unidad de medida en el E.A.

Por el tratamiento numérico que hacen estos dos equipos (el 10 y el 15) y por trasladar las relaciones que existen en el campo numérico a la relaciones entre las unidades de medida, es posible enmarcar su respuesta como variantes de la "confusión escala-unidad de medida".

RESPUESTAS IMPRECISAS. Un equipo: el 9.

RESPUESTA: "la gráfica estará más cerca a E.O y será cerrada"

COMENTARIOS: Este equipo, de hecho, procede de la misma forma que en las dos preguntas anteriores. La respuesta a la pregunta que ahora nos ocupa presenta, con las modificaciones correspondientes, las mismas características que las señaladas en aquellas preguntas.

CONCENTRADO DE RESULTADOS

Algunos resultados del desempeño de los equipos son los siguientes:

Cinco equipos (el 1, 2, 4, 5 y el 12) contestan correctamente las tres preguntas; tres (el 6, 10 y el 15), dos; cinco (el 3, 7, 8, 13 y el 14), una y los equipos 9 y 11, no logran acierto alguno. Es decir, es posible afirmar que ocho equipos (≈53%) perciben los elementos que entran en juego al establecer escalas en los ejes cartesianos.

Si como elemento para juzgar la dificultad de una pregunta se considera el número de equipos que la contestan correctamente, se puede decir que la Pregunta 3 fue la más difícil: únicamente cinco equipos (el 1, 2, 4, 5 y el 12) dan una respuesta adecuada. Además, éstos son los mismos equipos que logran los tres aciertos.

De acuerdo al número de respuestas correctas, la pregunta más fácil fue la dos (13 equipos la contestaron bien).

El promedio de respuestas correctas por equipo es del orden de 1.67.

En el proceder de los equipos, se identificaron, fundamentalmente, tres "confusiones". Éstas las catalogamos como "escala-unidad de medida", "longitud de intervalo-escala" y "longitud de intervalo-unidad de medida".

La "confusión" más recurrente fue la etiquetada como "escala-unidad de medida" (se utilizó en diez ocasiones). Aquí, al parecer, los estudiantes consideran que, cuando la escala en el E.A. es menor que la del E.O. entonces, la longitud de la u.m. en el E.A. es menor que la del E.O.

Si bien, las tres respuestas del equipo nueve son catalogadas como "imprecisas" y por ende, renglones arriba, se afirma que dicho equipo no logra acierto alguno en la prueba de rendimiento, este equipo, "va más allá" de lo que se le solicita en dicha prueba. Describe correctamente cómo

sería “la deformación que sufriría la gráfica” en cada uno de los sistemas de coordenadas que se le presentan.

CONCLUSIONES

En relación al foco de interés de la investigación reportada en estas páginas, es factible afirmar que la comprensión que muestran los estudiantes en los aspectos explorados es, aunque baja, satisfactoria.

Al parecer, de acuerdo a Hiebert y Carpenter (1992), el proceso de instrucción al que fue sometida la población bajo estudio, logra promover que las redes de conocimiento de los estudiantes se hagan más largas y organizadas: favorece que ocho equipos (≈ 53%) perciban los elementos que entran en juego al establecer escalas en los ejes cartesianos (longitud de los intervalos, longitud de las unidades de medida y, el número asignado en el extremo de cada intervalo). En otras palabras, es factible sostener que la comprensión lograda por los alumnos en la conversión de las representaciones gráficas y algebraicas en funciones polinomiales elementales por la vía global cualitativa contribuye, como lo señala el NCTM (2000), a que el aprendizaje subsecuente (el estudio de la escala) sea más fácil.

Por otra parte, el desempeño que muestran los estudiantes en el instrumento analizado, indica que, si en una instrucción se pretende abordar “la escala” como objeto de estudio, es necesario hacer énfasis en todos los elementos que entran en juego en su tratamiento a fin de evitar o minimizar los problemas que puedan tener los estudiantes con un tema tan usado tanto en Matemáticas como en otras áreas del conocimiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching With Understanding. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan Publishing Company.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., y Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research, 60 (1)*, 1-64.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, Va.: NCTM

MODELACIÓN MATEMÁTICA EN EL DESARROLLO DE FUNCIONES LINEALES Y VARIACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL

Guadalupe Xochitl Chávez Pérez, Ángel Homero Flores, Adriana Gómez Reyes
Colegio de Ciencias y Humanidades-UNAM, CECyT 13-IPN (México)
gpe_xochitl@yahoo.com.mx, ahfs@unam.mx, orodelsilencio@yahoo.com.mx

Palabras clave: reconocimiento de patrones, generalización, funciones lineales

Key words: pattern recognition, generalization, linear functions

RESUMEN: El presente es un reporte de investigación en el aula sobre el desarrollo del concepto de función en estudiantes de bachillerato. En particular se trabajó el concepto de función lineal y variación directamente proporcional utilizando la modelación matemática como estrategia de enseñanza. Se usó el modelo de enseñanza Aprender Matemática, Haciendo Matemática como marco teórico, este modelo proporciona las orientaciones conceptuales y metodológicas de la investigación. Los instrumentos que sirvieron para organizar la información y facilitar las conclusiones fueron listas de cotejo, matrices de resultados y rúbricas.

ABSTRACT: The text is a report of a classroom research on the development of the concept of function in high school level (students from 14 to 17 years old). In particular the concept of linear function and direct proportional variation was worked, using mathematical modeling as a teaching strategy. The teaching model, Learning Mathematics, Doing Mathematics, was used as a theoretical reference framework; this model gives the conceptual and methodological guidelines of the research. The tools used to organize the information and facilitate conclusions were checklists, results matrices, and rubrics.

INTRODUCCIÓN

La presente investigación es parte de las actividades del Seminario de Evaluación Alternativa en Matemática (SEAM) del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) de la Universidad Nacional Autónoma de México, que fue creado en 2006. Entre las actividades del Seminario está el desarrollo de proyectos de investigación en el contexto del modelo de enseñanza *Aprender Matemática, Haciendo Matemática* (Flores, 2007).

Entre las líneas de investigación que plantea el SEAM se tienen:

- Esquemas de argumentación y demostración matemática.
- Reconocimiento de patrones y generalización.
- Resolución de problemas y modelación en la adquisición y el entendimiento de conceptos matemáticos y sus relaciones.
- Modelación matemática como metodología de enseñanza.
- Problemas de exploración y su influencia en el aprendizaje.
- Influencia del software de matemática dinámica en el desarrollo de la capacidad de resolución de problemas.
- Uso de instrumentos de evaluación.
- Tipos de evaluación y de retroalimentación en el aula.
- Instrumentos de evaluación en la investigación en aula.

El reporte se hace con respecto a la línea de investigación, *Resolución de problemas y modelación en la adquisición y el entendimiento de conceptos matemáticos y sus relaciones*. En este caso se trata del uso de la modelación matemática para fomentar el entendimiento de los conceptos de función lineal y variación directamente proporcional.

La modelación matemática, como estrategia de enseñanza, permite aprender a partir de las mismas aplicaciones de la matemática; al mismo tiempo que mejora habilidades de lectura, interpretación, formulación y resolución de situaciones problema (Flores, Gómez y Chávez, 2015)

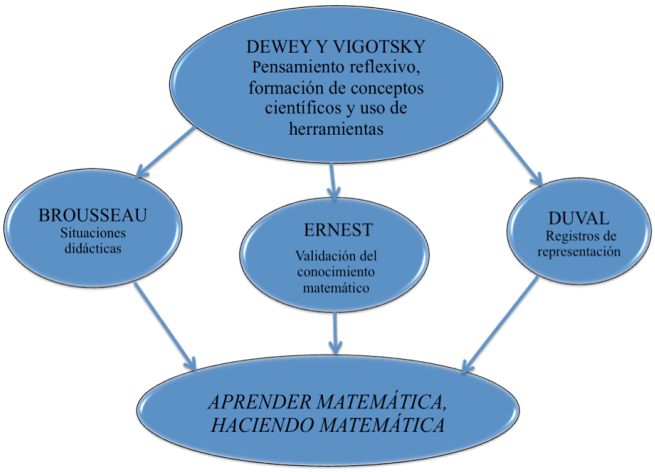
Para el presente trabajo se buscó respuesta a la pregunta: ¿Cuál es el grado de comprensión del concepto de función lineal y de la variación directamente proporcional, si éstos se abordan desde la modelación matemática como estrategia de enseñanza-aprendizaje en estudiantes de primer semestre de Bachillerato?

MARCO TEÓRICO

Como marco teórico se utilizó el modelo de enseñanza Aprender Matemática, Haciendo Matemática (Flores, 2010) que, a su vez, se apoya en los lineamientos teóricos de Dewey (1989) y Vigotsky (1978), principalmente sobre su concepción de pensamiento reflexivo y formación de conceptos científicos, y uso de herramientas; en las propuestas de Brousseau (1997) y Ernest (1999) con respecto a la enseñanza-aprendizaje de la matemática; y en los registros de representación de Duval (1993, 1995), entre otros. La metodología de enseñanza propuesta por el modelo se basa en la resolución de problemas de exploración y de modelación dentro de un

ambiente de evaluación formativa en el que se privilegia el trabajo cooperativo (Flores y Gómez, 2009). Figura 1.

Figura 1. Marco teórico



Las actividades se llevaron a cabo en un experimento de enseñanza que consistió en el diseño y la aplicación de problemas sobre función lineal, destacando las situaciones en las que se tiene una variación directamente proporcional. En el desarrollo de la secuencia se privilegió la resolución de problemas y el trabajo en equipo. Los resultados de las actividades se consignaron en hojas de trabajo y la información se organizó mediante listas de cotejo, matriz de resultados y rúbricas.

Las actividades de enseñanza tuvieron como objetivo que el estudiante recordara el concepto de función lineal estudiado en el ciclo académico anterior y reflexionara sobre las características de una variación directamente proporcional. En la Figura 2 se muestran algunas de las actividades.

Figura 2. Muestra de actividades de enseñanza

DESARROLLO EXPERIMENTAL

La investigación se realizó en cinco grupos de primer semestre del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH; uno de los dos subsistemas de la Universidad Nacional Autónoma de México, UNAM); en el desarrollo de la unidad correspondiente a funciones lineales.

El experimento de enseñanza se llevó a cabo durante cuatro semanas y las actividades se consignaron en hojas de trabajo a las que se les aplicaron los instrumentos de evaluación formativa: listas de cotejo, matriz de resultados y rúbricas. Cada una de las actividades consistió en un problema de modelación trabajado en equipos de entre dos y cuatro estudiantes, siguiendo las directrices definidas dentro del modelo de enseñanza, *Aprender Matemática, Haciendo Matemática* (Flores y Chávez, 2013; Flores y Gómez, 2013).

Las materias del área básica de matemática en el CCH se imparten en tres sesiones semanales, dos de ellas de dos horas y una de una. En el diseño experimental se plantean dos sesiones de dos horas en las que los estudiantes resuelven problemas de modelación matemática y ejercicios que involucran el uso de funciones lineales, a estas actividades se les denomina Actividades de Enseñanza-Aprendizaje. Estas actividades se realizaron en un ambiente en el cual los equipos tenían una libertad absoluta de comunicación: entre los integrantes de un mismo equipo, entre equipos y entre el profesor y los equipos. La intención es que se usen las actividades para aprender la matemática y la temática en cuestión. Al finalizar cada problema o actividad, se lleva a cabo una recapitulación y se resaltan los aspectos más importantes de las actividades.

Las sesiones de una hora se utilizaron para realizar Actividades de Evaluación. La dinámica de éstas es la misma que las de Enseñanza-Aprendizaje, con la salvedad de que ahora los equipos no cuentan con la asistencia del profesor. La intención es tener evidencias del desempeño del grupo como tal y determinar los recursos que utilizan en la resolución de problemas. En la siguiente sesión se resolvía el problema o se desarrollaba la actividad en los términos que el docente esperaba y se hacía una institucionalización del conocimiento visto.

Los instrumentos de evaluación se aplicaron exclusivamente a las actividades de evaluación. Los resultados se usaron, en primera instancia, para retroalimentar el aprendizaje de los grupos y, en segunda, para conformar el reporte de investigación.

ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En la Figura 3 se presenta la lista de cotejo de uno de los problemas de evaluación para uno de los grupos con los que se llevó a cabo el experimento de enseñanza.

Figura 3. Lista de cotejo

Variación directamente proporcional y funciones lineales

Problema 5

Artemio vende tacos en el Mercado de la Bola. Su sueldo es de $30 por día, más una comisión de $0.37 por taco vendido. Supón que nunca vende más de 500 tacos en un día.

- ¿Cuánto ganará si vende 200 tacos?
- ¿La variación del sueldo en función del número de tacos vendidos es directamente proporcional? Argumenta tu respuesta.
- En este caso, ¿la variación que se da es discreta? Explica tu respuesta

Pasos	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7
Responde de manera directa cuál es la ganancia de 200 tacos	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔
Consigna la operación utilizada para responder lo anterior	✔	✔	×	×	×	✔	✔
Identifica las variables involucradas	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔
Da una ecuación para el sueldo	×	×	×	×	×	×	×
La ecuación es correcta	×	×	×	×	×	×	×
Construye una tabla correctamente con los resultados	×	×	×	×	×	×	×
Además de resultados consigna las operaciones en la tabla	×	×	×	×	×	×	×
A partir de la tabla obtiene una ecuación	×	×	×	×	×	×	×
Construye una gráfica	×	✔	×	×	×	×	×
Da la ganancia correcta para 200 tacos	✔	✔	✔	✔	✔	×	✔
Da argumentos sobre la variación	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔
Argumenta correctamente sobre la variación	×	×	×	×	×	×	×
Define el proceso como discreto o continuo	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔
Da argumentos sobre si la variación es discreta	✔	✔	✔	✔	✔	✔	✔
Argumenta correctamente si la variación es discreta	×	×	×	×	×	×	×

Uno de los resultados que arrojaron las listas de cotejo es que los estudiantes no presentan problemas para realizar las operaciones básicas y para usar la regla de tres. La dificultad reside en visualizar los procesos que se presentan en los problemas como situaciones dinámicas en las que existe una variación y una dependencia entre dos variables

Esto se corrobora con la información que nos arrojan las matrices de resultados. En la Figura 4 tenemos la matriz de resultados del mismo problema de la Figura 3.

Figura 4. Matriz de resultados

Problema 5. Tacos

Enunciado	Solución esperada	Solución encontrada	Comentarios
Artemio vende tacos en el Mercado de la Bola. Su sueldo es de $30 por día, más una comisión de $0.37 por taco vendido. Supón que nunca vende más de 500 tacos en un día. • ¿Cuánto ganará si vende 200 tacos? • ¿La variación del sueldo en función del número de tacos vendidos es directamente proporcional? Argumenta tu respuesta. • En este caso, ¿la variación que se da es discreta? Explica tu respuesta	a) $30 + 0.37((200)) = 30 + 74 = 104$ ganará. b) La variación del sueldo en función del tiempo no es directamente proporcional, ya que el modelo matemático del problema es $□ = .37□ + 30$ el cual no es de la forma $□ = □□$. c) Aquí la variación si es discreta, porque se venden tacos completos y no medios tacos ni tres cuartos de taco, es decir el número de tacos vendidos es un número entero.	a) La mayoría de los equipos contestaron bien, 104 pesos, aunque no realizaron por escrito la operación. Sólo un equipo contestó mal al no sumar los $30 del sueldo. b) Todos los equipos contestaron que si hay variación directamente proporcional ya que a medida que vende más tacos más gana. c) La mayoría de los equipos contestaron que si es discreta, pero su argumentación no está bien y sólo uno dijo que es continua.	a) Se debe pedir hacer operaciones. b) Confundieron variación directamente proporcional con que la variación sea creciente. c) Hay que trabajar más en la forma en que los estudiantes argumentan.

En la figura 5 se presenta la rúbrica para determinar el nivel de dominio de los conceptos de función lineal y variación directamente proporcional.

Con respecto al grado de entendimiento del concepto de función lineal y de la variación directamente proporcional, las evidencias dicen que el avance fue mínimo.

Figura 5. Rúbrica para función lineal y variación directamente proporcional

	Experto	Intermedio	Aprendiz
Concepto de función lineal	Sabe que es la relación de dependencia entre dos variables y distingue dominio e imagen. Conoce que las diferencias constantes en una variable implican diferencias constantes en la otra. Resuelve problemas utilizando el concepto en sus tres representaciones.	Sabe que es una relación de dependencia entre variables. Utiliza solo una o dos representación. Se le dificulta el tránsito entre representaciones.	Reconoce la relación entre dos literales.
Variación directamente proporcional	Sabe que es una característica de algunas funciones lineales y distingue la constante de proporcionalidad. Resuelve problemas utilizando el concepto.	Utiliza la "regla de tres" correctamente en la resolución de problemas lineales.	No la distingue entre las funciones lineales. Utiliza la "regla de tres" de manera indiscriminada.
Representación tabular	Construye tablas y reconoce en ellas cuando son lineales y si existe variación directamente proporcional. Encuentra la constante de proporcionalidad.	Construye tablas como una sucesión, sin reconocer la regla de correspondencia.	No utilizan tablas
Representación gráfica	Sabe que corresponde a una recta. Sabe que si pasa por el origen tiene variación directamente proporcional. Sabe que si es creciente la pendiente es positiva y viceversa. Representa problemas de variación proporcional de manera gráfica.	Sabe que corresponde a una recta. Sabe que si pasa por el origen tiene variación directamente proporcional. Representa algunos problemas de variación proporcional de manera correcta. Reconoce la variable independiente pero no siempre la grafica en el eje horizontal.	Sabe que corresponde a una recta. Grafica en forma indiscriminada entre un eje y otro.
Representación algebraica	Reconoce la regla de correspondencia y =mx+b y define dominio e imagen de la función. Identifica a m con la razón de cambio entre las variables. Encuentra la expresión algebraica correspondiente a los problemas planteados.	Reconoce la regla de correspondencia y =mx+b. Identifica a m con la razón de cambio entre las variables.	Reconoce la regla de correspondencia y=mx+b.

Los estudiantes no explican el por qué una cierta función es lineal o no, ni si tiene variación directamente proporcional.

En los casos en los que sí se hace hay confusión entre función lineal y variación directamente proporcional con el hecho de que la función sea creciente.

En consecuencia, si damos respuesta a nuestra pregunta de investigación: *¿Cuál es el grado de comprensión del concepto de función lineal y de la variación directamente proporcional, si éstos se abordan desde la modelación matemática como estrategia de enseñanza-aprendizaje en estudiantes de primer semestre de Bachillerato?*

Podríamos decir que la comprensión es mínima y que no es conveniente abordar la temática mediante el uso de la modelación matemática como estrategia de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, antes de llegar a una conclusión tal, es necesario hacer una revisión del diseño experimental y de las actividades que conforman el experimento de enseñanza con el fin de determinar si hubo fallas y de qué índole.

La evaluación se hizo en dos aspectos:

a) Las actividades de enseñanza-aprendizaje y de evaluación.

b) Su aplicación en el aula.

Con respecto al primero, se tiene que el orden en que las actividades se llevaron a cabo no fue el adecuado y no se puso el énfasis suficiente en los procesos de cambio ni en los conceptos a aprender.

Con respecto al segundo, resulta que no se tuvo un desarrollo uniforme de las actividades. Si bien hubo aspectos comunes en la puesta en práctica por los tres docentes, hubo diferencias sustantivas en cuanto a la retroalimentación que se dio a los grupos; como en las actividades no se destacó suficientemente el concepto de función lineal y sus características (incluida la variación directamente proporcional), los docentes no retomaron esto en los espacios de recapitulación y de resolución conjunta de los problemas.

En estas recapitulaciones tampoco se tomaron en cuenta los niveles de dominio de los conceptos estipulados en la rúbrica; esto a pesar de tener resultados parciales en las listas de cotejo y en las matrices de resultados.

Todo esto habla de un descuido en la instrumentación del experimento de enseñanza, lo cual lleva a pensar que no se puede responder a la pregunta de investigación a partir de los resultados del experimento. Sino que habría que replantear las actividades y la estrategia de aplicación y hacer el experimento de nuevo.

COMENTARIOS FINALES

En el equipo de trabajo tenemos la convicción de que es necesario hacer una evaluación de nuestro propio desempeño y, como es el caso, aprender de los errores.

Los resultados de la investigación no son confiables, por tanto se plantea una nueva planificación de todo el experimento de enseñanza y su aplicación. Esta vez cuidando aquellos aspectos que son importantes para tener resultados confiables y responder efectivamente nuestra pregunta.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brousseau, G., (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers.

Dewey, J., (1989). *Cómo pensamos: nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo*, Paidós, Barcelona, España.

Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Peter Lang.

Ernest, P. (1999) Forms of Knowledge in Mathematics and Mathematics Education: Philisophical and Rhetorical Perspectives, *Educational Studies in Mathematics*, 38. 67-83.

Flores, A. H., (2007). Aprender Matemática, Haciendo Matemática, *Acta Scientiae,* Vol. 9, núm. 1, 28-40.

Flores, A. H. (2010). Learning Mathematics, Doing Mathematics: a learner centered teaching model. *Educaçao Matemática e Pesquisa*, vol 12, núm. 1. 75-87.

Flores, A. H. y Gómez, A. (2009). Aprender Matemática, Haciendo Matemática: la evaluación en el aula. *Educación Matemática, 2*(2), 117-142.

Flores, A. H.. y Chávez, G. X. (2013). Generalización en el estudio de funciones lineales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 26. 1057-1064.

Flores, A. H. y Gómez, A. (2013). La modelación matemática y la enseñanza de las cónicas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 26. 1177-1183.

Flores, A. H.. Gómez, A. y Chávez, G. X. (2015). Using Ti-Nspire in a Modelling Teacher's Training Course. *The international Journal For Technology in Mathematics Education*. Vol. 2, núm. 2, 79-84.

Vigotsky, L. S., (1978). *Mind in Society*, *The development of Higher Psychological Processes.* Harvard University Press.

PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL AL ESTUDIAR FUNCIONES. TAREAS Y SITUACIONES PARA FAVORECER SU DESARROLLO

Silvia Vrancken, Maria Luciana Giampieri, Adriana Engler, Daniela Müller
Facultad de Ciencias Agrarias, Universidad Nacional del Litoral (Argentina)
svrancke@fca.unl.edu.ar, mluciana_giampieri@hotmail.com, aengler@fca.unl.edu.ar, dmuller@fca.unl.edu.ar

Palabras clave: pensamiento variacional, funciones, enseñanza, aprendizaje

Key words: variational thinking, functions, teaching, learning

RESUMEN: El estudio de las funciones se relaciona con la modelación de fenómenos de cambio. Considerando que un acercamiento variacional a las funciones permite ofrecer a los estudiantes un contexto que favorece la construcción de conocimiento significativo referido a esta temática, se decidió iniciar su estudio proponiendo actividades que requieren la representación e interpretación de situaciones de la vida cotidiana y las ciencias.

Se presentan en este trabajo algunas de las actividades planteadas y se analiza de qué manera estudiantes argentinos de primer año de Ingeniería Agronómica son capaces de utilizar y generar distintas estrategias y argumentos, favoreciendo el desarrollo de su pensamiento y lenguaje variacional.

ABSTRACT: The study of functions is related to the modeling of change phenomena. The variational approach to the functions can offer students a context that promotes the construction of significant knowledge. According to this, we decided to start this study proposing activities that require the representation and interpretation of situations of everyday life and science.

In this paper we present some activities and analyze how freshmen argentine of Agronomic Engineering are able to use and generate different strategies and arguments favoring the development of their thought and variational language.

INTRODUCCIÓN

En los últimos tiempos se enfatiza la importancia del estudio de las funciones desde los primeros cursos de la escuela, prestando especial atención a su valor para la resolución de problemas, tanto de la matemática como de otras ciencias.

Sin embargo, la experiencia docente y el resultado de distintas investigaciones (Pérez, 2011; Zuñiga, 2009) muestran que los estudiantes que ingresan a la universidad presentan limitaciones para una comprensión significativa de las funciones. La enseñanza se sigue haciendo generalmente de una manera tradicional, a través de su caracterización a partir de una tabla de valores, la representación gráfica y la definición algebraica. Si bien se trabajan problemas, los mismos se presentan como aplicación de los conocimientos adquiridos y no se enfrenta a los estudiantes con el proceso de modelación, especialmente de situaciones o eventos dinámicos, que requieran la interpretación de aspectos relacionados a la variación.

En general, la educación matemática no proporciona a los estudiantes las herramientas y argumentos que permiten dar respuesta a situaciones que exigen la utilización e interpretación de las nociones matemáticas o su aplicación a situaciones de la vida cotidiana o las ciencias, incluso a niveles universitarios. Al respecto, Cantoral, Montiel y Reyes (2014) subrayan la importancia de las interacciones sociales, ya reconocida desde hace tiempo por distintas corrientes investigadoras, como medio que permite construir significados. Manifiestan a su vez que esto no es suficiente para lograr la construcción de conocimiento matemático, señalando la necesidad de poner al estudiante en verdadera actividad matemática, lo que ellos llaman, poner en uso el conocimiento matemático. Según los autores, esto significa que la escuela (o la universidad) debe proveer a los estudiantes de conocimientos funcionales, o sea "…herramientas matemáticas importantes en sí mismas y para interactuar con el entorno que les rodea…" (p. 22).

Al iniciar el estudio de las funciones en Ingeniería Agronómica es posible encontrar numerosas aplicaciones relacionadas a las áreas de interés de los estudiantes. El crecimiento de una célula o una planta, la relación entre el rendimiento de los cultivos y los nutrientes, la interacción entre un depredador y su presa, son algunos ejemplos de fenómenos de variación y cambio que se presentan en la naturaleza y en las ciencias. La implementación en el aula de situaciones relacionadas a estos fenómenos, que exijan la construcción de conocimiento basado en un análisis variacional, permitirá poner a los estudiantes en actividad matemática y facilitará que usen sus conocimientos previos para dar nuevos significados al concepto de función y fortalecer su comprensión.

En este trabajo se presentan algunos resultados obtenidos al investigar cómo un acercamiento variacional a las funciones permite ofrecer a estudiantes argentinos de primer año de Ingeniería Agronómica un contexto que favorece la construcción de conocimiento, el desarrollo de su pensamiento variacional y, por ende, de su pensamiento matemático en general.

ELEMENTOS TEÓRICOS

El aprendizaje y manejo de las funciones como modelos de situaciones de cambio está directamente relacionado al desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Se trata de propiciar una forma de pensamiento favoreciendo el estudio sistemático de la variación y el cambio en contextos de la vida cotidiana, de las ciencias y de la matemática misma.

Cabrera (2009) expresa que el pensamiento y lenguaje variacional se caracteriza por "proponer el estudio de situaciones y fenómenos en los que se ve involucrado el cambio, a partir de las intuiciones y concepciones de los estudiantes, las cuales se trabajan y hacen evolucionar a través de situaciones problemas" (p. 55), centrándose en "la forma en que los fenómenos estudiados cambian de un estado a otro, identificando aquello que cambia, cuantificando ese cambio y analizando la forma en que se dan esos cambios" (Caballero y Cantoral, 2013, p. 1196).

El entendimiento de los procesos de variación involucrados en las situaciones variacionales se manifiestan a través de argumentos, a los que Caballero y Cantoral (2013) llaman *argumentos variacionales*, que consisten en explicaciones, técnicas o maniobras que de alguna manera muestran el reconocimiento cualitativo y cuantitativo del cambio. En una situación variacional intervienen distintas actividades, acciones y ejecuciones, que son similares en cuanto a sus objetivos y los contextos en los que se desarrollan. Es lo que los autores denominan tareas variacionales. Las mismas se caracterizan por el empleo de una o más estrategias variacionales en un contexto numérico, gráfico o analítico, lo cual permite organizar el estudio de la variación en acciones y objetivos más específicos.

Las distintas representaciones del concepto de función cobran especial importancia para su comprensión desde una perspectiva variacional. Posada y Obando (2006) expresan:

> El estudio de los conceptos, procedimientos y métodos que involucran la variación, están integrados a diferentes sistemas de representación-gráficas, tabulares, expresiones verbales, diagramas, expresiones simbólicas, ejemplos particulares y generales – para permitir, a través de ellos, la comprensión de los conceptos matemáticos. De esta manera se hacen significativas las situaciones que dependen del estudio sistemático de la variación, pues se obliga no sólo a manifestar actitudes de observación y registro, sino también, a procesos de tratamiento, coordinación y conversión. (p. 16)

Teniendo en cuenta estos aportes se decidió diseñar e implementar en el aula actividades que permitan introducir nociones relacionadas a las funciones en situaciones de variación y cambio. Se presentan algunos ejemplos y se analiza de qué manera las tareas propuestas pueden favorecer la utilización y la generación de estrategias y argumentos variacionales.

SITUACIONES VARIACIONALES PARA INTRODUCIR FUNCIONES. ALGUNOS EJEMPLOS

Los contenidos involucrados son: definición de función, dominio y conjunto imagen, análisis de algunos rasgos característicos de las funciones como crecimiento, ceros, valores extremos, entre otros. Estos contenidos son abordados durante la educación secundaria (jóvenes de 12 a 15 años) y además son revisados en un curso de articulación entre escuela media superior y universidad que los estudiantes deben aprobar para poder cursar matemática.

Por eso se decidió iniciar su estudio proponiendo actividades en las que, para resolverlas, puedan recurrir a sus conocimientos previos y a su intuición, pero que a su vez susciten en ellos la necesidad de generar y utilizar distintas estrategias y argumentos variacionales.

Para el diseño se tuvieron en cuenta los siguientes objetivos:

- Analizar cualitativamente situaciones de cambio y variación.

- Interpretar relaciones funcionales en situaciones de las ciencias naturales o sociales relacionadas a la carrera.
- Representar, identificar, analizar y describir el comportamiento variacional de distintas funciones definidas a través de gráficas cartesianas.

Las actividades requieren la representación o interpretación de fenómenos de variación y exigen la coordinación entre los sistemas de representación verbal y gráfico. Se trata de evitar las representaciones simbólicas y analíticas, de manera de no generar dificultades propias del lenguaje y simbología matemática.

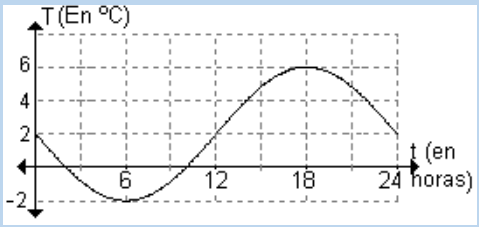
Con respecto a la metodología de trabajo en el aula, se pidió a todos los alumnos presentes en una clase habitual que resolvieran las actividades entre dos. De esta manera se buscó favorecer la interacción y la confrontación con diferentes formas de razonar o proceder. Finalizada esta etapa se realizó un debate grupal. Se leyeron algunas resoluciones, se corrigieron y se completaron las distintas respuestas, resaltando los aspectos variacionales. Esta puesta en común, con los logros y dificultades observadas, fue utilizada en una instancia posterior para el desarrollo de los contenidos.

Se presentan algunas de las actividades y se analizan las producciones de los estudiantes (sobre un total de 66 trabajos) teniendo en cuenta los procedimientos, estrategias y argumentos que utilizan y desarrollan los estudiantes al intentar resolverlas.

Se señalan también las principales dificultades encontradas. Las mismas se tienen en cuenta tanto en el debate con los alumnos como en la planificación de las clases subsiguientes.

En la primera actividad se plantean diversos aspectos variacionales que se deducen a partir de la observación de la representación gráfica de una situación de cambio.

Actividad. Analice la gráfica de la función que muestra la variación de temperatura en un día en cierta ciudad, empezando desde las 0 horas, y responda:



a) ¿Cuáles son las variables que intervienen en la situación planteada?

b) ¿Cuál es el intervalo de variación de t? ¿Cuál es el intervalo de variación de T?

c) ¿En qué intervalo o intervalos de tiempo la temperatura está bajando?

d) ¿En qué intervalo o intervalos de tiempo la temperatura está creciendo?

e) ¿A qué hora del día la temperatura alcanza su valor máximo?

f) ¿A qué hora del día la temperatura es mínima? **g)** ¿Para qué valores de t, resulta T > 0? **h)** ¿Para qué valores de t, resulta T = 0? **i)** ¿Para qué valores de t, resulta T < 0?

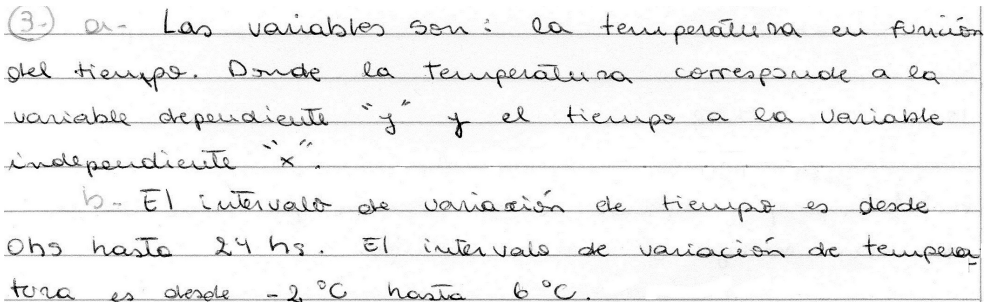
j) Determine T(12) e interprete su significado en la situación planteada.

Teniendo en cuenta la caracterización realizada por Caballero y Cantoral (2013), la tarea variacional involucrada es el análisis gráfico con la variación como punto de referencia. A partir de la interpretación de las gráficas así como de sus elementos se realizan acciones en torno al análisis de variaciones buscando "patrones, relaciones, comportamientos, tendencias y valores específicos…" (p. 1201).

En los dos primeros incisos se pregunta por las variables intervinientes y por el intervalo de variación de cada una de ellas. La identificación de las variables involucradas en un fenómeno o proceso implica centrar la atención en las cantidades que cambian y en las que permanecen constantes, así como realizar comparaciones entre las cantidades cambiantes. Al solicitar la determinación del intervalo de variación de cada variable se obliga a los estudiantes a pensar primero en el cambio de cada una de las variables involucradas en la situación para luego intentar coordinar los cambios de ambas variables, lo cual es fundamental para la comprensión del concepto de función.

Al analizar las producciones de los estudiantes, se observó que no se presentaron demasiadas dificultades con respecto a la determinación de las variables. Si bien muchos respondieron al inciso a) de manera simple "temperatura y tiempo", casi el 25% (16 trabajos) hizo alusión a la relación de dependencia. En cuanto a los intervalos de variación, la mayoría (90%) utilizó la notación de intervalos para dar la respuesta, advirtiendo que en 24 de estos trabajos, los estudiantes no incluyeron los extremos de los intervalos. En la Figura 1 se presenta una de las respuestas.

Figura 1.


(3.) a.- Las variables son: la temperatura en función del tiempo. Donde la temperatura corresponde a la variable dependiente "y" y el tiempo a la variable independiente "x".

b.- El intervalo de variación de tiempo es desde 0hs hasta 24 hs. El intervalo de variación de temperatura es desde -2 °C hasta 6 °C.

Los restantes incisos de esta actividad tienen como objetivo principal analizar la forma en que se dan los cambios. El conocimiento involucrado se relaciona a rasgos característicos del comportamiento variacional de las funciones: crecimiento, extremos, región donde la función es positiva, negativa o nula. Su respuesta no es trivial ya que exige la coordinación del valor de una variable con el valor de la otra o con los cambios o la dirección de los cambios de la otra.

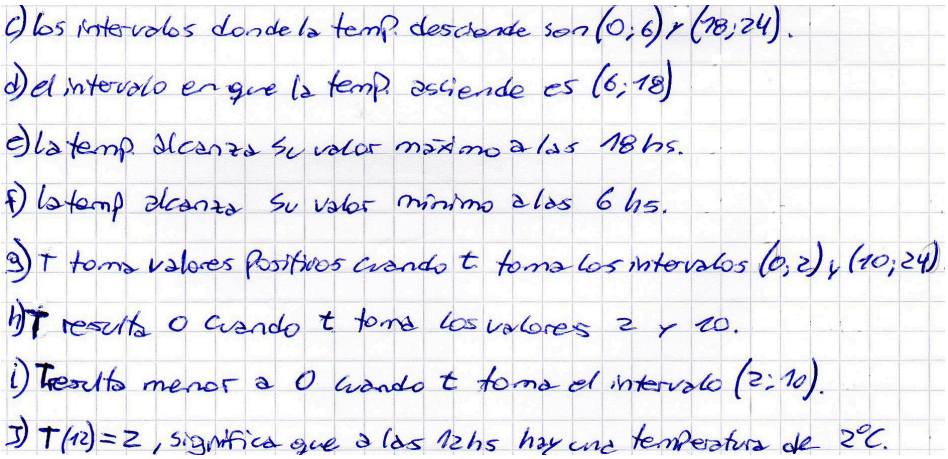
Los estudiantes respondieron todos los incisos (excepto el último que no fue resuelto en siete trabajos) sin presentar demasiadas dificultades (el porcentaje de respuestas correctas fue en promedio del 90%). Lo más importante para resaltar son los distintos aspectos relacionados al estudio de las funciones como relaciones de variación y cambio que la resolución de esta actividad permitió considerar.

El análisis del estado de la función en distintos puntos y en distintos intervalos, permite establecer diferencias entre esos estados y argumentar sobre el comportamiento de la función. Esto implica,

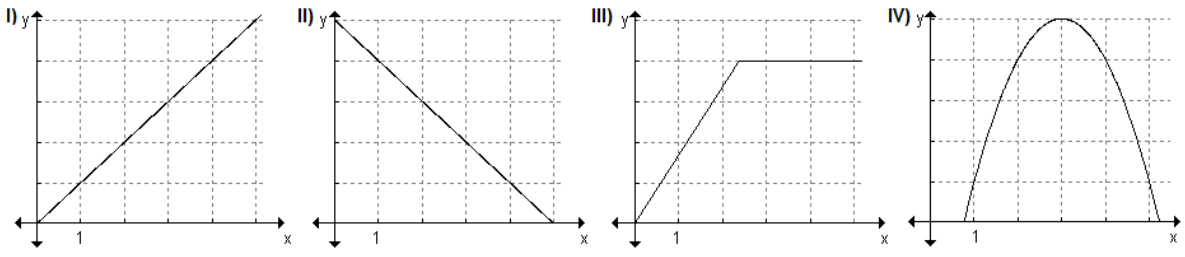
concordando con Caballero y Cantoral (2013), la utilización de dos estrategias relacionadas entre sí, la comparación y la seriación. Ambas se asocian a la acción de establecer diferencias entre dos o más estados, lo que permite determinar si hubo un cambio y analizar la variación. El objetivo es "encontrar una relación o propiedad entre ellos, como puede ser hallar una relación funcional dada una tabla, encontrar un patrón en el comportamiento de una gráfica, o relaciones entre variables" (p. 1200).

En trabajos como el de la Figura 2 se observa cómo, más allá de cometer algunos errores, los estudiantes analizan cómo las variables se comportan en distintos valores, cambian en distintos intervalos y cómo se relacionan entre ellas.

Figura 2.



Actividad. José planea estudiar el efecto de cultivo de dalias en diferentes macetas. En las gráficas se muestran resultados posibles de su experimento representando la altura de las plantas según el diámetro de las macetas.



a) ¿Qué variable se representa en cada uno de los ejes?

b) ¿Qué gráfica describe mejor cada uno de los siguientes enunciados?

i) Al aumentar el diámetro de la maceta, la altura de la planta disminuye.

ii) Al aumentar el diámetro de la maceta, aumenta la altura de la planta hasta un cierto tamaño de la maceta. Con macetas más grandes, la altura de la planta permanece igual.

Esta actividad, con la que se pretende continuar el análisis variacional de representaciones gráficas, es una adaptación de una situación propuesta en Zuñiga (2009). Se coincide con el autor en que, presentar a los alumnos problemas que los involucren en tareas de interpretación, de visualización y articulación de distintas representaciones del concepto de función, favorece la construcción de este concepto.

La identificación de la gráfica que corresponde a cada uno de los enunciados, requiere relacionar la idea de cómo cambian las variables con la variación de la función. Para poder determinar cómo cambia una variable cuando cambia la otra, es necesario fijar la atención en el comportamiento global de la función, en todo su dominio y por intervalos.

Al analizar las respuestas, se observó en 52 trabajos que los alumnos eligieron la opción correcta para los dos enunciados y en 7 trabajos más que eligieron la opción correcta sólo para el segundo inciso. Al solicitarles que expliquen su elección, muchos respondieron haciendo referencia a la relación existente entre las variables. Otros justificaron teniendo en cuenta la forma del crecimiento. Por ejemplo, para el primer enunciado escribieron:

- *Al aumentar el diámetro de la maceta la altura de la planta disminuye, es una función decreciente.*
- *Ya que corresponde a una función decreciente y en el problema al aumentar el diámetro de la maceta "x" disminuye el valor de "y" es decir la altura de las plantas.*
- *A medida que el tamaño de la maceta aumenta disminuye la altura de la planta. Decrecimiento constante.*

Algunas explicaciones sobre la elección para el segundo enunciado fueron:

- *Al aumentar el diámetro de maceta aumenta la planta (función creciente) hasta una cierta altura que se mantiene sin importar que la maceta sea cada vez mayor (función constante).*
- *Ya que aumenta y en un momento deja de aumentar y se mantiene igual, es decir constante.*
- *A medida que el tamaño de la maceta aumenta a la vez la altura de la planta. Crecimiento constante. Luego no hay crecimiento.*

Las respuestas permiten ver que los alumnos son capaces de realizar un análisis cualitativo de un fenómeno de cambio presentado gráficamente, visualizando y expresando verbalmente la relación entre las dos variables que cambian de manera simultánea.

La resolución de esta actividad lleva también a comparar las formas de variación del crecimiento en los distintos modelos. A partir de las respuestas de los estudiantes es posible ampliar el análisis dibujando en las gráficas los segmentos correspondientes a los incrementos de los diámetros y las alturas. Su interpretación permite trabajar las características de algunas funciones en particular.

Actividad. Construya una gráfica que describa la situación planteada:

Ana caminó desde el edificio central de la facultad hasta la biblioteca que se encuentra a una distancia de 200 metros. Al llegar a la biblioteca demoró 6 minutos para retirar un libro que necesitaba. En el camino se encontró con su amigo Juan con el que se detuvo a charlar 4 minutos, por lo que en el regreso se apuró para recuperar tiempo y no llegar tarde a su clase. En total Ana demoró 15 minutos.

La tarea variacional involucrada en esta actividad es la graficación. Se presenta un fenómeno de cambio en un contexto físico relacionado al entorno cotidiano de los alumnos. La descripción verbal de la situación proporciona una descripción cualitativa de la situación y se pretende que los estudiantes expresen gráficamente la dependencia entre las variables.

Esta fue la actividad en la que más problemas se detectaron. Sólo nueve parejas construyeron una gráfica correcta (14%), mientras que 50 presentaron una gráfica incorrecta y 7 no respondieron. Estos resultados coinciden con el reporte de Dolores, Chi, Canul, Cantú y Pastor (2009), quienes manifiestan las dificultades de los alumnos para establecer relaciones entre las descripciones verbales y las representaciones gráficas.

Para el análisis de las respuestas desde una perspectiva variacional se tuvo en cuenta los aspectos relativos a *qué cambia*, identificando las variables que se representaron y la relación entre ellas. Se destaca que en siete trabajos (más del 10%) los estudiantes consideraron el tiempo como función de la distancia.

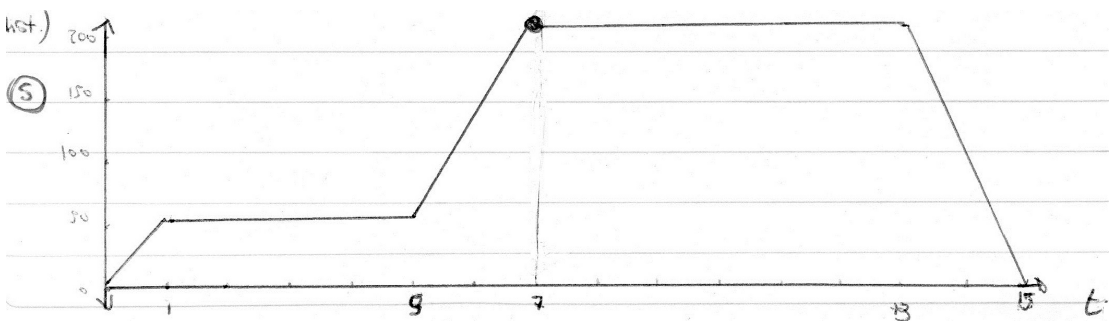
El otro aspecto que se tuvo en cuenta fue el relacionado a *cómo cambia* la situación que se quiere representar. En primer lugar, el cambio de posición con respecto al tiempo puede ser descripto a través de rectas, considerando que el desplazamiento fue con velocidad constante, o bien puede representarse con líneas curvas o combinando rectas o curvas, teniendo en cuenta que, en el camino Ana tuvo que disminuir su velocidad cuando se encuentra con su amigo o al llegar a la biblioteca, o bien acelerar al continuar con su recorrido. Todos los estudiantes dibujaron funciones compuestas por tramos constantes.

En la etapa posterior a la resolución de las actividades, en el debate grupal con la clase completa, los alumnos manifestaron que no tuvieron en cuenta en su representación la velocidad con que se realizó el desplazamiento. En este sentido, Dolores *et al* (2009) señalan la fuerte tendencia a construir gráficas que corresponden a funciones lineales en este tipo de situación. Esto muestra la dificultad de los estudiantes para lograr una gráfica que describa los matices de la variación de la velocidad en distintos intervalos de tiempo.

Sí fueron capaces de reflejar en la gráfica que Ana se apura para volver a su clase, ya que dibujaron el último tramo decreciente de la gráfica con mayor inclinación.

En la figura siguiente (Figura 3) se muestra una de las gráficas presentadas.

Figura 3.



En relación a las gráficas incorrectas se observó en 10 trabajos que construyeron el último tramo, o sea el que debería corresponder al regreso al aula, creciente. Por lo observado en la clase, se determinó que consideraron la distancia recorrida, en lugar de la distancia desde la biblioteca.

En casi todos los otros trabajos los errores se deben a que no dibujan uno o más de los tramos que describen la situación planteada.

REFLEXIONES

Los resultados muestran que el planteo de situaciones variacionales relacionadas al entorno cotidiano y a las áreas de interés de los estudiantes, las interacciones necesarias para resolver entre dos dichas situaciones, así como el debate con la clase completa y el docente, permitieron poner en uso conocimiento matemático referido a la noción de función y algunas de sus propiedades y características.

El análisis de las producciones y lo percibido en las clases muestran que los estudiantes han sido capaces de poner su atención en los procesos de cambio y realizar distintas tareas, utilizar estrategias y construir argumentos variacionales.

Por ejemplo, han identificado las variables en distintas situaciones y determinado los intervalos de variación correspondientes. En relación a las representaciones gráficas, aunque aparecieron muchas dificultades para su construcción, fueron capaces de interpretar varios aspectos, como analizar la forma en que cambian las variables, coordinar los cambios de una variable con los cambios de la otra e identificar diferentes formas de variación.

Los significados que los estudiantes lograron establecer de las funciones y sus características, el tratamiento y conversión entre distintas representaciones, la utilización de formas de comunicación, ya sea escrita u oral, implican la construcción de conocimiento matemático significativo relacionado a este concepto y constituyen un aporte importante al desarrollo de su pensamiento variacional y, en general, de su pensamiento matemático.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cabrera, L. (2009). *El pensamiento y lenguaje variacional y el desarrollo de competencias. Un estudio en el marco de la reforma integral de bachillerato.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México.

Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26,* 1195-1203. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R; Montiel, G. y Reyes, D. (2014). Hacia una educación que promueva el desarrollo del pensamiento matemático. *Revista Pedagógica Escri/viendo*, *11(24),* 17-26.

Dolores, C., Chi, A. G., Canul, E. R., Cantú, C. A., Pastor, C. G. (2009). De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 18*, 41-57.

Pérez, I. (2011). *Unidades didácticas en el área de Precálculo. Un estudio sobre la efectividad de organizadores de contenido*. Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Yucatán. Mérida, México.

Posada, F. y Obando, G. (ed.) (2006). *Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico, Módulo 2.* Medellín: Gobernación de Antioquia.

Zuñiga, M. (2009). *Un estudio acerca de la construcción del concepto de función, visualización. En alumnos de un curso de Cálculo I.* Tesis de Maestría no publicada. Universidad Pedagógica Nacional. Tegucigalpa, República de Honduras.

EL PORTAFOLIO DE EVALUACIÓN EN UN AULA MATEMATICA UNIVERSITARIA

Marisa Digión, Leda Digión
Facultad de Ciencias Económicas-Universidad Nacional de Jujuy, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías-Universidad Nacional de Santiago del Estero (Argentina)
marisadigion@gmail.com, ledadigion@gmail.com

Palabras clave: matemática, evaluación, portafolio, aprendizaje significativo, calidad de la asimilación

Key words: mathematics, assessment, portfolio, meaningful learning, assimilation quality

RESUMEN: Este trabajo presenta aspectos generales de la Tesis "Portafolio de Evaluación. Una Oportunidad de Aprendizaje Significativo", elaborada para acceder al título de Magister en la Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior (Universidad Nacional de Tucumán, Argentina).

La investigación involucrada tuvo un enfoque mixto, y se diseñó como un experimento pedagógico natural comparativo. La conclusión demostró la veracidad de la hipótesis planteada, en cuanto a que la implementación de dicha estrategia didáctica en una asignatura del área matemática en una institución universitaria argentina, contribuyó a mejorar la calidad de la asimilación de los contenidos de los estudiantes que la cursaron.

ABSTRACT: This paper presents general aspects of the thesis "Portfolio Assessment. A Meaningful Learning Opportunity", carried on to obtain the degree of Master in Teaching Mathematics in Higher Level (Tucuman National University, Argentina).

The research involved had a mixed approach, and was designed as a natural pedagogical comparative experiment.

Its conclusion proved the truthfulness of the proposed hypothesis, as regards the implementation of such teaching strategy in a subject of the Mathematics Department in an Argentinean university, which contributed to content assimilation quality in students enrolled.

INTRODUCCION

Para los estudiantes, aprender los contenidos del Cálculo no es una tarea sencilla. Al respecto, la investigadora francesa Michèle Artigue, ya expresaba en el año 1995 "Las dificultades de acceso al Cálculo son de diversa índole y se imbrican y refuerzan mutuamente en redes complejas" (p.107).

Los docentes, en ejercicio de la responsabilidad que les compete de tratar de revertir y/o mejorar esta situación, diseñan y ponen en práctica distintas estrategias didácticas. El objetivo de todas ellas es lograr que los alumnos realicen, respecto a los contenidos que abarca tanto el Cálculo Diferencial como el Cálculo Integral, aprendizajes más comprensivos, más significativos y, por ende, de mejor calidad.

En este sentido, el presente trabajo da cuenta de los aspectos generales y la conclusión obtenida de la implementación de una estrategia didáctica cuya meta fue, precisamente, mejorar el aprendizaje de los contenidos del Pre-Cálculo y del Cálculo de funciones reales de una y dos variables reales; éstos estaban incluidos en el programa analítico de una asignatura perteneciente al área matemática que formaba parte del diseño curricular de carreras de grado relacionadas con las Ciencias Económicas.

Dicha estrategia didáctica fue el Portafolio de Evaluación. Éste es reconocido como una herramienta que se sustenta en el seguimiento permanente del proceso de construcción de los aprendizajes por parte de los estudiantes, a partir de las orientaciones que brinda el docente; también es considerado como una instancia para valorar cuantitativamente y cualitativamente dicho proceso.

La experiencia que lo involucró se realizó durante un ciclo lectivo, siendo ésta el eje central en el desarrollo de una tesis de posgrado.

MARCO REFERENCIAL

López Noguero (2007) afirma que:

> La sociedad que viene es y será la sociedad del conocimiento y, afortunadamente o desgraciadamente, no alcanzaremos a saber con precisión cuáles serán sus necesidades futuras; sin embargo, existen evidencias de que las exigencias del aprendizaje humano experimentarán un crecimiento exponencial (p.16).

La cita, como los hacen muchas otras que fundamentan la necesidad de adaptarse a las nuevas exigencias de un mundo globalizado, pone en valor dos conceptos pilares de la sociedad actual: el conocimiento y el aprendizaje.

En el contexto educativo, ambos términos convergen de manera significativa. Sin embargo, acceder al conocimiento hoy, requiere de un tipo de aprendizaje diferente al denominado tradicional; éste último necesita ser repensado y replanteado atendiendo a las nuevas características de una sociedad en constante cambio. Dicho proceso demanda de la particular mediación de los docentes, ya que son ellos los que intervienen, directamente, al momento de poner en práctica acciones innovadoras y creativas, indispensables para llevar a cabo cualquier tipo de transformación educativa (Comisión Económica para América Latina y el Caribe, 1992).

Según las opiniones de expertos en Educación como Bixio (2002) y Tedesco (2012), las numerosas innovaciones que se gestan para lograr avanzar en este sentido, registran un bajo impacto en las trasformaciones requeridas. Sobre el particular, Perkins (1995) expresa: "…casi todas las innovaciones pedagógicas fracasan a largo plazo. Aun las que han tenido un buen comienzo, vuelven a las prácticas de rutina a lo sumo en cinco años" (p.204).

La formulación y ejecución de una tesis de posgrado, defendida en el año 2014, sostuvo la esperanza de revertir la apreciación citada precedentemente, proponiendo una innovación didáctica para llevar adelante el proceso de enseñanza, aprendizaje y evaluación en una materia del área matemática en la cual se impartían los contenidos del Cálculo.

Para formular el marco teórico del documento mencionado, la indagación se focalizó en dos aspectos. El primero, relacionado con la forma en la cual se produce el aprendizaje escolar sistematizado (Teoría del Desarrollo Cognitivo -Piaget-; Teoría Socio-Histórico-Cultural -Vygotsky-; Teoría del Aprendizaje por Asimilación Significativa -Ausubel-; Teoría de la Formación, por Etapas, de las Acciones Mentales -Galperin-; Teoría de la Actividad -Leontiv- y Teoría de Gagné). El segundo, vinculado con la elección de una estrategia didáctica que contribuyera a lograr que los estudiantes internalizaran y dieran significado a los contenidos; así, la seleccionada fue el Portafolio de Evaluación, entendido como:

> Una estrategia didáctica competente para la evaluación de los aprendizajes, que tiene como funciones esenciales: a) mostrar las evidencias de los esfuerzos, los progresos o los logros de los alumnos durante el cursado de la materia; b) promover una retroalimentación significativa para mejorar el aprendizaje de los estudiantes dentro de las prácticas de enseñanza, reconociendo y rectificando errores, destacando aciertos y reforzando las áreas de estudio en las que el aprendizaje haya sido insuficiente y c) ser elemento pertinente para el docente en el momento de decidir sobre la acreditación de los estudiantes en la asignatura en la que se lo aplique (Digión, 2013, p.98).

El Portafolio de Evaluación forma parte de un conjunto de modalidades para abordar el proceso educativo caracterizado por estar centrado en el protagonismo de quienes aprenden y por ser desarrollado en ambientes áulicos donde se permite la enseñanza participativa, donde priman las interacciones horizontales entre docente y estudiantes y donde se construye el conocimiento a partir de la acción, el razonamiento y la reflexión permanente (Davini, 2011).

ASPECTOS GENERALES DE LA TESIS DE POSGRADO

En el marco del desarrollo de la tesis denominada "Evaluación por Portafolio. Una oportunidad de aprendizaje significativo", se implementó en la asignatura Análisis Matemático que se cursa en Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Jujuy (Argentina), la estrategia didáctica denominada Portafolio de Evaluación.

La iniciativa de dar curso a esta innovación fue consecuencia de la insatisfacción que sentía el docente a cargo de la citada materia, por la forma en la que llevaba a cabo la evaluación de los aprendizajes entre los alumnos cursantes. A su entender, si bien los estudiantes lograban calificaciones satisfactorias al final del cursado, éstas no constituían un parámetro óptimo para juzgar si habían asimilado comprensivamente los contenidos del Cálculo, incluidos en el programa

analítico de la asignatura. Cabe acotar que, la evaluación que se implementaba en la materia en cuestión, estaba regulada por la reglamentación vigente en la institución; ella establecía, taxativamente, las instancias puntuales en las cuales se debía llevar a cabo, su característica de sumativa y el fin para el cual se ejecutaba: la acreditación.

Luego, en este contexto, la evaluación de los aprendizajes reunía todas las características de un verdadero problema que debía ser abordado. La selección del Portafolio de Evaluación se realizó tomando en cuenta que el mismo reunía las condiciones necesarias y suficientes para llevar a cabo el seguimiento permanente de la construcción de los saberes y de la valoración del mismo, tanto en su proceso como en su producto.

A los efectos de no violar la reglamentación vigente, se realizaron los trámites académicos y administrativos para lograr la autorización institucional que permitiera llevar adelante la innovación propuesta en el trabajo de tesis. Cumplida dicha gestión exitosamente, se puso en marcha la planificación correspondiente. Ésta se desarrolló en tres etapas.

La etapa inicial tuvo lugar durante los cuatro meses previos al inicio del trabajo de campo. En ella, se profundizó la búsqueda, el análisis y el registro bibliográfico a los efectos de definir la estructura del Portafolio. Éste debía recopilar evidencias de que el estudiante: se involucraba activamente tanto con su propio aprendizaje, como con su propia evaluación; podía discutir ideas con otros estudiantes, posicionándose fundadamente en una de ellas; era capaz de demostrar, a través de sus distintas producciones: el nivel de compromiso asumido frente al aprendizaje, el estado de su conocimiento y el análisis que realizaba de sus dificultades o de sus logros; se esforzaba para superar los errores cometidos; estaba en condiciones de generar iniciativas creativas para la ejecución de los distintos tipos de actividades; realizaba, continuamente, procesos de autorreflexión sobre lo que estaba aprendiendo y la forma en la que lo estaba haciendo; lograba trabajar con pares y/o en forma individual y era capaz de transferir los conocimientos que iba logrando a otros contextos relacionados, o no, con la matemática . Finalmente, el Portafolio, quedó conformado por los siguientes elementos: la portada (personalizada por cada estudiante, con datos institucionales, datos de la asignatura, datos de la estrategia didáctica y datos personales); el índice (de construcción permanente a medida que se desarrollara la asignatura); el detalle de los documentos que lo integrarían (proporcionado por el docente); los criterios de evaluación generales (propuestos por el docente, y a ser consensuados con los estudiantes una vez iniciada la experiencia); las encuestas (tres en total, implementadas en diferentes momentos del desarrollo de la materia); las actividades de seguimiento obligatorias, las actividades optativas y las evaluaciones obligatorias (heteroevaluación, autoevaluación y coevaluación); las hojas de visado del Portafolio (dos en total); el trabajo final integrador y la actividad de elección de las mejores producciones con la justificación correspondiente (al final del cursado de la asignatura y a cargo del estudiante). Materialmente, estos elementos serían progresivamente, incorporados en una carpeta; su fin no era la mera acumulación de documentos; pretendía convertirse en la evidencia concreta del proceso real seguido por el estudiante en su trayecto de formación (Martínez Segura, 2009).

La segunda etapa, que se desarrolló durante el ciclo lectivo de cursado de la materia, tuvo como actividad central la aplicación del Portafolio de Evaluación. Ya que el diseño experimental que involucró la investigación se planteó como un experimento pedagógico natural comparativo del tipo antes-después, se dividió al conjunto de estudiantes, en dos grupos: control y experimental. La integración de cada uno de éstos fue espontánea en la medida de que cada estudiante inscripto

escogió libremente a cuál de ellos pertenecer (muestra de sujetos voluntarios); la decisión tomada por los alumnos, estuvo precedida por el conocimiento pormenorizado de la propuesta académica que cada uno de los grupos desarrollaría.

En cuanto a la ejecución del experimento, el grupo de control trabajó con la propuesta educativa que la cátedra ponía en práctica anualmente. A su vez, el grupo experimental lo hizo a partir del desarrollo del Portafolio, en horarios áulicos y/o extra-áulicos, en forma individual y/o grupal, según el requerimiento de la actividad a elaborar.

En las clases presenciales del grupo experimental, el docente desempeñaba distintas funciones: dar cuenta la tarea del día; introducir los conceptos mínimos e indispensables para desarrollarla; aclarar las dudas que pudieran derivar de ella; propiciar instancias de reflexión colectiva; implementar los espacios para la autoevaluación, la coevaluación y la evaluación y, destacar los aciertos y rectificar los errores cometidos por los estudiantes en las distintas instancias de aprendizaje. De esta manera, fue posible el seguimiento continuo de la labor que realizaban todos y cada uno de los alumnos.

Tanto el grupo de control como el grupo experimental, fueron evaluados al inicio del experimento y a la finalización del mismo. El objetivo, en ambos casos, fue determinar la calidad de la asimilación de los conocimientos, a través del estudio de tres indicadores: la independencia, o sea, la capacidad del estudiante de llevar a cabo una acción sin apoyo externo; la reflexión, o sea, la posibilidad que tiene un estudiante de dar una respuesta verbal de lo que ha hecho y porque lo ha hecho y la corrección, o sea, la aptitud del sujeto de concretar correctamente, el objetivo propuesto para el desarrollo de una cierta actividad. El cotejo de los resultados de ambas instancias permitió indagar sobre el comportamiento de estos indicadores, dentro de cada uno de estos grupos (intragrupal), y entre los grupos (intergrupal).

La tercera etapa, etapa final, fue la más extensa. En ella se procesaron los datos recabados durante el desarrollo del experimento pedagógico. Se aplicaron técnicas de: la estadística descriptiva (organización y presentación de datos con tablas y gráficos estadísticos y cálculo de medidas descriptivas); la estadística inferencial, paramétrica y no paramétrica (Test Exacto de Fisher, Suma de Rangos, Test Chi-Cuadrado y Comparación de Proporciones) y el análisis cualitativo (análisis de contenido).

La información así lograda permitió, esencialmente: describir e interpretar el contexto en el cual se desarrolló el experimento pedagógico; chequear la opinión de los estudiantes que cursaron bajo la modalidad del Portafolio, respecto a la forma que vivieron dicha experiencia; determinar los efectos producidos por la efectivización de las instancias de retroalimentación y su repercusión en la reconstrucción de los saberes; conocer los criterios de valoración aplicados por los estudiantes para la selección de sus mejores producciones y, realizar distintos tipos de análisis cuanti-cualitativos del desempeño de ambos grupos de trabajo, hacia adentro de cada uno de ellos y, entre ellos.

Por su parte, la prueba estadística central, no paramétrica, que condujo a determinar el grado de verdad de la hipótesis planteada fue la Prueba de los Signos. Fue seleccionada atendiendo a que se ajustaba perfectamente a la situación que se pretendía analizar: estaba recomendada para los experimentos de tipo antes-después, en el que estuvieran involucradas variables cualitativas y, en donde se perseguía evaluar el efecto del empleo de algún tratamiento (en este caso, el uso del

Portafolio de Evaluación). La prueba se aplicó a los grupos experimental y de control, para determinar si, después de haber cursado la asignatura en cuestión, cada uno bajo la modalidad correspondiente (Portafolio de Evaluación o tradicional), se habían producido mejoras en los indicadores: independencia, reflexión y corrección.

Finalmente, la aplicación de la Prueba de los Signos, permitió confirmar lo planteado en la hipótesis de la tesis; o sea, que la implementación del Portafolio de Evaluación contribuyó a mejorar la calidad de la asimilación de los contenidos en los estudiantes que cursaban la asignatura Análisis Matemático, en la medida que atendió tanto al proceso de construcción de los aprendizajes como al producto de éste.

CONCLUSION

Por todo el relato precedente, se puede afirmar que, la experiencia realizada para mejorar el aprendizaje del Cálculo utilizando el Portafolio de Evaluación, tuvo resultados altamente satisfactorios.

De esto deviene que, es posible calificar a esta estrategia didáctica como de alta significación teórica y práctica.

De alta significación teórica, pues se constituyó en una herramienta:

- Necesaria, al posibilitar realizar una mejora en la calidad de la asimilación de los conocimientos de los estudiantes.
- Novedosa, ya que en la institución universitaria donde se desarrolló el trabajo de campo, de corte netamente profesionalista, no existían antecedentes de una innovación pedagógica que integrara la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación.
- Enriquecedora, pues aporta a la Didáctica de la Matemática del Nivel Superior, una forma alternativa de trabajar con una modelo educativo con características netamente constructivistas.

De alta significación práctica, ya que, al cobrar valor científico, puede ser aplicada a otros contextos dotados de características simulares a aquel en el que se desarrolló el experimento pedagógico.

El próximo paso, trabajar con el Portafolio de Evaluación en un contexto virtual.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bixio, C. (2002). *Enseñar a aprender.* Santa Fe, Argentina: Homo Sapiens.

Comisión Económica para América Latina y el Caribe (1992). *Educación y conocimiento: eje de la transformación productiva con equidad.* Chile: Publicación de las Naciones Unidas. Recuperado el 30 de marzo del 2013 de: http://repositorio.cepal.org/bitstream/handle/11362/2130/S9250755_es.pdf?sequence=1

Davini, M.C. (2011). *Métodos de Enseñanza.* Buenos Aires: Santillana

Digión, M. (2013). *Evaluación por Portafolio. Una oportunidad de aprendizaje significativo*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad Nacional de Tucumán, Argentina.

López Noguero, F. (2007). *Metodología participativa en la Enseñanza Universitaria.* Madrid*:* Narcea.

Martínez Segura, M.J. (2009). El Portafolios para el Aprendizaje y la Evaluación. En M.J. Martínez Segura (Coord.), *El Portafolios para el Aprendizaje y la Evaluación* (pp. 47-70), España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Murcia.

Perkins, D. (1995). *La escuela inteligente, del adiestramiento de la memoria a la educación de las mentes.* Barcelona: Gedisa.

Tedesco, J.C. (2012). *Educación y Justicia Social en América Latina.* Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica de Argentina

INTERPRETANDO LA CORRELACIÓN

Carmen Batanero, María M. Gea, Rafael Roa, Pedro Arteaga y Gustavo R. Cañadas
Universidad de Granada (España)
batanero@ugr.es, mmgea@ugr.es, rroa@ugr.es, parteaga@ugr.es, grcanadas@ugr.es

Palabras clave: Correlación, enseñanza, interpretación, bachillerato, universidad

Key words: Correlation, teaching, interpretation, high school, university

RESUMEN: El escrito trata de proporcionar al profesor información que le ayude a la mejor planificación de la enseñanza y a la evaluación de sus estudiantes. Se consideró la representación de datos bidimensionales, variables de las tareas de correlación, dificultades de los estudiantes y recursos tecnológicos. Dicha información se proporcionó de forma práctica, involucrando a los asistentes en la resolución de tareas que pueden proponer a sus estudiantes y en el posterior análisis didáctico de las mismas.

ABSTRACT: In this workshop, held during the conference, we tried to provide the teacher with information useful for the planning of teaching and the assessment of students. We considered the representations of bidimensional data, variables in correlation tasks, students' difficulties and technological resources. This information was provided in practical way, involving participants in the solution of tasks they can propose to their students and in the didactical analysis of the same.

INTRODUCCIÓN

El estudio de los datos bivariantes extiende la dependencia funcional a fenómenos caracterizados por la incertidumbre y es muy útil en el estudio de las relaciones entre variables, que es frecuente en la ciencia, tecnología y gestión. Explicar, controlar y predecir los sucesos que se presentan en nuestro día a día depende de habilidades y destrezas para detectar covariaciones entre variables, es decir, en la percepción de la correlación (Alloy y Tabachnik, 1984). En consecuencia, el razonamiento correlacional se encuentra presente en la vida cotidiana del ser humano, como actividad cognitiva fundamental para su vida diaria (Moritz, 2004; Zieffler, 2006; McKenzie y Mikkelsen, 2007), aunque no por ello está exenta de dificultades.

En este taller nos hemos centrado en datos estadísticos cuantitativos, cuya relación se modeliza mediante la correlación y regresión. Este tema se incluye en España en el primer curso de Bachillerato (estudiantes de 16 y 17 años), tanto en la especialidad de Ciencias y Tecnología, como en la de Humanidades y Ciencias Sociales. Aparece en las orientaciones curriculares de España, promulgadas por el Ministerio de Educación y Ciencia (MEC, 2007), con contenido similar en ambas modalidades, que se describe en la forma siguiente: “Distribuciones bidimensionales. Relaciones entre dos variables estadísticas. Regresión lineal” (MEC, 2007: 45449). También se especifica; “Se pretende comprobar la capacidad para estimar y asociar los parámetros relacionados con la correlación y la regresión con las situaciones y relaciones que miden” (MEC, 2007: 45450). En forma muy similar se contempla en el nuevo decreto de Educación Secundaria y Bachillerato (MECD, 2015).

La enseñanza del tema no es simple, pues se basa en la comprensión de múltiples conceptos como los de variable estadística y distribución bidimensional; diferentes tipos de frecuencias; dependencia estadística, funcional e independencia; covarianza y correlación; regresión, variable dependiente e independiente, modelo y modelo lineal, bondad de ajuste y coeficiente de determinación. La investigación sobre el tema, por otro lado, sugiere que se pueden presentar dificultades, tanto por el efecto de las creencias previas sobre la estimación de la correlación, como por los errores en la interpretación de los conceptos implicados en su estudio (Engel y Sedlmeier, 2011).

El objetivo principal del taller fue sensibilizar y motivar a los profesores sobre la problemática de una buena enseñanza, que permita el aprendizaje correcto de la correlación por parte de sus alumnos. Para ello se plantean dos objetivos específicos:

1. Proporcionar ejemplos de tareas que potencien el tratamiento de la correlación en el aula con una triple finalidad: a) favorecer el dinamismo de la enseñanza y el interés de los estudiantes; b) proporcionar a los profesores una actividad de evaluación para detectar y diagnosticar algunos de los sesgos descritos en la investigación desarrollada sobre correlación y c) ayudar a concienciar a los estudiantes de estos sesgos permitiendo así desarrollar en ellos un adecuado razonamiento correlacional.

2. Presentar a los participantes los principales resultados de las investigaciones sobre el desarrollo del razonamiento de los estudiantes en correlación en forma resumida y sencilla.

A continuación se describen los diferentes apartados del taller y las actividades llevadas a cabo.

REPRESENTACIONES DE DATOS BIDIMENSIONALES

Las investigaciones desarrolladas por Sánchez Cobo, Estepa y Batanero (2000) y Estepa (2007) junto con la de Zieffler (2006), nos acercan un poco más a comprender el modo en que los alumnos adquieren la noción de correlación. Estas investigaciones consideran cuatro formas de representar la correlación:

1.Descripción verbal, cuando describimos una distribución bivariada mediante el lenguaje natural; por ejemplo, indicamos que entre la talla y el peso de las personas hay una correlación alta y positiva.

2.Tabla de valores, o presentación de un conjunto de pares de valores numéricos de una distribución bivariada; en el ejemplo anterior, proporcionaríamos una tabla con datos de talla y peso de un grupo de personas.

3.Diagrama de dispersión, cuando el conjunto de pares de valores de una distribución bivariada se presentan mediante un diagrama cartesiano.

4.Coeficiente de correlación, cuando se da un valor numérico como medida de asociación existente entre las variables que conforman la distribución.

Para adquirir un razonamiento correlacional adecuado es de vital importancia dominar los procesos de traducción entre estas representaciones. Es decir, el alumno ha de saber traducir entre la tabla de datos, sus representaciones gráficas, las descripciones verbales sobre la correlación y el valor del coeficiente.

Por ello se comenzó el taller analizando las representaciones más usuales de datos bivariantes que se utilizan en los libros de texto para este nivel educativo (Gea, Batanero, Arteaga, Cañadas y Contreras, 2014). A continuación, se hizo observar a los participantes la ventaja de cada tipo de representación y se plantearon algunas tareas de traducción entre representaciones, analizando la actividad matemática requerida del estudiante en cada una de ellas y posibles dificultades que podrían encontrar.

VARIABLES EN LAS TAREAS DE ESTIMACIÓN DE LA CORRELACIÓN

Un modo de comenzar la enseñanza de la correlación y regresión en los cursos de Bachillerato, es pedir a los estudiantes que estimen la intensidad de la asociación a partir de los diagramas de dispersión. Un estudio de este tipo se realiza en Estepa (2008), cuyos resultados resumimos a continuación:

- El 90% de los estudiantes leen correctamente las coordenadas de los puntos;
- El 73% de los estudiantes discriminan la dependencia funcional de la aleatoria, siendo más fácil de detectar la dependencia funcional lineal;
- La detección de la correlación positiva depende de la intensidad de la correlación, no ocurre igual con la dependencia negativa;
- El ajuste correcto de una línea recta a un diagrama de dispersión depende del gráfico y de la intensidad de la correlación;

Es por ello importante tener en cuenta las siguientes variables, que afectan a la dificultad de las tareas de correlación (Sánchez Cobo et al., 2000):

1. Signo de la correlación entre las variables, pues podemos considerar tres casos: Dependencia directa, dependencia inversa e independencia. Aunque matemáticamente la dependencia directa e inversa se analizan de igual modo, con el coeficiente de correlación o la covarianza, psicológicamente no son percibidas de la misma forma por los estudiantes. Para resaltar ese hecho, Estepa (1994) definió la concepción unilateral o unidireccional de la correlación como un sesgo de algunos estudiantes que consideran la dependencia inversa como independencia.
2. Intensidad de la dependencia, pues la dependencia se percibe más fácilmente si es intensa. Algunos estudiantes equiparan una correlación pequeña con la independencia.
3. Concordancia entre los datos y las teorías previas sugeridas por el contexto. Muchos sujetos se guían preferentemente por sus teorías (en vez de usar los datos) cuando analizan la posible correlación entre dos variables. Chapman y Chapman(1967) describen un razonamiento común, que denomina correlación ilusoria y que fue propuesto para designar la correlación que perciben los observadores entre dos clases de sucesos que o bien (a) no están correlacionados, (b) se correlacionan con un menor grado del que se declara, o (c) se correlacionan en la dirección opuesta de la que se declara.
4. Tipo de covariación. Barbancho (1973) indica que la correlación entre dos variables puede deberse a una dependencia causal unilateral, donde una de las variables es una causa y la otra un efecto. Pero también puede deberse a una interdependencia (cada variable afecta a la otra), una dependencia indirecta (una tercera variable afecta a otras dos), concordancia (coincidencia en preferencia u ordenación de la misma serie de datos por dos jueces) o covariación casual. Pero algunos estudiantes sólo admiten la relación causal, confundiendo correlación y causación (concepción causal, según Estepa, 1994).

Para informar a los asistentes sobre la importancia de estas variables se propusieron algunas tareas de estimación de la correlación, pidiéndoles identificar el signo de la correlación, estimar sus intensidad y decidir el tipo de función de ajuste (en caso de correlación moderada o alta). Seguidamente se realizó un análisis de las principales variables implícitas en las tareas propuestas y de la forma en que estas variables permiten graduar la dificultad de estas tareas cuando queremos utilizarlas en la evaluación de los estudiantes (Gea, Batanero, Cañadas, Arteaga, y Contreras, 2013).

En el taller se pidió, además, interpretar los tipos de covariación que podrían explicar dicha correlación, diferenciando la relación de correlación y de causalidad.

ANÁLISIS DE LAS DIFICULTADES DE LOS ESTUDIANTES

La investigación sobre razonamiento correlacional se encuentra ampliamente desarrollada en el ámbito de la Psicología, donde se ha evidenciado la presencia de errores o sesgos en la estimación de la correlación al existir en los sujetos expectativas o esquemas referidos a los estímulos presentes en la situación a que se enfrentan.

Para informar a los profesores de estas investigaciones, en este apartado del taller se trató de identificar las dificultades potenciales de los estudiantes en las tareas propuestas anteriormente.

Además de recoger las propuestas por los profesores y observadas en su experiencia didáctica, se proporcionó información sobre concepciones incorrectas y sesgos en la interpretación de la correlación descritas en la investigación.

En este taller se ha tenido en cuenta la siguiente bibliografía sobre correlación y regresión, presentando ejemplos de los errores más comunes:

1. Estudios sobre razonamiento correlacional, que describen su importancia como actividad cognitiva fundamental del ser humano (Moritz, 2004; Zieffler, 2006; McKenzie y Mikkelsen, 2007). Algunos trabajos indican sesgos en este razonamiento, como la correlación ilusoria, donde los sujetos crean sus propias teorías sobre la correlación entre dos variables, sin tener en cuenta la correlación en los datos (Chapman y Chapman, 1967). Otro sesgo descrito es el efecto de la regresión, donde en investigaciones experimentales pueden confundirse efectos del tratamiento con la tendencia de la variable a acercarse a su media, en dos medidas consecutivas de la misma magnitud (Engel y Sedlmeier, 2011).
2. Destrezas requeridas para traducir datos bivariados de representación numérica o descripción verbal a gráfica o tabular, y viceversa (Moritz, 2004; Sánchez Cobo, et al., 2000). Algunos estudiantes tienen dificultades para traducir entre diferentes representaciones, sobre todo partiendo de la descripción verbal y coeficiente de correlación, cuando se les pide cambiar a otro tipo de representación.
3. Concepciones incorrectas sobre la correlación: Estepa (1994) describe las siguientes concepciones incorrectas sobre la correlación: a) concepción determinista, que consiste en aceptar sólo la dependencia funcional; b) concepción local, propia de los estudiantes que tienden a pensar que se puede medir la correlación sólo con parte de los datos; c) concepción unidireccional, cuando no se acepta como correlación la correlación inversa; y d) concepción causal, que consiste en confundir correlación y causalidad. Estas concepciones permanecen después de la enseñanza si no se tienen en cuenta en la misma (Batanero, Godino y Estepa, 1998).

RECURSOS TECNOLÓGICOS

Los currículos actuales en España (MEC, 2007; MECD, 2015) recomiendan el uso de la tecnología en la enseñanza de la estadística, por la ventaja que supone en el cálculo y representación gráfica, el trabajo con datos reales y el aprendizaje de conceptos a través de la simulación. Hoy en día existe una gran variedad de recursos tecnológicos como la calculadora, hoja de cálculo, applets y programas de ordenador específicos, que pueden facilitar la realización de cálculos y gráficos. El aprendizaje de y a través de la tecnología es esencial en esta etapa educativa, sobre todo para desarrollar este tema, y se incluye como objetivo general en bachillerato: “Utilizar con solvencia y responsabilidad las tecnologías de la información y la comunicación” (MEC, 2007, p.45382).

El uso de la tecnología en la enseñanza de la estadística ha sido reconocido, entre otros, por Pratt, Davies y Connor (2011), que destacan la reducción del tiempo de cálculo y la ampliación del tipo de gráficos que el alumno puede realizar interactivamente. Igualmente señalan la posibilidad de trabajar con proyectos, en los cuales alumno parte de un problema de investigación y completa

todos los pasos de una investigación (Wild y Pfannkuch, 1999). Por este motivo se finalizó el taller describiendo algunos recursos para el estudio de la correlación.

Entre ellos destacamos los conjuntos de datos reales, que hoy día son accesibles desde muchas instituciones en Internet, y que permiten plantear a los estudiantes, proyectos de investigación como el descrito en Batanero, Díaz y Gea (2011). Una gran ventaja al utilizar estos datos es que se potencia la interdisciplinariedad en clase de estadística, permitiendo aprender contenidos que no se adquieren habitualmente con problemas tomados de los libros de texto; por ejemplo, el efecto de valores atípicos sobre el cálculo de un estadístico (Hall, 2011). Al facilitar el cálculo y la representación gráfica, la tecnología disminuye el problema tradicional en la enseñanza de la estadística en cuanto al desfase entre la comprensión de los conceptos y los medios técnicos de cálculo para poder aplicarlos (Batanero y Díaz, 2011).

También se mostraron las potencialidades de las utilidades de Excel para el estudio de la correlación y regresión, así como algunos applets disponibles en Internet, que se describen con más detalle en Gea, Díaz-Levicoy, López-Martín y Cañadas (2015). Estos recursos permiten visualizar la correlación y sus diferentes tipos, así como observar el efecto de los puntos atípicos sobre el valor del coeficiente de correlación. Asimismo, hacen asequible a los estudiantes el criterio de mínimos cuadrados, al representar las desviaciones de los puntos a la recta de regresión y comprobar su efecto sobre la suma de cuadrados. En algunos de ellos es posible ajustar a ojo la recta de regresión para comparar con la recta de mínimos cuadrados. En otros casos es posible realizar tareas de estimación y traducción de la correlación, que pueden ser también de gran ayuda para la formación de profesores y estudiantes.

CONSIDERACIONES FINALES

La preparación del profesor de matemáticas para enseñar estadística es una preocupación actual entre las sociedades de profesores y las sociedades de investigación en educación estadística. Es por ello que los investigadores tratan de acercarse al profesor para informarle de los resultados de la investigación educativa y ayudarles a prepararse para la docencia. Al mismo tiempo, las reflexiones de los profesores y la interacción con los mismos durante estos talleres amplían el conocimiento del investigador sobre el trabajo en el aula.

Esperamos que el tipo de tareas sugeridas en este taller, junto con la bibliografía comentada, pueda ser útil a los profesores responsables de impartir el tema de correlación y regresión. Recomendamos al profesor, asimismo, incluir algunas de estas tareas en el trabajo con sus alumnos, para ayudarles a desarrollar un razonamiento correlacional potente que les ayude en la toma de decisiones.

En este sentido es importante reforzar el uso de la tecnología, teniendo en cuenta la alta idoneidad didáctica del uso de recursos tecnológicos en la enseñanza, sobre todo desde la componente afectiva, pues estos recursos son muy motivadores para el estudiante. Además, al facilitar el aprendizaje y potenciar la creatividad se refuerza la componente cognitiva, al poder ampliar las aplicaciones del tema, lo que lleva a conectar las matemáticas con otras materias.

Agradecimiento: Proyecto EDU2013-41141-P (MEC) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

REFERENCIAS BIBLIOAGRÁFICAS

Alloy, L.B. y Tabachnik, N. (1984). Assessment of covariation by humans and animals: the joint influence of prior expectations and current situational information. *Psychological Review 91*(1), 112-149.

Barbancho, A.G. (1973). *Estadística elemental moderna*. Barcelona: Ed. Ariel. (Cuarta edición, 1.975).

Batanero, C. y Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos.* Universidad de Granada.

Batanero, C., Díaz, C. y Gea, M. M. (2011). Estadísticas de la pobreza y desigualdad. En C. Batanero y C. Díaz (Eds.), *Estadística con proyectos* (pp. 97-124). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Batanero, C., Godino, J. D., & Estepa, A. (1998). Building the meaning of statistical association through data analysis activities. In A. Olivier y K. Newstead, (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 221-236). Stellembosch, South Africa: Universidad de Stellenbosh.

Chapman, L.J. & Chapman, J.P. (1967). Genesis of popular but erroneous psychodiagnostic observations. *Journal of Abnormal Psychology 72* (3), 193-204.

Engel, J. & Sedlmeier, P. (2011). Correlation and regression in the training of teachers. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education: A Joint ICMI/IASE study* (pp. 247-258). New York: Springer.

Estepa, A. (1994). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores.* Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada.

Estepa, A. (2007). Caracterización del significado de la correlación y regresión de estudiantes de Educación Secundaria. *Zetetiké,15* (28), 119-151. Recuperado de http://www.fae.unicamp.br/zetetike/viewissue.php?id=5

Estepa, A. (2008). Interpretación de los diagramas de dispersión por estudiantes de bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias, 26* (2), 257-271.

Gea, M. M., Batanero, C., Cañadas, G. R., Arteaga, P. y Contreras, J. M. (2013). La estimación de la correlación: Variables de tarea y sesgos de razonamiento. En A. Salcedo (Ed.) *Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas*. Caracas (361-384). Universidad Central de Venezuela.

Gea, M. M., Batanero, C., Arteaga, P., Cañadas, G. R., y Contreras, J. M. (2014). Análisis del lenguaje sobre la correlación y regresión en libros de texto de bachillerato. *SUMA, 76,* 47-45.

Gea, M., Díaz-Levicoy, D., López-Martín, M. M. y Cañadas, G. R. (2015). Recursos virtuales para el estudio de la correlación y regresión. Presentado en las *17 Jornadas Nacionales de Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (JAEM). Cartagena.Julio de 2015: Federación Española de Profesores de Matemáticas.

Hall, J. (2011). Engaging teachers and students with real data: benefits and challenges. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study* (pp. 335-346). New York: Springer.

MEC (2007). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*. Madrid: Autor.

MECD (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. España: MECD.

Mckenzie, C.R.M. & Mikkelsen, L.A. (2007). A Bayesian view of covariation assessment. *Cognitive Psychology, 54* (1), 33-61.

Moritz, J. (2004). Reasoning about covariation. In D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The Challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*, (pp. 221-255). Dordrecht (The Nederlands): Kluwer.

Pratt, D., Davies, N. & Connor, D. (2011). The role of technology in teaching and learning statistics. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study* (pp. 97-107). New York: Springer.

Sánchez Cobo, F. T., Estepa, A. y Batanero, C. (2000). Un estudio experimental de la estimación de la correlación a partir de diferentes representaciones. *Enseñanza de las Ciencias, 18* (2), 297-310.

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-265.

Zieffler, A.S. (2006). *A longitudinal investigation of the development of college students' reasoning about bivariate data during an introductory statistics course.* Tesis doctoral no publicada. EUA: Universidad de Minnesota.

UN SISTEMA DE AUDIO ASOCIADO AL CONCEPTO DE COMBINACIÓN LINEAL

Carlos Oropeza Legorreta, Javier Lezama Andalón
Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán-UNAM, CICATA-IPN (México)
coropeza96@hotmail.com, jlezamaipn@gmail.com

Palabras clave: Combinación e independencia lineal, modelación matemática

Key words: Combination and linear independence, mathematical modeling

RESUMEN: A los estudiantes de las escuelas de ingeniería les resulta motivante encontrar aplicaciones de conceptos teóricos en diversos diseños implementados. En este reporte mostramos la articulación del concepto de combinación lineal con el diseño de un sistema de audio desde la perspectiva de la Modelación en Matemáticas entendida ésta como un proceso involucrado en la obtención de un modelo. Nuestra propuesta de estudio es de nivel licenciatura, en ella reportamos los cálculos necesarios para el desarrollo del sistema de audio, se utiliza software matemático para verificar resultados, se analizan las representaciones geométricas planteadas y se hace un comparativo de resultados.

ABSTRACT: Students of engineering schools are motivating them to find applications of theoretical concepts implemented in various designs. In this report we show the articulation of the concept of linear combination with the design of an audio system from the perspective of modeling in mathematics understood as a process involved in obtaining a model. Our proposal is for undergraduate study in her report the calculations necessary for the development of audio system, mathematical software is used to verify results, the geometric representations raised and a comparison of results is discussed.

ANTECEDENTES

Una situación que frecuentemente causa inquietud en la formación de ingenieros en nuestro sistema educativo nacional es el hecho de que los estudiantes regularmente argumentan no encontrar aplicación de los conceptos estudiados en la mayoría de los cursos de matemáticas del denominado tronco básico: álgebra, geometría analítica, cálculo diferencial e integral y álgebra lineal entre otras. Atendiendo a esta preocupación nos dimos a la tarea de realizar un estudio a nivel licenciatura que articula diversos aspectos y que puede ser utilizado como referente para estudiantes de nuevo ingreso y de esta manera intentamos contribuir con su formación.

El propósito del estudio es mostrar la importancia que tiene integrar varios conceptos analizados en diversas asignaturas incluidas en los planes y programas de estudio de las ingenierías que ofrece nuestra facultad y que de forma integral pueden ser utilizados para la realización de un modelo. De manera implícita, mostrar la manera de cómo concibe la Modelación en Matemática Educativa nuestro grupo de trabajo. Esta propuesta de ninguna manera busca sustituir los métodos convencionales de enseñanza, más bien intenta considerarlo como un proceso que se lleve a cabo de manera simultánea o paralela con el fin de acelerar, mejorar y depurar el proceso de aprendizaje en los alumnos de ingeniería de la FES Cuautitlán UNAM, por otra parte promover la gran utilidad que tienen los conceptos que en la asignatura de álgebra lineal se estudian, según las ideas expuestas en Poole (2011), Lay (2007), Kolman y Hill (2006), y Del Valle (2011); contrario a lo que algunos de los alumnos opinan mediante la aplicación de conceptos en forma pragmática, caso concreto el diseño de un sistema de audio.

Convencionalmente durante el proceso de estudio de la asignatura antes referida, se incluye de manera complementaria el uso de software matemático como instrumento verificador de resultados, cabe aclarar que nosotros proponemos MAPLE. Sin embargo, los estudiantes son libres de utilizar cualquier otro software que hayan estudiado en otras asignaturas o cursos especializados. Primero los estudiantes realizan los cálculos de la manera tradicional con lápiz y papel y luego verifican los resultados en alguna TIC como la computadora o calculadora científica y de ésta manera se fomenta una independencia del alumno con respecto al profesor (es decir, los estudiantes pueden verificar los resultados de manera inmediata y no hasta que el profesor les proporcione las respectivas respuestas). El uso de las representaciones geométricas en algunos conceptos como el de combinación lineal y el de dependencia e independencia lineal han sido un elemento complementario para la compresión y asimilación de estos y que hemos venido instrumentando a medida que hemos realizado y analizado las exploraciones correspondientes. Finalmente la síntesis del trabajo que en esta ocasión presentamos pretende ejemplificar el uso de la modelación matemática de un sistema de audio y la relación que guarda con conceptos de álgebra lineal, asignatura que convencionalmente es impartida en los primeros cursos de ingeniería. El diseño pretende crear un lazo entre las matemáticas, la aplicación y la utilidad mediante la implementación del sistema que hemos modelado sobre una tarjeta de circuito impreso (PCB), para ello necesitamos primeramente realizar las mediciones de las cantidades físicas correspondientes y verificar que funcione correctamente sobre una placa de pruebas, de lo contrario se debe localizar la falla y enmendarla. El diseño de la PCB se llevó a cabo en un software de automatización electrónico, de los varios que existen en el mercado elegimos OrCAD ya que según datos del fabricante es utilizado tanto por ingenieros electrónicos en sus proyectos

individuales como en el sector industrial, desde pequeñas hasta grandes empresas, incluso mencionan que es un software excelente para estudiantes de otras especialidades.

MARCO TEÓRICO

En nuestro trabajo, apoyados en una teoría como la modelación matemática pretendemos darle un significado a un sistema de audio permitiendo enriquecer la comprensión del concepto de combinación lineal de vectores ya que se incluyen diversas representaciones de los diferentes conceptos involucrados para el desarrollo de dicho proyecto. La teoría de la modelación estudia a los modelos como estructuras básicas en la cognición, así como el conocimiento científico. Mantiene una clara distinción entre los modelos mentales con que la gente piensa y modelos conceptuales que se comparten abiertamente (Hestenes, 2010).

De ahí que para Bassanezi (1994) el uso de la modelación en la enseñanza conduce al aprendizaje de contenidos matemáticos que están conectados a otras formas de conocimiento. El trabajo con la modelación matemática no intenta simplemente ampliar el conocimiento sino desarrollar una forma particular de pensar y actuar: produciendo conocimiento, aunado abstracciones y formalizaciones, interconectadas a fenómenos y procesos empíricos considerados como situaciones problemáticas.

Mientras, Hestenes (2010) advierte que el termino modelo se utiliza de manera informal; no obstante, para hacer distinciones teóricas se necesitan definiciones precisas. Este autor, plantea una definición general:

> Un modelo es una representación de la estructura en un sistema dado. Un sistema es un conjunto de objetos relacionados, que puede ser real o imaginaria, física o mental, simple o compuesto. La estructura de un sistema es un conjunto de relaciones entre sus objetos. El sistema en sí se llama el referente del modelo (p.17).

La modelación permite al profesor considerar el entorno físico y social para abordar situaciones problema dentro de contextos vinculados a los alumnos, es decir, el profesor tendrá en esta actividad muchas opciones que le puedan ayudar a relacionar los conceptos matemáticos con el mundo real, de tal manera que los alumnos puedan vislumbrar y otorgar una mayor importancia a las matemáticas escolares. La modelación también contribuye a que los alumnos perciban las matemáticas como una disciplina que puede utilizarse para comprender y modificar la realidad, mediante el planteamiento de situaciones problema del mundo real, lo más cercanas posibles a la sensibilidad del estudiante (Castro y Castro, 2000; Romero y Castro, 2008).

Como las matemáticas no solo contribuyen extraordinariamente al ejercicio intelectual, sino también son el lenguaje de la ciencia, en las dos últimas décadas en diversos países, viene creciendo un movimiento en pro de esta metodología en el proceso de enseñanza de las matemáticas. Preocupaciones sobre qué, cómo, cuánto y para qué enseñar matemáticas han contribuido al fortalecimiento de esas investigaciones en el área de la educación matemática. Para implementar la modelación matemática en la enseñanza, el profesor actúa en dos tipos de abordajes: el primero, le permite desarrollar el contenido programático a partir de modelos matemáticos aplicados a las diversas áreas del conocimiento y el segundo orienta a sus alumnos para que hagan un trabajo de modelaje. La modelación puede ser implementada en cualquier nivel de escolaridad: desde el ciclo primario hasta la licenciatura. El tema (o situación-problema) es

único para todas las clases y de él se extrae el contenido programático. Se puede utilizar temas diferentes para presentar cada tópico o contenido matemático del programa del año lectivo (bimestre, semestre). Si se opta por tema único para el periodo lectivo, es importante que sea suficiente para poder tratar los contenidos programáticos y que este en sintonía con el interés de los alumnos.

DESARROLLO

En esta parte realizamos una descripción de las etapas del diseño, mostramos algunos cálculos necesarios para el desarrollo del sistema de audio y la importancia de utilizar el software matemático para verificar los resultados ya que de esta manera se pueden minimizar los errores. El proyecto inicia con un estudio centrado en aspectos de corte electrónico (situación permisible para estudiantes de los últimos semestres de ingeniería), posteriormente se logra la identificación de que dicho estudio gira alrededor de la soluciones de un conjunto de sistemas de ecuaciones con los parámetros voltaje y corriente, que a su vez pueden ser asociados por su planteamiento al concepto de Combinación Lineal e Independencia Lineal, conceptos estudiados en la asignatura de Álgebra Lineal y que es posible asignarles una representación geométrica (Oropeza y Lezama, 2007). Para asegurarnos de los resultados analíticos en la etapa final se instrumenta el uso de software especializado que indica la coincidencia o no de los resultados finales. La razón por la cual se diseña un amplificador de audio en la configuración de emisor común es porque así amplificamos de la señal de audio, voltaje y corriente a su vez, considerada como una de las configuraciones más sencillas de los amplificadores. Esta aplicación toma como base la integración de un conjunto de conceptos que pueden incorporarse en la modelación de sistemas con diversas aplicaciones y que buscan tratar de dar una respuesta a la pregunta *¿para qué me sirve esta materia?*

Síntesis técnica.

De acuerdo a lo anterior aplicaremos el concepto de Combinación e Independencia Lineal para obtener los siguientes parámetros (cabe mencionar que algunos de los valores que hemos elegido en el diseño se han encontrado a base de pruebas en el laboratorio):

- Punto de operación del amplificador de audio transistorizado de la figura 1.
- Realizar algunas posibles representaciones geométrico–espaciales utilizando software matemático.
- Realizar la simulación del circuito en software de automatización electrónico.
- Implementar el circuito con el material que a continuación se proporciona y hacer las mediciones correspondientes con un multímetro adecuado en las escalas adecuadas para recrear el concepto de Combinación Lineal real.
- Crear un cuadro comparativo que incluya los cálculos teóricos, simulados y reales, y verificar que haya sido de utilidad los conceptos mencionados.

Figura 1. Esquemático del amplificador

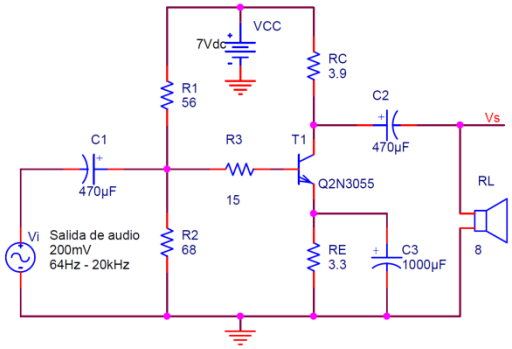
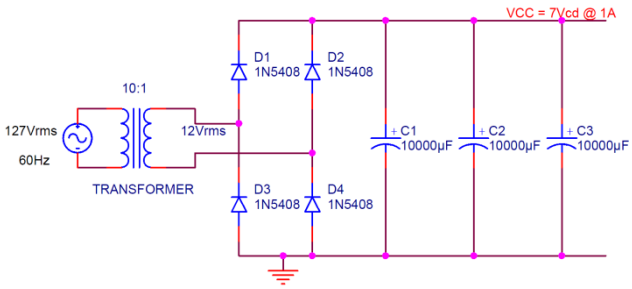
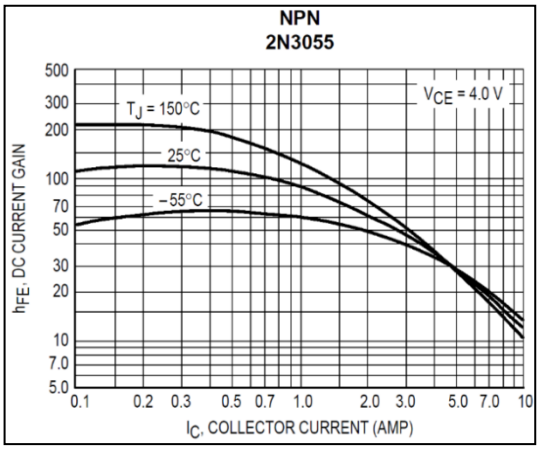


Figura 2. Esquemático del rectificador monofásico de onda completa tipo puente, es decir, de la fuente de poder V_{cc}



Con base a la hoja técnica del 2N3055 de Motorola®, refiriéndonos a la gráfica de ganancia de corriente directa versus corriente de colector en 25°C y sabiendo que el circuito consume cerca de 1A, tomaremos una ganancia estática (o de corriente directa) h_{FE} (β) de 100.

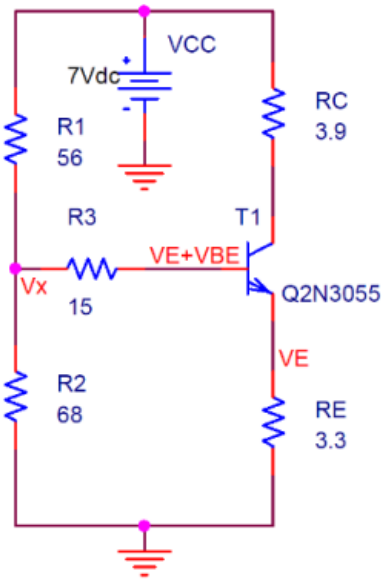
Figura 3. Gráfica de la ganancia de corriente hFE versus corriente de colector del transistor 2N3055 de Motorola®



En la gráfica vemos que dicho valor debería ser 90 para corriente de colector de 1A, voltaje colector – emisor de 4V y a 25°C, pero el transistor comenzará a disipar cierta potencia y su temperatura ascenderá un poco, por lo que por este motivo hemos redondeado h_{FE} (β) = 100. Sabiendo que se trata de un transistor de silicio, tomaremos como 0.7V la caída de voltaje base – emisor.

De acuerdo con la Ley de Corrientes de Kirchhoff aplicada al supernodo base – emisor, donde V_x es el nodo donde se unen las resistencias R_1, R_2 y R_3, o bien el nodo donde fluyen las corrientes I_1, I_2 e I_B, las cuales circulan a través de R1, R2 y R3 (Figura 4), respectivamente tenemos:

Figura 4. Esquemático del amplificador para un análisis de corriente directa, aquí aplicaremos la Ley de Corrientes de Kirchhoff o Ley de Nodos.



Del supernodo $V_E + V_{BE}$:

$$\frac{V_E}{R_E} + \frac{(V_E + V_{BE}) - V_x}{R_3}(1+\beta) = 0$$

$$\frac{1}{R_E}V_E + \frac{1+\beta}{R_3}V_E + \frac{1+\beta}{R_3}V_{BE} - \frac{1+\beta}{R_3}V_x = 0$$

$$-\frac{1+\beta}{R_3}V_x + \left(\frac{1}{R_E} + \frac{1+\beta}{R_3}\right)V_E = -\frac{1+\beta}{R_3}V_{BE} \quad (1)$$

Del nodo V_x:

$$\frac{V_x - V_{CC}}{R_1} + \frac{V_x - (V_E + V_{BE})}{R_3} + \frac{V_x}{R_2} = 0$$

$$\frac{V_x}{R_1} - \frac{V_{CC}}{R_1} + \frac{V_x}{R_3} - \frac{V_E}{R_3} - \frac{V_{BE}}{R_3} + \frac{V_x}{R_2} = 0$$

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)V_x - \frac{1}{R_3}V_E = \frac{V_{CC}}{R_1} + \frac{V_{BE}}{R_3} \quad (2)$$

$$\mathbf{V}_x = \begin{bmatrix} -\frac{1+\beta}{R_3} \\ \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} \end{bmatrix} S \quad \mathbf{V}_\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_E}+\frac{1+\beta}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} \end{bmatrix} S \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -\frac{1+\beta}{R_3}V_{BE} \\ \frac{V_{CC}}{R_1}+\frac{V_{BE}}{R_3} \end{bmatrix} A$$

Las ecuaciones (1) y (2) describen parte del funcionamiento del circuito, y con base en ellas tenemos los siguientes vectores, mismos que se han escrito con mayúsculas, sin cursivas y en negritas, ya que según la bibliografía así se denota a los vectores. Observe sus unidades.

Ahora bien, de acuerdo con el concepto de Combinación Lineal existen dos escalares *vx* y *ve*, tales que satisfacen la siguiente expresión.

$$vx\,\mathbf{V}_x + ve\,\mathbf{V}_\mathbf{E} = \mathbf{V} \qquad (vx[V])(\mathbf{V}_x[S]) + (ve[V])(\mathbf{V}_\mathbf{E}[S]) = \mathbf{V}[A]$$

Estos escalares son los valores de voltaje que hay en el nodo V_x o de la resistencia R_2 y en el emisor del transistor o de la resistencia R_E respectivamente, los cuales podemos encontrar reduciendo por renglones en forma escalonada una matriz aumentada de 2×3 formada por los vectores anteriormente mencionados mediante algún algoritmo algebraico como puede ser la Eliminación de Gauss – Jordan, Gauss – Seidel, descomposición LU, etc., como se puede observar. Por lo tanto el voltaje del nodo V_x o de la resistencia R_2 y el voltaje de emisor V_E o de la resistencia R_E, es decir, de los escalares *vx* y *ve*, son:

$$V_x = V_{R_2} = vx = 3.584V \qquad V_E = V_{R_E} = ve = 2.760V$$

Cabe mencionar que los vectores $\mathbf{V_x}$ y $\mathbf{V_E}$ no son voltajes, estos vectores tienen unidades de conductancia (siemens) que, multiplicados por los escalares *vx* y *ve* que son voltajes (con voltios como unidades), nos dan como resultado el vector **V**, en amperios, esto de acuerdo a la Ley de Ohm. Una vez obtenidos estos escalares, podemos proceder al calcular el punto de operación del transistor como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1. Valores calculados

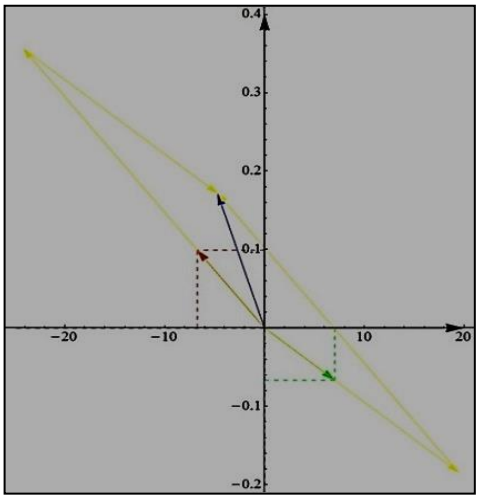
Resistencias	Corrientes	Voltajes
$R_1 = 56\Omega$ $R_2 = 68\Omega$ $R_3 = 15\Omega$ $R_C = 3.9\Omega$ $R_E = 3.3\Omega$	$I_E = \frac{V_E}{R_E} = \frac{2.760V}{3.3\Omega} = 836.4mA$ $I_C = \frac{I_E}{1+\frac{1}{\beta}} = \frac{836.4mA}{1+\frac{1}{100}} = 828.1mA$ $I_B = \frac{I_C}{\beta} = I_{R_3} = \frac{828.1mA}{100} = 8.28mA$ $I_{R_1} = \frac{V_{R_1}}{R_1} = \frac{3.416V}{56\Omega} = 61mA$ $I_{R_2} = \frac{V_{R_2}}{R_2} = \frac{3.584V}{68\Omega} = 52.71mA$	$V_{CC} = 7V$ $V_{BE} = 0.7V$ $V_x = V_{R_2} = 3.584V$ $V_E = V_{R_E} = 2.760V$ $V_{R_1} = V_{CC} - V_{R_2} = 7V - 3.584V = 3.416V$ $V_B = V_E + V_{BE} = 2.760V + 0.7V = 3.460V$ $V_C = V_{CC} - I_E R_E = 7V - (836.4mA)(3.3\Omega) = 3.230V$ $V_{CE} = V_C - V_E = 3.229V - 2.760V = 1.010V$ $V_{R_3} = V_{R_2} - V_B = 3.584V - 3.460V = 0.124V$ $V_{R_C} = V_{CC} - V_C = 7V - 3.230V = 3.77V$
Potencia del transistor		
$P_Q = I_B V_{BE} + I_C V_{CE} = (8.28mA)(0.7V) + (828.1mA)(1.010V) = 842.3mW$		
Ganancia estática o de corriente directa		
$h_{FE} = \beta = 100$		

Observación.

Es necesario aclarar que por cuestión de espacio solo se proporcionan parte de los cálculos realizados, pero que en el proyecto también se realizó una simulación y un modelo con elementos reales.

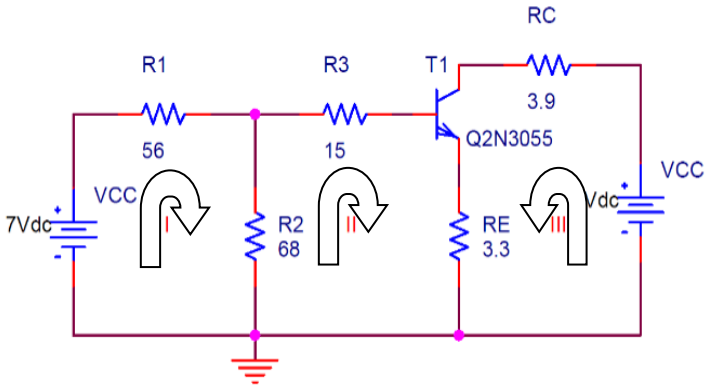
Con estos valores podemos recrear matemáticamente el concepto de Combinación Lineal -en esta ocasión utilizando el software 'Mathematica'- cuyo significado es el siguiente: la flecha roja y verde son los vectores $\mathbf{V_x}$ y $\mathbf{V_E}$ respectivamente, la flecha azul es el vector **V** que es la combinación lineal de los anteriores. Existen cuatro vectores amarillos que forman un romboide, dos de ellos son paralelos a $\mathbf{V_x}$, los cuales tienen *vx* veces la magnitud de $\mathbf{V_x}$ y los otros dos que son paralelos a $\mathbf{V_E}$, los cuales tienen *ve* veces la magnitud de $\mathbf{V_E}$. Si los vectores rojo y verde fueran colineales, es decir, que se encontraran dentro de una misma línea recta cual fuese su pendiente, éstos serían vectores Linealmente Dependientes [26], y entonces el sistema de dos ecuaciones que se plantea anteriormente tendría múltiples soluciones reflejando que el sistema que se está analizando contiene datos erróneos. Para demostrar matemáticamente que los vectores $\mathbf{V_x}$ y $\mathbf{V_E}$ son Linealmente Independientes bastaría con sustituir en (3) el vector **V** por un vector 0, reducir por renglones en forma escalonada la matriz y encontrar que los valores de las constantes sean 0, o en otras palabras obtener lo siguiente:

Figura 5. Representación geométrica del concepto de Combinación Lineal obtenido de un análisis de corriente continua del circuito amplificador



Por otro lado, también podemos obtener del mismo circuito otra representación del concepto de Combinación Lineal, aplicando la Ley de Voltajes de Kirchhoff sobre las mallas I y II.

Figura 6. Esquemático del amplificador para el análisis de corriente directa, presentado de otra manera, aquí aplicaremos la Ley de Voltajes de Kirchhoff o ley de mallas



De la malla I:

$$-V_{CC} + I_1R_1 + (I_1 - I_B)R_2 = 0$$

$$I_1R_1 + I_1R_2 - I_BR_2 = V_{CC}$$

$$(R_1 + R_2)I_1 - \frac{R_2}{\beta}I_C = V_{CC} \quad (3)$$

De la malla II:

$$(I_B - I_1)R_2 + I_BR_3 + V_{BE} + I_ER_E = 0$$

$$I_BR_2 - I_1R_2 + I_BR_3 + I_ER_E = -V_{BE}$$

$$\frac{R_2}{\beta}I_C - I_1R_2 + \frac{R_3}{\beta}I_C + (I_C + I_B)R_E = -V_{BE}$$

$$\frac{R_2}{\beta}I_C - I_1R_2 + \frac{R_3}{\beta}I_C + \left(I_C + \frac{I_C}{\beta}\right)R_E = -V_{BE}$$

$$-R_2I_1 + \left(\frac{R_2}{\beta} + \frac{R_3}{\beta} + \frac{R_E}{\beta} + R_E\right)I_C = -V_{BE} \quad (4)$$

De acuerdo con estas ecuaciones, tenemos los siguientes vectores. Observe sus unidades.

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 \\ -R_2 \end{bmatrix}\Omega \qquad \mathbf{I}_C = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{\beta} \\ \frac{R_2}{\beta} + \frac{R_3}{\beta} + \frac{R_E}{\beta} + R_E \end{bmatrix}\Omega \qquad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_{CC} \\ -V_{BE} \end{bmatrix}\mathrm{V}$$

Ahora de acuerdo con el concepto de Combinación Lineal [24], existen dos escalares i1 e ic, tales que satisfacen la siguiente expresión.

$$i1\mathbf{I}_1 + ic\mathbf{I}_C = \mathbf{V} \qquad \left(i1[A]\right)\left(\mathbf{I}_1[\Omega]\right) + \left(ic[A]\right)\left(\mathbf{I}_C[\Omega]\right) = \mathbf{V}[V]$$

Comprender el sentido físico de estos escalares es un poco más complicado, *i1* representa la corriente que circula a través de la resistencia R_1, mientras que *ic* es la corriente que pasa a través del colector del transistor y de R_C, si bien el colector no está en la malla I ni II, la corriente que fluye a través de él se debe dejar en función de la corriente que pasa por la base del mismo transistor (y por R_3) considerando la ganancia estática h_{FE}, de acuerdo al estudio de los transistores en la etapa de polarización [27]. Una vez explicado esto, estos valores o escalares los podemos encontrar reduciendo por renglones en forma escalonada una matriz aumentada de 2×3 formada por los vectores anteriormente mencionados mediante algún algoritmo algebraico como puede ser la Eliminación de Gauss–Jordan, Gauss–Seidel, descomposición LU. Por lo tanto la corriente que pasa por la resistencia R_1 y la que circula por el colector del transistor y por R_C, es decir de los escalares *i1* e *ic* son:

$$\left[\begin{array}{cc|c} R_1 + R_2 & -\frac{R_2}{\beta} & V_{CC} \\ -R_2 & \frac{R_2}{\beta} + \frac{R_3}{\beta} + \frac{R_E}{\beta} + R_E & -V_{BE} \end{array}\right] \quad (6)$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 56 + 68 & -\frac{68}{100} & 7 \\ -68 & \frac{68}{100} + \frac{15}{100} + \frac{3.3}{100} + 3.3 & -0.7 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 60.99\times10^{-3} \\ 0 & 1 & 828.13\times10^{-3} \end{array}\right]$$

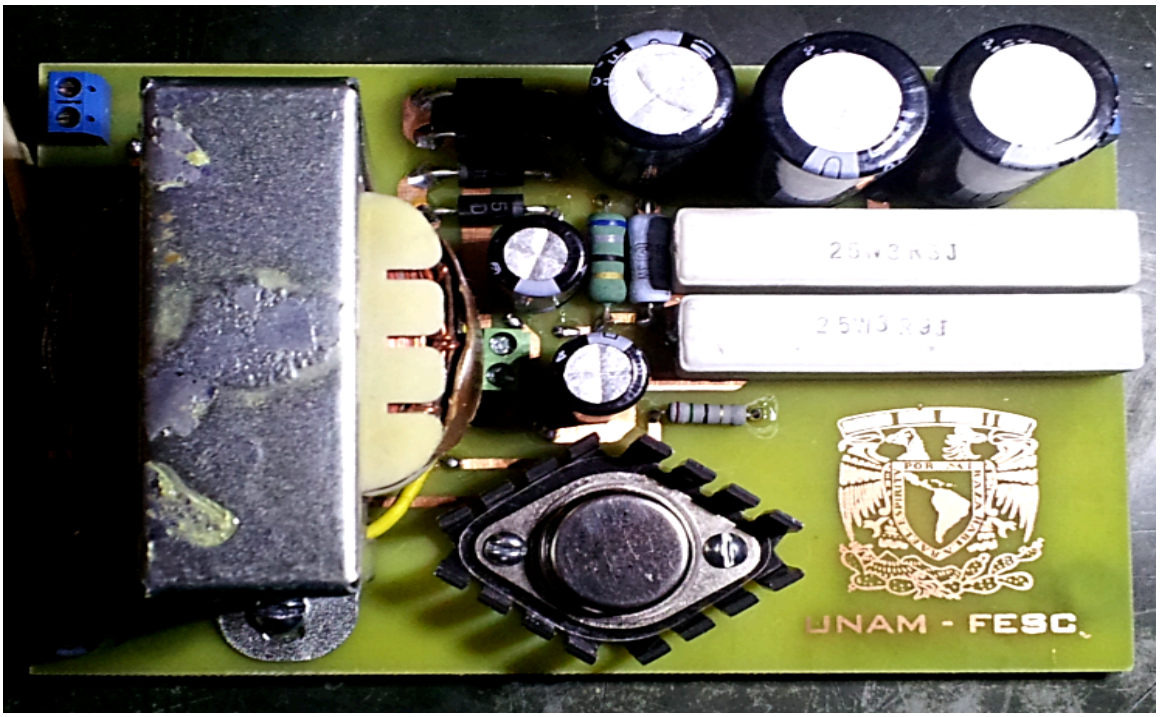
$$I_1 = I_{R_1} = i1 = 60.99mA$$
$$I_C = I_{R_C} = ic = 828.13mA$$

$\mathbf{I_1}$ e $\mathbf{I_C}$ son vectores con unidades de resistencia (ohms), los cuales, al multiplicarlos por los escalares *I1* e *Ic* que representan corrientes (en amperios), nos dan como unidad resultante voltios que es lo que representa el vector **V**, de acuerdo con la ley de Ohm. Una vez encontrados estos valores procedemos a calcular el voltaje

colector – emisor, fundamental para conocer la región de operación del transistor.

OBSERVACIONES

Al terminar el proyecto pudimos verificar que existen pequeñas diferencias entre los valores calculados, valores simulados y los valores obtenidos con el equipo de medición, esto por la precisión de los elementos utilizados.



REGULARIDADES

Todo proceso que involucre como medio de solución un sistema de ecuaciones lineales puede ser planteado como una combinación lineal de las variables por considerar y en consecuencia representado en forma gráfica.

CONCLUSIONES

Con la culminación de este proyecto en principio hemos podido integrar un número considerable de conceptos impartidos en diferentes asignaturas para estudiantes de ingeniería de nuestra facultad (que antes ellos los consideraban sin aplicación) y que con la modelación del sistema de audio y su correspondiente vinculación con conceptos de álgebra lineal planteamos una oportunidad de interactuar con nuestros estudiantes, el entorno físico y social para el abordaje de problemas relacionados con su perfil profesional, esperamos sirva de ejemplo para otros estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bassanezi, R. (1994). Modelling as a Teaching–Learning Strategy. *For the Learning of Mathematics 14(2),* 31-35.

Castro, E. y Castro, E. (2000). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, Barcelona: Universidad de Barcelona e Instituto de Ciencias de la Educación.

Del Valle, J.C.S. (2011). *Álgebra Lineal para estudiantes de ingeniería y ciencias.* México: McGraw-Hill.

Hestenes, D. (2010). Modeling Theory for Math and Science Education. En R. Lesh, C. R. Haines, P. L. Galbraith y A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies*,13-41. EUA: Springer.

Kolman, B. y Hill, D. R. (2006). *Álgebra lineal.* México: Pearson Educación.

Lay, D. C. (2007). *Álgebra Lineal y sus aplicaciones.* México: Pearson Educación.

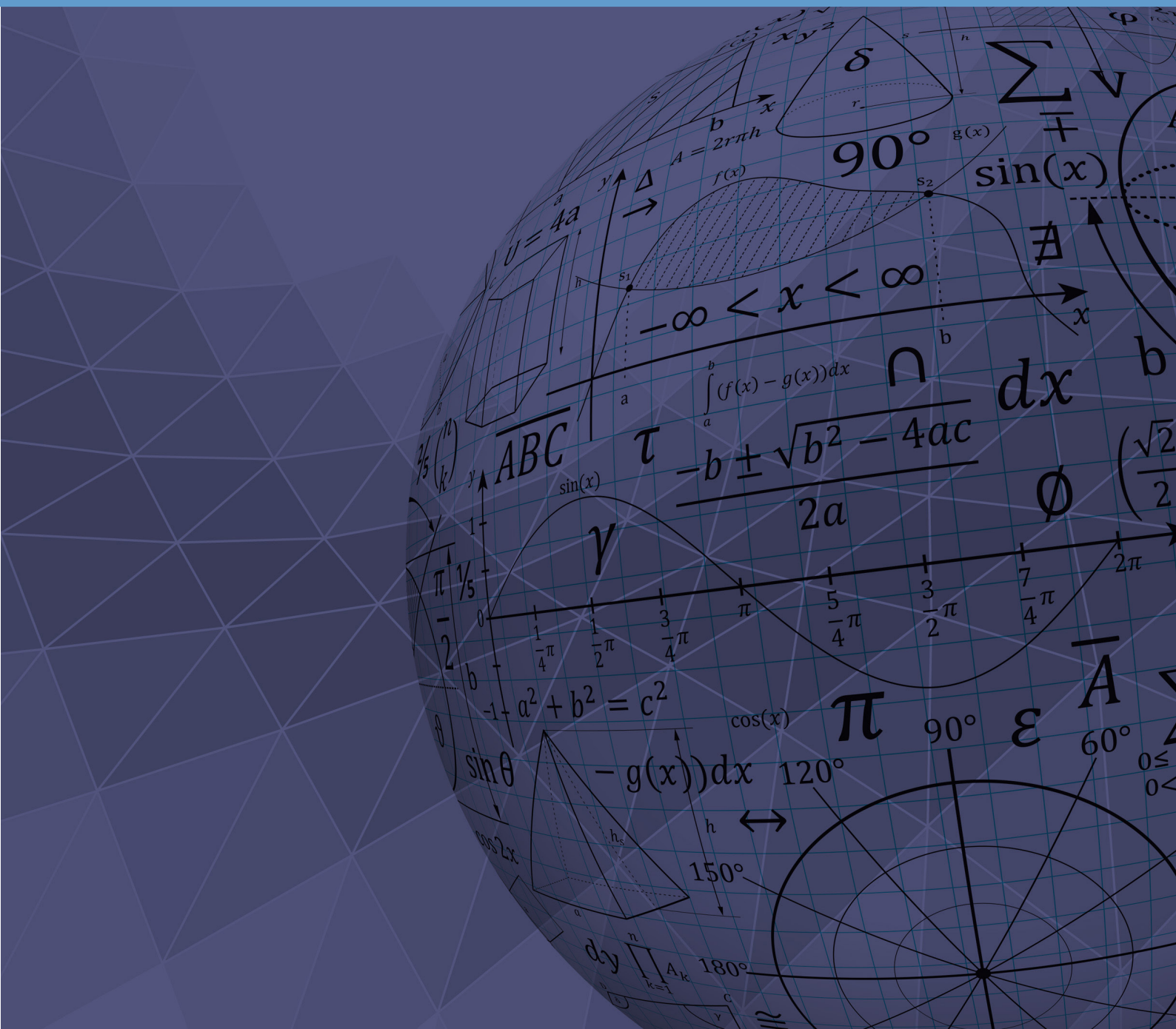
Oropeza, C. y Lezama, J. (2007). Dependencia e Independencia Lineal: una propuesta de actividades para el aula. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación, 2* (1), 23-39.

Poole, D. (2011). *Álgebra lineal, Una introducción moderna.* México: Cengage Learning.

Romero, S. y Castro, F. (2008). Modelación matemática en secundaria desde un punto de vista superior. *Modelling in Science Education and Learning, 1 (2)*, 11-23.

CAPÍTULO 3

ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR



MODELOS DE INVENTARIOS, UNA EXPERIENCIA CON ESTUDIANTES DE INGENIERIA INDUSTRIAL.

Rubén Darío Santiago Acosta, Ma. de Lourdes Quezada Batalla
Tecnológico de Monterrey, Campus Estado de México (México)
ruben.dario@itesm.mx, lquezada@itesm.mx

Palabras clave: modelos, inventarios, ingeniería industrial, secuencia didáctica

Key words: models, inventories, industrial engineering, teaching sequence

RESUMEN: Se presenta la experiencia de aprendizaje "Modelos de Inventarios" implementada en el Campus Estado de México del Tecnológico de Monterrey. La metodología utilizada fue el Aprendizaje Basado en Retos en un grupo piloto de 136 alumnos de la carrera de ingeniería industrial de primer, segundo y tercer semestre organizados en equipos de tres o cuatro integrantes. En la solución del reto propuesto, los alumnos utilizaron herramientas algebraicas, numéricas y gráficas y conceptos del cálculo diferencial de una y dos variables y de probabilidad y estadística. Se utilizó la secuencia didáctica: investigación, encuesta, uso de tecnología, enfoque numérico, modelo gráfico, modelo algebraico para un artículo, uso del cálculo diferencial, uso de probabilidad, inventario de dos o más artículos, casos prácticos y conferencia. Al final de este trabajo se discute brevemente el trabajo de los alumnos y se muestran resultados de una encuesta aplicada a los participantes.

ABSTRACT: In this paper is shown the learning experience entitled "stock models" which took place at ITESM-CEM. A Challenge Based Learning technique was used on a pilot group, consisting of 136 junior students majoring on industrial engineering. The students were organized on teams of three or four participants. In order to find solutions for a real-like problematic based on stock models, the students used algebraic, numerical and graphical approaches along with several concepts from differential calculus, probability and statistics. We used a didactic sequence consisting on the following activities: research, surveys, use of technology, numerical approaches, graphical and algebraic modelling, differential calculus, probability distributions of two or more inventory items, case studies and conferences. Finally, the students work is analyzed, and some results from a survey answered by the students involved in the learning experience, are discussed.

INTRODUCCIÓN

El concepto aparece en el ambiente laboral, y se incrusta en los ambientes educativos a finales del siglo pasado. Los primeros proyectos de Educación Basada en Competencias aparecen en México en 1994, a principios de este siglo se desarrolla en el Instituto Tecnológico de Monterrey, Campus Estado de México (ITESM-CEM) el proyecto del "Hilo Conductor" que permitió experimentar un nuevo modelo de enseñanza-aprendizaje basado en competencias en alumnos de ingeniería (Swain, 2009). El departamento de matemáticas de la institución participó fomentando competencias naturales como: aprender por cuenta propia, procesar y analizar información, comunicación oral y escrita, y uso de tecnología mediante actividades de Aprendizaje Basado en Problemas (Delgado, Santiago y Prado, 2002).

En síntesis, la sociedad actual demanda egresados con competencias analíticas de alto nivel y habilidades prácticas que les permitan analizar y resolver los problemas que enfrenta cotidianamente. Como consecuencia, la universidad debe estar preparada para cambiar rápidamente sus procesos administrativos y docentes, para innovar los contenidos de las disciplinas, para reorganizar los planes de estudio de las carreras que ofrece permitiendo que los estudiantes adquieran el conocimiento que necesiten de acuerdo a sus propias intereses y necesidades académicas (Barnett, 2012).

Por otra parte, las actuales tecnologías de comunicación amplían el conocimiento de las personas que las usan modificando los procesos para aprender y los esquemas de enseñanza. Se vive una revolución cultural que pone en discusión los modelos tradicionales de la universidad. Existen ahora canales diversos (cursos en línea, paquetes computaciones, etc.) que son muestra de los cambios surgidos en los últimos años en el ámbito educativo. Además, es común encontrar iniciativas para masificar la educación mediante cursos a los que puede acceder cualquier persona, y se están impulsando nuevas metodologías didácticas, como Aprendizaje Basado en Problemas o Retos, que permitan que la formación educativa sea abierta, adaptativa, global e híbrida (Cano y Meneses, 2014).

El Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM) no es ajeno a estos cambios y para formar al profesionista del siglo 21, ha actualizado su modelo educativo, llamado Modelo Educativo Tec 21, con el cual se pretende construir en los estudiantes las competencias, habilidades y destrezas que requerirán en su futuro laboral.

MARCO TEÓRICO

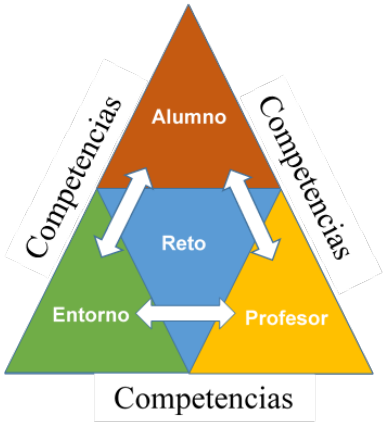
Diversos autores (Argudín, 2005; Simone, 2001) definen competencias de diferentes formas. De acuerdo con el ITESM (2015) una competencia es la integración consciente de conocimientos y metodologías propias de la disciplina, así como habilidades, actitudes y valores que permiten enfrentar exitosamente situaciones estructuradas y de incertidumbre y que pueden implicar procesos mentales de orden superior como: análisis, evaluación y creación, razonamiento lógico, juicio y pensamiento crítico, resolución de problemas y pensamiento creativo. A partir de esta definición, se estableció el modelo educativo Tec 21 del Tecnológico de Monterrey (ITESM, 2012). La esencia de este nuevo modelo es el desarrollo y evaluación de competencias mediante experiencias retadoras y vivenciales. Por lo cual se consideran competencias disciplinares y transversales, las primeras se refieren a los conocimientos actitudes y valores que se consideran

necesarios para el ejercicio profesional y las segundas se desarrollan a lo largo del proceso formativo de los estudiantes, son útiles para la vida del egresado e impactan directamente en la calidad del ejercicio de su profesión. El modelo descansa en tres pilares, a saber: flexibilidad en el cómo, cuándo y dónde se realiza el proceso de enseñanza aprendizaje, experiencias retadoras y de alto interés para los estudiantes y uso de nuevas herramientas tecnológicas.

Ante esta perspectiva, los docentes de matemáticas deben revisar las nuevas tecnologías y proponer alternativas flexibles para enseñar contenidos que estén en función de las necesidades de los futuros profesionistas. Una propuesta es considerar el uso combinado de técnicas didácticas, como la resolución de problemas, con tecnología computacional adecuada utilizando la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (Brousseau, 1998). En años recientes, se han utilizado estos dos elementos para el diseño de cursos con buenos resultados en la generación y/o fortalecimiento de competencias analíticas de alto nivel (Alanís, Cantoral, Cordero, Farfán, Garza y Rodríguez, 2008). Algunos estudios muestran que los alumnos aprenden más profundamente los conceptos matemáticos, además de que el ambiente permite que el estudiante desarrolle sus competencias tecnológicas y las use en su propio beneficio (Skovsmose, 2014). Otra posibilidad es mostrar la matemática en un contexto integrado con otras áreas, algunos estudios muestran que los alumnos desarrollan una mejor habilidad de transferencia de la matemática cuando se desarrolla los conceptos con problemáticas de otras áreas (Delgado, Santiago y Prado, 2002).

El Aprendizaje Basado en Retos (ABR) es una metodología derivada del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) que suele ser utilizada en el desarrollo de competencias disciplinares y transversales. En esta metodología, un reto es una experiencia vivencial diseñada para exponer al alumno a una situación atractiva y desafiante del entorno, es una situación que exige una respuesta, tiene significado y desafía la inteligencia del alumno, se resuelve colaborativamente, es multidisciplinaria y no tiene solución única. Los alumnos al enfrentar retos se involucran activamente en su proceso de aprendizaje a través de la discusión, reflexión, trabajo colaborativo, se confrontan con situaciones reales y aplican conocimientos. Este enfoque se basa en el triángulo didáctico de la figura 1, aquí se observa que el reto permite integrar la relación entre alumno, entorno y profesor desarrollando en el primero diversas competencias disciplinarias y transversales.

Figura 1. Triángulo didáctico del reto

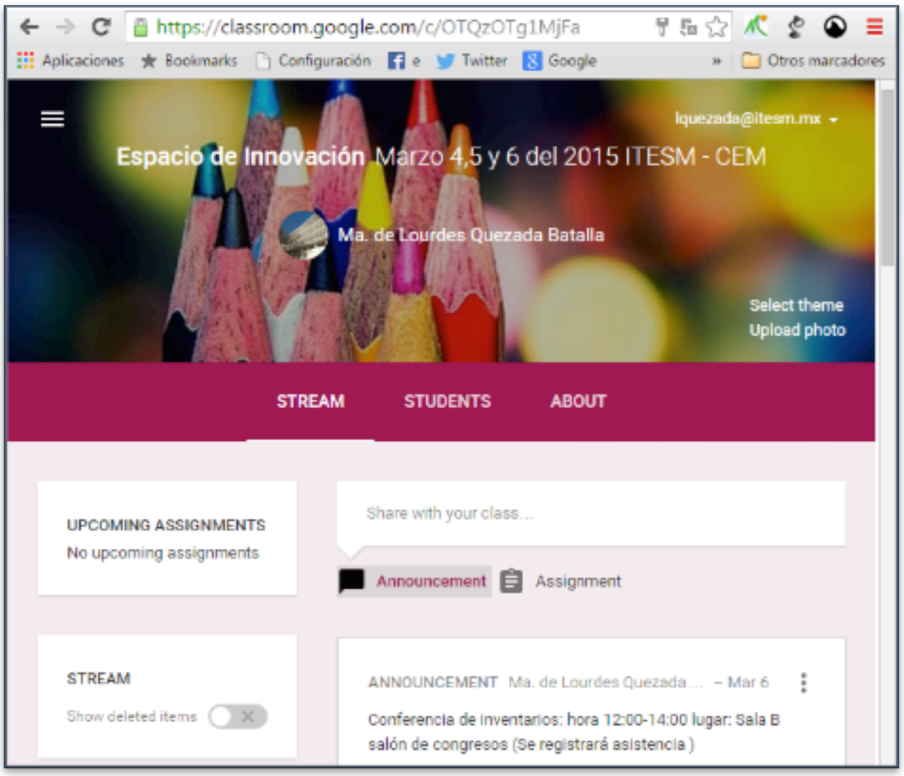


Al igual que en el ABP, la metodología de ABR permite que los alumnos: analicen diferentes soluciones a los retos, relacionen contenidos de varias disciplinas, aprovechen la tecnología para resolver los retos, usen la web para organizar, colaborar y compartir información, aprendan de forma activa en vez de forma pasiva y documenten sus logros con base en su experiencia.

EXPERIENCIA EN EL AULA

La comunidad del ITESM-CEM vivió un evento denominado “Espacios de Innovación” en el semestre Enero-May de 2015. En este evento, los alumnos de las carreras de ingeniería resolvieron un reto de su área de estudio. El reto se asignó dependiendo del semestre cursado. El evento se realizó del 4 al 6 de marzo de 2015. Los alumnos de los primeros tres semestres de la carrera de ingeniería industrial fueron enfrentados al reto “Modelos de Inventarios”. El objetivo del reto es determinar cuánto y cuándo debe una empresa comprar de uno o varios artículos, manteniendo un inventario saludable, para que maximice sus utilidades. En este reto participaron 136 estudiantes, divididos en 34 equipos de 4 alumnos cuidando que los integrantes fueran alumnos de semestres diferentes. Los alumnos estaban cursando precálculo, cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo en varias variables, ecuaciones diferenciales y/o probabilidad y estadística. Los estudiantes fueron apoyados por 18 profesores. Todos ellos fueron capacitados para desarrollar, monitorear y/o observar la actividad y el trabajo del alumnado. El reto se apoyó con 12 actividades que consideraron aspectos matemáticos, tecnológicos y económicos. La secuencia didáctica se elaboró considerando la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (Brousseau, 1998). De acuerdo a Brousseau, estas actividades pueden catalogarse de acción, puesto que los estudiantes deben actuar sobre los materiales dados utilizando todos sus conocimientos previos y construyendo nuevos para responder a la situación proporcionada. En el reto los alumnos interactuaron con diversos recursos tecnológicos como: Word, Excel, PowerPoint y los paquetes Desmos y Mathematica utilizando diferentes materiales de apoyo para resolver cada una de las actividades propuestas en la secuencia didáctica. Se utilizó la plataforma Google-Classroom para que los alumnos colocaran en un espacio creado exprofeso sus reportes parciales, su reporte final, sus programas y su presentación de la solución del reto, figura (2).

Figura 2. La plataforma de Google-Classroom

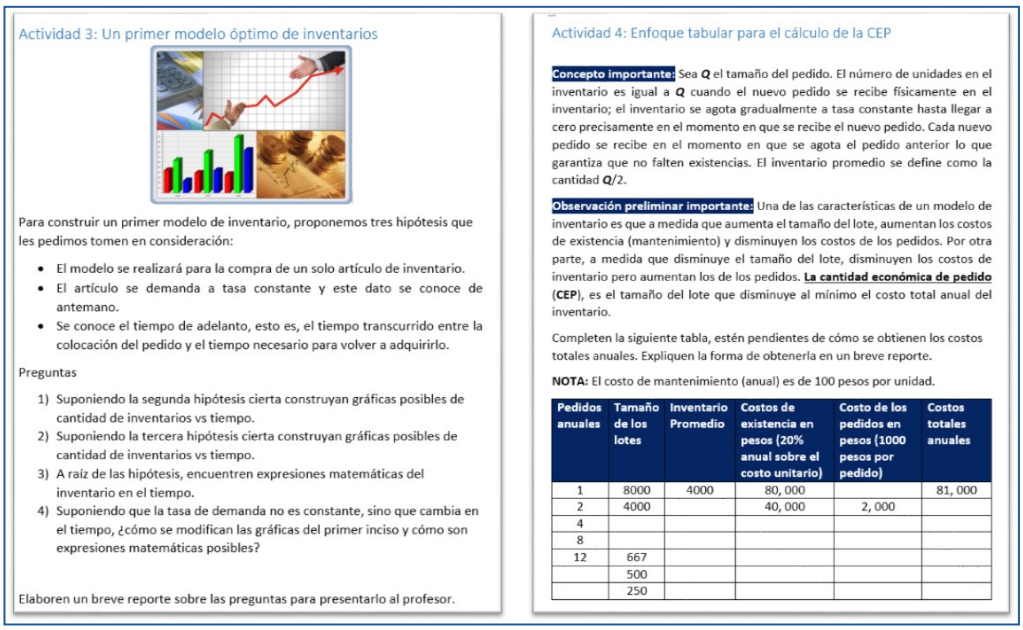


Las actividades propuestas contienen preguntas guiadas que tienen el objetivo de hacer reflexionar a los estudiantes acerca de los conceptos que se están revisando. Además, se experimenta con diversos acercamientos tabular, gráfico, algebraico, derivación, varios artículos y demanda aleatoria para resolver la situación. La secuencia didáctica seguida comprendió:

1) Investigación de conceptos
2) Ensayo sobre conceptos investigados y exposición de resultados
3) Primer modelo de inventarios, un acercamiento gráfico y algebraico
4) Enfoque tabular utilizando Excel para predecir la Cantidad Económica de Pedido (CEP) óptima.
5) Enfoque gráfico para determinar la CEP óptima.
6) Modelo algebraico de inventarios para un artículo.
7) Uso del cálculo diferencial para determinar la CEP.
8) Inventario de dos o más artículos.
9) Determinación de la CEP ante demanda aleatoria.
10) Casos prácticos por equipo.
11) Discusión y presentación de resultados.
12) Conferencia de cierre ante especialista de Inventarios en empresas.

En la figura 3 se muestran algunas actividades. En las actividades 4 a 7 y 10 los equipos tuvieron problemas diferentes, en la figura 4 se muestra la actividad "Camisetas del Cruz Azul" y en la figura 5 la respuesta de un equipo.

Figura 3. Actividades del reto de inventarios



Actividad 3: Un primer modelo óptimo de inventarios

Para construir un primer modelo de inventario, proponemos tres hipótesis que les pedimos tomen en consideración:

- El modelo se realizará para la compra de un solo artículo de inventario.
- El artículo se demanda a tasa constante y este dato se conoce de antemano.
- Se conoce el tiempo de adelanto, esto es, el tiempo transcurrido entre la colocación del pedido y el tiempo necesario para volver a adquirirlo.

Preguntas

1) Suponiendo la segunda hipótesis cierta construyan gráficas posibles de cantidad de inventarios vs tiempo.
2) Suponiendo la tercera hipótesis cierta construyan gráficas posibles de cantidad de inventarios vs tiempo.
3) A raíz de las hipótesis, encuentren expresiones matemáticas del inventario en el tiempo.
4) Suponiendo que la tasa de demanda no es constante, sino que cambia en el tiempo, ¿cómo se modifican las gráficas del primer inciso y cómo son expresiones matemáticas posibles?

Elaboren un breve reporte sobre las preguntas para presentarlo al profesor.

Actividad 4: Enfoque tabular para el cálculo de la CEP

Concepto importante: Sea ***Q*** el tamaño del pedido. El número de unidades en el inventario es igual a ***Q*** cuando el nuevo pedido se recibe físicamente en el inventario; el inventario se agota gradualmente a tasa constante hasta llegar a cero precisamente en el momento en que se recibe el nuevo pedido. Cada nuevo pedido se recibe en el momento en que se agota el pedido anterior lo que garantiza que no falten existencias. El inventario promedio se define como la cantidad ***Q***/2.

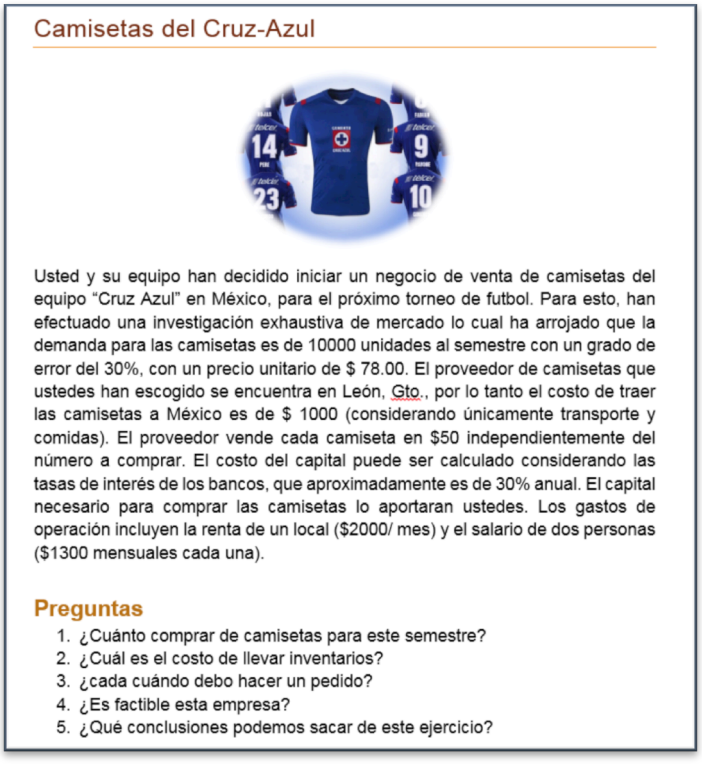
Observación preliminar importante: Una de las características de un modelo de inventario es que a medida que aumenta el tamaño del lote, aumentan los costos de existencia (mantenimiento) y disminuyen los costos de los pedidos. Por otra parte, a medida que disminuye el tamaño del lote, disminuyen los costos de inventario pero aumentan los de los pedidos. **La cantidad económica de pedido (CEP)**, es el tamaño del lote que disminuye al mínimo el costo total anual del inventario.

Completen la siguiente tabla, estén pendientes de cómo se obtienen los costos totales anuales. Expliquen la forma de obtenerla en un breve reporte.

NOTA: El costo de mantenimiento (anual) es de 100 pesos por unidad.

Pedidos anuales	Tamaño de los lotes	Inventario Promedio	Costos de existencia en pesos (20% anual sobre el costo unitario)	Costo de los pedidos en pesos (1000 pesos por pedido)	Costos totales anuales
1	8000	4000	80, 000		81, 000
2	4000		40, 000	2, 000	
4					
8					
12	667				
	500				
	250				

Figura 4. Actividad "Camisetas del Cruz-Azul"



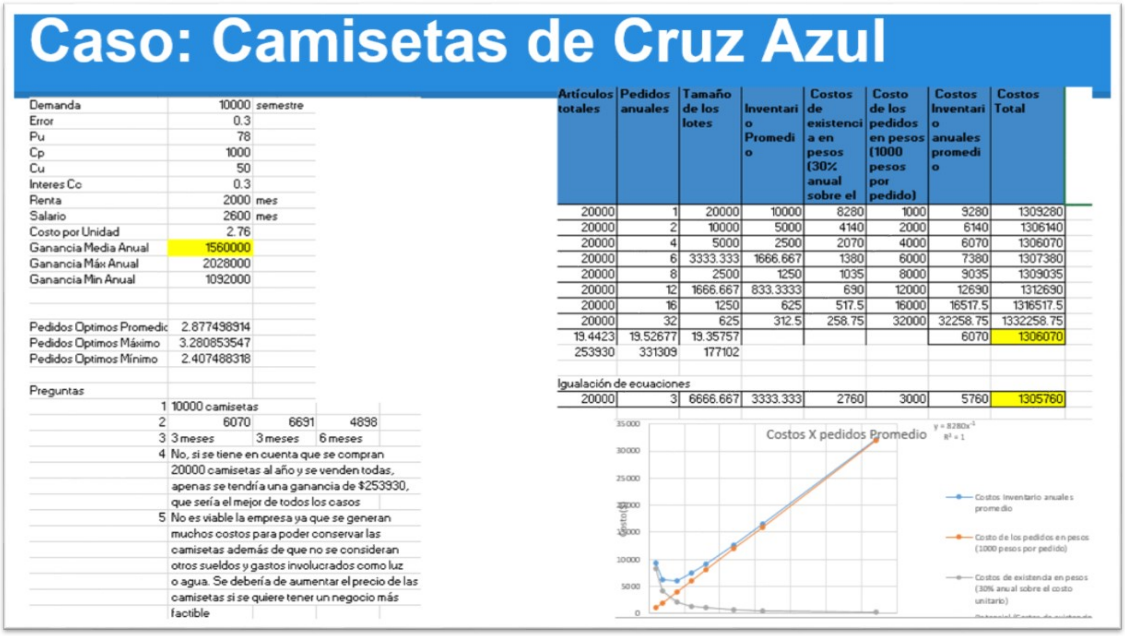
Camisetas del Cruz-Azul

Usted y su equipo han decidido iniciar un negocio de venta de camisetas del equipo "Cruz Azul" en México, para el próximo torneo de futbol. Para esto, han efectuado una investigación exhaustiva de mercado lo cual ha arrojado que la demanda para las camisetas es de 10000 unidades al semestre con un grado de error del 30%, con un precio unitario de $ 78.00. El proveedor de camisetas que ustedes han escogido se encuentra en León, Gto., por lo tanto el costo de traer las camisetas a México es de $ 1000 (considerando únicamente transporte y comidas). El proveedor vende cada camiseta en $50 independientemente del número a comprar. El costo del capital puede ser calculado considerando las tasas de interés de los bancos, que aproximadamente es de 30% anual. El capital necesario para comprar las camisetas lo aportaran ustedes. Los gastos de operación incluyen la renta de un local ($2000/ mes) y el salario de dos personas ($1300 mensuales cada una).

Preguntas

1. ¿Cuánto comprar de camisetas para este semestre?
2. ¿Cuál es el costo de llevar inventarios?
3. ¿cada cuándo debo hacer un pedido?
4. ¿Es factible esta empresa?
5. ¿Qué conclusiones podemos sacar de este ejercicio?

Figura 5. Respuesta a la actividad "Camisetas del Cruz-Azul"



Caso: Camisetas de Cruz Azul

Demanda	10000	semestre
Error	0.3	
Pu	78	
Cp	1000	
Cu	50	
Interes Co	0.3	
Renta	2000	mes
Salario	2600	mes
Costo por Unidad	2.76	
Ganancia Media Anual	1560000	
Ganancia Máx Anual	2028000	
Ganancia Min Anual	1092000	
Pedidos Optimos Promedic	2.877498914	
Pedidos Optimos Máximo	3.280853547	
Pedidos Optimos Mínimo	2.407488318	

Preguntas

1 10000 camisetas

2 6070 6691 4898

3 3 meses 3 meses 6 meses

4 No, si se tiene en cuenta que se compran 20000 camisetas al año y se venden todas, apenas se tendría una ganancia de $253930, que sería el mejor de todos los casos

5 No es viable la empresa ya que se generan muchos costos para poder conservar las camisetas además de que no se consideran otros sueldos y gastos involucrados como luz o agua. Se debería de aumentar el precio de las camisetas si se quiere tener un negocio más factible

Artículos totales	Pedidos anuales	Tamaño de los lotes	Inventario Promedio	Costos de existencia en pesos (30% anual sobre el	Costo de los pedidos en pesos (1000 pesos por pedido)	Costos Inventario anuales promedio	Costos Total
20000	1	20000	10000	8280	1000	9280	1309280
20000	2	10000	5000	4140	2000	6140	1306140
20000	4	5000	2500	2070	4000	6070	1306070
20000	6	3333.333	1666.667	1380	6000	7380	1307380
20000	8	2500	1250	1035	8000	9035	1309035
20000	12	1666.667	833.3333	690	12000	12690	1312690
20000	16	1250	625	517.5	16000	16517.5	1316517.5
20000	32	625	312.5	258.75	32000	32258.75	1332258.75
19.4423	19.52677	19.35757				6070	1306070
253930	331309	177102					

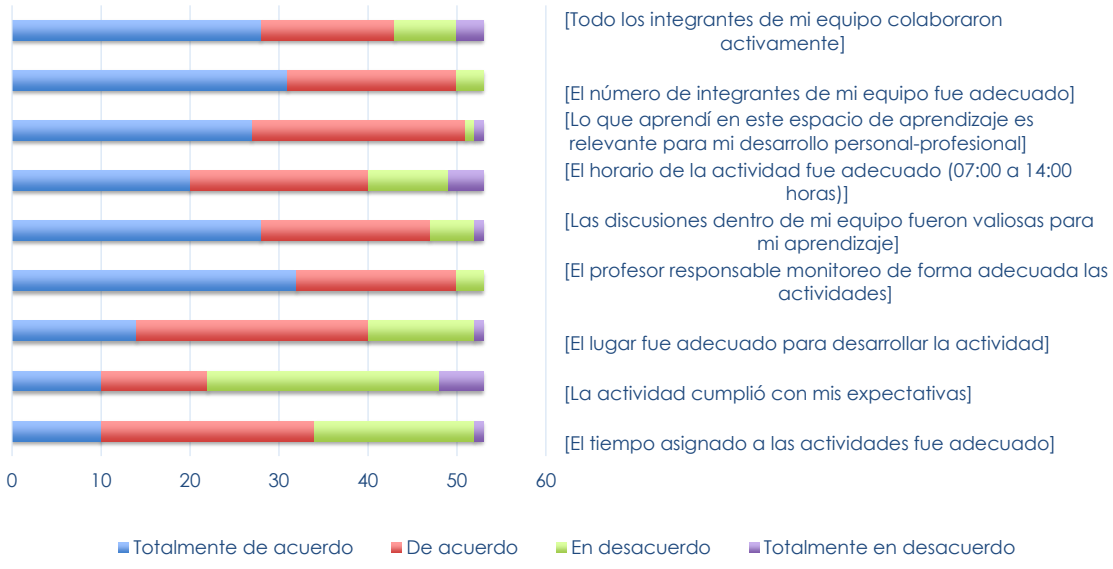
Igualación de ecuaciones

20000	3	6666.667	3333.333	2760	3000	5760	1305760

RESULTADOS

El trabajo realizado en este espacio de innovación permitió interactuar con alumnos de semestres diferentes. Por esa razón se observa una amplia diversidad para enfrentar problemas matemáticos. En general, los resultados obtenidos son buenos. Se aplicó una encuesta de evaluación cuyos resultados se muestran en la figura 6. Un resultado importante es que los alumnos consideran que trabajaron activamente y que discutieron ampliamente sus ideas matemáticas, como quizá no lo habían hecho anteriormente.

Figura 6. Encuesta aplicada a los alumnos en "Espacios de Innovación"



CONCLUSIONES

La experiencia obtenida al aplicar el reto de inventarios permite concluir que la enseñanza basada en retos fomenta el desarrollo de competencias de los alumnos. Al integrar estudiantes de diferentes semestres en el mismo equipo se logran aprendizajes sociales en diferentes dimensiones (comunicación, apoyo a otros, etc.) Los alumnos aprender a considerar varias alternativas en la solución de problemas considerando herramientas tecnológicas. La organización de los profesores es vital para obtener buenos resultados (guía didáctica). Además, se observa que el reto contener aspectos vivenciales que permitan mantener el interés de los alumnos en resolverlo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alanís, J., Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R., Garza, A., & Rodríguez, R. (2008). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Editorial Trillas

Argudín, Y. (2005). Educación basada en competencias: Nociones y antecedentes. *México: Trillas.*

Barnett, R. (Ed.). (2012). T*he future university: Ideas and possibilities*. Routledge.

Brousseau G. (1998): Théorie des Situations Didactiques, Grenoble, La Pensée Sauvage

Cano, E. V., & Meneses, E. L. (2014). Los MOOC y la Educación Superior: la expansión del conocimiento. Editorial. *Profesorado: Revista de currículum y formación del profesorado*, *18*(1), 3-12.

Delgado, F., Santiago, R., & Prado, C. (2002). Principia program: experiences of a course with integrated curriculum, teamwork environment and technology used as tool for learning. In *the Proceedings of 2nd International Congress of Teaching Mathematics; Crete, Greece*.

ITESM. (2012). Modelo educativo Tec21. Recuperado de http://tecdigital.net/cie/Modelo-Tec21/index.htm.

ITESM. (2015). Programas Formativos de Profesional. Documento interno no publicado. ITESM, México.

Simone, D. (2001[). Key competencies. USA: Hogrefe.

Skovsmose, O. (2014). *Critical mathematics education* (pp. 116-120). Netherlands: Springer.

Swain, R. (2009). Portal de ANFEI. Recuperado de http://www.anfei.mx/public/files/CNI/XXXVII/04_Ponencia_TECCEM.pdf

LA NO ESCOLARIZACIÓN DE LOS SABERES MATEMÁTICOS; UNA EXPERIENCIA CON NIÑOS DEL MEDIO RURAL

Jorge Hernández Márquez
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (México)
jhmpren@yahoo.com.mx

Palabras clave: significados matemáticos culturales, etnomatemáticas, habitus, etnografía.

Key words: cultural mathematical meanings, etnomathematics, habitus, ethnography.

RESUMEN: La investigación se desarrolló en el municipio de Tulancingo, estado de Hidalgo, México. La finalidad fue describir el proceso de construcción de los saberes matemáticos de los niños y niñas que no asisten a la escuela. El abordaje metodológico se hace desde el paradigma cualitativo bajo el enfoque etnográfico trabajado por Bertely. Se utilizó la observación y la entrevista como métodos para obtener la información. Se definió un campo de conocimiento teórico explicativo fundado en la perspectiva de la Etnomatemáticas propuesta por el profesor UbiratanD´Ambrosio, la Histórico Cultural de Vigostky y el concepto de Habitus de Pierre Bourdieu. Los resultados indican que los aprendizajes son producto de la práctica cotidiana y de los actores que en ella intervienen.

ABSTRACT: The research was conducted in the municipality of Tulancingo, Hidalgo, México. The aim was to describethe process of construction of mathematical knowledge of children not attending school. The methodological approach is done from the qualitative paradigm under the ethnographic approach worked by Bertely. Observation and interview as methods to obtain information were used. A field of theoretical explanatory knowledge based on the perspective of Ethnomathematics proposed by Professor Ubiritan D´Ambrosio, The Cultural History of Vygotski and the concept of Habitus or Pierre Bourdieu was defined. The results indicate that learning is the result of daily practice and the actors involved therein.

INTRODUCCIÓN

El documento que se presenta, parte del reconocimiento de las matemáticas como aprendizajes culturales, sociales e históricamente construidos. Así mismo, los sujetos individuales se apropian de ellos en espacios informales, no escolarizados.

El hilo conductor de la investigación fue la pregunta ¿Cómo construyen los saberes matemáticos los niños y niñas que no asisten a la escuela regular a partir del análisis de situaciones comunicativas en su ambiente social y familiar?

En este contexto, durante tres años se han documentado las actividades de dos niños y una niña que durante su vida no han asistido a instituciones educativas, pero que si tienen algunos conocimientos matemáticos producto de su hacer cotidiano. A Enrique, Roberto y Erika les caracteriza la pobreza extrema, la marginación, el trabajo infantil, el abandono familiar y la violencia.

En el escrito se muestra un panorama general de las consideraciones teóricas construidas, de la metodología de investigación utilizada, de los hallazgos en el campo, y de las discusiones y conclusiones, entre otras razones, por la gran cantidad de información generada.

CONSIDERACIONES TEÓRICAS

Para la construcción del marco teórico se consideraron las aportaciones de la Etnomatemáticas como eje de la investigación y se articulan las posturas de Vygostki y Bourdieu en un intento de abordar el objeto de estudio desde la multireferencialidad. A partir de estas posturas se establecen los vínculos entre matemáticas, sociedad, cultura e historia.

El creador del término Etnomatemáticas es el profesor Brasileño UbiratanD´Ambrosio, para entenderla, establece 7 dimensiones:

*a.Conceptual:*la realidad natural percibida por cada sujeto es acrecentada por la realidad cultural del grupo social de pertenencia, combinadas son experiencias y pensamientos acumulados por efectos genéticos, sensoriales y de memoria. *b.Histórica:*la matemática desarrolla instrumentos intelectuales para su crítica y para la incorporación de elementos de otros sistemas de conocimiento. Los instrumentos intelectuales dependen, entre otros factores, de la interpretación histórica del conocimiento. *c. Cognitiva*:el sujeto individual al enfrentarse a situaciones nuevas, reúne información de experiencias anteriores, se adapta a las nuevas circunstancias, así incorpora a la memoria nuevos hechos y saberes. *d.De lo cotidiano:* la matemática se empieza a organizar como instrumento de análisis de las condiciones del cielo y de las necesidades de lo cotidiano. *e.Epistemológica*:la dinámica de generación del conocimiento, su organización intelectual y social, su difusión, y del regreso de este conocimiento a aquellos responsables de su producción, constituye un ciclo indisoluble. Los intentos de estudiar ese ciclo aislando sus componentes es inadecuado para sistemas de conocimiento no occidentales. *f. política*: una forma, muy eficaz, de mantener a un individuo, grupo o cultura en una relación de inferioridad es debilitar sus raíces, removiendo los vínculos históricos y la historicidad del dominado. Esa es la estrategia más eficiente para hacer efectiva la conquista*g.Educativa*:La propuesta pedagógica es hacer de la matemática algo vivo, abordando situaciones reales en el tiempo (el ahora) y en el espacio (aquí), permitiendo la crítica y cuestionar el aquí y el ahora.

La matemática es una herramienta cultural que posibilita el desarrollo de las funciones psíquicas superiores especiales de los sujetos, tales como la atención voluntaria, memoria, lógica y formación de conceptos (D' Ambrocio, 2013). Desde esta perspectiva sociocultural el sujeto "no aprende en solitario, sino que, por el contrario, la actividad autoestructurante del sujeto estará mediada por la influencia de los otros, y por ello el aprendizaje es en realidad una actividad de construcción de los saberes de una cultura" (Díaz, 2004, p. 51). Tal es el caso de los niños y niñas no escolarizados, pues tienen la posibilidad de enriquecer sus conocimientos matemáticos a partir de los procesos comunicativos y el contacto interpersonal que establecen en sus actividades cotidianas. Las estructuras superiores de la psique son estimuladas por el uso y aplicación de conocimientos mentales matemáticos; al respecto Vygotski (Citado por Martí, 2000) plantea la idea de la génesis social del pensamiento, para él todas las funciones del pensamiento existen en dos planos: el social (funcionamiento interpsicológico, lo colectivo) y el psicológico individual (intrapsicológico). El funcionamiento externo se identifica con otras personas, lo que supone que el plano externo es definido por las interacciones sociales. Desde ésta perspectiva, existe una fuerte conexión entre los dos planos, es decir, los niños y niñas construyen los conocimientos matemáticos a partir de los intercambios que establecen con sus pares, la familia y todo aquel sujeto singular con el que interactúan, y poco a poco, van perfeccionando las funciones del pensamiento relacionadas con la lógica del número.

Las conexiones establecidas, por los niños y niñas, entre las relaciones sociales en las que se encuentran inmersos y su éxito personal en el uso y aplicación adecuada de la aritmética, están determinadas por sus estructuras mentales y los procesos de internalización, es decir, el fenómeno social; el sujeto lo transforma en una función psicológica, al mismo tiempo esta función conserva algunas propiedades de la interacción social. Como Vygotski señala: la internalización consiste en una construcción personal que modifica el proceso de su estructura y su función (Martí, 2000).

En el caso de niñas y niños, el lenguaje oral es un instrumento fundamental en la conformación de sus estructuras mentales, determinando sus acciones. Existen dos formas culturales implícitas genéticamente en el bebé: el empleo de herramientas y el lenguaje, las cuales van moldeando el comportamiento del niño (Kuper, 2000).

Si bien es cierto que las raíces del lenguaje oral se encuentran en aspectos genéticos, el contexto social y cultural de pertenencia lo fortalece. La óptica Vygotskiana propone que para entender ésta relación es necesario hacer uso del método de análisis por unidades; se entiende por unidad al elemento fundamental que conserva las características del todo; por ejemplo, la unidad mínima de la materia es el átomo, la unidad del agua es la molécula; en el caso del lenguaje la unidad que conserva todas las propiedades básicas de la totalidad es el aspecto interno del significado. Éste se une a las estructuras del pensamiento y al habla permitiendo construir y reconstruir lo verbal (Martí, 2000).

La palabra no siempre representa un mismo significado y un solo objeto de la realidad, depende de las experiencias de los sujetos; por ejemplo, la palabra cinco para algunos son manzanas, a otros les significa libros que leer; para cada sujeto singular representará algo distinto de los demás; sin embargo, en todos los casos el término cinco implica alguna forma de pensamiento asociado al lenguaje.

Así,el lenguaje tiene como función básica la comunicación y el intercambio social, para que estas funciones se cumplan requieren tener un significado compartido sobre las palabras que se utilizan, por ejemplo, para que el niño y niña que trabajan en actividades comerciales puedan vender sus productos, tienen que entender perfectamente que tres chicles, con un costo de un peso por chicle, significan tres pesos, de lo contrario el proceso de transacción con el cliente implica vender su producto a menor costo o a mayor precio. En otras palabras, la representación compartida del concepto de número determina la aplicación de la matemática en problemas cotidianos que los niños realizan a partir de acciones socialmente establecidas.

Para Vygotski el curso que sigue la construcción de los conceptos en el sujeto está compuesto por tres fases, cada una de las cuales se integra por etapas o varios momentos diferenciados (Martí, 2000). La primera fase la denomina como la formación de los cúmulos desorganizados que se descompone en 3 etapas: la formación de la imagen sincrética, la suposición espacial y la imagen sincrética equivale al concepto; la segunda fase, pensamiento en complejos, la integran las etapas de: complejos asociativos, complejos colecciones, complejo en cadena, complejo difuso y seudoconceptos; la tercera fase describe el desarrollo de los conceptos.

Para Bourdieu (2009) el habitus origina prácticas individuales y colectivas, por ende historia, de acuerdo con los esquemas engendrados por la historia es el habitus el que asegura la presencia activa de las experiencias pasadas que, registradas en cada organismo bajo la forma de esquemas de percepción, de pensamiento y de acción; tienden a garantizar la conformidad de la prácticas y su constancia a través del tiempo. "(…) el principio de la división de clases lógicas que organizan la percepción del mundo social es a su vez producto de la incorporación de la división de clases sociales" (Bourdieu, 2013, p. 201). En éste sentido los niños y niñas no escolarizadas construyen sus estilos de vida según los esquemas heredados por su familia y las interacciones con los sujetos propios de su clase social, definidas en sus prácticas sociales relacionadas con el conocimiento informal de las matemáticas. Lo que supone la existencia del Habitus de clase y habitus individual.

La diferencia entre los habitus individuales obedece a la singularidad de las trayectorias personales que están definidas por las experiencias acumuladas, las cuales son modificadas por efecto de las prácticas sociales generando nueva experiencia.

METODOLOGÍA

La etnografía es una descripción o reconstrucción analítica de escenarios y grupos culturales intactos. Recrea las creencias compartidas, prácticas, artefactos, conocimiento popular y comportamiento de un grupo de personas (Bertely, 2002). El estudio se realizó con 2 niños y una niña (Enrique, Roberto y Erika) que no habían tenido contacto con escuelas regulares, desempeñaban actividades de trabajo remunerado y no remunerado, sus familias eran extensas caracterizadas por la pobreza extrema. La identificación de los sujetos del estudio se hizo a partir de la base de datos del Instituto Nacional Estadística Geografía e Informática (INEGI). Se realizaron cinco entrevistas con servidores públicos adscritos a las presidencias municipales para identificar a los niños y caracterizar las condiciones sociales, económicas y familiares en que vivían. Se levantaron 23 registros de observación, 3 bloques de notas analíticas y 3 escritos parciales. Se realizaron cruces y triangulaciones con la información empírica y teórica.

HALLAZGOS

En el apartado se da cuenta de los aprendizajes matemáticos, de los espacios donde se construyen, de las habilidades desarrolladas de manera informal y de los mecanismos de aprendizaje.

Es difícil precisar cuándo, los niños y niña objeto del estudio, iniciaron su aprendizaje en el terreno de las matemáticas; sin embargo, Enrique y Roberto muestran mayor dominio de conceptos matemáticos con relación a los de Érika. Los saberes que poseen se ubican en el conteo, las operaciones de adición y sustracción, razones y proporciones, unidades de medida y figuras geométricas.

Los espacios donde se construyen los significados orales son la familia y el juego. En la familia hay participantes con mayor grado de conocimiento y experiencia que guían y obligan la participación de los aprendices, pero los conocimientos y las capacidades que desarrollan son de manera gradual, producto de la ejercitación permanente de la actividad y de los logros que van presentando al desarrollar la práctica; lo cual significa que el aprendizaje de la palabra numérica prepara en la vida y para la vida futura, posibilita al sujeto adquirir un mayor estatus en la estructura social de pertenencia y está fuertemente relacionado con la responsabilidad. El aprendizaje no se sistematiza a partir de una intención predeterminada por el experto, más bien, se toma como criterio los logros individuales que muestra en la práctica el aprendiz; al mismo tiempo, lo posibilita de una participación mayor en las actividades cotidianas de la familia y con ello la responsabilidad en la solución de los problemas económicos y sociales que enfrentan el grupo social de pertenencia.

El juego es el segundo espacio de aprendizaje de la palabra numérica, donde aprendiz y experto se ubican en un mismo plano, las interacciones que se establecen se generan por la actividad en la que las partes están de acuerdo. La participación activa en el juego potencia el aprendizaje cooperativo el cual se caracteriza por la democracia. Durante el desarrollo del juego, la niña y niños sujetos de la investigación, pueden expresar abiertamente sus ideas y opiniones, formulan preguntas, solicitan aclaraciones; lo que demuestra una relación definida por la igualdad sin diferenciar roles, situación muy distinta a la que se presenta cuando aparece la imagen del experto, el cual domina y dirige la acción.

De esta manera el aprendizaje se explica desde las prácticas sociales situadas en un contexto que proporciona lo que se conoce y sus significados; sin embargo, la posibilidad que ofrecen las actividades cotidianas son limitadas, es decir, a menores actividades económicas, menor número de experiencias, consecuentemente las oportunidades de nuevos aprendizajes disminuyen; lo que explica por qué Enrique, Roberto y Érika presentan diferentes tipos de aprendizajes y grado de apropiación de los significados de la palabra numérica. Las tareas de construcción de viviendas que desarrolla Enrique le exigen poner en práctica sus conocimientos, al mismo tiempo que los amplia, el aprendizaje es mediado por los sujetos con los que trabaja (el hijo de su padrastro y el padrastro). Roberto al emplearse como ayudante de agricultor o pastoreando animales, lo posibilitan de los aprendizajes. Érika en sus visitas al tianguis, las compras de tortillas, el contar sus animales, los juegos con sus hermanos, el de adquirir sus golosinas, el ver televisión u escuchar la radio le permiten apropiarse de ellos. En los tres casos aparece la observación, la imitación, el cuestionamiento, y el planteamiento y la resolución de problemas como los mecanismos que generan aprendizaje.

Usualmente, los niños y niña, prestan estricta atención a lo que les rodea, pero su percepción se agudiza cuando algo les interesa, es decir, algunas veces observan de manera superficial y en otras lo hacen a profundidad; esta última la utilizan cuando tienen alguna necesidad práctica. La observación les permite establecer puntos de referencia para la ubicación espacial y definir el lugar que ocupan las cosas o las acciones que se desarrollan; aunado a lo anterior, la observación estimula el desarrollo de algunas funciones del pensamiento como el comparar, clasificar y ordenar.

La información recabada en la investigación permite identificar que una de las formas de apropiación de experiencias de aprendizajes es por imitación, mediada por el observar, escuchar y memorizar. En el proceso de ejercitación la memoria tiene una función destacada, aún cuando el aprendizaje memorístico se matiza por la mecanización, su utilización es una constante entre los niños y niña sujetos de investigación.

El preguntar es una condición recurrente, la utilizan cuando algo o alguien le despierta curiosidad o les genera un problema; siempre las hacen con voz firme, sin titubeos. Las respuestas les permiten ampliar la información que poseen, regularmente son enunciados tales como: ¿qué es?, ¿para qué es?, ¿de quién es?; el uso del qué alude al significado del objeto o situación, el para qué implica los usos y/o aplicaciones, y el de quién refleja la posesión del objeto; lo dicho, permite identificar el uso que le dan a las cosas.

En este contexto existen otro tipo de preguntas que formulan, las del tono suave, como para sí mismos, las que posibilitan la autoreflexión, las que se desencadenan cuando se enfrentan a una situación problemática.

Ambos tipos de cuestionamiento siempre son precedidos por la observación profunda de los objetos o situaciones; lo cual indica ser el primer paso para establecer el proceso a seguir en la solución de un problema.

La pregunta les sirve de guía en el análisis del contexto donde se ubica el problema, la respuesta los perfila hacia la construcción de la aplicación lo que da, la oportunidad de construir una nueva pregunta a la que habrá de darle una explicación (Ferreiro, 2006).

El cuestionar – explicar – cuestionar a partir de las situaciones cotidianas otorga elementos para proyectar acciones futuras tendientes a resolver su situación actual. En el juego pregunta – respuesta – pregunta se observan dos tipos de lenguaje: el materno y el numérico, es decir, en el uso común del lenguaje lo lingüístico y lo numérico se funden en uno, lo que posibilita mejores niveles de comprensión de la realidad, con ello evidencia la creciente incorporación de la palabra numérica al lenguaje cotidiano.

En este orden de ideas, cuestionar la realidad obliga a plantear y resolver problemas. Veamos que sucedió en una charla con Enrique.

> *"Entrando al rancho, tres patos que se encontraban en la entrada salen volando, Enrique se apresura a decir: ya vio cómo van volando los patos, son tres, eran siete con la nana, pero de chiquitos se murió uno, luego me robaron tres y por eso quedaron tres".*

En el problema y su solución se observan 6 variantes: La finalidad y objetivo: Enrique pretende que su acompañante (ya vio cómo van volando los patos) entienda el por qué solo van volando tres patos, es decir, precisa el problema.

El dominio del significado: los conceptos que utiliza Enrique y que comparte el acompañante son los números, la muerte, el robo, entre otros.

Los datos que entran en juego: tres patos que salen volando, uno que murió, tres robados y eran un total de siete.

La relación entre los datos: eran siete contando a la nana, uno murió, le robaron tres y quedan tres.

El argumento: utiliza el algoritmo de la sustracción en dos ocasiones para demostrar que quedan tres patos.

Las pruebas: quedan tres patos que salen volando.

Enrique, durante el proceso pone en juego el pensamiento lógico, es capaz de evocar la representación mental de un pequeño pato muerto y del robo de tres, para ello fue necesario recurrir a su memoria que le aportó los datos numéricos; de esta manera, resolver un problema exige procesos de razonamiento inductivo y no una mera actividad asociativa y rutinaria. Una persona se enfrenta a un problema cuando tiene que realizar una acción, pero no tiene muy claro cómo hacerlo, esto depende de su capacidad analítica para entender y descomponer el problema sin perder de vista las relaciones numéricas existentes.

DISCUSIONES Y CONCLUSIONES

El análisis histórico de la matemática demuestra que fue la observación el primer mecanismo de apropiación de los significados matemáticos, lo que coincide con el proceso seguido por los niños, lo cual indica que uno de los pasos en la enseñanza de la matemática debe orientarse hacia la observación de la realidad física inmediata de los aprendices e iniciar un proceso de descripción del entorno matemático vía la verbalización, es decir estimular y ampliar los significados orales matemáticos de los aprendices antes de iniciarlos en el aprendizaje axiomático.

En todas las culturas el lenguaje matemático ha estado presente no con los formalismos de la matemática actual, más bien con los propios convencionalismos culturales del grupo social, esto es, los niños utilizan términos que funcionan como sinónimos de los formalismos matemáticos, por ejemplo: *cajón* para hacer alusión a la hectárea, *rueda* que identifica al círculo y/o circunferencia; lo que obliga en la enseñanza de la matemática a recuperar los términos y significados que los aprendices poseen para relacionarlos con los formalismos matemáticos y así potenciar su aprendizaje. El negociar los significados entre el aprendiz y el experto es un rasgo fundamental que posibilita el proceso de comunicación matemática y consecuentemente favorece el aprendizaje.

El que el hombre, en los inicios de la matemática, desarrollara mecanismos de simbolización del número permite entender a la matemática como una herramienta de y para la vida, esto mismo sucede con los niños que ven el contar como una necesidad para sobrevivir en su entorno; la necesidad los obliga a aprender pero no más allá de lo que les plantea su contexto económico, es decir, aprenden para un espacio y tiempo determinado. El enseñar matemáticas debe partir del entorno inmediato del aprendiz pero es necesario ampliar el contexto económico para estimular el aprendizaje matemático, pero siempre con la idea de que la matemática es una herramienta.

Asumir la matemática como herramienta cultural es reconocer las posturas teóricas de Vygotski en el sentido que el lenguaje le permite a los sujetos apropiarse de los bienes culturales de la

humanidad; sin embargo, su postura de que el primer paso es el orden en la apropiación del sistema de numeración resulta limitada, dado que para la matemática es la comparación; sin embargo entre el orden y la comparación existen las clasificaciones que apuntalan la apropiación del número, como lo evidencian los datos de la investigación. Por ello enseñar el sistema de numeración requiere estimular en los aprendices las funciones de pensamiento, comparar y clasificar, en otras palabras, al principio numérico de ordinalidad le precede el comparar, clasificar y ordenar.

El desarrollo de la ciencia matemática marca en sus inicios una etapa denominada empírica, es decir una matemática diversa según la cultura, esto se asemeja a lo que hacen los niños, construyen una matemática empírica fundada en la observación, las interacciones y el cuestionamiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bertely, M. (2002). *Conociendo nuestras escuelas; un acercamiento etnográfico a la cultura escolar.* México: Paidós.

Bourdieu, P. (2013). *La distinción*. México: Taurus.

_____ (2009). *El sentido práctico*. México: Siglo XXI editores.

D´Ambrosio, U. (2013). *Etnomatemáticas. Entre las tradiciones y la modernidad*. México: Universidad Autónoma de Guerrero y Ediciones Díaz de Santos.

Díaz, L. (2004). Construyendo relaciones benéficas entre imaginarios culturales y aprendizajes matemáticos. *Acta Latinoaméricana de Matemática Educativa 17 (1),* 10 – 20. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ferreiro, M. (2006). *Solucao de Problemas e a matemática escolar*. Brasil: Autentica.

Kuper, L. (trad.). (2000). Desarrollo de las operaciones aritméticas y estructura de las funciones psíquicas superiores. En Vygostki, L. S. *Obras escogidas* Vol. III. (pp. 11-315). Madrid: Aprendizaje Visor.

Martí, E. (2000). Los mecanismos de interiorización y externalización del conocimiento en las teorías de Piaget y Vygotski. En A. Tryphon & J. Vonéche (Comps.), *Piaget y Vygotski: La génesis social del pensamiento* (pp. 33 - 250). México: Paidós.

Vygotski, L. S. (1999). *Pensamiento y lenguaje*. México: Quinto Sol.

DISEÑO DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA HOMOTECIA MEDIANTE LA METODOLOGÍA DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO

Yosenith González Flores, Ignacio Arias Gómez, Miguel Picado Alfaro, Gabriela Valverde Soto.
Universidad Nacional de Costa Rica (Costa Rica)
yflowers3@hotmail.com, arias.i.30@gmail.com, miguelpicado@hotmail.com, gaby_valverde@yahoo.com

Palabras clave: análisis didáctico, enseñanza, homotecia, unidad didáctica.

Key words: didactic analysis, teaching, Homothetic transformation, didactic unit.

RESUMEN: se presenta el planteamiento de una investigación que pretende fundamentar y elaborar una unidad didáctica para la enseñanza del concepto de homotecia en octavo grado de la Educación General Básica en Costa Rica (estudiantes de 14 años). Esto para atender las demandas curriculares de la reforma educativa establecida por el Ministerio de Educación Pública en el 2012 y proponer a los profesores de matemática una herramienta didáctica para la enseñanza de este concepto. Desde los principios del análisis didáctico, se plantean realizar los estudios conceptual, de contenido, cognitivo y de instrucción que fundamenten la selección y secuenciación de las tareas que se propongan, y, complementariamente, diseñar instrumentos de evaluación.

ABSTRACT: It is presented the approach of an investigation for providing fundaments that justify the elaborating of a didactic unit for teaching of the concept of Homothetic transformation in the eighth grade of the Secondary Education in Costa Rica (14 years old students). This didactic unit has the purpose of embracing the curricular demands of the educational reform established by the Ministry of Public Education in 2012, as well as proposing a tool for mathematics teachers to teach this concept. Based on the principles of the didactic analysis, the study will consider: the conceptual analysis, the content analysis, and the cognitive analysis in order to justify the selection and the sequence of the tasks; additionally, it is pretended the design of evaluation instruments.

INTRODUCCIÓN

La Educación General Básica (EGB) en Costa Rica comprende tres ciclos. El primero y el segundo ciclo corresponden a la educación primaria (edades entre 6-12 años), el tercer ciclo corresponde a los primeros tres años en la educación secundaria, sétimo, octavo y noveno (edades entre 12-15 años). En el año 2012 se aprobó un nuevo Programa de Estudio en Matemática (PEM) que modificó las estrategias metodológicas, dando un mayor énfasis a la resolución de problemas como metodología de enseñanza, y contempla nuevos contenidos matemáticos, uno de estos es el concepto de homotecia en octavo año. Con la incorporación de este contenido, el docente debe ser capaz de desarrollar un planeamiento didáctico con las estrategias pertinentes para su enseñanza, y promover el aprendizaje en los estudiantes.

En este marco, el Consejo Nacional de Rectores (CONARE) (2012) afirma que "el ejercicio profesional requiere de una constante actualización y paralelamente van surgiendo nuevas necesidades de formación que de manera conjunta complementen y perfeccionen los conocimientos adquiridos en la carrera" (p. 38). Estos indicadores conducen a una iniciativa de investigación: elaborar una unidad didáctica fundamentada, mediante el estudio detallado del concepto, el análisis de los requerimientos cognitivos del estudiante para el diseño, selección y elaboración de tareas matemáticas e instrumentos de evaluación, que contribuyan al logro de las expectativas de aprendizaje establecidas para el estudio de la homotecia en octavo grado.

En este sentido, "la planificación de una unidad didáctica o de una hora de clase se debe fundamentar en la exploración y estructuración de los diversos significados de la estructura matemática objeto de esa planificación" (Gómez, 2005, p.8). Este autor plantea el análisis didáctico como una manera de elaborar una unidad didáctica fundamentada.

Cabe destacar que el enfoque teórico y metodológico sobre el análisis didáctico considerado para la investigación radica en las propuestas de Rico, Lupiáñez y Molina (2013), del Grupo de Investigación Pensamiento Numérico del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada en España.

Bajo las consideraciones planteadas, el objetivo general de la investigación consiste en elaborar la unidad didáctica centrada en el concepto de homotecia, implementando las herramientas del análisis didáctico: análisis conceptual, análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y de evaluación. Destacamos que el producto de la investigación será la unidad didáctica, misma que constituirá un aporte a los docentes de educación secundaria; sin embargo, es preciso destacar que los principios y procedimientos de este marco referencial permiten el desarrollo de un proceso de investigación riguroso.

ANTECEDENTES

La revisión preliminar del concepto de homotecia en diversas fuentes de investigación, permite organizar los estudios realizados sobre este concepto, según el campo de estudio, en tres categorías: investigaciones centradas en la matemática formal, en la matemática aplicada y en didáctica de la matemática.

Entre los autores que destacan el concepto de homotecia en el área de la matemática formal están Barreto (2010), que utiliza el concepto de homotecia para abordar extensiones del teorema de pitágoras, y Picard (2004), que enfoca su trabajo en las trasformaciones geométricas en el plano.

En el campo de la matemática aplicada destacan estudios en diversos campos. Rakovic, Kouvaritakis, Findeisen y Cannon (2012) utilizan el concepto de homotecia en la industria de procesos. Bokov, Mauroy, Mahut, Declaux y Flaud (2014), Bokov et al. (2010) y Antonio (2015), hacen uso de la homotecia en el área de la medicina, y Habib, Azagouze, El Azhari, Benkhaldoun y Lazrek (2010) trabajan la homotecia en el contexto de la astronomía.

En la Didáctica de la Matemática, sobresale la investigación de Ortiz y Ángulo (2010), quienes abordan el concepto de homotecia para su enseñanza y aprendizaje. Se destaca que de la búsqueda de fuentes realizada solo se localizó este estudio.

La revisión de estudios previos hace posible la detección de insumos fundamentales para el desarrollo de las distintas facetas del análisis didáctico. Por ejemplo, permite detectar aplicaciones del concepto en diversas situaciones del contexto, aspecto básico para describir la fenomenología vinculada a la noción de homotecia.

En las últimas décadas, el análisis didáctico ha sido abordado y conceptualizado desde distintas perspectivas. La revisión bibliográfica muestra tendencias de su uso como sustento teórico para estudiar planes de formación de profesores de matemática; como metodología de investigación sobre conceptos matemáticos; y como marco de referencia para analizar currículos de matemática (Font, Planas y Godino, 2010; Rico y Fernández-Cano, 2013; Lupiáñez, 2013; Gómez y González, 2013).

POSICIONAMIENTO CONCEPTUAL

El estudio pretende realizar una unidad didáctica centrada en el concepto de homotecia mediante la técnica del análisis didáctico y la metodología de resolución de problemas.

En cuanto a la unidad didáctica, Ortiz, Iglesias y Paredes (2003), la definen como “una unidad básica de programación docente que debe dar cuenta de ciertos aspectos: contexto de actuación, fundamentación teórica, objetivos de aprendizaje, contenidos matemáticos a ser estudiados, estrategias didácticas, materiales y recursos didácticos y estrategias de evaluación de los aprendizajes” (pp. 295-296). Para efectos de este estudio se adopta esta definición como marco de referencia.

El concepto de homotecia se aborda desde la definición propuesta por Ortiz y Ángulo (2010). La homotecia es “ la transformación que hace corresponder a un punto A otro A´, alineado con A y O, tal que: OA’ = kOA. Si k > 0 se llama homotecia directa y si k < 0 se llama homotecia inversa”, donde O es el centro de la homotecia y k la razón de homotecia” (p. 697). Este planteamiento conceptual se adecua a los lineamientos conceptuales establecidos por el Ministerio de Educación Pública (MEP, 2012) para la enseñanza del concepto en la Educación General Básica en Costa Rica.

El análisis didáctico ha constituido un marco de referencia para múltiples investigaciones en Educación Matemática (Gómez, 2007, Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008; Picado, 2012; Rico y Fernández-Cano, 2013; Valverde, 2012). Como referente teórico, se entiende como un marco que

conceptualiza y operacionaliza el "procedimiento con el que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significados del contenido matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje" (Gómez, 2005, p. 3). Particularmente, se destaca su utilidad como técnica para elaborar unidades didácticas; el análisis didáctico permite un análisis acertado y ordenado de los significados asociados a los contenidos matemáticos y pedagógicos implicados en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

El análisis didáctico es un proceso cíclico que consta de cinco análisis parciales pero interconectados que son: análisis conceptual, análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de evaluación (Rico y Fernández-Cano, 2013). Según estos autores, el análisis conceptual:

> Examina cuidadosamente la diversidad de significados, las posibilidades de conexión entre los términos y los niveles subjetivos (creencias), intersubjetivos (concepciones) y objetivos (conceptos) de cada campo conceptual. Contextualiza la definición dentro del área en que se inserta. Usa ejemplos y contraejemplos, en vez de la definición explicita (p. 8).

El análisis conceptual estudia la etimología del concepto, los diferentes significados y la relación entre ellos, así como su evolución histórica.

Por su lado, Ruiz-Hidalgo y Fernández-Plaza (2013) señalan que el análisis de contenido describe "la estructura matemática desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje en el aula, mediante el procedimiento, diseño, desarrollo y evaluación de los significados de los conceptos y procedimientos relevantes a su planificación" (p. 232). Posee tres organizadores: la estructura conceptual, que hace referencia a los conceptos vinculados al concepto en estudio, así como los procedimientos asociados a estos y sus posibles relaciones; las representaciones, que corresponden a diversas maneras en que se puede presentar un concepto matemático (verbal, gráfica, simbólica, tabular, etc.); y la fenomenología, que aborda los contextos y las situaciones donde se muestra la utilidad del concepto o contenido matemático.

El análisis cognitivo enfoca la problemática del aprendizaje de un contenido matemático particular en estudio. Este análisis parcial tiene tres organizadores: (a) las expectativas de aprendizaje, que refieren a las competencias, los objetivos específicos y las capacidades que se esperan lograr en los estudiantes; (b) las limitaciones, que alude aspectos que interfieren en el aprendizaje de los escolares (errores y dificultades); y (c) las oportunidades de aprendizaje que consideran las tareas como las herramientas principales para proporcionar a los estudiantes opciones para mejorar la comprensión y aprendizaje, mediante la demanda de un esfuerzo cognitivo en ellos El cuarto análisis parcial, el análisis de instrucción, involucra "el diseño, selección y secuenciación de las tareas que conforman la unidad didáctica que se está planificando" (Lupiáñez, 2013, p. 98). Además, comprende la secuencia de las tareas, la selección de los recursos y materiales más apropiados para la enseñanza y el aprendizaje del concepto.

Finalmente, el análisis de evaluación, permite "valorar la medida en la que el alumno va alcanzando los objetivos y desarrollando las competencias (…) en la que se valora el uso de herramientas de sesiones previas" (Ruiz-Hidalgo y Fernández-Plaza, 2013, p. 248).

La metodología de mediación pedagógica que se considerará en la unidad didáctica es la resolución de problemas, considerada por el MEP (2012) para la enseñanza de las matemáticas.

Desde este posicionamiento, para las lecciones de matemática se proponen cuatro momentos: (a) propuesta de un problema, (b) trabajo estudiantil independiente, (c) discusión interactiva y comunicativa, y (d) clausura o cierre.

Además se propone como estrategia didáctica la resolución de problemas enfatizando que el estudiante asuma "un compromiso con la construcción de sus aprendizajes, y (…) que haya una acción docente crucial para generar aprendizajes" (MEP, 2012, p. 10). Los problemas deben de ser de interés para los estudiantes, motivarlos, y estar debidamente contextualizados.

DISEÑO METODOLÓGICO

El estudio se enmarca dentro de las investigaciones cualitativo-descriptivas. Siguiendo a Hernández, Fernández y Baptista (2010), la investigación cualitativa "se enfoca a comprender y profundizar [en] los fenómenos" (p. 364), como el estudio del concepto de homotecia en la enseñanza de las matemáticas en educación secundaria. El análisis global del objeto de estudio (la enseñanza de la homotecia), a través del diseño y elaboración de una unidad didáctica, refleja el carácter holístico de una investigación cualitativa. Asimismo, tiene un carácter flexible ya que los análisis parciales enriquecen la secuencia de análisis mediante la reflexión y variación de las actividades realizadas. Esto evidencia un carácter cíclico de la propuesta, otra característica de las investigaciones cualitativas (Briones, 1998; Hernández, Fernández y Baptista, 2010).

Considerando el alcance del estudio, este es descriptivo. Siguiendo a Cohen y Manion (2002), se "observan a individuos, grupos, instituciones, métodos y materiales con el fin describir, comparar, contrastar, clasificar, analizar e interpretar las entidades y los acontecimientos que constituyen sus diversos campos de investigación" (p. 101). Durante el desarrollo de cada uno de los análisis parciales se realizarán comparaciones, clasificaciones e interpretaciones de la información recolectada.

El estudio se llevará a cabo a partir de la selección y revisión de fuentes de información documental (textos didácticos, matemáticos y de investigación), que se apoyará con el aporte de sujetos informantes vinculados a la enseñanza del concepto de homotecia. Una vez seleccionadas las fuentes, se diseñarán y aplicarán instrumentos para la revisión de literatura y la entrevista a los informantes. Estos instrumentos se elaborarán a partir de los principios del análisis didáctico.

Fuentes y técnicas de recolección de la información

Las fuentes de información documentales (primarias y secundarias) que se considerarán para el estudio son textos de matemática formal, textos sobre historia de la matemática, diccionarios de filosofía y matemáticas, libros de texto de matemáticas para educación secundaria y reportes de investigaciones. Por su parte, también se considerarán profesores de matemática (universitarios y de enseñanza media). Las fuentes documentales permitirán describir el concepto de homotecia desde una perspectiva teórica; los sujetos informantes proporcionarán un acercamiento a la práctica educativa, en cuanto al aprendizaje y enseñanza de este concepto.

Para la recogida de datos se procederá mediante dos técnicas principales, la revisión bibliográfica y la entrevista semiestructurada. La primera permite "la localización y recuperación de información relevante para un usuario que quiere dar respuesta a cualquier duda relacionada con su práctica,

ya sea ésta clínica, docente investigadora o de gestión" (Gálvez, 2002, p. 25). La segunda permite recolectar información a través de una conversación, donde se permite realizar preguntas no contempladas en un instrumento previo (Hernández, Fernández, y Baptista, 2010).

Técnica de análisis de la información

Como se ha indicado en el marco teórico, el estudio se desarrollará desde las categorías del análisis didáctico como técnica de análisis. A continuación se particularizan y se detallan los procedimientos para llevar a cabo cada uno de los análisis parciales que lo conforman en el estudio propuesto.

Metodológicamente, el análisis conceptual se apoya en las concepciones establecidas en la fundamentación teórica. Se llevará a cabo mediante la revisión de las fuentes documentales para determinar la etimología del concepto de homotecia y establecer la diversidad de significados otorgados al concepto. Esto se acompañará de una descripción histórica del concepto.

Para el análisis de contenido se construirá la estructura conceptual que encierra el concepto de homotecia a partir de las fuentes documentales. Se definirá una lista de conceptos afines al concepto de homotecia y los procedimientos matemáticos vinculados a este. También, se establecerán relaciones conceptuales entre estos conceptos matemáticos. El estudio de los sistemas de representación que muestran (hacen evidente o ilustran) el concepto de homotecia, se realizará a partir de la selección de estas representaciones del concepto de homotecia en los documentos analizados. Una vez identificadas se clasificarán según sus características. Finalmente, sobre la fenomenología, se establecerán los contextos y situaciones en las que el concepto de homotecia es funcional. La información obtenida de este análisis se sintetizará mediante un mapa conceptual que evidencie las relaciones entre estos tres organizadores.

El análisis cognitivo permitirá la identificación de expectativas de aprendizaje mediante una lista de habilidades y objetivos específicos sobre el concepto de homotecia. Esto se llevará a cabo a través de la revisión del programa de estudios de matemática del MEP (2012) y la información que se obtenga de las entrevistas a los profesores para determinar la competencia matemática que fomentan en los estudiantes al estudiar el concepto. Para reconocer limitaciones, se establecerán errores en que incurren los estudiantes al estudiar el concepto de homotecia, información que se obtendrá de los docentes de secundaria y de las investigaciones previas que serán revisadas. Con base en lo anterior y los análisis precedentes, se propondrán tareas que fomenten las competencias que se hayan establecido.

Una vez planteadas las tareas, se harán modificaciones que impliquen un mayor o menor esfuerzo cognitivo para su resolución o su adecuación a un contexto específico. Se establecerán propuestas sobre la secuencia de tareas elaboradas tomando en cuenta los errores y las expectativas de aprendizaje del concepto de homotecia. Establecida esta secuencia (o secuencias), se identificarán los recursos y materiales más oportunos para enseñar este concepto a partir de las tareas. Este proceso constituye el análisis de instrucción del estudio.

Finalmente, como componente del análisis de evaluación, se diseñarán instrumentos para evaluar el aprendizaje del concepto de homotecia en los estudiantes. Esto consiste en elaborar

instrumentos como rúbricas de evaluación y cuestionarios para obtener información de tipo cognitiva, diarios del profesor y diarios del estudiante.

Validez de la investigación

En esta etapa de planteamiento de la investigación, se propone el uso de la triangulación para asegurar la validez de los resultados que surjan del análisis de la información, dado que permite comparar e interpretar la información proveniente de las distintas fuentes, por ejemplo la información expuesta en la teoría con aquella obtenida en las entrevistas a docentes en servicio. Por otra parte, para validar la unidad didáctica se recurrirá al juicio de expertos: docentes en ejercicio con conocimiento del concepto de homotecia e investigadores en el área de la Didáctica de la Matemática, familiarizados con la técnica de análisis.

CONCLUSIONES PRELIMINARES

Con el planteamiento de este estudio se busca elaborar un insumo teórico y práctico para que los docentes de matemática de secundaria, en ejercicio, enseñen el concepto de homotecia y a su vez cuenten con un diseño para la planificación de la enseñanza de otros contenidos matemáticos. Se pretende que sea una guía para aquellos investigadores que inicien a trabajar con la metodología del análisis didáctico estudiando en detalle diversos contenidos matemáticos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Antonio, M. (2015). Fluid flow in a porous tree-shaped network: Optimal design and extension of Hess-Murray's law. *Physica A: Statistical Mechanics and its applications, 423,* 61-71. doi:10.1016/j.physa.2014.12.025

Barreto, L. (2010).Homotecias y su aplicación en la extensión del Teorema de Pitágoras en Didáctica del Análisis Matemático. *Unión, 23*, 71-91.

Bokov, P., Mauroy, B., Bruno Mahut, B., Delclaux, C. y Patrice Flaud, P. (2014). Homothety ratio of airway diameters and site of airway resistance inhealthy and COPD subjects. *Respiratory Physiology & Neurobiology,191*, 38-43.

Bokov, P., Mauroy, B., Revel, M., Brun, P., Peiffer, C., Dniel, C., … Delclaux, C. (2010). Lumen areas and homothety factor influence airway resistance in COPD. *Respiratory Physiology & Neurobiology*, 1-10

Briones G. (1998). *La investigación social y educativa* (3ª edición). Bogotá, Colombia: TM Editores.

Cohen, L. y Manion, L. (2002). *Métodos de investigación educativa* (2ª edición). Madrid, España: La Muralla, S.A.

CONARE. (2012). Seguimiento de la condición laboral de las personas graduadas 2000-2007 de las universidades costarricenses. *Consejo Nacional de Rectores*. doi: 978-9977-77-044-4

Font, V., Planas, N. y Godino, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33* (1), 89-105.

Gálvez, A. (2002). Revisión bibliográfica: usos y utilidades. *Matronas profesión, (10)*. Recuperado de http://www.enfermeriaypodologia.com/wp-content/uploads/ 2012/06/Rev-bibliografica-Matronas.pdf

Gómez, P. (2005). *El Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/ 394/1/ GomezP05-2797.PDF

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada.

Gómez, P. y González, M. (2013). Diseño de planes de formación de profesores de matemáticas basados en el análisis didáctico. En L. Rico., J. Lupiañez. y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular.* (pp.121-139). Granada, España: Comares, S.L.

Habib, A., Azagrouze, O., El Azhari, Y., Benkhaldoun, Z. y Lazrek, M. (2010). Circular aperture interferometric apodization using homothety. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, (406),* 2743-2748. doi: 10.1111/j.1365-2966.2010.16873.x

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación* (5ª edición). D.F., México: McGraw-Hill.

Lupiáñez, J. (2013). Análisis didáctico: la planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular. En L. Rico., J. Lupiañez. y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp.81-101). Granada, España: Comares, S.L

Ministerio de Educación Pública (MEP) (2012). *Programas de Estudio en Matemáticas*. Recuperado de http://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

Ortiz, J. y Angulo, J. (2010). *La Homotecia, un tema casi olvidado en la enseñanza de la educación matemática en Buenaventura: una propuesta desde el punto de vista algebraico*. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/1176/1/692_La_Homotecia_Asocolme2010.pdf

Ortiz, J., Iglesias, M. y Paredes, Z. (2013). El Análisis didáctico y el diseño de actividades didácticas en matemáticas. En L. Rico., J. Lupiañez. y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. (pp.293-308). Granada, España: Comares, S.L.

Picado, M. (2012). *El Sistema Métrico Decimal en libros de texto de matemáticas en España durante la segunda mitad del siglo XIX* (1849-1892). (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, España.

Picard, D. (2004). Plane transformations in a complex setting I: Homotethies-translations. *International Journal of Mathematical Education in Science &* Technology, 37, 726-734.

Raković, S., Kouvaritakis, B., Findeisen, R. y Cannon, M. (2012). Homothetic tube model predictive control. *Automatica, 48*, 1631-1638. doi:10.1016/j. automatica.2012.05.003

Rico y Fernández-Cano. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico., J. Lupiañez. y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp.1-22). Granada, España: Comares, S.L.

Rico, L., Lupiañez, J., y Molina, M. (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemáticas, Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular.* Granada: Comares S.L.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L., y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma*, *58*. Recuperado de http://revistasuma.es/IMG/pdf/58/007-023.pdf

Ruiz-Hidalgo, J. y Fernández-Plaza, J. (2013). Planificación de unidades didácticas en enseñanza secundaria mediante el uso del Análisis didáctico. En L. Rico., J. Lupiañez. y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp.231-253). Granada, España: Comares, S.L.

Valverde, G. (2012). *Competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de educación primaria*. (Tesis doctoral), Universidad de Granada, España.

SIGNIFICADO GLOBAL DE UN OBJETO MATEMÁTICO A PARTIR DE LA TRIADA DE CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS: GLOBAL, INTERMEDIA Y PUNTUAL

Enrique Mateus Nieves
Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Colombia)
jeman124@gmail.com, enrique.mateus@uexternado.edu.co

Palabras clave: significado global, configuración epistémica, integración.

Key words: global meaning, epistemic configuration, integration.

RESUMEN: Uno de los resultados de esta investigación doctoral ha sido comprobar cómo el estudiante puede alcanzar un significado global de un objeto matemático, que le lleve a reconocer el doble valor que tienen las matemáticas: como ciencia y como herramienta. A partir de la aplicación de la triada de configuraciones epistémicas: global, intermedia y puntual del texto, ejecutadas desde el proceso de instrucción que para este caso particular, fue el objeto "integración por partes" Evidenciado que el objeto enseñado –Método de integración por partes (MIP)- no fue solo una regla, un algoritmo más que nada le aporta a su formación superior.

ABSTRACT: One result of this doctoral research was to determine how the student gets a global meaning of a mathematical object, leading it to recognize the double value with mathematics can reach: as science and as a tool. From the application of the triad of epistemic configurations: global, intermediate and timely text, executed from the instruction process that for this particular case was the "integration by parts" object shown that the object taught -Method of integration by parts (MIP) - was not only a rule, an algorithm more than anything gives your higher education.

CONTEXTUALIZACIÓN

De acuerdo a las directrices curriculares de diversas carreras profesionales, (licenciaturas, ingenierías, economía, etc.), el Cálculo diferencial e integral se ha constituido en una de las asignaturas comunes en la formación superior. Lo que indica la importancia de estas disciplinas en la formación profesional de los jóvenes al considerar que la construcción y desarrollo de competencias se da básicamente en el proceso de aprendizaje de los contenidos curriculares contemplando las dimensiones conceptual, procedimental y actitudinal. Crisóstomo (2012) manifiesta que las referidas dimensiones parecen insuficientes para analizar un contenido específico con un nivel satisfactorio de detalles y profundidad. Por ello, propone considerar algunas herramientas del Enfoque Ontosemiótico (EOS), que han sido contempladas y adaptadas en esta investigación doctoral, centradas en el objeto matemático "método de integración por partes" (MIP). Se ha considerado desarrollar el análisis de las dimensiones epistémica, cognitiva, mediacional, afectiva, interaccional y ecológica. En este informe me centraré en la triada de configuraciones epistémicas como elementos esenciales durante el proceso de instrucción que permitan vislumbrar si se ha alcanzado un significado global de dicho objeto.

MARCO TEÓRICO

El marco teórico de esta investigación doctoral se contempló los aportes teóricos planteados por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (EOS) propuesto por Godino, Batanero y Font (2003). El EOS está fundamentado en tres aspectos centrales: Las matemáticas son una actividad humana (fundamento antropológico); Los objetos matemáticos se relacionan entre sí de una manera "vital y necesaria" (fundamento ecológico); y, el conocimiento matemático es una respuesta a una cuestión práctica o teórica, ya intramatemática ya extramatemática (fundamento pragmático). La noción central de esta perspectiva es la de situación problemática, a partir de la cual emergen las nociones de "práctica matemática", "objeto matemático" y "significado de un objeto". (Godino, Font y Wilhelmi, 2007)

El EOS utiliza la *Teoría de los Significados Sistémicos* [TSS], *La teoría de las funciones semióticas* [TFS]. *La teoría de las configuraciones didácticas* [TCD] que permiten definir una Configuración Epistémica [CE] como una herramienta que puede describir tanto la estructura de textos puntuales como de textos globales de un objeto matemático de estudio. De ahí que las entidades primarias -objetos de estudio- se organizan en entidades más complejas llamadas CE, cuando se refieren a los significados institucionales (Godino, Contreras y Font, 2006) y configuraciones cognitivas si se refieren a los significados personales. Las CE están definidas como redes de objetos emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos. Las CE nos permiten llegar a la noción de significado global entendido como el sistema de prácticas operativas y discursivas asociadas al objeto en los diversos contextos de uso, incluyendo el formal-estructural.

Significado global del objeto de estudio.

De Ordóñez y Contreras (2010) se destaca que se establecen las configuraciones epistémicas que constituyen el significado global de referencia de esta noción matemática de las cuales, considerando el nivel educativo en que nos encontramos y la normativa, se escogen tres que se utilizan como significado de referencia para esta investigación: Configuración epistémica global, Configuración epistémica intermedia y Configuración epistémica puntual. Dicho significado global

estará constituido por diferentes pares "configuración epistémica/prácticas que posibilita" y que el EOS interpreta como diferentes sentidos del concepto. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico – epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto. Para el estudio de los distintos significados –detallados en el documento final de la tesis de doctorado de este investigador y que por cuestión de espacio aquí se omiten- se han utilizado diversas fuentes bibliográficas entre las que se destacan los señalamientos en:

> En la reconstrucción del significado global del objeto interesa, por tanto, identificar los cambios que se van añadiendo en cada categoría de objetos emergentes y que permitirán caracterizar los obstáculos, rupturas y progresos en la evolución de las configuraciones epistémicas. Los cambios se caracterizan por la solución que se presenta para la problemática existente en una configuración epistémica en un determinado momento. Pueden implicar tanto la ruptura de la estructura de la configuración, como su evolución para otra configuración epistémica inclusiva y (o) complementaria. Crisóstomo, Ordóñez, Contreras y Godino (2005, p.131)

Con estas consideraciones, y teniendo en cuentas los resultados de las investigaciones realizadas por Contreras, Ordóñez, Wilhelmi, y Font, (2010) y en Crisóstomo (2012) que propone desde la perspectiva Ontosemiótica, para el análisis de la integral en los libros de texto de cálculo, desde la sistematización de las distintas configuraciones epistémicas de las nociones matemáticas desarrolladas en el texto y su posible articulación a lo largo de la trayectoria instruccional implantada (Godino, Font y Wilhelmi, 2007) que "la dimensión epistémica de la noción matemática que se pretende desarrollar puede ser sistematizada por medio de las configuraciones epistémicas: global, intermedia y puntual del texto".

Configuraciones epistémicas de referencia

En esta sección describo los distintos sentidos según las entidades primarias, que nos permitirá una comparación objetiva de las configuraciones asociadas. Estas configuraciones pueden ser descritas según los siguientes elementos de significado tomados de Crisóstomo (2012) para la integral y que han sido adaptados cuando se utiliza exclusivamente el MIP. Crisóstomo (2012, p.188) describe dichas configuraciones de la siguiente manera:

1. Configuración epistémica global (CEG): entendida como la red de objetos institucionales que se ponen en juego en una actividad matemática; descrita e interpretada a partir de los elementos de significados del EOS, teniendo en cuanta las relaciones que puedan ser establecidas por dichos elementos.
2. Configuración epistémica intermedia (CEI): cada una de las subconfiguraciones que componen la configuración epistémica global (Los problemas globalmente identificados pueden ser descompuestos en problemas intermedios lo que implica en nuevos procedimientos, propiedades, argumentos, conceptos y lenguajes puestos en juego).
3. Configuración epistémica puntual (CEP): entendida como las subconfiguraciones de la configuración epistémica intermedia (Un problema intermedio puede ser descompuesto en problemas puntuales que a su vez da lugar a una nueva configuración)

Dichas configuraciones pueden ser reagrupadas o descompuestas según el interés y finalidades de cada investigación y pueden quedarse expresadas de manera implícita, o bien describiendo las redes de objetos y su progresiva reconstrucción alrededor de entidades de naturaleza conceptual o proporcional. Es necesario avanzar en la tipificación de las configuraciones y su articulación a lo largo del proceso de instrucción, tratando de identificar los distintos elementos de significado que las componen.

Tabla 1. Elementos de significado. Configuraciones Epistémicas asociadas al objeto Matemático conocido como "la integral" (Elaboración propia)

Elementos de significado	CEG	CEI	CEP
Situaciones	Calculo de áreas y volúmenes	Situaciones de acumulación, Situaciones de otras ciencias, de modelización. Funciones integrable, reduciendo las condiciones de integralidad, según la integral de Lebesgue.	Calcular el valor de una integral Ligadas a la relación que existe entre la función derivada y la propia función
Lenguaje	Gráfico, algebraico numérico	Gráfico, algebraico numérico	Principalmente analítico, gráfico, Algebraico, numérico
Procedimientos	Dada una integral identificarla como indefinida, definida o impropia, y aplicar el método adecuado para calcular su valor Calculo de puntos de corte. Representación gráfica de la función. Cálculo de integrales indefinidas, definidas o impropias. Asignación de un valor al área o al volumen	Calcular la integral considerando si el resultado encontrado es un número o una familia de funciones. Calcular la integral considerando la idea de altura media de una función en un intervalo. Modelizar la situación a través de la integral definida. Cálculo de integrales y aplicación de la regla de Barrow. Interpretación del resultado	Extraer propiedades de la función y de su primitiva identificándolas como función y derivada
Definiciones	Con relación al área	Concepto regla resultado de un proceso de cambio	Reconocer que la integración y la derivación son operaciones inversas
Proposiciones	Regla de Barrow, (Teorema fundamental del cálculo integral) Métodos de integración	Regla de Barrow, Métodos de integración	Elementos de la teoría de la medida Tabla de integrales inmediatas Métodos de integración Regla de Barrow

Argumentaciones	Retórica y heurística	Retórica y heurística	Retóricas (Comparación de áreas. Analíticas basadas en cuestiones topológicas del estudio de la medida)
Conflictos semióticos asociados a esta CE	No diferenciar entre integral definida y área. La integral debe ser un área y entonces positiva. Es imprescindible el valor absoluto para calcular la integral. Considerar que a igual área igual volumen Horror al infinito: conflicto infinito potencial-actual (llenar algo finito como un área con una suma infinita)	Noción de función acumulación. Conflicto semiótico de la diferencial. Heterogeneidad de las dimensiones (completar un área de dos dimensiones con líneas de dimensión 1)	Confusión entre función y primitiva Comprensión de las relaciones y la notación. La integral calculada carece de significado. Encausar el trabajo de los estudiantes en procesos de mecanización de intégrales y no en procesos de variación.

OBSERVACIONES FINALES

Es importante reconocer que las ideas fundamentales del cálculo integral están presentes aunque de forma inconsciente, en las experiencias diarias de muchas personas. Están allí donde exista una función que relacione dos magnitudes de tal forma que, a cada valor de una de ellas, corresponde un determinado valor de la otra; allí existe un problema de cálculo integral; ya que es el cálculo integral el que determina los resultados de los cambios entre esas dos magnitudes. Por su parte Turégano (1998), plantea que "esos cambios pueden ser constantes a lo largo de un intervalo o variar de forma continua. Tanto en un caso como en el otro, una imagen visual nos permitiría darnos cuenta que los resultados de los cambios y las áreas bajo los gráficos son exactamente lo mismo desde el punto de vista de las matemáticas. Este tipo de imágenes nos permite interpretar el "*significado*" del área bajo el gráfico, según el problema planteado. Dicha área no es más que una integral definida o que también puede ser una integral definida impropia.

El trabajar los métodos de integración –en particular el MIP- desde las CE presentadas, concibiendo la flexibilidad en el tratamiento de los diferentes aspectos es una clave para la introducción de la formalización propia del concepto de integral. En lo que se refiere a la integral se concluye que el tipo de enseñanza propuesto en los libros de texto y seguido por la mayoría de los profesores universitarios es trasmisivo, lo que supone que el alumno no realiza ningún tipo de trabajo de investigación, siendo un sujeto netamente pasivo. Paralelamente, se comunica el saber sin atender a los posibles errores, por lo que consideramos que al estudiante no se le facilita la construcción del saber matemático.

Se destaca el hecho de que casi no aparezca el lenguaje numérico y que el recurso a la historia es utilizado poco y de una forma descontextualizada. Se observa en los libros de texto, que la

enseñanza del Cálculo Integral no incluye explícitamente una fase previa de carácter experimental a lo largo de la cual los objetos matemáticos tengan una referencia explícita. Es decir, tanto las concepciones como los obstáculos no son tratados de modo explícito como sería conveniente de cara a establecer una enseñanza en la que los propios estudiantes construyan su conocimiento. De acuerdo a la metodología desarrollada –estudio de caso- de tipo descriptivo, se hicieron observación y grabación de las sesiones de clase que tres profesores imparten a tres grupos de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, también se les practicó una entrevista semiestructurada, se hizo la revisión de los libros de texto propuestos en la bibliografía del programa para el curso, encontrándose que en lo referido a la integral, el tipo de enseñanza propuesto en los libros de texto y seguido por los profesores universitarios observados es de carácter trasmisivo, lo que supone que el alumno no realiza ningún tipo de trabajo de investigación, siendo un sujeto netamente pasivo."

RESULTADOS ENCONTRADOS.

En la observación a la secuencia de enseñanza del método de integración por partes se encontró que la CEP es la que más se utilizada cuando se enseña la integral definida o impropia, seguida de la CEI, fortalecida desde procesos rutinarios de corte netamente algebraico; CEG no aparecen. Cuando se enseña la integral indefinida esta se da desde la CEI, desaparece la CEP y algunas veces aparece la CEG, para terminar fortaleciendo la CEI también desde procesos netamente algebraicos. Los alumnos estudian la CEP generalmente de forma directa, esto es, calculando explícitamente el área bajo la curva o el área entre dos curvas y utilizando el registro algebraico habitualmente o calculando integrales indefinidas. En segundo lugar, la CEP es la más usada desde cálculos algorítmicos, generalmente de forma directa también. Es evidente la ausencia total de la CEG. Lo que impide que el estudiante alcance un significado global y así poder aplicar un holosignificado que le permita un desempeño significativo en su quehacer profesional.

El significado personal de objetos que se suponía los alumnos habían estudiado previamente (función, variación de una función, pendiente, tasa media de variación, velocidad entre otros) era insuficiente. De ahí se deduce que una buena manera de asegurar que los alumnos adquieran un buen significado personal del objeto "la integral" sea primero conseguir un buen significado personal de dichos objetos previos. En este sentido se observó que la definición de la función derivada como límite de las tasas medias de variación presenta una gran complejidad semiótica

Trabajar los métodos de integración –en particular el MIP desde las diversas CE presentadas, concibiendo la flexibilidad en el tratamiento de los diferentes aspectos como una clave, antes de la introducción de la formalización propia del concepto de integral puede ayudar a alcanzar un significado global de este objeto visto como un proceso de acumulación.

Al finalizar el proceso de observación de las clases, (18 sesiones), de los tres profesores que enseñan cálculo integral en la Facultad de Educación, el significado personal de la mayoría de los estudiantes sobre la integral, incorporaba prácticas que permitían obtener expresiones simbólicas de integrales elementales a partir de sus gráficas (para integrales definidas), no así para las integrales indefinidas e impropias. Dichas prácticas no formaban parte del significado de sus objetos personales "funciones elementales" antes del proceso de enseñanza, ni habían sido

explícitamente contempladas en el diseño previo del significado institucional pretendido por el profesor observado.

Como conclusión general, nuevamente se obtiene que "el análisis prospectivo realizado en las secciones precedentes permite afirmar un "desequilibrio" evidente entre las configuraciones epistémicas introducidas, así como un privilegio de los procedimientos algebraicos y analíticos". Esta disparidad entre la destreza algorítmica y la carencia de recursos en el tratamiento gráfico-geométrico, señalada por Orton (1980), la ponen también de manifiesto Artigue y Szwed (1983, citado en Labraña, 2001. p. 73). En estos casos manifiestan muchos errores en el actuar de los estudiantes. En otros casos realizan ambas tareas y, cuando los resultados obtenidos son inconsistentes con el gráfico, intentan dar explicaciones poco razonables que muestran más confianza en los cálculos que en el dibujo". Finalmente se observa que los alumnos recuerdan la integración como un conjunto de reglas pero la mayoría no sabe por qué el cálculo de áreas y volúmenes trae consigo el cálculo de primitivas. También revela las dificultades para entender la noción de variación de una función cuando no depende del tiempo.

RECOMENDACIONES.

Es necesario que los docente de educación superior que trabajan los conceptos propios del cálculo integral reconozcan los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de las matemáticas avanzadas y que van adquiriendo una progresiva importancia en los cursos superiores: abstraer, analizar, categorizar, conjeturar, representar, conceptualizar, inducir y visualizar, definir, demostrar, formalizar, generalizar y sintetizar, procesos todos ellos que tienen una componente psicológica que al ser considerados permiten alcanzar un significado global del objeto a enseñar si se aborda desde las CE definidas.

Queda pendiente hacer un estudio histórico y epistemológico de los contenidos matemáticos, con especial referencia a los conceptos fundamentales del Análisis, en particular del cálculo integral, lo cual implica investigar la transposición didáctica del saber matemático al saber escolar a través del análisis de los currículos oficiales y de los libros de texto que en muchas ocasiones limitan el verdadero significado global del objeto a enseñar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Contreras, A., Ordóñez, L. y Wilhelmi, M. y Font, V. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), 367-384.

Crisóstomo, E. (2012). *Idoneidad de procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. D.L.:GR 491-2013-ISBN: 978-84-9028-374-5.

Crisóstomo E., Ordoñez L., Contreras A., y Godino J. (2005). Reconstrucción del significado global de la integral definida desde la perspectiva de la didáctica de la matemática. Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas. (pp. 125–166) Jaen, ESP.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2003). *Fundamentos de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemática para maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada. 18071. ISBN: 84-932510-6-2.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26. (1), 39-88.

Godino, J., Font, V., y Wilhelmi, M. (2007). Análisis Didáctico de procesos de estudio matemático basado en el Enfoque Ontosemiótico. Versión revisada de la Conferencia invitada en el IV Congresso Internacional de Ensino da Matematica. ULBRA, Brasil,25-27

Labraña, P. (2001). *Avaliación das concepcións dos alumnos de COU e Bachalerato acerca do significado do Cálculo Integral definida*. Tesis Doctoral, Universidad de Santiago de Compostela. Santiago de Compostela. España.

Ordóñez, L. y Contreras, A. (2010). La Integral Definida en las Pruebas de Acceso a la Universidad (pau): Sesgos y Restricciones en la Enseñanza de este objeto en 2o de bachillerato. *Sociedad Española de Investigación en educación Matemática*. 23- 41.

Orton, A. (1980). *A cross-sectional study of the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults*. Tesis Doctoral, University of Leeds, England.

Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las ciencias* 16(2), 233-249.

LA CONSTRUCCIÓN DEL LENGUAJE SIMBÓLICO DESDE LAS PRÁCTICAS

Oscar Alejandro Cervantes Reyes
Escuela Normal Superior Federal de Oaxaca, México.
yuza_cero7@hotmail.com

Palabras clave: lenguaje algebraico, pensamiento proporcional y prácticas.

Key words: algebraic language, proportional thinking and practices.

RESUMEN: El planteamiento de problemas tipo y la "medida desconocida", rutas del lenguaje algebraico identificadas en los libros de texto, nos han llevado a un simbolismo carente de sentido y significado para los aprendices. Por ello, la presente investigación problematiza la noción de "lenguaje algebraico" desde una perspectiva sistémica, reconociendo nuestro objeto de estudio como un saber situado y en uso, en prácticas de referencia que le proveen de sentido y significados. Para esto, analizamos el arte de la albañilería en una población de la mixteca Oaxaqueña, a través de un estudio de caso como método de investigación, la Teoría Socioepistemológica de la matemática educativa, los modelos de pensamiento proporcional y las fases de desarrollo del lenguaje algebraico como referente teórico.

ABSTRACT: The approach of "type problems" and "unknown as" routes identified in algebraic language textbooks, have led us to a meaningless symbolism and meaning for apprentices. Therefore, this research problematizes the notion of "algebraic language" from a systems perspective, recognizing our object of study as a knowledge set and in use, in reference practices that provide meaning and significance. For this, we analyze the art of masonry in a population of the Oaxacan Mixteca, through a case study as a research method, the socioepistemological Theory of mathematics education, models of proportional thinking and development phases of the algebraic language as theoretical reference.

INTRODUCCIÓN

Las trabajos desarrollados en los seminarios de la Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria con investigadores del Centro de Investigación y Estudios Avanzados (CINVESTAV - IPN), me permitieron reconocer la problemática respecto a la enseñanza y el aprendizaje del lenguaje algebraico; a pesar de que, desde hace varios años me había percatado de las dificultades de mis alumnos al trabajar con este contenido: mi racionalidad anterior me decía que había problemas, porque mis estudiantes salían mal en los exámenes; sin embargo, mi apreciación era una verdad a medias, porque el interés estaba centrado en la "aprobación", e ignoraba otros aspectos, como los procesos cognitivos, la naturaleza intrínseca o el aspecto sociocultural. Hoy en día, la problemática persiste, sin embargo mi relación al saber y mi visión ha cambiado, lo que me llevo a una revisión del estado del arte del objeto de estudio, donde identifiqué entre otros aspectos: primero, la enseñanza y aprendizaje del lenguaje algebraico requiere de otros lenguajes como el natural o el geométrico (Butto & Rojano, 2004; Malisani, 1999; Palarea, 1999; González, 2012; Filloy & Kieran, 1989). Segundo, reconocí que el planteamiento de "problemas tipo" y "la medida desconocida" son las 2 rutas que se desarrollan en los libros de texto del sistema educativo mexicano para abordar el lenguaje algebraico: ambos casos, presentan al lenguaje algebraico como un conocimiento acabado, preexistente, atomizado, en contextos ficticios, que solo hay que comunicar al alumno, sin que él sea participe de su construcción.

DESARROLLO

Desde nuestra óptica enmarcada en la teoría Socioepistemológica, consideramos a las prácticas sociales como fuente del saber, que dotan de razón y sentido al conocimiento. Por lo anterior, en nuestra investigación nos planteamos lo siguiente:

- Identificar al menos una práctica socialmente compartida que a través de su modelación permita construir un lenguaje simbólico, cercano a la noción de lenguaje algebraico.
- Encontrar una argumentación más rica, alternativa a las rutas vigentes en los libros de texto actuales; una ruta alternativa que atraviese la realidad del alumno, donde este sea participe activo de la construcción del conocimiento; un conocimiento en uso, con sentido y significado.

MARCO TEÓRICO

La teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, establece un método de acercamiento a las problemáticas que surgen dentro y alrededor de los fenómenos concernientes a la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional. Así mismo, postula la necesidad de un "examen minucioso del saber" amplio, sistémico; que considera las múltiples relaciones entre los vértices del triángulo didáctico, así como las restricciones institucionales pedagógicas; atendiendo las múltiples dimensiones del saber, al tiempo que considera las restricciones especificas del saber matemático. En este sentido, problematizamos el saber a través de una unidad de análisis sociopiestémica, donde estudiamos las diferentes dimensiones del saber: la dimensión didáctica, la dimensión epistemológica, la dimensión cognitiva y la dimensión socio – cultural (Cantoral, 2013), reconociendo nuestro objeto de estudio como un saber situado y en uso, en el que se modelan las dinámicas del saber de prácticas de referencia que le dotan de significado.

Por otra parte, de acuerdo con Malisani (1999) en la historia del Álgebra tiene importancia tanto la historia de los conceptos como el sistema de símbolos utilizados; mirada parcial de nuestro objeto de estudio pero que no riñe con nuestra perspectiva teórica. Respecto a la historia de los conceptos, Nesselman (citado por Malisani, 1999) distingue 3 fases o periodos en el desarrollo del lenguaje algebraico:

I. Fase Retórica: anterior a Diofanto de Alejandría (250 d. c.), este periodo se caracteriza porque en él no se utilizan símbolos, únicamente el lenguaje natural como soporte de expresión para resolver diferentes problemas individuales, que en ocasiones implicaba la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado.
II. Fase Sincopada: de Diofanto hasta fines del siglo XVI, en este periodo se empiezan a utilizar algunas abreviaturas para denotar incógnitas y relaciones de uso frecuente; sin embargo, los cálculos se hacen en lenguaje natural.
III. Fase Simbólica: a partir a François Viète (1540 - 1603) quien de forma sistemática empezó a utilizar letras para denotar las cantidades (incógnitas, sus potencias y coeficientes genéricos) y signos para las operaciones; empleo el lenguaje simbólico tanto para procedimientos resolutivos como para demostrar reglas generales.

Otro aspecto importante en este marco, son los resultados de la investigación de Reyes-Gasperini (2011), que atiende el fenómeno de empoderamiento docente, donde concibe a la proporcionalidad como herramienta para caracterizar su fenómeno de estudio, en este sentido Reyes-Gasperini postula la conglomeración de los diferentes modelos de pensamiento proporcional: cualitativo, aditivo simple, aditivo compuesto, modelo multiplicativo, inter e intra, como medio para construir un significado de "lo proporcional". Recuperamos algunos elementos de la investigación de Reyes-Gasperini y los orientamos hacia la construcción de un lenguaje simbólico, al considerar que la proporcionalidad es uno de los temas transversales de la educación básica, aunado a que "*la Socioepistemología utiliza a la transversalidad del conocimiento como herramienta vital de la construcción integral del conocimiento matemático*" aspecto importante de mi epistemología de la matemática.

METODOLOGÍA

Nuestro estudio está enmarcado en la línea cualitativa, tomamos el Estudio de Caso como método de investigación, que al ser transparadigmático y transdisciplinario puede ser utilizado desde cualquier paradigma de investigación (Durán, 2012). Seis días acompañamos a Rosendo, albañil de la mixteca oaxaqueña, 32 horas reloj específicamente en su trabajo y el resto del tiempo en su hogar, donde la entrevista semiestructurada y la observación participante fueron los ejes centrales para la recogida de datos; complementado con las hojas de visita, grabaciones de audio y transcripción de las entrevistas realizadas, evidencias que por su extensión organizamos en 3 episodios para su análisis, proceso en el que enfatizamos la combinación de técnicas y de múltiples fuentes, para obtener descripciones y conclusiones más convincentes a través de la triangulación de las mismas en un análisis exhaustivo.

CONCLUSIONES Y REFLEXIONES

Como resultado de la investigación logramos identificar a la albañilería como una práctica de referencia que orienta las actividades del albañil en su cotidiano, en el proceso de construcción de conocimiento y de puesta en juego del mismo: antes de preparar la mezcla, al determinar la cantidad de los materiales y al término de la preparación, cuando sopesa las características de la mezcla, de tal forma que le permita trabajarla. De igual manera, es la práctica de referencia la que orienta el actuar de Rosendo cuando calcula el presupuesto de una obra: material y mano de obra; ya sea de manera formal o informal, proceso que además de operaciones de aritmética básica, comprende también aproximaciones, inferencias, representaciones gráficas, cálculo de áreas, volúmenes, situaciones de conteo, y un fuerte manejo del pensamiento proporcional. Al mismo tiempo, identificamos una anidación de prácticas normada por una práctica social que se infiere a partir de sus funciones como se muestra en la figura 1.

Figura 1. anidación de prácticas, con práctica de referencia: albañilería.

En el contexto de esta práctica de referencia, identificamos puesto en juego al lenguaje algebraico en sus fases retórica y sincopada, cuando Rosendo explica las relaciones entre las cantidades de materiales para preparar la mezcla o concreto:

Tabla 1. Interacciones (Episodio 2, Rosendo, 26 de agosto de 2014)

[131.]	R	Ah, mira; un metro eh, mira ahorita vas a ver… un metro cúbico de concreto de la proporción de cuatro, de cuatro bultos.
[132.]	E	Cuatro por cuatro.
[133.]	R	Cuatro por cuatro a un cúbico; se tiene ya, como base ya calculado, que se lleva nueve botes, nueve bultos por metro cúbico de un concreto de loza.

En esta explicación Rosendo no recurre al uso de símbolos, los planteamientos y resoluciones los realiza en lenguaje natural (fase retórica) al tiempo que utiliza y representa relaciones de uso

frecuente (fase sincopada); analizando la Tabla 1, identificamos 2 relaciones proporcionales: "un metro cúbico de concreto de la proporción de cuatro, de cuatro bultos" y "nueve bultos por metro cúbico de un concreto de loza". La expresión "cuatro por cuatro" se refiere a la cantidad de botes de arena y grava por bulto de cemento; relación que tiene un significado para Rosendo "la resistencia del concreto", y que matemáticamente podemos reconocer como una relación entre dos magnitudes "razón proporcional", que a su vez podemos representar como: 4:4 o $\frac{1}{1}$. De manera semejante, identificamos la segunda expresión como una razón proporcional, donde se relaciona la cantidad de bultos de cemento por metro cúbico; es decir, que 9 bultos de cemento rinden un metro cúbico, que también podemos representar como : 1:9, 9:1, $\frac{1}{9}$ o $\frac{9}{1}$.

Por otra parte, en el lenguaje algebraico en uso de parte de Rosendo a través de expresiones de su propia práctica, identificamos uno a uno los diferentes modelos de pensamiento proporcional (Reyes-Gasperini, 2011), situación que a continuación describiremos.

Es importante señalar que el modelo cualitativo precede a los modelos a describir; mismo que el niño alcanza cuando de acuerdo con Piaget e Inhelder se reconoce un elemento de compensación para mantener el "equilibrio" donde "un incremento en una variable independiente da el mismo resultado que un decremento en la variable dependiente" (citado por Reyes-Gasperini, 2011). El Modelo aditivo simple es la primera aproximación para lograr un equilibrio, en esta se resuelven las situaciones a partir de técnicas aditivas y de recuento:

Tabla 2. Interacciones (Episodio 2, Rosendo, 26 de agosto de 2014)

[189.] E Digamos un tamaño normal, si ese es, si es un cuarto; ¿y si fueran dos cuartos?

[190.] R Dos cuartos; son 18 ¡si llega ves, si llega!, son dos cuartos: 18, 36… ¿con su baño?... 45 metros… ¡45 metros¡ Eso es lo que vas a ver …

[191.] E ¿Y si fueran tre…?; ahí, digamos ya van considerando conforme va creciendo, no solo son los cuartos… sino que, ya planeado es de que, va a llevar…

Modelamos la situación en la Tabla 3, a fin de identificar las relaciones métricas que subyacen.

Tabla 3. Análisis del modelo aditivo simple identificado en el episodio 2.

	Número de cuartos	m^2 de loza	
+1	1	18	+18
	2	36	
	3	52	

La Tabla 3 se muestra como Rosendo incrementa de 18 en 18 para calcular los metros cuadrados de loza, y de uno en uno el número de cuartos, cabe señalar que en dichos cálculos están sujetos a un cierto margen de error, en virtud de que son realizados mentalmente.

Así mismo, logramos también identificar el modelo multiplicativo de pensamiento proporcional en la Tabla 4.

Tabla 4. Interacciones (Episodio 2, Rosendo, 26 de agosto de 2014)

[275.] E Y ¿18 metros cuadrados, que casi está cerca de 20?

[276.] R Igualmente, porque estaba yo sacando cuentas: es un metro cúbico, unoo… con… ochenta centímetros algo así …

[284.] R Le vas hacer… no, ya no serían este… son, si fueran dos metros serían 18; pero no, ahí se va llevar este… 15 bultos.

…

[295.] E ¿Por qué dice usted?

[296.] R Porque estoy sumando el, eh… estoy sumando los dos metros cúbicos.

[297.] E Ajá.

[298.] R Así, mentalmente… porque dije nueve, nueve bultos de ese… del metro cúbico ese; pero, como del otro son prácticamente son tres cuartos, pero ya no; entonces ya le quitamos a … los dos bultos a… ya le quito al, en lugar de que sea metro cúbico entero el otro, pues yo saco primero que fuera, como si fueran los dos …

Modelamos la situación anterior a través de la Tabla 5, a fin de evidenciar los modelos, aditivo compuesto y el inter.

Tabla 5. Análisis del modelo inter identificado en el episodio 2.

$\frac{3}{4}$ ✕

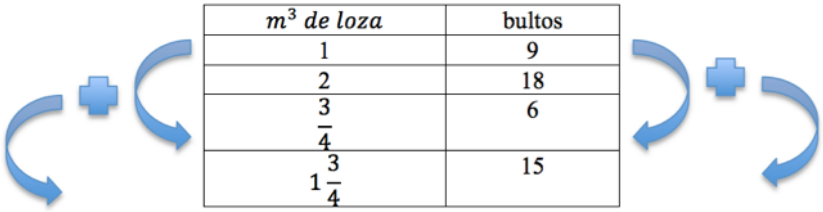
m^3 *de loza*	bultos
1	9
2	18
$\frac{3}{4}$	6
$1\frac{3}{4}$	15

✕ $\frac{3}{4}$

En un primer momento se aprecia el cálculo que hace Rosendo para encontrar el número de bultos que corresponde a $\frac{3}{4}$ de un m^3; donde asume que a $\frac{3}{4}\,m^3$ de loza le corresponden $\frac{3}{4}$ de los 9 bultos, donde 6.75 bultos lo ajusta a seis, a un número entero por dos razones: la primera en las tiendas de materiales no venden $\frac{3}{4}$ de bulto, y segunda en repetidas ocasiones durante el segundo episodio Rosendo señala que de cada m^3 le sobra medio bulto aproximadamente. De acuerdo con Carretero (citado por Reyes-Gasperini, 2011, p. 109) en esta situación se exploran "*dos tipos de "estructuras multiplicativas" en situaciones problemas que implican una o varias operaciones de multiplicación y/o división*". Al mismo tiempo, reconocemos en esta situación al modelo aditivo compuesto; donde, Rosendo plantea una relación de proporcionalidad directa, dado que al tener

dos razones identificadas, calcula una tercera mediante la suma, mismo apoyándonos en los funcionales de Cauchy puede expresarse como $f(x+y)=f(x)+f(y)$, o bien, la imagen de la suma es igual a la suma de las imágenes (citado en Cantoral, 2013), como se muestra en la Tabla 6:

Tabla 6. Análisis del modelo aditivo compuesto identificado en el episodio 2.



De manera semejante, es posible identificar el modelo multiplicativo en la Tabla 7.

Tabla 7. Interacciones (Episodio 2, Rosendo, 26 de agosto de 2014)

[258.] R ¿Sí?, no, no este… hasta el final; son nueve bultos: cada metro, cada metro cúbico de ahí de los nueve, te va a sobrar como medio bulto… de cemento; y eso ya por experiencia me ha tocado, ya lo he hecho; porque he pedido los nueve, porque era más fácil sacar, eh… como son 50 metros serían 5 metros cúbicos; por eso saqué de los 45…

[259.] E ¿Cinco metros cúbicos?

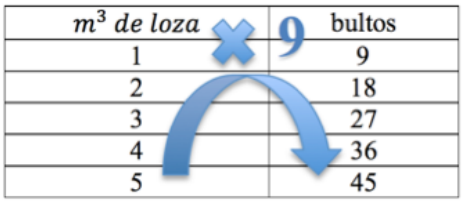
[260.] R Ajá, cinco metros cúbicos ¿por nueve?, ¿serían que… los 45?

[261.] E 45.

[262.] R 45, pero no se lleva los 45; se lleva un poquito menos, porque cada…

A fin de evidenciar dicho modelo, recurrimos a la modelación:

Tabla 8. Análisis del modelo multiplicativo identificado en el episodio 2.



Relación de la forma que $n \to 9n,\ n \epsilon \mathbb{Z}$ que corresponde al modelo multiplicativo. De acuerdo a nuestra referencia teórica, solo falta el modelo intra, que identificamos en la siguiente tabla:

Tabla 9. Interacciones (Episodio 2, Rosendo, 26 de agosto de 2014)

> [430.] R Si ya tiene que… si, ya se da cuenta él; ya más o menos. La recomendación que dices tú, que te estoy dando ehh… ya lo platicamos, él ya lo sabe; porque ya lo vio con nosotros, lo único que le vas a decir ¡que no vaya a quedar muy pobre!, si le dices ya así: sin, sin números "¡no vaya a quedar muy pobre, ehhh!", "o sea, ¡regular!"; entonces dice, si él ya acostumbraba a echarle cinco o seis, no pus… ahí entonces ya se va a calcular cuántos bultos; porque va a colar este cuarto o va a colar un bañito, ya va hacer como decimos ¿no? ¡Que no quede muy pobre!, o ves la revoltura ya que, ya la hizo; "¿cuántos bultos hiciste?" "pus, ¡tres!", "¿Oye, no está muy pobre?", "maistro, es que le eché… tanto" "pues, échale… ¿son, cuantos botes?; échale otros dos botes, ¿o qué?", pero ya a cuenta de lo que él te dijo cuanto que le echó; así es…

Es precisamente la expresión "¡no vaya a quedar muy pobre, ehhh!" donde se establece una relación entre magnitudes heterogéneas: bultos de cemento y botes de arena/grava que corresponde a la estructura del modelo multiplicativo funcional señalado así por Carretero, al que más tarde Lamon llamaría como modelo intra (citado por Reyes-Gasperini, 2011); mismo que entendemos como una relación a modo de razón constante entre los bultos de cemento y los botes de arena, que sin importar la cantidad de los materiales dicha razón se mantiene constante, lo cual podemos expresar como $y = kx$, donde k es la constante de proporcionalidad. Es decir, Rosendo en todo momento busca que la razón entre y (bultos de cemento) y x (botes de arena), se mantenga constante k. Para Rosendo esta razón va más allá de una relación aritmética, porque en esta, él considera diversos factores, como las características de los materiales, las condiciones físicas o la disposición de la obra.

Consideramos que la noción de proporcionalidad a través de los modelos identificados en uso, en una suerte de simbiosis con el lenguaje algebraico en su fase retórica en esta práctica de referencia de la albañilería, conforman una ruta alternativa a las dos rutas planteadas en los libros de texto. Porque las evidencias encontradas nos muestran que aun antes del simbolismo es posible que emerja el lenguaje algebraico con sentido y significados, en un contexto determinado por una práctica de referencia como lo es la albañilería.

Aunado a lo anterior, a manera de reflexión quiero señalar el paralelismo entre el desarrollo del lenguaje algebraico en la historia de la matemática y el lenguaje encontrado en la práctica de referencia de la albañilería de la mano del pensamiento proporcional (dos conocimientos puestos en uso), que serán el punto de partida para continuar el desarrollo del lenguaje algebraico. Nótese, que mencionamos para continuar, no para empezar a desarrollar, no estamos planteando una ruta a modo, sino que encontramos una ruta ya trazada, un camino funcional hacia el lenguaje algebraico simbólico inmerso en una práctica de referencia. No planteamos una nueva ruta, sino que la ruta ya está trazada, y responde a la naturaleza del saber. Solo falta continuar o seguir la ruta identificada en la albañilería, una ruta natural que continuaremos bajo la consideración: si las fases de desarrollo del lenguaje algebraico se sucedieron en la historia de la humanidad, es posible plantearla bajo el mismo esquema en el individuo.

Por otra parte, para finalizar queremos señalar el aporte central de esta investigación. Respecto del denominado *programa funcionalista* centrado en la *estructura sintáctica* del lenguaje algebraico, programa que si bien resulta adecuado para localizar los obstáculos didácticos que se han documentado en el aprendizaje del lenguaje algebraico; funciona para explicar las dificultades en su adquisición, no ha resuelto plenamente el problema del aprendizaje del álgebra como muestran

las evaluaciones internacionales; es decir, continúan por la ruta de un simbolismo carente de sentido y significado (Filloy y Kieran, 1989; Butto y Rojano, 2004). El modelo es adecuado para explicar los obstáculos en el aprendizaje del álgebra, pero no lo es para las propuestas de intervención didáctica (problemática, dificultades, obstáculos en el aprendizaje del lenguaje algebraico). Por lo anterior**,** a sabiendas de que el problema del aprendizaje del álgebra sigue sin resolverse y como resultado de nuestra investigación; proponemos una estrategia centrada en las *prácticas situadas*, prácticas socialmente compartidas, que "atraviesan la realidad de quien aprende", donde se asume el saber cómo un conocimiento en uso; tomando por base a los modelos de *pensamiento proporcional* y *desarrollo del lenguaje algebraico*. A diferencia entonces del programa funcionalista, consideramos la sintaxis algebraica en un segundo término; porque, como vimos en la investigación, aún antes de los símbolos existen significados, y también, ya está "presente" en uso el lenguaje algebraico. Nuestro programa, si pretende intervenir directamente en el sistema educativo, a través de propuestas de intervención didácticas, proceso en el que seguimos trabajando. Por último, sostenemos la hipótesis que esta vía favorece la construcción de otras nociones o conocimientos, como la noción de función o más ampliamente la noción de linealidad; pero, esto es motivo de otra investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Butto, C., y Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática, 16(1),* 113-148.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona, España: Gedisa.

Durán, M. (2012). El estudio de caso en la investigación cualitativa*. Revista nacional de administración*, *3*(1), 121-134.

Filloy, E., y Kieran, C. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias, 7(3),* 229-240.

González, E. (2012). *Del lenguaje natural al lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basada en el planteamiento y resolución de problemas* (Tesis de maestría no publicada). Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia, Colombia.

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Visión histórica. *Revista del Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación, 1(13),* 105-132.

Palarea, M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. *NÚMEROS Revista de Didáctica de las Matemáticas, 40(1)*, 3-28.

Reyes-Gasperini, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

AS CONTRIBUIÇÕES DA ETNOMATEMÁTICA E DA PERSPECTIVA SOCIOCULTURAL DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA A FORMAÇÃO DA CIDADANIA DOS ALUNOS

Gelindo Martineli Alves, Milton Rosa, Marger da Conceição Ventura Viana
Universidade Federal de Ouro Preto (Brasil)
gelindomartinelli@hotmail.com, milton@cead.ufop.br, conceicao@cead.ufop.br

Palavras-chave: etnomatemática, educação financeira, história da matemática, cidadania, perspectiva sociocultural

Key words: ethnomathematics, financial education, history of mathematics, citizenship, sociocultural perspective

RESUMO: Este estudo foi conduzido com 35 alunos matriculados no oitavo ano do Ensino Fundamental de uma escola pública localizada na microrregião de Sete Lagoas, no estado de Estado de Minas Gerais, Brasil. O principal objetivo foi verificar as contribuições de atividades fundamentadas pelo Programa Etnomatemática e pela perspectiva sociocultural da História da Matemática para o desenvolvimento da cidadania dos alunos por meio do ensino e aprendizagem de conteúdos da Educação Financeira A coleta, a análise e a interpretação dos dados foram desenvolvidas por meio da utilização da metodologia do estudo misto como o design de pesquisa denominado QUAL+ quan. Uma contribuição importante desse estudo foi a (re)conciliação entre a escola e o cotidiano dos alunos por meio da utilização do conhecimento financeiro e da perspectiva etnomatemática em sala de aula.

ABSTRACT: This study was conducted with 35 eighth graders students enrolled in a public middle school located in the Sete Lagoas Microrregion, in the State of Minas Gerais, Brazil. The main objective of this study was to verify the contributions of activities grounded in ethnomathematics and sociocultural perspective of mathematics history in relation to the development of student citizenship through the teaching and learning of financial education content. The data collection, analysis, and interpretation were developed through the use of mixed method study with the research design: QUAL + quan. One important contribution of this study was the (re)conciliation between school and daily lives of the students through the use and utilization of financial knowledge using an ethnomathematical perspective in the classroom.

INTRODUÇÃO

Existe a necessidade de colocar a Matemática a serviço da Educação para direcionar os alunos para o desenvolvimento da cidadania. A Etnomatemática pode ser uma resposta para essa inquietação, pois é um "é programa de pesquisa em história e filosofia da matemática com óbvias implicações pedagógicas" (D'Ambrosio, 2009, p. 27).

Essas implicações estão evidenciadas em sua própria definição etimológica, em que *etno* se refere ao contexto cultural e, portanto, inclui considerações como linguagem, jargão, códigos de comportamento, mitos e símbolos; *matema,* que significa explicar, conhecer, entender; e *tica* que vem de techné, que é a mesma raiz de arte e de técnica. Assim, os estudos e a experiência com atividades em sala de aula podem conduzir os alunos ao ato de explicar, de conhecer e de entender os diversos contextos culturais (D'Ambrosio, 1990).

Portanto, o Programa Etnomatemática é uma maneira de explicar como *fazer e aprender* os conteúdos matemáticos relacionados com as práticas de comércio e finanças num contexto cultural no qual os alunos podem ser considerados consumidores dominados por uma cultura de consumismo globalizada. Nesse sentido, é importante ressaltar que as decisões relacionadas com a Matemática Financeira, enfrentadas no cotidiano, interferem nas condutas individuais, grupais e familiares (Rossetti Jr., 2010).

Por isso, é importante que os professores, em sua prática pedagógica cotidiana, considerem a reflexão, estimulando a capacidade de leitura crítica e interpretação dos fatos, é tarefa do trabalho educacional visando à formação de um cidadão pleno. Assim, o ensino e a utilização de modelos financeiros nas aulas devem estar afinados com as demandas, os interesses e as experiências vivenciadas pelos alunos. As fórmulas difíceis e os modelos matemáticos prontos, com poucas facilidades aos estudantes, devem dar espaço aos modelos construídos a partir de suas vivências, na busca de saídas para os problemas oriundos de suas relações na sociedade (Rosa, 2010).

Em virtude do exposto, este estudo busca responder à seguinte questão de investigação: *Quais são as possíveis contribuições que a Etnomatemática e a perspectiva sociocultural da História da Matemática podem trazer para a formação da cidadania dos alunos de uma turma do 8.º ano de uma escola pública da microrregião de Sete Lagoas (MG), por meio do ensino e aprendizagem de conteúdos da Educação Financeira?*

Para responder à problemática desta investigação, a Etnomatemática foi considerada como um programa de pesquisa utilizado para verificar se os conteúdos matemáticos da Educação Financeira trabalhados nas atividades propostas poderiam propiciar uma educação cidadã, alcançando, dessa maneira, o objetivo da escola, como agente de formação de cidadania, na qual os alunos adquirem condições para o desenvolvimento de múltiplas competências e habilidades.

EM BUSCA DA FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O mundo está vivenciando uma época bem parecida com a efervescente necessidade de mudanças de paradigmas que ocorreu nos séculos XIV e XVI, no continente europeu. A sociedade moderna e globalizada gera grande quantidade de conhecimentos e informações, mas, ao mesmo tempo, parece haver uma lacuna quanto à eficácia desses conhecimentos como um caminho a ser utilizado para se alcançar a justiça social e a paz mundial (Rosa e Orey, 2005).

Os sistemas institucionalizados de Educação no exterior e no Brasil fornecem uma sensação de dicotomia com relação à inclusão escolar e à exclusão educacional. Assim, apesar da inclusão escolar, a exclusão educacional ocorre principalmente por meio da disciplina que é considerada central nos currículos educacionais, a Matemática, pela maneira tradicional por meio da qual as suas atividades curriculares são apresentadas e propostas para os alunos. Colocada "como um elemento fundamental para a seleção dos melhores alunos" (Miorim, 1998, p. 19), a "Matemática tem sido um instrumento selecionador de elites" (D'Ambrosio, 2009, p. 77), tornando-se a principal fonte de exclusão social, bem como um meio ideal para defender e proteger a classe dominante.

Por outro lado, um sistema educacional direcionado para o desenvolvimento da cidadania tem a preocupação de assumir a valorização da cultura de sua própria comunidade e, ao mesmo tempo, buscar ultrapassar seus limites, propiciando às crianças pertencentes aos diferentes grupos sociais o acesso ao saber, tanto no que diz respeito aos conhecimentos socialmente relevantes da cultura brasileira no âmbito nacional e regional como no que faz parte do patrimônio universal da humanidade (Brasil, 1998).

Diante dessa perspectiva, existe a necessidade de um *novo renascimento* para a retomada da consciência e do resgate do conhecimento matemático desenvolvido pelos membros de grupos culturais distintos. Assim, o Programa Etnomatemática pode ser considerado como uma das "manifestações desse novo renascimento" (D'Ambrosio, 2009, p. 29).

Então, uma das implicações pedagógicas do Programa Etnomatemática é a valorização do conhecimento cultural dos alunos sobre o *saber/fazer* matemático, para utilizá-lo como fundamentação teórica e metodológica que os auxiliarão na aquisição e no desenvolvimento de novos conhecimentos. Essa abordagem permite que eles se tornem cidadãos críticos, reflexivos, conscientes e capazes de tomar decisões, visando a transformar a sociedade e as suas comunidades e tornando-as mais justas (Rosa e Orey, 2007).

Nesse sentido, a História da Matemática, na perspectiva sociocultural, torna-se fonte de recursos didáticos para uma ação pedagógica que procura direcionar os professores e os alunos para compreender a Matemática como uma criação humana desenvolvida para a resolução de problemas do dia a dia, mostrando as necessidades e as preocupações de culturas distintas, em diferentes momentos históricos (Rosa e Orey, 2005).

Na História da Matemática podem ser encontrados fatos históricos que relacionam os conceitos matemáticos a temas de cunho sociocultural como fontes para debates entre os alunos e professores, podendo contribuir para a formação de cidadãos críticos e capazes de tomar decisões. Assim, o conhecimento matemático é um processo construtivo no qual estão inseridos a imaginação, os contraexemplos, as conjecturas, as críticas, os erros e os acertos. Porém, historicamente, esse conhecimento é apresentado de maneira descontextualizada e atemporal, pois muitos matemáticos somente se preocupam em comunicar os resultados, esquecendo-se do processo que os produziu (Brasil, 1998).

A Matemática Financeira pode ter se originado como uma ciência prática para auxiliar o desenvolvimento da agricultura, da engenharia e das "instituições de práticas financeiras e comerciais para o lançamento e a arrecadação de taxas para propósitos mercantis" (Eves, 2004, p. 57). Então, a Matemática pode ser considerada como uma ciência desenvolvida pela humanidade

para a resolução de problemas cotidianos, tendo o comércio como um dos propulsores, pois, no princípio, a humanidade produzia para o seu consumo.

Com o progresso e multiplicando-se as suas necessidades, para satisfazê-las, viu se na contingência de fazer circular a sua produção. Viu-se a necessidade de trocar o que lhe sobrava pelo que lhe faltava. E, assim, começa o comércio, primitivamente muito complicado. Consistia, pura e simplesmente, na troca de mercadorias (D'Ambrosio e D'Ambrosio, 1972).

A Matemática Financeira se tornou uma área da Matemática que é estudada principalmente por administradores, contadores, economistas e técnicos da área de sistemas financeiros, que têm o auxílio das novas tecnologias, como os computadores e as calculadoras eletrônicas. Dessa maneira, existe a necessidade de se ressaltar a importância da Matemática para a compreensão das relações econômicas e financeiras atuais, pois a apropriação dos significados dos conceitos da área da Educação Financeira é fundamental para o desenvolvimento da cidadania.

O conhecimento matemático necessário para resolver os problemas práticos relacionados ao comércio e às finanças somente estava ao alcance da minoria dominante, pois, no século XV, quem estivesse "interessado em aprender multiplicações e divisões, teria de escolher uma universidade adequada, uma vez que apenas algumas delas, provavelmente da Itália, tinham condições de oferecer instruções tão avançadas e ainda com auxílio do ábaco" (Miorim, 1998, p. 9).

A *Organização de Cooperação de Desenvolvimento Econômico* (OCDE) apresenta a Educação Financeira como um processo mediante o qual os indivíduos e as sociedades melhoram sua compreensão em relação aos conceitos e produtos financeiros, de maneira que, com informação, formação e orientação, possam desenvolver os valores e as competências necessários para se tornarem mais conscientes das oportunidades e dos riscos neles envolvidos e, então, poderem fazer escolhas bem informadas, saber onde procurar ajuda, adotar outras ações que melhorem o seu bem-estar. Assim, podem contribuir de maneira mais consistente para formação de indivíduos e sociedades responsáveis, comprometidos com o futuro (Brasil, 2010).

Os documentos oficiais que estabeleceram a Educação Financeira no Brasil deixam a cargo das instituições financeiras a responsabilidade de sua execução, ficando para o Ministério da Educação apenas o apoio pedagógico. Contudo essa abordagem pode direcionar a Educação Financeira para os interesses das instituições financeiras, que estão relacionados com a intenção de aumentar seus lucros (Brasil, 2010).

Conforme está indicado nos *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática*, uma das maneiras de a escola cumprir o seu papel na formação básica da cidadania dos alunos é uma ação pedagógica interdisciplinar da Matemática em conjunto com os Temas Transversais, pois a proposta de trabalhar com questões de urgência social numa perspectiva de transversalidade aponta para o compromisso a ser partilhado pelos professores das áreas, uma vez que é o tratamento dado aos conteúdos de todas as áreas que possibilita ao aluno a compreensão de tais questões, o que inclui a aprendizagem de conceitos, procedimentos e o desenvolvimento de atitudes (Brasil, 1998).

Uma das questões de urgência social apresentadas nos PCN (Brasil, 1998) de Matemática está relacionada com o consumo, que é apresentado como uma forma e um objeto de vida. Em vista

disso, para que a escola cumpra o seu papel na formação de cidadãos críticos e reflexivos, é fundamental que os alunos aprendam a se posicionar criticamente diante de assuntos relacionados com a cidadania. Dessa maneira, a compreensão da Matemática é essencial para que os cidadãos saibam tomar decisões em sua vida profissional e agir com equilíbrio em relação a situações que envolvem consumo para que possam exercer a sua cidadania com plenitude.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa foi realizada com 35 alunos regularmente matriculados no oitavo ano de uma escola pública da rede municipal de ensino de uma cidade localizada na microrregião de Sete Lagoas, no Estado de Minas Gerais. A coleta, a análise e a interpretação dos dados deste estudo estão fundamentadas no Método do Estudo Misto, que utiliza as abordagens qualitativa e quantitativa na condução de investigações e pesquisas (Creswell e Plano Clark, 2007). A utilização de *designs* com método misto de pesquisa é uma tendência crescente em Educação, pois a combinação dos métodos qualitativo e quantitativo oferece uma alternativa para a abordagem das problemáticas deste campo de estudo.

O método de estudo misto se refere a um único estudo que utiliza estratégias mistas para responder à problemática da pesquisa. Neste estudo, o *design* metodológico utilizado é o estudo misto simultâneo *QUAL + quan*, no qual a abordagem qualitativa tem importância primária, enquanto que a abordagem quantitativa tem importância secundária, sendo importada para dentro do estudo qualitativo. Neste *design*, a triangulação dos dados tem papel fundamental, pois é utilizada para verificar a convergência e a corroboração dos dados coletados, analisados e interpretados com relação à problemática abordada. Por outro lado, a triangulação teórica é empregada, pois tem por objetivo auxiliar na análise e interpretação dos dados coletados (Creswell e Plano Clark, 2007).

Os resultados e a análise dos dados qualitativos e quantitativos foram coletados por meio de questionário, dos registros documentais dos blocos de atividades e do diário de campo do professor-pesquisador. A interpretação dos resultados obtidos pela análise das informações das categorias *a priori*, das categorias mistas e das categorias que emergiram durante o levantamento dos dados qualitativos e quantitativos obtidos pelos instrumentos de coleta e pelo processo de quantificação dos dados qualitativos.

Com o término da preparação e da análise dos dados coletados na parte empírica, o professor-pesquisador submeteu-os a um processo rigoroso de classificação. Assim, por meio da leitura e releitura cuidadosa dos dados constantes nos instrumentos de coleta de dados, ele iniciou o processo de categorização por meio da definição de palavras, frases ou expressões, de acordo com a natureza da problematização do estudo, dos objetivos da pesquisa e do tipo de instrumentos de coleta que foram analisados. Durante a etapa de quantificação dos dados qualitativos, o professor-pesquisador definiu as palavras, as frases e as expressões em subcategorias para que, posteriormente, procedesse à categorização (Creswell e Plano Clark, 2007).

Durante o processo de codificação, o professor-pesquisador isolou palavras, frases e expressões para análise, a fim de submetê-las à classificação. Esse procedimento foi realizado pela reescrita de cada uma dessas unidades em um quadro definido por subcategorias para, depois de individualizadas e isoladas, classificá-las. Periodicamente, o professor-pesquisador retornava aos

instrumentos de coleta de dados para explorar, de maneira mais completa e ampla, o sentido e o significado dessas unidades. Após a identificação e codificação, o professor-pesquisador passou para a categorização das informações levantadas por esses instrumentos.

Após a definição das categorias temáticas, houve necessidade de que o professor-pesquisador apresentasse e comunicasse os resultados da pesquisa. Como foi utilizada a metodologia mista, a descrição desses resultados foi realizada de maneira quantitativa e qualitativa. Assim, na abordagem quantitativa foi utilizada a estatística descritiva, que envolveu a organização de tabelas, quadros e gráficos com a apresentação das categorias temáticas, bem como a computação da frequência e percentual das palavras, frases e expressões que compuseram as subcategorias.

O aspecto quantitativo das respostas dadas pelos participantes para os registros documentais dos blocos de atividades auxiliou o professor-pesquisador a obter uma visão geral de como os participantes se relacionaram com os conteúdos propostos pela Educação Financeira, no desenvolvimento da cidadania por meio da perspectiva do Programa Etnomatemática. Essa abordagem possibilitou que o professor-pesquisador, por meio da análise textual de conteúdo dessas atividades, determinasse as categorias temáticas.

INTERPRETANDO OS RESULTADOS

No trabalho pedagógico com a Matemática no Ensino Fundamental, os conteúdos da Educação Financeira foram significativos para a promoção da cidadania. Portanto podiam ser trabalhados em sala de aula, considerando-se a perspectiva sociocultural da evolução histórica deste campo de conhecimento da Matemática e visando ao posicionamento pessoal dos alunos nas questões que envolviam tomadas de decisão relacionadas com assuntos comerciais e financeiros presentes no cotidiano.

Uma importante contribuição da perspectiva sociocultural da História da Matemática estava relacionada com a sua abordagem implícita na contextualização de três sequências didáticas que foram elaboradas pelo professor-pesquisador, de acordo com os contextos social, econômico e cultural, e foram extraídas do cotidiano dos alunos para o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos relacionados com a Educação Financeira. O desenvolvimento das atividades que compuseram essas sequências didáticas possibilitou aos alunos compreender a importância da utilização de conteúdos da Educação Financeira no cotidiano, evitando que a população fosse facilmente enganada pelos comerciantes.

Assim, as discussões, os debates, as análises e o trabalho pedagógico realizado com os alunos em sala de aula sobre esses conteúdos contribuíram para o desenvolvimento da cidadania. Portanto, a História da Matemática foi um guia que direcionou o professor-pesquisador na organização de sequências didáticas que foram utilizadas como recursos pedagógicos em sala de aula. Essa abordagem possibilitou uma orientação histórica na elaboração das atividades propostas, enquanto a abordagem explícita não teve relevância pedagógica na preparação dessas atividades.

Dessa maneira, a história das definições, dos conceitos e dos conteúdos matemáticos estava implícita nas atividades desenvolvidas durante a condução do trabalho de campo. Contudo, apesar de alguns aspectos da História da Matemática terem sido discutidos explicitamente em situações-

problema, a sua utilização ocorreu de maneira implícita nas atividades matemáticas propostas para os participantes deste estudo. Assim, os participantes puderam entender a necessidade da aprendizagem de determinados conteúdos matemáticos do currículo escolar, auxiliando a humanização do conhecimento matemático.

Os procedimentos de ensino e aprendizagem elaborados de acordo com a perspectiva do Programa Etnomatemática serviram para aproximar os discentes de conceitos relacionados com a Educação Financeira e a prática social, revelando-se ferramentas importantes na elaboração de atividades curriculares matemáticas. Uma das contribuições da Etnomatemática para o desenvolvimento da cidadania foi a identificação da existência de relacionamento entre o conhecimento aprendido na escola e o conhecimento utilizado para resolver os problemas relacionados com atividades comerciais e financeiras.

Nesse sentido, a extração de informações provenientes do cotidiano dos alunos subsidiou a aquisição do conhecimento matemático por meio da elaboração de um material didático-pedagógico composto por atividades matemáticas contextualizadas e propostas em sala de aula para facilitar o ensino e aprendizagem de conteúdos relacionados com a Educação Financeira.

Consequentemente a interligação entre os tópicos e temas ensinados em Matemática e os fenômenos que ocorriam no cotidiano dos alunos possibilitou a discussão relacionada com a resolução de problemas associados à Educação Financeira, facilitando o debate sobre assuntos importantes da sociedade contemporânea, como a verificação da embalagem mais econômica, a compreensão da importância das porcentagens nas propagandas, a determinação dos juros pagos na caderneta de poupança e cobrados no cheque especial, além de discussões importantes sobre a cobrança de impostos.

A promoção dessas discussões e debates em sala de aula possibilitou que os alunos compreendessem que os impostos arrecadados pelos governos municipal, estadual e federal deviam retornar para a população como benefícios estruturais, infraestruturais e sociais. Essa abordagem também possibilitou que os alunos dialogassem com o conhecimento produzido no currículo matemático por meio da resolução de atividades elaboradas com a utilização de situações-problema externas ao contexto escolar.

Assim, outra contribuição importante da Etnomatemática para o desenvolvimento da cidadania dos alunos estava relacionada com a ampliação do conhecimento matemático, o que permitiu aos alunos a valorização da aprendizagem, pois puderam perceber a contextualização da Matemática escolar em relação a problemas e situações enfrentados na vida diária. Essa perspectiva de ensino e aprendizagem de conteúdos da Educação Financeira nas aulas de Matemática possibilitou aos alunos uma visão crítica da realidade por meio da utilização de instrumentos de natureza matemática para analisar reflexivamente fenômenos do dia a dia.

Ressalta-se que uma das contribuições do Programa Etnomatemática foi promover o desenvolvimento de pessoas capazes de refletir criticamente sobre decisões financeiras responsáveis. Essa abordagem exigiu que o processo de ensino e aprendizagem em Matemática estivesse subjacente ao contexto dos problemas comerciais e financeiros cotidianos. Outra contribuição do Programa Etnomatemática foi possibilitar a percepção de vínculo entre a aprendizagem escolar e a extraescolar, contribuindo para que a associação entre esses dois tipos

aprendizagem não fosse dicotômica, pois permitiu a aplicação dos conhecimentos matemáticos em atividades propostas em sala de aula, mas contextualizadas em práticas diárias.

É importante ressaltar que a ação pedagógica desencadeada durante a condução deste estudo proporcionou o desenvolvimento de ações educacionais que possibilitaram aos alunos a aquisição de conhecimentos matemáticos essenciais para auxiliá-los no exercício de direitos e deveres intrínsecos ao desenvolvimento da cidadania. Nesse direcionamento, a busca de propostas curriculares necessárias para o desenvolvimento de conteúdos comerciais e financeiros foi um aspecto importante da ação pedagógica desenvolvida em sala de aula, vista como ambiente adequado para a aquisição do conhecimento matemático por meio do convívio, da interação e da participação ativa na realização das atividades propostas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com relação à importância e à necessidade do conhecimento dos conteúdos de Educação Financeira para o desenvolvimento da cidadania dos alunos, buscaram-se exemplos de situações reais relacionadas com atividades presentes no cotidiano, como juros cobrados no cheque especial e no crediário, interpretação de diversos tipos de descontos presentes em propagandas e compra de produtos que possuíam embalagem mais econômica. O objetivo da utilização desses exemplos foi mostrar para os alunos a importância e a necessidade da aquisição do conhecimento de conteúdos matemáticos relacionados com a Educação Financeira, no Ensino Fundamental.

A realização desta pesquisa possibilitou a elaboração de atividades que estimularam o desenvolvimento da cidadania dos alunos para que pudessem desempenhar as suas funções com respeito aos valores e à ética. Com isso, a contextualização do ensino da Educação Financeira auxiliou os alunos a desenvolver o senso de responsabilidade social, bem como a conscientização de seus deveres por meio da realização de atividades matemáticas curriculares que aliaram a teoria à prática.

Como resultado deste estudo, foi elaborado um produto educacional que poderá auxiliar os professores de matemática a utilizarem a perspectiva sociocultural da História da Matemática e o Programa Etnomatemática no ensino e aprendizagem de conteúdos da Educação Financeira visando à formação e o desenvolvimento da cidadania dos alunos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brasil (1998). *Parâmetros curriculares nacionais:* matemática. Brasília, DF: MEC/SEF.

Brasil (2010) *Decreto nº 7.397, de 22 de dezembro de 2010.* Disponível em http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2007-2010/2010/Decreto/D7397.htm. Acessado em 20 de Setembro de 2015.

Creswell, J.; Plano Clark, V. (2007). *Designing and conducting mixed methods research*. Thousand Oaks, CA: Sage.

D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática*. São Paulo, SP, Brasil: Editora Ática.

D'Ambrosio, U. (2009). *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte, MG, Brasil: Autêntica, 2009.

D'Ambrosio, N. e D'Ambrosio, U. (1972). *Matemática comercial e financeira e complementos de matemática para os cursos do 2º grau*. São Paulo, SP, Brasil: Companhia Editorial Nacional.

Eves, H. (2004). *Introdução à história da matemática.* Tradução: Higyno H. Domingues. Campinas, SP, Brasil: Editora da UNICAMP.

Miorim, M. A. (1998). *Introdução à história da educação matemática.* São Paulo, SP, Brasil: Atual.

Rosa, M. (2010). *A mixed-method study to understand the perceptions of high school leaders about English language Learners (ELLs):* the case of mathematics. Doctorate Dissertation. Educational Leadership. College of Education. Sacramento, CA: California State University.

Rosa, M. e Orey, D. C. (2005). Raízes históricas do programa etnomatemática. *Educação Matemática em Revista, 12*(18/19), 5-14.

Rosa, M. e Orey, D. C. (2007). Cultural assertions and challenges towards pedagogical action of an ethnomathematics program. *For the Learning of Mathematics, 27*(1), 10-16.

Rossetti Jr., H. (2010). *Educação matemática e financeira*: *um estudo de caso em cursos superiores de tecnologia*. Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática. São Paulo, SP, Brasil: Universidade Cruzeiro do Sul.

DECONSTRUCCIÓN DE LOS MODELOS ALOMÉTRICOS

José Trinidad Ulloa Ibarra, Jaime Lorenzo Arrieta Vera, Gessure Abisaí Espino Flores
Universidad Autónoma de Nayarit (México); Universidad Autónoma de Guerrero, (México)
jtulloa@uan.edu.mx, jaime.arrieta@gmail.com, abisai_8282@hotmail.com

Palabras clave: deconstrucción, modelos, alometría, pesca

Key words: deconstruction, models, allometry, fishing

RESUMEN: Este trabajo es una contribución al proyecto "Las prácticas de modelación en comunidades de profesionales de la pesca, un estudio socioepistemológico", en el que basados en la teoría socioepistemológica estudiamos las prácticas sociales en la construcción del conocimiento, en nuestro caso la forma en la que los miembros de la comunidad realizan la modelación. Como producto de las investigaciones realizadas hemos propuesto la deconstrucción de diversas prácticas de modelación con el fin de mejorarlas. A diferencia de la ingeniería y la física, en la que las ecuaciones que rigen los fenómenos están por lo general bien establecidas y su adaptación a las circunstancias particulares, su simplificación e integración lo que requiere intuición matemática; en la mayoría de las situaciones biológicas no está nada claro que ecuaciones o modelo se debe aplicar, por ello la deconstrucción adquiere gran importancia.

ABSTRACT: This work is a contribution to the Project "modeling practices in comunities of fishing professional a socioepistemological study", which is based on the theory socioepistemological study the social practices in the construction of knowledge, in our case the way that members of of the community perform modeling. As a result of the investigations we have proposed deconstruction of various modeling practices in order to improve them. Unlike engineering and physics, in which the equations governing the phenomena are usually well established and its adaptation to the particular circumstances, simplification and integration which requires mathematical intuition; in most biological situations is far from clear that equations or model must be applied, thus the deconstruction becomes very important.

INTRODUCCIÓN

Presentamos el avance del trabajo de investigación sobre modelos alométricos, actividad realizada en las comunidades de profesionales de la pesca y en el aula en la Escuela Nacional de Ingeniería Pesquera de la Universidad Autónoma de Nayarit, cuyos egresados forman parte de la comunidad.

La morfometría es una herramienta de gran utilidad para la biología ya que permite describir cuantitativamente, analizar e interpretar la forma y su variación biológica (Rohlf, 1990). La comparación de estas características anatómicas y morfológicas entre individuos ha permitido clasificar taxonómicamente los organismos y comprender la diversidad de la vida biológica (Adams et al., 2004), por lo que la variación morfológica permite además de examinar la diferencia entre organismos y poblaciones, observar la adaptación de estos al medio ambiente (Dujardin, 2002). La morfometría permite reconocer si en un organismo predomina una tendencia isométrica (sin cambios en el tamaño relativo) o alométrica (con cambios, asociados a la tasa intrínseca de crecimiento TIC). McMahom y Bonner, 1986, determinaron que la TIC define la proporción de crecimiento para los integrantes de la población en una especie particular, permitiendo establecer la talla óptima de cosecha (cuando se alcanza la mayor biomasa).

En el modelo alométrico se realizan comparaciones intra e inter especies de variables morfológicas, fisiológicas y ecológicas que pueden ser expresadas en función de la masa corporal y en el que los parámetros involucrados son válidos para todos los organismos pertenecientes a una misma clasificación taxonómica. Tenemos evidencias de que mediante la deconstrucción de una práctica profesional en este caso la relación alométrica, se contribuye a dotar al profesionista de las herramientas necesarias para encontrar un buen modelo matemático que represente fielmente el fenómeno en estudio, de suerte que pueda aportar información de calidad para la toma de decisiones que ayuden a la mejor de la producción biológica y pesquera (Ulloa y Rodríguez, 2010)

La construcción de un modelo es un arte en sí mismo que requiere de una serie de pasos (Otto y Day, 2007). En esencia, y a riesgo de resultar algo simplista, se precisan tres condiciones, que no necesariamente tienen que darse en la misma persona: 1) un profundo conocimiento de las bases matemáticas adecuadas; 2) una gran experiencia sobre el funcionamiento del sistema a modelizar; y 3) una elevada capacidad de síntesis y abstracción de la realidad, para destacar las variables con efectos clave. En el caso de la biología, y debido al ya mencionado desdén hacia las matemáticas, este proceso suele implicar a dos personas: un biólogo y un matemático. Pero la comunicación entre ambos no suele ser fácil, razón que explica el hecho de que la gran mayoría de aportaciones hayan sido realizadas por personas aisladas con conocimientos generalistas en ambos campos.

Afirmamos que la deconstrucción es un proceso ya sea individual o colectivo de búsqueda de nuevos significados y de sentidos innovadores; y que, como proceso no tiene final, se concibe como una estructura es espiral y no lineal. Para su utilización como herramienta de modelación matemática, lo proponemos como un ciclo de nueve momentos que, una vez conocido, se va repitiendo de manera constante y se conforma en la manera de pensar y actuar del sujeto reflexivo. Con ello planteamos la transformación de la práctica de modelación del crecimiento de organismos representado por el modelo alométrico considerando todos los parámetros y actividades que se realicen y que tengan influencia en el modelo final. Esto al llevarlo al aula permitirá que los alumnos entiendan el proceso de modelación de forma que puedan explicarlo como un todo y puedan desarrollarlo sin muchos problemas en la práctica de su profesión (Ulloa, Arrieta, 2010)

Además, al analizar cómo se estudia la modelación en las aulas y encontrar deficiencias en su procedimiento, surge la necesidad de atender este campo mediante la propuesta de diseños de aprendizajes que coadyuven a una mejor comprensión del fenómeno y utilicen el modelo obtenido para representar y realizar predicciones con base en él (Ulloa, 2013).

MODELACIÓN, MATEMÁTICA EDUCATIVA Y BIOLOGÍA PESQUERA

Para propósitos exclusivos de este trabajo, denominaremos Comunidades de Profesionales de la Pesca y la Acuicultura a las comunidades formadas por profesionistas que desarrollan actividades en estas áreas, (Comunidades de la Pesca y la Acuicultura [CPPA], 2009).

En la actualidad los modelos matemáticos son utilizados en muchas ramas como la biología, la química, la física, etc., es por ello que se ha hecho necesario identificar la manera de como los actores construyen modelos para dar solución a los problemas que se les presentan.

Los modelos matemáticos son el corazón (centro) del trabajo interdisciplinario en la biología matemática. A diferencia de la ingeniería y la física, en la que las ecuaciones que rigen están por lo general bien establecidas y su adaptación a las circunstancias particulares, su simplificación e integración lo que requiere intuición matemática; en la mayoría de las situaciones biológicas no está nada claro que ecuaciones o modelo se debe aplicar (Sánchez, Miramontes y Gutiérrez, 2002).

La aplicación de herramientas matemáticas en el estudio de fenómenos, procesos y conceptos biológicos es obviamente una actividad de creciente importancia que se ha desarrollado fundamentalmente al amparo de colaboraciones multidisciplinarias entre científicos de diversas áreas biológicas y matemáticos interesados en aplicar sus métodos a problemas surgidos de la teoría, el laboratorio o el trabajo de campo biológicos (Sánchez et al., 2002). En lo que respecta a la pesca y la acuicultura la matemática se encuentra inmersa en las diferentes áreas que las componen, mereciendo un lugar muy especial la modelación matemática, ya que permite la representación de los fenómenos propios del área.

En todo trabajo científico, una de las actividades fundamentales es la medición detallada. A través de ella, los investigadores pesqueros, biólogos, tecnólogos y economistas obtienen múltiples datos sobre los distintos sistemas que componen la pesca. Con la información obtenida, y después de hacer el análisis correspondiente, se establecen los modelos que permiten llegar a predicciones con el fin de aprovechar al máximo, pero de manera racional, los recursos vivos del mar. Por lo que, para decidir cuánto puede recomendar que se capture en la temporada, diseña los modelos matemáticos de predicción, basándose en los datos de la dinámica de las poblaciones con respecto a su reproducción, crecimiento y mortalidad, con el fin de conservar el recurso (Cifuentes, Torres y Frías, 1986).

Como puede observarse en lo que se ha descrito, la modelación es una actividad de vital importancia en el trabajo de los profesionales de la pesca y la acuicultura, por lo que requiere que se realicen estudios específicos que permitan contar con más y mejores modelos, para que las decisiones que se tomen basadas en ellos sean óptimas. Tenemos pues la necesidad de atender los dos ámbitos de estudio: el campo profesional en el que la modelación matemática se realiza principalmente con base en las prácticas de la comunidad y por otro la matemática del aula en la

cual aprende el estudiante y que posteriormente forma parte del bagaje con el que deberá enfrentar las actividades propias del campo de la profesión.

Pero además de analizar cómo se aprende la modelación en las aulas y encontrar deficiencias en su procedimiento, surge la necesidad de atender este campo mediante la propuesta de diseños de aprendizajes que coadyuven a una mejor comprensión del fenómeno y utilicen el modelo obtenido para representar y realizar predicciones con base en él (Ulloa, 2013).

Sin embargo y a pesar de la importancia de la modelación, los profesionales del área se pueden considerar como no matemáticos y para ellos la parte más difícil de usar las matemáticas para estudiar una aplicación es la conversión de los fenómenos de la vida real al lenguaje matemático (Ulloa, Arrieta y Espino, 2013). Por lo general esto es complicado porque implica la conversión de hipótesis precisas en fórmulas muy precisas. Es importante recordar que los modelos matemáticos son como otros tipos de modelos. El objetivo no es producir una copia exacta del objeto "real", sino más bien representar algunas características de la cosa real.

Los trabajos que hasta ahora hemos desarrollado bajo la temática global "Las prácticas de modelación y la construcción de lo exponencial en comunidades de la pesca" nos permiten sostener que la deconstrucción puede ser considerada como una metodología que contribuye a dotar al profesionista no matemático de las herramientas requeridas para llegar a un modelo matemático que represente fielmente al fenómeno en estudio, de tal forma que pueda aportar información de calidad para la toma de decisiones que ayuden a la mejora de la producción y administración de las pesquerías (Ulloa, Rodríguez, 2010).

LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA COMO PERSPECTIVA TEÓRICA

Damos sustento teórico a los trabajos que realizamos en esta línea de investigación con la Socioepistemología en tanto que es una perspectiva teórica que estudia la emergencia de los conocimientos matemáticos cuando son ejercidas las prácticas por diversas comunidades y cómo es que viven estas prácticas y conocimientos matemáticos en las comunidades escolares (Cantoral y Farfán, 2004) Particularmente nuestra perspectiva asume a las prácticas sociales de modelación como fuente de procesos de matematización en el aula: los estudiantes construyen argumentos, herramientas, nociones y procedimientos matemáticos en la intervención con los fenómenos de la naturaleza (Arrieta, J., 2003).

Sostenemos que el acto de modelar se presenta al identificar las características distintivas de la tabla y, a partir de ésta, efectuar predicciones sobre el fenómeno. El acto de modelar sucede al asociar estos dos entes, modelo tabular con lo modelado o fenómeno. Se suman a lo anterior la intencionalidad así como las asociaciones del fenómeno con modelos algebraico y geométrico. Estos serán herramientas para predecir comportamientos del fenómeno, a partir de ellos articular una red de entidades (Ulloa, Arrieta y Rodríguez, 2014).

Consideramos que la intencionalidad de la práctica reside precisamente en la apropiación de la relación práctica - herramienta por el actor, es decir en el conocimiento de la función de la herramienta matemática en el ejercicio de la práctica. Esta es precisamente una forma de aprendizaje basada en el ejercicio de prácticas (Ulloa, Arrieta y Rodríguez, 2014).

LA DECONSTRUCCIÓN COMO HERRAMIENTA

Para fines de nuestra investigación y desde nuestro punto de vista, consideramos a la deconstrucción como un medio para mostrar o encontrar la intencionalidad de una práctica constituida, (Ulloa y Arrieta, 2009).

De este modo podemos dividir la deconstrucción de la siguiente manera:

- La búsqueda de las intenciones (el ¿por qué las emplean así? y el ¿por qué funcionan?)
- Los argumentos que los validan (¿Qué sustento tienen? ¿De dónde proviene?)

Tomamos a la deconstrucción como una metodología para modelar fenómenos biológicos, considerándola como un concepto de naturaleza crítica, que define el todo de un sistema en función de la tensión establecida entre sus partes, imaginando al sistema como algo abierto, extenso, desdibujado y siempre contradictorio consigo mismo (Krieger, 2004). La deconstrucción evoca al término creado por Derrida (1985), quien afirma que deconstruir no es regresar hacia un elemento simple y tampoco es destruir, insinúa que ello implica reconstruir cuando explica que deconstruir es desestructurar para entender. Para su utilización como herramienta de la modelación matemática, lo proponemos como un ciclo de nueve momentos (Ulloa y Arrieta, 2010): Primer momento: reconocimiento de la realidad y definición del aspecto a deconstruir; Segundo momento: la identificación de las huellas personales; Tercer momento: elaboración del mapa individual y/o colectivo; Cuarto momento: la búsqueda de interpretaciones-comprensiones-acciones alternativas; Quinto momento: la deconstrucción; Sexto momento: planificación de la práctica transformadora; inicio de la reconstrucción; Séptimo momento: seguimiento de las acciones; Octavo momento: retorno a la realidad transformada (Realidad II); Noveno momento: el inicio de una nueva deconstrucción

LA METODOLOGÍA

Con el propósito de tender puentes entre la escuela y la práctica profesional, planteamos cinco fases de esta metodología en construcción:

1. Selección de las prácticas que dan identidad a la comunidad en estudio.
2. Estudiar la constitución de la práctica en la comunidad, la forma de cómo se establece y vive en la comunidad.
3. La deconstrucción de la modelación alométrica.
4. Diseños de aprendizaje en la deconstrucción de la práctica.
5. Estudio de la constitución de la práctica en el sistema escolar

Se diferencian las actividades de modelación de quienes usan la modelación para fines de enseñar a modelar, a desarrollar teorías de modelación o hacer uso de ésta. Se reproducen las prácticas de modelación con la intención explicita de desarrollar procesos de matematización en el aula

Las prácticas en la comunidad de CPPA son prácticas que se encuentran constituidas, y como tal, muchos procesos son realizados casi de forma mecánica o algorítmica. Para que estas prácticas puedan ser base de diseños de aprendizaje en la escuela, debemos efectuar un proceso de deconstrucción de la práctica para explicitar las intencionalidades, las herramientas que se utilizan,

los argumentos que la sustentan, y los métodos y procedimientos que se desarrollan.

El modelo alométrico permite realizar una descripción cuantitativa del crecimiento de una parte del organismo con respecto a otras o con respecto al organismo como un todo

Las relaciones alométricas son de la forma:

$y = a * x^b$

En donde:

a → es una constante

b → coeficiente de alometría

Para muchas especies *a* puede variar a lo largo del año, *b* es más o menos contante. Se considera que si $b = 3$ el crecimiento en longitud es proporcional al volumen (crecimiento isométrico), si $b \neq 3$ se dice que el crecimiento es alométrico. Se analiza la práctica de trabajar con modelos alométricos constituida en la comunidad y observamos que la modelación la realizan o bien con el uso de papel log – log o mediante modelos ya establecidos para cada especie. Encontramos que muchas veces al no considerar parámetros de la zona de crecimiento y captura, los modelos no son representativos del crecimiento y hemos propuesto que se modele tantas veces como sea necesario considerando cada caso como único.

LOS DISEÑOS DE APRENDIZAJE

El diseño de aprendizaje debe dar respuesta a las siguientes preguntas:

¿Qué?

¿Cómo?

¿Por qué?

¿Con qué?

Los diseños de aprendizaje los consideramos en las siguientes fases:

- Fase I. Planteamiento de un fenómeno a modelar mediante modelos exponenciales.
- Fase II. Contextualización e institucionalización de la práctica de modelación.
- Fase III. Adecuación de la práctica deconstruida y reconstruida.
- Fase IV. Desarrollo.

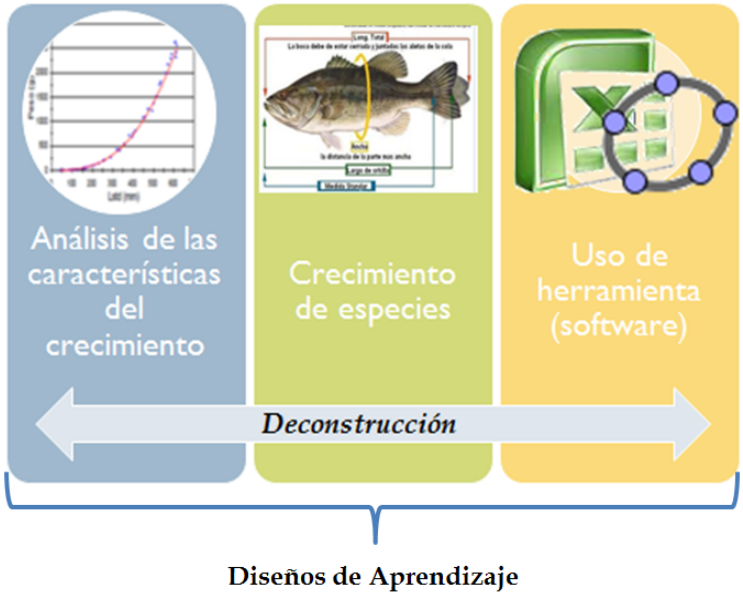
Una de las actividades planteadas en esta etapa la llamamos “Un acercamiento al diseño de aprendizaje basado en los modelos alométricos”, el fenómeno a modelar fue el crecimiento de un pez, en la institucionalización se dan al estudiante aspectos teóricos sobre el crecimiento y la importancia de los modelos alométricos. Se pide luego que realicen con lápiz y papel una gráfica de la relación talla peso, con base en los conocimientos que tienen del tema, la predicción es que la mayoría dará una gráfica lineal. Enseguida se presentan datos reales y se pide que los utilicen para realizar un gráfico de dispersión en Excel y comparen que la gráfica que realizaron inicialmente con lápiz y papel. Se pide que enumeren y describan las diferencias. Enseguida se le indica cómo llegar a un modelo utilizando Excel. A continuación se les pide que construyan una

tabla comparativa de los valores reales y los valores calculados finalmente se presentan algunas preguntas sobre la validez del modelo obtenido en otras especies, en diferentes etapas de desarrollo, en diferentes sitios de crecimiento.

Es costumbre en el aula utilizar siempre el modelo pre establecido, este diseño demuestra que debe buscarse el modelo cada vez que se tengan datos y no dar por bueno el mismo modelo en cada ocasión.

En la figura se esquematiza la propuesta de la deconstrucción de la práctica de modelación y el planteamiento de los diseños de aprendizaje

Figura 1. Deconstrucción de la práctica



A MANERA DE CONCLUSIÓN

El egresado de licenciaturas del área generalmente no conoce las intencionalidades de la práctica y la apropiación de ellas se hace indispensable para su óptimo desempeño ya que requiere ejercer su trabajo en tiempo y forma, por lo que se encuentra sujeto a presiones de tipo laboral cuando desconoce la forma de realizar la actividad y por otra parte cuando aprende a hacerla, no reflexiona sobre los conocimientos teóricos matemáticos que se encuentran implícitos en su tarea diaria, llegándose entonces a realizar las actividades de manera rutinaria.

Es aquí en donde urge acercar la escuela con las práctica de la profesión ya que en al aula no existe la presión laboral, si bien pueden darse presiones de tipo académico, deben planearse secuencias de aprendizaje en la que se analicen en forma individual y conjunta las diferentes tareas que realiza un profesionista y utilizar la deconstrucción como base para varios diseños de aprendizaje basados en las prácticas de las comunidades y una vez hechos, ponerlos a disposición de la comunidad escolar general y también a las comunidades que ejercen esas prácticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adams,C., Rohlf, J., y Slice, D. (2004). Geometric morphometrics: ten years of progess following the "revolution". *Italian Journal of Zoology 71*, 5–16.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el* aula. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). La sensibilité a la contradiction: logarithmes de nombres négaties et origine de la variable complexe. *Recherche en Didactique des Mathématiques 24*, 137-168

Cifuentes, J., Torres, P., Frías, M. (1986). *El océano y sus recursos I. Panorama Oceánico*. México: Fondo de Cultura Económica.

Derrida, J. (1985). Carta a un amigo japonés. En J. Derrida, *¿Cómo no hablar? y otros textos. Suplementos Antrhopos 13*, 86–89

Dujardin, J.P. (2002). *Introducción a la morfometría. (Con énfasis en Triatominae y Phlebotominae)*. Francia: Institut de Recherches pour le Développement.

Krieger, P. (2004). La deconstrucción de Jacques Derrida (1930-2004). *Anales del Instituto de Investigaciones estéticas 84.* 179-188.

McMahom A y Bonner, J. (1986). Proporciones y tamaño. En *Tamaño y Vida* (p. 255). España: Editorial Labor.

Otto, S.P., Day, T. (2006). A Biologist's Guide to Mathematical Modeling in Ecology and Evolution. New Jersey, USA: Princeton University Press.

Sánchez F.; Miramontes, P.; Gutiérrez, J. (2002). *Clásicos de la Biología Matemática.* México: Siglo XXI Editores.

Ulloa, J. y Arrieta, J. (2009). Los modelos exponenciales: construcción y reconstrucción. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 479-488. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ulloa, J.; Arrieta, J. (2010). La deconstrucción como estrategia de la modelación. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 479-488. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ulloa, J. y Rodríguez, J. (2010). El modelo logístico: Una alternativa para el estudio del crecimiento poblacional de organismos. *Revista electrónica de Veterinaria (11)* 03. España. Recuperado el 20 de Enero de 2012, de http://www.veterinaria.org/revistas/redvet/n030310.html

Ulloa, J. (2013). *Las prácticas de modelación y la construcción de lo exponencial en comunidades de profesionales: un estudio socioepistemológico*. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación y Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. México.

Ulloa. J., Arrieta, J. y Espino, A. (2013). El modelo logístico y su deconstrucción. En R. Flores (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26*, 715-722. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Ulloa, J., Arrieta, J. y Rodríguez, J: (2014). La deconstrucción de los modelos de crecimiento. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27*, 1243-1250. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

MEDICIÓN DEL PH DEL SUELO CON SENSOR: UNA EXPERIENCIA ESCALONADA EN DOS NIVELES

Alicia López-Betancourt, Martha Leticia García Rodríguez, Alma Alicia Benítez Pérez
Universidad Juárez del Estado de Durango. (México), Instituto Politécnico Nacional (México)
ablopez@ujed.mx, marthagarcia@gmail.com

Palabras clave: ph, sensor, variación, interpolación

Key words: ph, sensor, variation, interpolation

RESUMEN: El presente reporte presenta los resultados de resolver un problema en contexto en este caso la medición del Ph del suelo en dos niveles: bachillerato y Licenciatura. Para el primer nivel tuvo el propósito de tener un acercamiento al concepto de variación mientras que para el caso de licenciatura conectar los datos del Ph con el tema de interpolación numérica. Los resultados muestran para ambos casos que el resolver un problema en contexto motiva a los estudiantes y genera un ambiente de aprendizaje. Los estudiantes de bachillerato muestran dificultades algebraicas básicas. Por su parte los estudiantes de licenciatura conectan los contenidos de interpolación dejando de lado el análisis.

ABSTRACT: This report presents the results of solving a problem in context in this case the measurement of soil pH on two levels: undergraduate and graduate. For the first level was intended to have an approach to the concept of variation while in the case of undergraduate Ph connect data with the issue of numerical interpolation. The results show that in both cases the problem solving context and the use of a sensor motivates students and creates a learning environment. High school students show basic algebraic problems. While undergraduate students connect the contents aside interpolation analysis.

ANTECEDENTES

El discurso educativo a nivel local, nacional e internacional encamina a la enseñanza de las Matemáticas para la incorporación de recursos tecnológicos. Además en los últimos años se ha hecho hincapié en la necesidad de que los estudiantes aprendan a resolver problemas en contexto. En relación con lo anterior el Cuerpo Académico (CA) de Matemática Educativa, de la UJED, desde el 2010 emprende un proyecto para el desarrollo de competencias matemáticas en ambientes con tecnología (López-Betancourt, A. 2013) que junto con la ESIME y el CECyT no 11 se ha emprendido diferentes estrategias didácticas para incorporar, como sugiere Hitt Espinoza (2013), la tecnología en las aulas matemáticas.

Sin embargo la incorporación de los recursos tecnológicos conlleva varias dificultades entre las cuales se puede señalar las siguientes: falta de equipo, falta de preparación de los docentes, presupuesto inadecuado, asistencia y mantenimiento de equipo, resistencia individual al cambio, el tiempo requerido, escasez de líderes, falta de iniciativa, falta de un plan para la utilización de la tecnología y una extensa colección de software educativo.

Diferentes investigadores apoyan la incorporación de recursos tecnológicos, como Hitt Espinoza (2007) y se han tomado las directrices de este investigador al incorporar la tecnología en las aulas conscientes de que no es una tarea sencilla y con el uso reflexivo de la misma. Estas líneas de investigación se han bajado en investigaciones realizadas en nivel secundaria en Durango, México, (Alvarado, Carmona, López Betancourt y Mata, 2014).

Además la postura de la Secretaría de Educación Pública, en México a través de la Reforma Integral del Bachillerato señala la importancia de desarrollar diferentes competencias en matemáticas, tales como: emplear los modelos matemáticos para representar adecuadamente situaciones y problemas, así como transferir conceptos matemáticos para interpretar fenómenos y situaciones en el contexto de otras disciplinas así como en situaciones de la vida real. Por lo anterior la presente investigación propone un problema en contexto, utilizando un sensor para desarrollar los conceptos de variación e interpolación en los niveles de bachillerato y licenciatura.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

El presente trabajo toma como soporte teórico la teoría de las representaciones semióticas de Duval (1993), quien afirma que no se debe confundir a los objetos matemáticos con su representación y tiene por objeto analizar y documentar la conceptualización de variación e interpolación en estudiantes de dos niveles, bachillerato y licenciatura, al realizar la medición del Ph del suelo.

Las representaciones mentales cubren al conjunto de imágenes y globalmente, a las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre lo que les está asociado. Las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación. Es así como los objetos matemáticos no pueden ser accesibles. Otras profesiones tienen al objeto y lo pueden ver o tocar tales como los médicos o veterinarios. Acceder a los conceptos matemáticos es posible a través de sus representaciones semióticas. Los aprendices de las matemáticas deberán realizar transformaciones entre las diferentes representaciones para acceder al concepto matemático. El fenómeno de la representación se refiere y abarca a la comunicación, al funcionamiento cognitivo del pensamiento

y a la comprensión. Las representaciones semióticas muestran y utilizan registros diferentes. En su trabajo Duval presenta la noesis y semiois

MÉTODO

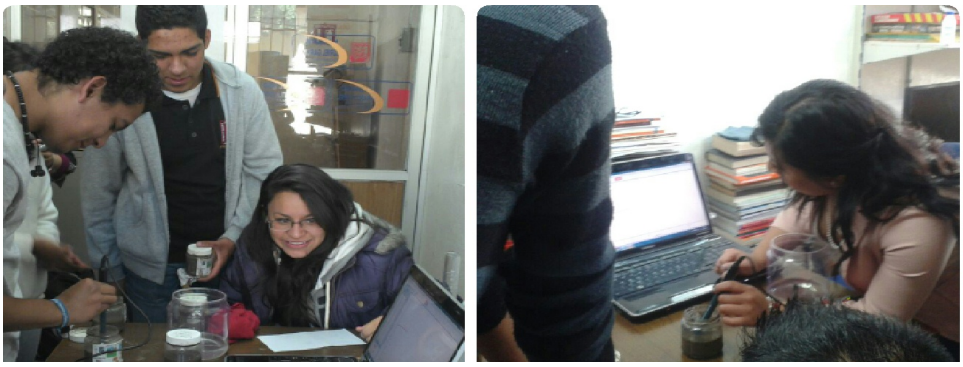
La presente investigación es de corte cualitativo y toma como soporte la metodología ACODESA de Hitt (2007), la cual conecta: la investigación en didáctica de las matemáticas, el acercamiento individual en la construcción del conocimiento y el acercamiento social en la construcción social del conocimiento. Las cinco fases principales de ACODESA son: 1. El trabajo individual que implica comprender la tarea, 2. El trabajo en equipo sobre la misma tarea en la cual están los procesos de discusión y validación, 3. Debate caracterizado por procesos de discusión y validación, 5. Institucionalización del conocimiento. Para el nivel de bachillerato fue un grupo de segundo año conformado por 40 estudiantes, se trabajó con ellos una semana. Se conformaron ocho equipos de cinco personas y se tomó el criterio de que su vivienda estuviera en el mismo sector de la ciudad para tomar las muestras de tierra. Cada equipo tenía que tomar cinco muestras de suelo a diferente profundidad. El segundo día se tomaron las mediciones del Ph, usando un sensor. El tercer día resolvieron una hoja de trabajo previamente diseñada con base en Duval (1993) y con el propósito de que los estudiantes regresen a papel y lápiz, acorde con Hitt y Cols (2009). Esto permitió por un lado que los estudiantes reflexionaran sobre el concepto de variación y plasmarán sus propias representaciones institucionales. Los dos días restantes presentaron sus resultados al resto del grupo así como escribieron una carta al presidente municipal para relatar sus hallazgos.

Para el caso de licenciatura, fueron cinco equipos de la clase de análisis numérico, por el espacio disponible, se exponen los resultados de un solo equipo que también trabajaron con el sensor de Ph. También tomaron muestras en diferentes zonas de la ciudad. El propósito fue conectar los conocimientos adquiridos durante el semestre en un tema de investigación para presentarlo como su trabajo final.

RESULTADOS

Se observó que los estudiantes se mostraron motivados desde el primer día que nos presentamos. Se les dio una breve explicación del Ph. La conformación de equipos no tuvo inconvenientes a pesar de que no fue por afinidad. Los estudiantes desde ese día formaron un grupo en *whatsapp* y se mantuvieron en constante comunicación por este medio. Consideramos que al hacerlos a ellos partícipes de la práctica fue gestando un compromiso de ellos hacia la tarea. Esto favoreció el ambiente de aprendizaje al contar con motivación y disposición de los estudiantes. Asimismo al hablarles del sensor estuvieron muy atentos. Enseguida, se presenta las etapas al aplicar ACODESA, para el grupo de bachillerato, en la medición del Ph. En lo correspondiente a comprender la tarea, los estudiantes recolectaron sus propias muestras de tierra, siguiendo las indicaciones que se les había dado previamente. El primer día de trabajo los estudiantes se mostraron disciplinados y ordenados para tomar las mediciones con el sensor, debido a que sólo se contaba con uno. La toma de datos con el sensor fue un momento muy importante para la práctica, constituyó la base para poder realizar la hoja de trabajo, se les guio y ellos realizaban la toma y lectura de los datos del Ph. Se mostraron interesados y atentos a los datos que aparecían en la pantalla. (Ver figura 1)

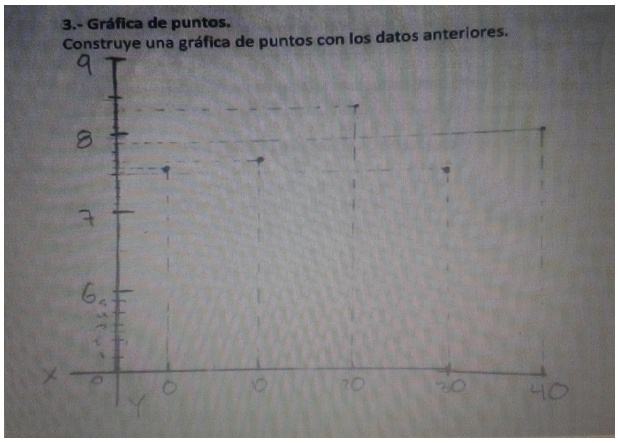
Figura 1. Toma de datos con el sensor del Ph, estudiantes de bachillerato



En la etapa de trabajo en equipo, se favoreció la comunicación de ideas y la interacción social, tanto para el problema de medición del Ph como de conceptos matemáticos en este caso variación. Sin embargo se presentaron algunas representaciones institucionales con errores como el presentado en la figura 2, en el cual los estudiantes no precisaron la abscisa cero con 0 cm de profundidad. La comunicación de ideas en este caso fue errónea y todo el equipo tuvo este problema.

La etapa del debate se generó al trabajar en equipo. Los estudiantes argumentaban y comparaban sus resultados. Para la auto reflexión, se les dejó algunas preguntas de la hoja de trabajo. Hubo una fase que no se pudo concluir, cada equipo debía pasar sus datos a los otros equipos y resolver otra hoja de trabajo en la cual compararían resultados por zona del Ph, debido a que la profesora que habíamos solicitado su hora decidió ya no hacerlo. Finalmente los estudiantes presentaron sus resultados por equipo ante el grupo, con cárteles asimismo leyeron las cartas dirigidas al presidente municipal, en las cuales le expresaban el cómo con la medición del Ph del suelo y las matemáticas ayudaban a determinar si el suelo favorecía ciertas plantas para que en la ciudad hubiera más áreas verdes.

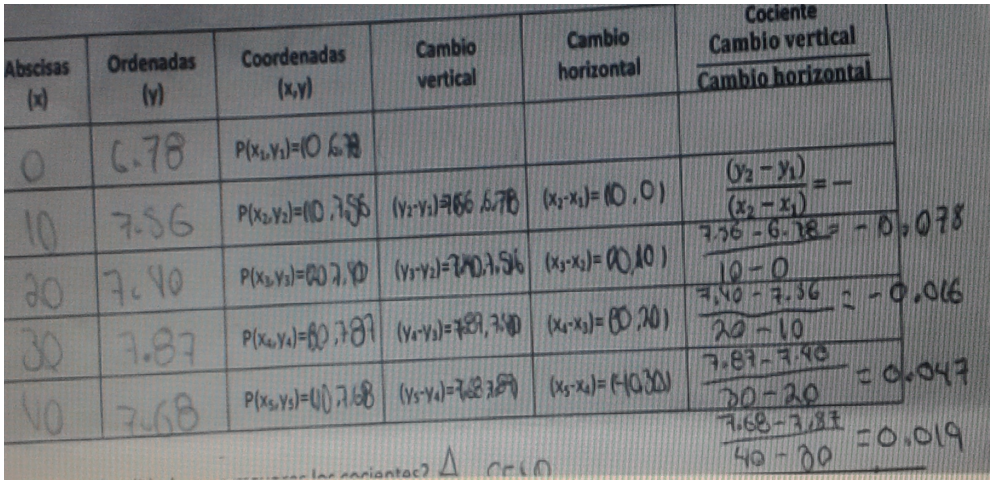
Figura 2. Representación gráfica



Al llenar la tabla con las variaciones verticales y horizontales los estudiantes en general presentaron errores tales como: manejo de signos e identificación de las abscisas y ordenadas. Así como dificultad para conectar sus datos al lenguaje algebraico. Ver figura 3.

Sólo dos de los 25 estudiantes que respondieron por completo la tabla de puntos, obtuvieron todas sus respuestas correctas. Representando el 5% de los estudiantes que completaron la hoja de trabajo. Estos errores y dificultades algebraicas obstaculizaron el acercamiento al concepto de variación.

Figura 3. Tabla de llenado para cambio vertical, horizontal



Ahora bien, para el caso del equipo seleccionado estudian la licenciatura en matemáticas aplicadas, por lo que las condiciones de los aprendices difieren sustancialmente al caso del bachillerato. Podemos comentar que una dificultad inicial fue la precisión del tema a investigar, entender la tarea fue un reto para los estudiantes, esto se comprobó en las asesorías que se tuvieron:

- *Estamos pensando en trabajar el tema que usted propuso de medir el Ph del suelo, pero todavía no sabemos en dónde*
- *Profesora, ya estuvimos pensando y vamos a realizar la toma de muestras en diferentes zonas de la ciudad, ¿cómo ve? Y comprobar diferencias entre las muestras,*

La asesoría en las cinco semanas permitió verificar que al estar trabajando continuamente en este problema, las estudiantes discutían acerca del problema, por ejemplo, en una de las sesiones comentaron:

> *-Profesora ya tenemos las muestras de las cinco zonas pero mi compañera dice que no vamos a poder realizar la comparación, porque tendríamos que tener más muestras de la misma zona y poder obtener la media. ¿Usted qué opina? Y cómo también vamos a obtener un polinomio interpolador contar con más datos.*

Estos procesos de validación y discusión favorecieron el debate entre el equipo, confrontaban sus ideas y argumentaban su postura tanto en la etapa de recolección de las muestras cómo en la parte de la conexión del contenido matemático de interpolación numérica Se precisó como el

bagaje de conocimientos previos de las alumnas de licenciatura les permite conectar hacia otros contenidos como fue el de estadística. Mostraron mayor soporte teórico y eso les favoreció al aplicarlos en el problema en contexto. Si consideramos que les faltó mayor análisis en los polinomios de interpolación y se quedaron en esa fase de coordinación. El equipo logró recolectar sus datos adecuadamente, trabajó el polinomio de interpolación, realizó la representación gráfica pero no coordina los registros de representación.

Un segundo debate se llevó a cabo el Encuentro Estudiantil de Matemáticas Aplicadas realizado al interior de la facultad. El equipo presentó su trabajo ante sus pares y profesores. En la sesión de preguntas presentaron seguridad en su propuesta y resultados, algunas preguntas las hicieron pensar en ese momento y argumentar con sustento matemático que habían trabajado y desarrollado en el transcurso de la investigación. Para los dos casos bachillerato y licenciatura la institucionalización del conocimiento para los conceptos de variación e interpolación no se logró.

CONCLUSIONES

Esta sección se presenta en tres aspectos: 1. El sensor como recurso tecnológico para apoyar la tarea; 2. El problema en contexto y su conexión al contenido matemático; 3. El contrastar de los resultados con el referente teórico de Duval (2003) y la propuesta metodológica de ACODESA.

Para el punto uno, La medición con el sensor fue un detonante para la motivación de los grupos y la generación de un ambiente de aprendizaje caracterizado por estudiantes motivados, comprometidos y con disposición a la tarea emprendida. El aula fue transformada de estática a dinámica con una fuerte interacción social. Lo cual permitió que los estudiantes transitaran de un estado pasivo a promotores de su propio conocimiento. Se subraya que los recursos tecnológicos son adaptables a diferentes contenidos matemáticos y niveles de estudio.

En lo que respecta al punto de contrastar los resultados con los referentes teóricos, se encontró que las representaciones que los estudiantes de bachillerato lograron fue la tabular. En la representación gráfica algunos de ellos presentaron errores como los mencionados en este reporte, vemos como la conexión de los datos reales al plano cartesiano presento esta dificultad. Para el acercamiento al concepto de variación los estudiantes se vieron limitados por conocimientos previos no adquiridos como manejo adecuado de operaciones con números reales. Centramos la atención en la dificultad del lenguaje algebraico de los estudiantes. Por su parte la metodología ACODESA apoyó la exploración de los dos grupos. Cada etapa se pudo precisar y responder con los resultados. Las etapas de validación, discusión y debate estuvieron presentes de forma dialéctica a lo largo de la exploración. Consideramos que es necesario y urgente incorporar en las aulas de matemáticas. Por último para el aspecto del problema en contexto, se considera que la resolución de este tipo de problemas mediados con recursos tecnológicos para que los estudiantes le den significado a los contenidos matemáticos. A su vez el profesor podrá precisar las dificultades conceptuales de los estudiantes.

A través de estas dos exploraciones se precisa que es factible la resolución de problemas en contexto en los diferentes niveles, en este caso fue en bachillerato y licenciatura pero consideramos esto se puede extender en el nivel básico.

En este sentido es necesario el diseño de materiales y libros de texto que incorporen la tecnología de forma reflexiva y con la planificación de actividades acorde con Hitt Espinoza y Cortés Zavala (2009).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alvarado Monroy, A., Carmona Guadalupe, López Betancourt, A. y Mata Romero A. (2014). Construyendo el significado de quilataje con Netlogo. *Uso de Tecnologías en Matemática Educativa. Investigaciones y Propuestas.* http://www.amiutem.edu.mx. Recuperado el 15 mayo del 2015.

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo de pensamiento*. Investigaciones en Matemática Educativa II*. (pp. 188-231). Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Hitt Espinoza F., (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éditeurs), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Éditorial Hermes.

_____., (2013). ¿Qué tecnología utilizar en el aula de matemáticas y por qué? *En Revista Electrónica AMIUTEM*. 1(1), 1-18.

Hitt Espinoza F., y Cortés Zavala José Carlos. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadoras con posibilidades gráficas. *En Revista Digital Educación e Internet*. 10(1), 1-30.

López-Betancourt, A. (Ed). (2013). Tópicos Selectos de Matemáticas en Ambientes con Tecnología. Ed. UJED. En formato electrónico.

LA SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER: UN ACERCAMIENTO SOCIOEPISTEMOLÓGICO

Fabián Wilfrido Romero Fonseca, Rosa María Farfán Márquez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (México)
fwromero@cinvestav.mx, rfarfan@cinvestav.mx

Palabras clave: series de fourier, socioepistemología, prácticas sociales.

Key words: fourier series, socioepistemology, social practices.

RESUMEN: Al abordar la Serie Trigonométrica de Fourier (STF) desde una perspectiva Socioepistemológica nos interesa acercarnos al fenómeno didáctico de manera sistémica, tomando en consideración las componentes epistemológicas, didácticas y cognitivas presentes referidas al saber, es así como en este trabajo nos preocupamos específicamente por la naturaleza epistemológica de la STF tomando en consideración su fenomenología intrínseca (determinación del estado estacionario) y buscando vislumbrar aquellas prácticas que provocaron su génesis.

ABSTRACT: Approaching the Trigonometric Fourier Series (STF) from a socioepistemological perspective allows understanding the didactic phenomenon in a systemic way, taking into account the epistemological, educational and cognitive components around the knowledge acquisition. Thus, this work is specifically concerned with the epistemological nature of the STF regarding its intrinsic phenomenology (determination of stationary state) and the display of practices that led to its genesis.

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

Las Serie Trigonométrica de Fourier (STF) es un tema fundamental en cursos avanzados de ingeniería (Rodríguez, 2009), prueba de ello es la importancia que tuvo en la evolución del Análisis Matemático, pues la STF ha "tenido gran influencia en el desarrollo de la teoría de funciones reales de una variable real, comparable sólo con las series de potencias en la teoría general de funciones" (Farfán, 1986, p. 1).

Además la STF es el estadio más avanzado de las funciones trigonométricas (Montiel, 2005), por lo que para su construcción es necesario que las funciones trigonométricas, en especial las funciones seno y coseno, estén construidas como objeto en los estudiantes, ya que de esta manera serán susceptibles de manipulación.

En el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, diversos estudios se han preocupado por el abordaje de la STF. Estas investigaciones se han fundamentado en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, y han seguido una aproximación sistémica para la construcción social del conocimiento, mediante la articulación de cuatro componentes: la naturaleza epistemológica, la dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y la dimensión didáctica (Cantoral, 1999).

El trabajo que se presenta corresponde a parte del análisis preliminar de una ingeniería didáctica. Específicamente interesa la naturaleza epistemológica de la STF, por lo que se busca dar cuenta de los siguientes aspectos: el problema de la cuerda vibrante como antecedente de la STF (Farfán, 1986; Ulín, 1984), la determinación de la fenomenología intrínseca del objeto matemático «determinación del estado estacionario» (Farfán, 1994; 2012; Marmolejo, 2006); y algunas nociones físicas y matemáticas relacionados con la STF (Morales, 2003, 2010; Rodríguez, 2009; Vásquez, 2006; Moreno, 1999).

Farfán (1986) y Rodríguez (2009) indican que la STF surgen como solución a una ecuación diferencial, con ciertas condiciones iniciales y de frontera dependientes del fenómeno que se esté modelando. En Farfán (1994; 2012) se estudia el problema de la cuerda vibrante y como este fue el primer punto de controversia al representar una función arbitraria como una serie de senos, tema que provocó gran discusión entre la comunidad científica del siglo XVIII. Además Farfán (2012) analiza la obra de Fourier (1822) y concluye que la determinación del estado estacionario es la génesis de la serie trigonométrica de Fourier, pero que esto requiere de una tarea cognitiva de las más complejas (Farfán, 2012).

Por otra parte, Vásquez (2006) se interesa por el rol que desempeña la hipótesis de periodicidad para la STF, por lo que da cuenta de cómo el carácter periódico, presente en el discurso matemático escolar, para el cálculo de una STF no estuvo presente en su génesis histórica.

Rodríguez (2009) se enfoca principalmente, en la visualización matemática presente en el trabajo de Fourier, donde encuentra que este matemático da sentido y significado al análisis de sus resultados, primero en el plano de lo físico, pero luego justifica de manera matemática. Esta visualización que hace Fourier es a partir del estudio de un fenómeno natural: la propagación de calor, Morales (2003) rinde cuenta de cómo Fourier se considera un "modelador experto" y hace un análisis de su obra *Memoire sur les Températures du Globe Terrestre*, para comprender los razonamientos de este científico y las implicaciones físicas y matemáticas que tiene el estudio del calor.

ASPECTOS TEÓRICOS

Partiendo de un acercamiento desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), para la cual el conocimiento se construye en sociedad, se parte de la idea de que los saberes matemáticos presentes en el aula no son una copia fiel de las matemáticas tal y como se crearon, pues estos saberes sufrieron un proceso de despersonalización y descontextualización (Cantoral, 2013).

Por tanto es importante saber cómo se transformaron las matemáticas en esos procesos de transposición, para lo cual el estudio de obras originales permite "reconocer el grado de permeabilidad de las construcciones originales en la didáctica de entonces y recíprocamente el nivel de influencia de ésta sobre las estrategias que favorecen la construcción de conocimientos matemáticos" (Cantoral, 2013, pág. 125), esto permite reconocer en el origen de las nociones matemáticas aquellas disparidades entre el saber científico y lo que está presente en el discurso matemático escolar (DME).

Por otra parte, este reconocimiento de las estrategias que se utilizaron en la construcción del conocimiento nos permite identificar, hasta cierto punto, aquellas prácticas de referencia, practicas socialmente compartidas y actividades alrededor del fenómeno didáctico. Las prácticas de referencia orientan la actividad humana a través de diversos mecanismos, estos mecanismos provocan actividades que se organizan, las cuales dan lugar a prácticas socialmente compartidas (para profundizar en el esquema de anidación de prácticas se puede consultar (Cantoral, 2013)).

De esta manera, a través de un análisis epistemológico se puede tener un esquema de prácticas anidadas preliminar alrededor de la STF, sólo que este esquema requiere de las otras dimensiones del saber, cognitivo, didáctico y cultural, para fortalecerse. Es por esto que se hace un estudio epistemológico alrededor de la STF, el cual de forma resumida, se expone a continuación.

LA GÉNESIS DE LA STF

El surgimiento de la STF es un proceso que tardó alrededor de un siglo, desde que Brook Taylor (1685-1731) enunció el famoso problema de la cuerda vibrante en 1715, hasta el trabajo de Dirichlet sobre la convergencia puntual de la STF (1829), durante esa época (principalmente siglo XVIII) se estaban sentando las bases del Análisis Matemático como se conoce hoy en día.

Durante esta época se da el surgimiento de la Escuela Politécnica y de la ingeniería como ciencia, lo que provoca un cambio en la manera de hacer y ver las matemáticas en la época. Por otra parte, es a partir del problema de la cuerda vibrante y del trabajo de Fourier que se cuestionan las bases del Análisis Matemático, por esta razón se inicia con el estudio del problema de la cuerda vibrante, seguidamente se comenta el establecimiento de la ecuación general de calor, para cerrar con el desarrollo de una función en serie trigonométrica y la convergencia de dicha serie.

El problema de la cuerda vibrante

El problema de la cuerda vibrante fue propuesto por Taylor en su obra *Methodus Incrementorum Directa & Inversa* (1715), el problema consistía en una cuerda flexible que está sujeta por los

extremos, luego se le aplica una fuerza hasta que tome cierta forma inicial y se deja libre, se debe determinar entonces el movimiento y el tiempo de vibración de la cuerda.

Para 1715, Taylor ya había probado la existencia de soluciones periódicas del problema, pero no disponía de una ecuación que modelara el fenómeno, por lo que no calculó las soluciones. En 1727 Johann Bernoulli (1667-1748) abordó el problema en su forma discreta, considerando un número finito de cuentas de igual masa y colocadas equidistantes sobre una cuerda sin masa (con masa despreciable en comparación con la de las cuentas), pero no concluyó resultados generales. Fue el hijo de J. Bernoulli, Daniel Bernoulli (1700-1782), quien se percató de la existencia de un número infinito de modos fundamentales de vibración, y también de soluciones complejas a las que no se les podía asignar una frecuencia de vibración, esto utilizando el mismo modelo del collar de cuentas de su padre.

Según Farfán (2012), el primer modelo matemático decisivo del problema fue propuesto en 1747 por Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) quien demostró que la función $y = y(x,t)$ debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} a^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ y(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial y(x,0)}{\partial x} = 0 \\ y(0,t) = y(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

Donde las condiciones corresponden, respectivamente, a la ecuación de onda unidimensional, la forma inicial de la cuerda, la velocidad inicial de la cuerda y el movimiento de los extremos de la cuerda. D'Alembert probó que la solución general del problema posee la forma $y(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)]$, con $a \in \mathbb{R}$, lo cual representa la suma de dos ondas, una trasladada hacia la derecha y otra hacia la izquierda.

Además D'Alembert indica que la forma inicial de la cuerda debe representarse en toda su extensión por una y la misma ecuación, es decir, debe ser **continua en el sentido de Euler**; además de que la función inicial debe ser impar y periódica (Farfán, 2012).

Euler llega, en 1748, a la misma solución que D'Alembert (Farfán, 2012), sin embargo difería de él respecto de las funciones iniciales que se podían admitir en el problema, para Euler no existía alguna razón física para no admitir como forma inicial de la cuerda aquellas que estuviesen definidas en [0,π] por distintas expresiones analíticas, "estas diferencias pueden considerarse como una de las primeras manifestaciones escritas sobre los problemas que ha llevado consigo la definición de la noción de «función», un concepto que hoy en día presumimos tener muy claro" (Cañada, 2000, pág. 296).

Se puede decir que la discusión radica en el hecho de que para aquel tiempo una función daba lugar a una gráfica, pero no a la inversa, es decir, dada una gráfica no necesariamente una única función podía representarla, pues podía dar lugar a distintas expresiones en distintos intervalos. Por lo tanto, Euler defendía que cualquier gráfica podía considerarse como curva inicial, no así

D'Alembert. D. Bernoulli, en 1755, se basó en sus conocimientos musicales para resolver el problema, llegando a que la solución debe tener la forma $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx)\cos(nt)$, $a_n \in \mathbb{R}$.

Donde los coeficientes a_n se deben elegir adecuadamente para que se satisfaga el problema de valores iniciales. Hay otra manera de llegar a esta solución, y esta es de suma importancia en el estudio de Fourier (1768-1830) sobre la propagación de calor, el cual se estudiará más adelante. Note ahora que al utilizar la segunda condición inicial se tiene que $y(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx)$.

Es decir, una **función arbitraria** $f(x)$ se puede representar como superposición de ondas simples, lo cual fue punto de controversia entre los matemáticos de la época, pues no se admitía que cualquier función pudiera representarse de esa forma. Por ejemplo, Euler sostenía que al cumplirse esa igualdad la función $f(x)$ debía ser periódica e impar, lo cual era una restricción innecesaria, sin embargo D. Bernoulli se mantuvo firme en su postura pues argumentaba que hay suficientes coeficientes en la suma para seleccionarnos de manera que la igualdad se cumpla, por lo que para él esta era la solución genera del problema de la cuerda vibrante.

Así pues "el meollo de la discusión no radica en la solución en sí misma, sino en cuál de ellas es la solución general, así como en la metodología empleada para encontrarla" (Farfán, 2012, pág. 51). Por tanto, el problema de la cuerda vibrante provoca la revisión de los fundamentos del análisis matemático durante todo el siglo XVIII.

La Teoría Analítica del Calor

Las ideas de D. Bernoulli esperaron por más de cincuenta años para ser tomadas en cuenta, esta vez por Jean Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830), quien en 1807 envió una artículo al *Institute de France* que trataba sobre la transmisión de calor; el artículo fue estudiado por Lagrange (1736-1813) y Laplace (1749-1827), entre otros matemáticos prominentes de la época, pero este fue rechazado por el *Institute*, pues no poseía el rigor matemático necesario, según sus revisores.

Los miembros del Institute de France estaban convencidos de la importancia de los estudios de Fourier y convocaron un concurso sobre el tema de la propagación de calor, el concurso fue ganado por Fourier en 1812 con una versión ampliada de su obra inicial, pero criticado por su falta de rigor no logró publicar su trabajo en las *Mémoires* del *Institute*. No fue sino hasta 1822 que publicó su libro *Théorie Analytique de la Chaleur* (Fourier, 1822), en la cual incorporó su artículo de 1812 sin cambios, dos años más tarde fue nombrado secretario del *Institute de France* y pudo publicar su artículo en las *Mémoires*.

Antes de iniciar su obra Fourier tenía conocimientos del trabajo de Mecánica Celeste de Lagrange y de los planteamientos de D. Bernoulli sobre el problema de la cuerda vibrante. A ciencia cierta no se sabe si Fourier conocía el trabajo de Jean Baptiste Biot (1774-1862) sobre propagación de calor, quien utilizó la ley de enfriamiento de Newton para tratar de modelar la distribución de calor en una barra metálica y muy larga calentada desde uno de sus extremos, sin embargo, su modelo no era correcto, pues Biot asumía el mismo intercambio de calor entre la superficie de la barra metálica y el aire, que en el interior de la barra, en cambio Fourier hace la diferencia entre el comportamiento del flujo del calor dentro de un sólido y en su superficie, lo que le permite obtener la ecuación diferencial parcial que modela el fenómeno.

Fourier estaba interesado por estudiar las leyes matemáticas que gobiernan la propagación de calor en la naturaleza y reconoce que las teoría mecánicas, propias del siglo XVIII, no se aplican a la naturaleza del calor, por lo que este fenómeno no se puede explicar con base en los principios del movimiento y el equilibrio (Farfán, 2012), sino que las explicaciones físico-matemáticas responden a los resultados de la experimentación.

Se puede notar como Fourier busca modelar los fenómenos naturales, en particular la propagación de calor, de la manera más general posible, logrando explicaciones matemáticas congruentes con las ideas físicas, pero separadas, lo cual no era usual en la época, esto marca un cambio en el análisis de los fenómenos estudiados hasta ese momento, es decir, Fourier busca "reducir, con la ayuda del análisis matemático, la investigación física del fenómeno de propagación de calor en cuerpos sólidos a los problemas del cálculo integral" (Farfán, 2012, p. 96), Fourier al respecto expresa: "La Teoría que vamos a exponer tiene por objetivo demostrar estas leyes; el calor, y las cuestiones del cálculo integral cuyos elementos están dados por la experiencia". (Fourier, 1822, p. 1).

Luego de obtener ciertas ecuaciones al estudiar casos particulares, Fourier estudia la trasferencia de calor durante un tiempo dt en un prisma rectangular del sólido, cuyo volumen es $dxdydz$ y llega a la ecuación de propagación de calor.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = K\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

En esta, $v(x, y, z, t)$ representa la temperatura del sólido en el punto $(x, y, z,)$ en el tiempo t y K es la constante de transmisión de calor que depende del material del solido.

Después de deducir la ecuación de calor Fourier dedica el resto de su obra al trabajo con casos particulares. En el capítulo III de la *Théorie Analytique de la Chaleur* consideró el problema de la propagación de calor en una lámina infinita, en el cual resuelve el problema de la determinación del estado estacionario, lo que lo lleva al estudio de la convergencia de series trigonométricas infinitas, para lo cual Fourier muestra un gran dominio algebraico (Farfán, 2012).

Fourier en todo su trabajo tiene la necesidad de comprobar que las soluciones obtenidas se adecúan a la situación física, pero a diferencia de la tradición los argumentos físicos no afectan lo matemático, se van dando de manera paralela, pero inicia una separación entre las ideas físicas y las ideas matemáticas. Estos argumentos físicos le permiten validar el trabajo matemático.

Los coeficientes de Fourier

Fourier en *La Théorie* dedica una sección a la expansión de una función dada en serie trigonométrica, dicha sección se titula *Développement d'une fonction arbitraire en séries trigonométriques*, en esa sección "se enuncia y demuestra lo que para los matemáticos más prominentes del siglo XVIII era inaceptable: la posibilidad de representar una función arbitraria en serie trigonométrica infinita" (Farfán, 2012, p. 128). Básicamente Fourier sigue el siguiente procedimiento:

1. Demuestra que cualquier función impar se puede desarrollar como una serie infinita de senos.
2. Demuestra que cualquier función par se puede desarrollar como una serie infinita de cosenos.
3. Demuestra que cualquier función se puede escribir como suma de dos funciones una par y la otra impar.

A partir de esto concluye que cualquier función se puede escribir como una serie infinita de senos y cosenos . Reinterpretando los resultados de Fourier, podemos considerar una función $f(x)$, donde $x \in (0,2\pi)$, se puede representar de la manera:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$$

Fourier logra deducir cómo se deben calcular los coeficientes a_0, a_n y b_n, hoy en día llamados coeficientes de Fourier, estos son:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx$$

Surge a partir de estas fórmulas otra pregunta en la época, ¿cómo calcular la integral de funciones arbitrarias?, esto pues f(x) no es conocida y en la época la definición de integral es la de antiderivada, pero ¿cómo saber si una función cualquiera tiene o no antiderivada? Fourier interpreta las integrales como el área bajo la curva, y lo necesario es que esta área sea finita, lo que no requiere que la función posea una expresión analítica asociada o ser continua en el sentido de Euler.

Después de hacer esta deducción Fourier reflexiona sobre el problema de la cuerda vibrante, diciendo que aplicando los principios que utilizó para determinar los coeficientes se resuelven las dificultades que tuvo D. Bernoulli.

Para 1829, Dirichlet (1805-1859) determina una fórmula para la suma parcial de orden N de la STF, logrando con esto probar la convergencia puntual de la serie para una amplia gama de funciones, incluso aquellas con discontinuidades de salto finito, Dirichlet determina que la suma parcial es:

$$S_N = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(N+\frac{t}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt$$

Con $N \in \mathbb{N}$. Una vez que Dirichlet logra este resultado la comunidad acepta que las series de Fourier son un buen instrumento para la representación de funciones muy generales, y además influencia el desarrollo de las matemáticas en diferentes aristas.

REFLEXIONES FINALES

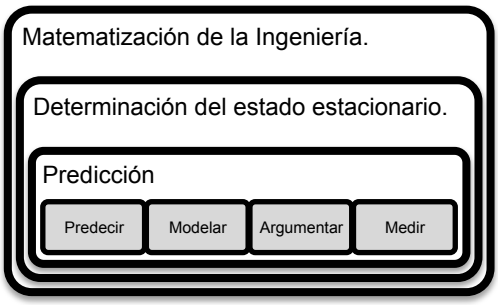
A partir de las anteriores reflexiones epistemológicas se puede inferir una práctica de referencia asociada a la STF, como lo es la determinación del estado estacionario, un análisis más riguroso

del desarrollo de las matemáticas durante los siglos XVIII y XIX, presente en (Farfán, 2012), permite ver como no sólo esta práctica de referencia está relacionada con la STF.

> …la práctica de referencia, ante todo, está *estructurada* y es *estructurante* del quehacer matemático y científico de una época que va de la conformación de la *École Polytechnique* en la Francia napoleónica, hasta el momento del surgimiento de la figura del matemático profesional en el ámbito de la postguerra en el Siglo XX, justo después de la *Primera Guerra Mundial*. (Cantoral, 2013, p. 37)

Es decir, la matematización de la ingeniería es una práctica de referencia que estructura el quehacer matemático de la época, en particular el trabajo de Fourier, quien fue alumno y profesor de la *École Polytechnique*, por lo que podemos decir que afecta, de alguna manera la práctica de referencia de determinación del estado estacionario. Además, se puede notar la preocupación de Fourier por predecir el comportamiento de la naturaleza, a través de la modelación de la propagación del calor, donde las actividades de predecir, medir, modelar y argumentar están siempre presentes en su trabajo. De esta manera se puede tener un esquema de prácticas anidadas preliminar:

Fgura 1. Esquema de anidación de práctica preliminar



Cabe destacar que éste es un esquema preliminar, al profundizar en el análisis epistemológico y las demás componentes (cognitiva, didáctica y social), éste se puede modificar y ampliar. Por ejemplo, la investigación de Farfán (1994), da cuenta de que la determinación del estado estacionario no es el medio ideal para construir la serie de Fourier, pues es cognitivamente más complejo que la serie misma, esto a partir de una experimentación controlada. Por lo tanto falta aún más análisis para poder dar un esquema más completo, pero eso será más adelante en la investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cantoral, R. (1999). Approccio socioepistemologico alla ricerca in Matematica Educativa: un programma emergente. *La Matematica e la Sua Didattica 3*, 258-270.

Cantoral, R. (2012). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Barcelona: Gedisa.

Cañada, A. (2000). Una perspectiva histórica de las series de Fourier: de las ecuaciones de ondas y del calor a los operadores compactos y autoadjuntos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3*(3), 293-320.

Farfán, R. M. (1994). *Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería.* Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Farfán, R. M. (1986). *Acerca de la representación de una función "arbitraria" en serie trigonométrica (Ensayo Histórico).* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Farfán, R. M. (2012). *Socioepistemología y ciencia. El caso del estado estacionario y su matematización* (Primera ed.). Barcelona: Gedisa.

Fourier, J. (1988). *Théorie analytique de la chaleur*. París: Editions Jacques Gabay (año de publicación del libro original: 1822), “La Théorie que nous allons exposer a pour objet de démontrer ces lois; chaleur, à des questions de calcul intégral dont les élément sont donné par l’expérience”. Traducción del autor.

Marmolejo, R. (2006). *Estudio de la noción de estado estacionario en el ámbito fenomenológico de la transferencia de calor.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica.* Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.

Morales, F. (2010). *Causas y efectos de la ambigüedad en el tratamiento didáctico de la noción de calor. Una caracterización del pensamiento fisicomatemático.* Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Morales, F. (2003). *Acerca de la actividad de modelación: las temperaturas de la tierra.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Moreno, J. A. (1999). *Estudio de la noción de convergencia de series trigonométricas en un ambiente de simulación.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Rodríguez, M. (2009). *Una matemática funcional para el ingeniero. La serie trigonométrica de Fourier.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Taylor, B. (1715). *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*. Londres: Impensis Gulielmi Innys.

Ulín, C. (1984). *Análisis histórico-crítico de la difusión de calor: el trabajo de Fourier.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Vásquez, R. (2006). *Sobre el papel de la hipótesis de periodicidad en las series de Fourier.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

LAS CONEXIONES MATEMÁTICAS ENTRE LA DERIVADA E INTEGRAL: UNA REVISIÓN DE LA LITERATURA EDUCATIVA

Javier García-García; Crisólogo Dolores Flores
Universidad Autónoma de Guerrero (México)
libra_r75@hotmail.com, cdolores2@gmail.com

Palabras clave: conexiones matemáticas, derivada e integral, bachillerato

Key words: mathematical connections, derivative and integral, high school

RESUMEN: El presente escrito estudia a las conexiones matemáticas y a dos conceptos centrales del Cálculo: la derivada y la integral. Buscamos responder una pregunta central ¿Cuál es el estado actual de las investigaciones relacionadas con las conexiones matemáticas en el campo del Cálculo, en particular entre la derivada y la integral? Para responder a esta pregunta se hizo un análisis de las publicaciones científicas de los últimos ocho años relacionadas con la pregunta de investigación. Los resultados los agrupamos en tres grupos: (I) la literatura que toma como objeto de estudio a las conexiones en general y, entre la derivada y la integral en particular; (II) la que estudia de manera articulada ambas ideas de Cálculo, pero sin estudiar propiamente a las conexiones matemáticas y; (III) los estudios sobre la derivada e integral de manera inconexa. Los resultados indican un interés creciente sobre las conexiones matemáticas en otros países, pero son escasos aquellos que exploraran la conexión entre la derivada y la integral. En México son nulos estos estudios, por lo que es necesario seguir profundizando sobre el particular.

ABSTRACT: This paper studies the mathematical connections and central concepts of Calculus: the derivative and integral. We answer a central question: What is the current status of investigations about mathematical connections in the field of Calculus, particularly between the derivative and integral? To answer this question, we did an analysis of the scientific researches of the last eight years related to the research question. The results were grouped into three groups: (I) the literature that takes as its object of study to connections in general and, between the derivative and integral in particular; (II) studying literature articulately both ideas of calculus, but not mathematical connections; (III) studies on the derivative and integral as disconnected. Results indicate a growing interest on the mathematical connections in other countries, but there are few who explored the connection between the derivative and integral. In Mexico these studies are null, so it is necessary to continue on the matter.

INTRODUCCIÓN

El presente estudio aborda a las conexiones matemáticas; entendidas éstas como relaciones entre distintos objetos matemáticos que permiten entender a las Matemáticas como un campo integrado y no como una colección de partes separadas. Las conexiones matemáticas pueden ser entre contenidos matemáticos (intramatemáticas), entre éstos y otras disciplinas (extramatemáticas), así como entre los conceptos matemáticos y la resolución de problemas planteados en diversos contextos (físico, químico, biológico, etc.). Razón por lo cual, se consideran un eje fundamental en los estándares de la *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2014).

Por otra parte, el Cálculo Diferencial e Integral es parte del conocimiento matemático que según los planes y programas de estudio del preuniversitario y universitario en México, deben aprender los estudiantes. Dos de sus conceptos centrales son la derivada y la integral que desde el punto de vista histórico se desarrollaron de manera separada. El primero tuvo su origen en el problema de las tangentes y, la integral en el cálculo de áreas. En el plano matemático la conexión entre ambos conceptos reside en la reversibilidad de los mismos; cifrada por el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). Este teorema unifica dos conceptos aparentemente inconexos.

En razón de lo expuesto, identificamos la importancia de estudiar a las conexiones matemáticas en general, por un lado, y entre la derivada e integral, por el otro; por considerar que son contenidos matemáticos que se abordan desde el bachillerato y que se formalizan en el nivel superior en México. En particular, planteamos responder la pregunta ¿cuál es el estado actual de las investigaciones relacionadas con las conexiones matemáticas en el campo del Cálculo, en particular entre la derivada y la integral? Como objetivo, nos planteamos analizar las publicaciones que abordan las conexiones matemáticas y aquellas que estudian a la derivada e integral. Este estudio servirá como base para desarrollar un proyecto de investigación más general.

ELEMENTOS TEÓRICOS Y METODOLOGÍA

Las conexiones matemáticas son el elemento teórico en el que se fundamenta nuestro trabajo. Para Eli, Mohr-Schroeder y Lee (2013) son como un enlace en el que se utiliza el conocimiento previo o nuevo para establecer o fortalecer una comprensión de la relación(es) entre dos o más ideas, conceptos matemáticos, filamentos o representaciones. Según Businskas (2008), son un aspecto importante y valioso para el aprendizaje de las matemáticas, de hecho, Godino, Batanero y Font (2003) señalan que sin conexión no hay comprensión, o ésta comprensión es débil y deficiente. En este trabajo, entendemos a las conexiones matemáticas en el sentido de Businskas, quien plantea que son: primero, aquellas relaciones sobre la base de las cuales está estructurada la matemática y son independientes del estudiante y segundo, como las relaciones a través de las cuales los procesos del pensamiento construyen la matemática.

Para la búsqueda de la literatura a revisar nos guiamos por la orientación propuesta por Sánchez y Molina (2012) quienes proponen identificar qué, dónde y cómo buscar. En nuestro caso:

- ¿Qué buscar? Investigaciones sobre conexiones matemáticas y sobre dos conceptos centrales del Cálculo: derivada e integral.
- ¿Dónde buscar? De las sugerencias hechas en Sánchez y Molina, nosotros buscamos en revistas especializadas e incorporamos algunos *papers* y tesis que consideramos pertinentes. Esto lo hicimos consultando la base de datos de la biblioteca virtual de la

Universidad Autónoma de Guerrero y la página de CONRICYT (Consorcio Nacional de Recursos de Información Científica y Tecnológica), donde existe una amplia gama de literatura de nuestro campo, la Matemática Educativa.

- ¿Cómo buscar? Entre otros aspectos, incluye establecer un límite. En nuestro caso, consideramos la literatura de los últimos 8 años (de 2007 a 2015). Esta elección obedece a que nos interesó la literatura más actual que dé cuenta del estado que guardan las investigaciones sobre conexiones matemáticas y sobre la derivada e integral.

En Cálculo, la derivada y la integral están relacionadas mediante el Teorema Fundamental del Cálculo, que da evidencia de la conexión de reversibilidad entre esos conceptos; conexión que no ha sido estudiada ni explorada con estudiantes de bachillerato o universitarios. Esa conexión tiene fuerte potencial para resolver problemas que le dieron origen al Cálculo mismo tales como, dada la posición de un objeto encontrar su velocidad en un instante o viceversa, por lo cual centramos nuestra idea en esos conceptos que llamamos centrales porque son la base para comprender ideas más avanzadas dentro de las matemáticas y se formalizan en el nivel superior.

LAS INVESTIGACIONES REVISADAS

La literatura revisada la agrupamos en tres grupos: (I) aquella que considera como objeto de estudio a las conexiones matemáticas en general, y entre los conceptos centrales del Cálculo (derivada e integral) en particular; (II) la que aborda de manera articulada ambos conceptos, pero sin considerar como objeto de estudio a las conexiones matemáticas; y finalmente (III) la que investiga sobre la derivada y la integral de manera inconexa.

Sobre conexiones en general y entre las ideas claves del Cálculo

Hemos ubicado distintos estudios que toman como objeto a las conexiones matemáticas en general, pero sin referirse a la derivada e integral. Sólo por nombrar citaremos a Hurts (2007), Businskas (2008), Mwakapenda (2008), Jaijan y Loipha (2012), Beswick y Muir (2013) y, Eli et al. (2013). Sin embargo, aquellos que abordan las conexiones entre la derivada y la integral sólo hemos ubicado a Haciomeroglu, Aspinwall y Presmeg (2009) y, a Ponce (2015).

Jaijan y Loipha (2012), por ejemplo, investiga las conexiones matemáticas hechas por 24 estudiantes de quinto grado de primaria con las transformaciones geométricas, usando un enfoque abierto. Para ello, utilizaron como metodología al *lesson study* y al *enfoque abierto* (en este cada estudiante puede aprender Matemáticas de manera que sea apropiado a su habilidad, además de tomar sus propias decisiones en el proceso de aprendizaje). Los datos fueron recolectados de cuatro situaciones problemáticas sobre paralelogramos. Los resultados mostraron las formas naturales de pensar sobre transformaciones; particularmente la conexión matemática con el corte, plegado, movimiento, enlace y, la formación de unidades completas. La conexión matemática que identifican tiene que ver con las transformaciones que sirvieron como el conector matemático para vincular los números y las operaciones que utilizaron para encontrar la fórmula del área (del paralelogramo). Jaijan y Loipha plantean sobre la base de sus observaciones que los estudiantes normalmente ven temas matemáticos como independientes, postura que compartimos y, que raramente *ven* que lo que han aprendido en un dominio podría ser aplicado en la comprensión de otros dominios. Consecuentemente, con esto se privilegia un aprendizaje memorístico y algorítmico (procedimental).

Desde un punto de vista curricular, encontramos el estudio de Mwakapenda (2008) quien estableció como objetivo identificar y discutir las formas en las cuales diferentes tipos de conexiones son descritas en las matemáticas sudafricanas en la Declaración del Currículum Nacional y documentos relacionados, en particular de la educación superior y de formación continua. Entre sus resultados, Mwakapenda refiere la centralidad de las conexiones en la definición de las matemáticas; en el currículum se declaran las conexiones para alumnos de grados determinados y con logros específicos; la prevalencia de las conexiones a través de los resultados de aprendizaje y criterios de evaluación; las representaciones (gráficas, bosquejos, tablas, etc.) son un aspecto importante de las conexiones y, la integración de conceptos y procesos dentro de las Matemáticas son una forma de hacer conexiones.

Considerando a los docentes, ubicamos los estudios de Eli et al. (2013) y, el de Businskas (2008). Eli et al. (2013) examinaron las conexiones matemáticas que realizan 28 futuros profesores de secundaria para la enseñanza de la Geometría. Para la colecta de datos utilizaron la *Actividad de Ordenar Cartas* (CSA, por sus siglas en inglés) que consistió de 20 cartas marcadas con diferentes términos matemáticos, conceptos, definiciones y problemas. Como resultado identificaron 287 conexiones matemáticas que cayeron en una o más de las siguientes categorías: *categórica, característica/propiedad, curricular, procesal* y *de derivación.* Entre sus resultados también plantean que para desarrollar el potencial para realizar conexiones es necesario crear secuencias centradas en las interrelaciones entre distintos tópicos dentro de las matemáticas. Asimismo, señalan que es importante el desarrollo de planes de estudio que incluyan a las conexiones matemáticas como un objetivo explícito y se establezcan con claridad cómo evaluar tales conexiones.

En cambio, Businskas (2008) buscó responder las preguntas: ¿cómo conceptualizan las conexiones matemáticas los profesores de secundaria? y ¿cuáles son las características explícitas de las conexiones matemáticas que los profesores son capaces de expresar? En el estudio fueron entrevistados en tres momentos diferentes nueve profesores de bachillerato. Businskas construyó un modelo compuesto de cinco categorías de conexiones matemáticas (representaciones diferentes, relación parte-todo, implicación, procedimiento, conexión de instrucción orientada) que servirían para evaluar las respuestas de los profesores. Entre sus resultados, Businskas (2008) reporta que el pensamiento de los docentes acerca de las conexiones y al parecer su forma de pensar acerca de las matemáticas en general, está ligado a su forma de pensar sobre la enseñanza; los maestros hablaron acerca de las conexiones con el mundo real y con el conocimiento previo de los estudiantes; declararon una disposición positiva hacia las conexiones; los participantes tenían conocimientos sobre conexiones matemáticas, pero en gran parte es tácito. Los profesores perciben a las conexiones como un conocimiento estratégico de su enseñanza; los maestros identificaron conexiones matemáticas específicas en una variedad de categorías (ya descritas); e identifican ciertas conexiones como algo crucial para la comprensión de los alumnos de temas específicos.

Por otra parte, Haciomeroglu et al. (2009) tratan un tipo especial de conexión, a saber, la reversibilidad de conceptos. Ellos examinaron los procesos cognitivos de estudiantes universitarios de Cálculo al proporcionarle la gráfica de la derivada de una función y pedirles que esbozaran la gráfica de la antiderivada. Como resultado reportan que los alumnos presentaron dificultades dado que no establecen una relación reversible al interpretar los datos de la gráfica derivada o

antiderivada. Señalan que desde su perspectiva, la falta de énfasis en los aspectos analíticos y visuales de estos procesos reversibles, puede ser un impedimento para la comprensión conceptual de los estudiantes. Por tanto, sugieren conducir a los alumnos a asociar el gráfico de diversas funciones con su derivada y con sus primitivas; esto podría permitir que los estudiantes superen sus dificultades y obtengan una perspectiva más amplia y sólida.

En cambio, Ponce (2015) planteó como problema de investigación abordar las conexiones que entre la derivada y la integral establecen los estudiantes universitarios en dos contextos: físico y matemático. Este estudio fue exploratorio-descriptivo y utilizó cuestionarios que incluyeron siete actividades que ayudaban a identificar conexiones. Entre sus resultados, Ponce refiere que identificó diversas conexiones. A manera de ejemplo citamos las siguientes: conexión entre la distancia y la integral; entre la velocidad y la derivada; entre representaciones equivalentes; entre la representación gráfica de la velocidad y su representación analítica; entre la integral y el área bajo la curva; entre otras. Por tanto, en el estudio se identificaron conexiones internas y externas. Sin embargo, coincidimos con Ponce cuando señala que es necesario seguir profundizando en el estudio de las conexiones entre las Matemáticas y otras disciplinas y, entre éstas y el mundo real.

Estudios sobre la derivada e integral, vistos de manera articulada

Entre la literatura que aborda a la derivada e integral, pero sin considerar el estudio de las conexiones matemáticas propiamente, son por citar algunos: Rojas (2010), Ponce-Campuzano & Maldonado-Aguilar (2014) y, Jukić y Dahl (2014). Por ejemplo, Rojas (2010) señala que el ordenamiento tradicional de los contenidos del Cálculo es primero abordar la derivada y después a la integral, posición que compartimos, y añadimos que esto sucede en los libros de texto, en los planes y programas de estudio, así como en el tratamiento escolar. La propuesta de Rojas fue analizar el efecto de estudiar la integral definida en paralelo con las derivadas con estudiantes universitarios de Ingeniería en informática, utilizando como enfoque teórico al Aprendizaje Basado en Problemas (ABP). Para ello, diseñó un modelo que posibilitara dicho trabajo. Entre sus resultados, Rojas refiere que la propuesta significó una mejora en el rendimiento del grupo experimental, ya que su propuesta potenció el trabajo en equipo, permitiendo que el alumno desarrollara habilidades sociales. Asimismo, concluye que es provechoso aplicar definiciones, teoremas y postulados, sobre derivadas e integrales en la solución de problemas sobre algún contexto, pues permiten al alumno relacionar su aprendizaje con su entorno.

Estudios sobre la derivada e integral, vistos de manera inconexa

El grueso de las investigaciones que hemos ubicado se centran, bien en la derivada o bien en la integral, es decir, de manera inconexa. De este grupo, ubicamos estudios didácticos, cognitivos, históricos, epistemológicos y aquellos que pueden ser de dos tipos: didáctico-histórico, cognitivo-didáctico o histórico-epistemológico, siempre referentes a la derivada o a la integral.

Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008) reportan que algunos estudiantes son capaces de resolver los ejercicios que se les proponen con la aplicación correcta de las reglas de derivación. Sin embargo, tienen dificultades cuando manejan el significado de la noción de derivada, ya sea a través de su expresión analítica, como límite del cociente incremental o en su interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente. Asimismo, presentan dificultades cuando aplican los conceptos del cálculo para resolver problemas reales que atañe a la variación y al trabajar con gráficas en el contexto de la Física. En ese mismo sentido, la enseñanza tradicional del Cálculo

provoca elevados índices de reprobación, un aprendizaje sin comprensión y una actitud negativa hacia el aprendizaje del Cálculo (Alanís y Salinas, 2009).

Utilizando un ambiente informático, Quintana (2010) planteó como objetivo: evaluar la eficacia del programa DERIVE como recurso didáctico en el proceso de aprendizaje del Cálculo Diferencial con 51 alumnos de nivel superior. Entre sus conclusiones, Quintana refiere que el programa DERIVE es eficiente en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Cálculo Diferencial; su uso permite a los estudiantes el desarrollo de capacidades como: observar, discernir, analizar e interpretar; complementa la labor del profesor, no lo reemplaza; y finalmente, el uso de diferentes representaciones semióticas favorece el establecimiento de relaciones entre ellas, siendo estas las que marcan las diferentes etapas del aprendizaje de los estudiantes.

En relación con los estudios que abordan sólo la integral, podemos citar a Kachapova y Kachapov (2011), quienes identificaron con base a su experiencia docente, que sus estudiantes tienen dificultades al abordar la noción de límite al infinito así como las integrales que involucran funciones cuadráticas; por ejemplo, $\int \frac{dx}{2x-5x^2}$ y $\int \sqrt{4x-x^2}\,dx$.Por ello, diseñaron una técnica algorítmica que facilite el trabajo operatorio; en particular, proponen introducir el cambio de variable $t = x + \frac{b}{2a}$. Ellos refieren que han utilizado esta técnica por muchos años en el nivel universitario observando que al aplicar este método, los estudiantes ofrecen la respuesta más rápido y con menos errores. Si bien reconocen que su propuesta es algorítmica, plantean que ayuda a eliminar conjeturas y la memorización. Asimismo, permite a los alumnos con bajo rendimiento obtener mejores resultados en problemas matemáticos más completos.

En cambio, Kouropatov y Dreyfus (2013) realizaron un estudio con 250 estudiantes de grado 12 en Israel, provenientes de 11 escuelas diferentes y, que recientemente habían finalizado el estudio de las integrales. Aplicaron un cuestionario con ocho preguntas con lo cual identificaron dos significados de la integral en los estudiantes: como límite de alguna suma (definida) y como primitiva (indefinida). Asimismo, considerando que el concepto de acumulación es central para la idea de integración, implementaron una propuesta didáctica tomándola como unidad de instrucción, en cinco grupos pequeños de estudiantes en 10 sesiones. Como resultado, diseñan y sugieren un currículum con la siguiente estructura: (1) la aproximación de figuras geométricas (líneas, áreas, volúmenes); (2) la aproximación de formas analíticas; (3) la aproximación de los valores de acumulación; (4) un procedimiento sistemático para el cálculo de los valores de acumulación (utilizando rectángulos y trapecios); (5) el concepto de integral definida; (6) propiedades de la integral definida; (7) el concepto de función de acumulación (como integral definida con un límite superior variable); (8) las propiedades de la función de acumulación; (9) la velocidad de cambio de la función de acumulación y el TFC; (10) el concepto de primitiva y su uso para el cálculo de integrales definidas; (11) las diferentes formas de calcular integrales definidas: consideraciones geométricas, el cálculo de los valores de acumulación, utilizando la función de acumulación, utilizando la primitiva; (12) aplicaciones de la integral definida.

Kouropatov y Dreyfus consideran que, debido a su naturaleza jerárquica y multinivel, la construcción del concepto de la integral depende fuertemente de los conceptos matemáticos previos. En ese sentido, recalcan de sus evidencias empíricas que una construcción insuficiente de la noción de tasa de cambio puede afectar negativamente el proceso de construcción del TFC. Finalmente, los autores refieren que todos los estudiantes participantes en el experimento de

enseñanza tuvieron éxito en la construcción de los conceptos de aproximación y la acumulación de una manera bastante satisfactoria y completa. Por lo que parece que el plan de estudios propuesto tiene potencial educativo para la adquisición del concepto integral en el nivel bachillerato. Ellos plantean que el siguiente paso es implementar la propuesta en grupos más amplios.

REFLEXIONES FINALES

Una vez concluida la revisión de la literatura sobre las conexiones matemáticas y los conceptos centrales del Cálculo: derivada e integral, podemos plantear ciertas reflexiones. El tema de conexiones matemáticas es un campo prolífico para realizar investigación porque ha sido poco atendido por la educación matemática, aunque hay esfuerzos en este sentido. Las investigaciones de 2007 a la fecha (revisadas) principalmente se han encargado de explorar las conexiones que emplean profesores y futuros profesores, así como estudiantes cuando abordan distintos objetos matemáticos. Estos fundamentalmente se han enfocado en el área de la Geometría y Álgebra, pero no han hecho exploraciones en otros dominios matemáticos y menos entre diversas áreas de las matemáticas y otras disciplinas, a excepción de Özgen (2013) que pretende apuntar en esa dirección. En México son nulos estos trabajos.

Coincidimos con Ponce (2015) cuando señala que es necesario seguir profundizando en el estudio de las conexiones matemáticas en distintos niveles educativos dado que tiene potencial para ser usadas en la resolución de problemas planteados en diversos contextos (físico, químico, biológico, economía, vida real). En Estados Unidos un referente para el estudio de las conexiones matemáticas son precisamente los estándares marcados por la *National Council of Teachers of Matemathics;* porque es ahí donde se priorizan para los distintos niveles educativos. Lo mismo se observa en documentos oficiales de Sudáfrica (Mwakapenda, 2008). En cambio, en los programas de bachillerato en México el término como tal está ausente, en su lugar utilizan un término equivalente, a saber, *relaciones.*

Por otra parte, identificamos que las investigaciones que exploran las conexiones matemáticas lo han hecho utilizando una variedad de marcos teóricos y metodológicos. En ese sentido, no hay un punto de acuerdo sobre un modelo teórico para caracterizarlas. Nuestros esfuerzos (en estudios posteriores) pueden aportar en ese sentido, es decir, a partir de los datos, concebir un marco para estudiar las conexiones cuando los estudiantes trabajan con actividades que implican el uso de la derivada e integral.

En el segundo grupo de investigaciones que estudian tanto a la derivada como a la integral, pero no a las conexiones propiamente, encontramos entre otros resultados que, trabajar en situación escolar los conceptos centrales del Cálculo de manera articulada es viable y mejora el rendimiento de los estudiantes. Asimismo, la resolución de problemas es una vía para relacionar ambos conceptos, aunque hemos identificado que esto sólo se hace para el contexto matemático y físico. Sin embargo, nosotros creemos que es necesario centrar nuestro interés en otros contextos. Hacia ese objetivo debemos enfocar nuestro esfuerzo para contribuir al tratamiento de ambos conceptos en el aula de clases. Por su parte, en el tercer grupo, identificamos una vasta literatura que aborda a la derivada y a la integral por separado bajo diversas perspectivas; pero al mismo tiempo, indican que es necesario seguir profundizando en el estudio de estos temas.

Finalmente, la revisión de la literatura nos permite concluir que: el tema de conexiones

matemáticas ha sido estudiado principalmente considerando al profesor o al marco curricular, pero son pocos aquellos que se centran en el alumno; y que han sido investigadas para distintos objetos matemáticos, pero son escasos para los conceptos centrales del Cálculo. Por tanto, nuestra revisión indica que es importante el estudio de las conexiones matemáticas entre la derivada y la integral, así como enfocarse a la actividad de los estudiantes; que es a donde apuntaremos nuestros esfuerzos en un proyecto más general que está en curso.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alanís, J. y Salinas, P. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12(3),* 355-382.

Beswick, K. y Muir, T. (2013). Making connections: Lessons on the use of video in pre-service teacher education. *Mathematics Teacher Education and Development, 15 (2),* 27-51.

Businskas, A. M. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections*. Unpublished PhD Thesis, Simon Fraser University. Canada.

Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J. & Lee, C. W. (2013). Mathematical Connections and Their Relationship to Mathematics Knowledge for Teaching Geometry. *School Science and Mathematics, 113(3),* 120–134.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Granada: Universidad de Granada.

Haciomeroglu, E. S., Aspinwall, L. y Presmeg, N. (2009). The role of reversibility in the learning of the calculus derivative and antiderivative graphs. In S. L. Swars, D. W. Stinson & S. Lemons-Smith (Eds.). *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (pp. 81-85). Atlanta, GA: Georgia State University.

Hurts, C. (2007). Numeracy in Action: Students Connecting Mathematical Knowledge to a Range of Contexts. In J. Watson & K. Beswick (Eds.). *Mathematics: Essential research, essential practice, Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Hobart,* (pp. 440-449). Adelaide: MERGA.

Jaijan, W. y Loipha, S. (2012). Making Mathematical Connections with Transformations Using Open Approach. *HRD Journal, 3(1),* 91-100.

Jukić, L. y Dahl, B. (2014). Retention of differential and integral calculus: a case study of a university student in physical chemistry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45(8),* 1167-1187.

Kachapova, F. & Kachapov, I. (2011). Applying change of variable to calculus problems, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42(3),* 37-41.

Kouropatov, A. & Dreyfus, T. (2013). Constructing the integral concept on the basis of the idea of accumulation: suggestion for a high school curriculum. *International Journal of Mathematical*

Education in Science and Technology, 44(5), 641-651.

Mwakapenda, W. (2008). Understanding connections in the school mathematics curriculum. *South African Journal of Education, 28*, 189–202.

NCTM. (2014). *Principles to action: Ensuring mathematical success for all.* Nacional Council of Teachers of Mathematics: United State of America.

Özgen, K. (2013). Problem çözme bağlaminda matematiksel ilişkilendirme becerisi: öğretmen adaylari örneği. *NWSA-Education Sciences, 8(3),* 323-345.

Ponce, B. (2015). *La conexión entre la derivada y la integral*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Ponce-Campuzano, J. C. & Maldonado-Aguilar, M. A. (2014). The fundamental theorem of calculus within a geometric context based on Barrow's work. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45(2),* 293-303.

Quintana, D. J. (2010). *Tratamiento didáctico de la derivada-la aplicación del programa DERIVE*. Tesis de maestría no publicada, Universidad de Piura. Perú.

Rojas, P. (2010). *El aprendizaje basado en problemas (ABP) como estrategia metodológica de enseñanza y aprendizaje de la integral indefinida en paralelo con derivadas y su incidencia en el rendimiento académico de los estudiantes de ingeniería en informática de INACAP, Chillán.* Tesis de maestría no publicada, Universidad del Bío-Bío. Chile.

Sánchez, M. y Molina, J. G. (2012). Un método para realizar una búsqueda bibliográfica en didáctica de las matemáticas. En A. Rosas y A. Romo (Eds.). *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones,* (pp. 23-33). México: Lectorum.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigacio7nes en Matemática Educativa, 11(2),* 267-296.

ADQUISICIÓN DE LA NOCIÓN CUALITATIVA DE ÁREA MEDIADA POR LA LENGUA DE SEÑAS MEXICANA

Ignacio Garnica y Dovala, Héctor Gerardo Estrada García
CINVESTAV-IPN (México)
igarnica@cinvestav.mx, hgestradag@cinvestav.mx

Palabras clave: educación especial. nivel básico. estudio de casos

Key words: special education. basic level. case study

RESUMEN: Se presentan resultados en fase exploratoria de investigación en curso con estudio de casos (Stake, 2010) de sujetos Sordos en situación de la enseñanza de la noción cualitativa de área a efecto de reconocer su adquisición ante la mediación de la LSM. El estudio considera tres aspectos: enseñanza, indagación e investigación (Barojas, 2014) en aula de educación básica de jóvenes Sordos (18-23). Los resultados corresponden a nueve actividades realizadas en condición de la mediación de una intérprete durante el proceso de la comunicación. Se construyeron señas pertinentes a los términos matemáticos requeridos para la realización de las tareas diseñadas.

ABSTRACT: Results are presented in the exploratory phase of ongoing research with case study (Stake, 2010) Deaf subjects at teaching the qualitative notion of area in order to recognize their acquisition to the mediation of the LSM. The study considers three aspects: Education, research and investigation (Barojas, 2014) in basic classroom of young Deaf (18-23). The results correspond to nine activities in the mediation provided an interpreter during communication. Relevant signaled the mathematically required to perform the tasks designed built.

INTRODUCCIÓN

La presente investigación de tipo cualitativo (Stake, 2010) en su modalidad de estudio de casos y en curso, considera para su desarrollo tres procedimientos: *enseñanza en el aula, Indagación o comunicación entre pares en el aula para precisar preguntas indagatorias e investigación centrada en la pregunta y objetivos.* Se reportan resultados correspondientes a la fase indagatoria que incluyen: los de enseñanza de nociones requeridas para el tratamiento de la noción cualitativa de área; los correspondientes a sesiones de comunicación entre pares; los de los primeros acercamientos a la noción en foco y a la constitución de señas asociadas a palabras. Los tres procesos se orientan a la identificación de la naturaleza de la Lengua de Señas Mexicana [LSM] en su sentido de *uso* en situación de enseñanza para la adquisición de la noción cualitativa de área. Las expresiones en lengua escrita se restringen a nombres asociados a las figuras, el recurso al uso de la dactilología se realizó con poca frecuencia, ello con el propósito de lograr una mejor comprensión de las limitaciones que presenta a la enseñanza el uso exclusivo de la lengua de señas en el aula. Se destaca el uso de señas referentes a la noción de: área, base, altura, rectángulo, triangulo, diagonal, y de unidades de medida: cm, cm², m y m². Se planteó la pregunta de investigación: ¿cuáles son las condiciones para la adquisición de la noción cualitativa de área mediada por la LSM en situación de enseñanza? Se persiguen tres objetivos: (a) identificar y caracterizar las Señas correspondientes a las nociones de perímetro y área; (b) evaluar la adquisición de las nociones en foco, con base en las señas propuestas; (c) identificar la competencia comunicativa mediada por la LSM como una condición para la adquisición de las nociones de perímetro y área. La investigación en curso se realiza en instalaciones de una institución mexicana de investigación CINVESTAV del IPN. La población está constituida por tres jóvenes Sordos [18-23], usuarios de la LSM con niveles de competencia: alto, medio y bajo.

ANTECEDENTES

Esta investigación es continuación de otras (Garnica & Astorga & Barojas, 2013, Barojas, 2014) relacionadas con el uso de la LSM en la adquisición del sistema métrico decimal y de la cantidad de magnitud: peso y longitud en aulas de educación básica.

REFERENTES TEÓRICOS

Un elemento fundamental para el avance del reporte es la elaboración de señas de conceptos matemáticos con las que la LSM no cuenta pero permite “que los señantes sean capaces de crear un número ilimitado de construcciones con significado” (Cruz, 2008, p.47). Se toma en cuenta el estudio del “transito natural noción-concepto-definición para una de las ideas centrales de la Matemática: El área de una región” (Turégano, 1993, p. 11), lo que nos permite obtener información acerca de la relación lenguaje-comunicación-adquisición en el proceso educativo en sordos. Para el diseño de las actividades empíricas se tomaron en cuenta seis ideas fundamentales de medida: asignación numérica, comparación, congruencia, unidad, e iteración de Arquímedes, las cuales “pueden ser suficientes para describir la medición de una línea, los sistemas de medición de longitud y de áreas, son similares; las ideas fundacionales trabajan en ambos sistemas y son útiles para pensar en los nuevos sistemas de medición, como el área” (Osborne,1998, p. 81). En escenario empírico se trató la descomposición de áreas tomando en cuenta que en situaciones regulares “es evidente que dos figuras equidescomponibles tienen áreas

iguales" (Boltyanskii, 1956, p. 9) buscando "calcular el área de una figura descomponiéndola en un número finito de partes de tal manera que éstas partes puedan rearreglarse para formar una figura más sencilla" (Boltyanskii, 1956, p. 10) Se indujo a los estudiantes al *área de fórmula* sabiendo que por definición: "el área de fórmula de un triángulo es la mitad del producto de cualquier base por su correspondiente altura y que el área de fórmula de un complejo es la suma de las áreas de fórmula de sus elementos" (Moise, 1980, p. 229). La pregunta de investigación se orientó a identificar la relación existente entre la competencia lingüística de la LSM desarrollada en el aula de matemáticas y la adquisición de la noción cualitativa de área.

MÉTODO

Se implementaron dieciséis actividades en sesiones de tres horas semanales, nueve para la enseñanza, cuatro para la indagación y tres de investigación. En la mayoría de las sesiones se contó con la mediación de una intérprete, integrante del "modelo de comunicación en el aula" (Barojas, 2014, p.28) y en otros se recurrió a la escritura como medio de comunicación con la población integrada por tres jóvenes sordos, dos con pérdida auditiva profunda y el tercero con Implante Coclear. Las estrategias implementadas incluyeron actividades de enseñanza e indagación, individuales y de comunicación entre pares, dirigidas a la construcción de la noción cualitativa de área. Las actividades de enseñanza consistieron en la obtención del área de un rectángulo mediante la utilización de cuadros de 1 cm² que utilizaban como unidad de medida y con los cuales los estudiantes debían rellenar cada figura para después realizar el conteo de los mismos y así obtener mediante éste proceso la medida del área de las figuras presentadas, las cuales conforme se avanzó en la actividad, fueron siendo cada vez más grandes lo que hacía a su vez que el calcular de esa forma el área fuera un trabajo más tedioso para los estudiantes. Una vez que el procedimiento del conteo de cuadritos se consolidó, se le solicitaba a los estudiantes que además de hacer dicho procedimiento en cada figura, también multiplicaran la altura por la base y compararan ambos resultados, en ese momento fue necesario realizar la construcción de la seña correspondientes a las nociones de base y altura en LSM, el cual se hizo por parte de los mismos estudiantes y con el apoyo de la interprete, se construyeron, a propuesta de los sujetos sordos y con respaldo de la intérprete, seis Señas en LSM referentes a las nociones matemáticas en foco: (incluir los nombres de las seis señas). Las estrategias relativas a la indagación se realizaron mediante la modalidad de "comunicación entre pares", fueron actividades que se habían realizado en el proceso de enseñanza a efecto de identificar problemas asociados a la comprensión de las nociones tratadas, así como reconocer las consecuencias asociadas a los niveles de competencia en el uso de la LSM. Finalmente, las entrevistas individuales se aplicaron con el propósito de reconocer el grado de adquisición de las nociones matemáticas que se plantearon en las sesiones de enseñanza. Se aplicaron la bitácora y la entrevista en su modalidad de LSM (Garnica y Barojas, 2013) como instrumentos de indagación e investigación y el video, la fotografía y el cuaderno de trabajo como técnicas de registro

RESULTADOS

Se reportan los relativos a: a) ideas fundamentales — (asignación numérica y comparación); b) sesión de indagación (comunicación entre pares en el aula); c) área de fórmula; d) construcciones

con regla y compás; d) equidescomposición-composición de figuras, aditividad de área de regiones y perímetro; e) construcción de señas en LSM.

Ideas fundamentales — (asignación numérica y comparación). Con respecto a las ideas fundamentales, se realizó el uso del conteo para la medición de una figura rectangular, los estudiantes identificaron la medida de la región tomando como base recortes cuadrados de papel (de $1cm^2$), cubrieron la superficie de la figura para después realizar el conteo y asignar la cantidad de medida correspondiente (véase la Figura 1). En lo referente a la idea fundamental de comparación, los estudiantes lograron unir correctamente figuras con diferentes formas que comparten una misma medida de área (véase Figura 2), que realizaron mediante comparaciones con regla y compás.

Figura 1. Uso del conteo para la medición de una figura rectangular.

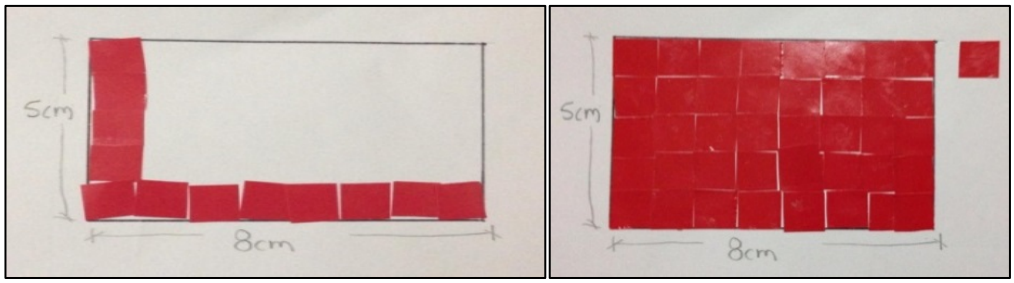
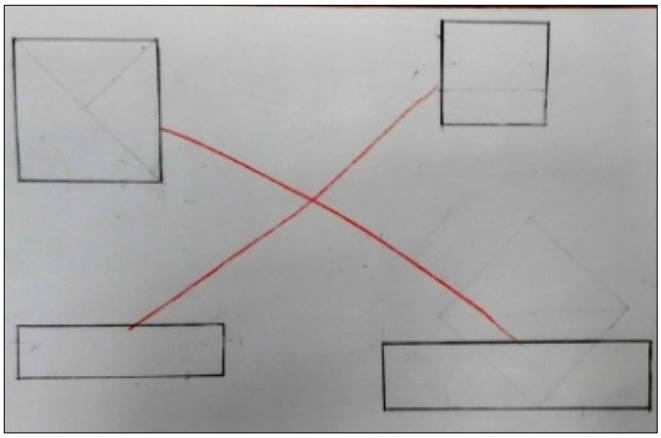


Figura 2. Figuras diferentes con misma área



Sesión de indagación: comunicación entre pares en el aula. Identificaron que el resultado de multiplicar la base por la altura es el mismo que el de sumar todos los cuadritos y durante actividad de indagación, uno de los estudiantes da una explicación a sus compañeros del porqué de éste razonamiento (véase Tabla 1);

Tabla 1. Fragmento de la transcripción realizada en sesión de indagación

I	Explícanos por favor como maestro el área	
	Glosa	**Español**
Mx ante grupo	AREA SIGNIFICAR HAY ADENTRO ALTURA BASE PORQUE HAY ALTURA CENTIMETRO BASE CENTIMETRO POR ESO (Exp. Corporal) EJEMPLO IDEA (Se queda pensando) EJEMPLO MESA ESA (Señala la mesa que está frente a él) MESA HAY ÁLTURA BASE SI PORQUE MIRAR AQUÍ (Señala un espacio de la mesa) YO VER ESPACIO VER (Señala una lateral de la mesa) ALTURA SENTIR UNO (Se queda pensando) CIEN CENTIMETRO YA AQUI (Señala la parte de la mesa cercana a él) SENTIR OCHO CENTIMETRO YA CANTIDAD (Usa con las dos manos al mismo tiempo, el clasificador haciendo referencia que va a hacer una operación con las dos cantidades que menciona) CIEN POR OCHO ESO USAR HAY PORQUE AREA MUCHO SOBRA CUADRADO CUADRADO (Con movimiento de arriba para abajo haciendo referencia de los cuadritos de 1 cm de una tabla) PARECER (Exp. Facial) TABLA DE DOBLE ENTRADA (Usa la seña hacia la mesa, como referencia de un cuadrado que adentro contiene cuadritos)	El área es cuando tiene adentro altura y base un ejemplo es que esta mesa tiene un altura tiene una base por ejemplo la altura pueden ser 100 cm y la base también 8 cm cuando empiezo a hacer la operación tengo que multiplicarlos y depende de la respuesta porque adentro tiene unos cuadros y cada cuadro puede medir cierta medida, por ejemplo un cuadrado, tiene una altura y una base, si claro, esta es la base y esta es la altura, igual depende cuanto midan la altura y la base sacamos el resultado dependiendo de los cuadritos que tiene cada cuadro

Área de fórmula - En lo referente al Área de fórmula, se dejó de lado el conteo de cuadros para utilizarla exclusivamente, como procedimiento para obtener la medida de la superficie en un rectángulo (véase la Figura 3); Con la introducción de una diagonal (véase Figura 4) para la cual se debió construir la seña para “diagonal”, los estudiantes identificaron que el triángulo es la mitad de un rectángulo por lo cual su área debía ser la misma pero dividida entre dos, así lograron llegar a la construcción del área fórmula del triángulo, es decir el producto de la base por altura dividida entre dos (véase Figura 5); Lograron la identificación de las tres alturas del triángulo con referencia a las paralelas a cada una de sus bases (véase Figura 6) lo cual les permitió utilizar el área de fórmula en triángulos no rectángulos;

Figura 3. Utilización del área de fórmula en un rectángulo

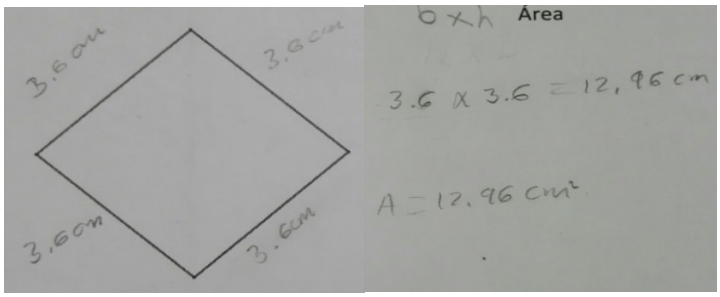


Figura 4. La diagonal como generadora del triángulo

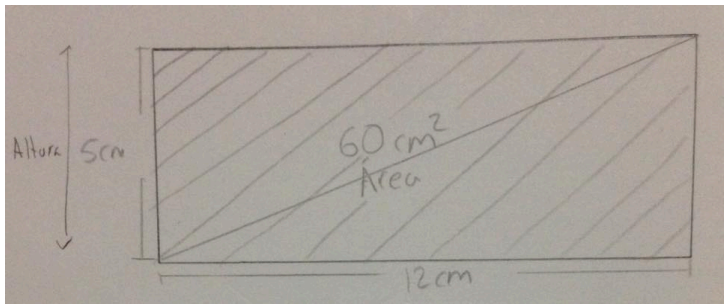


Figura 5. Aplicación del área fórmula en un triángulo rectángulo

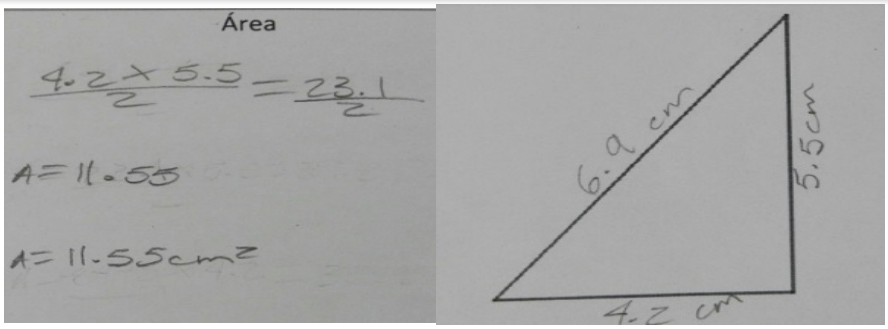
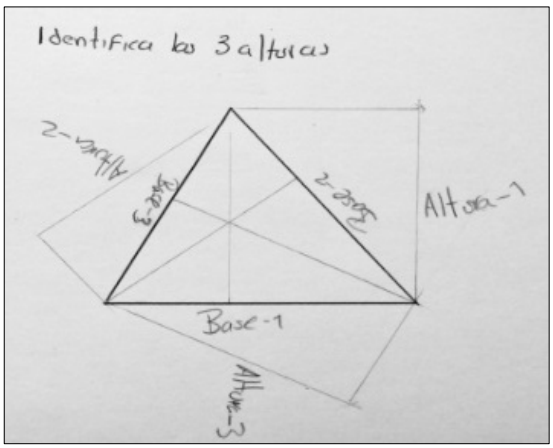
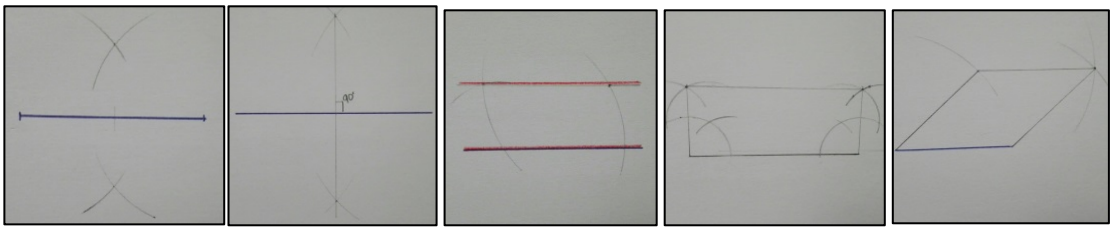


Figura 6. Tres alturas de un triángulo



Construcciones con regla y compás. Con la finalidad de abonar al aspecto cualitativo y tras varias actividades de enseñanza, los estudiantes lograron construir con regla y compás, 5 proposiciones: Punto medio, perpendicular, paralela, rectángulo y rombo (véase Figura 7)

Figura 7. Construcciones realizadas por estudiante con regla y compás



Equiescomposición – composición de figuras, aditividad de área de regiones y perímetro. Los estudiantes realizaron la equidescomposición – composición de un pentágono regular en un paralelogramo mediante la utilización de triangulación en la figura (véase Figura 8); Se trabajó la aditividad de áreas y los estudiantes lograron obtener la medida del perímetro y área de polígonos regulares (véase Figura 9); en lo referente al perímetro, los estudiantes logran obtener en primer instancia la medida del perímetro y área de polígonos regulares (véase Figura 10);

Figura 8. Descomposición - Composición de polígono

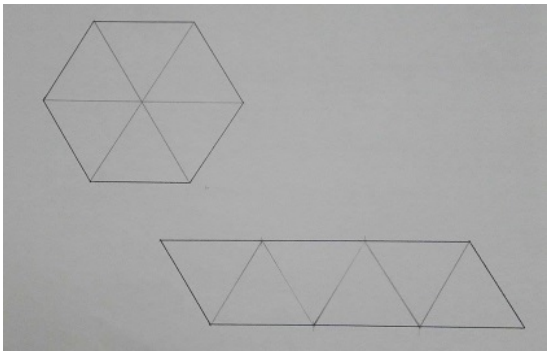


Figura 9. Obtención de perímetro y área de un hexágono regular

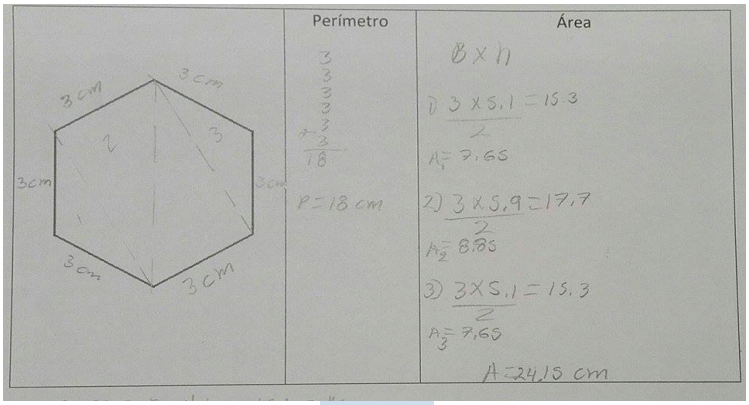
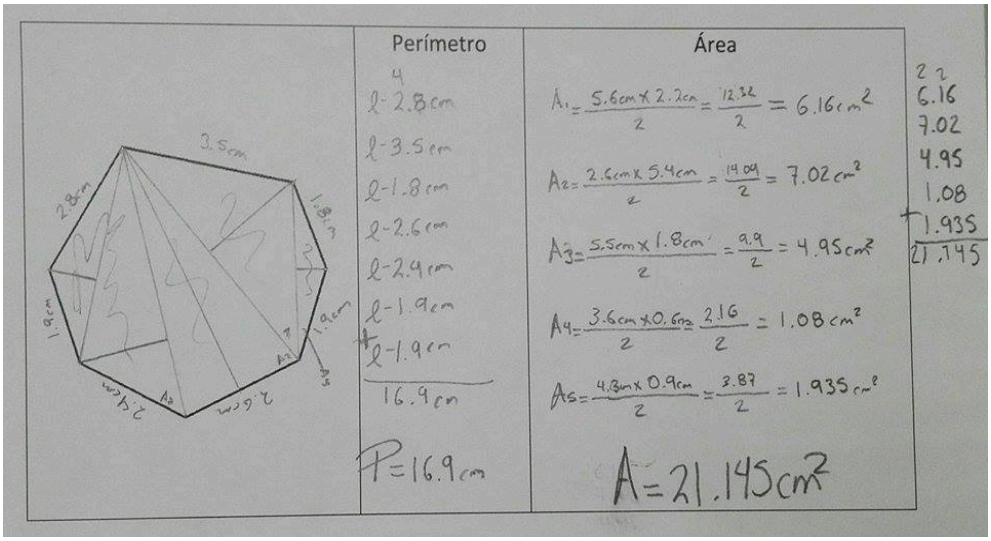


Figura 10. Obtención de perímetro y área de un heptágono irregular



Construcción de señas en LSM - Durante el trascurso de las actividades, por parte de los estudiantes y con el respaldo de la intérprete, se construyeron seis señas: base (véase Figura 11), altura (véase Figura12), diagonal, área, triángulo equilátero y triangulo Isósceles;

Figura 11. Seña asignada a: "Base"

Figura 12. Seña asignada a: "Altura"

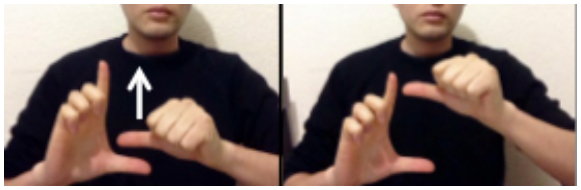


Figura 13. Seña asignada a: "Diagonal"

Figura 14. Seña asignada a: "Área"

Figura 15. Seña asignada a "Triángulo equilátero"

Figura 16. Seña asignada a "Triángulo isósceles"

COMENTARIOS

Los resultados presentados obedecen a un proceso en el que las características individuales de los estudiantes con respecto a su competencia comunicativa jugaron un importante papel ya que los tres poseen diferencias significativas; Mx (el estudiante con mayor dominio de la LSM) ha tenido un crecimiento significativo en los contenidos matemáticos al grado de ser quien en la mayoría de los casos explicó a sus compañeros en LSM algunos de los contenidos, en el curso de sesiones de indagación, que se vieron en enseñanza, ha desarrollado una motivación intrínseca que lo lleva a buscar siempre una profundización en los temas; Os, posee un nivel de competencia en LSM intermedio en comparación con sus dos compañeros, su crecimiento en el dominio de contenidos matemáticos, a diferencia de Mx, él no ha profundizado en los temas, suele mostrarse pragmático en sus procesos de resolución de problemas; El estudiante Br es quien cuenta con la competencia lingüística más baja y es también quien ha mostrado mayores dificultades para acceder a los contenidos matemáticos, al grado de no poder aun dominar los procedimientos requeridos para la solución de actividades relativas al uso de regla y compás.

La presente investigación se encuentra aún en curso y los resultados aquí presentados obedecen al primer acercamiento con relación a los procesos de adquisición de la noción cualitativa de área.. Entre las dificultades más marcadas se encuentra la comunicación debido a la baja competencia lingüística del investigador, lo cual se ha ido subsanando de dos formas: Principalmente mediante el apoyo de la intérprete constantemente presente y mediante el paulatino aprendizaje de la LSM por parte del mismo. El otro elemento de dificultad es la baja competencia que presenten los estudiantes en cuanto a las operaciones matemáticas básicas, especialmente la multiplicación y la división. Sin embargo la investigación avanza y ya en éste primer momento se puede apreciar la aparición de elementos que nos permiten inferir que se está realizando el acercamiento a la noción cualitativa de área, así como los elementos que se requieren para lograrlo. Hasta esta etapa se puede ya ir avizorando la limitación de la LSM para la comprensión de las nociones matemáticas y la necesidad de introducir el lenguaje escrito como una herramienta fundamental para el .

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barojas, A. (2014). *Comprensión de nociones del sistema métrico decimal mediada por la LSM en el aula de sordos [17 – 21]: Estudio de casos*. Tesis de Maestría no publicada, CINVESTAV, IPN, México.

Boltyanskii, V. (1973) *Figuras equivalentes y equidescomponibles*. México: Limusa Wiley

Cruz, M. (2008). *Gramática de la lengua de señas mexicana.* México: Colegio de México.

Garnica I. & M. Astorga & Barojas A..(2014). Uso de la lSM en el aula de sordos y comprensión del sistema métrico decimal. Edades [17-22] *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 27. p697 – 705.

Garnica, I. & M, Astorga & Barojas A. (2013). LSM en la adquisición de cantidad de

magnitud: masa y longitud. Jóvenes [16-21] con audición diferenciada. En Flores, R (ED.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26*, 709–716.

Moise, E. (1980). *Geometría elemental desde un punto de vista avanzado*. México: Continental

Osborne, A. y Wilson P. (1988). *Foundational Ideas in Teaching about Measure. En: Teaching Mathematics in grades k-8.Research Based Methods*. Edited 1998, Allyn and Bacon Inc. USA

Stake, R.E. (2010). *Investigación con estudio de casos*. España. Ediciones Morata, S.L.

Turégano, P. (1993) De la noción de área a su definición: investigación histórica sobre la técnicas, métodos y conceptos que condujeron a la teoría de la medida. (11) Cuenca: Servicio de publicaciones de la universidad de Castilla - La mancha.

UNA CARACTERIZACIÓN DE ACTITUDES HACIA LO PROPORCIONAL DESDE UNA PERSPECTIVA SOCIOEPISTEMOLÓGICA

María S. García González, Rosa María Farfán Márquez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (México)
mgargonza@gmail.com, rfarfan@cinvestav.mx

Palabras clave: actitudes, socioepistemología, proporcionalidad

Key words: attitudes, socioepistemology, proportionality

RESUMEN: El objetivo de investigación planteado es caracterizar las actitudes hacia las matemáticas desde la perspectiva Socioepistemológica. Esto supuso la consideración de un objeto de actitud particular, un saber matemático: la proporcionalidad. Para provocar las actitudes y estudiarlas, se diseñaron situaciones de aprendizaje basadas en las tareas de mezcla, escala, razón y proporción. El trabajo experimental se llevó a cabo con un grupo de estudiantes mexicanos de último grado de Educación Secundaria (12-13 años).

Este reporte da cuenta de las tareas de mezcla. Como resultado del análisis encontramos que la actitud hacia las tareas de mezcla se caracteriza por las emociones desencadenadas al resolver la situación de aprendizaje, la visión de ésta y la autoeficacia del estudiante.

ABSTRACT: The aim of this research is to characterize the attitudes towards mathematics from the Socioepistemological perspective. This involved the consideration of a particular object attitude, the proportionality. To provoke attitudes and to study them, we designed learning situations based in mixture tasks, scale tasks and ratio and proportion tasks. The experimental work was conducted with a group of Mexican students of last grade of Secondary Education (12-13 years). This report realizes mixture tasks. As a result of the analysis, we found that the attitude toward mixture tasks is characterized by emotions triggered by solving the learning situation, the vision of this student and the self-efficacy.

INTRODUCCIÓN

Con el paso de los años, la investigación sobre actitudes hacia las matemáticas ha crecido y se le ha relacionado con otros constructos como las creencias y las emociones. Ha sido estudiado desde los niveles escolares básicos hasta los superiores, teniendo como población de estudio estudiantes y profesores (García y Farfán, 2014).

Entre los resultados más relevantes se pueden mencionar que éstas juegan un papel relevante en el aprendizaje de las matemáticas (Di Martino & Zan, 2009; Gómez-Chacón, 2010; Hannula, 2002; McLeod, 1992). También se ha hablado de una correlación entre la actitud y el rendimiento, sin embargo ésta ha sido cuestionada, por ejemplo Ma y Kishor (1997), muestran que la correlación entre la actitud y el rendimiento es estadísticamente no significativa, y los resultados obtenidos en diferentes estudios a menudo no son comparables e incluso contradictorios. Reconociendo que la actitud influye en el aprendizaje de las matemáticas nos hemos propuesto estudiarlas.

La investigación en curso se realiza desde la perspectiva Socioepistemológica, esto supuso una elección metodológica en la investigación: situar un saber matemático como objeto de actitud y no la matemática per se, de esta manera el objetivo de la investigación es caracterizar las actitudes de estudiantes hacia lo proporcional. Enfocarnos en este saber obedeció a que consideramos que su particularidad nos ayudaría a explicar más concretamente los factores que desencadenan la actitud. La elección de este saber es debida a que se aborda en los tres años de educación Secundaria en México, además de la complejidad y dificultad de los estudiantes para apropiarse de este saber (Reyes, Montiel y Cantoral, 2014). La pregunta de investigación que guía el trabajo de investigación es: ¿Qué actitudes se manifiestan hacia lo proporcional?

MARCO TEÓRICO

La Socioepistemología

La Teoría Socioepistemológica tiene como objetivo estudiar la construcción de conocimiento matemático situado, es decir, aquel que atiende a las circunstancias y a escenarios socioculturales particulares. Por lo que el conocimiento matemático se asume como el fruto de las interacciones entre epistemología y factores sociales (Cantoral, 2002).

Además de acuerdo con Cantoral (2013) factores como la motivación, la afectividad, la imaginación, la comunicación, los aspectos lingüísticos o culturales desempeñan un papel fundamental en la conformación de las matemáticas entre los estudiantes. Debido a estas premisas teóricas nos propusimos el estudio de la actitud tomando como fundamentos los principios de la teoría Socioepistemológica.

De acuerdo a la literatura especializada un pensador proporcional no puede ser identificado como alguien que puede resolver mecánicamente una proporción, ya que el uso de algoritmos como la multiplicación cruzada, o los métodos aditivos, indican que no todas las personas que resuelven correctamente un problema que involucran proporciones necesariamente utilizan el razonamiento proporcional (Modestous & Gagatsis, 2010). Por el contrario, es la capacidad de decidir si un problema se resuelve mediante la aplicación de proporción directa, proporción inversa, el razonamiento aditivo, o cualquier otra relación numérica lo que es esencial para el razonamiento proporcional.

Por nuestra parte llamaremos *lo proporcional* a la capacidad de decidir la estrategia óptima al enfrentarse a un problema de proporcionalidad, dicha estrategia es el reconocimiento de la relación multiplicativa. Reconocemos que lo proporcional incluye aspectos culturales, históricos, institucionales y afectivos.

Las herramientas para estudiar la actitud

Para estudiar las actitudes hacia la proporcionalidad se diseñaron Situaciones de Aprendizaje (SA). Una situación de aprendizaje Socioepistemológica es "aquella situación problemática que nos permite favorecer el desarrollo del proceso de aprendizaje" (Cabrera, 2009 p. 59). De acuerdo con este autor, la característica más importante de las SA es que éstas no deben comunicar al estudiante el conocimiento del cual se espera se apropie, y deben de tomarse en cuenta los antecedentes escolares con los que se espera que el estudiante haga frente a la SA.

Las SA privilegian la diversidad de las argumentaciones y se considera a la matemática como la herramienta que ayuda a la toma de decisiones. Las respuestas y argumentaciones del estudiante se consideran válidas por el principio de la racionalidad contextualizada, éstas depende de su interpretación, el relativismo epistemológico y el fomento de una resignificación de los conocimientos previos de los estudiantes. Para el diseño de las SA se consideraron los resultados de la problematización de la proporcionalidad (Reyes, 2011; 2013 a; 2013 b), algunos resultados puntuales de las investigaciones del objeto de actitud y diferentes marcos de referencia de la proporcionalidad. En total se diseñaron 7 SA y 3 se retomaron de la literatura existente, 4 de ellas de tareas de mezcla, 3 de escalas y 3 de razones y proporciones. En este escrito se da cuenta de las tareas de mezcla, ejemplificando con una SA particular.

El estudio de la Actitud desde la Perspectiva Socioepistemológica

Desde nuestra perspectiva teórica, un individuo aprende matemáticas cuando es capaz de poner en uso los conocimientos matemáticos adquiridos, esto es, los conocimientos para ser construidos activamente por el sujeto, individual o colectivamente, requieren del uso, que da sentido al conocimiento, y de herramientas y argumentos, que tipifican al usuario y a las situaciones de aprendizaje, escolares o no, pero ligadas a la vida real donde se pongan en uso dicho conocimiento (Cantoral, 2013). En esta postura sobre la construcción de conocimiento matemático en lugar de una adquisición, no podemos negar la naturaleza humana del individuo y colectivo, constituida de una gran carga afectiva, en particular direccionamos el estudio hacia un constructo particular del afecto: las actitudes.

La revisión de los estudios sobre el constructo actitud en Matemática Educativa (García y Farfán, 2014) nos permitió concluir tres cosas: 1) Las "matemáticas" a las que estos estudios se refieren son las enseñadas en ciertos niveles académicos, a veces divididas en ramas de las matemáticas (Aritmética, Álgebra, Estadística); desde este punto de vista, se ha observado que las actitudes de los estudiantes varían en función de la rama matemática específica. 2) La tendencia a considerar las actitudes como una medida de gusto o disgusto hacia las matemáticas prevalece. 3) La actitud se estudia a través de metodologías cuantitativas (escalas, cuestionarios), metodologías cualitativas (por ejemplo, biografías, entrevistas narrativas) o una mezcla de ambas.

Respecto a 1, consideramos que los saberes matemáticos escolares tienen naturalezas diferentes y por tanto pueden ser más o menos proclives a generar actitudes, por ello al pretender hacer una

caracterización de actitudes hacia las matemáticas tendría que considerarse que la matemática contempla diferentes saberes, por esta razón decidimos tomar como objeto de actitud a la proporcionalidad y en torno a ella caracterizar las actitudes de los estudiantes. Respecto a 2, consideramos que la actitud no es una medida centrada en dos polos, gusto (positivo) y disgusto (negativo), por ello la hemos definido como la *valoración que hace el estudiante de la actividad matemática (objeto de actitud) resuelta y que se manifiesta por una predisposición hacia ella*.

Previmos que la valoración que realice el estudiante esté influenciada por lo que conoce del saber matemático en cuestión y lo que ha sentido en determinados momentos similares en la clase de matemáticas, es decir creencias y emociones estarán presentes en sus valoraciones.

Participantes y Contexto

Para conocer las actitudes de los estudiantes se desarrolló un taller denominado "Trabajando con situaciones de aprendizaje" al que asistieron 20 estudiantes (10 mujeres y 10 hombres.) de una escuela secundaria del Distrito Federal, en México. El taller realizado en las instalaciones del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, tuvo una duración de 10 sesiones de 1.5 horas, en cada sesión se trabajaron las Situaciones de Aprendizaje diseñadas, las sesiones fueron filmadas previo consentimiento de los estudiantes y sus padres de familia. Esto con el fin de observar sus reacciones en el trabajo con las situaciones.

Aunado a lo anterior, se les entrevistó individualmente con el fin de cuestionarlos acerca del trabajo con la situación de aprendizaje, y algunos aspectos de tipo académico, como su vida en la escuela; familiares, como la relación que tienen con sus padres; personales, como su vida fuera de la escuela. Esto último para triangular información sobre la observación realizada de la Situación de aprendizaje.

La Situación de Aprendizaje en Tareas de mezcla

Esta SA tenía como intención que los estudiantes trabajaran con dos formas de representación importantes en el razonamiento proporcional, 1) la razón (2 litros de jarabe de jamaica para 3 litros de agua) y 2) la fracción (1/4 de litro de jarabe de jamaica). Y es que de acuerdo a la literatura, cuando el razonamiento proporcional se basa en el reconocimiento de las relaciones (razón), el lenguaje razón parece tener vínculos transparentes entre la representación y el razonamiento. Por otra parte, las fracciones son los primeros números racionales que la mayoría de los estudiantes encuentra, a decir de Howe, Nunes y Bryant (2011) tienen la ventaja de la familiaridad.

Enseguida presentamos a manera de ejemplo uno de los problemas planteados en la SA de mezcla, ésta fue resuelta en parejas.

Figura 1. Situación de Aprendizaje "Una fiesta Familiar". Diseño propio.

Una fiesta familiar

Instrucciones: Reunidos en pareja discutan con respeto y tolerancia los argumentos de cada uno y den repuesta a las preguntas planteadas.

La situación: César y Tere se propusieron ayudar en los preparativos de la fiesta anual familiar. Ana su hermana mayor les dijo que podrían preparar el agua de sabor mientras ella va a comprar los vasos desechables. Ana les dejó 10 litros de jarabe de jamaica endulzado a los cuales solo tendrán que agregar agua natural para preparar el agua de jamaica. Ana les pidió que no desperdiciaran el jarabe y que la mezcla que prepararan no perdiera el sabor a jamaica.

Tere dice que como en total son 20 familiares, incluyéndose ellos, 20 litros de agua de jamaica alcanzarán entonces solo hay que agregar otros 10 litros de agua natural y el agua de jamaica estará lista.

César no está de acuerdo con la decisión de Tere, él cree que deben de buscar otras opciones. Discutiendo un rato llegaron a proponer dos maneras de preparar el agua de jamaica.

Propuesta de Tere	
Jarabe de jamaica	2 litros
Agua natural	3 litros

Propuesta de César	
Jarabe de jamaica	3 litros
Agua natural	5 litros

Para analizar

1.- ¿Están de acuerdo con que agregar 10 litros de agua como lo propone Tere es suficiente?, ¿Por qué creen que César no estuvo de acuerdo?

2. Observen las propuestas que al final dan Tere y César y decidan cuál es la mejor, recordando lo que Ana les ha pedido. ¿Cuál de las dos propuestas es mejor para preparar el agua de Jamaica? Justifiquen su respuesta.

3.- Si son 20 familiares los que asisten a la fiesta ¿Cuánta agua bastará preparar? ¿Por qué?

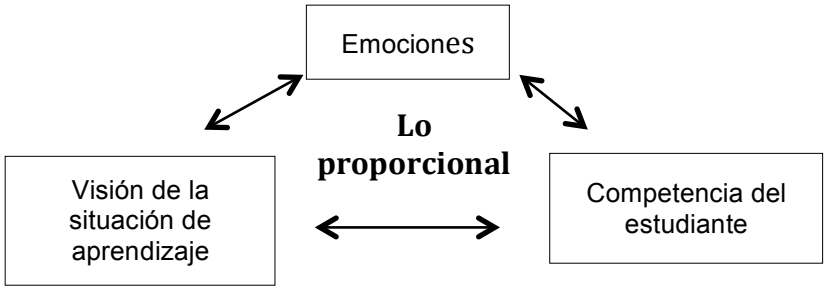
4.- Si tuvieran que preparar ustedes la cantidad de agua que anotaron en la pregunta 3, que tendrían que hacer con la propuesta que han elegido en la pregunta 2, para preparar esa cantidad de agua.

ANÁLISIS DE DATOS

Al revisar antecedentes sobre estudios de actitud en Matemática Educativa, encontramos una investigación que caracteriza a la actitud hacia las matemáticas, particularizando en la actitud negativa (Di Martino y Zan, 2009; 2011). Esta caracterización usa el método de la Teoría Fundamentada para analizar las narraciones de estudiantes de educación básica y bachillerato en Italia sobre su historia con las matemáticas. Como resultado del análisis se reconocen tres formas en las que la actitud se manifiesta y de las que también se compone: la dimensión emocional, la visión de las matemáticas y la competencia percibida.

Decidimos retomar esta caracterización y usarla como aproximación a nuestro estudio de la actitud hacia la proporcionalidad. Sin embargo como nuestro objeto de actitud difiere del objeto de esta caracterización, la reformulamos (Figura 2).

Figura 2. Caracterización de la actitud (Reformulación de Di Martino y Zan, 2009).



Hablamos de tres componentes de la actitud: Emociones al resolver la situación de aprendizaje, Visión de la situación de aprendizaje y Competencia del estudiante en la situación de aprendizaje.

Usamos como método de análisis la Teoría Fundamentada, que ofrece un conjunto de estrategias flexibles para recolectar y analizar datos cualitativos, mediante ellas se pueden crear categorías teóricas fundamentadas directamente en los datos, a través de la comparación constante con los mismos datos.

De las producciones de los estudiantes tomamos 5 de cada situación, que corresponden a 5 estudiantes (3 hombres y dos mujeres) que fueron los más constantes en el taller. Siguiendo las directrices de la Teoría Fundamentada se llevaron a cabo tres fases en el análisis: codificación abierta, codificación axial y codificación selectiva.

En sus primeras formulaciones, la Teoría Fundamentada señala que la teoría emergerá de los datos en sí, y que se pueden o no hacer relaciones con la literatura existente en la disciplina en la que se realiza el estudio. Últimamente se aplican diferentes variaciones de éste (Grbich, 2013). Por ejemplo se puede usar este método aun teniendo un modelo previo para el análisis, a reserva de que haya sido obtenido por este mismo método de codificación de datos. Este es nuestro caso, pues el modelo que hemos retomado de la caracterización de las actitudes proviene de este enfoque.

Tomando como referencia la caracterización de actitudes preestablecidas, en la codificación abierta identificamos en la evidencia las categorías de esta caracterización, para ello fuimos etiquetando con palabras (códigos) lo que en la evidencia daba cuenta de, emociones, visión de la situación o competencia del estudiante.

Tabla 1. Ejemplo de codificación abierta, tarea de mezcla.

Emoción	Propiedades	Evidencia
Estar contento	Tener la respuesta (la buena mezcla depende del sabor)	Hablando de las propuestas de Tere y César [Se le cuestiona después de terminar la actividad, retomo un comentario que hizo en la sesión anterior] M: En la clase anterior dijiste que *hay que echar más sabor*. M2: *Pero era naranja*, la naranja de bonafina *está menos fuerte comparada con el sabor del concentrado*. M: Entonces, ¿depende del sabor del agua? M2: Sí, yo creo que sí [**sonríe**], *la mejor propuesta es la que sepa mejor*, a Jamaica, pero no muy fuerte. Por eso la de César es la mejor.

En la codificación axial, identificamos relaciones entre conceptos y encontramos las siguientes regularidades en las tareas de mezcla, denominados desde la Teoría Fundamentada, procesos:

Procesos de Acontecimientos

P2: El diseño de la actividad favorece su visión (relacional/instrumental).

P3: El contexto de la actividad favorece su visión (escolar/familiar).

P5: El pensamiento cualitativo es usado en las tareas de mezcla cuando se trata de elegir la mejor mezcla.

P7: La mejor mezcla es aquella que satisfaga un buen sabor, una buena relación entre las variables (menos agua/más jugo, más agua/menos concentrado).

P10: Cuando se tiene que modificar una razón (duplicar, mitad) se identifica una unidad de medida, usando pensamiento aditivo y multiplicativo.

Procesos de Relación

P1: Vínculo entre la competencia percibida (hacer+/no hacer -, argumentar) y las emociones

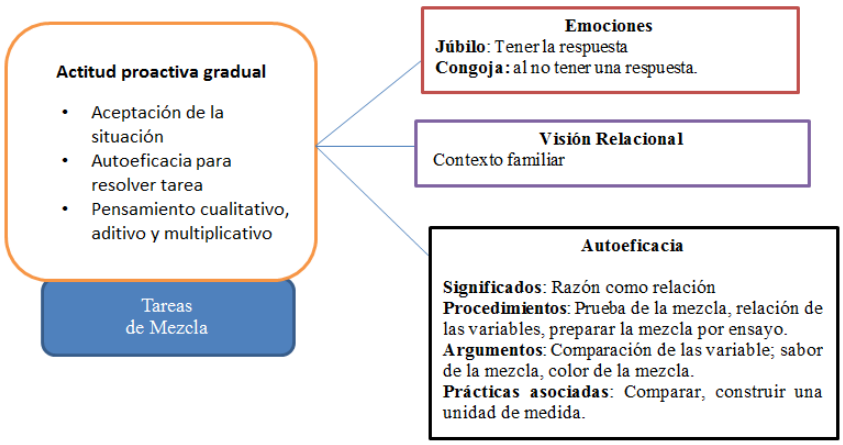
P4: Vínculo entre la visión de la situación (relacional/instrumental) y la competencia.

En la codificación selectiva pretendimos darle objetividad a nuestro análisis por medio de la integración de literatura, de acuerdo a los principios de la Teoría Fundamentada la literatura se puede usar para confirmar hallazgos y, al contrario, los hallazgos se pueden usar para ilustrar dónde la literatura es incorrecta o demasiado simplista, o para explicar parcialmente los fenómenos. Traer la literatura a la escritura no solamente demuestra erudición, sino que permite extender, validar y refinar el conocimiento del área (Strauss & Corbin ,2002). Las propiedades identificadas en la codificación así como los procesos nos estimularon a hacer confrontaciones con lo que en la literatura sobre dominio afectivo se ha señalado, particularizamos en las emociones, la

competencia del estudiante y la visión de la situación, con el fin de dar explicaciones de las actitudes que encontramos en el análisis realizado.

En esta etapa refinamos las categorías obteniendo la siguiente caracterización de actitudes:

Figura 3. Caracterización de la actitud en las tareas de mezcla.



ACERCA DE LOS RESULTADOS

Hemos identificado en los problemas de mezcla una actitud proactiva gradual caracterizada por tres factores: emociones, visión de la SA y autoeficacia. Esta caracterización difiere de la reportada en la literatura, esencialmente centrada en la matemática en general como objeto de actitud.

Las emociones son desencadenadas por dar o no respuesta a los problemas planteados en la SA. La visión relacional de la SA obedece a que los contextos planteados en ella les son familiares al estudiante, el saber como conocimiento en uso, desde nuestra perspectiva teórica, preparar agua es algo que han hecho alguna vez. Esto es reportado en la literatura como una de las variables que influye en los problemas de mezclas, parece que estar familiarizado con los contextos del problema los convierte en problemas más fáciles (Noelting, 1980). En la visión de la SA influye la evaluación de la actividad, que en todas los casos fueron evaluadas como “fácil” porque no tuvieron que hacer cálculos matemáticos complejos, por ejemplo en la SA ejemplificada, donde sólo hicieron algunos, como duplicar, triplicar o cuadriplicar la propuesta de Tere.

La autoeficacia, se refiere a la creencia del estudiante en sus conocimientos y habilidades para enfrentar la SA. Esta jugó un papel muy relevante, pues quienes tenían más confianza en sus conocimientos fueron los estudiantes que resolvieron satisfactoriamente las SA involucrándose en el desarrollo de éstas individual y colectivamente, siendo los que conducían la SA. Por el contrario, los estudiantes con menos autoeficacia, fueron dejándose conducir por los primeros en el desarrollo de las SA. Este resultado coincide con una hipótesis planteada por Tourniaire & Steven (1985), respecto al afecto y la proporcionalidad, a decir de estos autores podría ser que quienes son mejores en matemáticas tengan mejores actitudes, o podría ser que los estudiantes con

mejores actitudes muestren más persistencia en el problema de dificultad y, tengan por tanto más posibilidades de éxito.

Con esta caracterización encontrada pretendemos validar las tareas de escalas y razón y proporción, para comprobar su coherencia.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cabrera, L. (2009). *El pensamiento y lenguaje variacional y el desarrollo de competencias, Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav, DF, México.

Cantoral, R. (2002). La sensibilidad a la contradicción: Un estudio sobre la noción de logaritmo de números negativos y el origen de la Variable Compleja. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 15, 1, (pp. 35-42). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. España: Gedisa.

Di Martino, P. & Zan, R. (2009). 'Me and maths': towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal Mathematics Teacher Education* 13, 27–48.

Di Martino, P., & Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: a bridge between beliefs and emotions. *Zdm*, 43(4), 471–482.

García M.S & Farfán R. M. (2014). Actitudes de estudiantes de secundaria hacia las matemáticas. En Lestón, P. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27*, 163-170. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Gómez-Chacón, I. (2010). Actitudes de los estudiantes en el aprendizaje de la matemática con tecnología. *Enseñanza de las Ciencias 28(2)*, 227-244.

Grbich, C. (2013). *Qualitative data analysis: An introduction.* California: Sague Publications.

Hannula, M. (2002). Attitude towards mathematics: Emotions, expectations and values. *Educational studies in Mathematics* (49), 25–46.

Howe, C., Nunes, T., & Bryant, P. (2011). Rational number and proportional reasoning: Using intensive quantities to promote achievement in mathematics and science. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9, 391-417.

Ma, X. & Kishor, N. (1997). Assessing the relationship between attitude toward mathematics and achievement in mathematics: A meta-analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(1), 27-47

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. In D. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.575-596). New York: McMillan Publishing Company.

Modestou, M. & Gagatsis, A. (2010). Cognitive and meta–cognitive aspects of proportional reasoning. *Mathematical Teaching and Learning* 12(1), 36–53.

Noelting, G. (1980).'The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part I - Differentiation of stages, *Educational Studies in Mathematics* 11, 217- 253.

Reyes, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemólogica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav, DF, México.

Reyes, D. (2013 a). *La transversalidad de la proporcionalidad*. Serie. México: Secretaría de Educación Media Superior.

Reyes, D. (2013 b). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para el cambio y la mejora educativa*. Memoria Predoctoral no publicada. Cinvestav, IPN. DF, México.

Reyes, D., Montiel, G. & Cantoral, R. (2014).Cuando una crece, la otra decrece... ¿proporcionalidad inversa o directa?, *Premisa* 16(62), 1-13.

Strauss & Corbin (2002). Basics of qualitative research. Techniques and procedures for developing grounded theory. (E. Zimmerman, traductora). Colombia: Imprenta Universidad de Antioquia. (Trabajo original publicado en 1998).

Tourniaire & Steven (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics* 16, 181-204.

EL DESARROLLO DE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA, SU EPISTEMOLOGÍA Y CARACTERÍSTICAS

Roberto Byas, Ramón Blanco Sánchez
Universidad Autónoma de Santo Domingo (República Dominicana), Universidad de Camagüey (Cuba)
robertobyas@hotmail.com, ramón.blanco@reduc.edu.cu

Palabras clave: geometría, enseñanza, epistemología

Key words: geometry, education, epistemology

RESUMEN: El presente trabajo es un estudio histórico lógico de las diferentes teorías o enfoques fundamentales en la enseñanza de la geometría a partir de 1980, aunque algunos de estos tuvieron sus orígenes antes de esta fecha. En el referido estudio, el proceso enseñanza aprendizaje de la Geometría Euclidiana se analiza como parte de este proceso en la Matemática, dado que en la geometría como rama de la Matemática, son aplicables los métodos y enfoques generales del proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática.

ABSTRACT: The present work is a logical historical study of the different theories or fundamental focuses in the teaching of the geometry since 1980, although some of these approaches had its origins before this date. In the referred study, the teaching learning process of the Euclidian Geometry is analyzed as part of this process in the Mathematics, since in the geometry like branch of the Mathematics, the methods and general focuses of the Mathematics' teaching learning process, are applicable.

INTRODUCCIÓN

Como es conocido en el año 1959, se celebró el coloquio de Royaumont, convocado por la Organización Europea de Cooperación Económica (OECE) con el objeto de promover una reforma de los contenidos y de los métodos de enseñanza de la Matemática. Finalizado dicho coloquio la OECE convocó a unos expertos para que elaboraran el denominado Programa Moderno de Matemática para la Enseñanza Secundaria, manifiesto ideológico de los defensores de la Matemática Moderna, guiados por el lema atribuido a J. Dieudonné de "Abajo Euclides", citado por Bombar (2011) +que proponía la inclusión de la teoría de Conjuntos y el Álgebra en la enseñanza elemental en detrimento de la Geometría Axiomática (Euclídea).

A principio de los años 70 se comprendió por la comunidad internacional que el lenguaje geométrico desempeña una función intermedia entre la del lenguaje coloquial y la del lenguaje matemático formalizado en el ámbito de la elaboración conceptual (simulación) de los procesos del mudo externo. Se llegó a consenso en que la Geometría Euclidiana representa una fase insustituible en el desarrollo de la racionalidad humana. Por fin a principio de los 80 la Matemática Moderna en las escuelas era historia en prácticamente todo el mundo y se retomaba la Geometría Euclidiana (Barrantes y Balletbo, 2011, 2012, González, 2011).

La situación señalada en los párrafos anteriores, ha sido referida en un número considerable de trabajos sobre el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática, por lo cual se considera pertinente analizar el estado del arte a partir de 1980, dado que en esta fecha se había retomado la enseñanza de la Geometría Euclidiana, de manera general en prácticamente todos los países.

DESARROLLO

Es menester contextualizar el proceso enseñanza aprendizaje de la Geometría Euclidiana dentro del proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática, ya que por ser la primera una rama de la segunda, ambas presentan una ontología y epistemología análogas, además de que la estructura sistémica de la matemática implica que su metodología también presente un carácter sistémico.

A partir de los años 80 se aprecia cierta variedad de enfoques para llevar a cabo el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática, y aunque algunos de los mismos se originaron antes de esta fecha es menester tenerlos en cuenta, dado que en algunos casos se mantienen vigentes y en otros presentan fundamentos teóricos que no deben ser ignorados en la práctica pedagógica.

Entre estos métodos es notorio el método basado en la resolución de problemas, el cual es anterior a los años 80 y tuvo como principal promotor a Polya ( ), este método se ha mantenido hasta la actualidad aunque ha perdido esplendor a pesar de que existen muchos trabajos al respecto, y se continúa trabajando sobre el tema (Blanco Nieto y Cárdenas Lizarazo, 2013, Artigue y Houdement, 2007, Castro, 2008, Díaz y Poblete, 2013), pero sin lograr los resultados esperados, aunque de un modo u otro la resolución de problemas es parte integrante de la Matemática en sí misma, Se puede decir sin lugar a dudas que la resolución de problemas es un método clásico del trabajo con la Matemática y con mayor o menor énfasis aparece como parte de la mayoría de los diferentes enfoques existentes y en cualquiera de las ramas de la Matemática, en particular en la Geometría.

En los 80 también se aplicó, aunque su uso no fue muy extendido, el método problémico, que aplicado correctamente difería del método por problemas, pues lo que se trataba era de encontrar

situaciones donde los conocimientos de los estudiantes no fueran suficientes para resolver la tarea planteada y así introducir el nuevo contenido. Este método buscaba fundamentalmente la motivación de los estudiantes.

También es necesario mencionar en esta etapa el llamado aprendizaje significativo debido a D. Ausubel (1983), en el cual se destacaba la necesidad de que el nuevo contenido se enlazara con el precedente, de modo que fueran comprendidos por el estudiante tanto la necesidad de dicho enlace como el enlace en sí mismo (Ausubel y Novak, 1983).

La esencia del aprendizaje significativo radica en que las ideas simbólicamente expresadas sean relacionadas de manera sustantiva y no arbitraria con lo que el aprendiz ya sabe, por lo que resulta de especial interés en la geometría. Los primeros trabajos de Ausubel aparecieron en 1978, pero tuvieron su etapa de mayor aceptación en los 80.

Se debe mencionar también la Teoría de Situaciones Didácticas, la cual se fundamenta en que el conocimiento puede ser determinado por una situación, producto de las interacciones que se dan en el proceso de formación del conocimiento matemático.

Según Brousseau (1986) existen dos tipos de interacciones: la interacción entre el alumno y un medio resistente, y la interacción entre el alumno y el docente. Esto se manifiesta también en el proceso enseñanza aprendizaje de la Geometría.

En geometría en particular es notorio el trabajo de los esposos Van Hiele, que tuvo sus inicios en la disertación de sus tesis doctorales en 1957 en la Universidad de Utrecht, Holanda.

El modelo de los Van Hiele se caracteriza por definir cuatro etapas en el proceso enseñanza aprendizaje de la geometría, estas son: Visualización, Análisis, Deducción informal, Deducción formal. (Mayberry, 1987). Aunque su trabajo estuvo fuertemente influido por la teoría piagetiana, que plantea la necesidad de esperar por el desarrollo biológico del estudiante.

Es necesaria la referencia a Chevallard (2006), dado que este estudioso de la materia, argumentó y fundamentó teóricamente el proceso de ajustar un contenido de la ciencia para convertirlo en contenido de una asignatura.

Los trabajos de este autor dieron lugar al concepto de transposición didáctica, se argumenta el paso del saber sabio (contenido de la ciencia) al saber enseñado (contenido de la asignatura) (Chevallard, 1985). Indica que un contenido del saber sabio que haya sido designado como saber a enseñar sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para tomar lugar entre los objetos de enseñanza.

El trabajo que en un objeto del saber se hace para transformarlo en un objeto de enseñanza, se llama transposición didáctica. Es requerido también en el proceso enseñanza aprendizaje de la Geometría.

La Teoría antropológica de lo didáctico (TAD) es otro enfoque a tener en cuenta. Esta teoría plantea modelar toda actividad humana mediante una herramienta fundamental llamada praxeología (praxis + logos), y considera a la Matemática como una actividad humana que puede describirse en términos de praxeologías u Organizaciones Matemáticas (OM) y los vínculos entre ellas (García y Ruiz, 2006).

En aras de proteger culturas específicas se desarrolló lo que se conoce como Etnomatemática.

Según D'Ambrosio (1999) se entiende como cuerpos de conocimiento establecidos como sistemas de explicaciones y como maneras de hacer, que han sido acumulados a través de las generaciones en ambientes naturales y culturales distintos.

Se propone como una práctica escolar válida que refuerza la creatividad, los esfuerzos, el auto-respeto cultural, y ofrece una visión amplia de la humanidad que tiende de forma creciente hacia el multiculturalismo. Se considera como un sistema de conocimientos que ofrece la posibilidad de crear una relación más favorable y armoniosa, tanto en la conducta humana como entre los humanos y la naturaleza.

Una referencia obligada aquí es la teoría APOE, en la cual Dubinsky (1996) y sus seguidores plantean que el proceso de apropiación del contenido comienza con acciones sobre objetos físicos o mentales, con un carácter algorítmico que termina por convertirse en un proceso, en el cual el estudiante debe llegar a identificar el objeto matemático y por último, este objeto debe ser incorporado por el estudiante en su esquema mental (Dubinsky, 1996). Objeto matemático que puede ser tanto algebraico como geométrico o de otro tipo.

Estas teorías o enfoques tienen como elemento común que todas buscan lograr la actividad del estudiante, procuran ponerlo como sujeto de su propio aprendizaje, aunque esta intención sea expresada en diferentes formas.

También se manifiesta en dichas teorías o enfoques el carácter social del proceso enseñanza aprendizaje, lo cual no resulta notable ya que teorías pedagógicas de relevancia como el constructivismo y el cognitivismo asumen el carácter social de dicho proceso. Aunque no se considera aquí necesario destacarlo, no se debe pasar por alto que el carácter social del proceso enseñanza aprendizaje es uno de los presupuestos básicos de la escuela Histórico-Cultural.

A partir de 1990, aunque varias de las teorías o enfoques anteriores se retoman por diferentes autores con mayor o menor frecuencia, en esta etapa una de las propuestas más relevantes resulta la Teoría de la Mediación Semiótica, propuesta por R. Duval, la cual debido a su fundamentación teórica ha encontrado respaldo en la comunidad científica que estudia el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática y en particular en el caso de la Geometría, dada la variedad de representación de los objetos geométricos.

Esta teoría articula dos elementos esenciales en el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática, por una parte el carácter no ostensivo de los objetos matemáticos y por otra el carácter mediatizado de la psiquis humana. (Vygotsky, 1993).

Uno de los elementos de esta teoría retomado con frecuencia en la literatura especializada es la siguiente: “por una parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser más que un aprendizaje conceptual y, por otra, es sólo por medio de representaciones semióticas que es posible un actividad sobre los objetos matemáticos…” (Duval, 2006b, p.38)

Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. ¿Cómo sujetos en fase de aprendizaje no podrían confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas si ellos no pueden más que tener relación solo con dichas representaciones? La imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, fuera de toda representación semiótica, vuelve la confusión casi inevitable, solo la actividad del estudiante con diferentes registros de representación puede salvar la situación.

Para este autor “ver” en matemáticas implica la identificación de las relaciones o la organización de relaciones entre las unidades representacionales que constituyen a una representación semiótica.

En la misma línea de trabajo aparece el Enfoque Ontosemiótico (EOS) de Godino (1994) y sus seguidores el cual tiene muchos puntos de contactos con la Teoría de la Mediación Semiótica (TMS), no obstante no se produce ningún tipo de acercamiento entre ambas escuelas que pudiera conducir a una teoría consistente sobre la cual desarrollar el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática.

En el EOS la noción de significado y sentido dejan de ser entidades etéreas y misteriosas. El significado de un objeto matemático es el contenido de cualquier función semiótica y el sentido se puede interpretar como un significado parcial, esto es, se refiere a los subsistemas de prácticas relativos a marcos o contextos de uso determinado (Godino y Batanero, 1994).

Aunque lo que caracteriza esta etapa es la materialización semiótica de los objetos matemáticos, las teorías al respecto no llegan a prevalecer en la comunidad científica, pues otros enfoques siguen siendo retomados, un ejemplo concreto es el enfoque Acción-Proceso-Objeto-Esquema (APOE) de E. Duvinsky.

Ya en la etapa posterior al 2000, aunque no de manera exclusiva, pero con un gran peso en la bibliografía especializada, está la materialización semiótica de los objetos matemáticos. En esta etapa se incrementa el predominio de los trabajos de R. Duval y J. Godino y se trabaja además por otros autores.

Es de destacar que en esta etapa tanto el Enfoque Ontosemiótico como la Teoría de la Mediación Semiótica se consolidan, no solo con trabajos de sus fundadores principales, sino porque, como se señala en el párrafo anterior, otros autores también desarrollan trabajos al respecto.

Todo lo cual conduce a que sea aceptado por muchos especialistas en la materia, que no puede haber comprensión en Matemática si no se distingue un objeto de su representación. No se deben confundir nunca los objetos matemáticos (números, funciones, rectas, etc.) con sus representaciones (escrituras decimales o fraccionarias, los símbolos, los gráficos, los trazados de figuras, etc.), dado que un mismo objeto matemático puede darse a través de representaciones muy diferentes.

Es de interés destacar la interrelación que se produce cuando Duval (2006a) plantea que la pluralidad de sistemas semióticos permite una diversificación tal de las representaciones de un mismo objeto, que aumenta las capacidades cognitivas de los sujetos y, por tanto, de sus representaciones mentales. A esto se agrega lo planteado por Vigotsky al expresar que el uso de los símbolos no es para producir cambios en el objeto que el signo representa, sino en el sujeto que lo utiliza.

En esta etapa los trabajos de Radford (2002), entre otros, argumentan científicamente la importancia de la transferencia de registros semióticos, además en sus trabajos vincula la representación semiótica al carácter mediatizado de la psiquis humana, con lo cual convienen los autores del presente trabajo (Radford, 2002, 2003).

El estudio realizado permite asegurar que existe suficiente aval en la teoría sobre el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática, para poder apreciar que la apropiación conceptual resulta de la actividad del estudiante con el objeto matemático, actividad que no puede ser de otra

forma que a través de la materialización semiótica de estos objetos y los correspondientes cambios de registros, dado que como expresa la máxima de Vigotsky (1993), que el concepto en forma acabada no puede ser puesto en la mente del estudiante.

Incluso autores importantes, como lo es Sfard, (2008), aunque no habla de registros de representación, su enfoque asume que las herramientas simbólicas y otros medios de representación usados en el proceso de aprendizaje no solo operan como elementos externos de representación, que pueden ser desechados una vez que su función representacional ha sido completada, sino que el uso de esas herramientas tiene efecto a largo término en el pensamiento matemático del estudiante.

CONCLUSIONES

El presente estudio no pretende restar importancia a aquellas teorías o enfoques que no tienen en cuenta la transferencia de registros semióticos, dado que todas ellas son utilizables en situaciones específicas. En particular la resolución de problemas y las transposiciones didácticas siempre están, o deben estar, presentes en la clase de Matemática.

Pero dado el carácter no ostensivo de los objetos matemáticos y el carácter mediatizado de la psiquis humana, el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática en general y de la geometría en particular, no debe ser desarrollado usando solo un registro de representación para cada objeto estudiado, dado que cada representación semiótica pone de manifiesto solo determinadas características del objeto estudiado.

Se afirma, por último, que la apropiación conceptual de los estudiantes, depende de las posibilidades de estos de expresar el concepto en diferentes registros de representación, e incluso que sean capaces de usar la representación más adecuada al problema que se resuelve.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. y Houdement, C. (2007). Problem solving in France: didactic and curricular perspectives. ZDM *Mathematics Education* 39: 365–382. 27.

Ausubel, D. y Novak, J. (1983). *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. 2° Ed. TRILLAS México.

Barrantes, M. y Balletbo, I. (2011). La enseñanza – aprendizaje de la geometría en revistas científicas españolas de mayor impacto de la última década. Gobernación de Misiones – Universidad Nacional de Pilar. Asunciòn, Paraguay: Litocolor S.R.L.

Barrantes, M. y Balletbo, I. (2012). Referentes principales sobre la enseñanza de la geometría en Educación Secundaria. *Campo Abierto*, vol. 31 nº 2, pp. 139-153.

Blanco, L. y Cárdenas, J. (2013). La Resolución de Problemas como contenido en el Currículo de Matemáticas de Primaria y Secundaria. *Campo Abierto*, vol. 32 nº 1, pp. 137-156.

Bombal Gordón, F. (2011). *Nicolás Bourbaki: El Matemático Que Nunca Existió*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Vol. 105, Nº. 1, pp 77-98.

Brousseau, G. (1986): Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, *Trabajos de*

Matemática, No. 19.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII. Actas del Duodécimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 113-140).

Chevallard Y. (1985). La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné, Grenoble, La pensée sauvage. 1985.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. En Bosch, M. (Ed.) *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 4). (pp. 21-30). Barcelona: FUNDEMI-IQS.

D'Ambrosio (1999): La Transferencia del Conocimiento Matemático a las Colonias: Factores Sociales. *Políticos y Culturales*. *Llull,* vol. 22.

Díaz V. y Poblete A. (2013). Resolución de Problemas en Matemática y su Integración con la Enseñanza de Valores Éticos: el caso de Chile*. Bolema, Rio Claro* (SP), 27(4), 117-141.

Dubinsky, E. (1996). A framework for research and curriculum development in Undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.) *Research in Collegiate Mathematics Education* (pp.1-32).

Duval, R. (2006a). Les conditions cognitive de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnement. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* 10, pp.5-53. 36.

Duval, R. (2006b). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

García, B. y Ruiz, G. (2006). La modelización matemática y el problema de La articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática*, 18(2), 57 – 69. 120. 74.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.

González León, J. L. (2011). Estrategia didáctica para el desarrollo de habilidades geométricas en el primer ciclo de la educación primaria. Tesis doctoral. Cienfuegos. Cuba.

Mayberry, J. (1987). The Van Hiele levels of geometric thought in undergraduate pre service teachers. *Journal for Research in Mathematics Educatio*n, 14(1), 58-69. 145.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14-23.

Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning,* 5(1), 37-70. 171.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating*. Cambridge: Cambridge University Press.

Vygotsky, L. (1993). *Pensamiento y lenguaje* (J. M. Bravo, Tras.) Obras escogidas II (Vol. 2). Madrid: Visor.

LA RECTA TANGENTE DESDE UN ENFOQUE VARIACIONAL: UNA EPISTEMOLOGIA DE PRÁCTICAS

Luis Arturo Serna Martínez, Gisela Montiel Espinosa y Apolo Castañeda Alonso
CICATA-IPN (México), CINVESTAV-IPN, México
luisarturo_sernamartinez@yahoo.com.mx, gisela.montiel@gmail.com, apcastane@gmail.com

Palabras clave: recta tangente variacional, resignificación, herramienta matemática

Key words: variational tangent line, resignification, mathematical tool

RESUMEN: Con base en la Socioepistemología se diseñaron cinco secuencias didácticas relativas a la recta tangente. Se utilizó a la historia de las ideas matemáticas como un recurso para detectar el uso que da significado a la recta tangente. La historia nos permitió reconocer el uso de herramientas matemáticas para llevar a cabo actividades y en esta relación herramienta-actividad se fueron construyendo significados; se asume que dicho enfoque resulta una adecuada mediación gráfica entre la recta tangente, la propiedad de tangencia y la noción de derivada.

ABSTRACT: Five didactic sequences using the Socioepistemological Theory of Mathematics Education were designed. History was considereted with the intention of recognizing the moments where different ideas that, by resignifying, would build the variational tangent line were detected. History allowed us to recognize the use of mathematical tools, in order to carry out activities. In this relationship between tool and activity meanings were built; which they were also reflected in the responses of those attending the workshop. In turn we could also make use of the variational tangent line as a tool that allowed the arrival of the notion derived from a graphic view.

ANTECEDENTES

La materia de Cálculo Diferencial (CD) es cursada por estudiantes que tienen en promedio entre 17 y 18 años de edad en el sistema escolar mexicano, su estudio posibilita la conexión entre las matemáticas elementales y las avanzadas, caracterizadas estas últimas por el estudio de los procesos infinitos; sin embargo hay reportes de investigación que muestran que los estudiantes que ingresan a la universidad lo hacen con serias deficiencias en los temas tratados en Cálculo (Biza y Zachariades, 2010).

De acuerdo con ciertas investigaciones (Biza, Christou y Zachariades, 2008; Dolores, 2007) la enseñanza del Cálculo privilegia el uso de algoritmos de naturaleza algebraica, así como la memorización de procedimientos y técnicas, como por ejemplo obtener límites, derivar, encontrar máximos y mínimos, por citar algunos casos; lo anterior es una consecuencia de no poder lograr un desarrollo conceptual adecuado de las ideas clave del Cálculo (Salinas y Alanís, 2009). Esta forma de enseñanza considera a las matemáticas como algo inamovible, de tal suerte que es incuestionable problematizar y cuestionar su estructura. Con base en este modelo de enseñanza el profesor expone sus temas, explicando lo mejor que puede los diferentes conceptos y resuelve algunos ejercicios para que posteriormente el estudiante haga algunos similares (Santi, 2011); lo cual no significa que se hayan construido los conceptos puestos en juego.

En el programa de CD se encuentra presente el tema de la interpretación geométrica de la derivada, el cual sirve para explicar el proceso al límite de una familia de rectas secantes que giran alrededor de un punto y que devienen en la recta tangente a la curva en un punto. Esta forma de enseñanza se ha reportado que ocasiona grandes dificultades entre los estudiantes, entre ellas es el transitar de una concepción global propia de la geometría Euclidiana, a una concepción local, propiedad fundamental del Cálculo (Biza, 2011; Dolores, 2007). Lo anterior debido a que no se le da un tratamiento didáctico a la idea que tienen los estudiantes proveniente de su curso de geometría en la cual aprenden que la recta tangente a un círculo lo toca en un solo punto, dejando a un lado de la recta todo el círculo, sin volver a tocarlo (o cruzarlo). Esta idea sigue prevaleciendo entre los estudiantes, aunque esto, como se sabe funciona con las cónicas pero no para otro tipo de curvas, por ejemplo la función cúbica. Por otro lado también se ha reportado sobre la dificultad que experimentan los estudiantes al tratar de concebir que la recta tangente puede cortar y ser tangente en la zona de corte (Biza y Zachariades, 2010; Canul, 2009).

Consideramos que el hecho de privilegiar el uso de algoritmos de naturaleza algebraica por un lado y por otro la poca importancia que se le da al hacer uso del recurso visual (Bisa, Nardi y Zachariades, 2009; Cantoral, 2013), tiene como consecuencia que el tema de la interpretación geométrica sea vista como de paso, como una aplicación de la derivada y no como aquello que permite su construcción, tal y como históricamente se ha mostrado (Serna, 2015). Es por eso que el hacer uso de la historia como un recurso que nos permita reconocer cuáles fueron aquellas ideas que dieron origen y se encontraban presentes al construir la recta tangente desde un punto de vista variacional, nos va a permitir dotar de significados a la construcción de la recta tangente como una herramienta que permita caracterizar a las curvas, pudiendo ser estas representaciones de funciones de fenómenos físicos de dos variables.

MARCO TEÓRICO

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) se encuentra ubicada al seno de la Matemática Educativa y estudia la construcción social del conocimiento matemático, problematizando el saber desde sus cuatro dimensiones: la epistemológica que da cuenta de la naturaleza del saber, reconociendo siempre que dicha naturaleza está ligada al contexto de donde nace el conocimiento; la didáctica que tiene que ver con la transmisión del conocimientos y los procesos institucionales que se encuentran implícitos en ello; la cognitiva a la cual se le confieren los procesos de apropiación del conocimiento, dando explicaciones sobre el asunto de conocer, tomando en cuenta siempre que existen mecanismos de construcción social, lo cual tiene que ver con que hay una forma de "ver", tratar el conocimiento que es común a un conjunto de individuos, se puede decir que hay una racionalidad contextualizada; y finalmente la social, que pone énfasis en la resignificación del conocimiento, normado por prácticas sociales, las cuales se infieren a partir de la actividad humana situada en un contexto sociocultural. Las cuatro componentes actúan de forma sistémica en la explicación de la construcción social del conocimiento matemático (Cantoral, 2013).

Nuestra investigación doctoral se tomó como base para el diseño de las cinco secuencias didácticas que fueron implementadas en el taller, se puso atención en las componentes cognitiva y didáctica, en donde se retomaron los resultados de corte socioepistemológico de la investigación llevada a cabo por Serna (2007), en donde la atención se centró en las dimensiones epistemológica y social.

En nuestra investigación nos interesamos por el problema de las tangentes, el cual fue una problemática tratada por los matemáticos europeos de los siglos XVII y XVIII, la intención era poder caracterizar aquello que caracteriza su uso en actividad matemática, la cual se encuentra situada en un momento y contexto determinado por lo que es plenamente humana y social. Un resultado de este estudio es lo que hemos llamado, "la práctica de la recta tangente variacional", la cual da una base de significados al conocimiento que pretendemos se construya en el aula.

El uso de la historia

La historia nos ha permitido reconocer los escenarios humanos en donde las matemáticas sirvieron como herramientas para llevar a cabo actividades, las cuales eran organizadas por grupos humanos con la intención específica de resolver problemas propios de su época y contexto sociocultural; toda esa actividad humana posee una base de significados que se encontraban presentes y se vio manifestada a partir del conocimiento puesto en uso. Existe por tanto una interacción entre la herramienta matemática y las acciones llevadas a cabo por las personas, siendo el resultado de la misma la construcción de significados, sin embargo como este es un proceso continuo se puede más bien hablar de la resignificación del conocimiento.

El discurso Matemático Escolar (dME) actual no manifiesta esta primera base de significados que se encuentran presenten en el conocimiento y que lo hicieron posible, esto se debe a un fenómeno que se conoce como la Transposición Didáctica, el cual da cuenta del cambio que sufre el conocimiento matemático cuando es puesto en condición de situación escolar. Nuestra propuesta pretende rescatar esas ideas que estuvieron presentes y sirvieron para la construcción social del conocimiento matemático.

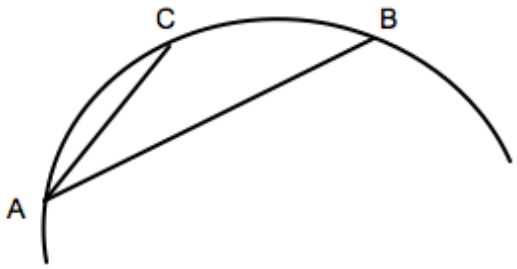
Usos-herramienta-actividad, práctica-resignificación-funcionalidad y práctica social

El uso de la herramienta matemática para llevar a cabo acciones posibilita la construcción de significados, los mismos se encuentran situados por el contexto sociocultural en donde es llevada a cabo la actividad humana. Cuando las actividades son organizadas de manera intencional con la intención de resolver un problema se dice que se tiene una práctica, la cual no surge en un instante sino más bien es producto de generaciones ya que es algo que le ha servido a las personas y además conforme pasa el tiempo se puede decir que cada vez va mejorando.

Para ilustrar lo anterior, veamos un ejemplo de los presentados en la secuencia didáctica 1 a los asistentes del taller.

Copérnico mencionaba en su teorema sexto de su libro, *Sobre las revoluciones de las orbes celestes* que, la razón de dos arcos con un punto común, siendo uno mayor que otro, es mayor que la razón de las subtensas (cuerdas) que se generan con los mismos puntos, como se ilustra en la siguiente figura:

Figura 1. (Serna, 2015)



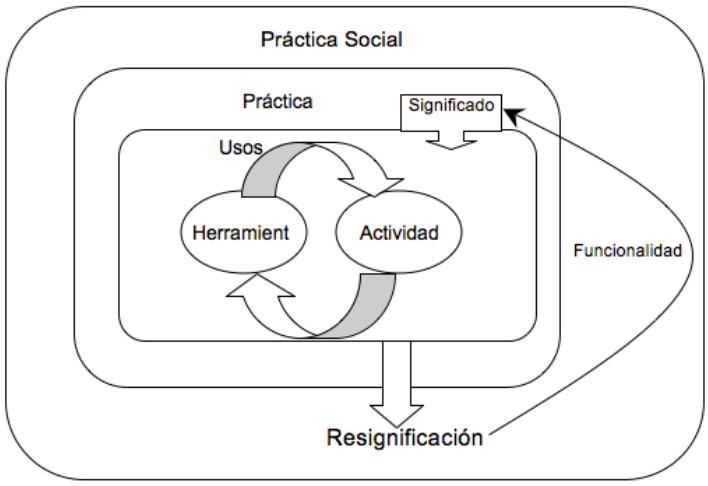
La herramienta matemática que expresa tal teorema es:

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{AC}} > \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

Ante la necesidad de poder predecir las posiciones de los cuerpos celestes, Copérnico fue haciendo mediciones de tal forma que los puntos B y C se acercaban cada vez más y más al punto A.

Como se observa existe un contexto en donde es usada la herramienta matemática para ejecutar acciones como son: *calcular y comparar,* tales acciones fueron organizadas de manera intencional para resolver el problema en cuestión a partir de una *Práctica*. La relación dialéctica herramienta-actividad permite la construcción de nuevos significados, que enriquecen a los ya existentes es decir hay una resignificación del conocimiento que tiene un carácter *funcional* ya que posibilita hacer una interpretación de la realidad; las explicaciones y argumentos dados por los grupos humanos son normados por una *Práctica Social,* que en el caso mostrado es la práctica de la predicción para ver más detalles se puede consultar la tesis de Serna (2015).

Figura 2. Esquema explicativo de la Construcción Social del Conocimiento matemático (Serna, 2015, p. 130)



METODO

Cada una de las primeras cuatro secuencias didácticas diseñadas obedece a un momento de la historia, en donde a partir de nuestro análisis centrado en la construcción de la recta tangente variacional, nos permitió reconocer diferentes características de la recta tangente que iban enriqueciendo a lo ya construido anteriormente, es decir había una resignificación progresiva del saber (Reyes-Gasperini, 2011). La quinta secuencia se diseño para que se pudiera hacer uso de la recta tangente variacional (la cual fue construida en las primeras cuatro secuencias) para resolver un problema el cual consistió en hacer la gráfica de la derivada de una función cuadrática y una cúbica de las cuales no se daba su expresión matemática.

Las secuencias fueron diseñadas para estudiantes de bachillerato, que en México se considera el nivel medio superior (de 15 a 17 años en promedio de edad), es decir antes de ingresar a la universidad; la materia de Pensamiento del Cálculo Diferencial es llamada así en el sistema escolar del Estado de México y es la que tradicionalmente se conoce como Cálculo Diferencial.

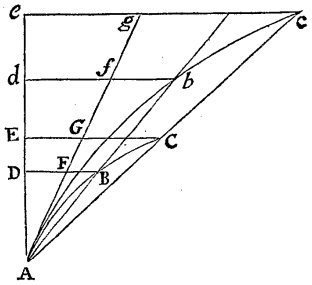
Primera Secuencia Didáctica

El primer momento histórico que sirvió como base para la creación de la secuencia didáctica 1 fue con Copérnico, la actividad consistió en que a partir de una circunferencia donde se conoce el ángulo central de dos arcos que parte de un punto común, en donde uno de los arcos es mayor que el otro. Lo primero que se solicita es que los asistentes al taller puedan deducir una fórmula para calcular la cuerda subtendida por dos puntos de una circunferencia, dado que se conoce su ángulo central; una vez obtenida la fórmula se solicita que vayan acercando cada vez más y más los puntos B y C al punto A (ver figura 1) para lo cual se les proporciona una tabla que sirve para comparar la razón de las cuerdas con respecto a la razón de los arcos, los asistentes al taller pudieron verificar que conforme los puntos se acercaban cada vez más al punto A, la desigualdad mencionada dejaba de serlo para convertirse en una igualdad. Con esto se obtuvo una primera conclusión que es: si dos puntos de una curva se acercan lo suficiente (sin llegar a tocarse) en esa región la curva se comporta como una recta.

Segunda Secuencia didáctica

El segundo momento histórico tomó como referente a Newton con lo enunciado en su libro *Principios Matemáticos* en donde en el lema IX se menciona que cuando dos triángulos rectángulos son semejantes, la razón de sus áreas es igual a la razón de los cuadrados de sus lados homólogos. En el libro mencionado se muestra la siguiente figura:

Figura 3. (Serna, 2015, p. 171)



Inicialmente se les pregunto a los asistentes al taller si los triángulos ΔABD y Δ ACE son semejantes, se contestó que no, seguidamente se preguntó, lo que pasaría si ahora los puntos B y C se acercaran cada vez más y más al punto A, para poder contestar a la pregunta se hizo uso de una parábola que abre hacia abajo, cuya expresión matemática es $f(x) = -x^2 + 8x$, al darle un valor a la x se podía calcular la base y altura de los triángulos mostrados en la figura 3, por lo que también se podría calcular el área, ahora se está en la posibilidad de comparar la razón de dos áreas y el cuadrado de sus alturas (considerando a las alturas como los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{AC}$ respectivamente) para hacer varias comparaciones se les proporcionó a los asistentes unas tablas para que conforme los puntos B y C se acercaban más y más a el punto A, pudieran ver que es lo que estaba pasando.

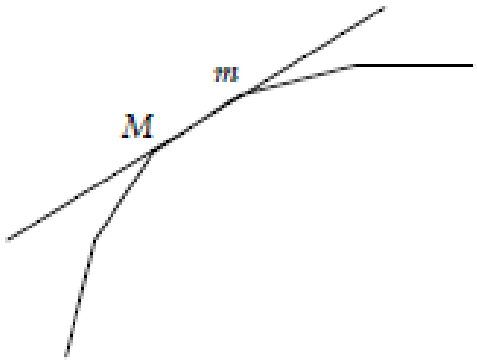
Los participantes se pudieron percatar que en algún momento los dos triángulos llegarían a ser semejantes, lo cual de alguna forma retomaba la conclusión obtenida de la secuencia anterior, pero además al observar que los dos triángulos rectángulos que llegarían a ser semejantes serían infinitamente pequeños y compartirían la misma hipotenusa, por lo que tendría un cierto ángulo con respecto al eje horizontal y además si esta pequeña hipotenusa se extendía en ambos sentidos se podía formar la recta tangente a la curva en el punto A.

Tercer Secuencia didáctica

Haciendo uso de lo ya construido en las dos primeras secuencias, que es: en la región de la curva situada entre dos puntos infinitamente cercanos, ahí se comporta como una recta y además ese pequeño segmento de recta tiene un ángulo de inclinación y si se extiende en ambos sentidos se forma la recta tangente (que tiene exactamente el mismo ángulo de inclinación que el pequeño segmento de recta) ahora se pretende que los estudiantes construyan la idea de que en cada punto de la curva hay un diferente ángulo ya que dicho ángulo tiene que ver con los pequeños catetos del triángulo infinitesimal formado. En esta secuencia se hizo uso de las ideas provenientes del Marqués de L´Hospital quien dijo:

Se requiere que una línea curva pueda ser considerada como el ensamblaje de una infinidad de líneas rectas, cada una de estas infinitamente pequeñas: o (lo cual es lo mismo) como una poligonal de un número infinito de lados, cada uno de ellos infinitamente pequeños,…

Figura 4.



Si se prolonga una de los pequeños lados Mm de la poligonal que compone una línea curva, este pequeño lado así prolongado será llamado la tangente de la curva en el punto M o m.

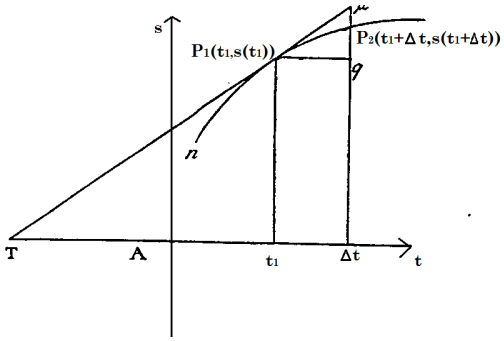
(L´Hospital, 1696)

De tal forma que se puede hacer la consideración de que un punto es un pequeño segmento infinitesimal. Se propuso a los asistentes un problema de tiro vertical en donde se dio la expresión matemática $s(t) = 30t - 4.9t^2$ la cual representa una parábola que abre hacia abajo, se les solicitó a los participantes mediante una serie de preguntas y actividades que identificaran donde la razón de cambio es positiva y donde negativa, así como preguntas cuyas respuestas indicarían si se comprende que en cada punto de la curva la pendiente de la recta tangente es distinta y por lo tanto la velocidad instantánea. Los asistentes pudieron contestar las preguntas indicadas y construir la noción de recta tangente variacional.

Cuarta Secuencia didáctica

En esta secuencia se tomó como referente a Euler ya que es un matemático que aunque todavía hizo uso de argumentos geométricos-visuales, comienza con él un abandono de estos. Euler hizo un análisis del cambio a partir de desarrollos algebraicos, esto a partir de atribuirle una expresión algebraica a dicho cambio el cual es representado geométricamente en una gráfica como el cateto de un triángulo rectángulo infinitesimal y dividiendo el cambio de la variable dependiente (como lo llamamos actualmente) con respecto al cambio de la variable independiente, se obtiene una expresión en donde hay términos que son despreciados por ser considerados infinitamente pequeños en relación a los demás; de tal forma que se puede obtener una expresión algebraica que representa la razón de cambio instantánea. Es evidente que al darle diferentes valores a la variable dependiente se obtienen distintos valores de la razón de cambio en cada instante del tiempo. La figura utilizada fue la siguiente:

Figura 5. (Serna, 2015)



La figura utilizada es adaptada (con respecto a la usada por Euler) con relación a la nomenclatura utilizada actualmente a los estudiantes. Los asistentes al taller pudieron constatar lo anteriormente mencionado.

Quinta Secuencia didáctica

Finalmente uno de los actividades solicitadas en la secuencia didáctica 5 es la gráfica de la derivada de una parábola que abre hacia abajo y una función cúbica, en ninguno de los casos se les proporciona la expresión matemática, esta secuencia no fue desarrollada por los asistentes, más bien se les comento sobre resultados obtenidos con los estudiantes de nivel medio superior; con respecto a ello se mencionó que cuando se aplica regularmente no hay ninguna dificultad con obtener la gráfica de la derivada de la parábola y en cuanto a la segunda gráfica algunos estudiantes pueden trazar la gráfica y otros tienen una buena aproximación a la misma ya que en lugar de dibujar una parábola trazan una gráfica que tiene la forma de “V” como dos rectas que se tocan en un punto en la parte inferior de la gráfica. Los estudiantes que la resuelven correctamente dan argumentos que han construido al ir desarrollando las primeras cuatro secuencias.

CONCLUSIONES

Se pudo constatar que se puede ir construyendo la recta tangente variacional al diseñar una secuencia en donde las herramientas matemáticas utilizadas permiten la construcción de significados y la resignificación de los mismos ya que cada secuencia iba retomando las ideas construidas anteriormente, además se llevó a cabo el ejercicio de la práctica de la recta tangente variacional por medio de la organización intencional de actividades en donde se empleaban argumentos variacionales.

Cada secuencia tenía como objetivo que se fueran construyendo los diferentes significados asociados a la recta tangente variacional, en donde el conocimiento construido era funcional ya que permitía en cada momento hacer un análisis de lo que estaba pasando, de la realidad. Desde nuestro punto de vista se logró el objetivo planteado el cual consistía en reconocer que se puede construir la recta tangente variacional haciendo uso de la historia para dotar a las actividades realizadas de significados, lo que a su vez permite usarla como herramienta para arribar a la construcción de la derivada desde un punto de vista gráfico.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Biza, I. (2011). Students' Evolving Meaning About Tangent Line with the Mediation of a Dynamic Geometry Environment and an Instructional Example Space. *Technology, Knowledge and Learning.* 16 (2), 125-151.

Biza, I., Christou, C. y Zachariades, T. (2008). Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis. *Research in Mathematics Education,* 10, (1), pp. 53-70.

Biza, I., Nardi, E. y Zachariades, T. (2009). Teacher beliefs and the didactic contract on visualisation. *For the Learning of Mathematics.* 29 (3), 31-36.

Biza, I. y Zachariades, T. (2010). First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior,* 29, (4), pp. 218-229.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Canul, E. (2009). *De la concepción euclidiana a la concepción leibniziana. El caso de la Recta Tangente en el marco de la Convención Matemática.* Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Dolores, C., (2007). *Elementos para una aproximación variacional de la derivada.* México: Díaz de Santos.

L'Hospital, A. (1696). *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas* (estudio introductorio, traducción y notas de Rodrigo Cambray Núñez). Edit. UNAM (1998). México.

Reyes-Gasperini, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de Matemáticas.* Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav.

Salinas, P. y Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 12 (3), 355-382.

Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational Estudies in Mathematics.* 77 (2-3), 285-311.

Serna, L. (2007). *Estudio Socioepistemológico de la tangente.* Tesis de Maestría, CICATA-IPN, México.

Serna, L. (2015). *Estudio socioepistemológico de la tangente como objeto escolar.* Tesis de Doctorado no publicada, CICATA-IPN, México.

LA RELEVANCIA DE CONOCER EL LENGUAJE MATEMÁTICO

P. Sastre Vázquez, R. E. D´Andrea
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (Argentina)
Pontificia Universidad Católica Argentina. Campus Rosario (Argentina)

Palabras clave: lenguaje matemático; didáctica; formación del profesorado

Key words: mathematical language; teaching; teacher training

RESUMEN: El lenguaje matemático puede manifestarse coloquial, visual y simbólicamente. El lenguaje simbólico formal, constituido por símbolos más que por palabras, es lo que realmente hace que el sujeto de aprendizaje haga verdaderos esfuerzos para comprender Matemática, ya que no puede trasladar automáticamente el lenguaje natural que utiliza habitualmente al lenguaje matemático. El objetivo de este trabajo es: 1. Reflexionar sobre la relevancia que tiene conocer el lenguaje matemático para el estudiante de nivel medio y universitario. 2. Reflexionar en torno a la contribución que aporta a la formación del Profesorado, una didáctica del lenguaje matemático, desde una perspectiva más informal, sin los planteos tradicionales que introducen al estudiante en cuestiones formales de Lógica simbólica.

ABSTRACT: The mathematical language can express colloquially, visually and symbolically. The formal symbolic language made up of symbols rather than words, It is what really makes the student perform a real effort to understand mathematics because it cannot automatically translate natural language commonly used mathematical language. The objective of this work is: 1. Reflect on the relevance to know mathematical language in high school and university level. 2. Reflect on the contribution of a teaching for mathematical language that can contribute to teacher training, from a casual perspective, without the traditional postures that introduce students to formal topics of symbolic logical.

INTRODUCCIÓN

Cuando se discute acerca del conocimiento que deben poseer los estudiantes sobre lenguaje matemático, la cuestión no se reduce a un simple tratamiento de símbolos y notaciones. Una adecuada apropiación de este lenguaje, requiere que además del conocimiento de los símbolos como un código, se conozca su 'funcionamiento'. Por ejemplo, si se está hablando de un cuantificador universal, no se puede soslayar el proceso que permite sostener el valor de verdad de proposiciones cuantificadas universalmente. Es una cuestión implícita y esto tácitamente hace referencia a la epistemología matemática y no a un mero conocimiento de un signo que tiene un cierto significado. Una inadecuada apropiación puede conducir al síndrome del conocimiento frágil (Perkins, 1995), síndrome que describe al problema que el estudiante presenta en el abordaje y apropiación del conocimiento bajo diversos aspectos. Si buena parte del conocimiento 'adquirido' por el estudiante se esfuma, el síndrome es de conocimiento olvidado. Si el estudiante recuerda los conocimientos adquiridos durante el examen, pero es incapaz de recordarlos o utilizarlos en situaciones que admiten más de una respuesta y en las que verdaderamente los necesitan, el síndrome es de conocimiento inerte. Si el estudiante aún después de haber recibido una instrucción considerable, suele tener ideas ingenuas acerca de la naturaleza de las cosas, el síndrome es de conocimiento ingenuo. Finalmente, si el estudiante adquiere conocimientos con carácter ritual con el fin de cumplir tareas académicas o escolares, el síndrome es de conocimiento ritual. Cualquiera de los cuatro aspectos descriptos puede encuadrarse perfectamente para describir una inadecuada apropiación de cuestiones inherentes al lenguaje matemático. En un intento de dar solución a estos problemas se presentan bases teóricas que se estima, podrán ser utilizadas en la programación de talleres para la formación del profesorado. El objetivo de este trabajo es: 1. Reflexionar sobre la relevancia que tiene conocer el lenguaje matemático para el estudiante de nivel medio y universitario. 2. Reflexionar en torno a la contribución que aporta a la formación del Profesorado, una didáctica del lenguaje matemático, desde una perspectiva más informal, sin los planteos tradicionales que introducen al estudiante en cuestiones formales de Lógica simbólica.

MARCO TEÓRICO

El lenguaje matemático puede manifestarse coloquialmente, cuando se expresa en forma oral o escrita. También puede formularse visualmente, cuando se hace presente a través de un simple gráfico a mano alzada ó el realizado por un software o una imagen impresa. Asimismo, puede presentarse simbólicamente, siendo esta forma del lenguaje, la que le es propia a Matemática. Se trata del lenguaje simbólico que es su lenguaje-código. El lenguaje simbólico formal de la Matemática ostenta representaciones lingüísticas que expresan operaciones o transformaciones que hacen referencia a diferentes razonamientos y argumentaciones que son motivadas por estructuras conceptuales específicas. Si se considera a la Matemática como una manifestación semiótica (Radford, 2003) entonces sus elementos generan significados sintácticos y semánticos en un lenguaje simbólico, el cual podría considerarse equivalente al lenguaje natural de un individuo. El lenguaje matemático está dotado de una simbología y una estructura que le son propias. Es fundamental conocer el significado de sus símbolos para que el estudiante sea capaz de interpretar lo que se quiere decir con ellos. Precisamente la falta de comprensión de los conceptos matemáticos expresados en el lenguaje que le es propio a esta Ciencia, no permite ver como éstos se relacionan y como son utilizados para la resolución de problemas y procesos de validación

referentes a su epistemología consistente en la demostración de proposiciones y la búsqueda de ejemplos y contraejemplos, entre otras acciones.

En general, estos conocimientos o son inexistentes o no tienen la suficiente solidez en los docentes tanto a nivel medio como universitario, lo que debilita la formación del profesorado, y es que precisamente, como señala Adúriz-Bravo (2002), el profesor de Ciencias, en general, debe saber no solo de la Ciencia sino que también debe saber sobre la Ciencia, que es lo esencialmente esperado para una profesionalización docente. Matemática forma parte del currículum de estudios desde los primeros años de escolaridad, y se instala con una cadena de símbolos que van penetrando todos los espacios del lenguaje. De esta forma, el sujeto de aprendizaje va accediendo a fórmulas, leyes y algoritmos que determinan conductas matemáticas muy definidas para hallar soluciones y que van desde acciones tales como numerar, contar, ordenar, clasificar y hasta inferir.

Niss (2003) encuadra a la utilización de los símbolos matemáticos, lo que implícitamente se refiere al conocimiento del lenguaje matemático, dentro de las competencias matemáticas que un estudiante debe tener. Su propuesta para definir la competencia matemática queda configurada como la habilidad para entender, juzgar, hacer y usar las Matemáticas en una variedad de contextos y situaciones intra y extramatemáticas en las que estas juegan o podrían jugar su papel, identificando a tales competencias del modo siguiente: Pensar matemáticamente; Plantear y resolver problemas matemáticos; Modelar matemáticamente; Argumentar matemáticamente; Representar entidades matemáticas (situaciones y objetos); Utilizar los símbolos matemáticos; Comunicarse con las Matemáticas y comunicar sobre Matemáticas; Utilizar ayudas y herramientas (incluyendo las nuevas tecnologías).

El lenguaje formal, constituido por símbolos más que por palabras, es lo que realmente hace que el sujeto de aprendizaje haga verdaderos esfuerzos para comprender Matemática, debido a su complejidad. Como consecuencia, el estudiante no traslada automáticamente el lenguaje natural que utiliza habitualmente al lenguaje matemático.

Pimm (1999) afirma que el uso generalizado que hacen los docentes en el aula del lenguaje formal, tiene consecuencias trascendentes, ya que, en lugar de modelar los usos matemáticos desde su lenguaje informal, enfatiza en el lenguaje formal de forma ostensiva y recurrente, lo que termina por confundir, atribular y disgustar al sujeto de aprendizaje. En relación a esto, es de destacar que D´Andrea (2012) propuso una ingeniería didáctica para la comprensión y desarrollo de la argumentación de teoremas matemáticos en estudiantes universitarios postulando como paso inicial la comprensión por parte del estudiante, de la proposición que se quiere probar, desde el lenguaje natural. Por su lado, Fennell (citado por Ruiz, 2003, p.34.) señala que *"en la comunicación matemática los símbolos estandarizados y las definiciones de la terminología son necesarios, pero la enseñanza de la matemática en lenguaje muy formalizado, algunas veces, causa una especie de bloqueo en la comprensión*"

Este tipo de situaciones debe ser manipulada diligentemente por el docente, que puede considerar que el estudiante comprende los conceptos matemáticos aunque, en el momento de evaluar, se evidencian debilidades en la adquisición y comprensión de estos. Debe destacarse que la transmisión y comprensión del lenguaje matemático, en la medida de lo posible, debe ser un conocimiento introductorio. Es decir, que tanto a nivel universitario como a nivel medio debería formar parte del currículum del primer curso de Matemática de la carrera escogida o el primer año de estudios del estudiante secundario. Si esto no fuese posible, es fundamental que el profesor

luego de un test diagnóstico que determine los conocimientos existentes acerca del lenguaje matemático en el grupo de estudiantes, instruya a estos de acuerdo a los resultados obtenidos. Sastre Vázquez y D´Andrea (2011) observaron que una de las dificultades que enfrentan los estudiantes, es precisamente desconocimiento del lenguaje matemático. Este desconocimiento es causante de la producción de numerosos errores de construcción y de interpretación, lo que dificulta inexorablemente el acceso a la incorporación de nuevas estructuras conceptuales. Consecuentemente, los estudiantes no son capaces de asociar los conceptos con sus definiciones y menos aún son capaces de ejemplificar. Es decir, que no pueden utilizar el lenguaje matemático de una forma 'concreta' ni tampoco de una forma 'abstracta', los conceptos serían para ellos palabras carentes de significación matemática en sentido estricto.

ACTIVIDADES Y EXPERIENCIAS SUSTENTADAS EN EL MARCO TEÓRICO

Para este estudio se consideraron tres poblaciones diferentes con el objetivo de realizar diferentes actividades con cada una, a los efectos de estudiarlas en su desarrollo y resultados.

Para las actividades de taller, los estudiantes del último año del Profesorado de Matemática del Instituto N° 23 "Maestro Addad" de Puerto General San Martín, provincia de Santa Fe de la República Argentina y también profesores de Matemática que realizan su ejercicio profesional en colegios de nivel de medio de las ciudades de Puerto General San Martín y San Lorenzo, ambas situadas en provincia de Santa Fe de la República Argentina.

Por otro lado, estudiantes universitarios de Ingeniería Industrial y de Ingeniería Ambiental de la Facultad de Química e Ingeniería, Campus Rosario de la Pontificia Universidad Católica Argentina situada en la ciudad de Rosario, provincia de Santa Fe de la República Argentina.

Los resultados obtenidos de las investigaciones llevadas a cabo por Sastre Vázquez y D´Andrea (2011) generaron la necesidad de considerar acciones que permitieran interactuar con otros niveles del sistema educativo, empleando la extensión como estrategia. Con esas acciones se pretendió realizar un aporte para la divulgación del conocimiento científico en un marco de integración. Estas acciones estuvieron dirigidas a Profesores de Matemática del ciclo medio y estudiantes del último año del Profesorado de Matemática. Estas actividades pretendieron aportar una mejora a la formación del profesorado, extrapolando didácticamente los resultados obtenidos de diferentes trabajos de investigación, surgiendo de ellas, un espacio que posibilitara la reflexión sobre la importancia y las estrategias didácticas para la inclusión del lenguaje matemático, la argumentación y la demostración entre los contenidos de la enseñanza media y terciaria. Estos espacios devinieron en talleres sobre el lenguaje matemático y talleres sobre la demostración matemática. De este modo se intentó construir un puente de articulación entre Escuela Media, Profesorado y Universidad.

Consecuentemente surgió la posibilidad de analizar el desempeño y evolución de estudiantes universitarios durante el proceso de enseñanza y aprendizaje del lenguaje matemático. Para el logro de estos objetivos, durante los años 2009 a 2012 y en un curso anual de Álgebra y Geometría para Carreras de Ingeniería se introdujo a los estudiantes en el conocimiento del lenguaje matemático de la forma siguiente. Durante los dos primeros años de este estudio: 2009/10, se instruyó a los estudiantes en el conocimiento del lenguaje matemático bajo un paradigma tradicional, utilizando estrictamente contenidos de Lógica tradicional o aristotélica y Lógica

simbólica. Se le mostraron los contenidos aproximadamente del modo siguiente. Primero se los instruyó en el conocimiento formal de las estructuras esenciales de la lógica tradicional: concepto, juicio y razonamiento. Luego se los introdujo en el concepto de proposición y luego los diferentes conectivos proposicionales tales como la conjunción; negación; disyunción inclusiva y exclusiva; implicación y doble implicación. La presentación de estos conectivos se hizo desde las clásicas tablas de verdad. Posteriormente se los encuadró en el conocimiento de las estructuras conceptuales de función proposicional y su proceso de cuantificación; los métodos de demostración y otras cuestiones epistemológicas asociadas. En los dos años siguientes del estudio, el diseño instruccional sobre lenguaje matemático se enfocó desde un paradigma basado en la construcción de los contenidos a partir de ejemplos extraídos de la Matemática y orientados específicamente a cuestiones de notación y epistemología que hacen al lenguaje y método de esta Ciencia, evitando por completo en el discurso, terminología específica de la Lógica tradicional y simbólica. El desempeño y la evolución se evaluaron por medio del rendimiento académico reflejado en las calificaciones obtenidas en exámenes parciales y finales. Los resultados obtenidos mostraron que los estudiantes que recibieron una instrucción en el lenguaje matemático desde un paradigma basado en la construcción, tuvieron una mejor predisposición y desempeño en el manejo del lenguaje matemático. Además, para estos grupos se observó un mayor rendimiento en la capacidad de producir una transposición desde el lenguaje natural hacia el lenguaje simbólico. Mientras que los estudiantes instruidos en el lenguaje matemático desde un paradigma tradicional sostenido por contenidos más formales de lógica mostraron poseer dificultades para la comprensión de nuevas estructuras conceptuales. Se especula que esto podría explicarse por el enfoque didáctico adoptado. Se observó también, en base a esta especulación, que los estudiantes instruidos en un discurso más constructivo pudieron abordar procesos de validación desde una mirada significativa y comprensiva.

UNA INTRODUCCIÓN ÁULICA INFORMAL DEL LENGUAJE MATEMÁTICO

La epistemología de la Ciencia Matemática tiene como pilares fundamentales el raciocinio y la abstracción. El diseño de un curso cabal de Matemática no puede soslayar su epistemología y para poder ponerla en acción, se requiere conocer su lenguaje. Un paradigma tradicional de aprendizaje de tipo normativo, es decir, centrado en los contenidos de aprendizaje que esté direccionado al proceso de enseñanza y aprendizaje del lenguaje matemático, puede inducir a una forzada e inadecuada apropiación. La aparición de las TIC hacia finales del siglo XX; los nuevos paradigmas de aprendizaje en el comienzo del siglo XXI y resultados obtenidos de diferentes investigaciones realizadas en torno a la adquisición del lenguaje matemático en diferentes niveles, llevaron a reflexionar sobre como instruir al estudiante ingresante de ingeniería en el lenguaje matemático. En algunos de los currículums tradicionales se encuadraba al estudiante en el lenguaje matemático a través de nociones de lógica simbólica. Mediante la información recabada a través de docentes y estudiantes de diferentes universidades, se pudo observar que ciertos rigores formales del desarrollo de las nociones de lógica simbólica bloqueaban a los estudiantes notablemente impidiendo un aprendizaje fluido y efectivo. Por lo general, estas nociones se introducían como capítulo inicial en alguna de las primeras asignaturas del área de Matemática en el currículum de Ingeniería. Debido al carácter de inicial, esta unidad didáctica se convertía en un inicio ‘poco feliz’ para los ingresantes. En base al estudio realizado por D´Andrea y Sastre Vázquez (2013) sobre el

desempeño de estudiantes universitarios en el uso del lenguaje matemático, se presentaron a las clásicas nociones de lógica simbólica bajo el nombre: El Lenguaje Matemático. Se quitaron las tablas de verdad y se introdujeron intuitivamente a los conectores lógicos, definiéndoselos de una manera simple e informal considerando para cada uno su correlato con el Álgebra conjuntista, lo que permitió reforzar más aún la idea transmitida por el conector. Al resto de los contenidos se les dio un tratamiento simple carente de rigor formal y teñido de numerosos ejemplos muy simples y una praxis que extrapolara lo conceptual. Ejemplos y actividades procedimentales fueron extraídas del Álgebra elemental.

Así, por ejemplo, los conectores lógicos son exhibidos no a través de este nombre, sino como conectores proposicionales luego de haber introducido la noción de proposición y de función proposicional a través de ejemplos. En lugar de introducir a la conjunción por medio de la tradicional tabla de verdad, se estimuló al estudiante a que pudiera pensar los valores de verdad de una conjunción a partir de ejemplos matemáticos elementales. Se definió a la conjunción, de modo de inducir al estudiante, desde la definición, a que este pudiera determinar el valor de verdad de este conector. La definición establecida reza lo siguiente: La conjunción conecta dos o más proposiciones de forma tal que todas las proposiciones se cumplen o no, simultáneamente. Es un conector que permite vincular desde dos a un número finito de proposiciones. Los siguientes ejemplos, tienen como objetivo que el estudiante pueda concluir acerca del valor de verdad de una conjunción, y fueron analizados en conjunto entre el docente y los estudiantes. Los ejemplos considerados son los siguientes:

$x=1 \wedge x=2 \wedge x=3$; $x\neq1 \wedge x\neq2 \wedge x\neq3$; $x \in R \wedge x^2\geq0$.

De esta forma, las clásicas conclusiones extraídas a través de una tabla de verdad binaria pueden obtenerse de forma intuitiva a través de ejemplos representativos como los presentados, y de otros adicionales aportados por el docente a raíz de la discusión con los estudiantes. Así, el estudiante puede llegar a ver que una conjunción de un número finito de proposiciones es verdadera cuando es verdadera cada una de las proposiciones que constituyen a esa conjunción. Mientras que una conjunción de un número finito de proposiciones es falsa cuando por lo menos es falsa alguna de las proposiciones componentes. Se continúa con la disyunción inclusiva introduciendo ejemplos similares a los utilizados en la conjunción, pero considerando primero un ejemplo coloquial que permita que el estudiante vea que se trata de una opción inclusiva. El ejemplo adecuado para el logro de este objetivo es el siguiente: *"Regalo los libros nuevos o los que ya no me sirven"* (Rojo, 1994). De esta forma, los estudiantes guiados por el docente pueden construir el valor de verdad de una disyunción inclusiva a través de una discusión conjunta. Luego, de forma similar se introduce a la disyunción exclusiva empleando un ejemplo del tipo: *"A las diez de la noche, voy al cine o al teatro"*. Con este ejemplo u otro de estructura similar, se pretende que el estudiante pueda caracterizar el valor de verdad de una disyunción exclusiva que a diferencia de los conectores anteriores es binario. Si bien, la disyunción inclusiva es de un uso común en Matemática, y la exclusiva ni se menciona, se la introduce a los efectos de que el estudiante pueda comprender totalmente el carácter inclusivo de la disyunción que lleva este nombre por comparación con el comportamiento extremo que reviste la disyunción exclusiva. La implicación o condicional, sin duda es el momento clave de este proceso, ya que es un conector que no es simple de comprender para el estudiante y es el específico de Matemática ya que por lo general todas las proposiciones matemáticas poseen la estructura de una implicación o doble implicación. El único caso que el

estudiante puede entender rápidamente es el más elemental y es el caso de antecedente y consecuente verdadero. La introducción del ejemplo: *"Si apruebo el examen, entonces te presto el apunte"* (Rojo, 1994) y su análisis caso por caso, lleva de acuerdo a la discusión generada con el estudiante a repensar nuevos ejemplos, de forma de llegar a concluir la caracterización del valor de verdad de este conector.

CONCLUSIONES

Las reflexiones generadas por los talleres realizados con estudiantes de Profesorado y Profesores de Matemática del ciclo medio y la experiencia de introducir el lenguaje matemático desde diferentes paradigmas con estudiantes de Ingeniería permitieron esbozar las siguientes conclusiones. El enfoque tradicional de la educación matemática, con procesos de comunicación unilaterales y donde no se hace énfasis en la transmisión y comprensión del lenguaje formalizado, trae aparejadas consecuencias negativas. El lenguaje matemático tiene su propia sintaxis la que, en general, no coincide con la del lenguaje común o natural, y es importante tener en cuenta que no existen razones valederas para admitir que el estudiante descubrirá tal sintaxis por sí mismo y sin ningún tipo de apoyo al respecto. La adquisición del dominio de este lenguaje no se logra de forma espontánea, sino que se requiere del ejercicio de acciones mentales que deberían ser desarrolladas en actividades propuestas al estudiante por el docente. Los docentes deberán reflexionar y ser conscientes de la importancia de este lenguaje. El estudiante tiene fuertes creencias sobre una Ciencia Matemática que consiste según su propio lenguaje "en hacer ejercicios" en el peor de los casos; y en el mejor, que permite resolver problemas que tienen que ver con la cotidianeidad, pero sea como sea, su epistemología es algo muy lejano y hasta inexistente. La formación del Profesorado es trascendente para el logro de aprendizajes definidos en la comprensión y aplicación del lenguaje matemático ya que no basta con que el profesor de Ciencias en general y de Matemática en particular conozca muchísimos contenidos sobre la ciencia sino que conozca más allá de tales contenidos y comprenda a estos desde la filosofía, la historia y la didáctica específica de la matemática, pudiendo entonces realizar una verdadera extrapolación áulica desde "*un saber sabio a un saber enseñado*" (Chevallard, 1998). En el siglo IV A.C., Aristóteles, decía lo siguiente: "la naturaleza es un libro abierto expresado en el lenguaje de la matemática", además afirmaba que el lenguaje cotidiano estaba saturado de ambigüedades, por lo que el lenguaje de la ciencia había que diferenciarlo del cotidiano. Precisamente, gran parte de la importancia que posee la simbología matemática es la carencia de ambigüedades, por lo que las ideas que comunica son de una precisión rigurosa.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adúriz – Bravo, A. (2002). Un Modelo para Introducir la Naturaleza de la Ciencia en la Formación de los Profesores de Ciencias. *Pensamiento Educativo*, 30, 315 – 330

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica*. Buenos Aires: AIQUE.

D´Andrea, R.E., Curia, L., Lavalle, A. (2012). *Razonamiento deductivo y validación en estudiantes universitarios*. Alemania: Editorial Académica Española.

D´Andrea, R.E.; Sastre Vázquez, P. (2013). Desempeño de estudiantes universitarios en el uso del lenguaje Matemático. En M.E. Ascheri; R.A. Pizarro; N. Ferreyra. Actas del III Congreso Internacional de Educación en Ciencia y Tecnología. 5° Congreso de Educación en Ciencia y Tecnología. Universidad Nacional de Catamarca. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Catamarca. República Argentina.

Niss, M. (2003). The Danish KOM Project and possible consequences for teacher education. En R. Strässer, G. Brandell y B. Grevholm (eds.). *Educating for the future. Proceding of an international symposium on matematics teacher education*, 179-192. Royal Swedish Academy of Sciences, Göteborg, Suecia

Perkins, D. (1995). *La escuela inteligente.* Barcelona: Gedisa.

Pimm, D. (1999). *El Lenguaje Matemático en el Aula*. Madrid: Morata

Radford, L. (2003). On the epistemological limits of language. Mathematical knowledgeand social practice during the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics* 52(2), 123–150.

Rojo, A. (1994). *Álgebra I*. Buenos Aires: El Ateneo.

Ruiz, D (2003). *El Lenguaje en Clases de Matemática*. Mérida: Universidad de Los Andes.

Sastre Vázquez, P.; D´Andrea, R.E. (2011). *Análisis del lenguaje matemático en estudiantes ingresantes a Carreras de Ingeniería.* En Santos, N.; Acosta, G.; Aguado, J.L. (Eds.). *Actas del XVI EMCI Nacional y VIII Internacional*. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Olavarría. Provincia de Buenos Aires.

COMPLEJIDAD Y CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO

Eduardo Carrasco, J. Enrique Hernández, Vicente Carrión, Jaime Arrieta, Leonora Díaz-Moreno.
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (Chile), Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN (México), Universidad Autónoma de Guerrero (México) Universidad de Valparaíso (Chile)
ecarrasc@gmail.com, jherza@gmail.com, vicave@gmail.com, jaime.arrieta@gmail.com, leonora.diaz@uv.cl

Palabras clave: complejidad, interacciones, enacción, configuración

Key words: complexity, interactions, enaction, configuration

RESUMEN: La reflexión que aquí se reporta se propone develar una complejidad emergente en la construcción de saber del estudiantado, centrando la atención en la colaboración y convivencia de quienes aprenden. Un saber que va más allá de la comprensión puramente racional de la realidad, se enfrenta al desafío de abordar cada fenómeno como un todo integrado. En este caso las reducciones o constantificaciones de variables, quedan abiertas a permanente revisión y sujetas a mostrarse insuficientes, en tanto que conocemos cada vez más. Mirar desde la perspectiva de sistemas complejos propicia el estudio y descripción de propiedades emergentes que inician con interacciones entre componentes en donde la no-linealidad puede dar lugar a fenómenos en una escala de organización superior. Se constata la relevancia central de una configuración compleja en una propuesta formativo-evaluativa para los aprendizajes matemáticos.

ABSTRACT: Reflection reported here aims to reveal an emerging complexity in the construction of knowledge of students, focusing on collaboration and coexistence of learners. A knowledge that goes beyond the purely rational understanding of reality, faces the challenge of addressing each phenomenon as an integrated whole. In this case, reductions or constantifications of variables, are open to constant revision and subject to appear insufficient, as we know more and more. Looking from the perspective of complex systems promotes the study and description of emergent properties that start with interactions between components where non-linearity phenomena can result in a higher level of organization. The central importance of a complex configuration in a training-evaluative approach to mathematical learning is found.

INTRODUCCIÓN

Los sistemas complejos, la teoría del caos, la física de los procesos de no equilibrio, el funcionamiento de los sistemas dinámicos inestables, el surgimiento de conceptos como: autoorganización, autosemejanza, estructuras disipativas, entre otras nociones, propician una visión compleja que posibilita una nueva mirada de lo educativo. Morin (1977) explora la multidimensionalidad del conocimiento, exhibiendo cómo, en el proceso cognitivo, concurren múltiples elementos, a saber, químicos, fisiológicos, eléctricos, energéticos, existenciales, psicológicos, culturales, lingüísticos, ideales, colectivos, personales, transpersonales; que se articulan unos con otros. Advierte que la disyunción y el parcelamiento de los conocimientos no solo afectan la posibilidad de un "conocimiento del conocimiento" sino también a las posibilidades de conocimiento acerca de nosotros mismos y el mundo.

Los sistemas complejos exhiben propiedades emergentes a partir de interacciones entre sus componentes. Por ejemplo, la autoorganización surge de las interacciones entre individuos que exhiben conductas simples. En estos casos, no hay ninguna necesidad de demandar complejidad individual para explicar una conducta colectiva compleja. En efecto ¿Cómo hacen los pájaros para que sus movimientos se mantengan organizados y sincronizados? Cada pájaro en la bandada sigue un conjunto de reglas simples y reacciona a los movimientos de los pájaros en su entorno. Los patrones organizados de la bandada, surgen de estas interacciones locales simples. Ninguna de las aves conoce el patrón global de la bandada. El ave en la delantera no es líder, en algún sentido significativo, solo se encuentra en ese lugar. La bandada se organiza sin un organizador, se coordina sin un coordinador. Es decir, la interacción no-lineal entre elementos simples del sistema, puede dar lugar a fenómenos en una escala de organización superior. Estos pueden ser la aparición de estructuras ordenadas cerca de puntos de bifurcación, de estructuras fractales o de comportamientos temporales periódicos o caóticos.

La idea de autoorganización originalmente se desarrolló en el contexto de ciencias físicas y químicas para describir la emergencia de patrones macroscópicos. Estas ideas han seguido desarrollándose en las últimas décadas. Investigaciones muestran que la autoorganización es inherente a una amplia gama de fenómenos colectivos.

En el estudio de sistemas autoorganizados se configura la simulación de agentes y sus interacciones, conocida por modelación basada en los agentes (MBA). Tiene el propósito de comprender las propiedades de los sistemas sociales complejos a través del análisis de dichas simulaciones.

Al contrastar el método MBA de hacer ciencia con los dos métodos estándar, el inductivo y el deductivo, este se revela como una tercera manera de construir conocimiento.

Aunque los supuestos de los sistemas autoorganizados que se estudian sean simples, las consecuencias de las interacciones pueden no ser tan obvias. Existen ejemplos de agentes interactuando localmente que producen efectos a gran escala. Se denominan "propiedades emergentes" del sistema. Estas a menudo sorprenden por la dificultad de anticipar las consecuencias totales, inclusive de formas simples de interacción.

Durante las décadas de los setenta y ochenta autores como Ilya Prigogine, Herman Haken, Manfred Eigen, James Lovelock, Lynn Margulis, Humberto Maturana y Francisco Varela, exploraron fenómenos de autoorganización en diversos sistemas. En particular a Varela se le

conoce por cuatro líneas de trabajo, se trata de la concepción de la idea de autopoiesis-autoreproducción- en la reproducción celular, la visión representativa del sistema nervioso y la cognición, las ideas sobre el sistema inmunitario y la de establecer correlaciones empíricas entre la práctica budista y el trabajo científico.

Los modelos resultantes de los sistemas autoorganizados comparten ciertas características clave, que son elementos básicos para la emergente teoría de los sistemas vivos.

En lo que sigue y desde esta perspectiva compleja, se abordan aspectos de la naturaleza, de los actos de conocer y de valorar ese conocer, con miras a configurar elementos necesarios de incorporar en lo específico, a la discusión en matemática educativa; se busca provocar discusiones antes que proponer soluciones, se procura determinar *"*complejidades concurrentes con la construcción de conocimiento científico, su enseñanza y sus aprendizajes, con base en modelaciones*"* (Grupo de Discusión Relme 29). En otras palabras, se busca capturar el aparecer fenomenológico de la complejidad propia de lo matemático educativo y deconstruir su fenomenología, en orden a configurar intervenciones benéficas que, desde capacidades de diálogo con sus actores y el sistema educativo, se institucionalicen en prácticas de aula y en particular en aulas de matemáticas.

REGLAS SIMPLES INTERACCIONES COMPLEJAS

Los patrones formados por las interacciones entre los individuos que componen un sistema (biológico, social, físico, químico entre otros), han sido de gran interés para los científicos desde hace décadas; tal es el caso de parvadas o cardúmenes plasmados como una estrategia para evitar a los depredadores. En ambos casos no existe un líder que los conduzca, sin embargo es posible observar estructuras organizadas que les permiten, como sistema, escapar de los depredadores sin tener bajas o reducirlas al mínimo. Este tipo de fenómenos se llaman descentralizados (Resnick, 2001) y se caracterizan por presentar dinámicas y procesos de organización a partir de reglas locales entre sus elementos, sin la asistencia de un líder que los guíe. Esto es, interacciones simples y localizadas promueven comportamientos complejos a un nivel distinto de organización.

Todo ser vivo se constituye por las interacciones entre los niveles de organización intrínsecos a él; por ejemplo, si se toma a la célula como unidad fundamental de la estructura y desarrollo de un ser humano, se comienza a ver una forma de organización a nivel celular que tiene lugar debido a funciones complejas en un nivel anterior (citoplasma, membrana, núcleo entre otros), luego un conjunto de células comienzan a intercambiar información para especializarse en diferentes tipos de tejidos (en un zoom hacia fuera del cuerpo). Estos tejidos se encuentran en un nuevo nivel de disposición y a su vez darán lugar a otro nivel, organizándose en los diferentes órganos: corazón, pulmones, hígado, entre otros; posteriormente sus interacciones conforman los sistemas que corren a lo largo del cuerpo. La interacción entre los sistemas da lugar al funcionamiento complejo del cuerpo humano. A su vez los grupos de humanos interactuarán socialmente…

Otros casos de interés para los estudios desde lo complejo son la predicción en economía, la evolución de la vida en la Tierra y actualmente en problemáticas educativas. En estos ejemplos es posible encontrar unidades simples (agentes) que al interactuar forman un todo complejo diferente a la agregación de sus partes. Los agentes que existen en un nivel son diferentes a los que

podemos encontrar en otro. Flake (1998) para describir las interacciones entre los agentes propone considerar los siguientes atributos: 1. Paralelismo y Multiplicidad; 2. Iteración, Recursión y Retroalimentación; y, 3. Adaptación, Aprendizaje y Evolución. Resnick (1991) utiliza los acrasiomicetes como un ejemplo para los fenómenos descentralizados, promovidos por interacciones simples entre sus elementos. Estas amebas unicelulares se mueven aleatoriamente, buscando bacterias en el ambiente para alimentarse y reproducirse por división celular. Su comportamiento cambia cuando el alimento escasea, su reproducción se detiene y comienzan a buscar a otras células, formando cúmulos de miles de ellas. En este momento emerge una unidad de segundo orden, sobre la base de la cooperación entre cada célula. Pareciera que su individualidad se pierde y comienzan a actuar como un todo unificado con un único propósito, la búsqueda de comida. Cuando este cúmulo encuentra un lugar adecuado a sus necesidades, inicia un proceso de diferenciación celular, formando un tallo con una masa esférica que contiene esporas en su parte superior, la que posteriormente se rompe lanzando algunas células a un nuevo ambiente. En este recuperan su individualidad de organismos unicelulares, reiniciando el ciclo de vida.

En las líneas anteriores se han dado ejemplos de cómo diversos fenómenos complejos, exhiben interacciones simples, de corto alcance, de unidades que son influidas e influyen en la configuración del medio en el que desarrollan su dinámica. Una de las estrategias principales para la comprensión y caracterización de estos sistemas es la Modelación Basada en Agentes (AMB por sus siglas en inglés). Esta tiene como principal objetivo la descripción y predicción del comportamiento de un sistema dinámico simulando la interacción entre sus partes (llamadas agentes), a partir de reglas básicas que le permiten evolucionar en el tiempo, mostrando un comportamiento macroscópico auto-organizado (Castiglione, 2006).

Hernández, Carrión y Arrieta (2014) en el marco de la RELME 28 (Barranquilla, Colombia) utilizaron la interfaz *NetLogo* como escenario pertinente para la visualización y análisis de las dinámicas mencionadas. Se tomó como ejemplo un modelo computacional que capta el proceso de agregación de amebas a partir de la modelación de secreción de químicos llamados feromonas y movimientos aleatorios en su búsqueda, como resultado se aprecian procesos emergentes similares a los observados en experimentos *in vitro* (Golbeter y Segel, 1977). Este ejemplo muestra que reglas de interacción simples posibilitan la emergencia de unidades mayores, compuestas por los agentes, mostrando la enacción de estados de cooperación en sus movimientos como grupo.

En los fenómenos sociales operan interacciones de un tipo análogo a las que se han mencionado, pero el tipo de agentes con los que se trabaja, se encuentran en un nivel de organización provisto de sistema nervioso, mismo que ya es un sistema de segundo orden y que se constituye en la colaboración de las neuronas. Por lo que los acoplamientos estructurales se dicen de tercer orden (Varela, 1998).

UNA MIRADA ENACTIVA AL ACTO DE CONOCER

Subyace a toda aproximación educativa, una concepción del acto de conocer. Actualmente el constructivismo está a la base de las propuestas educativas concibiendo una cognición que construye saber a partir de lo que se vive. Sin embargo las significaciones de este proceso son variadas. En ellas predomina una mente que funciona re-presentando al mundo. Así la mente es tal

en la medida en que re-presenta lo real y a partir de ello configura el actuar de modo exitoso, en las situaciones que se viven. Mundo re-presentado, que es actualizado en la medida que la fidelidad de la representación de lo real, posibilite actuaciones exitosas. Sin embargo las ciencias cognitivas sugieren un funcionamiento de la mente diferente. En este apartado, se aborda la aproximación enactiva (Varela 2000), la cual asume al acto de conocer desde la idea de acoplamiento estructural con aquello que toca vivir.

Varela (2000) entiende a la mente como una totalidad corporal, que no se restringe al cerebro sino al sujeto que vive. Aquí la idea de lo vivo surge como la idea de la entidad autopoietica, donde la mirada no solo es hacia sus componentes biológicos, sino a la organización y la colaboración entre aquello que constituye a lo vivo. Es una organización colaborativa y en constante automodificación que constituye una identidad propia que lo diferencia, a la vez que lo integra, de lo otro. A partir de la interacción de la entidad con los otros y con el medio que le toca vivir, emerge el fenómeno interpretativo. Al decir de Varela "la significación surge en referencia a una identidad bien definida y no se explica por la captación de información a partir de una exterioridad" (Maturana y Varela, 2004, pp. 46).

El acto cognitivo deja de pensarse en términos de lo externo representado en lo interno para obtener respuestas adecuadas, para entender que el conocer se constituye en la medida que quien conoce, desde su organización y estructura interna (tanto biológica como conceptual), se imbrica y es afectado por lo que vive. Toda interacción impacta la organización de lo vivo, la tensiona y por tanto emerge, desde esta interacción, la necesidad de automodificación de la organización cognitiva del sujeto, con el propósito mantener la identidad. Así emerge una idea o significación de lo que se vive, la cual no es determinada por externalidades, sino que es autoconstruida desde la organización propia de aquello que constituye la mente. Es un acoplamiento estructural entre quien conoce y su entorno, lo que posibilita disposiciones particulares para estar en el mundo que se vive. Por ejemplo, el autorretrato de Frida Kahlo, nos aproxima a la construcción propia de su mundo, a la carga de significaciones sobre sí misma que construye la artista en la medida que vive y que interactúa, cognitivamente hablando, con su descripción de sí. El autorretrato de la figura, claramente difiere de la fotografía suya, en la cual, sujetos distintos significan a una mujer diferente.

Lo anterior implica que, a diferencia de posturas representacionistas, la construcción de saber emerge del constante estar en el mundo. Se da a partir del acoplamiento estructural constante en la historia ininterrumpida de interacciones con aquello que toca vivir. En este proceso quien conoce pone en acción, o trae a la mano, lo construido en situaciones similares o relacionadas y que le han permitido ser exitoso. Es decir, enacta (trae a escena) aquel mundo que ha significado en su historia, a la vez que, puesto en relación con lo que vive, se dan procesos continuos de evolución de sus significaciones.

En síntesis, el acto de conocer se entiende como acción efectiva, historia del acoplamiento estructural que enactúa un mundo y que funciona a través de una red de elementos interconectados capaces de cambios estructurales durante la historia ininterrumpida de vida.

El aprendizaje ocurrirá en la vivencia de quien participa de las situaciones de enseñanza. Será a partir de la experiencia del estudiante que este "enacta aquellos conjuntos de ideas y acciones con base en la historia ininterrumpida de coordinaciones con los entornos, con los otros, con los que ha

vivido, así como con los otros que concurren al aula, modificándolos y modificándose en la medida que actúan" (Carrasco, Díaz, Buendía, 2014), construyendo aprendizaje.

Entonces, indagar en la construcción de saber del estudiantado implica centrar la atención educativa en la colaboración y convivencia en que se involucra quien aprende. Construyendo una mirada integral en la cual lo operacional, lo experiencial y perceptual conforman un todo en la actividad de conocer del estudiante. Es buscar una mirada compleja (en el sentido de Morin, 1999), en la cual el aula requiere mirarse como algo entretejido, que no se puede separar. Así en la búsqueda de construir un saber no racionalizante, se ha de aceptar el desafío de mirar el todo integrado, en el cual las reducciones o constantificaciones de variables, muchas veces necesarias, quedan abiertas a constante revisión y a mostrarse insuficientes en la medida que conocemos más.

En Carrasco, Díaz y Buendía (2014) se busca una aproximación a los fenómenos de aprendizaje relacionados con el uso de figuraciones cartesianas y no cartesianas respecto de fenómenos de variación, que incorpora esta perspectiva. Asumiendo, por tanto, que al construir o trabajar con figuraciones de variación, se constituye una interrelación compleja entre quien figura, con el ambiente, con una figura y con un fenómeno, conformando un espacio epistémico de figuración que es, a la vez, operacional, experiencial y perceptual. Las figuraciones de fenómenos de los estudiantes responden a un diálogo entre actividad y mundos enactados por cada uno. En Carrasco, Arrieta, Pantoja (2015) la noción permite explicar las diferentes construcciones gráficas en torno a un fenómeno de variación y reconocer dos espacios epistémicos viviendo en la actividad escolar.

LO COMPLEJO EN UN DISPOSITIVO DE EVALUACIÓN PARA LOS APRENDIZAJES

Interesa en este apartado distinguir marcos de lo complejo para desentrañar elementos que concurren en lo educativo, ilustrar complejidades concurrentes, deconstruir, en particular, el aparecer fenomenológico de lo complejo en una práctica docente. Se analizan dos dispositivos de evaluación, cuyo sentido se aproxima a la valoración en tanto lazo recíproco complejo entre quien enseña y quien aprende, es decir, lo global en la evaluación es más que el contexto: es el conjunto que contiene partes diversas ligadas de manera inter-retroactiva u organizacional entre el estudiante y el docente. Intentando conjugar (distinguir y reunir al mismo tiempo) el desarrollo de cómo y qué aprende el que aprende y cómo y qué enseña el docente (Guzmán, 2012). De este modo, como se sostiene en el apartado anterior, los fenómenos de aprendizaje se construyen en el diálogo, colaboración y convivencia permanente.

La evaluación concurre como un dispositivo que supera la causalidad lineal entre lo que se enseña y lo que se aprende en tanto ocurre de un modo circular abierto, abriendo la posibilidad de constituirse en herramienta para jugarse como un espacio que da cabida a saberes que interactúan y se comportan en una reflexibilidad propia y transformadora (Morín, 2003).

En uno de los diseños se recurre a argumentos, procedimientos y herramientas para evaluar el despliegue de la argumentación de estudiantes cuando construyen conocimiento acerca del CO2, y en el otro, se evalúa una práctica estudiantil de resolución de problemas (Díaz-Moreno, Labarrere y Quintanilla, 2012). El diseño con foco en la competencia científica de resolución de problemas se remite a un protocolo de evaluación estandarizado, no por ello exento de matices de interés. El segundo diseño procura evaluar la competencia de argumentar, teniendo en cuenta que se

despliegan a partir de esta, otras competencias también, en la cuestión de si el CO2 es ángel o demonio, poniendo en situación de disyuntiva al estudiantado y obligándolo a la vez a tomar partido de manera justificada, en su primera hipótesis. Luego, con datos, información y análisis provenientes de una investigación elaboran una segunda hipótesis, para después contrastarla con la primera, a fin de validar la mejor argumentada. El dispositivo supone una actividad científica escolar que se despliega en dos sesiones. Considera valorar el "despliegue" de argumentaciones estudiantiles concurrentes con: a) cada una de las hipótesis sucesivas; b) la defensa de sus posturas, luego de argumentar su segunda hipótesis; y, c) a propósito de su postura final, fruto del contraste de hipótesis. Este diseño da un paso más allá en la actividad científica escolar que propone, misma que ya incorpora una investigación estudiantil, por lo que conlleva un saber hacer concomitante.

Siendo el propósito del diseño, poner al estudiantado en una situación que le permita debatir con base en un conocimiento científico, su particular configuración lleva a los estudiantes al despliegue de la competencia de la argumentación en el marco de una actividad de investigación, a la vez que como herramienta coadyuvante al desarrollo de su pensamiento científico, como portadora de indicios de unos atributos de sujetos competentes. Esta configuración de actividad formadora y dispositivo de evaluación, hace plausible reportar génesis y momentos de desarrollo de la argumentación científica. De modo particular, el diseño aporta a que monitoricen sus modos de entender y abordar la actividad científica escolar, cuando pide responder de modo global y concluyendo el contraste de conjeturas, la respuesta que sostienen después de todo el proceso. Asimismo conduce a los estudiantes a aprender de su propia práctica indagativa, en marcos de gestión tanto individuales como colectivos.

En suma, para el dispositivo centrado en el despliegue de la argumentación científica, los docentes hacen jugar a ésta un rol complejo y abarcador, a saber, validar internamente la actividad científica estudiantil, al tensionar sus epistemes previas a la experiencia – hipótesis I - con aquellos nuevos entendimientos configurados con base en esa experiencia – hipótesis II . Este dispositivo abre espacio a considerar que dos personas, aún alcanzando el "mismo" nivel de desempeño ante las exigencias de una tarea específica, no lo logran movilizando exactamente los mismos recursos personales, por similares que puedan parecer en procesos evaluativos, debiendo considerarse el grado de variabilidad entre estudiantes.

Se constata, con base en tal diseño, la relevancia central de la configuración en una propuesta formativo-evaluativa, en vistas a propiciar sujetos competentes, la absoluta importancia de la disposición e interrelación de sus partes componentes, mismas que le dan su peculiar forma y propiedades agregadas. Estos componentes se pueden corresponder con instrumentos muy usuales a las prácticas docentes, en aulas de ciencia y de matemáticas, pero que responden a configuraciones que podríamos adjetivar ya sea de retroactivas, (la hipótesis I se vuelve a revisar con base en antecedentes de una acción investigativa), y, de sistémicas (la competencia argumentativa aborda a un quehacer científico escolar en su conjunto). Configuración formativo-evaluadora que responde a una diversidad de elementos, mismos que se juegan en distintos planos y tiempos. Son atributos que pudiesen constituirse en condiciones necesarias, por lo que exigibles, a modelos de evaluación para los aprendizajes.

A MODO DE CONCLUSIÓN

Ante el surgimiento de marcos y modos para abordar lo complejo, se avanza hacia un horizonte de reflexión para integrar miradas complejas al fenómeno educativo, con el propósito de distinguir y enriquecer marcos teóricos que concurren a interpretar o explicar lo matemático educativo.

Se constató una convergencia entre distintas disciplinas hacia una nueva forma de construir ciencia, basada en la simulación o síntesis de sistemas complejos, dando cuenta de la complejidad de los sistemas vivos, de una coexistencia entre orden y desorden, complejidad que busca ser aprehendida mediante la simulación de entornos virtuales. En ella emergen los procesos de interacción que, desde "reglas simples" van construyendo "interacciones complejas". Por medio de dichas interacciones se promueve la auto-organización y la emergencia de patrones que trascienden las características de las unidades y componentes individuales.

La discusión mostró que la centración en procesos de interacción revela configuraciones: autoorganizadas en la interacción celular, enactivas en la interacción cognitiva, y, de crucial disposición e interrelación de partes componentes que dotan de forma peculiar y propiedades agregadas a medios de evaluación de docentes. Son niveles diferentes, que pueden ser interpretados/explicados desde la triada configuración-interacción-emergencia. Surge una pregunta en el mismo sentido complejo: ¿Será posible encontrar regularidades para promover formas emergentes de comunicación, que favorezcan la enseñanza y los aprendizajes matemáticos?

Otro aspecto que se releva en la discusión es la configuración de los elementos que interactúan: ¿Es la disposición de las partes una dimensión relevante de incorporar en nuevas prácticas? Otras disposiciones y modos de interrelación traerán consigo otras formas y otras propiedades.

En el aula, como espacio de interacción en configuraciones particulares de sujetos que enactan aquello que han construido en su historia de vida, emergerán aspectos nuevos y persistirán otros. Responder a por qué algunas enacciones perduran y otras no lo hacen, ayudaría a entender y fortalecer prácticas de aula que promuevan aprendizajes matemáticos, cuando el aula es objeto de innovaciones.

La reflexión estableció como punto de encuentro a la triada Configuración-Interacción-Emergencia. Desde esta tríada se dispone una mirada compleja de los procesos educativos, entendidos estos en dimensiones interactivas entre sujetos, de cada sujeto que conoce y de aquello que se quiere conocer.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Carrasco, E., Díaz-Moreno y L., Buendía, G. (2014) Figuración de lo que varía. *Enseñanza de las Ciencias*. 32(3) 365-384.

Díaz-Moreno, L., Labarrere y A., Quintanilla, M. (2012). Promoviendo sujetos competentes ante la ciencia y sus problemas. Análisis de micro diseños docentes de evaluación. En: *Las competencias del pensamiento científico desde las voces del aula*. ISBN: 978-956-332-719-9. CONICYT-AKA, Finlandia–PUCCH, Santiago de Chile.

Flake, G. (2000). *The Computational Beauty of Nature: Computer Explorations of Fractals, Chaos, Complex Systems, and Adaptation*. MIT Press Books.

Goldbeter, A., Segal, L. (1977). Unified mechanism for relay and oscillations of cyclic AMP in Dictyostelium discoideum. Proc. Natl. Ac. (74)127-135.

Guzmán, J. (2012). Evaluación: reflexión desde la complejidad. Instituto Pedagógico "Alberto Escobar Lara" Maracay. Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

Maturana, H., Varela, F. (2004) *De máquinas y Seres Vivos*. Ed. Universitaria. Chile.

Morin, E. (1977) *El metodo I*. Editions du Suil. Portugal.

Morin, E. (1994) *Introducción al pensamiento complejo*. Gedisa, Barcelona.

Morín, E. (2003). *Manual de iniciación pedagógica al pensamiento complejo*. Publicaciones Unesco.

NetLogo itself: Wilensky, U. 1999. NetLogo. http://ccl.northwestern.edu/netlogo/. Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University. Evanston, IL.

Resnick M., (2001). *Tortugas, termitas y atascos de tráfico: exploraciones sobre micromundos masivamente paralelos*, Gedisa, España.

Varela, F. (2000). *El fenómeno de la vida*. Santiago: Noreste Ltda.

UNA REFLEXIÓN SOBRE LA MODELACIÓN DESDE LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

José David Zaldívar Rojas
Universidad Autónoma de Coahuila (México)
david.zaldivar@uadec.edu.mx

Palabras clave: modelación, socioepistemología, usos de las gráficas, cotidiano del ciudadano

Key words: modeling, socioepistemology, use of graphs, quotidian of the citizen

RESUMEN: Se reportan los avances de una revisión bibliográfica sobre el estatus de la modelación en la literatura especializada y en particular de los aportes desde la Socioepistemología. Centrándonos en un par de posturas que desde la construcción social del conocimiento matemático discuten sobre la modelación, evidenciamos diferencias y puntos de encuentro con la finalidad de avanzar hacia una caracterización de la función de dicha categoría. Se destaca que la noción de práctica social modifica las relaciones con el conocimiento y por lo tanto la base de los diseños en modelación y los productos que se generan de ésta. La presente revisión forma parte de una investigación en curso que pretende posicionar a la modelación como una base epistemológica para el diseño de situaciones de aprendizaje como material auxiliar que pueda ser utilizado en cursos de Profesionalización de docentes del nivel básico-secundaria en México.

ABSTRACT: We report the progress of a review on the status of modeling in the specialized literature and in particular the contributions of Socioepistemology. Focusing on a pair of positions from the social construction of mathematical knowledge discuss about the modeling, we show differences and meeting points with the aim of moving towards a characterization of the function of the category. It is emphasized that the notion of social practice modifies the relations with knowledge and therefore the basis of the designs in the modeling and the products that are generated from it. The present review is part of a research in the course that seeks to position the modeling as an epistemological basis for the design of learning situations as auxiliary material that was used in courses of Professionalism of teachers of basic level in Mexico.

INTRODUCCIÓN

La *Modelación Matemática* y las *Aplicaciones* son, en general, temas centrales que en los últimos años se convirtieron en tendencias dentro de la investigación en Matemática Educativa. Esta importancia relacionada a dichos tópicos se debe principalmente a la evidencia brindada en diversas investigaciones que hacían ver la poca vinculación que existe entre la escuela y su entorno (Lave, 1988), y a la imposibilidad de la *transferencia* del conocimiento aprendido en la escuela a la vida cotidiana de los estudiantes (Arrieta y Díaz, 2015).

Al respecto, Carraher, Carraher y Shliemann (1991) nos hacían repensar aspectos de la problemática anterior. Estos autores mencionan que el proceso de explicación del fracaso escolar había sido una búsqueda de culpables y muestran ejemplos de prácticas cotidianas (como la compra-venta) donde se notan aspectos del conocimiento matemático que se encuentran basados en una lógica interna según la situación, sin embargo, que parecen no tener eco y ser aprovechados por la escuela. Las críticas las resumen en términos de que la matemática escolar asume que al tratar contenidos matemáticos de manera "formal" y "generalizable", implica necesariamente su transferencia a otros escenarios.

Ante los pocos resultados al respecto de la afirmación anterior, hubo en el mundo un incremento y atención especial sobre tópicos relativos a la modelación y aplicaciones con el objetivo de entender las relaciones entre la "realidad" y la "matemática escolar", con la finalidad de que la "realidad" permita la creación de acercamientos didácticos innovadores y plausibles para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, pero también cercanos a lo que los estudiantes viven en su día a día. Esto se comprueba, por ejemplo, en el lugar que le brindan en eventos internacionales de investigación o la amplia literatura especializada sobre dichos tópicos (por ejemplo el grupo de discusión en ICME: *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics*; o en congresos latinoamericanos como la RELME con el grupo de discusión *Multidisciplina y Modelación. Un diálogo entre la ingeniería y la matemática educativa*, por mencionar algunos). Inclusive en diversos libros de texto de diferentes niveles se aprecia una tendencia a integrar un "mundo extra-matemático" que enriquezca a las actividades y al currículo con la finalidad de hacer que las matemáticas sean útiles fuera del ámbito escolar (Niss, et al., 2007).

Sin embargo, se reconoce que estas categorías aunque juegan un rol importante en las aulas de clases de muchos países y es considerada dentro de los planes curriculares como una manera de enseñar y aprender matemáticas, aún existe una brecha importante entre los ideales expresados en las reformas curriculares innovadoras y las prácticas escolares que sustancialmente se desarrollan día a día. Se afirma que es muy complejo encontrar *actividades de modelación genuinas* dentro del salón de clases de matemáticas (Niss, et al., 2007).

Posiblemente el punto neurálgico, desde nuestra mirada, radica en la forma en la que se confrontan por un lado, las prácticas matemáticas y la realidad, por el otro. La búsqueda de un diálogo o "puentes" entre estos dos dominios, trae consigo vertientes epistemológicas y didácticas en las cuales se consideran también diferentes maneras de caracterizar a la modelación y el rol que se le atribuye durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Justo una postura epistemológica sobre la modelación desde la construcción social del conocimiento es el punto central de la discusión en este reporte.

MODELACIÓN MATEMÁTICA Y APLICACIONES: UNA MIRADA CRÍTICA

En la literatura las acepciones sobre Modelación Matemática y Aplicaciones generalmente son variadas. Sin embargo, en términos generales dichas acepciones convergen en que la modelación matemática es un *proceso* que pretende entablar una relación, a través de *modelos matemáticos*, entre un mundo extra-matemático y las matemáticas (Figura 1 y 2).

Figura 1. Matemáticas y el resto del mundo (Niss, Blum y Galbraith, 2007, p. 4).

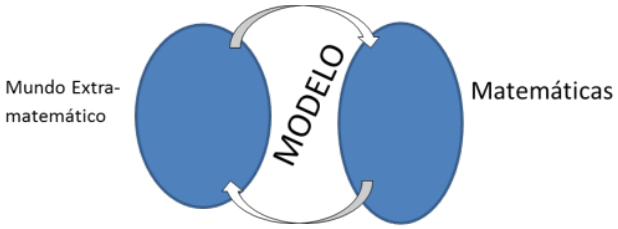
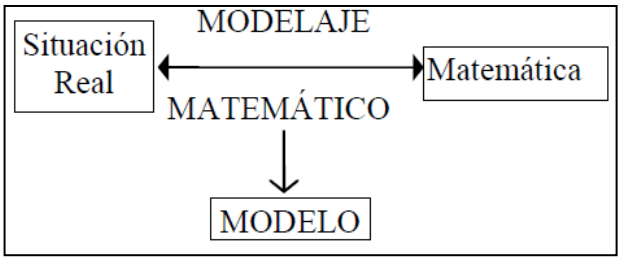


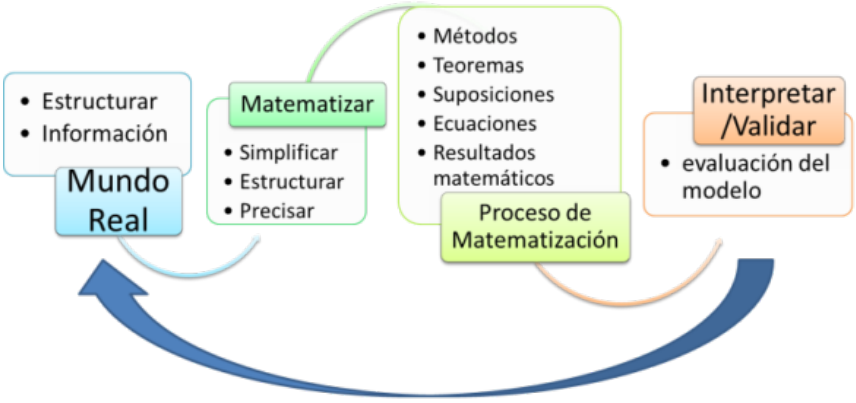
Figura 2. Esquema "Matemáticas-Modelaje-Realidad" (Biembengut y Hein, 1997)



Lo anterior implica que la modelación sea considerada en dos orientaciones con relación al aprendizaje de las matemáticas: aprender matemáticas para desarrollar competencias en la aplicación de las mismas con propósitos extra-matemáticos; y la modelación como un medio para aprender matemáticas (Niss, et al., 2007; García, Gascón, Higueras, Bosch, 2006).

En los casos anteriores, el proceso de modelación matemática se inicia con la conceptualización de alguna Situación-Problema. Posteriormente, a través de simplificar, estructurar, precisar los datos y relaciones, así como establecer suposiciones de entrada en el dominio extra-matemático, se traduce la situación al lenguaje matemático, es decir, se matematiza. En esta *matematización* se utilizan métodos, teoremas y relaciones matemáticas conocidas, se resuelven las ecuaciones derivadas y se dan datos como resultados matemáticos. Estos resultados son traducidos posteriormente al mundo extra-matemático con la finalidad de interpretar resultados, validar el modelo y evaluarlo con base en la matemática y la plausibilidad de los datos para dar solución al problema real. Este ciclo se repite con la intención de validarlo (Niss, et al., 2007; Biembengut y Hein, 1997) (ver figura 3).

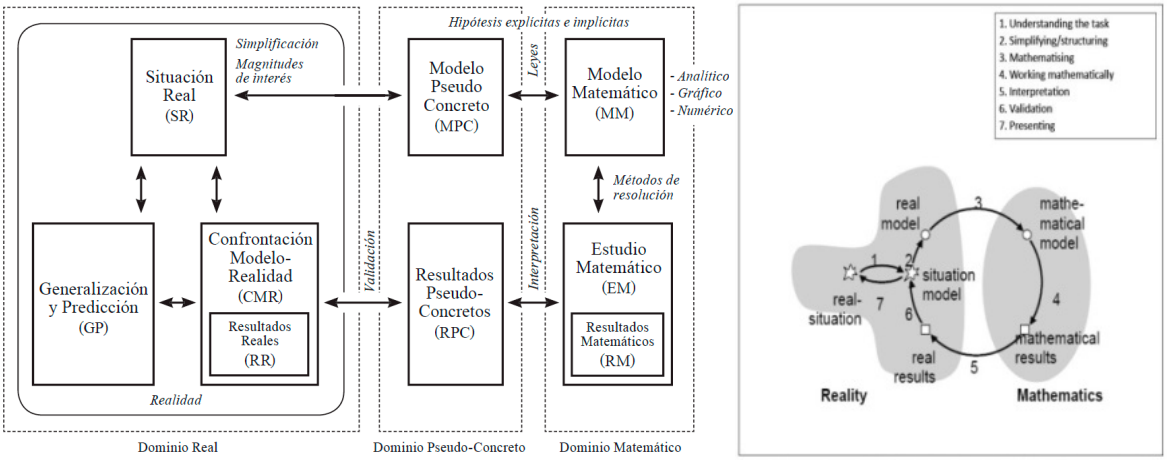
Figura 3. Proceso de modelación matemática



Resaltamos que, al igual que en García et al. (2006), dentro del estudio de la modelación para la escuela existen dos tendencias principales. La primera se concentra en la búsqueda de sistemas "apropiados" a modelar y de "buenas" aplicaciones con la intención de involucrar a los estudiantes en el proceso de modelación. Mientras que la segunda tendencia se enfoca en la manera en la cual se pueden manejar esos sistemas y modelos "apropiados" dentro de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esta tendencia se resume entonces en entender el proceso de *obtener "modelos"*, por lo que definir y resumir este proceso en *ciclos* y caracterizarlos adquiere relevancia. Pero además, la modelación hace evidente la separación entre la realidad extra-escolar y la matemática, al intentar relacionarlas (Arrieta y Díaz, 2015).

Este proceso de modelación que se menciona en la figura 3, se plantea como la base de muchos otros procesos que ponen atención especial a ciertos elementos del proceso y lo complejizan (ver figura 4: ciclo de modelación en Borromeo, 2006 y el ciclo de modelación en Rodríguez, 2010). Como se puede notar, en algunos ciclos de modelación se ingresa a la *experimentación* como una característica subyacente a la modelación, con lo cual se llama la atención a la interacción con el fenómeno a modelar.

Figura 4. Ciclo de modelación de Rodríguez, 2010 y de Borromeo, 2006.



Sin embargo, bajo los tipos de trabajos anteriores pareciera que se atiende solamente a una orientación "didáctica" y una mirada centrada en lo representacional. Centrar a la Modelación únicamente como una *aplicación de la matemática,* o en un nivel *representacional* o en la *matematización de situaciones "extra-matemáticas"* (Cordero, 2006; Bosh, et al., 2006) no permiten reconocer la naturaleza y la transversalidad del conocimiento matemático en diferentes dominios, es decir, *los usos del CM en escenarios no escolares*. Coincidimos con Cordero (2006) cuando menciona que las potencialidades de la modelación en el sistema didáctico no se desarrollarán completamente si antes no se reconoce al conocimiento matemático como una *construcción social*, lo que conlleva cuestionar no en sí a la matemática o a la modelación, sino su *función social*. Estas consideraciones permiten rupturas con las posiciones anteriores y caracterizar a la modelación como una *práctica que trasciende y transforma al objeto en cuestión*, lo cual significa que es en sí misma, una construcción de conocimiento matemático (Cordero, 2006). Su función no se agota en lo representacional y en la búsqueda de modelos, sino que incluye aspectos de la actividad humana, los usos del conocimiento en situaciones específicas y un diálogo con el *cotidiano del ciudadano* (Zaldívar, 2014).

LA PRÁCTICA DE MODELACIÓN EN SOCIOEPISTEMOLOGÍA

La Teoría Socioepistemológica (TS) trata con fenómenos de producción, adquisición y de difusión del conocimiento matemático (CM) desde una perspectiva sistémica y múltiple, cuya finalidad es el rediseño del discurso Matemático Escolar (dME). Para ello, *descentra la mirada en los objetos y problematiza al saber,* al plantear la incorporación a la investigación de la epistemología del conocimiento, de su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía su enseñanza (Cantoral, 2013). La TS apuesta por un nivel funcional del CM, puesto que entiende toda relación didáctica como una *construcción del conocimiento en la organización del grupo humano, normado por lo institucional y lo cultural* (Cordero, 2006), lo cual implica el reconocimiento y delimitación de los *usos del conocimiento* en situaciones específicas, donde adquiere sentido y significación. Para ello postula que antes de hablar de un entramado de conceptos y definiciones matemáticas, se debe poner atención a las *prácticas sociales* (PS) que permiten y acompañan la conformación de dichos conceptos matemáticos. Modelar entonces, la *construcción social del* CM normado por prácticas sociales es crucial para dicho encuadre teórico, lo cual implica diseñar situaciones dotadas de intencionalidad para la intervención didáctica y la cual estará expresada en los usos del CM que los grupos humanos hagan, mientras este se resignifica.

Ahora bien, ¿qué implicaciones tiene este posicionamiento epistemológico y ontológico ante el CM y su construcción? Desde nuestra reflexión, replantea la mirada sobre *lo que se produce* en la práctica de modelación y su *función,* cuando los objetos matemáticos no son el centro de la discusión o cuando el énfasis no se encuentra en el análisis de los procesos cognitivos que acompañan a las tareas de modelación. Pero por otro lado, este posicionamiento implica un viraje en el diseño de actividades, puesto que se ingresan categorías de conocimiento matemático que se plantean como *socioepistemologías del CM*, que devinieron de prácticas sociales y se habilitan en lo escolar.

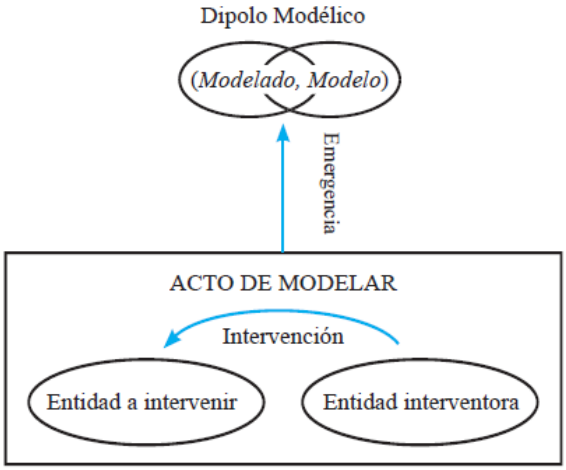
En la siguiente sección, reflexionaremos sobre un par de ejemplos para ilustrar este último punto: "La Elasticidad de los Resortes" (Arrieta y Díaz, 2015) y "La Situación del Resorte" (Zaldívar, 2014).

En ambos casos, se reconoce la función normativa de la práctica social a través de *situaciones específicas* como un elemento clave para el diseño. Lo anterior conlleva una reflexión alternativa sobre la modelación como la práctica que podría establecer un posible diálogo entre la realidad y el discurso Matemático Escolar (dME) y aporta elementos para un rediseño del mismo.

UN PAR DE CASOS DE ANÁLISIS

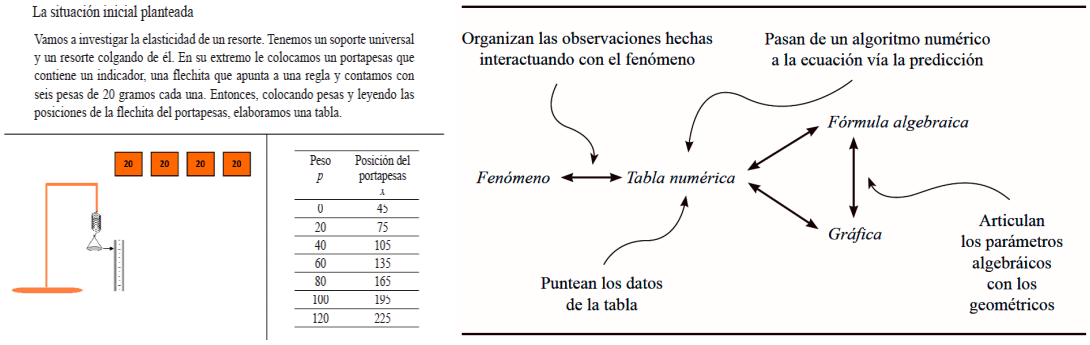
En el trabajo de Arrieta y Díaz (2015) se considera a la modelación como: *"*[…] *una práctica que articula entidades, para configurar otras nuevas. La articulación se establece al intervenir en una de las entidades desde la otra, proveyendo a la vivencia de quién modela, de una tercera y nueva entidad: el dipolo modélico"* (p.45).

Figura 5. La práctica de modelación (Arrieta y Díaz, 2015, p. 36)



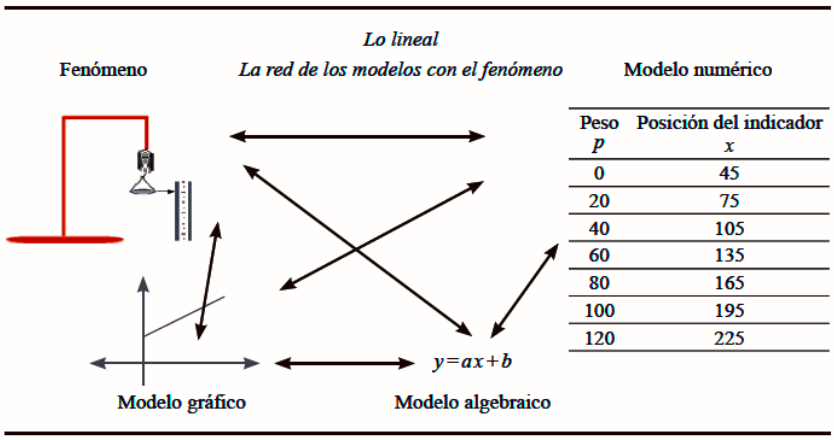
A partir de dicha caracterización, se plantea "La elasticidad de los resortes" (Figura 6), como ejemplo de un diseño de aprendizaje basado en la modelación lineal a partir de la *práctica de modelación "Numerización de Fenómenos"* (Ver figura 7). Dicha práctica, parte de datos numéricos obtenidos de la interacción con el fenómeno en cuestión y experimentar sobre él, con la intención de obtener *redes de modelos con el fenómeno.*

Figura 6 y 7. Respectivamente. "La elasticidad de los resortes" (p.38). La numerización de los fenómenos (p.37).



Desde nuestro análisis, podemos notar que estos autores estructuran el diseño en 4 fases relacionadas entre sí. La primera, que se refiere a la *experimentación,* permite a los estudiantes interactuar de manera vivencial, discursiva y virtual con el fenómeno. La segunda fase, el *acto de modelar,* se basa en proponer a la *predicción* como el enlace que articula la tabla de datos y el fenómeno, pero que además posibilita la aparición de *modelos*. Por su parte, en la tercera fase se articulan los modelos entre sí y con el fenómeno en cuestión, con lo cual se configura una *red de modelos* (ver figura 8). En la cuarta y última fase, los autores plantean que la red construida debe descentrarse del fenómeno vía la *analogía*, con la finalidad de configurar una familia de redes asociadas a fenómenos análogos.

Figura 8. Red de lo lineal (Arrieta y Díaz, 2015, p.43).



En este caso, los autores plantean que el resultado que los estudiantes obtienen tiene que ver con *lo lineal* como una familia de redes asociadas a fenómenos. En términos de investigación los autores aportan una reflexión profunda sobre el *acto de modelar* y la manera en la cual se constituyen *dipolos modélicos* cuando se parte de una epistemología como la "Numerización de los Fenómenos".

Por otro lado, en Zaldívar (2014) se plantea "La situación del Resorte", la cual consiste en modelar el movimiento de una pesa unida a un resorte (ver figura 9).

Figura 9. Instrumentos de modelación y simulación (Zaldívar, 2014)

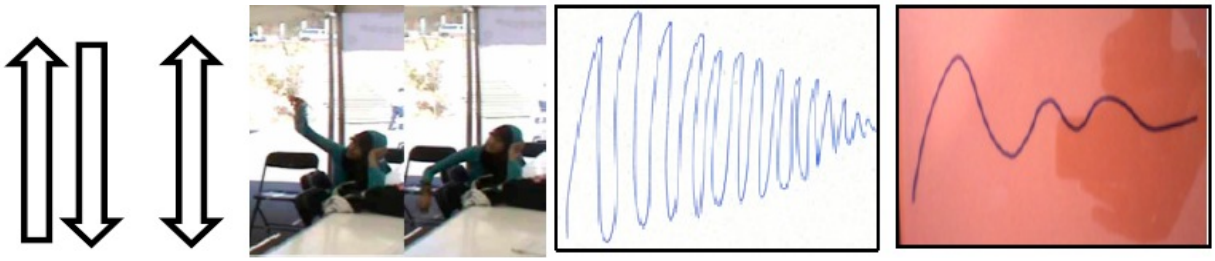
Para el diseño de dicha situación, el autor se basó en la Categoría *Modelación-Graficación* (M-G) (Suárez, 2014) (ver Cuadro 1), que desde la TS se plantea como una epistemología para el Cálculo escolar y consiste en potenciar a la graficación a través de la discusión de aspectos variacionales y tendenciales en las gráficas de las funciones por medio de articular la modelación con tecnología escolar (sensores) para el diseño de situaciones de movimiento. Dicha categoría posibilita argumentos sobre el Comportamiento Tendencial de las Funciones (CTF).

Cuadro 1. Elementos de construcción social para la M-G (Suárez, 2014)

Elementos de construcción	Situación de Modelación-Graficación
Significados	Patrones de comportamiento gráficos y analíticos
Procedimientos	Variación de parámetros
Procesos-Objetos (Lo que le es útil al humano)	Instrucción que organiza comportamientos
Argumentación	Comportamiento Tendencial de las Funciones

En el caso de la situación del resorte, se analizan los *usos de las gráficas* a partir de las producciones escritas, gestuales y discursivas de los participantes cuando se les cuestionaba primero sobre *el movimiento del resorte al ponerle una pesa,* para posteriormente problematizar sus producciones en términos de la variación y la tendencia, como argumentos que permitían la *resignificación* del uso de la gráfica. En este caso, lo algebraico y lo algorítmico tienen un rol secundario debido a las características propias del escenario donde se hicieron las puestas en escena, además de que el interés está en el *argumento* que la categoría provoca.

Figura 10. Producciones de los participantes de la Situación del Resorte



Esta situación se organiza en tres momentos de acuerdo a la epistemología: un momento de mantenimiento, uno de crisis y uno de funcionalidad. Estos momentos permitieron dejar ver *el cotidiano de los ciudadanos en cuanto formas culturales de uso de las gráficas*, sus funcionamientos y formas opacas en el dME y argumentaciones sobre el CM que se discutía.

Como resultado de esta investigación se obtiene una *epistemología revisada de los usos de las gráficas*, que se obtiene del análisis y de confrontar la evidencia con la epistemología propuesta en

la M-G. El análisis evidencia argumentaciones basadas en la *orientación a través de trayectorias*, la cual contribuye al análisis de estructuras que posteriormente deviene en argumentaciones que permitieron *anticipar el comportamiento del sistema a través de la curva y la gráfica*, incluyendo elementos de referencia, variación y tendencia, que posibilitan la resignificación.

COMENTARIOS FINALES

Sin duda que las reflexiones sobre la Modelación no se agotan con nuestra revisión. Sin embargo, al centrarnos en un cambio de mirada que ofrece la TS, consideramos que aportamos elementos a la discusión internacional sobre el tema.

La inserción de la modelación en las aulas de matemáticas de diversos niveles cada vez toma más relevancia debido principalmente a los crecientes avances del uso de la matemática en la ciencia, la tecnología y en la vida de las personas, sin embargo, su inserción en las aulas aún no es satisfactoria (Niss, et al., 2007). Lo anterior implica que desde la investigación también debemos avanzar en entender cómo es posible habilitarla en el sistema didáctico a partir de los resultados de investigación y cómo, por ejemplo, su inserción también repercutiría (o debería repercutir) en la formación y profesionalización de los docentes en matemáticas, y sin duda, en un *rediseño del dME* (Cantoral, 2013). Consideramos que esta tendencia continuará, inclusive con necesidades centradas en la modelación con apoyo de tecnología.

Con respecto a los ejemplos que desde la TS se mostraron con respecto a la modelación, sin duda tensan nociones como la de *aula de matemáticas,* del *sujeto* mismo y las *funciones* del CM.

Aunque las situaciones propuestas en ambos ejemplos tienen que ver con experimentar a través de un resorte, el tipo de análisis y los resultados obtenidos tienen productos peculiares. Consideramos que los análisis de Arrieta y Díaz (2015) se encuentran enfocados principalmente a la estructura representacional, de ahí que sus acentos sea en articular una *red de modelos* (gráfico, algebraico, numérico), aunque los autores afirman que la *relación entre modelo y modelado no es representacionista, es articuladora* (p.46).

Sin embargo, en ambos casos la manera de operar y sistematizar a la PS dentro de un escenario institucional particular guarda cierta semejanza. Ambos diseños parten de que la modelación debería ser algo más robusto que *aplicar la matemática* o *matematizar la realidad;* ya que al considerarla como una *práctica* es posible, por un lado, *intervenir en una entidad a través de otra* (Arrieta y Díaz, 2015) y por otro, *argumentar sobre la situación en cuestión* (Cordero, 2006). El rol asignado a la *epistemología* es crucial en ambas propuestas, pero además permite conformar y habilitar ciertas categorías en el sistema didáctico sustancialmente diferente a lo que se encuentra. En el caso de Arrieta y Díaz, la base de su diseño de aprendizaje la encuentran en la práctica de modelación que denominan “Numerización de Fenómenos”. Mientras que en el caso de Zaldívar (2014), la situación de Modelación-Graficación proporciona un marco de referencia para que los participantes resignifiquen la estabilidad a través de un *uso de las gráficas.* De esta manera, *aquello que se produce en la modelación con respecto al CM* asociado a cada diseño es “algo más que conceptos aislados”, es, por un lado, una *red de modelos que se articula a fenómenos* y como en el trabajo de Zaldívar, son *resignificaciones del uso de las gráficas que conforman una epistemología revisada*. En este último caso, la *situación específica* es la que epistemológicamente

habilita intencionalmente la PS en un escenario particular. El siguiente cuadro 2 recupera un análisis sobre los trabajos anteriormente comentados.

Cuadro 2. Elementos de análisis

Base del diseño de situación	
Deconstrucción de la Práctica Numeralización de los Fenómenos (Arrieta, 2003)	*Epistemología de Prácticas* Situación de Modelación-Graficación (Suárez, 2014)
El análisis de datos	
Énfasis en delimitar los Dipolos Modélicos y sus articulaciones *(Lo Modelado, El Modelo)* (fenómeno, tabla de datos) (fenómeno, razón de cambio) (fenómeno, ecuación)	*Énfasis en las argumentaciones a partir de los Usos de las gráficas* (funcionamiento - forma) Permanencia-Variación-Tendencia
Se problematiza a través de…	
Predicción	Comportamiento Tendencial y Variación
Resultado	
Red de lo Lineal (Herramientas) Deconstrucción de las prácticas	Epistemología Revisada o de Usos del CM Categorías del CM: Comportamiento Tendencial

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18(1), p. 19-48.

Biembengut, M. y Hein, N. (1997). Modelo, modelación y modelaje: métodos de enseñanza aprendizaje de matemáticas. *Épsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", 38,* 209-222.

Bosch, M.; García, F.; Gascón, J. y Ruiz-Higueras, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática, 18(2)*, p. 37-74.

Borromeo, F. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM, 38*(2), 86-95.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. España: Gedisa.

Carraher, T., Carraher, D., y Schliemann, A. (1991). En la vida diez, en la escuela cero. México: Siglo Veintiuno editores.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *La Matematica e la sua Didattica, 20*(1), 59-79.

García, F., Gascón, J., Ruiz-Higueras, L. y Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM,* 38(3), 226-246.

Lave, J. (1988). La cognición en la práctica. España: Paidós.

Niss, M., Blum, W. y Galbraith, P. (2007). Part 1. Introduction. En W. Blum, P. Galbraith, H-W. Henn, M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New York: Springer. 3-32.

Rodriguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(1), 117-143.

Suárez, L. (2014). *Modelación-Graficación para la matemática escolar.* México: Ediciones Díaz de Santos.

Zaldívar, D. (2014). *Un estudio de la resignificación del conocimiento matemático del ciudadano en un escenario no escolar*. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

AS AVALIAÇÕES OFICIAIS BRASILEIRAS E OS NÍVEIS DE CONHECIMENTO ESPERADO DOS ESTUDANTES

Sirlene Neves de Andrade, Marlene Alves Dias, José Valério Gomes da Silva
DER–Diretoria Regional Sul, UNIAN (Brasil)
sirlene-neves@hotmail.com, alvesdias@ig.com.br, valério.gomes@yahoo.com.br

Palavras chave: avaliações oficiais; níveis de conhecimento; matemática

Key words: official assessments; levels of knowledge; mathematics

RESUMO: Apresentamos aqui resultados da pesquisa, cujo objetivo é auxiliar os professores na construção, utilização e adequação de novas formas de trabalho que conduzam a um desenvolvimento de seus estudantes que esteja em consonância com as expectativas institucionais. Para isso, consideramos como referencial teórico a abordagem em termos de níveis de conhecimento esperado dos estudantes e a metodologia do estudo de caso, segundo Yin, desenvolvido por meio da análise e reflexão das possibilidades de trabalho. Os resultados mostram a importância de que os professores sejam capacitados, em particular, quando se introduzem novas propostas institucionais e se deseja que essas sejam articuladas com as já existentes.

ABSTRACT: We present here research results whose goal is to help teachers in the construction, use and adaptation of new working ways that lead to the development of their students in accordance with the institutional expectations. Therefore, we consider as theoretical framework: the approach in terms of knowledge levels expected from students and the case study methodology, according to Yin developed through the analysis and reflection of work possibilities. The results show the importance of empowering teachers especially when introducing new institutional proposals, and if these are to be coordinated with preexisting ones.

INTRODUÇÃO

Atualmente no Brasil, mais particularmente em São Paulo, os estudantes são avaliados de diferentes formas, dependendo das expectativas institucionais e da resposta que as propostas políticas esperam atingir.

Em princípio, os estudantes do Ensino Fundamental são avaliados por uma prova nacional (trienal), três provas estaduais (anuais) e uma prova internacional (trienal). É importante observar que essas avaliações exigem conhecimentos que muitas vezes não correspondem ao trabalho desenvolvido em sala de aula com os estudantes.

Assim, o objetivo da pesquisa é auxiliar os professores na construção, utilização e adequação de novas formas de trabalho que conduzam a um desenvolvimento de seus estudantes que esteja em consonância com as expectativas institucionais.

Para este artigo, tratamos apenas da prova estadual SARESP – Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo, que corresponde a uma avaliação anual do rendimento dos estudantes e que é realizada com os estudantes do segundo, terceiro, quinto, sétimo e nono ano do Ensino Fundamental e terceiro ano do Ensino Médio, ou seja, o estudante do segundo e terceiro anos é avaliado para que seja averiguado se está alfabetizado. Nos outros anos, a prova SARESP visa verificar se os conhecimentos dos estudantes estão em conformidade com as expectativas institucionais e, consequentemente, se eles estão preparados para a próxima etapa escolar. Trata-se de uma avaliação construída a partir do material elaborado por especialistas da Secretaria de Educação e que é distribuído para professores e estudantes.

Essa nova forma de trabalho, constituída de cadernos, São Paulo (2009, 2014), nos quais se desenvolvem os conteúdos das diferentes disciplinas, é disponibilizada pela Secretaria de Educação de São Paulo. Essa abordagem é uma tentativa de garantir conteúdos mínimos e minimizar as dificuldades dos estudantes e dos professores, pois esses últimos, muitas vezes, em função da carga de trabalho, não têm tempo e meios para fazer uma proposta que possa atingir seu grupo de estudantes, em geral, bastante heterogêneo.

Isso os conduz a utilizar materiais prontos, em especial, o livro didático que, no Brasil, é avaliado pelo Ministério da Educação, distribuído para as escolas e segue as indicações dos documentos oficiais.

Assim, para auxiliar no desenvolvimento dos conteúdos e na tentativa de melhorar o resultado da avaliação SARESP, os professores do estado de São Paulo são convidados a participar de orientações técnicas, nas quais são discutidas e comparadas as abordagens didáticas desenvolvidas nos livros didáticos indicados pelo Ministério da Educação e nos cadernos da Secretaria de Educação.

Isso nos levou a pesquisar junto a um grupo de professores do quinto e sexto anos do Ensino Fundamental, que trabalham com estudantes de idade entre 10 a 12 anos, as tarefas propostas para serem desenvolvidas nessas etapas escolares e, a partir delas, verificar quais aquelas que são privilegiadas pela avaliação SARESP, ou seja, a partir dessa nova necessidade, procurou-se desenvolver uma formação que levasse em conta esses aspectos.

Nessa perspectiva, optamos por realizar com esses professores uma pesquisa que nos permitisse identificar como eles são capazes de articular duas abordagens distintas e associá-las às expectativas institucionais apresentadas na avaliação SARESP.

Observamos que os professores são avaliados a partir dos resultados dessa prova e que dois meses antes de sua aplicação, em geral, as escolas trabalham unicamente nesse sentido, o que mostra a importância de uma investigação que auxilie os docentes no desenvolvimento dessa nova abordagem, o que está em conformidade com nosso objetivo de pesquisa, já enunciado acima.

Desta forma, considerando nosso objetivo, escolhemos analisar, de um modo geral, as tarefas propostas aos estudantes encontradas nos livros didáticos, no caderno do professor e aquelas que constam do relatório anual do SARESP, para trabalhá-las com os professores que participam das orientações técnicas oferecidas nas Diretorias regionais de ensino pela Secretaria Estadual da Educação.

Para a análise *a priori* das tarefas e para o desenvolvimento do trabalho com os professores, escolhemos como referencial teórico para a nossa pesquisa a ferramenta didática introduzida por Robert (1998), ou seja, a abordagem teórica em termos de níveis de conhecimento esperados dos estudantes, que apresentamos brevemente a seguir.

REFERENCIAL TEÓRICO

Robert (1997) introduz a noção de níveis de conceituação, indicando metaforicamente que se trata de uma prateleira em um campo conceitual de conhecimentos matemáticos, correspondendo a uma organização coerente de uma parte do campo, caracterizada pelos objetos matemáticos apresentados de uma determinada maneira, dos teoremas sobre esses objetos, dos métodos associados a esses teoremas e dos problemas que os estudantes podem resolver com os teoremas do nível considerado e utilizando esses métodos.

Segundo a pesquisadora, muitas noções matemáticas podem ser abordadas em vários níveis de conceituação, sempre parcialmente encaixados: os objetos iniciais mudam, eles se tornam mais gerais, isto permite introduzir novas estruturas, mais ricas, e para isso necessitam de um novo formalismo, adaptado. Analogamente, muitos problemas podem ser apresentados e resolvidos em vários níveis: sempre os exercícios ditos teóricos (i.e. gerais) de um determinado nível correspondem aos teoremas do nível seguinte.

Sendo assim, várias ordens de apresentação são sempre possíveis, não existe hierarquia absoluta entre esses níveis, que, pelo menos durante os estudos, dependem do ensino efetivo. Isto conduz Robert (1997) a considerar que os níveis de conceituação são os marcos que podemos identificar ao longo do ensino das noções trabalhadas em determinado campo conceitual.

Observamos aqui que Vergnaud (1990) denomina campo conceitual um conjunto de situações, cujo tratamento implica em esquemas, conceitos e teoremas em estreita conexão e também as representações linguajares e simbólicas suscetíveis de serem utilizadas para representar esse campo conceitual.

Robert (1998), com o objetivo de construir engenharias didáticas, após considerar os problemas gerais do ensino de Matemática na escola secundária, formula as questões: Como aprendemos nestes níveis? Como conceber cenários compatíveis com as hipóteses, as exigências e as

especificidades? Como experimentá-los? A resposta para estas questões leva a autora a considerar outras pesquisas para respondê-las.

Após distinguir atividade e tarefa, ou seja, as atividades são associadas ao que fazem os alunos e tarefas são associadas aos enunciados dos exercícios, Robert (1998) ressalta a importância das atividades a serem executadas pelos estudantes, a saber: a importância de escrever em matemática, a importância do trabalho pessoal e a importância de demonstrar em matemática.

Além disso, Robert (1998) explicita que, no Ensino Médio, estas atividades ficam mais próximas do trabalho dos matemáticos de profissão, o que se torna um modelo de prática para alguns professores, em particular, quando são consideradas as atividades dos estudantes.

Assim, Robert (1998), após considerar as ferramentas didáticas existentes, tais como: a noção de quadro, de registro de representação semiótica e de pontos de vista, ressalta a importância de se ponderar sobre as diferentes naturezas das noções a ensinar, isto é, o caráter formalizador, unificador e generalizador de determinadas noções desenvolvidas no Ensino Médio, o que conduz a avaliar também os diferentes níveis de conceituação.

Desta forma, para a construção de cenários de aprendizagem, Robert (1998) considera que, após ponderar sobre as condições anteriormente apresentadas, é preciso ainda levar em conta os níveis de conhecimento esperados para o funcionamento dos estudantes.

Robert (1998) define três níveis, ressaltando que eles são relativos a um dado nível de conceituação.

Estes níveis de conhecimento esperado dos estudantes são:

- O *nível técnico* que corresponde a funcionar de maneira isolada, local e concreta, correspondendo mais às ferramentas utilizadas pelos estudantes na solução de tarefas que lhe são propostas. Estas ferramentas compreendem também as definições. Por exemplo: Calcular a área de figuras desenhadas em malha quadriculada.
- O *nível mobilizável* é mais amplo, pois existe um início de justaposição de saberes de um determinado domínio, até mesmo uma organização, vários métodos podem ser mobilizados, os caráteres ferramenta e objeto são considerados. Mas o que está em jogo é explícito. Se um saber é identificado, ele é dito mobilizável se é acessível, se o estudante o utiliza corretamente. Por exemplo: Construir quadrados e retângulos com áreas previamente definidas.
- O *nível disponível* corresponde ao fato de saber resolver o que é proposto sem indicações, de poder, por exemplo, dar contraexemplos (encontrar ou inventar), mudar de quadros (relacionar), aplicar métodos não previstos. Esse nível de conhecimento está associado à familiaridade, ao conhecimento de situações de referência variadas, que o estudante sabe que conhece (servindo de terreno de experimentação), ao fato de dispor de sistemas de referência, de questionamentos, de uma organização. Pode-se considerar até a possibilidade de propor para si um problema ou fazer resumos. Por exemplo: Construir uma planta baixa e determinar a quantidade de piso necessária para ladrilhar o chão da cozinha.

Ressaltamos aqui que a noção de quadro citada por Robert corresponde à definição de Douady (1992), assim como a noção de registro de representação semiótica é a de Duval (1995) e a noção de ponto de vista corresponde à definição de Rogalski (2001).

Parece-nos importante observar aqui que os três níveis de conhecimento esperado dos estudantes, segundo definição de Robert (1998), são comparados no artigo sobre classificação de enunciados: níveis de competência do observatório "EVAPM" aos três níveis de competência do PISA, conforme Robert (2003).

Na sequência, apresentamos a metodologia da pesquisa.

METODOLOGIA DA PESQUISA

Em função do referencial teórico, a metodologia proposta para a pesquisa é o estudo de caso, à luz do ensinamento de Yin (2001), que corresponde a uma estratégia de pesquisa que compreende um método útil, quando o fenômeno a ser estudado é amplo e complexo e não pode ser estudado fora do contexto onde ocorre naturalmente.

O método utilizado foi o estudo das tarefas sobre as noções de perímetro e área que são propostas no material indicado para o quinto e sexto anos do Ensino Fundamental (estudantes de 10 e 11 anos), em livros didáticos, nos cadernos distribuídos pela Secretaria de Estado da Educação e nas questões do SARESP apresentadas nos relatórios 2010, 2011, 2012, 2013 e 2014.

A análise das tarefas foi realizada por meio da ferramenta teórica que corresponde aos níveis de conhecimento esperado dos estudantes.

Para esta análise, os professores resolveram as tarefas em duplas, apresentaram e discutiram-nas com o grupo e consideraram as possibilidades de trabalho com seus estudantes em função do nível de conhecimento identificado para a resolução de cada tarefa. Este estudo foi desenvolvido com um grupo de 38 professores, entre os quais 30 têm formação específica de Matemática, 1 tem formação específica em Matemática e Pedagogia e 7 têm formação em Pedagogia. Para os professores com formação em Pedagogia, a matemática é trabalhada considerando apenas as metodologias para introdução e desenvolvimento das noções básicas dessa disciplina.

Após a discussão, foram propostas outras tarefas para serem resolvidas e discutidas, utilizando o Geogebra e o Geoplano como mais um meio de alimentar as discussões.

Foi proposto ainda que os professores selecionassem e aplicassem as tarefas discutidas com seus estudantes.

RESULTADOS ENCONTRADOS

Inicialmente, os professores foram questionados sobre a forma como articulavam o livro didático distribuído pelo Ministério da Educação Nacional e os cadernos dos alunos distribuídos pela Secretaria Estadual da Educação. Em relação a esta questão, por meio dos relatos dos participantes, já foi possível observar que os professores assinalam a não utilização dos cadernos em sala de aula por se sentirem despreparados, preferindo o livro didático que corresponde a um instrumento a cuja abordagem já estão habituados.

Na sequência, foi introduzida a ferramenta didática níveis de conhecimento esperado dos estudantes e foram discutidos com os participantes alguns exemplos para que pudessem analisar as tarefas sobre perímetro e área encontradas em livros didáticos, por nós disponibilizados, e nos cadernos do aluno indicados para o quinto e sexto anos do Ensino Fundamental anos iniciais e finais, ou seja, na transição entre essas duas etapas escolares.

Nesse momento, foi possível observar que os professores tiveram dificuldades em compreender o nível disponível, pois na realidade, não encontraram muitas tarefas relacionadas com esse nível, uma vez que, nestas etapas escolares, ficou claro que os níveis de conhecimento esperado dos estudantes em relação às noções de perímetro e área são o técnico e o mobilizável. Além disso, ficou bastante evidente que tanto os professores dos anos iniciais, como os professores dos anos finais, não conhecem o trabalho já realizado ou a realizar sobre as noções que estavam sendo estudadas. Assim, observamos que eles tendem a reconhecer como importantes as tarefas a serem desenvolvidas no ano em que estão trabalhando e têm dificuldades em relacioná-las com o desenvolvimento proposto para cada ano.

Após este trabalho em conjunto, foi possível observar uma mudança nesse comportamento, uma vez que os professores dos anos iniciais começam a vislumbrar novas possibilidades de trabalho com as noções de área e perímetro e os professores dos anos finais percebem que podem utilizar os conhecimentos já desenvolvidos no ano anterior para desenvolver novos conhecimentos e tornar aqueles já trabalhados mais ricos, mais diferenciados e mais elaborados em termos de significados, adquirindo assim mais estabilidade, como afirma Moreira (2005).

Além da discussão e reflexão sobre os níveis de conhecimento esperados dos estudantes em relação às tarefas encontradas nos livros didáticos e nos cadernos do aluno, foi proposto ainda o trabalho com outras tarefas para as quais era importante a utilização do *software* Geogebra ou do material didático Geoplano.

Aqui, observamos que os professores, em geral, mostraram não ter o hábito de utilizar *softwares* educativos e diferentes materiais didáticos em suas aulas, em particular, o *software* e o material indicado. Assim, foi preciso considerar um primeiro momento de apropriação desses novos instrumentos para dar continuidade aos trabalhos.

Mas, apesar dessa necessidade, após uma rápida introdução dos instrumentos, os professores passaram a desenvolver as tarefas propostas e consideraram-nas interessantes e importantes para serem trabalhadas com seus estudantes, mesmo se alguns ainda manifestavam uma preocupação em como aplicar este trabalho em sala de aula. Foi possível observar que esta preocupação estava associada ao número de estudantes nas salas, à heterogeneidade das turmas e às condições específicas do grupo de estudantes de cada professor, além das restrições em função das escolas em que trabalham, pois algumas não têm computadores suficientes para que se possa desenvolver, por exemplo, uma tarefa com o *software* Geogebra.

A reflexão acima parecia dificultar a proposta dos professores no sentido de escolherem algumas tarefas e trabalharem com seus estudantes. Mas cinco professores do grupo - três do Ensino Fundamental anos finais (estudantes de 11 anos) e dois do Ensino Fundamental anos iniciais (estudantes de 10 anos) -, que tinham condições de realizar as atividades propostas com suas turmas, desenvolveram a proposta e apresentaram ao grupo.

Nessas apresentações, foi possível observar que as tarefas escolhidas pelos professores não foram as mesmas, pois cada um pensou em como executar o que era pedido em função do seu grupo de estudantes, o que já manifesta um resultado das reflexões encaminhadas nas orientações técnicas. Isto já se mostrou uma importante questão para ampliar a discussão com o grupo de professores, que se sentiram motivados ao perceber que não era para repetir a experiência, mas retirar dela aquilo que poderia ser trabalhado com seus estudantes.

Observamos aqui que os professores sentiram a importância de analisar os diferentes materiais e de encontrar seus próprios meios para desenvolvê-los com seu grupo de estudantes, ou seja, os professores reconhecem a importância de iniciar seu curso levando em conta os conhecimentos prévios de seu grupo de estudantes. Isto corresponde também a um avanço associado ao trabalho realizado na orientação técnica, pois a partir dela, os professores sentem a necessidade de repensar seus planos de aula e são capazes de analisar de forma coerente os materiais que lhes são entregues para serem utilizados.

A partir das apresentações feitas por aqueles que tiveram condições de realizar suas próprias experiências com seus estudantes, os outros professores sentiram-se motivados e perceberam que mesmo se existissem algumas restrições, como não ter computadores na escola em que trabalham para realizar o trabalho com o *software*, eles poderiam utilizar as diferentes tarefas discutidas no curso e mesmo a do Geoplano que poderia ser construído pelo professor com seu grupo de estudantes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os professores indicam que as orientações técnicas recebidas auxiliaram-nos a refletir sobre seu próprio trabalho em sala de aula e a procurar adequar as tarefas propostas aos estudantes com o nível de conhecimento em que eles se encontram.

Para isso, os professores resolvem e identificam quais as tarefas indicadas são possíveis de serem trabalhadas com suas turmas. Alguns professores, dependendo das condições e restrições encontradas em suas escolas, utilizam o Geogebra e/ou o Geoplano para propor tarefas sobre a noção de área e perímetro para seus estudantes.

A comparação feita entre a proposta do livro didático e o caderno do aluno, bem como o apoio de material específico e das tarefas pedidas na avaliação SARESP possibilitaram que os professores compreendessem a importância do estudo dos documentos oficiais, da reflexão sobre as possibilidades de utilização em função de seu grupo de estudantes e da importância de considerar as expectativas institucionais avaliadas por meio do SARESP, de modo a possibilitar que seus estudantes estejam em contato com os possíveis níveis de conceituação e, consequentemente, com os possíveis níveis de conhecimento solicitado nas avaliações de larga escala.

Ressaltamos aqui que, para este trabalho, apresentamos apenas a parte da orientação técnica que trata da macroavaliação SARESP, mas existiram outros momentos em que foram estudadas também as necessidades de articulação entre o trabalho realizado em sala de aula e as avaliações nacionais e internacionais de larga escala a que os estudantes são submetidos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM 6*, 132-158.

Duval. R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Suisse : Peter Lang.

Moreira, M.A. (2005). Aprendizagem Significativa Crítica. Porto Alegre: Brasil.

Robert, A. (2003). Observatoire EVAPM. Acesso em 05 de outubro de 2015 de

http://www.apmep.fr/IMG/pdf/Typologie_A_Robert.pdf

Robert, A. et Rogalski, M. (2002). Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices? Le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion en classe. *Petit x 60*.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques 18(2),* 139-190.

Robert, A. (1997). Niveaux de conceptualisation et enseignement secondaire. In Dorier, J.L. et al. (Ed.), *L'enseignement de l'algèbre lineaire en question* (pp. 149-157). Grenoble: La Pensée Sauvage,

Rogalski, M. (2001). Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady. In *Actes de la journée en hommage à Régine Douady* (pp. 13-30). Paris: Didirem.

São Paulo (2008). *Proposta Curricular.* São Paulo: Secretaria de Educação do Estado de São Paulo.

São Paulo (2009). *Caderno do professor*. São Paulo: Secretaria de Educação do Estado de São Paulo.

São Paulo (2014). *EMAI.* São Paulo: Secretaria de Educação do Estado de São Paulo.

São Paulo (2014). *Relatório Pedagógico: SARESP 2014 – Matemática*. São Paulo: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

São Paulo (2013). *Relatório Pedagógico: SARESP 2013 – Matemática*. São Paulo: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

São Paulo (2012). *Relatório Pedagógico: SARESP 2012 – Matemática*. São Paulo: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

São Paulo (2011). *Relatório Pedagógico: SARESP 2011 – Matemática*. São Paulo: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

São Paulo (2010). *Relatório Pedagógico: SARESP 2010 – Matemática*. São Paulo: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques 10 (2.3)*, 133-169.

Yin, R. K. (2001). *Estudo de caso: planejamento e métodos*. Porto Alegre: Bookmam.

LA ESCUELA MULTIGRADO EN MÉXICO, RETOS Y PERSPECTIVAS DE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Antonio de Jesús Madriz Estrada, Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza, Gisela Montiel Espinosa, Luis Alberto López Acosta.
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.
amadriz@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx, lalopeza@cinvestav.mx

Palabras clave: escuela multigrado, lenguaje variacional, sentido numérico

Key words: multigrade schools, variational language, number sense

RESUMEN: Hoy existe una incertidumbre muy clara sobre lo que significa la calidad educativa como parte de la sonada Reforma Educativa desde el 2012. En ese sentido, estratificando espacios para la investigación, existen niveles educativos sensibles de una problemática que debe ser atendida a la brevedad y que es el alcanzar mayores índices en calidad de la educación en el nivel básico. En dicho contexto se torna un momento de oportunidad para realizar investigación cuando un currículum no puede atenderse tal y como lo plantean desde el enfoque educativo oficial a nivel nacional. Las escuelas primarias multigrado pueden ser un sitio en el que el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional permita tener mayores alcances educativos en cuanto a los planteamientos iniciales en un ciclo escolar.

ABSTRACT: Today there is a very clear uncertainty about what the quality of education as part of the Education Reform from 2012. In that sense, stratified spaces for research, sensitive educational levels are a problem that must be addressed promptly and that is to reach as higher rates of education at the basic level. In this context a moment of opportunity for research becomes when a resume can not be understood as we approached from the formal educational approach nationwide. Multigrade primary schools can be a place where development Variational Thought and Language have higher educational achievements allow time to initial statements in a schools year.

INTRODUCCIÓN

Desde la época de la posrevolución en México, surge algo que hoy, en septiembre del 2014, nos reveló parte de su historia y del porqué se inicia un tipo de trabajo muy peculiar en las diferentes comunidades de la República Mexicana y que son, las escuelas rurales de educación. En el periodo presidencial del General Lázaro Cárdenas del Rio se instruye la creación de las Escuelas Normales Rurales en México para satisfacer la necesidad de educar a la mayor parte de la población, aspecto que formaba parte del plan de trabajo presidencial donde incluía el rescate de las comunidades y el estímulo por un desarrollo de las mismas.

El normalismo rural en México pronto se empezó a expandir logrando formarse en el periodo de 1922 a 1945, 35 instituciones de este tipo de las que hasta la fecha aun quedan 17 entre las que destaca la Escuela Normal Rural Raul Isidro Burgos de Ayotzinapa, Guerrero y la Escuela Normal Rural Vasco de Quiroga en Tiripetio Michoacán (Cazares, 2014). Así como se expandieron en su momento las escuelas normales, poco a poco el sistema político se dio cuenta que a las personas que formaba eran personas que se impregnaban de valores por la tierra y la protección de su medio en el que se desarrollaban, aspecto que impedía lo que hoy las industrias de mercado exigen para explotar la mayoría de los recursos naturales.

En este contexto es en el que nacen las escuelas multigrado, que son centros de trabajo donde hay un maestro atendiendo de dos hasta seis grados de educación primaria simultáneamente, mismas que generalmente se ubican en las comunidades más marginadas del país en cada una de las entidades federativas. Sobre el trabajo que se desarrolla en este tipo de escuelas, se centra el interés de investigar cómo la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar) puede emplearse como estrategia de trabajo que pueda permitir el desarrollo del pensamiento matemático centrándose en los estudios de la matemática del cambio y la variación.

ASPECTOS GENERALES DE LA ESCUELA MULTIGRADO

En México existen dos tipos de escuelas primarias según el medio territorial al que pertenecen, las escuelas rurales y las escuelas urbanas, menores de 2500 habitantes y mayores de 2500 habitantes respectivamente; además existe otra clasificación, las escuelas de organización completa, donde existe un maestro para cada uno de los grados y las multigrado que son aquellas en las que hay un maestro para más de un grado diferente.

Ezpeleta (1997), reconoce cómo en las escuelas multigrado, en lo referente a la cuestión educativa y laboral, es muy complejo el desarrollo escolar. En las escuelas multigrado, entendiendo estas como aquellas donde hay cinco, cuatro, tres, dos o incluso un solo maestro trabajando, se tienen que realizar labores que se extralimitan de lo académico, es decir, existen escuelas donde hay un solo maestro atendiendo seis grados, realiza funciones de director, médico, psicólogo, abogado y cuanta actividad exija la comunidad pero además, tener que cumplir con un currículo nacional elaborado para escuelas de organización completa, conlleva a elaborar un proyecto que será muy peculiar respecto a una escuela regular de una zona urbana.

Tabla 1. Información de referencia

Porcentaje de escuelas primarias de organización multigrado respecto al total nacional por ciclo escolar y tipo de servicio			
Ciclo escolar	**2007/2008**	**2008/2009**	**2009/2010**
Primaria general	26.4	26.3	26.2
Primaria indígena	6.7	6.6	6.6
Primaria comunitaria	11.4	11.3	11.5
Total	44.5	44.3	44.4

Fuente: INEE, cálculos con base en las Estadísticas continuas del formato 911 (inicio de ciclo escolar 2007/2008, 2008/2009 y 2009/2010), DGPP-SEP.

Hasta 2010, la cifra no ha mejorado considerablemente respecto al mejoramiento y reforzamiento de las escuelas multigrado, aspecto que pedagógicamente han llevado al docente a gestionar su propio sistema y en ocasiones a romper con el currículo, cuestión que es el que nos interesa y particularmente en la enseñanza de la Matemática. Romper con el currículum partiendo de los planes y programas oficiales y los libros de texto gratuito distribuidos en toda la república, puede ser una estrategia que quizá el docente multigrado esté empleando, puesto que el material no está diseñado para el medio en que se desenvuelve; o quizá haya alguna otra estrategia de la que esté haciendo uso, ya que sobra pensar en la dificultad que conlleva el apegarse a algo que no está diseñado considerando las necesidades propias de un medio educativo.

ORGANIZACIÓN DE UNA ESCUELA PRIMARIA MULTIGRADO

En la escuela multigrado, la enseñanza se ha caracterizado por tener una dificultad enorme en el cumplimiento de varios de los aspectos que la autoridad educativa establece como objetivos a alcanzar en cada ciclo escolar, esto es, que primeramente cuando se establecen 200 días de trabajo escolar en un año, contemplando los periodos vacacionales y las reuniones de consejo escolar que son los últimos viernes de cada mes (como lo marca el calendario escolar actual), es la primera cuestión que no se cumple, y según la Propuesta Educativa Multigrado PEM 2005, dice que es el 50% lo que se alcanza de aquello que se establece en cada inicio de año. Esto nos lleva a pensar que el primer de los factores a analizar es muy desalentador cuando aun existen otros elementos importantes a considerar.

Los profesores de las escuelas multigrado tienen la oportunidad de ser sus propios gestores educativos, lo que de cierta forma es una ventaja para el educador. Aunado a ello, la Secretaría de Educación Pública SEP en el 2005 diseñó una propuesta educativa para las escuelas primarias multigrado, que es una alternativa para organizarse curricularmente la enseñanza y poder así tratar de alcanzar los objetivos planteados en los planes y programas de estudio oficiales desde los enfoques educativos, objetivos de ciclo escolar, competencias a desarrollar, etc. La propuesta es el trabajo por tema común y actividad diferenciada (SEP, 2005).

EL EJERCICIO DEL TEMA COMÚN

Considerando que las escuelas multigrado son unitarias (un docente para los seis grados), bidocentes (dos docentes para los seis grados), tridocentes, tetradocentes o pentadocentes, los grupos de niños también se organizan de una forma; esta es a través de ciclos (SEP, 2005). Los ciclos son por cada par de años en orden ascendente o descendente, primero y segundo grado es el primer ciclo, tercero y cuarto grado es el segundo ciclo, y quinto y sexto grado es el tercer ciclo (SEP, 2005).

Las propuestas de intervención constan en trabajar un tema común que pueda establecerse como eje de conocimiento general por todos los niños, que a su vez sea un problema común para todos y que el grupo completo sea capaz de comprender y desarrollar participaciones indistintamente de las edades y grados en que se encuentren. Posteriormente y como uno de los apartados de la planeación del profesor, se realizan actividades diferenciadas por ciclo escolar para llegar al último eje de la planeación de clase, que es la puesta en común.

A continuación del documento publicado por a SEP en el 2005, la PEM, se presenta una planeación a grandes rasgos considerando solo el tipo de actividades y cómo se organiza el trabajo en las aulas multigrado según dicha propuesta para llevar a cabo el desarrollo del proceso enseñanza-aprendizaje en este sistema educativo y particularmente en este sector de las escuelas primarias, que son las escuelas de tipo multigrado. La actividad es de la asignatura de matemáticas.

Ejemplo:

Asignatura: Matemáticas

Tema común: Resolución de problemas que impliquen una o más operaciones

Contenidos por ciclo		
Primer ciclo	**Segundo ciclo**	**Tercer ciclo**
Resuelvan problemas de suma y de resta, con o sin transformaciones, con números naturales de una y dos cifras, utilizando material concreto u otros procedimientos informales (conteos, dibujos, descomposiciones de números).	Resuelvan problemas de suma y de resta con números naturales hasta de tres, cuatro y cinco cifras utilizando procedimientos informales y el algoritmo convencional.	Resuelvan problemas que impliquen dos o más operaciones de suma, resta, multiplicación y división, con números naturales y utilizando problemas convencionales.

Actividad inicial:

La maestra solicitó a los niños que tomaran los dados de color negro y rojo (dados con números de una hasta seis cifras: los de color rojo representaban el dinero que podían gastar y los negros el

costo del producto) que se encuentran en el rincón de Matemáticas, para que jugaran a comprar y vender productos de la tiendita.

ACTIVIDADES DIFERENCIADAS POR CICLO		
Equipo 1 (primer ciclo)	**Equipo 2 (segundo ciclo)**	**Equipo 3 (tercer ciclo)**
Juego de dados con una y dos cifras, para inventar problemas sencillos de suma y resta de forma oral en los que sólo escriban el algoritmo.	Juego de dados de tres y cuatro cifras, para inventar problemas relacionados con compra y venta de artículos del rincón de la tiendita.	Juegos de dados de cinco y seis cifras para inventar problemas que implican dos y tres operaciones (suma, resta y división).

Fuente Secretaría de Educación Pública (2005). Propuesta Educativa Multigrado. Pág. 23.

Aunque el objetivo de este artículo no es analizar completa y totalmente la propuesta oficial de enseñanza multigrado, si hay aspectos que resultan necesarios destacar. El primero es que los libros de texto no necesariamente juegan un papel importante en el trabajo a desarrollar en el aula; si bien muchos docentes en el país con las carencias del sistema, han optado por trabajar de manera lineal los contenidos a través de las propuestas de libros de texto, en esta propuesta no se hace ese seguimiento de manera rigurosa.

Segundo aspecto, es que el apego a los planes y programas de estudio oficiales, no se consideran tal y como son planteados, así como tampoco los enfoques educativos. Lo anterior, claramente evidencia un punto importante que abre el panorama para realizar investigación, que es la oportunidad de trabajar en un nivel educativo rompiendo con el currículum y todo lo establecido oficialmente que muchas de las veces, no está contextualizado y pensado para determinadas situaciones escolares.

MARCO TEÓRICO

En la actualidad, los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles en general, se desarrollan bajo la premisa de que el conocimiento es preexistente al estudiante, es decir, existe y lo que se debe lograr es que ellos los comprendan y dominen. Bajo esta idea, los conocimientos son presentados en abstracto, esperando que ellos sean asimilados debido a su importancia dentro de la disciplina o en el seno de la escuela y la sociedad. Los diseños de aprendizaje se desarrollan desligados de contextos particulares y prácticas de referencia que permitan significar lo que se aprende. Posteriormente, y luego que se considera se ha alcanzado un dominio adecuado de los conocimientos, se pasa a una segunda fase en la cual se abordan escenarios donde tales conocimientos pueden ser aplicados. Este estudio en abstracto dificulta que los estudiantes asignen significados a la información que adquieren.

La Teoría Socioepistemológica parte de un enfoque completamente distinto, para ella el conocimiento matemático tiene un origen asociado con un conjunto de prácticas humanas que son aceptadas y establecidas socialmente (Cantoral, 2004). De este modo, son las prácticas las que

favorecieron, y favorecen, la construcción de tales conocimientos. Esas prácticas específicas que son desarrolladas al seno de las sociedades y poseen influencia en el desarrollo de los conocimientos han sido denominadas como prácticas socialmente compartidas.

El PyLVar como estrategia de trabajo para la gestión del profesor Multigrado

El profesor en clase de matemáticas en la escuela multigrado, indistintamente de tener dos, tres o hasta seis grados diferentes, opta por elaborar una planeación de clase donde marca un tema común, posteriormente narra lo que pueda ser captado por todos los asistentes a la clase y aclarando dudas y cuestionamientos de sus estudiantes, ahora solicita la elaboración de actividades diferenciadas según el grado al que pertenece cada uno de sus alumnos en el grupo multigrado. Esto que se acaba de mencionar pueda parecer muy sencillo, pero cuando lo que el sistema educativo pide que tienes que cumplir en 200 días de clase, un currículo competo, la situación no parece ser tan trivial. Nuevamente es aquí donde se centra la atención a investigar dentro del aspecto educativo en la clase de matemáticas de una escuela multigrado desde una mirada socioepistemológica que permita interpretar el panorama que se vive en un aula de este tipo.

Vivimos inmersos en un mundo donde se producen constantemente cambios, desde pequeños y casi imperceptibles, hasta grandes y violentos. Estos, muchas veces, marcan nuestra forma de actuar y vivir. Por ejemplo, el aumento de la temperatura promedio del clima en el mundo trae consigo una serie de fenómenos naturales que nos afectan directamente, tales como huracanes más fuertes, sequias, pérdida de glaseares y por tanto las reservas de agua dulce del planeta, etc. De este modo, el estudio de esos fenómenos, y la posibilidad de predecir lo que ocurrirá en el futuro, es una preocupación importante a nivel mundial. El estudio de los fenómenos que afectan a las poblaciones humanas ha sido desde siempre una preocupación constante para el hombre: comprender por qué se producen, qué los causa y qué los afecta, de modo que pueda predecirse su aparición o comportamiento. Esto ha sido una necesidad vital para la supervivencia de los asentamientos humanos (Cabrera, 2009).

En ese tenor se plantea la primera hipótesis acerca de si es el desarrollo de un Pensamiento y Lenguaje Variacional lo que pueda permitir el desarrollo de tópicos matemáticos propios del sistema curricular que forma parte de la gran mayoría de planteamientos de un discurso matemático escolar. Pensar en si el PyLVar puede ser una especie de eje transversal, competencia como lo llama Cabrera (2009), o bien, estrategia integradora en el desarrollo de contenidos, llevará consigo una serie de fundamentaciones que denoten si efectivamente puede considerarse al PyLVar como mecanismo para el desarrollo de temas matemáticos en la escuela multigrado. El reto principal es demostrar o validar si tal como los estudios encontrados en los niveles Medio Superior y Superior sobre PyLVar, pueden aplicarse para integrar contenidos y a su vez desarrollar el Pensamiento Matemático en niños, otorgando una resignificación de la matemática en el nivel básico.

Salinas (2003), da a conocer a la comunidad de matemáticos, cómo desde muy pequeños los alumnos pueden ser capaces de desarrollar habilidades propias del estudio de la matemática de la variación y el cambio, lo que puede conllevar a pensar en si el PyLVar fuese desarrollado desde edades tempranas, podría repercutir en el estudio del cálculo en edades posteriores. Particularmente en contenidos aritméticos donde los primeros acercamientos a las nociones de

cambio y variación se pueden hacer más notorios y comenzar a ser objetos de estudio para la organización de contenidos matemáticos.

Se entiende una noción del PyLVar lo siguiente:

> "El PyLVar es tanto una línea de investigación como una forma de pensamiento, se caracteriza por proponer el estudio de situaciones y fenómenos en los que se ve involucrado el cambio, y donde la necesidad de predecir estados futuros motiva el estudio y análisis de la variación" (Caballero y Cantoral, 2013, 1007-1015).

REFLEXIONES

La oportunidad del docente e investigador, es muy amplia para poner en práctica la descentración en el objeto matemático aspecto que no contemplan los planes y programas dentro del sistema educativo, y poder así pasar de los objetos matemáticos a las prácticas sociales y llegar a un verdadero desarrollo del pensamiento matemático (Cantoral y Farfán, 2003).

Debido a que es prácticamente imposible cumplir con lo establecido oficialmente en cuanto al cumplimiento de un currículum, una serie de enfoques educativos, objetivos, etc; los docentes e investigadores estamos preocupados por diseñar alternativas en las que lo que se establece desde los sistemas educativos oficiales, se acerquen lo más posible a lo que se plantea y que esto, fortalezca el desarrollo de la calidad educativa en el país.

Las escuelas de educación básica en la modalidad multigrado, son un espacio de oportunidad enorme para trabajar el desarrollo del pensamiento matemático a través del desarrollo de un Pensamiento y lenguaje variacional, puesto que permite acercarse al trabajo por contenidos y a su vez, trabajarse como eje aglutinador que integre todo aquello que las matemáticas en su conjunto pretenden alcanzar como planes y programas de estudio.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acuerdo No. 96 (1982), Secretaría de Educación Pública, México.

Caballero y Cantoral. (2013). *Una caracterización de los elementos del Pensamiento y Lenguaje Variacional.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 26, 1007-1015. México: CLAME

Cabrera (2009). El *Pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de Competencias.* Tesis de maestría no publicada, CINVESTAV-IPN, México.

Cantoral, R. (2004). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica*. En L. Díaz (Ed.) Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. México: CLAME

Cantoral, R y Farfán, R. M. (2003). *Matemática Educativa: Una visión de su evolución*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6(1), 27-40. México: CLAME

Cazares, J. (2014). *Ayotzinapa. Centro de análisis de coyuntura económica, política y social*. México: UNAM.

Ezpeleta J. (1997). *Algunos desafíos para la gestión de las escuelas multigrado*. Revista Iberoamericana de Educación 15. Organización de Estados Iberoamericanos.

INEE, *Estimaciones a partir de Estadísticas continuas del formato 911* (inicio de ciclo escolar 2008/2009), México: DGPP-SEP.

SEP. (2005). *Propuesta Educativa Multigrado*. México: Secretaría de Educación Pública. Constantine Editores.

RETOS EN LA INVESTIGACIÓN SOBRE DIDÁCTICA DE LA PROBABILIDAD

Carmen Batanero
Universidad de Granada, España
batanero@ugr.es

Palabras clave: probabilidad, investigación didáctica, cuestiones prioritarias

Key words: probability, didactic research, priority questions

RESUMEN: Aunque la investigación en didáctica de la probabilidad tiene una tradición consolidada, la introducción de la probabilidad en la enseñanza primaria, el énfasis actual en el enfoque frecuencial y las aproximaciones informales a la inferencia estadística hacen necesario reforzar esta investigación. En este trabajo enfatizamos algunos de los retos actuales para la investigación sobre enseñanza de la probabilidad con el fin de orientar la investigación futura.

ABSTRACT: Although research in probability education possesses a long tradition, the introduction of probability in primary school, the current emphasis on the frequentist approach, as well as the informal approaches to statistical inference suggest the need of reinforcing this research. In this work we emphasize some current challenges for research on the teaching of probability with the aim of orienting new research,

INTRODUCCIÓN

La investigación en didáctica de la probabilidad tiene una larga historia, pues podemos remontar sus orígenes a los trabajos de Piaget e Inhelder (1951) sobre el desarrollo cognitivo de los niños. Sin embargo la publicación reciente de dos libros monográficos sobre el tema (Jones, 2005; Chernoff y Sriraman, 2014), junto con la existencia de un grupo específico de investigación en los Congresos Internacionales de Enseñanza de las Matemáticas (ICME) indican la fuerza de este campo. Es por ello que en este trabajo tratamos de clasificar y resumir la investigación llevada a cabo hasta la fecha, señalando algunos puntos para completarla. En los siguientes apartados indicamos los principales aspectos epistemológicos, psicológicos y didácticos en los que se ha centrado la investigación.

SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES DE LA PROBABILIDAD

Un primer punto a considerar son los aspectos epistemológicos. Dentro de la matemática el significado de la probabilidad es único; la definición axiomática considera la probabilidad como una función medible definida en un espacio probabilístico y acotada en el intervalo [0,1] (Fine, 1971). Sin embargo, al tratar de aplicar la probabilidad en diversos campos y problemas, encontramos diferentes interpretaciones del concepto a lo largo de la historia, que aún coexisten y están sujetas a controversias filosóficas (Batanero, Henry y Parzysz, 2005; Borovnick y Kapadia, 2014).

Estas interpretaciones surgen a partir de dos puntos de vista complementarios (Hacking, 1975): la probabilidad, como grado de creencia personal en la verosimilitud de los sucesos inciertos (perspectiva epistémica) y como medida objetiva de esta verosimilitud, a partir de datos (perspectiva estadística). Entre otros, cada uno de los significados clásico, frecuencial y subjetivo, utilizados con frecuencia en el currículo escolar, está asociado a diferentes configuraciones de objetos matemáticos, por lo que suponen significados diferenciados del concepto y pueden tener diferente valor en el aula (Batanero y Díaz, 2007).

Significado clásico

Se origina por el trabajo de matemáticos como Cardano, Laplace y Fermat, al tratar de resolver algunos problemas relacionados con los juegos de azar. Según se desarrolla con detalle en Batanero y Díaz (2007), el interés por la ganancia en estos juegos hizo surgir en primer lugar la idea de esperanza matemática, y posteriormente la primera definición de probabilidad debida a De Moivre (1967/1718).

En esta definición, refinada más tarde por Laplace (1995/1814), la probabilidad se concibe como la proporción entre el número de veces que un suceso podría ocurrir (casos favorables) y el número total de sucesos que podrían darse (casos posibles). Para poder aplicar esta definición, se consideran que todos los sucesos elementales en la situación analizada serían igualmente probables, lo que originó serias críticas. La primera de ella es que haciendo este supuesto no podría calcularse la probabilidad en caso de sucesos no equiprobables o en experimentos con infinitas posibilidades. Por tanto, se encuentran pocos casos donde pueda aplicarse, fuera de los juegos de azar (Batanero, Henry, y Parzysz, 2005). Otra crítica es el uso de la palabra “probable” en la definición de probabilidad, que de este modo se convierte en recursiva.

A pesar de estas críticas el significado clásico durante décadas ha sido popular en la enseñanza secundaria, pues los niños se interesan en los juegos de azar. El aspecto negativo es que la

probabilidad se asoció con la matemática recreativa y algunos profesores la consideraron una parte menos importante que otras en el currículo de matemáticas.

Significado frecuencial

La publicación por parte de Bernoulli (1987/1713) de la primera demostración de la ley de los grandes números fue aceptada por los matemáticos de su tiempo como prueba del carácter objetivo de la probabilidad.

Apoyándose en la convergencia observada empíricamente de las frecuencias relativas de un suceso en largas series de observaciones independientes, von Mises (1952/1928) dio una definición de la probabilidad desde el punto de vista frecuencial. La probabilidad sería en este significado el valor hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa de un suceso al estabilizarse, asumiendo la repetibilidad del ensayo.

Al igual que sobre la definición clásica, fueron muchas las críticas a la definición frecuencial de la probabilidad. Algunos de los argumentos utilizados en estas críticas fueron los siguientes (Godino, Batanero, y Cañizares, 1988): A partir de la frecuencia relativa no se obtiene un valor exacto para la probabilidad, sino únicamente aproximaciones de dicho valor; no se sabe con certeza el número de experimentos idóneo para aceptar la estimación de la probabilidad como suficientemente precisa; a veces es imposible contar con idénticas condiciones en la experimentación.

Didácticamente, esta visión de la probabilidad tiene hoy día una fuerte aceptación, porque tiene la ventaja de conectar estadística y probabilidad. Los alumnos realizan en la clase experimentos o bien observan sucesos aleatorios en su vida cotidiana y registran los datos de los mismos. Para el análisis de estos datos y el cálculo de la frecuencia relativa utilizan la estadística. Además, la simulación, hecha posible por la tecnología, permite replicar en forma sencilla largas series de experimentos para aplicar el significado frecuencial. Todo ello hace que este enfoque sea recomendado en el currículo.

Significado subjetivo

La demostración por Bayes de su teorema indicó que la probabilidad (a priori) de un suceso puede revisarse a partir de nuevos datos para transformarse en una probabilidad a posteriori. La probabilidad, por tanto, no es ya un valor inmutable y pierde su carácter objetivo. Dependiendo del conocimiento previo, distintas personas pueden asignar diferente probabilidad al mismo suceso.

Esta idea fue retomada más tarde por autores como de Finetti (1974/1937), quienes definen las probabilidades como grados de creencia subjetivos basados en el conocimiento y experiencia personal. No es necesaria la repetición de la situación que se estudia en idénticas condiciones, por lo que se amplía el campo de aplicación de las probabilidades; por ejemplo a la economía o historia, donde podemos encontrar sucesos irrepetibles.

La principal crítica que recibe esta visión es la dificultad de hallar una regla para asignar valores numéricos que expresen los grados de creencia personal, aunque el mismo de Finetti sugirió un sistema basado en apuestas y una axiomática consistente con dicho sistema (Batanero et al., 2005). La crítica también se suaviza por el hecho de que la probabilidad a posteriori va convergiendo al valor teórico, cuando los datos utilizados para aplicar el teorema de Bayes se han obtenido a partir de un gran número de experimentos. En estos casos, la probabilidad a posteriori no se ve muy influenciada por la asignación de probabilidades a priori.

Didácticamente el interés de la visión subjetiva en el aula es que formaliza la idea intuitiva de aprender de la experiencia. Se puede proponer a los alumnos asignar probabilidades a ciertos sucesos usando sus creencias personales; proponer luego la realización u observación del fenómeno una serie larga de veces y revisar las probabilidades a la luz de nueva información proporcionada por los datos. Esta revisión podría ser informal en alumnos de primaria y una vez que en secundaria se ha estudiado el teorema de Bayes se podría utilizar el teorema en el cálculo de probabilidades a posteriori.

SIGNIFICADOS PERSONALES DE LA PROBABILIDAD

Otro tema importante en la investigación es el conocimiento de los estudiantes. La investigación realizada hasta la fecha muestra que estos diferentes puntos de vista y controversias se reproducen en los razonamientos, tanto de niños como de sujetos adultos. Ambos tipos de sujetos atribuyen con frecuencia significados personales a la probabilidad que no coinciden con los aceptados en las instituciones de enseñanza (Jones, 2005; Jones, Langrall y Mooney, 2007; Chernoff y Sriraman, 2014).

Esta investigación comienza con los estudios de Piaget e Inhelder (1951), que tratan de describir la adquisición gradual en los niños de las ideas de aleatoriedad y probabilidad, del razonamiento combinatorio, y su capacidad de cuantificación de probabilidades. A partir de sus entrevistas y experimentos describen con detalle las diferentes etapas que los niños siguen en el desarrollo de estos conceptos. La importancia que estos trabajos tienen para los profesores es que permiten seleccionar de una forma racional el tipo de tareas probabilísticas que podemos proponer a nuestros alumnos en función de su edad.

Fischbein (1975) por su parte se interesó no solo por la formación de los conceptos formales, sino por la aparición de intuiciones parciales sobre los mismos y por la mejora de las intuiciones como consecuencia de la enseñanza. El autor indica que las intuiciones sobre la probabilidad se desarrollan también fuera del aula, porque nos encontramos rodeados de incertidumbre en muchas situaciones cotidianas. El problema es que, si la intuición formada espontáneamente es incorrecta, será muy difícil cambiarla llegada la edad adulta. En consecuencia, sus investigaciones apoyan decididamente la conveniencia de adelantar la enseñanza de la probabilidad a la educación primaria. También muestran que, sin instrucción, es difícil que se desarrolle un razonamiento estocástico adecuado, incluso una vez que se alcanza la etapa de las operaciones formales.

La investigación con sujetos adultos ha sido llevada a cabo generalmente en el contexto de toma de decisión en situaciones de incertidumbre; por ejemplo, en medicina, situaciones legales o política. Los resultados indican una percepción incorrecta de las situaciones aleatorias, supersticiones infundadas sobre las mismas (“la suerte personal”) así como creencias en la posibilidad de controlarlas para producir un resultado deseado (Batanero, 2015).

Trabajos como los de Kahneman, Slovic y Tversky (1983) han popularizado el concepto de *heurística* o estrategia inconsciente, que reduce la complejidad de un problema probabilístico, suprimiendo parte de la información. Aunque las heurísticas ayudan en muchos casos a obtener una solución razonable, en otros casos producen sesgos en las conclusiones; a veces con graves consecuencias.

Un ejemplo de estos sesgos es la falacia de la conjunción, donde algunos sujetos suponen que la probabilidad de la intersección de dos sucesos (por ejemplo, “ser mujer” y “gustarle los niños”) es mayor que la de cada suceso por separado. Puesto que la experiencia nos muestra que a la mayoría de las mujeres les gusta los niños, confundimos suceso probable con suceso seguro y olvidamos que la probabilidad del suceso compuesto es el producto de las probabilidades simples (o bien de la probabilidad del primer suceso, por la probabilidad condicionada del segundo, si los sucesos son dependientes). En cualquier caso, puesto que la probabilidad es un número menor que 1; su producto nunca puede ser mayor que la de uno de los sucesos, pues multiplicamos por una cantidad menor que la unidad.

Otro ejemplo es descrito por Konold (1989), quien lo denomina “enfoque en el resultado”: Cuando se pregunta a algunas personas por la probabilidad de un suceso, tratan de responder la pregunta adivinando el resultado que ocurrirá; por ello si un resultado es muy probable, esperan que ocurra con seguridad en la próxima repetición de la situación.

Actualmente son muchas las investigaciones que se centran específicamente en la comprensión de la probabilidad en contextos escolares (en la escuela o universidad). Estas investigaciones se centran en diferentes conceptos, como la probabilidad, razonamiento combinatorio, probabilidad condicional o compuesta y también en diferentes edades. Una buena síntesis de las mismas se presenta en Jones (2005) y Jones, Langrall y Mooney (2005).

ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD Y EL PAPEL DE LA TECNOLOGÍA

La enseñanza de la probabilidad en la Educación Secundaria tiene una tradición consolidada; sin embargo, en la última década el tema se ha incorporado en forma creciente al currículo de Educación Primaria. Además, se desplaza el interés por los significados axiomático y clásico de la probabilidad hacia el enfoque frecuencial, basado en la experimentación y simulación (Batanero, 2013; Borovcnik, 2011).

La amplia disponibilidad de tecnología facilita hoy día la enseñanza de la probabilidad, pero a la vez plantea nuevos retos a la investigación. Por un lado, ya no son necesarios los cálculos tediosos o los ejercicios repetitivos sobre lectura de las tablas de las distribuciones. La tecnología realiza estos cálculos en segundos y proporciona al estudiante los valores de la probabilidad de la distribución normal o binomial (entre otras) de forma muy simple.

La tecnología hace también posible la exploración de micro mundos aleatorios virtuales por parte del estudiante, que puede estudiarlos por medio de la simulación, donde las frecuencias relativas en los experimentos se utilizarán para dar un valor estimado de la probabilidad de interés. Es importante, sin embargo, resaltar la diferencia entre probabilidad (modelo matemático) y frecuencia (que pertenece al mundo real de los datos y es sólo una estimación de la probabilidad). A la vez, estos micromundos permiten introducir conceptos más avanzados, pues no se requiere tanto conocimiento teórico ni habilidad de cálculo (Lee y Lee, 2011). Por ejemplo, se podría simular la distribución geométrica, planteando problemas sobre el tiempo de espera necesario para que ocurra un cierto suceso.

Por otro lado, encontramos un énfasis creciente en la introducción en el Bachillerato, e incluso en la Educación Secundaria de temas o situaciones de inferencia estadística con enfoques informales

basados en el re-muestreo o la simulación (por ejemplo, Makar, Baker y Ben-Zvi, 2011). En estas situaciones, si se quiere contrastar una cierta hipótesis, se reproduce la situación estudiada mediante la simulación y, utilizando muchas muestras del mismo tamaño se analiza que tan atípica fue la muestra dada en el problema, como base para rechazar o no la hipótesis planteada.

Esta "inferencia informal" es interesante, porque puede ser un primer paso hacia una comprensión más profunda – e incluso formal- de la inferencia en la universidad y formación profesional. Pero hay que ser precavidos para no llegar a un deslizamiento meta didáctico, al convertir un instrumento didáctico en objeto de aprendizaje. Además será importante que la enseñanza de la inferencia –sea informal o formal- enfatice la naturaleza específica del razonamiento inferencial y los riesgos asociados en la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre. Si reducimos la enseñanza de la inferencia a la enseñanza de algoritmos (algebraicos, simulación o re-muestreo) no resolveremos los errores frecuentes de interpretación y uso de la inferencia estadística.

FORMACIÓN DE PROFESORES

Es claro que una enseñanza eficaz de la matemática requiere de la preparación adecuada de los profesores. La aceptación de este hecho ha hecho el estudio del conocimiento y creencias del profesor uno de los que actualmente cobran mayor desarrollo. Sin embargo, esta investigación apenas se ha centrado en el campo de la probabilidad.

La formación del profesor para enseñar esta materia ha de abarcar, en primer lugar el componente matemático, pues es claro que una falta de preparación matemática repercutirá en la formación de sus estudiantes. También debe tener en cuenta las diversas facetas de su conocimiento didáctico (Godino, 2009): conocimiento matemático especializado, conocimiento del estudiante, de los medios de enseñanza, del currículo y de las relaciones del tema con otras materias y con la sociedad en que el estudiante está inmerso.

La naturaleza específica de la probabilidad hace que algunos de estos componentes deban ser adaptados para su enseñanza (Batanero y Díaz, 2007). Por ejemplo, sería necesario que el profesor tenga conocimiento de los diferentes significados de la probabilidad y las dificultades filosóficas que hemos descrito en las primeras secciones. Igualmente sería preciso que se familiarice con los razonamientos típicos de los niños sobre probabilidad en los diferentes estadios de desarrollo y con los tipos de heurísticas y sesgos más comunes que puede encontrar en sus estudiantes. Ha de ser capaz de trabajar con la simulación de problemas de probabilidad sencillos y, lo que es más importante, reconocer el valor didáctico de la simulación en la formación de sus alumnos.

Igualmente es necesario tener en cuenta el conocimiento del profesor en relación a la tecnología (Lee y Hollebrand, 2011), puesto que cada uno de los componentes del conocimiento del profesor se ve afectado por ella. Así, no es lo mismo conocer cómo razonan los niños en probabilidad, en general, que saber cómo razonan cuando se hayan trabajado la simulación en un ambiente computacional.

Puesto que el tiempo disponible para la formación de los futuros profesores es muy limitado, se requiere del diseño de tareas que contribuyan a enriquecer las diferentes facetas del conocimiento del profesor sobre probabilidad, simultáneamente. Batanero y Díaz (2012) proponen la resolución

de problemas paradójicos sencillos con un posterior análisis didáctico en que los futuros profesores analicen el contenido matemático del problema, las dificultades de los alumnos y los recursos didácticos para superarlos.

PERSPECTIVAS FUTURAS

La variedad de puntos discutidos –muy brevemente- pone de manifiesto la riqueza de la Didáctica de la Probabilidad como área potente de investigación que requiere el aporte de investigadores comprometidos con la mejora de su enseñanza. La educación del conocimiento y razonamiento probabilístico de niños y jóvenes es necesaria – independientemente de la discusión sobre su interés en el estudio de la inferencia estadística.

Puesto que vivimos en un mundo caracterizado por el azar, hemos de preparar a los futuros ciudadanos para desenvolverse mejor en ambiente de incertidumbre, comprender las situaciones aleatorias y tomar decisiones adecuadas. No es claro, sin embargo, el modo de conseguirlo. Es necesario una labor sistemática de exploración de los razonamientos de los estudiantes, y de experimentación y evaluación de nuevas propuestas educativas, tanto tradicionales, como apoyadas en la tecnología.

Además, sería interesante buscar situaciones específicas que permitan dar más énfasis a la visión subjetiva de la probabilidad, aplicable en situaciones en que no es posible repetir indefinidamente un experimento aleatorio en las mismas condiciones.

Puesto que el profesor es un pilar esencial en el aprendizaje de sus alumnos, y ya que la investigación sobre el conocimiento matemático-didáctico del profesor para enseñar probabilidad es tan escasa, esta sería un área particularmente prioritaria. La formación de los que se preparan para ser profesor, así como el apoyo a los profesores en ejercicio, depende en gran medida de que seamos capaces de impulsar la investigación sobre formación de profesores en el campo específico de la probabilidad.

Agradecimientos: Proyecto EDU2013-41141-P (MEC) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Batanero, C. (2013). Teaching and learning probability. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 491-496). Heidelberg: Springer.

Batanero, C. (2015). Understanding randomness. Challenges for research and teaching. Conferencia plenaria en el *Ninth Congress of European Research in Mathematics Education,* CERME 9 .Praga: ERME.

Batanero, C. y Díaz, C. (2007). Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. En J.P Van Bendegen y K. François (Eds), *Philosophical dimmensions in mathematics education.* (pp. 107-127). New York: Springer.

Batanero, C. y Díaz, C. (2012). Training school teachers to teach probability: reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics*, *3*(1), 3-13.

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.

Bernoulli, Jacob (1987). *Ars conjectandi*, Rouen: IREM. (Original work published in 1713).

Borovcnick, M. (2011). Strengthening the role of probability within statistics curricula. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 71-83). New York: Springer.

Borovcnik, M. y Kapadia, R. (2014). A historical and philosophical perspective on probability. En E. J Chernoff y B. Sriraman, (Eds.), *Probabilistic thinking: presenting plural* perspectives (pp. 7-34). Springer Netherlands.

Chernoff, E. J. y Sriraman, B. (Eds.) (2014), *Probabilistic thinking. Presenting multiple perspectives.* New York: Springer.

Fine, T. L. (1971). *Theories of probability. An examination of foundations*. London: Academic Press.

de Finetti, B. (1974). Theory of probability. London: John Wiley.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive source of probability thinking in children.* Dordrecht: Reidel.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, 20*, 13-31.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1988). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.

Hacking, I. (1975). *The emergence of probability* Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Jones, G. A. (2005). *Exploring probability in schools. Challenges for teaching and learning. Mathematics Education Library vol 40*. New York: Springer.

Jones, G., Langrall, C. y Mooney, E. (2007). Research in probability: responding to classroom realities. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Greenwich, CT: Information Age Publishing and NCTM.

Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases.* Cambridge: Cambridge University Press.

Laplace P. S. (1995). *Théorie analytique des probabilités.* Paris: Jacques Gabay. (Trabajo original publicado en 1814).

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction, 6,* 59–98.

Lee, H. S. y Hollebrands, K. F. (2011). Characterising and developing teachers' knowledge for teaching statistics with technology. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education* (pp. 359-369). Springer Netherlands,

Lee, H. S. y Lee, J. T. (2011). Simulations as a path for making sense of probability. In K. Hollebrands & T. Dick (Eds), *Focus in high school mathematics on reasoning and sense making with technology* (pp. 69-88). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Makar, K., Bakker, A. y Ben-Zvi, D. (2011). The reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning, 13*(1-2), 152-173.

Mises, R. von (1952). *Probability, statistics and truth*. London: William Hodge. (Original work published 1928).

Moivre, A. de (1967). *The doctrine of chances*. New York: Chelsea (Trabajo original publicado en 1718).

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.

TÍTERES: REPENSANDO EL AULA DE MATEMÁTICAS

Marcela Ferrari Escolá
Universidad Autónoma de Guerrero, México
mferrari@uagro.mx

Palabras clave: Títeres, matemáticas, socioepistemología, divulgación

Key words: puppet, mathematics, socioepistemology, divulgation

RESUMEN: En este artículo reflexionamos sobre la formación de jóvenes matemáticos y profesores de matemáticas sensibilizados y comprometidos con la divulgación de las matemáticas, y generadores de aulas no convencionales. La socioepistemología, como marco teórico, es quien nos da cobijo en la búsqueda de explicaciones a la interacción Títere-matemáticas-público. En general, hemos seguido los lineamientos de la metodología cualitativa, para provocar espacios de divulgación y recopilar información mediante videograbaciones, notas de campo, grupos focales con los integrantes de Matetíteres para analizar los logros o mejoras que se deberían implementar.

ABSTRACT: In this article we reflect on the training of young mathematicians and teachers sensitized and committed to the dissemination of mathematics math, and generators of unconventional classrooms. The socioepistemology , as a theoretical framework , who gives us shelter in the search for explanations to the public Puppet - math - interaction. In general, we followed the guidelines of the qualitative methodology , to bring disclosure spaces and collect information through videotapes , field notes , focus groups with the group of “Matetíteres” to discuss the achievements or improvements should be implemented.

INTRODUCCIÓN

En el Plan de Estudios para Educación Básica (2011) de México se propone desarrollar competencias inherentes a los campos de formación de lenguaje y comunicación, pensamiento matemático, exploración y conocimiento del mundo natural y social así como el desarrollo personal y la convivencia. Nos invita además a reflexionar sobre la interdisciplinariedad y por ende el entramado de las actividades que propicien el desarrollo de las competencias mencionadas, intersección donde los títeres podrían constituirse como una alternativa para la construcción social del conocimiento, en particular, de las matemáticas y su argumentación.

Tanto las matemáticas como los títeres son emergentes de ciertas prácticas, por lo general alejadas de la escuela, pero que en su desarrollo y valía, han ido incorporándose a la vez que adaptándose a otra comunidad, la educativa.

Los títeres, esos objetos inanimados que cobran vida al ser manipulados por el hombre, al regalarles su voz, su emoción, sus sentimientos, provocan y confluyen en el juego, en esa necesidad de expresarse, de comunicarse, de unir un mundo real y uno imaginario. Convocan la resiliencia (Santa Cruz y García Labandal, 2008); estimulan la imaginación de los niños; fomentan el juego creativo e introducen narrativa de modo interactivo (Brits, Potgieter y Potgieter, 2014; Keogh, Naylor, Maloney & Simon, 2008); son una herramienta versátil para la comunicación y el aprendizaje (Finkel, 1984; Trillería, 2003; Rogozinski, 2005; Núñez & Escandón, 2012, Ahicrona, 2012).

Desde nuestra perspectiva, la confluencia de elementos teatrales y escolares en la dupla títeres-matemática nos abre un espectro especial, aquel donde el ambiente discursivo entintado por la magia que provoca el teatro de títeres complejiza la objetivación de los saberes en íntima subjetivación de lo afectivo, estimulando una argumentación participativa.

Sarabia e Iriarte (2011) comentan que en los últimos años se han profundizado las reflexiones sobre la concepción del alumno como un aprendiz activo de los conocimientos; la del profesor como orientador y guía del proceso; la concepción de la enseñanza como un proceso de descubrimiento, razonamiento y construcción conjunta; la del aprendizaje como un proceso de relación de conocimientos significativos y funcionales; la del afecto como un componente esencial del éxito del alumno y del contexto como el lugar donde se realizan las interacciones entre alumnos y profesor. Sin embargo, para Charlot y da Silva (2013) sigue percibiéndose un desfase entre los contenidos y actividades matemáticas que en la escuela se pretenden enseñar y el uso de las matemáticas que demanda los estudiantes en prácticas cotidianas; desfase que propicia la generación de fracasos y sufrimientos en los actores del sistema.

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

El grupo de teatro guiñol, “Los matetíteres”, se crea respondiendo a la necesidad de acercar las matemáticas a la comunidad. Nacen buscando generar un ámbito discursivo alejado de una clásica aula de matemáticas, imaginando un salón de clases pero sin paredes, sin campana, sin obligatoriedad de estar, sin un aprendizaje explícito pero con la intencionalidad de co-construir saberes matemáticos en un mundo imaginario provocado por los títeres. Evolucionan no sólo como divulgadores de ciencias, en particular de matemáticas, presentando sus obras en eventos nacionales y estatales o respondiendo la invitación de ciertas escuelas; sino también formando

estudiantes de licenciatura y posgrado como emisores de mensajes especiales, constructores de diálogos, creadores de argumentos y muñecos, en tanto rompen la monotonía de sus estudios.

La afirmación que el saber no se limita a definir la relación que éste guarda con los objetos matemáticos sino a posicionar al ser humano en el acto mismo de significar, conocer, construir significados y en consecuencia estructurar sus sistemas conceptuales en tanto se lo problematiza que establece la socioepistemología, nos da cobijo en la búsqueda de explicaciones a la interacción Títere-matemáticas-público. Para Cantoral (2013), ese saber emerge de prácticas sociales que no se limitan a caracterizar lo que el ser humano hace, sino a problematizar las causas del porque lo hace, describir las circunstancias de cómo y cuándo lo hace, en dónde y porqué lo hace y como se concibe haciéndolo. Es el hombre quien construye explicaciones sobre la realidad que emerge de la cotidianidad, de la historicidad, del contexto, de ese entrelace de convivir, propiciando el desarrollo de complejos procesos de construcción de significados compartidos.

Por otro lado, los títeres, al igual que las matemáticas han irrumpido en el sistema educativo, sufriendo modificaciones, adecuándose a las intencionalidades didácticas así como a las prácticas docentes que los involucran. Están presentes y constituyen de cierta manera la cotidianidad del niño, son instituciones que han ido evolucionando a la par de los tiempos, fuera del ámbito escolar, pero convocadas a participar en la construcción explícita de saberes, uno poniendo el acento en el desarrollo de la oralidad y creatividad del niño y la otra, para alfabetizarlos científicamente, es decir, dotarlos de un lenguaje complejo muchas veces alejado de la cotidianidad (Ferrari, 2014).

Nuestro interés se centra en analizar la argumentación que genera el títere al interactuar con los participantes en tanto usamos las matemáticas jugando, así como el oficio que los titiriteros van desarrollando para provocarla. Toulmin, es uno de los investigadores de mayor influencia en aquellos interesados en reflexionar sobre la argumentación, y es quien se refiere a ella como la actividad de plantear pretensiones, someterlas a debate, producir razones para respaldarlas, criticar esas razones y refutar esas críticas. (Toulmin et al. 1984, p.14; citado en Marafioti, 2003). La argumentación se percibe entonces, desde las primitivas ideas aristotélicas, como un proceso desarrollado por una persona para convencer a una audiencia de la validez de sus ideas, donde, según Billing (1989) persuadir y convencer son dos caras de una misma moneda.

Krummheruer (2007), por su parte, establece que, por lo general, se asume que la argumentación, que parece ser bastante explícita y sofisticada en los participantes, es una condición previa para la posibilidad de aprender y no sólo el resultado deseado del conocimiento matemático puesto en juego. En este sentido, considera que, el conocimiento matemático es argumentativo y surge en la participación de los estudiantes en "una práctica de explicar " (Garfinkel, 1967, p. 1 citado en Krummheruer, 2007). Práctica que es provechosa y de apoyo, así como la iniciativa para los procesos de aprendizaje matemático de los estudiantes.

En la socioepistemología partimos de la idea de que desde ciertas prácticas así como desde los contextos argumentativos que surgen naturalmente en los grupos sociales, emerge la construcción del conocimiento matemático. Buendía (2005) rescata que argumentar es presentar una postura con la conciencia de que existe otra opinión, implícita o explícita, diferente de la propia. En este sentido, coincidimos con Krummheruer (2007) en que el foco principal en la argumentación debe estar sobre el análisis del proceso y no del producto, pues al analizarlo se descubre un cierto

dominio de realidad, que está, de algún modo, entre el nivel sociológico de los aspectos institucionalizados escolarmente y el nivel psicológico del individuo de conocimiento.

El uso del títere en matemáticas como disparador de argumentos, nos lleva a priorizar el convivir con aquellos que se acercan al teatrino a interactuar con títeres. Buscamos así, divertir y divertirnos en tanto nos exploramos como titiriteros matemáticos, es decir, invitar a personas y personajes a ser parte de un cuento, de una situación problémica que genere emociones.

En general, hemos seguido los lineamientos de la metodología cualitativa, para provocar espacios de divulgación y recopilando información mediante videograbaciones, notas de campo, grupos focales con los integrantes del grupo para analizar los logros o mejoras que se deberían implementar. En estos diez años de acumular bellas experiencias en espacios abiertos, videograbando las intervenciones en diferentes ámbitos, hemos ido rediseñando las obras en tanto evaluábamos la interacción provocada o su ausencia.

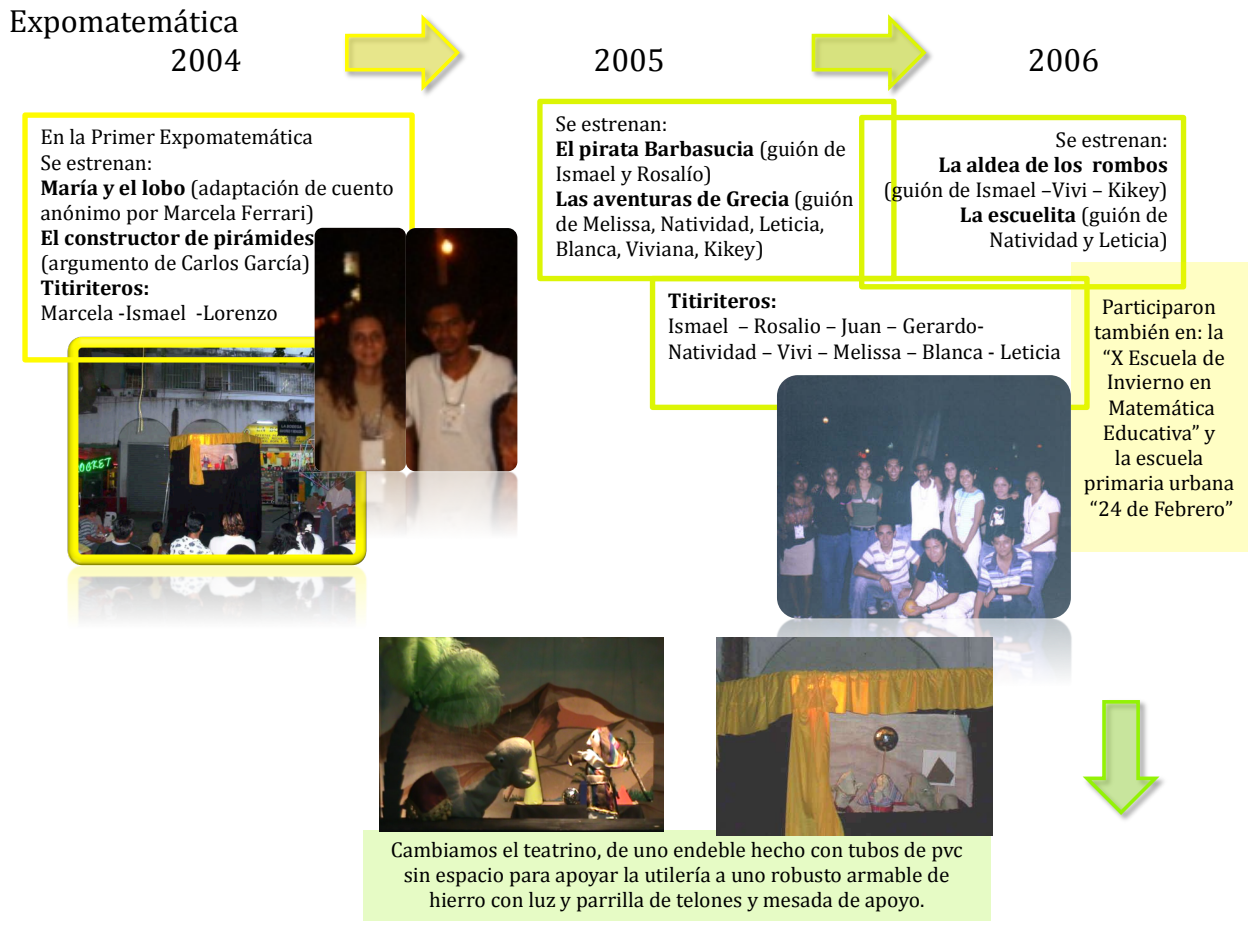
COMPARTIENDO EXPERIENCIAS

La divulgación de la ciencia en su búsqueda de entablar un cercano diálogo de conocimientos con el público en general, ha ido encontrando eco en diferentes iniciativas interdisciplinarias, entre otras el teatro científico. Entrelazar ciencias con arte es un desafío aceptado por varios. Coincidimos con Lesher, Treviño y Bes (2014) en que tanto las ciencias como las artes –entendidas en un sentido amplio: pintura, escultura, literatura, teatro, música, etc. – son procesos creativos que estimulan la generación de nuevos recursos enriqueciendo la manera de comunicar la ciencia a la sociedad.

Los Matetíteres, como divulgadores de las matemáticas, hemos encontrado en los títeres una forma de tender puentes imaginarios entre saberes matemáticos y diferentes comunidades, hemos percibido una tensión entre divertirnos conociendo y reflexionar sobre la apropiación social del conocimiento. Hemos producido y presentado, más de 10 obras donde se entremezclan nociones matemáticas con valores a compartir, juegos con moralejas, generando un clima especial, donde las risas y gritos de los pequeños transforman el espacio desde que se recorren las cortinas de nuestro teatro hasta que cierran.

Haciendo una línea de tiempo (ver Figura 1 y Figura 2), podríamos percibir el crecimiento del grupo de estudiantes involucrados, no sólo en cantidad sino también en experiencia.

Figura 1. Primero años de los matetíteres

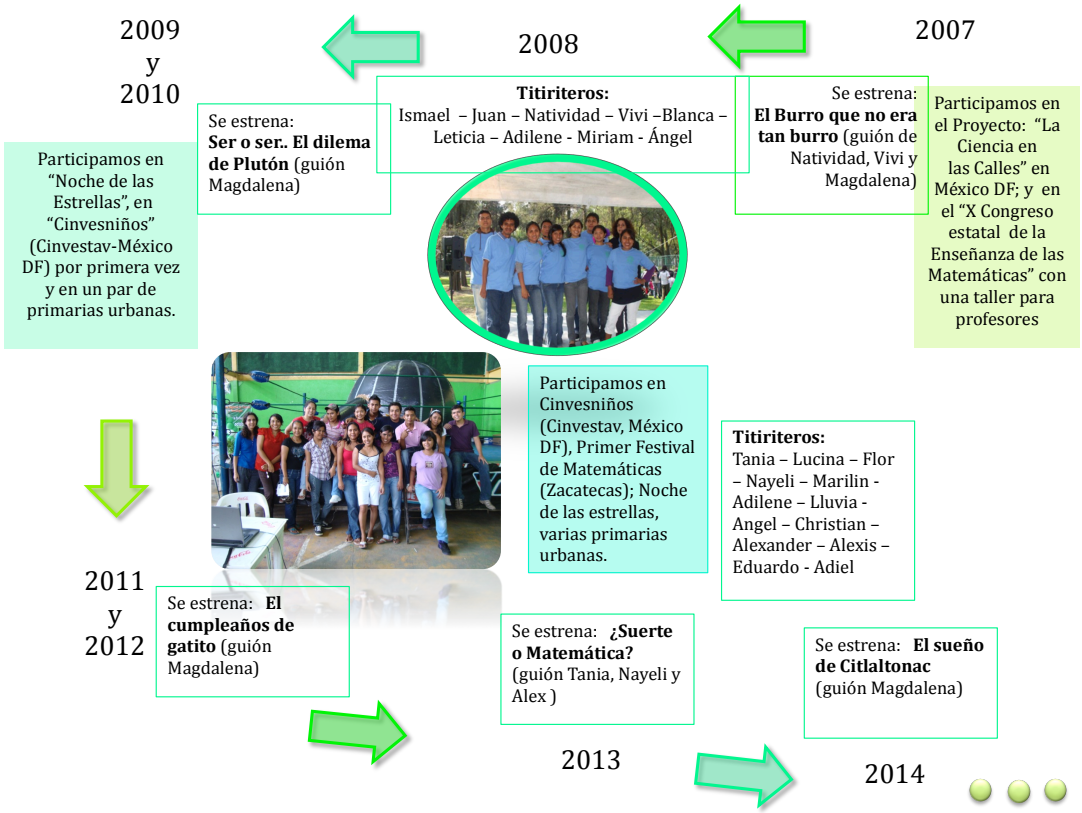


Los titiriteros, jóvenes estudiantes de licenciatura de las cuatro áreas disciplinares que se desarrollan en nuestra facultad, a saber: matemática educativa, matemática básica, estadística y computación, mediante la metodología de grupo focal, nos sorprenden con sus reflexiones, con su compromiso y responsabilidad ante la actividad que desarrollan extracurricularmente al participar de este proyecto del uso del títere en matemáticas. Uno de ellos nos comenta:

Titiritero 1.- "Yo entré al grupo por curiosidad... resultó ser algo divertido y con eso me salía de todas las rutinas que hacía… ¿De que otra forma puedes ver a unos títeres hablando de matemáticas?… sólo en la manera de acercar a un niño a que aprendiera, comprendiera o por lo menos se ria de las matemáticas."

poniendo énfasis en haber encontrado un espacio de diversión, compañerismo, llevando su reflexión hacia cómo hablar de matemáticas con los niños.

Figura 2. Los matetíteres siguen creciendo



Otro en cambio, comparte su evolución como comunicador:

Titiritero 2.- …"*es más… te ayuda porque socializas y no sólo eso… te quita un poco de pena*".

En tanto que un tercero se cuestiona sobre si el público entiende o percibe la matemática que está inmersa en la obra, interesándose así en la investigación:

Titiritero 3.- …" me interesa saber… qué pasa después de haber hecho las presentaciones, con la parte matemática, me refiero a que si el público entiende, conserva y utiliza la parte matemática" …"esas razones son las que surgen para investigar"

Explorando las ideas que van construyendo los jóvenes en tanto participan del proyecto, se va percibiendo su sensibilidad y respeto a la actividad que realizan. Se afanan por dialogar con el público, lo que les obliga a improvisar en tanto invitan a argumentar, como por ejemplo al presentar la obra María y el Lobo (estrenada en 2004), a defender las flores de María en tanto el lobo se las lleva y generar la necesidad de "contar" en dos sentidos, narrarle a María lo que ha sucedido en su ausencia, tal como lo expresa uno de los pequeños: "*el lobo no me hizo caso y se la llevó*" (Ver Foto 1) y el de enumerar: "*el lobo se llevó una*" (ver Foto 2) en tanto el niño indica con su dedo.

Foto 1 y 2.

Ante este tipo de situaciones que disparan cada vez que la obra se presenta, así como las otras, uno de titiriteros reflexiona con cierta emoción:

Titiritero 4.- …"*porque tú les estás transmitiendo un conocimiento... pero ellos no se dan cuenta de eso, porque ellos lo están tomando como un juego, están aprendiendo jugando*".

Si bien son los más pequeños los que reaccionan con mayor entusiasmo y candidez ante los títeres, no faltan los adultos acompañándolos y soplándoles algunas respuestas involucrándose también en la obra, en la argumentación que deseamos provocar en cada presentación. En este sentido, seguimos trabajando en profundizar los análisis, establecer con mayor fineza los constructos teóricos que nos permitan explicar lo que sucede al abrir las cortinas del teatrino y emocionar a los pequeños y grandes, en tanto construyen saberes matemáticos así como formamos jóvenes matemáticos sensibilizados y comprometidos con la divulgación de las matemáticas, y generadores de aulas no convencionales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ahlcrona, M.R., (2012). The puppet's communicative potential as a mediating tool in preschool education. *International Journal of Education Communication 44*, 171-184.

Billing, M. (1989). *Arguing and thinking. A rhetorical approach to social psychology.* Cambridge, Gran Bretaña: Cambridge University Press.

Brits, J. S., Potgieter, A. & Potgieter, M. J. (2014). Exploring the Use of Puppet Shows in Presenting Nanotechnology Lessons in Early Childhood Education. *International Journal for Cross-Disciplinary Subjets in Education 5*(4), 1798-1803.

Buendía, G. (2005). Prácticas sociales y argumentos: el caso de lo periódico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol 18, (pp.* 451-456). México: CLAME.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. España: Gedisa.

Charlot, B. & da Silva, V. A. (2013). La relación con la matemática de los alumnos de la escuela primaria. Un estudio con niños brasileños. En C. Broitman (Comp.) *Matemáticas en la escuela*

primaria II. Saberes y conocimientos de niños y docentes (pp. 47-68). Buenos Aires, Argentina: Paidós, cuestiones de educación.

Ferrari, M. (2014). El uso de títeres en matemáticas. En P. Lestón (Ed.*): Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol 27*. (pp. 1340-1347). México: CLAME.

Finkel, B. (1984). *El títere y lo titiritesco de la vida del niño*. Argentina: Plus Ultra.

Keogh, B., Naylor, S., Maloney, J. & Simon, S. (2008). Puppets and engagement in science: a case study. *NorDiNA 4*(2), 142-150.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom. Two episodes and related theoretical abductions. *Journal of Mathematical Behavior 26*, 60-82.

Lesher Treviño, A. y Bes, M. (2014). *Symbolica. Artes para divulgar la ciencia*. Disponible en http://ideografo.com/artes-para-divulgar-la-ciencia/, y consultada el 20 de enero de 2015.

Núñez, M. E. & Escandón, M.V. (2012). El teatrino como herramienta didáctica para el desarrollo de la expresión oral en el preescolar. *Campo Abierto, vol. 31 no 1, pp. 167-180, 2012.*

Rogoinski, V. (2005). *Títeres en la escuela. Expresión, juego y comunicación*. Argentina: Novedades Educativas.

Santa Cruz, E. & García, Labandal, L. (2008) *Títeres y resiliencia en nivel inicial.* Argentina: Homo Sapiens.

Sarabia, A. & Iriarte, C. (2011). *El aprendizaje de las matemáticas: ¿Qué actitudes, creencias y emociones despierta esta materia en los alumnos?* España: EUNSA

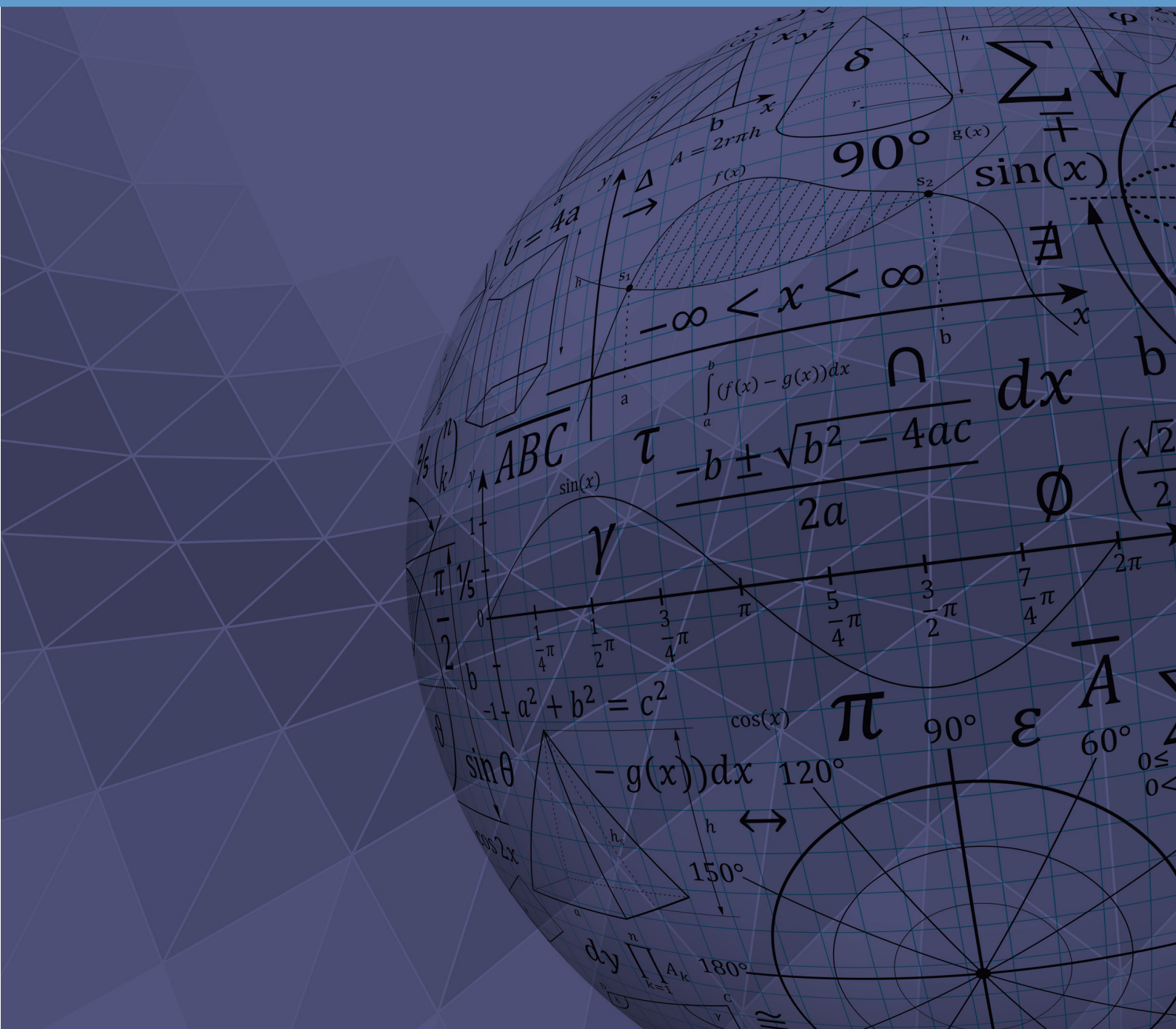
Secretaria de Educación Pública (2011). *Plan Estudios. Educación Básica*. México: SEP.

Szulkin, C. & Amado, B. (2006). *Una propuesta para el uso del teatro de títeres como herramientas socio-pedagógica en las escuelas rurales*. Argentina: editorial Comunicarte.

Tillería, D. (2003). *Títeres y máscaras en la educación. Una alternativa para la construcción de saberes.* Argentina. Homo Sapiens Ediciones.

CAPÍTULO 4

EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL



RELAÇÕES ENTRE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

José Fernandes da Silva, Ruy Pietropaolo, Vicenç Font Moll
Instituto Federal de Minas Gerais, Brasil), Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil), Universitat de Barcelona (España)
jose.fernandes@ifmg.edu.br, rpietropaolo@gmail.com, vicencfont@ono.com

Palavras chave: formação inicial, professores de matemática, competências, docência

Key words: initial training, mathematics teachers, skills, teaching

RESUMO: Neste trabalho apresenta-se o contexto da base de conhecimentos para a docência. Em seguida, discute-se a perspectiva do conhecimento ampliado do professor e suas implicações no contexto das competências a serem adquiridas para a docência em matemática, em especial, a competência de análise didática.

ABSTRACT: This paper presents the context of the knowledge base for teaching. Then discusses the prospect of increased knowledge of the teacher and its implications in the context of skills to be acquired for teaching in mathematics, in particular the expertise of training analysis.

INTRODUÇÃO

Internacionalmente, é sabido pela comunidade acadêmica que a formação de professores e, de forma particular, a formação de professores de Matemática necessita ser repensada.

No Brasil, a partir do ano 2000, o contexto da formação inicial de professores e, em especial, a formação de professores de Matemática torna-se mais discutida frente às novas regulamentações e às novas propostas de currículos.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores para o Magistério da Educação Básica, regulamentadas em 2002, preveem que durante a formação do futuro professor ocorra o diálogo entre os conhecimentos do conteúdo específico e os conhecimentos didáticos pedagógicos. Essas diretrizes, apontam, ainda, a necessidade do desenvolvimento de diversas competências na formação inicial como a capacidade para realizar investigação com foco no processo de ensino e de aprendizagem, o conhecimento sobre a avaliação e suas implicações no contexto da educação básica e o desenvolvimento da autonomia como elemento de fortalecimento da prática pedagógica. Importante destacar que "[...] a aquisição destas competências na formação inicial é importante para a vida profissional do professor de Matemática, pois a sua atuação na Educação Básica demanda a capacidade de articulação dos seus conhecimentos e da sua capacidade de agir na prática." (Silva; Pietropaolo, 2015, p.89).

A seguir, apresenta-se uma discussão teórica relacionando a base de conhecimentos necessários ao professor de Matemática, suas ampliações e sua integração à perspectiva *competencial.*

MARCO TEÓRICO

O suporte teórico está delimitado dentro da abordagem de Shulman (1986; 1987) sobre a base de conhecimentos necessários para o ensino, Ball, Thames e Phelps (2008), que discutem conhecimentos necessários para ensinar matemática. Em seguida, discutimos uma perspectiva ampliada dos conhecimentos necessários ao professor, baseando em Godino (2009), Pino-Fan e Godino (2015), Godino, Batanero e Font (2009). Por último, apresentamos uma abordagem sobre competências na formação inicial de professores de Matemática levando em consideração os estudos de Font (2011; 2013) e Larios; Font; Spíndola; Sosa; Giménez (2012).

Para Shulman (1986), três categorias de conhecimentos são essenciais ao professor. Tais categorias são: o conhecimento do conteúdo; o conhecimento pedagógico do conteúdo e o conhecimento do currículo. Em Shulman (1987) tais conhecimentos são ampliados, sendo proposto pelo referido autor novas dimensões. São elas: conhecimento do conteúdo, princípios e estratégia de manejo de sala de aula, materiais e programas curriculares, conhecimento de conteúdo pedagógico, conhecimento sobre os alunos e suas características, conhecimento do contexto educacional e conhecimentos dos fins, propósitos e valores educacionais e sua base filosófica e histórica.

Os estudos desenvolvidos por Ball, Thames e Phelps (2008) avançam em relação à Shulman (1986;1987) pois discute a base de conhecimentos necessários ao professor de Matemática. As categorias propostas por Ball, Thames e Phelps (2008), são: I) Conhecimento comum do conteúdo – refere-se a um conhecimento que não é característico apenas do professor, mas comum às outras profissões que usam conhecimentos matemáticos para resolver seus problemas; II)

Conhecimento especializado do conteúdo - definido como o conhecimento do conteúdo para a condução do fazer docente, sendo usado unicamente pelos professores; III) Conhecimento horizontal do conteúdo – descreve como temas matemáticos estão relacionados entre si, seja dentro da disciplina matemática. Neste caso, o professor deve conhecer as possíveis conexões e articulações dos conteúdos matemáticos que podem favorecer futuros estudos de temas mais aprofundados. IV) Conhecimento de conteúdo e de alunos – neste caso, é importante que professor possua habilidades para lidar com o saber dos alunos e o saber da Matemática; V) Conhecimento de conteúdo e de ensino – neste domínio fica evidente a necessidade do diálogo entre o saber matemático e o saber sobre o ensino.

É perceptível na literatura que não existe consenso sobre quais conhecimentos os professores de matemática devem ter.

Importante destacar que o modelo de Ball, Thames e Phelps (2008) apresentou um avanço sobre a base de conhecimentos necessários ao professor de Matemática, porém, alguns questionamentos ainda se fazem presentes a respeito destas categorias de conhecimentos. Pino-Fan e Godino (2014) indagam a este respeito:

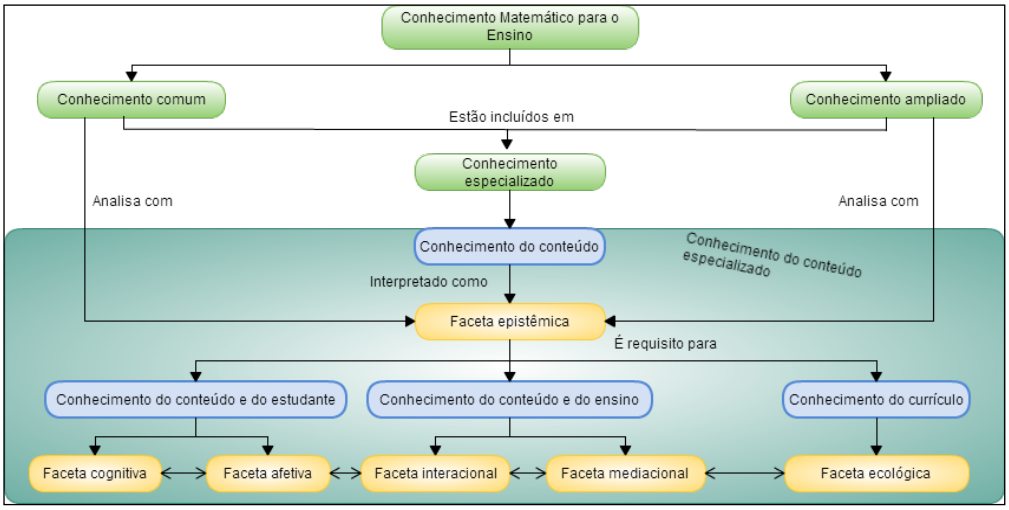
> De que forma ou com quais critérios se pode avaliar ou medir os conhecimentos? Como se pode ajudar aos professores a adquirir os distintos conhecimentos? Como se relacionam entre si, os distintos conhecimentos? (Pino-Fan; Godino, 2015, p.93).

Pesquisadores Espanhóis têm realizado discussões e estudos que apontam novas conceituações e outros avanços quanto aos conhecimentos necessários ao professor de Matemática. Godino (2009) defende que o termo *"conhecimento didático-matemático do professor - CDM*" é mais representativo quando se refere à complexidade de conhecimentos e competências profissionais.

A seguir, de acordo com as perspectivas de Godino (2009) e Pino-Fan e Godino (2015), apresentamos uma breve síntese sobre cada uma das facetas do CDM: I) Epistêmica: está relacionada com os conhecimentos matemáticos envolvidos no contexto educacional e sua organização para o processo de ensino; II) Cognitiva: esta faceta possibilita que os professores tenham conhecimentos que lhes permitam conhecer melhor seus alunos e realizar um bom planejamento das suas aulas prevendo possíveis erros e dificuldades; III) Afetiva: é a faceta que permite os professores lidarem com a parte afetiva que está compreendida por elementos como atitudes, emoções, crenças e valores dos alunos; IV) *Mediacional*: trata-se dos conhecimentos do professor relacionados à capacidade de articular materiais e tecnologias para o ensino; V) Interacional: trata-se da capacidade de o professor compreender, prever, implementar e avaliar as interações que ocorrem no processo de ensino e aprendizagem e VI) Ecológica: o professor que dispõe de conhecimentos no âmbito desta faceta é capaz de perceber o currículo como uma janela que estabelece enlaces com o entorno social, político e econômico.

A relação estabelecida entre as proposições de Ball, Thames e Phelps (2008) e as facetas anteriormente descritas pode ser observada na figura a seguir:

Figura 1. Relação entre as categorias de conhecimento



Fonte: Pino-Fan, Godino e Font (2013).

De acordo com a representação acima, o conhecimento comum, o conhecimento ampliado e o conhecimento especializado do conteúdo passam a ser três grandes categorias de conhecimentos sobre o conteúdo matemático, que, para Pino-Fan, Godino e Font (2013) podem ser caracterizadas como I) Conhecimento comum do conteúdo – é o tipo de conhecimento que se analisa pela faceta epistêmica e está relacionado com os conhecimentos matemáticos necessários para o professor ensinar e resolver situações-problemas relacionadas a um tema especifico da Matemática; II) Conhecimento ampliado do conteúdo – É um conhecimento que se refere àquilo que o professor é capaz de fazer além de resolver as situações-problemas sobre um tema quando está a ensinar, isto é, deve possuir conhecimentos mais avançados sobre este tema, no currículo, sendo capaz de estabelecer relações e conexões com outros temas mais avançados que os alunos vão deparar ao largo da vida acadêmica; III) Conhecimento especializado – É o conhecimento que podemos considerar como o conhecimento adicional que o professor deve saber, pois é o conhecimento que diferencia o professor das demais pessoas que sabem Matemática, mas que não são professores. Neste conhecimento estão presentes quatro subcategorias:

a) **Conhecimento especializado do conteúdo -** é o tipo de conhecimento que se refere à capacidade de o professor ir além de resolver situações-problemas em relação a um conteúdo matemático. Isso significa que o professor deve buscar um conjunto de significados, diferentes representações, conceitos, proposições, argumentos e procedimentos pertinentes no processo de ensino e aprendizagem.

b) **Conhecimento do conteúdo em relação aos estudantes:** O professor deve reflexionar sobre a aprendizagem dos alunos e descrever os tipos de configurações cognitivas que os estudantes desenvolvem diante das tarefas propostas.

c) **Conhecimento do conteúdo e ensino:** neste conhecimento estão presentes as facetas interacional e *mediacional*. É fundamentado na reflexão do professor sobre as relações entre o ensinar e o aprender e na identificação de modelos de gestão de aulas.

d) **Conhecimento do conteúdo e currículo:** se fundamenta na faceta ecológica e se refere ao contexto em que se desenvolve a prática pedagógica do professor de Matemática.

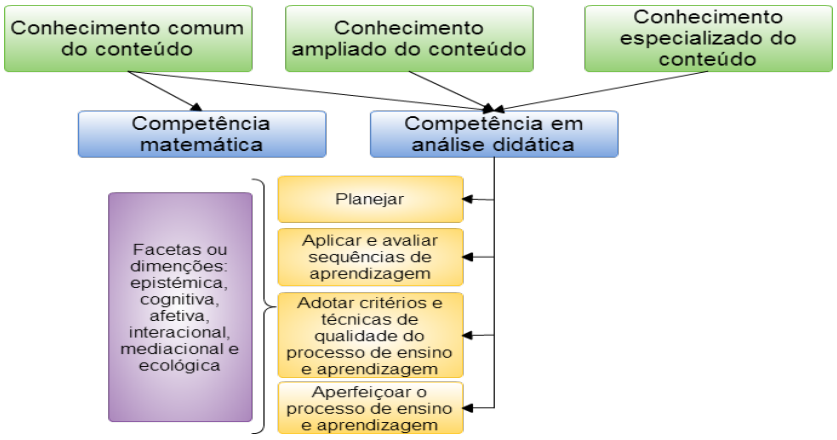
Dado esta configuração de conhecimentos necessários ao professor, temos que levar em conta a forma que o professor vai mobilizá-los para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Para isso, não podemos ignorar as importantes transformações ocorridas no âmbito da educação básica, pois estas repercutem na prática pedagógica.

Os currículos da educação básica, segundo Font (2011), tornaram-se ambiciosos ao se organizarem em torno de competências. Esses novos currículos demandaram que os cursos de formação de professores buscassem, também, o desenvolvimento de novas estratégias formadoras, pois não só os conhecimentos são suficientes para o professor, mas o desenvolvimento de estratégias de mobilização destes conhecimentos frente às demandas da educação básica que são diversas.

Para que o professor seja capaz de tomar decisões e organizar o seu fazer, é importante destacar que existem competências consideradas genéricas e competências específicas ou profissionais. Larios *et al.* (2012) apontam que as competências genéricas são aquelas transversais à formação docente e não são exclusivas do professor de Matemática. Como exemplo podemos citar os conhecimentos da tecnologia, a capacidade de comunicação, aprender a aprender e outras. As competências específicas são aquelas da ação docente do professor de Matemática, que, junto com as genéricas e outros conhecimentos, contribuem para o enriquecimento da prática profissional.

Uma das competências fundamentais aos professores de Matemática é a competência em análise didática. Font *et al.* (2012) denominam a competência em análise didática como uma competência específica primordial à formação dos professores de Matemática, pois é nesta competência que se desenvolve a capacidade de desenhar, aplicar e avaliar sequências de aprendizagem, mediante técnicas específicas e critérios de qualidade. Além disso, esta competência possibilita ao professor planejar, programar, avaliar e buscar aperfeiçoar o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Diante do exposto, o professor necessita do seu *hall* de conhecimentos para articular a análise didática. A seguir explicita-se esta relação:

Figura 2. Relação entre os conhecimentos e as competências



Fonte: Elaborado pelos autores

METODOLOGIA

Este estudo é qualitativo, visto que buscamos enumerar aspectos dos conhecimentos necessários à formação do professor de matemática, seus avanços e as relações que podem ser estabelecidas entre esses conhecimentos e as competências para ensinar, em especial, a competência em análise didática. Trata-se de um estudo teórico com realização de compilação bibliográfica e discussão de pesquisas publicadas sobre a temática investigada.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A base de conhecimentos, tanto a proposta por Shulman (1996;1987) e Ball, Thames e Phelps (2008) são importantes, mas é necessário considerar que tais bases apresentam limitações importantes. Tais limitações ficam evidenciadas a partir do momento que se discute a possibilidade do conhecimento ampliado e as relações que podem ser estabelecidas entre os conhecimentos e as facetas do CDM proposto por Godino (2009) e Pino-Fan e Godino (2015). Após o estabelecimento destas relações pode-se se afirmar que a base de conhecimentos necessária aos professores de matemática, torna-se mais densa e mais e sólida. Além disso, reconhecer o avanço desta base de conhecimentos implica em reconhecer novas competências para o professor gerir o processo de ensino e aprendizagem da matemática. Isto significa que, o professor de posse do conhecimento comum do conteúdo, do conhecimento ampliado do conteúdo e do conhecimento especializado do conteúdo terá a competência Matemática e a competência em análise didática. Em outras palavras, o professor terá o repertório do conteúdo matemático e a capacidade de planejar suas aulas, aplicar e avaliar sequências de aprendizagem, adotar e aperfeiçoar critérios e técnicas de qualidade do processo de ensino e aprendizagem entre outros.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ball, D. L.; Thames, M. H., Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? Journal of Teacher Education. 59, 389-407.

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 26,7-8.

Font, V. (2013). La formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria en España durante el periodo 1971- 2013. Revista Binacional Brasil-Argentina: Diálogo entre as Ciências - Diálogo entre las Ciencias. 2, 49-62.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20, 13-31.

Godino, J. D.; Batanero, C.; Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Recuperado em 13 de maio de 2015 de http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.html. Acesso em: 13 mai. 2015.

Godino, J. D.; Pino-Fan, L. (2013). The mathematical knowledge for teaching: a view from onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. Recuperado em 13 de maio de 2015 de http://www.cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG17/WG17Posters/WG17_P_Godino_Pino_Fan.pdf.

Larios, V.; Font, V.; Spíndola, P.; Sosa, C.; Giménez, J. (2012). El perfil del docente de Matemáticas: una propuesta. Eureka, 27, 19-36.

Silva, J. F., Pietropaolo, R. C. (2013). A formação inicial de professores de matemática, no Brasil, na perspectiva do Programa de Consolidação das Licenciaturas. En P. Lestón (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27, 1843-1850. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Pino-Fan, L., Godino, J. D.(2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. Revista Paradgma, 36(1), 87-109.

Pino-Fan, L., Godino, J.D., Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. Educação Matemática Pesquisa,13(1), 141-178.

Pino-Fan, L., Godino, J.D., Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (Parte 2). REVEMAT, 8, Ed. Especial, 1- 47.

COMPETENCIAS PRESENTES EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS. UN ESTUDIO DESDE EL CURRÍCULUM OFICIAL

Claudia Yesenia Pérez Zamarripa, Judith Alejandra Hernández Sánchez
Universidad Autónoma de Zacatecas (México)
claudia_yes5@yahoo.com, judith700@hotmail.com

Palabras clave: profesor de matemáticas, formación Inicial, competencias, campos de acción

Key words: mathematics teacher, initial training, competences, action fields

RESUMEN: En México recientemente se declaró la obligatoriedad del Nivel Medio Superior. Esto ha establecido un reto en torno a la formación inicial de los profesores de matemáticas de este nivel. En esta investigación se identifican y describen a nivel diagnóstico las competencias de cuatro currículos oficiales. Para desarrollar el estudio se utilizaron algunos modelos propuestos por la Matemática Educativa en este ámbito. Hemos comprobado que no predomina un modelo de formación y que la disciplina central con la que se asocian los campos de acción y las competencias depende de la institución que alberga cada carrera. Sin embargo, los cuatro currículos comparten algunas competencias tanto del área de matemáticas como del área de educación.

ABSTRACT: In Mexico recently the obligatory was declared in the Superior Middle Level. This have set up a challenge regarding training of mathematics teachers of this level. In this research, the competences are identified and describe to the diagnostic level in four official curriculums. To develop the study some models proposed by the Mathematics Education in this area were used. We have found that not exists a predominant training model and that the central discipline with which the fields of action and competences are associated depends on the institution that houses each career. However, the four curriculums share certain competences of both the area of mathematics and the area of education.

INTRODUCCIÓN

De acuerdo con Dolores (2013), actualmente se manifiesta una "carencia de profesionalización del campo de la enseñanza de la matemática" (p. 15). Una evidencia de tal problemática en México son los resultados establecidos por Hernández, Sosa y López (2013). A ello se suma el hecho de que en el Nivel Medio Superior (NMS) la labor de profesor de matemáticas es compartida por diferentes profesionistas (Beneitone, Esquetini, González, Marty, Siufi y Wagenaar, 2007 y Dolores, 2013). Esta diversidad de perfiles y las nuevas políticas educativas para su ingreso (COIEMS-A, 2014) y permanencia parecen incidir en la decisión de los profesores al elegir programas para su formación.

Al respecto, en el 2011 el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), plantea que la mayoría de los profesores del NMS que cuentan con estudios de posgrado han optado por programas del área de educación. Esto tal vez da evidencia de que los profesores buscan programas que les ayuden a conducir de una mejor manera su labor docente y a enfrentar los retos de su profesión. Sin embargo, existe un problema en el diseño de programas de formación que buscan influir en la calidad de la práctica de los profesores (Hiebert, Morris y Glass, 2003, p. 201, citados en Font y Godino, 2007). Una posible causa es que no existe “un conocimiento base ampliamente compartido sobre la enseñanza y la formación de profesores" (Hiebert, et al., 2003, p. 201, citados en Font y Godino, 2007, p. 376). Lo mismo pasa con las competencias que se declaran en los currículos oficiales para la formación de profesores, en donde se encuentran algunas diferencias.

Una posible forma de abordar este problema se plantea desde la revisión y evaluación del currículum para la formación inicial de profesores (Marcelo, 1994 y Godino, 2006). Por lo tanto, el interés de este estudio se centra en presentar un diagnóstico de la oferta educativa existente en México en torno a la formación inicial de profesores de Matemáticas (FIPM), a través de la clasificación de las competencias y los campos de acción planteados en el currículum oficial de cuatro licenciaturas que forman profesores de matemáticas (PM) del NMS.

MARCO TEÓRICO METODOLÓGICO

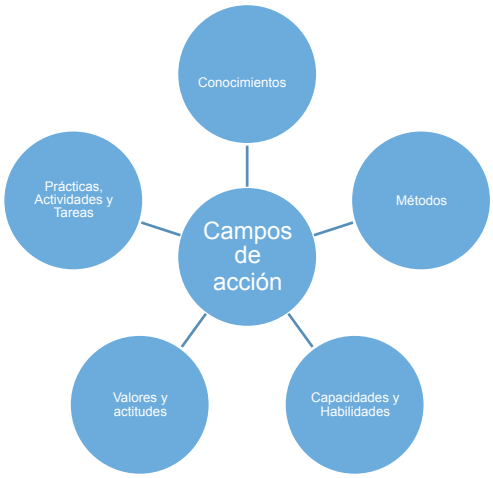
Según Horruitiner (2006) el primer paso en el diseño o transformación de un currículum es la revisión y evaluación de lo ya existente; además de la caracterización del profesional que se quiere formar. La caracterización se conforma de tres elementos: el objeto de la profesión, las esferas de actuación y los campos de acción. A continuación se presenta la postura propuesta por Horruitiner (2006) en torno a estas acepciones, las cuales guiaron este trabajo:

- **El objeto de la profesión** se entiende como los problemas que atiende el profesional. Ahora la forma de atender esos problemas es reconocido como los modos de actuación; los cuales pueden estar redactados en términos de finalidades formativas. En nuestro estudio nos aproximamos a este elemento mediante las competencias. Pues, de acuerdo con Perrenoud (2010), una competencia “representa una capacidad de movilizar varios recursos cognitivos para hacer frente a un tipo de situaciones” (p. 11).
- **Las esferas de actuación** son los lugares donde el profesional se desempeña y la forma en la que éste se presenta. Para esta investigación se considera como esfera de actuación la docencia en matemáticas en el NMS.

- **Los campos de acción** son los contenidos fundamentales de la profesión que aseguran el desempeño profesional del egresado. En esta investigación son aquellos recursos formativos considerados y que son movilizados a través de las competencias declaradas en el *currículum oficial* (Alsina, 2000).

Esta investigación pertenece a los estudios comparados (Caruso, 2011). La metodología empleada fue el Análisis de Contenido (Colle, 2011). Con lo cual se logró analizar y comparar las competencias presentes en los currículos oficiales de 4 licenciaturas consideradas representativas de la formación inicial de profesores de matemáticas del NMS en México. Para ello, se buscaron y localizaron diferentes fuentes relativas a estos elementos. Así, para el caso de las competencias se utilizaron las propuestas de: Beneitone, *et al*. (2007), Perrenoud (2010), Acuerdo número 447 (2008) y Godino, Rivas, Castro y Konic (2008). Estas competencias fueron clasificadas de acuerdo con su origen (resultado de la reflexión teórica, de estudios de caso o por ser propuestas para la evaluación de los profesores a su ingreso al servicio docente). En lo que respecta a los campos de acción, vistos como recursos para la formación de futuros PM, se identificaron aquellos propuestos en: Hernández (2014), Dolores (2013) y Ball, Thames y Phelps (2008); sin embargo, para su identificación en los currículos oficiales analizados se propuso una caracterización y organización de los mismos (Figura 1).

Figura 1. Clasificación de los campos de acción reconocidos



Fuente: Propuesta por las autoras

Para seleccionar las carreras que se analizaron se utilizó la información de las convocatorias del Concurso de Oposición para el Ingreso a la Educación Media Superior (COIEMS-A, 2014), específicamente los perfiles que se aceptan para laborar como PM del NMS. Posteriormente, se consultaron las carreras de estos perfiles en la información de Beneitone, *et al*. (2007). El resultado fue que sólo las carreras de matemáticas y de educación reconocen la docencia en matemáticas como una de las actividades que desempeñan sus egresados. A partir de dicha información se decidió considerar sólo las carreras de estas áreas. Para identificar las carreras en México que forman licenciados en matemáticas y en educación nos apoyamos en los registros del año 2012 de la Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior (ANUIES).

Enseguida y tomando en cuenta que nuestro centro es la FIPM del NMS, sólo tomamos aquellas que reconocen en sus perfiles de egreso la docencia en matemáticas en este nivel educativo. Ahora, para lograr cierto grado de representatividad nacional se decidió analizar una carrera de cada categoría establecida por Hernández (2014). El último criterio de selección fue la cercanía geográfica con el estado de Zacatecas; sin que esto afectará la representatividad establecida con la categorización de Hernández (2014). Así, las carreras que fueron analizadas y que reconocen a la docencia en matemáticas en el NMS como una actividad para sus egresados son:

- Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la Universidad Autónoma de Aguascalientes (UAA).
- Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas (UAZ).
- Licenciatura en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí (UASLP).
- Licenciatura en Educación Media Especializado en Matemáticas de la Universidad de Colima (UC).

Las cuatro licenciaturas que forman PM del NMS están ubicadas geográficamente en el centro-norte del país. Las tres primeras se encuentran albergadas en instituciones que forman matemáticos, mientras que la última se desarrolla en una institución de corte pedagógico. Las diferencias propuestas por Hernández (2014) se confirman en los resultados del presente estudio; sin embargo se profundizan llevándolo a un nivel más específico. En particular se contestaron las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son las competencias que se declaran en estas carreras y su relación con aquellas propuestas por la Matemática Educativa y solicitadas por los empleadores?
- ¿Existen algunas competencias que se puedan considerar aceptadas o reconocidas para el profesor de matemáticas desde el currículum oficial?

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Del análisis de contenido a los cuatro currículos, en este documento se presentan las respuestas a las dos preguntas propuestas

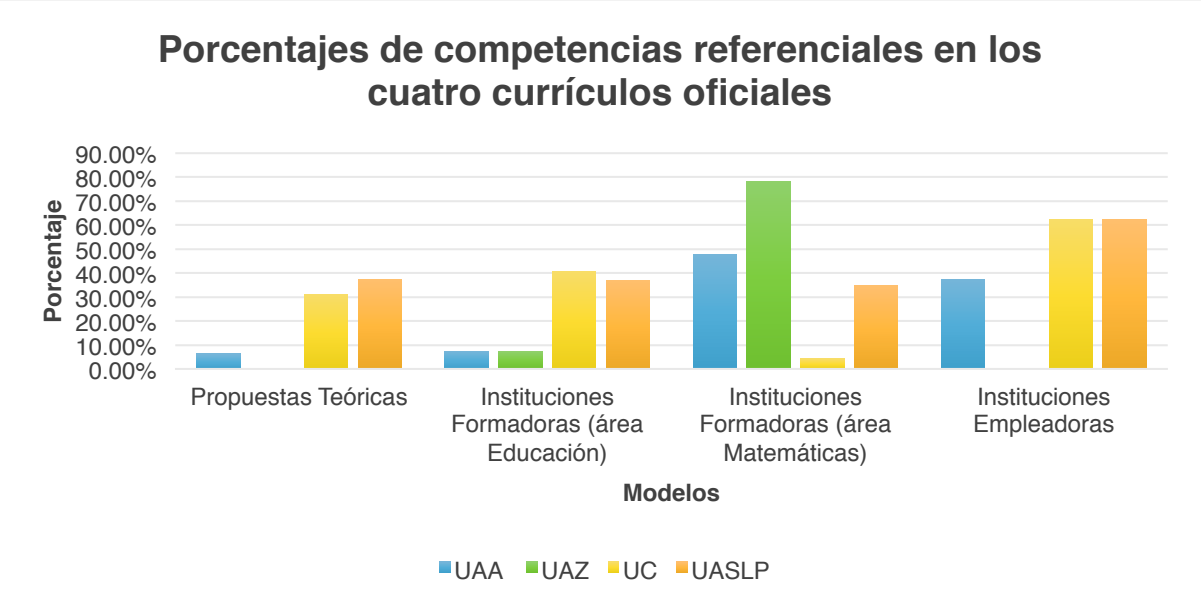
Comparativo entre competencias declaradas, propuestas y esperadas en los currículos oficiales para la formación inicial de PM del NMS

El primer punto tiene como indicador principal los resultados obtenidos en esta investigación y que consisten en la comparación porcentual entre las competencias que declaran estas carreras en sus perfiles de egreso y su semejanza con las competencias propuestas por la teoría, por las instituciones formadoras y por los empleadores (Gráfica 1). Se propone que, de alguna manera, este comparativo nos permite identificar qué es lo que están atendiendo las diferentes carreras que forman futuros PM del NMS. Esto puede dar indicios de lo que se reconoce como importante en el plan formativo del profesional de la docencia en matemáticas: lo que propone la teoría, lo que piden los empleadores o lo que marcan como importante para la profesión, los académicos y egresados latinoamericanos.

Al comparar los cuatro currículos oficiales analizados con base en los modelos referenciales podemos rescatar los siguientes resultados:

- El programa que más se acerca a las propuestas que desde la teoría se hacen es la Licenciatura en Matemática Educativa de la UASLP, seguida por la Licenciatura en Educación Media con Especialidad en Matemáticas de la UC. Es interesante mencionar que ambas reconocen desde el título que otorgan una relación directa con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
- En lo que respecta al modelo establecido por el Tuning de Latinoamérica (Beneitone, *et al.*, 2007) denominado "Instituciones Formadoras" (área Educación o Matemáticas), como era de esperarse, en el área de educación la carrera que más se acerca es el propuesto por la UC. Mientras que en el área de matemáticas es la Licenciatura en Matemáticas de la UAZ.
- Finalmente, para el modelo establecido con base en lo que solicitan las Instituciones Empleadoras están los programas de la UASLP y de la UC.

Gráfica 1. Comparativo de porcentajes de competencias referenciales para los cuatro currículos oficiales analizados



Fuente: Obtenida por las autoras con base en la información analizada

En este sentido, las licenciaturas que forman matemáticos (UAA y UAZ) favorecen en mayor medida competencias del área de matemáticas; mientras que la licenciatura de la UC propone en un mayor porcentaje competencias del área de educación. Finalmente la Licenciatura en Matemática Educativa de la UASLP, en nuestra opinión, alcanza un balance entre las competencias de educación y las de matemáticas, mostrando una mayor presencia en aquellas competencias propuestas por la teoría y establecidas por los empleadores. De esta manera se puede establecer que si bien las competencias declaradas en los currículos oficiales de estas

carreras son congruentes con el título que otorgan y al área al que pertenecen, existen algunas diferencias respecto a su cercanía con lo que la teoría y los empleadores esperan en un profesor de matemáticas.

Competencias reconocidas en los currículos oficiales de formación inicial de PM del NMS

Las cuatro licenciaturas analizadas se constituyen en programas de formación inicial para PM del NMS por lo que toman en cuenta competencias tanto del área de educación como de matemáticas; aunque de manera diferenciada como ya se vio en la sección anterior. Además se determinó una coincidencia importante, pues los cuatro programas reconocen que para enseñar matemáticas es necesario un dominio de dicha disciplina. Esto se respalda pues se encontró que la única competencia referencial que está presente en todos los currículos analizados fue: *Domina los saberes de las disciplinas del área de conocimiento de su especialidad.*

En lo que respecta a competencias que tienen que ver con la docencia en matemáticas se encontró que en tres de los cuatro programas analizados (UAA, UC y UASLP) coinciden en que es importante desarrollar en sus estudiantes las siguientes competencias:

- *Organizar y animar situaciones de aprendizaje.*
- *Planifica los procesos de enseñanza y de aprendizaje atendiendo al enfoque por competencias, y los ubica en contextos disciplinares, curriculares y sociales amplios.*
- *Lleva a la práctica procesos de enseñanza y de aprendizaje de manera efectiva, creativa e innovadora a su contexto institucional.*
- *Evalúa los procesos de enseñanza y de aprendizaje con un enfoque formativo.*
- *Domina la teoría y metodología curricular para orientar acciones educativas (diseño, ejecución y evaluación).*

Las competencias anteriores están asociadas con el área de educación. Al ser reconocidas por tres de las licenciaturas podríamos decir que, en cierta forma, estas competencias se han logrado institucionalizar en los currículos oficiales. Si observamos estas competencias están centradas en actividades medulares de cualquier profesor: diseñar, ejecutar y evaluar el currículum, en nuestro caso de matemáticas.

CONCLUSIONES

En México se encontraron 134 licenciaturas en el área de educación y matemáticas. Sin embargo, sólo 21 reconocen a la docencia en matemáticas en el NMS como una actividad para sus egresados. Lo anterior marca, en nuestra opinión, una oferta limitada para aquellos que desean formarse como profesores de matemáticas para este nivel educativo. Y si ahora tomamos en cuenta los resultados de esta investigación podemos estimar que de estas 21 carreras sólo 6 cuentan con currículos que toman en cuenta las competencias que desde la Matemática Educativa se proponen para los profesores de matemáticas o están próximas a lo establecido por las instituciones empleadoras.

En general, los currículos oficiales analizados parecen enfocarse ya sea en competencias del área Docente o del área Matemática. Podemos decir que la competencia disciplinar que todos los currículos oficiales reconocen es el dominio de los conocimientos del área de enseñanza en

cuestión, en este caso, la matemática. En contraparte, una competencia docente que se propone como institucionalizada en tres de los cuatro currículos es planificar, llevar a la práctica y evaluar procesos de enseñanza y aprendizaje en matemáticas. Si bien la primera es confirmada en todos las carreras analizadas la segunda sólo en tres; esto se puede interpretar que en la gran mayoría de las licenciaturas en matemáticas se sigue estableciendo al conocimiento disciplinar como una condición suficiente para enseñar matemáticas.

Por último las cuatro licenciaturas representativas en nuestro país consideran competencias del área de educación y del área de matemáticas. Sin embargo, la Licenciatura en Matemática Educativa de la UASLP es la que declara un mayor equilibrio. Esta licenciatura podría proponerse como un modelo a seguir para todas aquellas licenciaturas que pretenden formar futuros PM del NMS.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acuerdo número 447 (2008). Recuperado el 5 de mayo de 2014 de http://cosdac.sems.gob.mx/descarga_archivo2.PHP?documento=ACUERDO447.pdf&ubicacion=reforma&tipo=0.

Alsina, C. (2000). Mañana será otro día: un reto matemático llamado futuro. En J. M. Goñi (Eds). *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI* (pp. 13-21), España: Editorial Graó de IRIF, S.L

ANUIES (2012). *Catálogo de Programas de Licenciatura y Posgrado*. Recuperado el 19 de junio de 2014 de http://www.anuies.mx/content.php?varSectionID=167

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching what makes it special? *Journal of teacher education 59(5),* 389-407.

Beneitone, P., Esquetini, C., González, J., Marty, M., Siufi, G. y Wagennar, R. (Eds.) (2007). *Reflexiones y perspectivas de la Educación Superior en América Latina. Informe final - Proyecto Tuning- América Latina 2004-2007*. Recuperado el 7 de mayo de 2014 de http://tuning.unideusto.org/tuningal/.

Caruso, M. (2011). Teoría y metodología en estudios comparados: la justificación de un plus valor y el abordaje de la globoesfera. *Revista Latinoamericana de Educación Comparada, 2*, 8-9.

Colle, R. (2011). *El análisis de contenido de las comunicaciones: Fundamentos*. Recuperado el 20 de marzo de 2015 de: http://www.clubedejornalistas.pt/wp-content/uploads/2013/06/An%C3%A1lise-de-conte%C3%BAdo-das-comunica%C3%A7%C3%B5es_Fundamentos.pdf

Concurso de Oposición para el Ingreso a la Educación Media Superior. COIEMS-A. (2014). Recuperado el 25 de abril del 2014 de: http://servicioprofesionaldocente.sep.gob.mx/ms.

Dolores, C. (2013). La formación profesional de los profesores de matemáticas. En C. Dolores, M.S. García, J.A. Hernández, y L. Sosa (Eds.). *Matemática Educativa: la formación de profesores* (pp. 13-25), México: Díaz de Santos.

Font, V. y Godino, J. D. (2007). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. En C. Crespo, P. Lestón, T. Ochoviet y C. Oropeza (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20*, 376-381. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Hernández, J. (2014) *La caracterización de los profesionales de la matemática educativa. Una mirada desde el reconocimiento de su campo académico.* Tesis de Doctorado no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero. Chilpancingo Guerrero, México.

Godino, J. D. (2006). *Presente y Futuro de la Investigación en Didáctica de las Matemáticas*. Recuperado el 26 de septiembre de 2014 de http://29reuniao.anped.org.br/trabalhos/trabalhos_encomendados/GT19/GT19%20Ed%20Mat%20(Trabalho%20encomendado).pdf

Godino, J., Rivas, M., Castro, W. y Konic, P. (2008). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Actas de las VI Jornadas de Educación Matemática Región de Murcia,* 17-19. España: Centro de Profesores y Recursos Murcia.

Hernández, J., Sosa, L. y López, I. (2013). Los Formadores de Profesores como punto de inflexión en la Educación. En R. Ibarra, E. Bueno, R. Ibarra y J. Hernández (Coords.), *Diferentes perspectivas y posibles soluciones para la crisis en América Latina* (pp. 3376-3390). México: Signo Imagen.

Horruitiner, P. (2006). El reto de la transformación curricular. *Revista Iberoamericana de Educación 40(3),* 1-13.

INEE (2011). *La Educación Media Superior en México. Informe 2010-2011.* México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Marcelo, C. (1994). *Formación del profesorado para el cambio educativo*. Recuperado el 28 de abril de 2014 de: http://www.researchgate.net/profile/Carlos_Marcelo/publication/256194929_Formacin_del_Profesorado_para_el_Cambio_Educativo/file/72e7e521f1a3f866d2.pdf.

Perrenoud, P. (2010). *Diez nuevas competencias para enseñar*. España: Grao.

IDENTIDAD PROFESIONAL DE ESTUDIANTES DE LICENCIATURA DEL ÁREA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Magdalena Rivera Abrajan, Gustavo Martínez Sierra
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero (México)
magrivab@hotmail.com,gmartinezsierra@gmail.com

Palabras clave: Identidad profesional, profesor de matemáticas, valores, actitudes, relaciones sociales

Key words: professional identity, mathematics professor, values, attitudes, social relationships

RESUMEN: Se identifican algunos elementos que constituyen la identidad profesional de 14 estudiantes de la licenciatura en Matemáticas educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero en México. Las identidades profesionales son aquellas que permiten a un grupo representarse socialmente y diferenciarse de otros grupos profesionales al construir un conjunto de bienes simbólicos que permite la pertenencia social al grupo de referencia. Se utilizó, para la recolecta de datos, un cuestionario de preguntas abiertas y entrevistas a grupos focales. Entre los resultados se evidenciaron elementos como la utilización del conocimiento matemático como herramienta y como objeto enseñable; valores, actitudes y puntos de vistas sobre las relaciones sociales en el campo universitario.

ABSTRACT: In this research some elements that constitute the professional identity of 14 students are identified. These students are enrolled in the eighth semester of the mathematics education degree in the Autonomous University of Guerrero in Mexico.

Professional identities are those that allow one group be represented socially and differentiate itself from other professional groups to establish a set of symbolic goods that enable social membership to the reference group. Two data collection instruments were used: An open-ended questionnaire and focus group interviews. Elements such as the use of mathematical knowledge as a working tool and as a teaching object; values and attitudes, and also points of view on social relations lived on campus.

INTRODUCCIÓN

Hace apenas un par de décadas que la identidad se convirtió en objeto de estudio en la investigación educativa al analizar algunas de sus facetas: el papel de la escuela en la construcción de la identidad individual (De la Mata & Santamaría, 2010), la construcción de la identidad de los estudiantes (Polman, 2010), identidad y matemáticas (Cobb & Hodge, 2002; Gómez-Chacón & Figueiral, 2007; Gorgorió & Planas, 2005), etc.

Los estudios con profesores en servicio muestran como la identidad del profesor se va configurando, no sólo, durante su tránsito por la universidad sino en su devenir cotidiano desde su infancia, la familia, las relaciones, los valores y hábitos lo van construyendo en el profesor que es, a la vez, se muestra cómo ciertos conflictos y circunstancias profesionales (políticas públicas, políticas educativas, la academia, etc.) se vuelven parte de su identidad profesional de docentes (Rolkouski, 2008; Chávez & Llinares, 2012). Algunos trabajos son dirigidos a la etapa de transición entre la escuela y la práctica profesional y muestran el complejo tránsito por el que pasan los profesores en los primeros años de servicio y cómo los discursos institucionales y las políticas educativas se vuelven elementos claves en la conformación de la identidad del profesor (Brown & McNamara, 2005; Van Zoest & Bohl, 2005) cambiando sus formas de trabajo al re-interpretar las condiciones sociales a la luz de sus metas profesionales y creencias.

En cuanto a la etapa de formación de los profesores, encontramos trabajos que sustentan que los actores toman referentes sociales y culturales para la conformación de su identidad profesional en el contexto educativo. En este sentido, los actores se construyen y son construidos a partir de diversos contextos, personas y situaciones escolares (Méndes, 2010; Walshaw, 2004).

La mayoría de los estudios sobre la identidad del profesor o futuro profesor de matemáticas están dirigidos a profesores de los primeros años de educación, existiendo una notable escasez en estudios relacionados con la conformación de la identidad de futuros profesores de Matemáticas de nivel medio superior o superior. La importancia de este estudio radica en que muestra elementos de la conformación de la identidad profesional en estudiantes de licenciatura del área de Matemática educativa durante su tránsito por la universidad, desde su propia visión es decir estudia la parte subjetiva del alumno en relación a su formación y a su futura profesión englobando su actuar en algunas de sus prácticas escolares, reflejando su posicionamiento ante el conocimiento y en consecuencia en sus acciones de aprender y enseñar matemáticas como una parte de su realidad estudiantil. La pregunta que guió este estudio es *¿cómo perciben los estudiantes del área de Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero la conformación de su identidad profesional durante su tránsito en la universidad?*

MARCO CONCEPTUAL

Una razón importante que nos llevó a definir la postura de esta investigación tiene que ver con el estudio del universo simbólico-cultural presente en la construcción de las identidades profesionales y de las prácticas educativas. Ser futuro profesor de Matemáticas egresado de la licenciatura en Matemáticas se relaciona con una serie de significados que se producen, transmiten y difunden históricamente en el ambiente escolar. De esta manera la representación que el estudiante de la licenciatura tiene de sí mismo está estrechamente vinculada con el conjunto de significados

construidos socialmente sobre su imagen volviéndose parte fundamental de su actuar profesional y otorgándoles una pertenencia social.

La pertenencia social

La pertenencia social implica la inclusión del individuo en un grupo hacia el cual se experimenta un sentimiento de lealtad. Esta inclusión se realiza, generalmente, mediante la asunción de algún rol dentro del grupo social considerado (Giménez 2000, p.31). Así, diremos que existe una pertenencia del grupo de estudiantes, en la medida en que el estudiante se identifique y reconozca lo que implica ser un profesionista del área educativa, compartiendo, en mayor o menor grado, los conocimientos de la profesión, habilidades, valores, lenguajes, prácticas académicas y profesionales, etc.

Identidades profesionales

Wenger (1998) menciona que la identidad incluye nuestras experiencias y conocimientos, nuestra percepción de nosotros mismos, las percepciones de los otros sobre nosotros, y nuestras percepciones de los demás. Estas percepciones se construyen a medida que interactuamos con los demás y regulan nuestra participación en el grupo. Estas experiencias nos llevan a desarrollar creencias, compromisos e intenciones, ajustada a una comunidad en particular. Por su parte Berger y Luckmann (1966) se refieren a la identidad profesional como un proceso de socialización con la profesión, a través del cual el individuo asume los roles, valores y normas del grupo profesional.

Bajo estas dos ideas nosotros consideramos la identidad del futuro profesor de Matemáticas en un sentido amplio, es decir, no es sólo acerca de lo que significa para uno saber, hacer, aprender y enseñar matemáticas, sino lo que significa verse a sí mismo como un profesor de matemáticas y cómo percibe el proceso para llegar a serlo. Lo asumimos como un proceso dinámico, donde las relaciones sociales durante su formación y con la comunidad profesional son los elementos principales en dicha configuración.

METODOLOGÍA

Recolección de datos

Esta investigación busca comprender a las personas dentro de su marco de referencia, por lo tanto, resulta esencial experimentar la realidad tal como otros la experimentan y comprender cómo ven las cosas (Álvarez y Jurgenson, 2010).

Utilizamos dos técnicas de recolección de datos con el objetivo de que los actores produjeran discursos tanto escritos como orales: un cuestionario de preguntas abiertas y entrevistas a grupos focales.

El cuestionario estuvo conformado por cinco partes referenciadas a las preguntas ¿quién soy y quién soy respecto a los demás?, ¿qué me distingue de los demás?, ¿a qué grupos profesionales pertenezco y por qué?, ¿qué me identifica con el grupo de licenciados en Matemáticas del área de Matemática educativa?, ¿qué me diferencia respecto a los otros grupos con los que convivo en la institución?.

Las respuestas de los estudiantes ante el cuestionario nos permitió la elaboración de un guión para la realización de las entrevistas a grupos focales. *Una entrevista en grupo focal es una reunión con*

modalidad de entrevista grupal abierta y semiestructurada, en donde se procura que un grupo de individuos seleccionados por los investigadores discutan y elaboren, desde su experiencia personal, una temática o hecho social que es objeto de investigación (Álvarez y Jurgenson, 2010, p 201.). Las entrevistas fueron audio y video-grabadas y tuvieron una duración entre 60 a 90 minutos, para su realización se formaron, de acuerdo a sus preferencias y fueron transcritas en su totalidad.

Análisis de datos

Para el análisis de los datos se definieron tres fases interrelacionadas con la finalidad de tener un panorama más amplio de la visión de los estudiantes sobre la configuración de su identidad profesional.

Primera fase: Se analizaron los cuestionarios localizando aquellos elementos identitarios como valores, imágenes, creencias, roles, actitudes y procesos de identificación.

Segunda fase: Se categorizaron los argumentos de los estudiantes en las entrevistas grupales. Si una categoría obtenida en la primera fase no contaba con argumentos o confirmaciones de los estudiantes entonces era eliminada y se agregaron nuevas categorías que se identificaron en su discurso oral.

Tercera fase: Se contextualizan las categorías para dar una mejor interpretación y dar coherencia a los puntos de vista de los estudiantes.

RESULTADOS

Se contó con la participación de la población total de estudiantes del octavo semestre de la licenciatura en Matemáticas del área de Matemática Educativa, que son los estudiantes para profesor de Matemáticas sus edades oscilaban entre 19 y 26 años. En la siguiente tabla presentamos los elementos identitarios identificados durante el análisis

Tabla 1. Elementos identitarios identificados en los estudiantes

Elemento identitario	Tipos encontrados
Diferenciadores	El conocimiento matemático y su utilización.
	La investigación/identificación de problemáticas y propuestas de soluciones. Buscar y proponer metodología que funcione en el aula.
	Las prácticas que ejercen: • Dar clases de Matemáticas (Planear, llevar a cabo y evaluar una clase). • Buscar diseños de aprendizajes para la construcción de conocimiento.
Procesos identificadores	Identificación con un "buen profesor" en su proceso formativo anterior.
	Procesos de Identificación con algún profesor que "contribuyeron" a su formación profesional.
Características atribuidas a un Licenciado en Matemáticas del área de Matemática Educativa	Valores: Respeto, tolerancia, cooperación, responsabilidad, disciplina, puntualidad.
	Actitudes: Actitud positiva/negativa hacia las matemáticas.
	Habilidades: Habilidad para realizar investigaciones. Creatividad/Expresarse a través de alguna actividad. Visualización/imaginar posibles soluciones. Uso del lenguaje/Facilidad para redactar y expresarse de manera escrita. Ayudar a otros con problemas o decisiones.
	"Forma de ser": Que les gusta como son.
Pertenencia social	Asunción de Roles
	Complejo simbólico Lenguajes Representaciones sociales

Presentamos algunos testimonios, los estudiantes se les identifica con las etiquetas $\mathbf{A}_n$ (con n de 1 hasta 14), en el caso de las respuestas al cuestionario y $\mathbf{EA}_n$ para la respuesta de la entrevista.

Los jóvenes declaran que la decisión de estudiar matemáticas se debe principalmente a dos factores: su gusto por las matemáticas y su identificación con algún buen profesor.

> **EA_7:** [En mi decisión de estudiar una carrera de matemáticas] influyó mucho un profesor de matemáticas en la preparatoria que me agradó como enseñaba. De ahí decidí que quería ser maestra de matemáticas por eso seleccioné Matemática educativa para aprender a enseñar y llegar a ser una buena profesora.

Diferenciadores

Los participantes se reconocen como futuros profesores por las distintas prácticas que realizan. Sin embargo, declaran que hacer investigación no es una práctica que efectúen como estudiantes a diferencia de sus profesores de licenciatura, uno de los grupos de referencia. A varios de los participantes les gustaría hacer investigación relacionada con su área de especialidad en un futuro.

> **EA6: […]** Un matemático educativo tiene que estar frente a un grupo dando clases con todo lo que significa dar una clase, preparar, ejecutarla y evaluar llevando a cabo la construcción de los distintos saberes matemáticos. Yo me considero que soy una matemática educativa.

El aprendizaje de la profesión se produce en el último año de la carrera durante las prácticas profesionales y el servicio social. En este momento los estudiantes tienen su inclusión con la comunidad de profesores de matemáticas, otra de las comunidades de referencia.

> **EA4**: Antes de las prácticas profesionales, todo era teoría y pensaba que tan sólo con explicar en el pizarrón era suficiente para que el alumno entendiera los conceptos. Ahora que estoy en el aula veo que no es suficiente.

> **EA9: […]** Las prácticas profesionales fueron todo un reto, no solo en cuestiones de las matemáticas que sabíamos, también respecto a la creatividad en la utilización de distintas estrategias didácticas. Creo que me enamoré de mi profesión. Me di cuenta que realmente es lo que me gusta hacer, aunque también noté mis debilidades como profesora de matemáticas.

Procesos de identificación

Durante su tránsito en la escuela aparecen procesos de identificación con uno o varios profesores(as) que contribuyeron de manera significativa en su formación profesional. De ellos asimilaron diversos conocimientos, habilidades, lenguajes (profesionales ó técnicos), códigos éticos y metodologías de la práctica profesional.

> **EA_3:** […] Mis profesoras de didáctica del Cálculo y práctica docente me enseñaron muchísimo. En primer lugar a utilizar la información/investigar sobre libros de texto, artículos, etc. y a realizar situaciones donde el alumno construya su conocimiento, adentrarme más a la investigación de problemas que suceden en el aula y proponer soluciones a ellas.

Los estudiantes no sólo valoran los conocimientos matemáticos que han alcanzado hasta el momento, también le dan una valoración a los consejos, las experiencias en investigación, los valores transmitidos y los conocimientos respecto a la didáctica y metodologías propias del área

> **EA_6** […] El profesor de didáctica de las matemáticas nos mencionaba valores que, nos decía, nos podrían ayudar para ser mejores en nuestro ámbito profesional. Y la profesora de práctica docente no solo nos exigía el contenido matemático sino también nos enseñó a planear, ejecutar y evaluar una clase. Aunque parezca ridículo el que nos corrigiera hasta las faltas de ortografía, nos hacía reflexionar sobre la calidad de nuestro trabajo de profesor.

Características atribuidas a un Licenciado en el área de Matemática Educativa

Los jóvenes atribuyen valores, actitudes y habilidades que consideran fundamentales para el buen ejercicio de su profesión y se convierten en las características que debe tener un buen matemático educativo. Identifican valores como respeto, tolerancia y cooperación; actitudes como ser dinámico, expresivo, paciente, y habilidades como creatividad, explicitar y búsqueda de formas o metodologías de enseñanza. Los estudiantes mencionan que han observado dichos valores, actitudes y habilidades en sus profesores de matemática educativa, y que son características que los diferencia de los demás profesores.

> **EA_1: […]** los matemáticos educativos son muy expresivos, transmiten confianza y respeto, son guias […] En la escuela se ve la diferencia entre los profesores de educativa y los demás profesores; son profesores que se preocupan por los alumnos, los escuchan y buscan formas de crear un ambiente de cooperación entre los estudiantes, los motivan y apoyan. Esas características son las que los identifica como matemáticos educativos.

La pertenencia social

La pertenencia a los grupos de referencia se observa a través de la identificación y reconocimiento del propio estudiante con lo que implica ser licenciado en el área de Matemática educativa. Los estudiantes se auto-denominan y son reconocidos en la escuela como *matemáticos educativos;* esto les confiere un rol como profesor-investigador capaz de identificar y solucionar problemáticas en el salón de clases. Así, la enseñanza de las matemáticas se vuelve un rasgo de identidad cuando la forma de enseñar está basada en la reflexión de las problemáticas presentes en el sistema educativo. Esta capacidad de buscar y proponer es otorgada al estudiar Matemática educativa. La investigación es un rasgo de diferenciación con otros tipos de profesores. El siguiente diálogo muestra lo anterior.

> **EA_{14}: […]** Las Matemáticas se deben enseñar de forma fácil, no importa el contenido; para poder hacerlo debemos simplificarlas y conocerlas. Eso es el trabajo de un matemático educativo, buscar formas y métodos para hacer más fácil el aprendizaje, debemos ser profesores-investigadores.

Bienes simbólicos

En palabras de los estudiantes, la matemática, como herramienta de trabajo, es algo que caracteriza a un licenciado en el área de matemática educativa. Por lo tanto, se vuelve una necesidad estudiarla, conocerla, aprenderla, manejarla y utilizarla tanto en su vida cotidiana como en la profesional, lo que les otorga una categoría de profesionistas capacitados para el campo laboral. Así, el conocimiento matemático se vuelve una posesión o un bien que debe tener el estudiante del área de Matemática Educativa.

> **A_4**: Las Matemáticas son la base de conocimiento que tiene un maestro de Matemáticas.

> **EA_2**: […] Yo creo que comprender las matemáticas y saber enseñarlas es lo más importante para un profesor de matemáticas.

CONCLUSIONES

La conformación de la identidad profesional es entendida como un proceso continuo de construcción de conocimiento acerca de sí mismos y su profesión, así como la comparación y diferenciación respecto a los demás. Destacan tres momentos claves en el proceso de socialización de la configuración de la identidad profesional de los estudiantes en el contexto escolar: la elección de la carrera, la elección de la especialidad y la confrontación con la práctica profesional. Se identificó a esta última como el momento más importante porque determina el acceso del estudiante al grupo de profesores de Matemáticas y la asunción del rol como profesor de matemáticas en las instituciones educativas donde realizan sus prácticas. Esta socialización no solo permite la construcción de conocimientos sobre la profesión, sino también la interiorización del complejo simbólico-cultural de los grupos de referencia.

Los estudiantes se reconocen como miembros del grupo de estudiantes de la licenciatura en Matemática en el área de Matemática educativa y la principal diferencia con los estudiantes de las otras áreas es el objeto de estudio, el proceso enseñanza-aprendizaje, señalando que la preocupación principal del área es la construcción de conocimiento matemático por los alumnos. Para ello deben utilizar distintas teorías, estrategias o metodologías, ya sean conocimientos adquiridos en la escuela o buscar nuevos y utilizarlos.

Así, podemos argumentar que la estructuración de la identidad profesional de los estudiantes de licenciatura se ha realizado al asimilar y ejercer de forma reflexiva los conocimientos, habilidades, lenguajes profesionales ó técnicos, los códigos éticos y las metodologías de la práctica profesional en el ejercicio de su profesión.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Álvarez, J. L., & Jurgenson, G. (2010*). Cómo hacer investigación cualitativa. Fundamentos y metodología.* México: Paidós.

Berger, P., & Luckmann, T. (1996). The social construction of reality: A treatise in the Sociology of Knowledge. Garden City, NY, USA: Anchor Books.

Brown, T. & McNamara, O. (2005). New teacher identity and regulative government: the discursive formations of primary mathematics teacher educatio*n.* New York: Springer.

De la Mata M y Santamaría A . (2010). La construcción del yo en escenarios educativos. Un análisis desde la psicología cultural. Revista de educación. Identidad y Educación, 353, 157-186.

Chávez Y y Llinares S. (2012). La identidad como producto del aprendizaje en la práctica de enseñar matemáticas en profesores de primaria. En A. Estepa, Contreras Á , J. Deulofeu, M. Penalva, F. J. García, & L. Ordóñez (Edits.), Investigación en Educación Matemáticas, XVI, 187-196

Cobb P & Hodge L. (2002). A relational perspective on issues of cultural diversitiy and equity as play out in the Mathematics clasrroom. Mathematical thinking and learning, 4, 294-284.

Giménez, G. (2000). Materiales para una teoría de las identidades sociales. En J. M. Valenzuela (Ed.), Decadencia y auge de las identidades, 45-78. México: CFN y Plaza Valdéz.

Gorgorió, N., & Planas, N. (2005). Cultural distance and identities-inconstructions within the multicultural mathematics classroom. *ZDM Mathematics education , 2* (37), 64-71.

Gómez-Chacón I & Figueiral L. (2007). Identité et facteurs affectifs dans l'apprentissage des matehèmatiques. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives *, 1* (12), 117-146.

Méndes, A. (2010). A Formação matemática das professoras das séries iniciais: a escrita de si como prática de formação. Bolema *, 23* (37), 905-930.

Polman, J. (2010). The zone of proximal identity development in apprenticeschip learning. Revista de educación. Identidad y Educación, 353, 129-156.

Rolkouski, E. (2008). Histórias de vida de professores de Matemática. Bolema*, 21* (30), 63-88.

Van Zoest, L., & Bohl, J. (2005). Mathematics teacher identity: A framework for understanding secondary school mathematics teachers' learning through practice. Teacher development*, 9* (3), 315-345.

Walshaw, M. (2004). Pre-service mathematics teaching in the context of schools: an exploration into the constitution of identity. Journal of mathematics teacher education, 7, 63-86.

Wenger, E. (1998). Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity. Systems Thinker.

EVALUANDO LA COMPETENCIA DE ANÁLISIS EPISTÉMICO DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Juan D. Godino, Belén Giacomone, Miguel R. Wilhelmi, Teresa F. Blanco, Ángel Contreras
Universidad de Granada (España), Universidad Nacional de La Plata (Argentina), Universidad Pública de Navarra (España), Universidad de Santiago (España), Universidad de Jaén (España).
jgodino@ugr.es, belen.giacomone@gmail.com, miguelr.wilhelmi@unavarra.es, teref.blanco@usc.es, afuente@ujaen.es

Palabras clave: formación de profesores, competencia de análisis epistémico, enfoque ontosemiótico

Key words: teachers' training, competence of epistemic analysis, onto-semiotic approach

RESUMEN: En el marco de un proyecto de innovación e investigación para el desarrollo de competencias de análisis didáctico del profesor de matemáticas, se ha diseñado una intervención formativa para un grupo de estudiantes de un máster para profesores de secundaria. El diseño contempla la lectura y discusión de un documento en el que se presentan nociones básicas del análisis de objetos y procesos implicados en la práctica matemática, distinguiendo las relaciones dialécticas entre objetos ostensivos y no ostensivos, así como el estudio y discusión de ejemplos ilustrativos de dicho análisis. En esta comunicación presentamos los resultados de la fase de evaluación y análisis retrospectivo de dicho diseño formativo, basada en la resolución de una tarea matemática, seguida del análisis de los objetos y significados puestos en juego por los estudiantes en la realización de la misma. Los resultados revelan algunos hechos didácticos significativos relativos a la faceta cognitiva del proceso didáctico implementado.

ABSTRACT: As part of a research and innovation project for the development of competences of didactic analysis of math teacher, we have designed a training session for a group of students of a master for secondary teachers. The design includes the reading and discussion of a document in which are presented basic notions of analysis of objects and processes involved in mathematical practice, distinguishing the dialectical relations between ostensive and non-ostensive objects, and the study and discussion of illustrative examples that analysis. In this paper we present the results of the evaluation and retrospective analysis phase of the design mentioned, that it's based on solving a mathematical task, followed by analysis of objects and meanings brought into play by students in completing it. The results show some significant didactical facts regarding the cognitive aspect of the didactic process implemented.

INTRODUCCIÓN

En Godino, Giacomone, Wilhelmi, Blanco y Contreras (2015a) se describen las dos primeras fases de un diseño formativo en el cual se destaca el papel de los lenguajes visuales y analíticos en la constitución de los objetos matemáticos. Asimismo, este diseño está orientado al desarrollo de la competencia de análisis epistémico y cognitivo de profesores de matemáticas.

En el trabajo citado, partimos del supuesto que el reconocimiento explícito de los objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas es una competencia que el profesor debería desarrollar. Esta competencia permite al docente comprender los procesos de aprendizaje matemático, diseñar y gestionar tales procesos y valorarlos con estándares de idoneidad previamente fijados.

El diseño formativo se orienta al logro de dos objetivos: en primer lugar, caracterizar la visualización y el razonamiento diagramático (VRD) y analizar su papel en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; en segundo lugar, identificar y describir los objetos y procesos implicados en tareas matemáticas mediante visualización y razonamiento diagramático.

Los contenidos didáctico – matemáticos implicados son: conocimientos puestos en juego en la conceptualización y uso de diagramas y recursos manipulativos, que impliquen procesos de visualización y de razonamiento diagramático. Asimismo, se propone la siguiente metodología instruccional:

1) Lectura y discusión del texto: Godino, Giacomone, Wilhelmi, Blanco, y Contreras (2015b).
2) En equipos de 3-4, resolver tareas similares a la descrita en la sección 3.2 e identificar los conocimientos matemáticos movilizados en su resolución, distinguiendo los lenguajes visual y analítico, así como los objetos no ostensivos implicados.
3) Presentación y discusión de resultados.

Este diseño ha sido aplicado a un grupo de 50 estudiantes del Máster en Educación Secundaria de la Universidad de Granada como parte de la asignatura “Innovación docente e iniciación a la investigación educativa en Matemáticas”. En este trabajo describimos algunos resultados significativos relativos a la faceta cognitiva de la trayectoria didáctica implementada, esto es, indicadores de los conocimientos y comprensiones logrados por los estudiantes como resultado de la acción formativa.

PROBLEMA, MARCO TEÓRICO Y MÉTODO

El planteamiento del problema está apoyado en el modelo de conocimiento del profesor de matemáticas descrito en Godino (2009) como “conocimiento didáctico - matemático” (CDM), el cual desarrolla otros modelos existentes, en particular el MKT (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008), mediante la aplicación de las herramientas conceptuales y metodológicas propuesta por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007; Font, Godino y Gallardo, 2013).

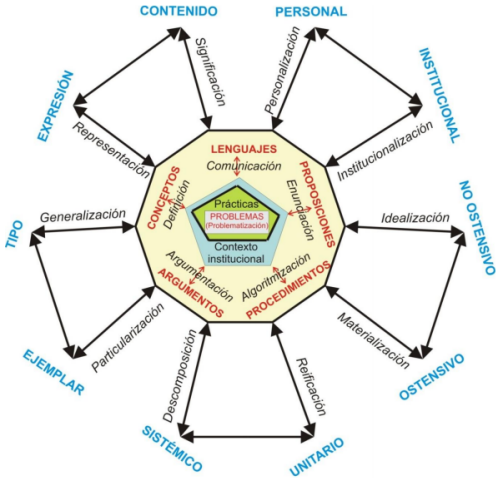
Se considera que para la enseñanza de las matemáticas, el docente debe: por un lado, tener el nivel de competencia matemática suficiente para llevar a cabo la práctica matemática en la etapa donde imparte; por otro lado, poder analizar y valorar la actividad matemática de los alumnos, identificando los objetos y significados movilizados, con el fin de enriquecer su desempeño y

mejorar su competencia profesional. Este análisis permite al docente prever conflictos de significados y establecer distintas posibilidades de institucionalización de los conocimientos matemáticos implicados (Godino et al., 2007), valorando su eficacia y su coste.

En el marco del EOS una práctica matemática es toda acción, o secuencia de acciones, realizada en el seno de una institución (o por una persona determinada) para resolver una cierta clase de situaciones problemas. Se entiende como *análisis epistémico* de una práctica matemática el reconocimiento de los objetos y procesos (significación, generalización, …) que se ponen en juego en su realización. Tal reconocimiento supone la manifestación de un conocimiento (relación entre objetos). Los tipos de objetos se clasifican en las siguientes seis categorías, los cuales a su vez pueden ser analizados a partir de cinco puntos de vista duales como se muestra en la figura 1:

- Lenguajes: términos, expresiones, notaciones, gráficos en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.).
- Problemas: situaciones o tareas que inducen la actividad matemática más o menos abiertas, aplicaciones extra-matemáticas o intra-matemáticas, ejercicios...;
- Conceptos: entidades para las que existen definiciones (número, punto, recta, función...).
- Procedimientos: secuencia de acciones del sujeto ante las tareas matemáticas. (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo).
- Proposiciones: propiedades o atributos de los objetos mencionados que se dan como enunciados (pueden ser verdaderos o falso y requieren una justificación).
- Argumentaciones: secuencia de prácticas que se usan para justificar y explicar las proposiciones (sean deductivas o de otro tipo).

Figura 1. Configuración de objetos y procesos



La acción formativa diseñada e implementada con futuros profesores de matemáticas se orienta a promover su competencia de análisis epistémico.

La metodología aplicada se inscribe dentro del enfoque metodológico del diseño didáctico (Kelly, Lesh y Baek, 2008) o ingeniería didáctica entendida en el sentido generalizado propuesto por

Godino, Batanero, Contreras, Estepa, Lacasta y Wilhelmi (2013), según la cual el diseño se desarrolla en cuatro fases: estudio preliminar, diseño, implementación y análisis retrospectivo.

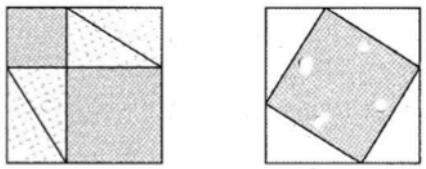
INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN

Como instrumento de evaluación del nivel de competencia logrado fue usada la tarea incluida en la figura 2. Este proceso de evaluación corresponde al cierre de la fase instruccional.

Figura 2. Tarea de evaluación

Enunciado de la tarea:

a) *¿Qué relación piensas que existe entre las áreas de las figuras sombreadas de la parte A y B? ¿Cómo se puede usar esta relación para probar el teorema de Pitágoras?* Describe el procedimiento seguido, indicando las acciones que se deben realizar y las explicaciones necesarias que justifican las respuestas.



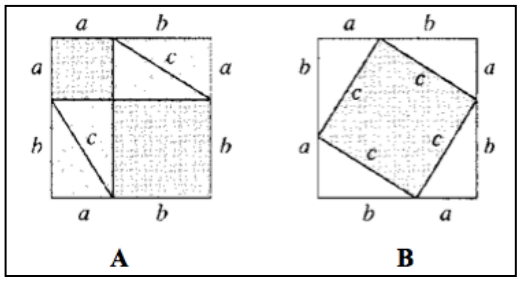
A B

b) *Identifica los conocimientos que se ponen en juego en la solución de la tarea.* (Enumera la secuencia de prácticas que se realizan para resolver la tarea, los objetos implicados y sus significados)

Las repuestas que se movilizaron para abordar la justificación visual del teorema de Pitágoras, fueron discutidas en el ambiente de clase y de acuerdo al análisis conjunto, se optó por la siguiente secuencia de prácticas operativas y discursivas para abordar la respuesta a la cuestión a):

1) Se supone que las figuras trazadas en A y B son cuadrados y triángulos rectángulos cuyos lados tienen como medidas de longitud las indeterminadas *a*, *b*, y *c* (figura 3).

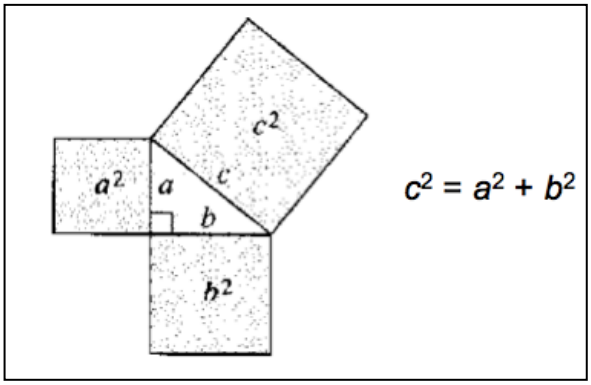
Figura 3. Hipótesis métricas necesarias



2) Los cuadriláteros formados por los segmentos exteriores de las figuras en A y B son cuadrados congruentes porque sus lados tienen igual longitud (*a* + *b*).
3) Los triángulos rectángulos trazados en A y B son congruentes porque sus lados son iguales.
4) Las figuras sombreadas tienen igual área porque se obtienen quitando a dos cuadrados de igual área cuatro triángulos iguales.

5) El área sombreada de la figura A es la suma del área de los cuadrados de lados *a* y *b*, respectivamente, $a^2 + b^2$.
6) El área sombreada en B es el área del cuadrado de lado *c*, c^2.
7) Las regiones sombreadas se interpretan como las áreas de los cuadrados cuyos lados son los catetos e hipotenusa del triángulo rectángulo, respectivamente (figura 4).

Figura 4. Determinación del Teorema de Pitágoras



8) Luego el área del cuadrado de la hipotenusa es la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos: $c^2 = a^2 + b^2$.

A partir de dicha secuencia de prácticas, enumeradas de 1) a 8), los estudiantes realizaron el análisis epistémico que se les pedía en el inciso b). Todas las respuestas dadas fueron analizadas a partir del desarrollo *a priori* de la tarea realizado en el seno de la investigación. En el apartado siguiente se muestra un análisis epistémico esperado para la parte b).

ANÁLISIS *A PRIORI* DE LA TAREA

Como síntesis de la respuesta esperada a la parte b), en la primera columna de la tabla 1, incluimos, de manera abreviada, las prácticas textualizadas 1) a 8) mencionadas junto con el correspondiente enunciado de la tarea. En la segunda columna mostramos los objetos matemáticos no ostensivos, los cuales constituyen el contenido (o significado) de las palabras o expresiones que conforman las prácticas.

Tabla 1. Conocimientos implicados en las prácticas

Prácticas operativas y discursivas textualizadas	Objetos no ostensivos: conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos
¿Qué relación piensas que existe entre las áreas de las figuras sombreadas de la parte A y B? …	*Conceptos*: área; suma y comparación de áreas; figura geométrica.
1) Aceptación de que las figuras trazadas en A y B son, respectivamente, cuadrados y triángulos rectángulos de lados indeterminados a, b, y c (figura 3).	*Conceptos*: figuras geométricas; cuadrado; triángulo rectángulo; lado; longitud; cantidad indeterminada.
2) Los cuadriláteros formados por los segmentos exteriores de las figuras en A y B son cuadrados congruentes porque sus lados tienen igual longitud (a + b).	*Conceptos:* cuadriláteros; figura geométrica; segmento exterior de una figura; congruencia de cuadrados; lados; comparación de longitud. *Proposiciones*: Los cuadrados exteriores (triángulos) son congruentes. *Argumentos*: Los cuadrados exteriores tienen el mismo lado (*a*+*b*); los triángulos son rectángulos y tienen los mismos lados.
3) Los triángulos rectángulos trazados en A y B son congruentes porque sus lados son iguales.	*Conceptos*: triángulos rectángulos, congruencia, lados, comparación de lados. *Proposiciones*: Los triángulos son congruentes. *Argumentos*: los triángulos son rectángulos y tienen los mismos lados.
4) Las figuras sombreadas tienen igual área porque se obtienen quitando a dos cuadrados de igual área cuatro triángulos iguales.	*Conceptos*: áreas, comparación de áreas, adición de áreas. *Proposición*: dos áreas son iguales si representan la misma extensión de superficie, aunque las superficies tengan distinta forma.
5) El área sombreada de la figura A es la suma del área de los cuadrados de lados *a* y *b*, respectivamente, $a^2 + b^2$.	*Conceptos*: áreas, adición de áreas, cuadrados, lados. *Proposición y su justificación:* basada en la aditividad del área y en el procedimiento de cálculo del área del cuadrado a partir de la longitud del lado.
6) El área sombreada en B es el área del cuadrado de lado c, c^2.	*Conceptos*: cuadrado y su área. *Procedimiento*: cálculo del área del cuadrado a partir de su lado
7) Las regiones sombreadas se interpretan como las áreas de los cuadrados cuyos lados son los catetos e hipotenusa del triángulo rectángulo, respectivamente (figura 4).	*Conceptos*: cateto, hipotenusa y área de un triángulo rectángulo. *Proposición*: es posible establecer una relación entre las áreas de los cuadrados de lados el triángulo rectángulo ($c^2 = a^2 + b^2$) *Argumento*: gráfico a partir de los diagramas A y B.
8) Luego el área del cuadrado de la hipotenusa es la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos: $c^2 = a^2 + b^2$	*Concepto*: triángulo rectángulo. *Proposición*: Teorema de Pitágoras. *Argumento*: relación entre medidas de áreas de figuras geométricas y valores numéricos de longitud.

El análisis incluido en la tabla 1 corresponde a un análisis epistémico esperado de la tarea y constituye, por tanto, una análisis de referencia para interpretar las respuestas obtenidas. A

continuación, se destacan ejemplos prototípicos que caracterizan los tipos de respuestas encontradas en el análisis realizado por los alumnos.

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

En este apartado presentamos ejemplos de respuestas indicativas del grado de competencia de análisis epistémico que se logró como consecuencia del proceso formativo implementado. Dado que las cuestiones planteadas son abiertas, consideramos más pertinente describir de manera cualitativa e interpretativa algunos casos prototípicos.

Noción de concepto

La mayoría de los estudiantes alcanza un nivel concordante con los conceptos contemplados en el análisis a priori. Sin embargo, encontramos casos concretos que manifiestan una confusión con el significado del término; un ejemplo es el siguiente:

Caso 1. Frente a la práctica textualizada: “Explica la relación que existe entre”, una respuesta indica que “relación entre varias cosas” es un concepto.

Noción de proposición

Las respuestas revelan casos concretos en los que se muestran confusiones con la noción de proposición. Se la considera como un supuesto del que se parte, en vez de interpretarla como un enunciado sobre conceptos, que toma valores de verdad o falsedad.

Caso 2. Proposición: “partimos de que las figuras son cuadrados y triángulos”.

Caso 3. Proposición: “se parte de que ya tienes las figuras”

Noción de procedimiento

Observamos que los estudiantes son capaces de reconocer el procedimiento contemplado en el análisis a priori.

Noción de argumento

Como mostraremos en los ejemplos siguientes, la noción de argumento resulta conflictiva.

Caso 4. Frente a la primera práctica textualizada: “Aceptamos el supuesto que las figuras trazadas en A y B son cuadrados y triángulos (...)”, se indica como argumento: “en las figuras A y B hay cuadrados y triángulos rectángulos”.

Caso 5. Frente a la práctica textualizada: “En primer lugar identificamos mediante las primeras letras del alfabeto a los lados en cuestión a, b, c”, una respuesta indica que: “Para afrontar el problema es necesario identificar todos los elementos que intervienen para la resolución, para ello utilizamos las primeras letras del alfabeto” es una justificación.

La confrontación de este análisis con el análisis a priori descrito en Godino et al. (2015a), permite identificar conflictos y guiar futuros procesos de instrucción. Asimismo, le permite a los futuros profesores tomar conciencia del entramado de objetos no ostensivo que intervienen y emergen necesariamente de las prácticas matemáticas como constructo social al que pertenecen.

El análisis retrospectivo realizado revela la necesidad de ampliar el tiempo dedicado al proceso instructivo, incluyendo nuevas tareas de reflexión, seguidas de fases de negociación de

significados, como también desarrollar nuevos instrumentos de evaluación del grado de logro de la competencia pretendida.

REFLEXIONES FINALES

Los resultados revelan la complejidad de las tareas propuestas; el diseño instruccional propuesto, basado en el análisis de prácticas, objetos y procesos, supone un reto para los profesores en formación, resultando conflictiva la identificación y discriminación de los tipos de objetos y significados, ya que usualmente supone un cierto nivel de actividad metacognitiva a la que no están habituados.

Será necesario discutir con los estudiantes con más profundidad las distinciones entre los distintos tipos de objetos matemáticos, mostrando ejemplos claros del papel diferente que desempeñan en la práctica matemática los objetos conceptuales, procedimientos, proposiciones y argumentos, así como sus relaciones con los diversos tipos de objetos ostensivos (artefactos lingüísticos y materiales).

El reconocimiento y gestión de los conocimientos en la realización de las tareas "requiere que el futuro profesor, tras la realización de las actividades, analice los objetos intervinientes y emergentes en la resolución de la tarea, y analice los significados que se les atribuye en el contexto específico" (Godino, 2013, p. 8). De esta manera, el diseño formativo propuesto se puede entender como una estrategia para que los profesores de matemáticas discriminen la diversidad de objetos que intervienen en la actividad matemática y reflexionen sobre las relaciones dialécticas entre los mismos.

Reconocimiento. Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-31869 y EDU2013- 41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82,* 97-124.

Godino J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31.

Godino, J. D. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 1-15). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E. y Wilhelmi, M. (2013). Didactic engineering as design-based research in mathematics education. En B. Ubuz, Ç. Haser y M.

A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 2810-2819). Ankara, Turkey: Middle East Technical University.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM): The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1), 127-135.

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F. y Contreras, A. (2015a). Diseño formativo para desarrollar la competencia de análisis epistémico y cognitivo de profesores de matemáticas. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, (en revisión).

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F. y Contreras, A. (2015b). Configuraciones de prácticas, objetos y procesos imbricadas en la visualización espacial y el razonamiento diagramático. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, (en revisión).

Hill H. C., Ball D.L. y Schilling, S.G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*, 372-400.

Kelly, A. E., Lesh, R. A. y Baek, J. Y. (Eds.) (2008). *Handbook of design research in methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching.* New York: Routledge.

FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE DAS CONCEPÇÕES ACERCA DO ENSINO DA ÁLGEBRA

Maria Elisabette Brisola Brito Prado, Antonio Marcos Emiliano
Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil)
bette.prado@gmail.com, antonioemiliano@prof.educacao.sp.gov.br

Palavras chave: Concepções de Educação Algébrica – Formação Continuada – Formação de Professores – Professores de Educação Básica

Key words: Algebraic Concepts of Education – Continuing Education – Teacher Training – Basic Education Teachers

RESUMO: Neste trabalho procuramos compreender quais concepções de educação algébrica norteiam a prática dos professores de Matemática no 7º ano do Ensino Fundamental. Para tanto, consideramos a participação de 22 professores num programa de formação continuada oferecido na modalidade a distância pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Do Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) foram extraídos 80 narrativas num fórum de discussão, que teve como tema diferentes estratégias para iniciar o conteúdo de álgebra. Com essa proposta pretendemos identificar como os professores de Matemática enxergam a atividade algébrica, a fim de verificar o que se pretende promover por meio do ensino da álgebra.

ABSTRACT: This study sought to understand algebraic concepts of education guide the practice of mathematics teachers in the 7th year of elementary school. To this end, we consider the participation of 22 teachers in a continuing education program offered in the distance by the Secretariat of São Paulo State Education. The virtual learning environment were extracted 80 narratives in a discussion forum, whose theme was different strategies to start the algebra content. With this proposal, we intend to identify how mathematics teachers they see the algebraic activity in order to verify what you want to promote through the teaching of algebra.

INTRODUÇÃO

Se tivéssemos que apontar as principais questões que interferem no desenvolvimento da educação básica brasileira e destacar as mais importantes prioridades para se ter uma educação pública de qualidade, "[...] provavelmente, quase todas as respostas teriam um denominador comum: o professor e sua formação!!!" (Almeida & Costa, 2011, p. 7). A formação continuada do professor, na perspectiva de promover o seu desenvolvimento profissional, centra-se na possibilidade de oferecer situações em se que possa refletir sobre a prática para compreendê-la e reconstruí-la, segundo os princípios da prática reflexiva de Zeichner (1993). Nesse sentido, a formação deve considerar os conhecimentos constituintes da prática do professor, que segundo Shulman (1986) envolve a integração do conhecimento do conteúdo específico, do conhecimento pedagógico do conteúdo e do conhecimento do currículo.

Agora, se considerarmos a formação continuada do professor de Matemática, especificamente envolvendo o currículo de álgebra, provavelmente, as principais prioridades, quando se busca desenvolver competências e habilidades nessa área de conhecimento, giram em torno das concepções de educação algébrica e de como construir ideias algébricas com significado.

Na perspectiva de Usiskin (1995) são quatro as concepções de educação algébrica, relativas à importância do uso de letras na Matemática, que norteiam o estudo da álgebra na escola básica. Para Lins e Gimenez (1997) a base de conhecimentos que fundamenta essas diferentes concepções tem sua raiz no que se acredita ser a atividade algébrica. Além disso, essas propostas de ensino e aprendizagem da álgebra "resultam sempre de visões do que seja aquilo que queremos promover por meio do ensino" (Lins & Gimenez, 1997, p. 105). Dessa forma, a primeira concepção de educação algébrica destacada por Usiskin (1995) se refere à atividade algébrica como uma expressão da generalidade ou generalizadora de modelos, como diz o autor. Atualmente, a maior referência dessa concepção se baseia na procura e identificação de padrões e regularidades numéricas (Concepção "Generalista").

A segunda concepção de educação algébrica enxerga a atividade algébrica como o estudo da simbologia e sua manipulação. Apresenta uma metodologia baseada na aprendizagem de técnicas/algoritmos tomadas como modelo para a resolução de equações. Segundo Lins e Gimenez (1997), a versão mais sofisticada dessa concepção está associada ao uso de balanças de dois pratos, que busca explorar o conceito de equivalência, e ao uso de áreas no trabalho com produtos notáveis, buscando, assim, desenvolver aspectos do fazer algébrico (Concepção "Letrista").

Já a terceira concepção de educação algébrica apresenta uma visão da atividade algébrica que busca explorar as relações entre grandezas. As relações matemáticas são representadas por letras que, por sua vez, se referem à variáveis. Apenas no contexto dessa concepção surgem as noções de variáveis independente e dependente (Usiskin, 1995), podendo ser explorado o conceito de Interdependência (Concepção "Funcionalista").

Por fim, a quarta concepção de educação algébrica faz referência a uma visão da atividade algébrica como sendo o estudo das propriedades estruturais da álgebra, ou seja, se baseia nas propriedades operatórias realizadas com números reais e expressões polinomiais (Usiskin, 1995). Em sua metodologia o foco incide sobre a manipulação de variáveis de forma puramente abstrata, sem nenhuma referência à quantidades (Concepção "Estruturalista").

No que se refere a construir ideias algébricas com significado, nos apoiamos em Lins e Gimenez (1997), que definem o termo "significado" como um conjunto de coisas que se diz, efetivamente, a respeito de um objeto no interior de uma atividade. Nesse sentido, construir ideias algébricas com significado representaria formular um conjunto de afirmações que expressariam, no interior de uma atividade, as principais ideias da álgebra.

Seguindo esta perspectiva realizamos uma pesquisa envolvendo análise sobre as concepções de educação algébrica que norteiam a prática de professores de Matemática, especificamente no que se refere à introdução do pensamento algébrico no 7º ano do Ensino Fundamental. Portanto, o objetivo deste estudo é identificar quais concepções de educação algébrica norteiam a prática pedagógica de um grupo de professores de Matemática ao proporcionarem aos estudantes as primeiras experiências com a álgebra, a fim de verificar o que se pretende promover por meio do seu ensino.

DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

Esta pesquisa se desenvolveu no contexto do Curso Currículo e Prática Docente – Matemática, oferecido pela Secretaria da Educação do Estado São Paulo (SEESP), no ano de 2012. Neste ano, 2012, os professores participantes do curso já tinham experienciado em seu cotidiano escolar a implementação do novo Currículo Oficial do Estado de São Paulo. A Escola de Formação e Aperfeiçoamento de Professores "Paulo Renato Costa Souza", uma das coordenadorias da Secretaria da Educação, foi a responsável pela execução dessa ação de formação, desenvolvida na modalidade a distância, por meio de Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA).

O curso teve carga horária equivalente a 240 horas e foi composto por 13 módulos que abordaram o Currículo Oficial do Estado de São Paulo, implementado no ano de 2008. Especificamente, no referido Currículo, o estudo da álgebra é apresentado e discutido, com bastante intensidade, no 7º ano do Ensino Fundamental, com a intenção de "valorizar a construção do significado para o uso de letras e para a resolução de equações" (SEESP, 2009, p. 10). Para tanto, os materiais didáticos apresentam Situações de Aprendizagem, de forma organizada e intencional, que abordam diferentes concepções de educação algébrica, passando pelo estudo dos padrões e regularidades numéricas (Concepção "Generalista"), pelo uso de letras para representar quantidades desconhecidas (Concepção "Letrista"), até chegar às relações entre grandezas (Concepção "Funcionalista"). Apesar de o Currículo Oficial do Estado de São Paulo sugerir a abordagem de três concepções distintas de educação algébrica, essa iniciação tem como ponto de partida a concepção "Generalista", ou seja, a iniciação à álgebra no 7º ano do Ensino Fundamental ocorre por meio do estudo de padrões e regularidades numéricas.

Dos 13 módulos do curso, o estudo considerou o sexto, intitulado "Álgebra I: do uso de letras às equações", pois tratou das diferentes concepções de educação algébrica que fundamentam o estudo da álgebra no 7º ano do Ensino Fundamental. Os dados foram coletados do fórum de discussão disponíveis no AVA, que teve como tema central diferentes abordagens para iniciar o conteúdo de álgebra. Para este artigo delimitamos a análise a uma turma do curso e dessa forma realizamos uma análise documental, por meio de uma pesquisa qualitativa e interpretativa, de 80 narrativas postados no fórum de discussão. Os 22 professores participantes do fórum de discussão

expressaram diferentes estratégias em relação à iniciação ao estudo da álgebra, argumentando com os pares que apresentaram opiniões divergentes, buscando socializar suas práticas.

O plano de análise das narrativas foi elaborado segundo os pressupostos metodológicos propostos por Bardin (1977). Tendo o tema como unidade de significação, recorremos à indicadores não frequenciais constituídos por índices que representam a presença (ou ausência) de concepções de educação algébrica nas narrativas dos professores.

ANÁLISE DOS DADOS

Como informado na seção anterior, o estudo foi delimitado à análise de uma turma que contou com a participação de 22 professores no fórum de discussão, gerando 80 narrativas. O sistema de categorias foi definido *a priori*, tendo como base as quatro concepções de educação algébrica apresentadas por Usiskin (1995). Após a leitura das narrativas, guiada pelos indicadores não frequenciais, as mensagens de 15 professores atenderam ao critério de análise, cabendo destacar mais uma vez que se refere à presença (ou ausência) de concepções de educação algébrica.

A partir da leitura e análise das narrativas foram identificados os aspectos relacionados às respectivas categorias. O quadro 1 apresenta a definição da categoria "Generalista", o número de professores e alguns extratos das narrativas que se enquadram nesta categoria.

Quadro 1. Categoria Generalista

Definição: Concepção de educação algébrica que caracteriza a atividade algébrica como uma expressão da generalidade. Se baseia na procura e identificação de padrões e regularidades numéricas.
Número de professores que relataram iniciar as primeiras experiências dos estudantes com a álgebra por meio dessa abordagem: 3.
Exemplo de Narrativa: ● *"Iniciar a álgebra através de observação de regularidades tem dado resultado positivo com as minhas turmas. As regularidades de sequências numéricas ajudam muito no entendimento da generalização. Quando a relação é entre o número da sequência e sua posição, apresento em forma de tabela, o que ajuda muito no entendimento do aluno." (Prof_08).* ● *"Ao ensinarmos álgebra, o professor deve iniciar com problemas que envolvam as quatro operações, e a partir daí trabalhar com as generalizações daqueles problemas. Acredito, que a álgebra iniciada de maneira convencional com todas as suas regras, não mostra ao aluno onde realmente ele poderá aplicar." (Prof_03).*

Fonte: Curso Currículo e Prática Docente – Matemática – 2012. Módulo 6, Tema 1 – Álgebra I: do uso de letras às equações. Fórum de Discussão. São Paulo, 2012 [adaptado].

As narrativas agrupadas nesta categoria indicam uma "preocupação com a linguagem algébrica como meio de expressão, e não apenas como objeto a que se aplicam técnicas diversas (Lins & Gimenez, 1997, p. 111). Nessa visão de educação algébrica busca-se o envolvimento dos estudantes no reconhecimento de padrões e no estabelecimento de relações, além da análise dessas relações. Pesquisadores como Borralho *et al.* (2007) afirmam que as atividades que exploram o trabalho com padrões e relações numéricas antes de tratar formalmente os conceitos

da álgebra apresentam uma preocupação com a passagem da aritmética para a álgebra. Essas atividades se referem ao estudo da pré-álgebra.

Apesar dessa preocupação, que busca caracterizar a atividade algébrica como meio de expressão e não somente como objeto que se restringe ao cálculo com letras, do ponto de vista de Usiskin (1995), esta abordagem restringe-se, exclusivamente, a generalização de relações conhecidas entre quantidades, passando a sensação de não haver incógnitas. “Sob essa concepção, o problema terminou, pois já encontramos o modelo geral” (Usiskin, 1995, p. 14). Dessa forma, os significados produzidos no interior de uma atividade que tem como referência apenas essa abordagem, não são válidos em outros contextos. Por exemplo: numa atividade que tem como base a abordagem “Funcionalista”, no qual “só no contexto dessa concepção existem as noções de variável independente e variável dependente” (Usiskin, 1995, p. 16), não basta encontrar somente o modelo geral, é preciso resolver a equação, seja por qual for o procedimento a ser adotado.

A segunda categoria definida a partir do plano de análise, apresenta uma visão da atividade algébrica mais restrita. As narrativas dos professores indicam uma visão única da atividade algébrica, que se refere a concepção “Letrista”. O quadro 2 apresenta a definição da categoria “Letrista”, o número de professores e alguns extratos das narrativas que se enquadram nesta categoria.

Quadro 2. Categoria Letrista

Definição: Concepção de educação algébrica que caracteriza a atividade algébrica como o estudo da simbologia e sua manipulação. Metodologia baseada na aprendizagem de técnicas/algoritmos que servem de modelo para a resolução de equações.
Número de professores que relataram iniciar as primeiras experiências dos estudantes com a álgebra por meio dessa abordagem: 8.
Exemplo de Narrativa: ● *“Eu inicio falando que chamo de x um valor que eu desejo determinar, desconhecido nesse momento. Que isso nos ajuda na resolução de situações problema. Falo sobre os passos para resolução: leitura, interpretação e transformação da situação em uma expressão algébrica e, a partir daí, a resolução.” (Prof_15).* ● *“Ao ensinar álgebra, primeiro introduzo o conceito de variável representativa de números. As expressões usando estas variáveis são manipuladas usando regras de operações aplicáveis a números, como adição. Estes conceitos podem ser usados, por exemplo, na resolução de equações. [...] Também começo com a introdução [...] de expressões algébricas equivalentes, casos notáveis da multiplicação de binômios, noções de equações [...], problemas envolvendo equações do primeiro grau, etc.” (Prof_01).* ● *“Quando inicio álgebra procuro fazer com que eles resolvam problemas de igualdades sem recorrer ao x, brincamos com quadrados, círculos, estrelas e etc. A medida que aumento a complexidade dos problemas, eles começam a ter dificuldades para encontrar esses valores, então sugiro que montem tabelas e que façam por tentativa e erro e, após construirmos e verificarmos as respostas, introduzo alguns conceitos básicos da álgebra [...]. Eles percebem que alguns são mais fáceis de resolver sem o x, mas que nos mais complexos o uso da incógnita e das técnicas algébricas facilitam a resolução. Dessa forma, é claro que eles continuam com dificuldades nos processos, mas facilita a medida que eles entendem a necessidade do uso das letras.” (Prof_13).*

Fonte: Curso Currículo e Prática Docente – Matemática – 2012. Módulo 6, Tema 1 – Álgebra I: do uso de letras às equações. Fórum de Discussão. São Paulo, 2012 [adaptado].

As narrativas agrupadas nesta categoria, que buscam proporcionar as primeiras experiências dos estudantes com a álgebra por meio da manipulação simbólica, com ênfase na aprendizagem de técnicas/algoritmos (calcular com letras), reforçam os resultados encontrados por Lins e Gimenez (1997), a cerca de duas décadas. Os autores afirmam que esse tipo de prática não desencadeia nenhum processo de investigação e reflexão e, além de empobrecer a aprendizagem dos estudantes, é inadequada enquanto metodologia que se propõe a iniciar o estudo da álgebra.

Para os autores supracitados, uma possível resposta que busca justificar a escolha por esse tipo de prática como primeira opção na iniciação em álgebra, se deve ao fato de o livro didático ser revestido de uma certa voz de autoridade, e "de que muitos professores não estando 'preparados', simplesmente seguem o que os livros oferecem, e que talvez não conheçam alternativas" (Lins & Gimenez, 1997, p. 106). Entretanto, "seria ingenuidade pensar que a enorme aceitação dessas práticas 'letristas' ocorre apenas por resignação dos professores: é preciso entender que elas correspondem bem a uma certa visão da atividade algébrica, caso contrário, não sobreviveriam (Lins & Gimenez, 1997, p. 106). Nessa perspectiva, a noção de que a atividade algébrica se resume, por exemplo, apenas a resolução de equações, reforce a ideia, para a maioria dos professores, de que pensar algebricamente é pensar em cálculo literal.

A última categoria constituída a partir do plano de análise, apresenta uma visão da atividade algébrica mais ampla e condizente com o Currículo do Estado de São Paulo. O fato se deve aos professores declararem ser importante proporcionar as primeiras experiências dos estudantes com a álgebra tendo como referência mais de uma concepção de educação algébrica. O quadro 3 apresenta a definição da categoria "Generalista/Letrista", o número de professores e alguns extratos das narrativas que se enquadram nesta categoria.

Quadro 3. Categoria Generalista/Letrista

Definição: Concepção de educação algébrica que se preocupa com a linguagem algébrica enquanto meio de expressão e como objeto ao qual se aplicam diferentes técnicas para a resolução de equações. Baseia-se, inicialmente, no estudo de padrões e regularidades numéricas para, posteriormente, abordar um modelo para a resolução de equações em situações problema.
Número de professores que relataram iniciar as primeiras experiências dos estudantes com a álgebra por meio dessa abordagem: 4.
Exemplo de Narrativa: ● *"Acredito que é interessante utilizar letras e repetir o processo quando o conceito de equivalência e generalização já estão bem desenvolvidos no aluno, [...] ou então eles vão ficar resolvendo listas de equações que nada representam e quando aparece um problema, o aluno não consegue transferir o conceito para resolvê-lo, logo, tem o processual e não tem o conceitual." (Prof_02).* ● *"Concordo com você colega, [...] no que se refere a utilizar letras e repetir o processo quando o conceito de equivalência e generalização já estão bem desenvolvidos no aluno, [...] pois se os alunos não tiverem um bom conceito a partir do sétimo ano, eles farão apenas o processual e com isso a suas dificuldades serão constantes nas séries subsequentes, tenho observado isso claramente no ensino médio." (Prof_06).*

Fonte: Curso Currículo e Prática Docente – Matemática – 2012. Módulo 6, Tema 1 – Álgebra I: do uso de letras às equações. Fórum de Discussão. São Paulo, 2012 [adaptado].

As narrativas incluídas nessa categoria apresentam indícios de que os professores atuam em consonância com o Currículo Oficial do Estado de São Paulo. No referido Currículo, a busca por dar significado ao uso de letras (incógnitas) na Matemática considera diferentes concepções de educação algébrica. A primeira delas ("Generalista") busca envolver os estudantes em atividades cujas descobertas de padrões e regularidades resultem num censo de representação algébrica desses padrões, seja utilizando a linguagem escrita ou expressões matemáticas que envolvem o uso de letras. Nesse contexto, busca-se apenas a construção do significado para o uso de letras com vistas à construção de ideias algébrica com significado. Essa busca é legítima, pois como destaca Usiskin (1995), as generalizações se referem à quantidades conhecidas pelos estudantes, ou seja, as representações algébricas que envolvem o uso de letras são carregadas de referências significativas.

Após o desenvolvimento de um senso de representação algébrica, justificando o uso de letras na Matemática, a segunda concepção de educação algébrica ("Letrista") sugerida no Currículo Oficial do Estado de São Paulo, e mencionada pelos professores nas narrativas incluídas nesta categoria, busca legitimar as transformações diretas de expressões, gerando outras expressões equivalentes, por meio do conceito de equivalência. O objetivo é dar sentido às técnicas empregadas na resolução de equações. No referido Currículo, o conceito de equivalência entre expressões algébricas é explorado tendo como referência à imagem do equilíbrio de uma balança. Apesar de Lins e Gimenez (1997) criticarem muito essa técnica, por apresentar justificativas apenas para alguns núcleos de atividades e para outros não, no Currículo Oficial do Estado de São Paulo a adoção dessa metodologia não é feita às cegas. Discute-se os seus limites e suas possibilidades com foco na compreensão dos processos de resolução de equações.

No que se refere ao trabalho que trata das relações entre grandezas, com o objetivo de desenvolver o pensamento funcional, última concepção de educação algébrica ("Funcionalista") a ser explorada no Currículo do Estado de São Paulo, constatamos que essa concepção não emergiu em nenhum momento na discussão realizada entre os professores. Por outro lado, como se trata do primeiro contato dos estudantes com a álgebra não pretende-se esgotar todo o assunto no 7º ano do Ensino Fundamental, como destaca as diretrizes curricular: "É preciso ter em vista que esse processo terá continuidade ao longo das séries seguintes e que, neste primeiro momento, procuramos valorizar a construção do significado para o uso de letras e para a resolução de equações." (SEESP, 2009, p. 10). Essa consideração é importante, pois revela que o campo da álgebra é vasto. Da mesma forma que não é possível esgota-lo em um único ano de estudo, tendo como referência diferentes abordagens, não seria possível construir ideias algébricas com significado na perspectiva de uma única concepção de ensino.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como informado, este estudo teve como objetivo identificar quais concepções de educação algébrica norteiam a prática pedagógica de um grupo de professores de Matemática ao proporcionarem aos estudantes as primeiras experiências com a álgebra, a fim de verificar o que se pretende promover por meio do seu ensino. A análise das narrativas dos professores

registradas em Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA), conforme exposto na seção anterior, apontou que as diferentes visões dos professores em relação à atividade algébrica podem ser agrupadas em três principais categorias: (1) “Generalista”; (2) “Letrista”; e (3) “Generalista/Letrista”.

Os resultados indicam que 8 (de 15) professores privilegiaram, apenas, o estudo das equações (a álgebra das equações), deixando de lado outros aspectos importantes do fazer algébrico. Apesar de terem vivenciado em seu cotidiano a implementação de um novo Currículo, com novas diretrizes curricular em relação à educação algébrica, para a maioria desses professores pensar algebricamente é pensar em cálculo literal. Em contrapartida, os resultados mostram que 3 (de 15) professores avançaram no sentido de privilegiar a significação do uso de letras na Matemática, antes de apresentar as técnicas de resolução de equações. Mesmo não cabendo classificar a álgebra, unicamente, com essa visão da atividade algébrica, “pois ela é muito mais que isso” (Usiskin, 1995, p. 21), há uma preocupação por parte desses professores no que se refere à construção de ideias algébrica com significado. E finalmente, os resultados demonstram, também, que 4 (de 15) professores apresentaram uma visão da atividade algébrica que vai ao encontro das diretrizes curriculares para o ensino da álgebra no Estado de São Paulo. Dessa forma, há evidências de que esses professores têm um conhecimento mais aprofundado do currículo, do conteúdo e de seu ensino (Shulman, 1986).

O presente estudo mostra a importância que a formação continuada tem ao proporcionar aos professores a possibilidade de se expressarem, por meio das narrativas desencadeadas no fórum de discussão entre seus pares e o formador, para que possam socializar, refletir e repensar suas práticas em relação ao ensino da álgebra. Na perspectiva de Zeichner (1993), a construção desses conhecimentos deve ocorrer a partir da problematização da prática, o que implica, por parte dos professores, uma inter-racionalidade e uma reflexão sobre o seu trabalho. Nesse contexto, a reflexão e a tomada de consciência sobre as concepções que norteiam o ensino da álgebra poderão auxiliar aos professores da educação básica a resignificar as Situações de Aprendizagem constantes nos materiais didáticos de modo a propiciar a construção do conceito algébrico pelos estudantes, resultando em construção de ideias algébricas com significado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Almeida, F. J. e COSTA, V. L. C. (Orgs.). (2011). Quantidade é qualidade: relatos e reflexões. São Paulo: Fundação Padre Anchieta.

Bardin, L. (1977). Análise de Conteúdo. Lisboa: Edições 70.

Borralho, A., Cabrita, I., Palhares, P. e Vale, I. (2007). Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Em I. Vale, T., Pimentel, A., Barbosa, L.; Fonseca, L., Santos, L. e Canavarro, P. (Orgs), Números e Álgebra (pp. 193-211). Lisboa: SEM-SPCE. Recuperado em 01 de maio de 2015 de http://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/1416/1/Padr%C3%B5es%20Caminha.pdf.

Lins, R. e GIMENEZ, J. (1997). Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI. São Paulo: Papirus.

Secretaria da Educação do Estado de São Paulo [SEESP]. (2009). Caderno do Professor: Matemática (Ensino Fundamental, 6ª série, volume 4). São Paulo: SEE.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. Education Researcher, 15(2), 4-14. Recuperado em 05 de março de 2015 de http://www.jstor.org/stable/1175860.

Usiskin. Z. (1995). Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. Em I. Coxford, A. F., Shulte, A. P. (Orgs). As idéias da álgebra (pp. 9-22). São Paulo: Atual.

Zeichner, K. (1993). Formação reflexiva de professores: idéias e práticas. Lisboa: Educa.

INCLUSIÓN DE LOS ESTUDIANTES CON DISCAPACIDAD VISUAL A LAS LECCIONES DE MATEMÁTICA EN EDUCACIÓN SUPERIOR

Helen Bolaños González, Michael Céspedes López, Cynthia González Jiménez.
Universidad Nacional de Costa Rica (Costa Rica)
hellen.bolanos.gonzalez@una.cr, michael.cespedes.lopez@una.cr, cinthia.gonzalez.jimenez@una.cr

Palabras clave: Enseñanza de la Matemática, Educación Superior, discapacidad visual.

Key words: Mathematics Education, Higher Education, visual impairment.

RESUMEN: En este documento se describen los principales resultados obtenidos tras finalizar la etapa de diagnóstico, el marco teórico y una propuesta para el posible marco metodológico, correspondientes al Trabajo Final de Graduación (TFG) que realizan tres docentes de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica, como estudiantes de la Maestría en Educación con énfasis en Docencia Universitaria, en la misma universidad. El TFG pretende identificar y caracterizar las principales estrategias metodológicas que utilizan los docentes de Matemática en la Educación Superior para atender las necesidades educativas de los estudiantes con discapacidad visual en sus salones de clases.

ABSTRACT: In this document describes the main results obtained after completing the diagnostic phase, the theoretical framework and a proposal for a possible methodological framework corresponding to the Final Graduation Project (TFG) that is conducted by three professors from the Escuela de Matemática at the Universidad Nacional of Costa Rica. They are also students from the Master program of Education with emphasis in Higher Education at UNA. This Final Project aims to identify and characterize the main methodological strategies developed by the professors of mathematics in higher education to meet the educational students' needs with visual impairment in their classrooms.

INTRODUCCIÓN

Hoy en día las personas con discapacidad siguen enfrentando prejuicios sociales, discriminación, entornos inaccesibles, falta de servicios de apoyo o recursos económicos. Sin embargo, en la sociedad se busca la igualdad de oportunidades para obtener un acceso igualitario al empleo, asistencia médica, transporte, vivienda, educación, cultura y otros derechos fundamentales o derechos humanos universales de todas las personas.

En Costa Rica a lo largo del periodo de tiempo comprendido desde el año 1973 hasta 1999 surgen varias leyes las cuales marcan las pautas respecto a la educación de las personas con discapacidad, dichas leyes brindan a su vez la fundamentación jurídica que permite la creación, en años posteriores, de la Política Nacional en Discapacidad (PONADIS), lo cual inicia con la incorporación de las entidades públicas y la implementación de leyes y políticas. El ámbito educativo no fue la excepción pues ahora existe una ley que la respalda. Por otro lado el reto recae fuertemente en el contexto universitario, ya que ahora los docentes de las distintas universidades son los que deben ofrecer una formación de calidad a las personas que aprenden de forma distinta, procurando ofrecer medios y recursos adecuados para que su aprendizaje sea efectivo.

La educación especial costarricense difunde en el año 1994 los conceptos de necesidades educativas especiales y de adecuación curricular, gracias a la participación de Costa Rica en la Conferencia de Salamanca de ese mismo año; lo que permitió, entre otras cosas, la creación de las aulas recurso y aulas integradas en todo el territorio nacional y en el ámbito público y privado.

Por lo que en el ámbito educativo a nivel escolar y de secundaria han habido gran trabajo para la atención de las necesidades educativas, no así a nivel superior, donde aún falta mucho por investigar para la inclusión de esa población al sistema de formación universitaria.

Por lo anterior se realiza una investigación cualitativa desde el punto de vista del docente de Matemática para conocer su percepción en la implementación de las adecuaciones curriculares y conocer la realidad del aula. Por lo cual se toma la población de docentes de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional (UNA) de Costa Rica, que han ofrecido cursos donde se han matriculado estudiantes con discapacidad visual.

Ante la necesidad evidenciada se plantean los siguientes propósitos de la investigación:

1. Conocer la percepción del docente en cuanto a la implementación de las adecuaciones curriculares.
2. Indagar la realidad de aula que viven los docentes al impartir lecciones de matemática a población con discapacidad visual.
3. Describir las prácticas docentes en cuanto a la inclusión en la enseñanza de la Matemática para atender de forma integral al estudiante con discapacidad visual.

MARCO TEÓRICO

Este apartado versa sobre la concepción de inclusión educativa, además se comentará la importancia de la enseñanza de la Matemática desde los primeros niveles de escolaridad. Se

considerará el qué y el cómo enseñar dicha disciplina; así como las prácticas docentes para la enseñanza de la misma a la población con discapacidad visual a nivel superior.

De acuerdo a Arenas y Sáez (2013) las estrategias que contribuyen al desarrollo de programas y propuestas educativas deben ser contextualizadas a las realidades de cada país, cuyo propósito es la protección del derecho a la educación de personas con discapacidad. El conjunto de estrategias se propone desde el marco de la inclusión educativa que implica a su vez la autoevaluación institucional, reformulación de los currículos tradicionales a currículos flexibles, la creación de ambientes universales de aprendizaje y la eliminación de barreras para el aprendizaje.

Los profesores como facilitadores del aprendizaje, deberán familiarizarse con los distintos métodos docentes para aplicarlos en sus áreas específicas. Ciertamente el perfil profesional del docente universitario del siglo XXI se ha de volver más complejo, por lo que un buen profesor universitario habrá de reunir las siguientes competencias: dominar tanto el conocimiento de su disciplina como la gestión del mismo; innovar sobre su propia práctica docente, lo que implica reflexionar e investigar integrando el conocimiento disciplinar y el pedagógico como vía para la mejora continua; dominar las herramientas relacionadas con el currículo (diseño, planificación y gestión del mismo); saber favorecer entre los alumnos un clima de motivación hacia un aprendizaje de calidad; saber trabajar en colaboración con colegas y potenciar el aprendizaje colaborativo entre los alumnos; poseer las habilidades comunicativas y de relación que la función docente requiere; y estar comprometido con la dimensión ética de la profesión docente (Rodríguez, 2003).

Por otra parte, Rodríguez, Andreu, Navas, Pereira, Rodríguez de Rivera, Sama y Sevillano (2010) mencionan que bajo un paradigma humanista se permite observar la formación del docente de Matemática bajo los pilares: aprender hacer, a convivir, a conocer y aprender; proponiendo un docente humanista, formado en el paradigma humanista integral, ejemplo de su desenvolvimiento de tal manera que el individuo sea crítico de su desempeño profesional. Así, el docente debe estar preparado a la luz del paradigma humanista integral y la propuesta de un currículo integrador, que haga que la Educación Matemática, la cual siempre ha estado apartada de la vida del estudiante, lo rescate de la pedagogía tradicional.

De acuerdo con el Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado (sf) de España, dentro de la teoría curricular importa no sólo el qué enseñar (objetivos generales), el cuándo enseñar (objetivos y contenidos de área en ciclo o curso) sino también el cómo enseñar (estrategias metodológicas) y el qué, cómo y cuándo evaluar (estrategias y procedimientos de evaluación). Las estrategias metodológicas son el punto de fusión entre los objetivos y los contenidos, por ello no existe un método mejor que otro en términos absolutos, la "bondad" de los métodos depende de la situación concreta a la que se deseen aplicar: nivel educativo, área curricular, situación de aprendizaje, entre otros. En términos relativos, una estrategia metodológica es más adecuada cuanto más se ajusta a las necesidades y maneras de aprender del alumno.

Hablar de utilizar una metodología en educación supone buscar respuestas al cómo enseñar, es decir, a estructurar las actividades del proceso de enseñanza y aprendizaje en las que van a participar los alumnos con el fin de alcanzar los objetivos propuestos con los contenidos seleccionados, mediante una acción intencional, sistemática, planificada y evaluativa.

Finalmente, en términos de inclusión de estudiantes con discapacidad visual el simple hecho de reconocer el contexto de aula como una herramienta para propiciar el aprendizaje a través del

trabajo colaborativo con todos los integrantes del grupo, propicia la motivación en el alumno, relacionando los elementos de currículo anteriormente descritos de manera integral. Se encuentra en las manos del docente crear un ambiente de armonía donde se permita el aprendizaje de forma fluida, atender las dudas y dar responsabilidad al estudiante de retomar los contenido fuera de clase, ya sea con la realización de prácticas adicionales, analizando resúmenes o elaborando su propio material didáctico donde se le facilite ir al día con la materia.

Aunado a lo anterior, es importante considerar el qué y el cómo enseñar Matemática a los alumnos universitarios; así como las principales dificultades encontradas por algunos investigadores en cuanto a su aprendizaje y su comprensión. Batanero y Godino (2001) indican que para incluir un tema en el currículo éste debe satisfacer una serie de condiciones: responder a una necesidad real, ser útil y poder aplicarse en el campo laboral y en la vida cotidiana de forma inmediata o futura, contribuir con el desarrollo integral de las personas; facilitar y favorecer la comprensión de los restantes temas y áreas del currículo, tanto de la educación obligatoria como de la posterior.

Lo anterior justifica la importancia del por qué la Matemática se debe enseñar desde los primeros niveles de la educación. No basta que los estudiantes aprendan un concepto o que lleven a cabo una lista interminable de ejercicios repetitivos; el fin es generar habilidades y destrezas que les sean útiles en cualquier momento. Dichos propósitos deben ser el punto de partida y llegada en cuanto se refiere a la enseñanza de la Matemática.

Es importante aclarar que Matemática es un contenido base para otras áreas o carreras, esta disciplina está implícita en los distintos planes de estudio. Sin embargo hacer una adecuación a nivel superior no implica dejar de cubrir contenidos por el contrario es lograr enseñar las distintas habilidades y destrezas para el éxito del futuro profesional en un proceso inclusivo en igualdad de condiciones que todos los demás estudiantes.

De acuerdo a Arguedas (2004) se define como adecuaciones de acceso o de currículum como las modificaciones en la planificación y de adaptaciones metodológicas que son llevadas a cabo por el personal docente para garantizar la igualdad de oportunidades. Si bien es cierto se hace una modificación de acceso no así con el contenido teórico del curso, pues como institución se debe garantizar las competencias necesarias para ingresar al ámbito laboral, lo cual debe ser coherente con los estándares de calidad.

El desarrollo de estos elementos permite dar sustento a lo propuesto en este avance de investigación, el cual a su vez, es producto de los principales resultados obtenidos tras finalizar la etapa de diagnóstico del Trabajo Final de Graduación (TFG) para obtener el grado de Maestría en Educación con énfasis en Docencia Universitaria, de la Universidad Nacional, ubicada en la provincia de Heredia, Costa Rica. Dicho trabajo arranca a partir de la praxis de docentes de Matemática a nivel superior, lo que permitió brindar un panorama de la realidad del contexto áulico. La discapacidad visual es un importante elemento del currículum que debe ser considerado dentro de la población estudiantil que tiene derecho al acceso a la formación profesional y que el docente debe estar capacitado para ofrecer un proceso accesible al conocimiento matemático.

MARCO METODOLÓGICO

La investigación se enmarca en un paradigma cualitativo. La entrevista a profundidad, el grupo focal y el análisis documental, son las técnicas de recolección de información empleadas en la investigación. Además se adopta un enfoque praxeológico de investigación acción. La investigación cualitativa implica la recolección de una gran variedad de materiales como la entrevista, experiencia personal, observaciones, textos, imágenes, entre otros, que describen la rutina y las situaciones problemáticas, así como los significados en la vida de las personas. En la investigación cualitativa se plantea, por un lado, que investigadores puedan informar con objetividad, claridad y precisión acerca de sus propias observaciones del mundo social, así como de las experiencias de los demás.

Por otro lado, los investigadores se aproximan a un sujeto real, que está presente en el mundo y que puede, en cierta medida, ofrecer información sobre sus propias experiencias, opiniones y valores, por medio de un conjunto de técnicas o métodos como las entrevistas, grupo focal y el análisis documental (Álvarez, 1997).

Las etapas de investigación del trabajo, inician a partir de los comentarios de pasillo entre los docentes en ejercicio. En el año 2014 se realiza una revisión bibliográfica y documental, lo que permitió entre otros aspectos, conocer el panorama general que viven los docentes de Matemática de la UNA, al enseñar a personas con discapacidad visual. Por lo que se trabaja en la etapa diagnóstica con entrevistas y la técnica de grupo focal para conocer la percepción del docente en cuanto a la implementación de las adecuaciones curriculares y la realidad de aula. Con ello, la recolección de información facilita aclarar aspectos relevantes de la investigación, ayuda a delimitar el tema, la población participante así como los objetivos que se desean alcanzar en el proceso de análisis. Permite preguntarse sobre la inclusión de los estudiantes con discapacidad visual a las lecciones de Matemática en educación superior.

ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Para el siguiente apartado se analiza la información recolectada a lo largo de la etapa de diagnóstico del proceso investigativo, específicamente de las entrevistas aplicadas a un grupo de siete docentes de la Escuela de Matemática de la UNA y el grupo focal llevado a cabo con el personal encargado de los departamentos e instancias de la UNA involucrados en el proceso de ingreso y permanencia de la población estudiantil, a saber, el Departamento de Orientación y Psicología, Programa Éxito Académico y el Proyecto UNA Educación de Calidad. Dichas técnicas brindaron una amplia información para conocer las estrategias empleadas por parte de la UNA para la atención de la población estudiantil a la cual los docentes son partícipes en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Para facilitar la comprensión del análisis se presentan los datos a partir de tres categorías.

La implementación de las adecuaciones curriculares

En la UNA, la Comisión Institucional en Materia de Discapacidad (CIMAD) es la unidad que se encarga de los servicios de apoyo en materia de discapacidad, la cual tiene como función promover principios de igualdad de oportunidades y accesibilidad para las personas con discapacidad, en todos los campus universitarios, en los reglamentos, políticas, planes, programas, proyectos, servicios, inversión, en el marco del plan de mediano plazo 2013-2017 y de la PONADIS.

Aunado a lo anterior, es importante indicar que existen lineamientos Institucionales para la digitalización de material para la Persona con Discapacidad Visual, en los cuales se acuerda emitir ciertos procedimientos para la digitalización, entrega y almacenamiento de documentos impresos, avalados por la CIMAD, que deberán seguir las facultades, centros y sedes para su utilización por parte de estudiantes con discapacidad visual.

Dentro de la universidad se cuenta con entes que se encargan de informar sobre lineamientos generales que debe cumplir el educador y los derechos del estudiante; ofrecen al estudiante, la oportunidad de recibir apoyo por parte de un tutor, guía, escribiente, o intérprete, según el caso y las necesidades, además facilitan un acompañamiento psicosocial, con el fin de dar seguimiento a cada uno de los estudiantes.

De acuerdo a la opinión del docente, sí existen estos entes de apoyo, pero no son lo suficientemente ágiles con la divulgación de la información, lo cual es señalado por la mayoría de docentes entrevistados. Señalan que no se les informa con el tiempo suficiente, que va a tener en su grupo un estudiante con discapacidad visual. Algunos de los entrevistados mencionan que ellos se dieron cuenta el primer día de clase, de la existencia de un estudiante con discapacidad matriculado en su grupo y es allí donde se percatan de la situación, lo que los obliga atender al estudiante sin ningún planeamiento adaptado a la condición del estudiante y deben proceder con su planeamiento original, aunque no sea accesible al estudiante y su discapacidad.

La universidad argumenta que ellos como entes encargados hacen lo posible para ofrecer materiales adaptados, como impresiones en braille, ilustraciones en relieve, entre otros; pero que no ha sido suficiente para poder cubrir todos los contenidos ofrecidos por los diferentes curcos y mucho menos las necesidades del docente y de los estudiantes. Agregan que son los mismos docentes quienes por su disciplina, deben de capacitarse por su cuenta en la docencia universitaria para atender al estudiante con discapacidad visual.

La Escuela de Matemática por su parte, hace ver que no está preparada para atender a estudiantes de baja visión y mucho menos ciegos; las cátedras de los cursos no cuentan con material digitalizado; ni docentes capacitados en la atención de estudiantes con discapacidad visual o la elaboración de material accesible, con recursos didácticos para impartir las lecciones. Sin embargo tiene apertura e interés por apoyar la investigación o iniciativas que se presenten en esta línea pues es una necesidad de toda la universidad.

Es necesario mencionar que la UNA se encuentra haciendo grandes esfuerzos para lograr una mejor calidad de la educación que reciben los estudiantes con algún tipo de discapacidad visual, al tratar de unificar programas, departamentos, proyectos y unidades que trabajan el tema, en busca de lograr un trabajo conjunto por un mismo objetivo y darle mayor apoyo y confianza al estudiante.

La realidad de aula

Los docentes apuntan que en muchos casos deben atender a grupos de 35 a 40 personas donde en algunos de los casos se encuentra un estudiante con discapacidad visual y debe impartir sus clases de acuerdo a un programa de curso denso y con mucho contenido teórico-práctico; lo cual cuando el estudiante es de baja visión la situación es un poco más sencilla para el docente no así cuando el estudiante es ciego y no tiene las bases previas necesarias de la Matemática, lo que le dificulta lograr que el estudiante adquiera los conocimientos, habilidades y destrezas Matemáticas necesarias para formación profesional en el curso que imparten.

Es necesario organizar, coordinar y planificar con mayor tiempo algunos de los procesos de ingreso y permanencia en la UNA de los estudiantes, para dar una atención de acompañamiento acorde a las necesidades del estudiante; pues el Departamento de Orientación y Psicología informa a los docentes que tendrán en sus lecciones algún estudiante con discapacidad visual, en el mejor de los casos, unos días antes de iniciar el periodo lectivo; siempre que el estudiante haya informado al Departamento sobre su discapacidad. Por ende, en los casos en el que estudiante no informe al Departamento de Orientación y Psicología sobre su situación, será el docente quien lo identifique en el desarrollo de su clase, lo cual es señalado por el mismo departamento.

Actualmente los estudiantes con problemas de visión utilizan diferentes medios para estudiar y muchos de ellos relacionados con las tecnología y por ende el avance tecnológico implícito, por lo que es necesaria la capacitación y actualización en esta temática de los docentes, administrativos y autoridades universitarias, para conocer las necesidades de cada uno de estos estudiantes y así poder ofrecer el apoyo específico. Pues aunque muchos de ellos comparten problemas de visión, todos presentan diferentes condiciones y dificultades de acuerdo a su forma de trabajo en el aula y de estudio independiente.

Las prácticas docentes en cuanto a la inclusión en la enseñanza

Además, el docente manifiesta que existe dificultad para explicar la temática a esta población debido a la metodología tradicional empleada, el uso de la pizarra, lo cual es muy visual, y la cual está estrechamente relacionada con la forma de expresarse y hablar para explicar, concluyen que deben de cambiar para ser inclusivos en el proceso de aula.

Los entrevistados manifiestan que no están capacitados para atender a la población con discapacidad visual dentro del marco inclusión; existe una falta de reflexión y concientización por parte de algunos docentes respecto al tema de la inclusión en las aulas, específicamente con estudiantes que presentan alguna discapacidad visual. Esta reacción en los docentes es generada principalmente por el desconocimiento de cómo afrontar la situación.

Según la opinión del personal del Departamento de Orientación y Psicología respecto a la inclusión, este tema es más que todo de índole actitudinal, en la mayoría de los casos son más sensibles los compañeros de los estudiantes que los mismos funcionarios. También hay temor de no saber cómo tratar la persona ciega y falta de voluntad para pensar en formas alternativas de enseñanza para ellos. Lo otro que es señalado por esta instancia, es que la infraestructura física de la UNA que no es apta para que las personas ciegas transiten por ella. Muchas de las actividades que se hacen en la universidad no son inclusivas.

Por su parte, el proyecto UNA Educación de Calidad señala que es poco el personal académico del área de Matemática que se muestra interesado, sensible o dispuesto a apoyar a este grupo de estudiantes ya que requieren de mayor tiempo para planear sus clases y preparar el material adecuado. También para proporcionar la atención individual que requieren este grupo de estudiantes.

A manera de cierre, se puede percibir que en términos de la Escuela de Matemática y de los organismos de apoyo a esta instancia existe una actitud de cambio y de conciencia ante la situación de hacer frente a la inclusión de estudiantes con discapacidad visual, en los cursos propiamente ofrecidos por la Escuela de Matemática. Son conscientes que no están listos para atender esta población pero se muestran preocupados y con deseos de poder brindar una

educación de calidad a esta población, la cual merece ser tratada como cualquier estudiante y con los mismos derechos y oportunidades.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Álvarez. I. (1997). *Investigación Cualitativa. Diseños Humanísticos Interpretativos. Curso de Investigación Científica*. Facultad de Ciencias Sociales y Humanísticas. Universidad Central de las Villas. Santa Clara, Cuba.

Arenas, F. y Sáez, M. (2013). Procesos de flexibilización y diversificación curricular: nuevos retos del sistema educativo colombiano para favorecer los procesos de participación en contextos escolares de personas con discapacidad. *Horizontes Pedagógicos*. 15(1). (pp. 147-157). Bogotá Colombia.

Arguedas, I. (2004). Reacciones de profesoras y profesores de la universidad de Costa Rica ante la flexibilización del Currículum para estudiantes con necesidad especiales. *Actualidades Investigativas en Educación*, 4. (2). p 119. Recuperado de: http://revista.inie.ucr.ac.cr/uploads/tx_magazine/reacciones.pdf

Batanero, C. y Godino, J. (2001). *Análisis de Datos y su Didáctica*. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. España.

Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado. (sf). Orientación educativa. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. España. Recuperado de 28 de septiembre de 2015 de http://ntic.educacion.es/w3//recursos2/orientacion/01apoyo/op03.htm

Rodríguez, S. (2003). Nuevos retos y enfoques en la formación del profesorado universitario. *Revista de Educación*, 331, INCE.

Rodríguez, V., Andreu, A., Navas, N., Pereira, A., Rodríguez de Rivera, I., Sama V. y Sevillano, E. (2010). *Atención a los estudiantes con discapacidad en la universidad. Orientaciones para el profesorado*. Editorial UNED. Colección: Universidad Sin Barreras. Madrid. España.

ESTUDO DE CASO SOBRE ANÁLISE EM DIDÁTICA REALIZADO EM UM TRABALHO FINAL DO MESTRADO PROFISSIONAL PROFMAT

Adriana Breda, Vicenç Font, Valderez Marina do Rosário Lima, Marcos Vilella Pereira, José Fernandes da Silva
Universitat de Barcelona (España), Pontificia Universidad Católica de Río Grande del Sur (Brasil)
adriana.breda@gmail.com, vfont@ub.edu, valderez.lima@pucrs.br, marcos.villela@pucrs.br, jose.fernandes@ifmg.edu.br

Palavras chave: formação continuada, matemática, critérios de idoneidade didática.

Key words: continuing education, mathematics, didactic suitability criteria.

RESUMO: este trabalho tem como objetivo apresentar um estudo de caso, onde se investiga, em particular, as categorias de análise em didática utilizadas pela autora para justificar que a sua proposta de trabalho final de mestrado implica em uma melhora do ensino de matemática na Educação Básica. Como referencial teórico, para analisar as categorias utilizadas no TFM, utilizou-se os critérios de idoneidade didática propostos pelo Enfoque Ontossemiótico. A análise mostra que a proposta está pouco planejada e a justificativa se infere no uso, sobretudo, de argumentos, avaliações e reflexões relacionados com o critério de idoneidade ecológica que estão pouco relacionados com os outros critérios. Essa disparidade na profundidade dos critérios de idoneidade demonstra que não se apresenta clareza sobre qual é a proposta e sobre qual é o grau de sua qualidade.

ABSTRACT: this paper aims to present a case study which investigates, in particular, the categories of analysis in didactics used by the author to justify that the proposition of his* Master Degree's final dissertation implies in an improvement in the teaching of Mathematics in basic education. The didactic suitability criteria proposed by the Onto-semiotic approach were used as theoretical framework to analyze the categories used in the final dissertation. The analysis shows that the proposition is poorly planned and the justification is mainly based on the use of arguments, evaluations and reflections related with the ecological suitability and barely related with the other criteria. This disparity in the thoroughness of the suitability criteria demonstrates that there is no clarity about what the proposition is and what its quality degree is.

INTRODUÇÃO

A tendência a uma convergência internacional no planejamento dos estudos universitários e, em particular, aos que se referem à formação em mestrados profissionais voltados à capacitação de professores, tem impulsionado um conjunto de reformas em diferentes países, de tal forma em que se apresenta o domínio de um modelo organizado por certo refinamento e evolução em torno de capacidades profissionais. No cenário brasileiro, a Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) propõe o Mestrado Profissional (MP) como uma modalidade de Pós-Graduação *stricto sensu* voltada para a capacitação de profissionais, nas diversas áreas do conhecimento, mediante o estudo de técnicas, processos ou temáticas que atendam a alguma demanda do mercado de trabalho. Para isso, dispõe, dentre os principais objetivos, a capacitação de profissionais qualificados para o exercício da prática profissional avançada e a transformação de procedimentos, que visam melhorar a eficácia e a eficiência das organizações públicas e privadas por meio da solução de problemas e da geração e aplicação de processos de inovação apropriados. Nesse sentido, as propostas de cursos que seguem tal modalidade devem apresentar uma estrutura curricular que enfatize a articulação entre o conhecimento atualizado, o domínio da metodologia pertinente e a aplicação orientada para o campo de atuação profissional específico (Brasil, 2009).

Na tentativa de capacitar professores de matemática em exercício, iniciou-se, em 2010, por meio da recomendação do Conselho Técnico-Científico da Educação Superior da Capes, o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) que se constitui como um curso de pós-graduação *strictu sensu*, semipresencial, oferecido em todo território nacional brasileiro, que é coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), tendo como principal objetivo o atendimento de professores de Matemática em exercício no ensino básico, especialmente, na escola pública. Esse mestrado profissional busca um aprimoramento da formação profissional de futuros professores, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para a sua atuação docente (Brasil 2013a), levando em conta a missão estatutária da SBM que é de "*Estimular a melhoria do ensino de matemática em todos os níveis*".

Nesse sentido, dentre outros objetivos, apresenta como principal (Brasil 2013a; Brasil, 2013b): Estimular a melhoria do ensino de Matemática em todos os níveis.

O trabalho que se apresenta aqui, forma parte de uma investigação mais ampla, que tem como finalidade geral a investigação dos critérios (e em que medida) são utilizados pelos autores (alunos participantes do PROFMAT) para justificar que as suas propostas de trabalho final do mestrado implicam em uma melhora do ensino de matemática na Educação Básica. Para isto, optou-se por estudar as memórias dos trabalhos finais desse curso, que podem ser considerados como trabalhos de reflexão onde o aluno deve mostrar que adquiriu um conjunto de objetivos do mestrado que o capacite para dar continuidade à sua atuação como docente de matemática na Educação Básica. Assim, as orientações fornecidas pelo PROFMAT mostram que o trabalho final deve ser desenvolvido de acordo com temas específicos do currículo de Matemática do Ensino Básico, de forma inovadora e que tenha, preferencialmente, aplicação direta em sala de aula, contribuindo para o *enriquecimento* do ensino da disciplina (Brasil, 2013a). Este objetivo geral se concretiza em objetivos mais específicos, onde um dos quais é determinar os critérios que se utilizam nos trabalhos finais de mestrado (TFMs) para justificar que a proposta representa uma melhora no ensino de matemática, ou seja, um ensino de melhor qualidade.

ASPECTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Neste trabalho, partimos do pressuposto que o TFM é uma tarefa que implica em um exercício de análise em didática (de forma implícita ou explícita), dado que nele deve-se explicar uma proposta didática e justificar que esta signifique uma melhora para o ensino.

Como referencial teórico, para analisar as categorias utilizadas para justificar a melhora do ensino de matemática nos TFMs, utilizamos os critérios de idoneidade didática propostas pelo Enfoque Ontossemiótico (EOS, a partir de agora) (Godino, Batanero e Font, 2008; Font, Planas e Godino, 2010; Breda, Font e Lima, 2015a):

> 1. Idoneidade epistêmica, para avaliar se a matemática que estão sendo ensinadas são "boas matemáticas". 2. idoneidade cognitiva, para avaliar, antes de iniciar o processo de instrução, se o que se quer ensinar está a uma distância razoável daquilo que os alunos sabem e, depois do processo, se as aprendizagens adquiridas estão cerca daquilo que se pretendia ensinar. 3. Idoneidade interacional, para avaliar se a interação resolveu dúvidas e dificuldades dos alunos. 4. Idoneidade mediacional, para avaliar a adequação dos recursos materiais e temporais utilizados no processo de instrução. 5. Idoneidade emocional, para avaliar a implicação (interesse, motivação) dos alunos no processo de instrução. 6. Idoneidade ecológica, para avaliar a adequação do processo de instrução ao projeto educativo do centro, as diretrizes curriculares, as condições do entorno social e profissional, etc. (Font, Planas e Godino, 2010, p.101).

Os critérios de idoneidade são regras de correção úteis nos momentos dos processos de estudos matemáticos. A *priori*, os critérios de idoneidade são princípios que orientam "como as coisas devem ser feitas". A *posteriori*, os critérios servem para avaliar o processo de estudo efetivamente implementado.

Para a realização deste trabalho, fizemos um estudo de caso (Ponte, 1994), que se caracteriza pela análise, em profundidade, de uma situação específica e particular, de um trabalho final de mestrado (TFM) produzido e publicado pelo programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional no estado do Rio Grande do Sul, Brasil (PROFMAT/RS). Dentro do universo de vinte e nove trabalhos publicados no período entre o primeiro semestre de 2013 e o segundo semestre de 2014, fizemos um levantamento dos mesmos para classificá-los em função do tipo de inovação (incorporação de conteúdos matemáticos de nível superior na Educação Básica (Breda, Font e Lima, 2015b); na incorporação das TIC (Breda, Lima e Pereira, 2015), entre outros, e da implementação ou não da proposta (planejamento, implementação e redesenho). Escolhemos um trabalho que apresenta uma proposta didática referente a um caso que aborda uma inovação referente à introdução de um conteúdo de matemática de nível superior na Educação Básica, porém, não desenvolve a sua aplicação em sala de aula.

ANÁLISE DO CASO

Nesta seção, apresentamos a análise detalhada de um caso que apresenta o planejamento de uma sequência em que a inovação é a implementação de novos conteúdos na Educação Básica, especificamente, a proposta de implementar um conteúdo relacionado à Matemática Discreta.

Explicamos, primeiramente, a estrutura do trabalho de conclusão de curso e, na sequência, analisamos os argumentos, as avaliações e as reflexões que a autora realiza para justificar que a sua proposta possibilita uma melhoria no ensino de matemática. A análise está pautada conforme os critérios de idoneidade propostos pelo EOS.

Estrutura do trabalho de conclusão de curso

Conforme a própria autora explica na introdução, o trabalho intitulado *Dígitos verificadores e detecção de erros* (Pinz, 2013) se refere a um estudo sobre os códigos numéricos e a detecção de erros de transmissão, bem como a justificativa descrita para a escolha do tema que mostra como os códigos são de uso rotineiro, apresentam uma estrutura simples e motivam o desenvolvimento de aspectos da teoria da divisibilidade. Além disso, no desenvolvimento do trabalho, a autora apresenta alguns códigos e erros de transmissão observados a partir de cálculos simples e descreve uma proposta pedagógica que, segundo ela, tem a intenção de promover a prática da pesquisa no estudante, no intuito de mostrar que a matemática é uma ciência presente no cotidiano do aluno.

A autora explica que na sociedade atual existe uma necessidade de evitar os erros na transmissão da informação e que esta necessidade é a razão de ser do desenvolvimento de uma parte da Teoria dos Números, em especial, a teoria de dígitos verificadores e transmissão de erros. Essa necessidade, segundo a autora, pode ser observada em muitas situações da vida cotidiana (estudo do código de barras, CPF, ISBN, etc.). Por outro lado, a teoria formal de dígitos verificadores e transmissão de erros se baseia, podemos dizer, em alguns conhecimentos da matemática informal, alguns dos quais são ou devem ser conhecidos pelos alunos (estrutura do Sistema Decimal de Numeração, Divisibilidade, etc.).

No primeiro capítulo, a autora apresenta os conhecimentos preliminares da teoria da divisibilidade da matemática elementar, os quais se supõem que sejam conhecidos pelos alunos (Divisibilidade nos Inteiros, Máximo Divisor Comum, Algoritmo da Divisão de Euclides, Números Primos, Números Primos Entre Si e o Teorema Fundamental da Aritmética), e os relaciona com os conteúdos próprios de uma matemática superior (Congruências e Grupos). A apresentação dos conteúdos relacionados com a Teoria da Divisibilidade se limita à disponibilização de definições e dos enunciados dos teoremas (sem nenhuma demonstração) com linguagem simbólica. Em relação às Congruências, a autora define a noção de congruência do módulo *m* e explica que essa notação simbólica é utilizada para explicar essa noção, a autora também introduz a noção de resíduo, afirmando que se trata de uma noção de equivalência. Na continuação, a autora introduz a noção de Conjunto Quociente, a sua notação e as propriedades. Da mesma forma que o caso da Teoria da Divisibilidade, a autora limita-se a dar as definições e o enunciado das propriedades, sem nenhuma demonstração. Na terceira parte do primeiro capítulo, a autora apresenta a definição de grupo, grupo finito, grupo de permutação e grupo de simetria. Nesta última noção, a autora apresenta um exemplo relacionado com os grupos de simetrias de um pentágono regular.

No capítulo dois, a autora apresenta exemplos cotidianos onde se usam códigos numéricos e dígitos verificadores e inicia o capítulo com a definição de vetor e de produto escalar. Na sequência, a autora comenta o que é um código de barras e, com um exemplo, explica um algoritmo para determinar o Dígito Verificador, fazendo o mesmo com o ISBN, o CPF, o Título Eleitoral, o cartão de crédito e o marco alemão.

No terceiro capítulo são apresentados conteúdos sobre sistemas de verificação de dígitos. A autora inicia o capítulo com um comentário sobre os tipos de erro que se apresentam no processo de transmissão de dados, distinguindo entre erro único e erro de transposição, sendo o mais comum o primeiro tipo de erro. Trata-se de um capítulo com uma estrutura tipicamente formalista. Depois de comentar um exemplo de erro único no contexto do código de barras, a autora dedica-se a aprofundar a explicação sobre o erro de Transposição Adjacente. Para este, define o tipo de erro com notação simbólica, enuncia e demonstra um teorema sobre a detecção deste tipo de erro. Seguidamente define a noção de Sistema de Verificação de Dígitos, enunciando e demonstrando um teorema que permite concluir que para detectar todos os erros únicos e todos os erros de transposição, um sistema de verificação de dígitos deve ter um número primo de elementos. Na sequência, a autora define a expressão que codifica o dígito verificador e conclui que o código que utiliza *m* primo detecta todo erro único e todo erro de transposição.

Além disso, a autora levanta o questionamento sobre a existência de um código com a mesma capacidade de detecção de erro, porém, com um módulo par. Finalizando o capítulo, afirma que, entre os vários sistemas vistos para detecção de erros usando dígitos de verificação, o único capaz de detectar todos os erros únicos e todos os erros de transposição é o Z_{11}, mas com o inconveniente de precisar de um dígito extra. A autora também explica que em 1969, Verhoeff desenvolveu, em sua tese, um método simples, com os componentes do grupo dihedral D_5 que também detecta todos os erros únicos e todas as transposições adjacentes, sem a necessidade de símbolos extras.

Depois destes capítulos, se apresenta uma proposta de sequência didática. Contudo, tanto as situações-problema quanto a proposta didática, mostram que, do ponto de vista matemático, podem ser resolvidas através de uma matemática informal, ou seja, uma matemática que chamamos de escolarizada, no caso, apenas com o estudo da divisibilidade. As situações apresentadas e sua resolução com conteúdos da teoria da divisibilidade são a base para realizar uma conexão (que não se concretiza na proposta) com a teoria para detectar erros de transmissão através do cálculo de dígitos verificadores.

Critérios de Idoneidade

De acordo com Ramos e Font (2008) e Seckel e Font (2015), consideramos que quando os professores têm que refletir sobre uma proposta didática que signifique uma mudança ou uma inovação sobre a sua própria prática, utilizam de maneira implícita alguns critérios de idoneidade. O TCC analisado também permite inferir o uso de alguns destes critérios na justificativa da proposta que realiza. Vejamos:

Ecológico

Segundo as orientações fornecidas pelo banco indutor do TCC, os professores devem justificar que suas propostas são uma inovação para o ensino de matemática na Educação Básica. No caso estudado, a autora considera que a inovação passa pela incorporação de novos conteúdos no currículo, em particular conteúdos de matemática discreta. Diversos autores têm realizado tendências inovadoras na Educação Matemática (por exemplo, Guzmán, 2007), destacando que uma delas é a incorporação de novos conteúdos matemáticos, em particular, de matemática discreta. O TCC que se está analisando assume este pondo de vista.

Outro aspecto do entorno que devem apresentar os autores dos TCCs, de acordo com as

orientações do programa, é a de que sua proposta deve estar relacionada com algum conteúdo do currículo de matemática da Educação Básica e também deve seguir algumas das orientações dos parâmetros curriculares. Neste caso, os conteúdos com os quais o TCC se relaciona, são conteúdos de aritmética (divisibilidade) e os parâmetros do currículo que se tem em conta para justificar que a proposta se relaciona com: 1) apresentação de situações extra matemáticas que contextualizem as noções matemáticas que se quer ensinar; 2) utilização da matemática como uma ferramenta para conhecer o mundo que nos rodeia e para resolver problemas (Brasil, 2000).

Nos TCCs existem evidências de que a autora teve em conta as orientações curriculares. Por exemplo:

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), elaborados pelo Ministério da Educação e do Desporto, nos comunicam uma referência para o trabalho dos professores do Ensino Fundamental e Médio. [...]. (Pinz, 2013, p.40).
>
> Acreditamos que a contextualização é um recurso didático capaz de auxiliar a aprendizagem significativa e por isso elaboramos esta proposta de trabalho [...] Desejamos mostrar a Matemática como ciência em construção, focada na atualidade. (Pinz, 2013, p.13).

Por outra parte, a autora, especifica em que disciplina pode-se implementar a sua proposta e, concretamente, sugere que tal proposta pode ser trabalhada no "Seminário Integrado", um espaço onde os alunos devem realizar um trabalho de investigação, preferencialmente do tipo interdisciplinar, no período do Ensino Médio.

> Essa proposta pedagógica tem como público alvo os estudantes da Educação Básica, podendo ser adaptada as suas diferentes etapas e anos. Mas, de uma forma especial pode ser utilizada no componente curricular Seminário Integrado, fazendo parte da nova modalidade do Ensino Médio da Rede Estadual de Educação do Rio Grande do Sul - o Ensino Politécnico - implantado em 2012, que busca desenvolver projetos diversificados (Pinz, 2013, p.40).

Mesmo que a autora não explicite no TCC que pretende realizar uma conexão intra-matemática entre a teoria da divisibilidade e a teoria dos dígitos verificadores e a detecção de erros, pode-se afirmar que em sua proposta didática faz o seguinte comentário que pode ser interpretado como uma conexão intradisciplinar, uma vez que relaciona a teoria da divisibilidade do currículo do Ensino Médio com essa teoria:

> A concatenação das informações da segunda etapa, e explanação pela professora sobre a Teoria dos Códigos de Verificação de Dígitos destacando a sua importância para a transmissão de dados eficaz (Pinz, 2013, p.43).

No TCC não se realizou nenhuma referência à conexão das atividades propostas com outras disciplinas presentes no currículo (interdisciplinar).

Epistêmico

A qualidade matemática implicada em sua proposta não está justificada explicitamente, entretanto, pode-se dizer que sua ideia de qualidade matemática está relacionada à "riqueza de processos", já que a autora comenta que a implementação permitirá que os alunos realizem processos matemáticos relevantes, como a resolução de problemas, criação de conjecturas, investigação

matemática, etc.:

> Queremos proporcionar, aos estudantes, a oportunidade de vivenciar a sequência de atividades que buscam levá-lo a: saber informar-se, comunicar-se, argumentar, compreender informações, aguçar sua criatividade e seu espírito investigativo; utilizar os recursos disponíveis para pesquisa; analisar e valorizar informações; participar socialmente, de forma prática e solidária; utilizar algoritmos para determinar dígitos verificadores; elaborar conjecturas sobre os possíveis erros; perceber a Matemática como ciência voltada à solução de problemas da atualidade (Pinz, 2013, p.40).

Por outro lado, a autora, de maneira implícita, utiliza o descritor "amostra representativa de problemas", já que apresenta uma diversidade de situações que (código de barras, ISBN, CPF, Título Eleitoral, cartão de crédito e marco alemão) para serem resolvidas são necessários diferentes algoritmos. Por exemplo, na descrição de sua proposta didática escreve:

> Com a ajuda dos aprendizes listar exemplos, onde sequências numéricas são utilizadas na comunicação de informações e, devido a isso precisam ser feitas sem erros. Orientar para que surjam os números de documentos (CPF e Título de Eleitor), de ISBN, dos cartões de crédito e dos códigos de barras (Pinz, 2013, p.42).

Emocional

A autora pressupõe que trabalhar com temas novos com os alunos assegura a sua motivação e interesse. No TCC apresentam-se evidências que permitam avaliar essa inferência:

> [...] trabalhar com "temas novos", que estão ou não diretamente relacionados com os conteúdos programáticos. Pois estes têm a capacidade de entusiasmar estudantes, despertá-los, ampliar seus conhecimentos (Pinz, 2013, p. 44).

Por outra parte, a autora afirma que, além do tema novo ser relevante para a vida dos alunos, pode gerar em estes uma motivação que os leva a estudar a matemática necessária que permita explicar tal situação. Nesse sentido, para a autora, propor situações da vida cotidiana também facilita a motivação dos alunos.

Cognitivo

A autora considera que os alunos da Educação Básica apresentam os conhecimentos prévios necessários para poder resolver a sequência de atividades presentes em sua proposta (operar com os números naturais, inteiros e dominar o algoritmo da divisão).

> Nossa proposta infere que os alunos saibam operar com números naturais e inteiros, em especial dominem o algoritmo da divisão de inteiros (PINZ, 2013, p.40).

Além disso, a autora considera que apresenta uma proposta contextualizada que garante a aprendizagem significativa dos estudantes:

> Acreditamos que a contextualização é um recurso didático capaz de auxiliar a aprendizagem significativa e por isso elaboramos esta proposta de trabalho (Pinz, 2013, p. 13).

Mediacional

Embora a sequência considere o público alvo a quem se dirige, número de alunos e tempo para a sua realização, não apresenta uma reflexão mais aprofundada no que se refere se a sequência

terá êxito no tempo determinado, ou se o número de alunos é apropriado para que se realize o trabalho no tempo estipulado, etc.

> Pretende-se desenvolver este trabalho em uma turma de 35 alunos em 4 etapas, na escola, com duração de aproximadamente 90 minutos (PINZ, 2013, p.41).

Além disso, como meios a serem utilizados em classe, a sequência considera apenas meios tecnológicos, em particular, o uso da internet como ferramenta para buscar informação e realizar a comunicação.

> Fazemos questão de utilizar recursos tecnológicos pois acreditamos que eles podem ser ferramentas para o ensino, atuando com várias finalidades [...] Neste sentido, utilizar a internet como uma fonte de pesquisa, e o projetor multimídia que favorece a apresentação, para o grande grupo, dos assuntos estudados [...] (Pinz, 2013, p.40-41).

Interacional

Ao se tratar de uma proposta geral, para qualquer nível da Educação básica (pois pressupõe que cada professor deve adaptá-la ao curso no qual pretende implementá-la), a reflexão sobre a interação está pouco desenvolvida, uma vez que, apenas comenta se a tarefa será realizada no grande grupo, em grupos pequenos ou individualmente.

> Com as informações obtidas os grupos deverão elaborar uma apresentação de 8 a 12 minutos para socialização das informações com os demais [...] (Pinz, 2013, p. 42).

CONSIDERAÇÕES SOBRE A ANÁLISE

Um problema com o qual se encontra o leitor deste TCC é que a autora está justificando a qualidade de uma proposta em que está pouco desenvolvida no que ela consiste. Não está claro, por exemplo, como se vai conseguir o objetivo da inovação no ensino de matemática (incorporar o conteúdo de Matemática Discreta na Educação Básica). Não está explicitado, em primeiro lugar, que dígitos verificadores e transmissão de erros se quer introduzir e, em segundo lugar, como se transita dos conhecimentos prévios sobre divisibilidade, supostamente conhecidos pelos alunos, para estes conteúdos sobre a teoria de dígitos. Por outra parte, a proposta didática apresentada não tem muito sentido, visto que todos os problemas podem ser resolvidos com conhecimentos de aritmética, sem a necessidade de estudar a teoria de códigos e a detecção de erros.

A proposta está pouco planejada e a justificativa que a autora realiza se infere no uso, sobretudo, de argumentos, avaliações ou reflexões relacionados com o critério de idoneidade ecológica e pouco relacionados com os outros critérios. Essa disparidade na profundidade dos critérios de idoneidade não apresenta clareza sobre qual seu grau de qualidade didática da proposta. Cabe acrescentar que o problema de falta de compreensão da forma que se introduzir o conteúdo de matemática discreta em uma sequência didática que apresenta este TCC não se encontra em outros autores que realizaram sequências didáticas para a incorporação do conteúdo de matemática discreta na Educação Básica (Goddijn, Kindt e Reuter, 2004).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brasil. (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Medio*. Ministério da Educação.

Brasil. (2009). Portaria Normativa nº 7, de 22 de junho de 2009. *Dispõe sobre o mestrado profissional no âmbito da Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)*. Ministério da Educação.

Brasil. (2013a). Uma análise quali-quantitativa de perfis de candidatos ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). *Relatório final do procedimento de análise quali-quantitativa de perfis de candidatos e aprovados no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)*. Sociedade Brasileira de Matemática.

Brasil, (2013b). *Avaliação suplementar externa do programa de mestrado profissional em matemática em rede nacional (PROFMAT)*. Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Breda, A., Font, V., Lima, V. M. R. (2015a). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática* 8(2), 1-41.

Breda, A., Font, V., Lima, V. M. R. (2015b en prensa). Propuestas de incorporación de contenidos matemáticos de nivel superior en la educación básica: un estudio de los trabajos finales de curso del Máster Profesional en Matemáticas en la Red Nacional. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*.

Breda, A., Lima, V. M. R., Pereira, M. V. (2015). Papel das TIC nos trabalhos de conclusão do mestrado profissional em matemática em rede nacional: o contexto do Rio Grande do Sul. *Práxis Educacional (Online)* 11, 213-230.

Font, V., Planas, N., Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105.

Giménez, J., Font, V., Vanegas, Y. (2013). Designing Professional Tasks for Didactical Analysis as a research process. En C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education* (pp. 581-590). Proceedings of ICMI Study 22: Oxford.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2008). Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e da instrução matemática. *Acta Scientiae*. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática* 10, 7-37.

Goddijn, A., Kindt, M., Reuter, W. (2004). *Geometry with applications and proofs*. Freudenthal Institute, Utrecht: The Netherlands.

Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación* 43, 19-58.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em Educação Matemática. *Quadrante* 3(1), 3-18.

Pinz, C. R. F. (2013). *Dígitos verificadores e detecção de erros*. Dissertação de Mestrado não publicada, Fundação Universidade de Rio Grande, PROFMAT, Rio Grande, Brasil.

Ramos, A. B., Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 11 (2), 233-265.

ESTUDIO SOBRE EL USO DE SIGNOS PSICOLÓGICOS EN PROFESORES DE CIENCIAS NATURALES DURANTE LOS PROCESOS DE SIGNIFICACIÓN DE CONCEPTOS FÍSICOS

Jesús Salinas Herrera, Ulises Alfonso Salinas Hernández
Colegio de Ciencias y Humanidades-UNAM, Centro de investigación y de estudios avanzados-IPN (México)
jes54@unam.mx, asalinas@cinvestav.mx

Palabras clave: mediación, gestos, enfoque semiótico, perspectiva sociocultural.

Key words: mediation, gestures, semitioc approach, sociocultural perspective.

RESUMEN: En este trabajo se reporta la manera en que profesores de ciencias naturales emplean gestos (signos psicológicos) como mediadores del pensamiento durante el proceso de significación del concepto de sistema de referencia en la resolución de problemas de movimiento de la asignatura de física. Se trata de un estudio de tipo cualitativo que se apoya en la perspectiva histórico-sociocultural de la matemática, así como en el carácter cultural de los signos utilizados como mediadores y su papel como transmisores de significados. La recopilación de datos se llevó a cabo mediante la videograbación de un taller para profesores de ciencias naturales de nivel medio superior.

ABSTRACT: In this work we report the way science teachers use gestures (psychological signs) as mediators of thought during the significance of the concept of reference system when they deal with movement problems of physics subject. I It is a qualitative study which is based on the historical-cultural perspective of mathematics as well as the cultural character of the signs used as mediators and their role as carriers of meaning. Data collection was performed by videotaping a workshop for science teachers of high school.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo está enmarcado en un proyecto más amplio cuyo objetivo es indagar el uso de: 1) la historia de la ciencia y 2) la tecnología como recursos didácticos. Ambos recursos didácticos toman como base una teoría del aprendizaje con un enfoque socio histórico y cultural, la cual destaca el carácter mediatizado del conocimiento en el sentido de Vygotsky (1995). De esta manera, consideramos por un lado la característica histórica y cultural del conocimiento matemático (Bishop, 1999; Radford 2006, Radford 2014), como parte de la cultura que produce una sociedad en un momento histórico determinado; y por el otro, la manera en que ese conocimiento es retomado en procesos sociales de producción de significados (Radford 2006, Radford 2014).

Este segundo aspecto es el que abordamos en el presente estudio. Fundamentalmente ponemos atención en el carácter mediador de las herramientas y los signos psicológicos para la construcción y desarrollo de significados de conceptos físicos relacionados con el movimiento en profesoras y profesores del nivel medio superior.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El propósito de este artículo es observar el razonamiento que realizan profesoras y profesores de ciencias naturales al trabajar con conceptos físicos, a través del uso de gestos. Nuestra atención la enfocamos en analizar dos situaciones: 1) la manera en la que el uso del lenguaje gestual funciona como mediador del pensamiento y 2) cómo los gestos conllevan una carga semántica al transmitir significados. Todo en actividades llevadas a cabo en trabajo en equipo con un enfoque colaborativo.

MARCO TEÓRICO

De acuerdo a la aproximación semiótica de Vygotsky (1995), es durante el desarrollo histórico del hombre, esto es, durante su desarrollo social y cultural que funciones psicológicas tales como el pensamiento verbal, la memoria lógica, la formación de conceptos, la atención voluntaria, etc. experimentan cambios profundos. Tales funciones aparecen primero en forma primitiva, y es a través de los mediadores, es decir, del uso de herramientas y de signos psicológicos (como el lenguaje) que cambian a formas superiores. Así, los mediadores son utilizados para controlar la actividad propia y la de los demás (Kozulin, 2000). Por medio de la herramienta, el hombre influye sobre el objeto de su actividad; mientras que el signo no modifica nada en el objeto, es el medio de que se vale el hombre para influir psicológicamente, ya sea en su propia conducta o en la de los demás.

Tomando la perspectiva sociocultural de Vygotsky, podemos ver los gestos como un instrumento o signo psicológico; una herramienta (psicológica) que actúa como mediador de las funciones psicológicas superiores como el pensamiento (Kozulin, 2000). De esta manera, el gesto funciona para controlar la actividad propia e influir psicológicamente en los otros. Además, el uso de gestos no se restringe a su función de instrumento psicológico; sino que son importantes también en su función comunicativa. Así, Arzarello, Paola, Robutti y Sabena (2009) señalan que los gestos permiten alternativas de representar y organizar información cuando no se es capaz de expresar el pensamiento en forma verbal o formal. Arzarello et al. (2009) consideran a los gestos como parte de los recursos activados en el salón de clases, en donde también se encuentra el lenguaje oral,

inscripciones y otros objetos. Por lo que ven a los gestos como parte de las herramientas semióticas utilizadas por profesores y estudiantes en la práctica escolar.

Por su parte, Radford (2006) menciona que los signos no son simplemente ayudas al conocimiento, sino partes constitutivas e inherentes de éste. Por lo que se piensa con y a través de los signos, constituidos culturalmente. Es importante señalar que durante los procesos de enseñanza y aprendizaje los profesores y alumnos se posicionan dentro de una comunidad de aprendizaje y de conocimiento en relación con sus compañeros (Radford, 2014). Se presenta a continuación la metodología seguida en el estudio.

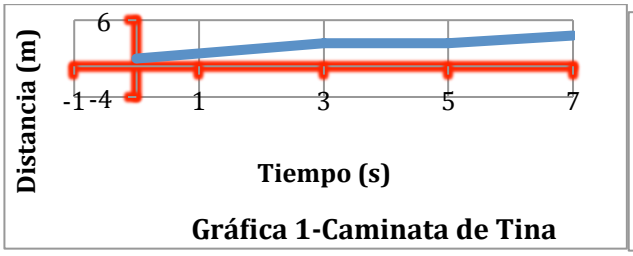
METODOLOGÍA

El lugar donde se llevó a cabo la investigación fue en un salón de clases durante la impartición de un taller para profesores de ciencias naturales (física, matemáticas, química y biología) de nivel medio superior. Participaron 12 profesores (8 mujeres y 4 hombres) quienes trabajaron en equipos constituidos por ellos mismos, de tal manera que se formaron 3 equipos (de 5, 4 y 3 integrantes respectivamente). En lo sucesivo los denominaremos Equipo 1, Equipo 2 y Equipo 3, respectivamente.

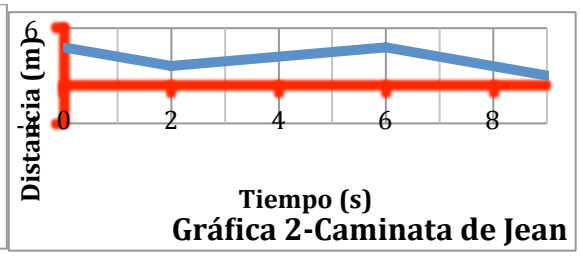
El procedimiento consistió primero en una presentación de 30 minutos sobre el carácter histórico de la matemática; para posteriormente implementar, en la hora y media restante, una serie de tres problemas elegidos por los investigadores, cuyo objetivo fue que los profesores se dieran cuenta de la relevancia del concepto de sistema de referencia como necesario para resolver los problemas, además de indagar la comprensión del mismo. Los problemas se entregaron enunciados en hojas de papel a cada profesor (un problema por hoja). Los profesores debían (en equipos) interpretar cada problema y resolverlo. Posteriormente, cuando se resolvió cada problema, se hicieron discusiones conjuntamente entre todo el grupo.

Para la recolección de datos se videograbó en todo momento la sesión de tres horas; poniendo especial atención en los gestos que empleaban los profesores para transmitir sus pensamientos y significados. Para fines del presente artículo, se seleccionó para su análisis la discusión grupal del tercer problema (tomado de Radford, 2009) al cual se realizó una traducción libre llevada a cabo por los investigadores. El problema se presentó a los profesores de la siguiente manera:

Problema 3 (tomado de Radford, 2009) Tina se encuentra a 1 m de distancia de una fuente cuando comienza a caminar. Camina en línea recta sobre el mismo camino. La gráfica 1 describe su caminata. Jean se encuentra en el mismo camino a 4 m de la fuente y comienza a caminar al mismo tiempo que Tina. La gráfica 2 describe su caminata.



Gráfica 1-Caminata de Tina



Gráfica 2-Caminata de Jean

Interpreten ambas gráficas en términos del movimiento de Tina y Jean.

La razón de la elección de este problema fue presentar un problema que en su momento se dio a resolver a estudiantes (Radford, 2009) y observar el análisis que del problema hacían ahora profesores. Se seleccionaron, de esta manera, algunos episodios de lo ocurrido durante la discusión grupal del problema 3 en la sesión para su transcripción y posterior análisis. El análisis cualitativo de los datos recabados se reporta a continuación.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Después de la resolución de los primeros dos problemas, se prosiguió a que los equipos trabajaran en el problema 3. Como ocurrió en los problemas previos, la resolución del problema 3 se dio en una atmósfera de trabajo colaborativo en equipo, en donde los profesores discutieron e interactuaron entre sí, y en donde los profesores con mayor conocimiento guiaron la discusión dentro de cada equipo, e involucrando a los demás (véase Foto 1a y Foto 1b).

Foto 1a. Momento de la resolución del Problema 3 por: el Equipo 2

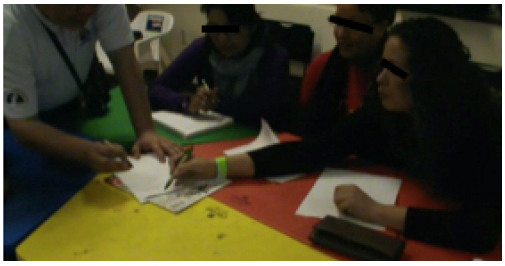


Foto 1b. Momento de la resolución del Problema 3 por: el Equipo 1

Como parte del taller y buscando, además de la interacción entre todos los profesores, la interacción entre los equipos se pasó a una discusión grupal del Problema 3. Así, un profesor (en lo sucesivo P1) del Equipo 1 comienza con el análisis de la primera gráfica (véase Gráfica 1-caminata de Tina del Problema 3). A continuación la intervención de P1.

P1: Tina estaba a un metro de distancia de la fuente y luego comienza a alejarse, se aleja hasta tres metros de la fuente y luego comienza a caminar en círculo alrededor de la fuente por eso la distancia permanece constante [*refiriéndose al intervalo de tiempo (3,5) de la Gráfica 1*] y luego vuelve a alejarse.

El profesor P1 ubica a la fuente como origen del sistema de referencia. No necesita hacer explícita la orientación elegida (el mismo problema no hace referencia hacia qué dirección de la fuente camina Tina, si izquierda o derecha); sin embargo hace una *generalización* del concepto de sistema de referencia al decir: “y luego comienza a alejarse”. De hecho, el concepto de movimiento con dirección (alejarse) respecto del origen del sistema de referencia lo emplea en tres ocasiones. Llama la atención que P1 considera que tina permanece en movimiento en todo momento, lo que da pie a que se desarrolle una discusión con profesores de los demás equipos; en particular con P2 (profesor del Equipo 3), P3 (profesora del Equipo 1) y P4 (profesora del Equipo 3):

P2: No, realmente no se mueve. Pasa el tiempo [*refiriéndose a los dos segundos que van del segundo 3 al segundo 5 de la Gráfica 1*] y permanece en la misma distancia [*refiriéndose a que Tina se queda a tres metros de la fuente*].

P3: ¿No se mueve? [*refiriéndose a Tina*].

P2: Sí, se queda parada.

P4: Es que si como dicen se moviera alrededor de la fuente quiere decir que regresó, ¿no?.

[…]

P1: Es que no dice [*refiriéndose al Problema 3*] que se detiene.

Lo que transcurre en el intervalo de tiempo (1,3) de la Gráfica 1 del Problema 3 genera por un lado diferentes lecturas del problema y por el otro lado diferentes relaciones de los conceptos en la gráfica. Así, para el Equipo 1 en el enunciado del Problema 3 es claro que Tina no se detiene en ningún momento y determina la manera en que analizan la Gráfica 1. No se dan cuenta que el enunciado dice "camina en línea recta" por lo que no puede caminar en círculo. Los otros profesores, en particular P2, ponen su atención en la Gráfica 1 y en las relaciones entre las variables tiempo y distancia (respecto de la fuente) y no vuelven a hacer referencia al enunciado del problema. P1 vuelve a intervenir con una inmediata respuesta de P5 (profesor del Equipo 2):

P1: Puede seguir caminando [*refiriéndose a Tina*] y no alejarse de la fuente.

P5: Lo que pasa es que si camina [*refiriéndose a Tina*] alrededor aunque sea muy pequeña de todas maneras se está desplazando hacia delante y hacia atrás. […]. Una posibilidad sería que estuviera ella [*Tina*] girando sobre sí misma [*al mismo tiempo que hace un gesto; véase Foto 2a*]. […] hay otra posibilidad, que se mueva verticalmente [*hace un nuevo gesto; véase Foto 2b*].

Foto 2a. Momento en que P5 usa gestos para representar el movimiento de Tina en dos momentos: cuando gira sobre ella misma

Foto 2b. Momento en que P5 usa gestos para representar el movimiento de Tina en dos momentos: cuando salta

A partir de la intervención de P5, se observa el uso de gestos, que los utiliza para transmitir su pensamiento y momentos después para desarrollar otra idea, cuando dice: "hay otra posibilidad…". Se observa además, que los gestos llevan una carga semiótica al ser portadores de significados. Los dos gestos representan movimientos diferentes de un mismo objeto (Tina en este caso). En un primer momento (véase Foto 2a), el gesto hace referencia a un movimiento rotacional (mano derecha) del fenómeno sobre un lugar en el espacio (mano izquierda). Después (véase Foto 2b), P5 hace referencia a un movimiento traslacional (mano derecha) sobre el mismo lugar en el espacio que el movimiento anterior; aunque se trata de un movimiento traslacional en donde el objeto cambia de posición, P5 hace énfasis en que el movimiento es "vertical" lo que no altera la manera en que se analiza la gráfica desde un punto de referencia. En cambio el movimiento

traslacional al que hace referencia P1 cuando dice: “Puede seguir caminando y no alejarse de la fuente” es uno horizontal, que como le hace ver P5 cambiaría el tipo de gráfica obtenida.

Después de unos segundos, se les pregunta a los tres equipos qué concluyeron sobre la Gráfica 2 del Problema 3. En particular sobre lo que representa el último punto (pareja ordenada (9,1)) de la Gráfica 2. Se obtuvo el siguiente diálogo:

P3: Que regresó al lugar donde estaba Tina, pero en nueve segundos.

P2: Ya no la encontró y...[*es interrumpido por P4*].

P4: Fue a buscar a Tina pero ya no la encontró porque Tina ya estaba allá [*Hace un gesto; véase Foto 3*].

Foto 3. Momento en que P4 utiliza un gesto para representar la posición de Tina después de 9 segundos.

Aquí se observa cómo los profesores vinculan las caminatas de los dos personajes del problema, es decir, relacionan las dos gráficas. En particular P3 dice: “Que regresó al lugar donde estaba Tina…”. No hace referencia a que con la información de la gráfica, Jean (personaje del Problema 3) en nueve segundos se encuentra a una distancia de un metro de la fuente, sino hace referencia al movimiento y en particular a la posición del otro personaje (Tina) en esos nueve segundos. Entonces con un gesto (véase Foto 3), P4 argumenta en dónde se encuentra Tina en esos nueve segundos, sin percatarse que el tiempo de análisis de la caminata de Tina es de solamente de siete segundos; por lo que no se tiene información del lugar de Tina en nueve segundos.

Con el objetivo que los profesores determinen si hay algún momento de encuentro y retomando la idea planteada por ellos sobre el no encuentro de los personajes del Problema 3, los investigadores les recuerdan que Tina y Jean están en el mismo camino. Y surge el siguiente diálogo:

P4: ¿Y se encuentran? [*refiriéndose a Tina y Jean*], ¿hay un momento en que se encuentran?

Investigador 1: Eso sería interesante, ¿hay un momento en que se encuentran?

P4: ¡Compañero! [*dirigiéndose a P2*], ¿hay un momento que se encuentran? [*P2 dice: “Sí” y hace un gesto utilizando las gráficas; Foto 4 (derecha). Al mismo tiempo P4 continúa*] o ¿se acercan?, o sea de que no se encuentren pero… [*Hace un gesto con las manos; Foto 4 (izquierda)*] […] Puede ser que sí se acerquen.

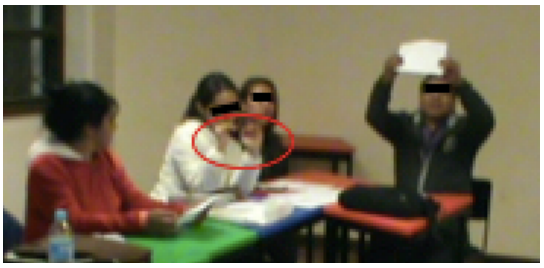


Foto 4. Momento en que P4 y P2 utilizan gestos como mediadores durante la discusión del Problema 3.

Los profesores P4 y P2 utilizan gestos con intenciones diferentes. La profesora P4 hace un gesto tratando de representar el movimiento de Tina y Jean; en donde moviéndose en dirección contraria uno del otro se aproximarían pero sin encontrarse. Mientras que P2 toma las gráficas de los movimientos de los personajes y las junta para determinar los puntos de intersección, lo que determina el punto de encuentro entre los personajes. El diálogo continúa:

Investigador 1: ¿Cuándo es cuando se encuentran?

P2: Hay tres momentos [*muestra las hojas a P4; véase Foto 5a*].

[…]

P4: Puede ser que sí [*refiriéndose a que Tina y Jean se encuentran*].

Investigador 1: ¿Cómo sabríamos eso?

P4: Sobreponemos las …[*hace un gesto con las manos; véase Foto 5b (izquierda). Al mismo tiempo P2 hace un gesto con las hojas; véase Foto 5b (derecha)*].

Foto 5. Momento en que P2 comparte con P4 cómo poder ubicar el punto de encuentro entre Tina y Jean

Foto 5. Momento en que P4 como P2 transmiten al resto del grupo cómo poder determinar el punto de encuentro entre los personajes.

Para tratar de encontrar el punto (o puntos) de encuentro entre Tina y Jean, primero P2 le muestra a P4 cómo poder determinarlos. Al colocar juntas las gráficas, P4 se da cuenta de que los puntos de intersección entre ellas representan los lugares en donde los personajes se encuentran. Esta manera de dar solución a la pregunta planteada la transmiten al resto de los profesores.

CONCLUSIONES

Se observó que a partir de una reflexión y discusión grupal los profesores utilizaron gestos como principal herramienta para transmitir sus pensamientos y conocimiento. Los gestos fueron utilizados por los profesores para intercambiar ideas [pensamiento] funcionando como medio de comunicación y también los propios gestos llevaron un contenido semiótico. De tal manera que transmitieron significados. Se observó que la evolución de los gestos va a la par de la evolución del pensamiento.

Los gestos utilizados por los profesores funcionaron como herramienta y también como transmisores de significados físicos (posición, distancia y movimiento). Observando que los profesores con mayor conocimiento utilizaban gestos más elaborados.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O. & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 97-109.

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidos.

Kozulin, A., (2000). *Instrumentos Psicológicos*. Barcelona: Paidós.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(4), 103-129.

Radford, L. (2009). “No! He starts walking backwards!”: Interpreting motion graphs and the question of space, place and distance. *ZDM Mathematics Education*, 467-480.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132-150.

Vygotsky, L. (1995). *Pensamiento y lenguaje*. España: Paidos.

Vygotsky, L. S. (2009). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica.

ESTUDIO DE UN DISEÑO CURRICULAR PARA EL PROFESORADO DE EDUCACION SECUNDARIA EN MATEMATICA

Patricia M. Konic, Darío O. Reynoso
Universidad Nacional de Río Cuarto (Argentina), Universidad Nacional de Cuyo (Argentina)
Dirección electrónica: pkonic@gmail.com, reynosodariooscar@gmail.com

Palabras clave: diseño curricular, profesor, número decimal.

Key words: curriculum design, teacher, decimal number.t

RESUMEN: En este trabajo planteamos el análisis del significado pretendido por los lineamientos curriculares para formación de profesores, en la provincia de Mendoza, en el contenido números y expresiones decimales. Se adoptó como metodología los indicadores de idoneidad para programas de formación docente propuestos por Godino, Batanero, Rivas y Arteaga (2013). En particular, tratamos la idoneidad epistémica y cognitiva valorando el grado de representatividad del significado institucional pretendido por el diseño curricular, respecto del significado de referencia y los significados personales de manifestados por los estudiantes. Si bien encontramos rasgos genéricos que contemplan aspectos esenciales tanto para la idoneidad epistémica como cognitiva, el grado de generalidad impide garantizar que se hallen presentes en cada espacio curricular y de manera articulada.

ABSTRACT: In this paper we propose the analysis of the meaning intended by the curriculum guidelines for teacher training in the province of Mendoza, in the numbers and decimals expressions content. Suitability indicators for teacher education programs proposed by Godino, Batanero, Arteaga and Rivas (2013) were adopted as a methodology. In particular, we try the epistemic and cognitive fitness assessing the degree of representativeness of institutional meaning intended by the curriculum design, the reference to the meaning and personal meanings expressed by the students. While generic traits are essential aspects that include both epistemic and cognitive suitability the degree of generality prevents ensure that are present in each curricular area and articulately.

INTRODUCCIÓN

Sabido es que el diseño curricular posee distintos niveles de concreción implementados por los distintos "actores" del sistema educativo. Los diseños curriculares provinciales son quienes establecen líneas generales de acción, las instituciones elaboran proyectos propios de su nivel y luego son los docentes quienes diseñan planificaciones que pretenden implementaciones de aula. Seria esperable que dicho proceso de sucesivas especificaciones del diseño curricular fueran guiadas por resultados de investigación tanto generales como de las didácticas propias de una disciplina.

También es evidente que los resultados de investigación didáctica de contenidos específicos, en nuestro caso particular, la enseñanza y aprendizaje de las expresiones y números decimales, no están siempre disponibles o al alcance de cada profesor que elabora, gestiona y evalúa sus clases sobre tal temática. Aun para los profesores que conocen las orientaciones teóricas y principios que rigen el diseño, poner a funcionar dichos lineamientos en temas concretos no es usualmente tarea fácil. El margen posible para las decisiones de acción profesional si bien otorga flexibilidad en la toma de decisiones, torna aún más compleja la tarea profesional del profesor.

En relación a lo expuesto, disponer de algunas orientaciones didáctico-matemáticas para los docentes que les permita hacer "operativa" y "alcanzable" la tarea de interpretar, analizar y evaluar diseños curriculares entendemos es un recurso útil que puede colaborar en su tarea profesional.

ANALISIS DE UN DISEÑO CURRICULAR

El contexto

El presente trabajo forma parte del primero de tres estudios planteados en un proyecto de tesis doctoral. En dicho proyecto se pretende evaluar el tipo de conocimiento que poseen los futuros profesores en Institutos de Nivel Terciario dependientes de la Dirección General de Escuelas de la Provincia de Mendoza sobre un bloque temático específico de la matemática escolar: *expresiones y números decimales*, atendiendo a las dificultades que acarrea la enseñanza y aprendizaje de estos objetos matemáticos en los distintos niveles educativos.

El objetivo general del proyecto es aportar nuevos conocimientos y posibles recursos metodológicos para el diagnóstico (Hill, Ball, Schilling, 2008) y posterior mejora de la formación didáctico-matemática de profesores de educación media, teniendo en cuenta el contexto educativo argentino y en particular los lineamientos curriculares de la provincia de Mendoza.

Para ello nos proponemos desarrollar nuevos instrumentos a partir de la revisión, adecuación y ampliación del instrumento de evaluación elaborado por Konic (2011). Tal se como se anticipó, para el desarrollo de la investigación se han planteado tres estudios. El primer estudio refiere a *significados institucionales,* esto es*,* el significado compartido por un conjunto de personas vinculadas a una misma clase de situaciones problemáticas.

Es así que se plantea la reconstrucción de un significado institucional de referencia y la caracterización de significados pretendidos para la enseñanza de expresiones y números decimales. En particular el significado pretendido por los Lineamientos Curriculares para Formación de Profesores de Matemática (Dirección General de Escuelas (DGE), 2011).

El Diseño, Objetivos, Marco Teórico y Metodología

En un plan de formación subyacen características propias de un modelo de sistema educativo. Consideramos necesario hacer explicitas esas condiciones y características dado que se trata de un recurso que orienta el proceso formativo de los profesores formadores de futuros formadores.

En nuestro caso particular, interesa analizar que conocimiento didáctico-matemático se plantea en el diseño en cuanto a números y en especial, en torno al controvertido tópico expresiones y números decimales (Konic, 2013). Para realizar el análisis hemos adoptado como metodología los indicadores de idoneidad para programas de formación docente propuestos por Godino, Batanero, Rivas y Arteaga (2013). En dicha propuesta se definen indicadores para la *idoneidad epistémica*, esto es, para analizar conocimientos institucionales sobre la enseñanza-aprendizaje de la matemática (contenido matemático, contenido ecológico, contenido cognitivo, contenido afectivo, contenido interaccional y contenido mediacional). También se describen algunos indicadores para la idoneidad de otras facetas (*cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica)*. En este trabajo abordaremos la idoneidad epistémica y cognitiva. Esto implica valorar, desde la dimensión epistémica, el grado de representatividad del significado institucional pretendido por el Diseño Curricular, respecto del significado de referencia construido para el contenido números y expresiones decimales. Desde la dimensión cognitiva valorar el grado en que los significados pretendidos pretenden estar en la zona de desarrollo potencial de los alumnos a los que se destina, así como la proximidad de los significados personales a lograr respecto a los significados pretendidos (Godino et al, 2013).

El análisis

A continuación se presenta en las siguientes tablas los componentes y descriptores adecuados a nuestro tema de interés y los indicadores extraídos de los lineamientos curriculares que dan cuenta de los mencionados descriptores.

Tabla 1. idoneidad epistémica del diseño curricular

COMPONENTES	DESCRIPTORES	INDICADOR(ES)
Situaciones-problemas	El diseño propone seleccionar muestras representativas y articuladas de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación.	"En términos generales, es muy recomendable promover el aprendizaje activo y significativo de los/as estudiantes, a través de estudio de casos, análisis de tendencias, discusión de lecturas, resolución de problemas, producción de informes orales y escritos, trabajo en bibliotecas y con herramientas informáticas, contrastación y debate de posiciones, elaboración de portafolios (trabajos seleccionados deliberadamente con un propósito determinado –un dossier-), entre otros. Los dispositivos pedagógicos de formación deberán ser revisados y renovados

		críticamente" (DGE, 2011, p. 24). "La resolución de problemas en la clase de matemática según las diferentes propuestas didácticas" (DGE, 2011, p.62)
	El diseño propone la generación de problemas (problematización).	"Analizar en diferentes campos numéricos la existencia y número de soluciones de situaciones problemáticas propuestas" (DGE, 2011,p.67)
	El diseño propicia el uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico...), traducciones y conversiones entre los mismos.	"El lenguaje matemático en el aula: los problemas lingüísticos" (DGE, 2011, p.61).
Lenguaje	El diseño pide el uso de niveles de lenguaje adecuado a quienes se dirige.	"El lenguaje matemático en el aula: los problemas lingüísticos" (DGE, 2011, p.61).
	El diseño sugiere proponer situaciones de expresión e interpretación.	"El lenguaje matemático en el aula: los problemas lingüísticos" (DGE, 2011, p.61)
Elementos regulativos (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	El diseño persigue que se usen definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen.	"Reconocer y comprender el concepto de número real, logrando la distinción entre éste y el número racional"(DGE, 2011,p.46).
	El diseño indica la presentación de los enunciados y procedimientos fundamentales del tema según el significado de referencia y el nivel educativo.	"Formalizar definiciones y teoremas e interpretar los resultados con ellos obtenidos" (DGE, 2011,p. 47).
	El diseño propone el uso de situaciones para la generación y negociación de las reglas.	No se identifica presencia de este indicador.
Argumentos	El diseño prevé la adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen	No se identifica presencia de este indicador.
	El diseño busca que se promuevan momentos de validación.	"En particular en el caso de la formación de los/as docentes, es necesario fomentar el juicio metódico en el análisis de casos y la transferibilidad de los conocimientos a la acción" (DGE, 2011,p. 25) (En "Seguimiento y evaluación de los aprendizajes en las distintas unidades curriculares" (DGE, 2011,p.25)
Relaciones (conexiones, significados)	El diseño presenta relación y articulación significativa de los objetos matemáticos a poner en juego (situaciones, lenguaje, reglas, argumentos) y las distintas configuraciones propuestas para su organización.	"Comparar y contrastar el conjunto de los números reales y sus diversos subconjuntos respecto a sus características estructurales" (DGE, 2011, p. 67)

Tabla 2. Idoneidad cognitiva del diseño curricular

COMPONENTES	DESCRIPTORES	INDICADOR/ES
Conocimientos previos	El diseño evalúa que los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (ya sea porque supone que se han estudiado anteriormente o que el profesor planifica su estudio).	No se identifica presencia de este indicador.
	Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.	No se identifica presencia de este indicador.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	El diseño propone incluir actividades de ampliación y de refuerzo.	"….esta unidad será definida por las Instituciones Formadoras según las demandas características de su contexto y las necesidades relevadas por las mismas" (DGE, 2011, p.81).
Aprendizaje	Los modos de evaluación propiciados por el diseño pretenden dar cuenta de la apropiación de los conocimientos/competencias pretendidas.	"La diversidad de formatos de las unidades curriculares se corresponde con una diversidad de propuestas de evaluación. No se puede ni debe evaluar del mismo modo en todas las unidades curriculares del plan de estudios. No es lo mismo evaluar la comprensión de materias o asignaturas que evaluar los progresos en talleres, seminarios, módulos independientes u optativos o prácticas docentes. (DGE, 2011, p.24).

DISCUSIÓN

A partir de la descripción expresada en las Tabla 1 y Tabla 2, hemos encontrado que en la componente *situaciones-problemas*, el diseño propone una variada muestra de tareas, desde resolución de problemas, hasta elaboración de portafolios, pasando por análisis de tendencias, discusión de lecturas, producción de informes. Concretamente en lo que refiere a la matemática se promueve la resolución de problemas en la clase de matemática desde diferentes propuestas didácticas. Se solicita también analizar la existencia y número de soluciones de situaciones problemáticas propuestas. Ello en términos de rigor matemático analítico más que en términos de problematización. Cuando se hace alusión a *lenguaje* matemático en el aula, se prescribe de manera taxativa "los problemas lingüísticos", sin hacer referencia explícita a ello. En relación a los *elementos regulativos* se plantea como expectativa de logro, reconocer y comprender el concepto de número real poniendo énfasis en la distinción con el número racional. También que se formalicen definiciones y teoremas e "interpretar los resultados con ellos obtenidos" (DGE, 2011, p. 47), de esta afirmación no se deduce que los enunciados y procedimientos pretendidos provengan de un significado referencial que permita hacer una selección acorde al nivel educativo. En cuanto

a la *validación de argumentos* solo se prevé fomentar, en los futuros profesores, el juicio metódico en el análisis de casos y la transferibilidad de los conocimientos a la acción. En lo que refiere a *conexiones y significados*, es decir una articulación significativa de los objetos matemáticos, en la asignatura Algebra 3, se habla de comparar y contrastar el conjunto de los números reales y sus diversos subconjuntos en cuanto a sus características estructurales.

En cuanto a la idoneidad cognitiva, no se observan indicadores específicos que aludan a conocimientos previos. En relación a la posibilidad de prever adaptaciones curriculares el diseño deja, en términos amplios, la posibilidad y responsabilidad a las Instituciones educativas tomar en cuenta el contexto a través de demandas y necesidades.

Cuando se hace referencia a la evaluación las directrices nuevamente son amplias, flexible y de gran generalidad. Explícitamente se advierte tomar en consideración las diferencias que implica evaluar espacios curriculares de distinta naturaleza tales como asignaturas, seminarios, talleres, prácticas docentes, etc.

CONCLUSIONES

Como reflexión final, inferimos en los lineamientos curriculares rasgos genéricos que contemplan aspectos esenciales para la idoneidad epistémica, aunque dicho grado de generalidad impide garantizar que efectivamente esto se halle presente en cada espacio curricular, de manera articulada y que así sea interpretada por los formadores de futuros profesores. Se observa para cada indicador distancia en cuanto al nivel de concreción con que se solicita. Se plantea un nivel muy general, cuando se trata de aspectos tradicionalmente tratados como “pedagógicos” y/o “didácticos” y de gran especificidad cuando se trata de “matemática”.

En lo que refiere a la idoneidad cognitiva resultó sorprendente las escasas orientaciones destinadas a esta dimensión. Del mismo modo que en la dimensión epistémicas las indicaciones encontradas asumen un carácter generalista.

De lo analizado podemos inferir como primeras cuestiones que pueda resultar complejo para el docente generar trayectorias didácticas que respeten el espíritu de los lineamientos curriculares, dado que no encontramos varios indicadores que según el marco teórico utilizado colaborarían en la comprensión de aspectos relevantes para la generación de un proyecto de enseñanza y aprendizaje. Nuestro propósito es, una vez estudiadas todas las dimensiones mencionadas en el marco teórico, complementar este estudio con instrumentos de indagación que permitan profundizar y complementar estas conclusiones a los fines de incidir a futuro en la indicación de propuestas superadoras.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Dirección General de Escuelas (2011). *Diseño Curricular de la Provincia de Mendoza. Profesorado de Educación Secundaria en Matemática*. Mendoza: Dirección de Educación Superior

Godino, J. D., Batanero, C., Rivas, H. y Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *Revista Electrónica de Educación Matemática, 8*(1), 46-74.

Hill, H., Ball, D. & Schilling, G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge:conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education,* 39(4), 372-400.

Konic, P. (2011). *Evaluación de conocimientos de futuros profesores para la enseñanza de los números decimales*. Granada: Editorial de la Universidad de Granada.

Konic, P. (2013). Factores condicionantes del conocimiento para enseñar: el caso de los números decimales. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 26, p. 625-634. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

LOS PROFESORES DE MATEMÁTICA EN FORMACIÓN EN URUGUAY: UN ANÁLISIS DE LAS INTERACCIONES EN LA CLASE DE SU PRÁCTICA DOCENTE

Javier Lezama Andalón, Mónica Olave Baggi, Daniela Pagés
CICATA-IPN (México), Consejo de Formación en Educación (Uruguay)
jlezamaipn@gmail.com, monicaolave23@gmail.com, danielapages@gmail.com

Palabras clave: estudiantes de profesorado, práctica docente, interacciones, patrones

Key words: student teachers, teacher training, interactions, patterns

RESUMEN: Se presenta una investigación que analiza las dificultades de algunos estudiantes de Profesorado público de Matemática de Uruguay, en su rol de profesores en el último curso de la Práctica Docente. Estas dificultades radican en la planificación y puesta en práctica de la clase, y parecen mostrar un desencuentro entre los aspectos teóricos que se trabajan en los cursos de Didáctica, y los elementos que toman en cuenta los estudiantes en sus clases. Se tomó como marco teórico la aproximación interaccionista en Educación Matemática. Según esta, toda tarea planteada en la clase de matemática encierra cierta ambigüedad, y por tanto produce una interpretación y negociación de significado, la que se realiza a través de las interacciones de la clase. Se analizaron las interacciones que el profesor y los estudiantes estructuran entre sí, a partir de cuatro clases videograbadas de cada uno de tres estudiantes de Profesorado de Matemática.

ABSTRACT: This is the report of an investigation, which analyses the difficulties of some math student teachers in Uruguay, when they have the role of teachers in their teacher training. These difficulties are mainly in the planning and acting of the class, and the students seem to show a kind of disagreement between the theory of the Education Mathematics classes they have, and the elements the student teachers consider in their classes. We used the interactionist approach in Mathematics Education as our theoretical framework. According to it, each task in the mathematics class has some ambiguity, and then an interpretation and meaning negotiation occurs, produced through the class interaction. Interactions between the student teachers and the pupils were analysed in four videotaped classes of each of three students.

INTRODUCCIÓN

Se presenta una investigación que analiza una problemática vinculada a la formación de profesores de matemática en Uruguay. La formación docente pública en Uruguay es de carácter terciario, no universitario y tiene una duración de cuatro años. Se estructura con base en tres pilares: la formación en las ciencias de la educación, la formación técnico-disciplinar y la formación en didáctica específica.

El tercer pilar se compone de las asignaturas: Introducción a la Didáctica, Unidad Didáctica-Práctica Docente I, II y III, Análisis del Discurso Matemático Escolar e Historia de la Matemática.

En todos los cursos donde el estudiante realiza práctica docente en un liceo de Enseñanza Secundaria, el profesor de Didáctica visita al estudiante en las clases que tiene que dictar, y luego de observarlas, discute con el estudiante y el profesor adscriptor (o solo con el estudiante en el último año) acerca de la misma, en el marco del curso teórico.

En oportunidad de dichas visitas observamos muchas veces que estudiantes con buenos desempeños en el curso teórico de la Unidad Didáctica Práctica Docente, parecen no tomar en cuenta los elementos que estos les aportan para organizar y desarrollar sus clases. Aún en el caso de planificar atendiendo a los aportes de metodologías de enseñanza alternativas, y a las recomendaciones acerca de la enseñanza de determinado tópico, que emergen de las investigaciones en el campo de la ME, en la clase se posicionan de manera "tradicional". La forma en que desarrollan la discusión de los problemas, el tipo de preguntas que realizan a los estudiantes, el modo en que presentan un conocimiento en clase y cómo lo hacen evolucionar, no permiten la reflexión, discusión conjunta, y el desarrollo de un pensamiento matemático enriquecido en los estudiantes a los que les dan clase. Daría la impresión de que tampoco toman en cuenta los diferentes abordajes y modos de pensamiento que los estudiantes tienen. Parecería que los conocimientos que los Estudiantes de Profesorado de Matemática (en adelante EPM) deberían construir en los cursos teóricos de Didáctica, no les servirían de insumos a la hora de planificar y llevar adelante clases, es decir, que no habrían establecido un vínculo entre las dos componentes de los cursos de Didáctica de la Matemática del profesorado (curso teórico de Didáctica y práctica docente).

Para abordar el análisis de esta problemática, se atendieron las interacciones que el EPM realiza y promueve al ejercer el rol docente, en su práctica docente con un grupo a cargo, en el último curso de Didáctica de la carrera de profesorado.

Los objetivos planteados en esta investigación fueron:

- Analizar las interacciones que los EPM llevan adelante con sus alumnos, en la práctica docente.
- Describir, a partir del análisis de dichas interacciones, qué patrones de interacción se establecen entre los EPM y sus alumnos.

La pregunta de investigación formulada fue la siguiente: ¿Qué patrón de interacción predomina en las clases de cada EPM?

DESARROLLO

El marco teórico

Como marco teórico se utilizó la aproximación interaccionista en Educación Matemática. La misma se basa en la microsociología, y está influenciada particularmente por el interaccionismo simbólico (Blumer, 1969; Mead, 1934, citados por Voigt, 1995, p. 166) y por la etnometodología (Garfinkel, 1967; Mehan, 1979, citados por Voigt, 1995, p. 166).

Bauersfeld, Krummheuer y Voigt (1988, citado por Voigt, 1995, p. 166) adaptaron los conceptos del interaccionismo a la Educación Matemática. Esta aproximación en la investigación sobre el desarrollo cognitivo, considera que la evolución del conocimiento matemático, así como sus fuentes, tienen una gran influencia sociocultural (Sierpinska y Lerman, 1996, p. 13). Se parte de considerar a la matemática como resultado de los procesos sociales (Lakatos, 1976; Wittgenstein, 1967, citados por Voigt, 1995, p.165), y no como un conjunto de relaciones verdaderas, objetivas e inmutables entre objetos, como lo establecen las teorías platónicas o intuicionistas.

Los investigadores que siguen la aproximación interaccionista consideran que todo lo tratado en la clase de matemática es ambiguo, y por tanto está sujeto a la interpretación de cada participante. Esto contradice la creencia popular de que los objetos de la matemática (y de la clase) tienen un significado único e inmutable, por tanto el mismo para todos los participantes de la cultura.

El sujeto construye activamente el significado y las relaciones que le permiten aprender, a través de las situaciones sociales de interacción y negociación. Mediante ellas, y partiendo de sus conocimientos de base, da sentido a los objetos y establece un contexto a partir del que realiza una interpretación. Este proceso le permite al individuo construir conocimiento socialmente compartido y desarrollar estructuras subjetivas para ese conocimiento. Los autores enfatizan en la construcción de la intersubjetividad a través de estos procesos, la que es específica del contexto y la situación. (Bauersfeld et al., 1985, Voigt, 1995).

Así, tiene gran importancia la interpretación de los eventos de la clase, que realizan los participantes (en este caso el EPM y sus alumnos) en base a sus ideas subjetivas de cómo la clase debe funcionar, así como acerca del tema que se está tratando (patrones de experiencia).

Lo esencial para la aproximación interaccionista no es tanto que el docente y los estudiantes “compartan conocimiento”, sino que a través de la negociación, constituyan conocimiento que pueda tomarse por compartido (Voigt, 1995, p. 172).

Un significado que se toma por compartido no es un elemento cognitivo, sino que existe en el nivel de la interacción. (Voigt, 1998). Para producir estos significados matemáticos es fundamental el proceso de negociación.

En este trabajo distinguiremos entre la microcultura tradicional, y la microcultura investigativa, que se describen en el marco teórico.

Wood (1994) en particular, diferencia estos dos tipos de clase, tomando el punto de vista de que los significados se negocian en las interacciones de la clase, y usando como criterio la función que cumplen las preguntas del docente. En las clases llamadas tradicionales, la negociación de significado solo consiste en que los estudiantes aprendan lo que el docente ya sabe. En estas clases, el profesor realiza preguntas para evaluar si el estudiante conoce la respuesta que él espera, para dirigir a los estudiantes hacia un método o una solución oficialmente aceptados, o

para redirigir si hay respuestas divergentes. Se ha observado en las clases analizadas, que muchas veces la intención es acentuar el desequilibrio de poder que existe. En las clases investigativas, se revela una relación más igualitaria entre el docente y los estudiantes. Las preguntas se realizan para sugerir nuevos aspectos que los estudiantes no han considerado antes, para incluir a los que no han respondido y procurar que comprendan, para conocer lo que el estudiante está pensando, para promover que reflexione sobre su propio pensamiento.

Otra diferencia que plantean los autores entre los dos tipos de microculturas de clase, es la responsabilidad que asumen los estudiantes acerca de las respuestas que dan y de las resoluciones de los problemas. En las clases tradicionales los estudiantes pueden participar aunque no se involucren en un pensamiento matemático. Alcanza con que tengan el comportamiento adecuado siguiendo las acciones del profesor. En cambio, en las clases investigativas, los estudiantes se responsabilizan por sus respuestas, ya que deben argumentar las mismas.

Los patrones de interacción

Un *patrón de interacción* es una estructura de interacción cara a cara entre dos o más sujetos, tal que:

- sirve para reconstruir una regularidad específica de interacción focalizada en un tema,
- refiere a acciones concertadas, interpretaciones y mutuas percepciones de al menos dos participantes, y no es la suma de sus acciones individuales,
- la estructura no es explicable por un conjunto de reglas,
- los participantes en esa estructura la generan de manera inconsciente y sin un propósito estratégico, la constituyen rutinariamente. (Voigt, 1985).

El autor describe dos patrones contrapuestos: el extractivo (elicitation) y el de discusión. En tanto Wood (1994) diferencia los patrones de embudo (funnel) y de focalización. A continuación se presenta un cuadro donde se ensamblan estos cuatro patrones, a partir de sus características y su momento de aparición en episodios de una clase.

<table>
<tr><td colspan="2">Patrón extractivo
Fase 1
El docente presenta una tarea (pregunta o problema), los estudiantes plantean respuestas, el docente las evalúa preliminarmente (correctas, incorrectas, útiles, etc.). Esto sigue hasta que el docente encuentra una respuesta útil a sus objetivos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fase 2
Desarrollo guiado de la solución definitiva. El docente, a través de pistas, gestos, nuevas preguntas, va guiando las respuestas de los estudiantes.</td></tr>
<tr><td>Fase 3
El docente realiza una evaluación del método empleado y del resultado obtenido, y se reflexiona sobre el contexto. Esta fase no siempre se da.</td><td>Patrón de embudo (funnel)

Los estudiantes no logran responder lo esperado por el docente, entonces este interviene de forma más directa, con preguntas que van reduciendo el campo de acción del estudiante, y le van señalando la respuesta esperada.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Patrón de discusión	
Fase 1 El docente propone una tarea, preferentemente para hacer en grupos, pero puede ser individual.	
Fase 2 El docente pide a los estudiantes que expongan lo que hicieron, y lo justifiquen.	
Fase 3 Un estudiante (o varios) da su solución, explicando.	
Fase 4 (Puede mezclarse con la 3) El profesor realiza preguntas, comentarios para enfatizar, o para aclarar o profundizar. Pregunta por otras resoluciones.	**Patrón de focalización** Las preguntas del docente tienen como objetivo focalizar la atención de los estudiantes en algún aspecto del problema, que es crucial para el significado que el docente quiere promover, o que no han tenido en cuenta en la resolución.
Fase 5 Otros estudiantes explican su solución.	

METODOLOGÍA

Para determinar el patrón de interacción predominante en las clases de cada EPM, se observaron cuatro clases de cada uno de los tres EPM que participaron del trabajo. Estas fueron videograbadas y posteriormente transcriptas. Se elaboró un protocolo de observación de clases, a partir de la tabla anterior y la determinación de criterios de clasificación (ver Anexo).

La información acerca de cuál es el patrón de interacción predominante en la práctica de cada EPM participante, y la caracterización del tipo de clase que desarrollan, se utilizó para inferir si los EPM asumen los lineamientos que se plantean en los cursos de Didáctica, o existe un cierto divorcio entre la teoría (ME) y su práctica docente.

RESULTADOS

En esta presentación se describirá el patrón predominante de cada uno de los EPM, a partir del análisis de las interacciones desarrolladas en sus clases con sus alumnos.

En el caso del EPM1, concluimos que establece con sus estudiantes, de forma predominante, el patrón extractivo. El mismo se transforma en patrón de embudo en aquellos casos en que se quiere definir un concepto y los alumnos no aciertan con la forma que el EPM1 espera.

En relación al EPM2, en el planteo inicial intenta un trabajo hacia el desarrollo de una clase investigativa, lo que se aprecia en el hecho de anteponer las actividades al tratamiento teórico de los conceptos. Pero desarrolla con sus alumnos el patrón extractivo en algunos casos en que no recibe la respuesta esperada, y también el patrón de embudo.

En el caso del EPM3, observamos que tiene, en las interacciones con sus alumnos, una intención dialógica, y realiza esfuerzos por interpretar el pensamiento que los lleva a respuestas erróneas y hasta divergentes. Sin embargo, cuando el EPM3 tiene que institucionalizar con los alumnos el resultado al que han llegado, y darle forma de resultado matemático, no puede conciliar su intención de que ellos expresen las relaciones que han encontrado, porque pretende que utilicen el vocabulario propio del enunciado “oficial” de dicha proposición. Cuando el EPM3 va en busca de un resultado disciplinar formal, la clase se vuelve más tradicional, y se configura el patrón extractivo.

A partir de los resultados de este trabajo, se plantean y discuten posibles líneas de acción en la formación de los docentes, que permitan hacer consciente la configuración de estos patrones en la clase, y las consecuencias en cuanto a los significados que se negocian en la clase, cuando los mismos se vuelven estereotipados.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adda, J. (1987). *Elementos de didáctica de las matemáticas*. Sección de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.

Cobb, P.; Bauersfeld, H. (eds.) (1995). *The emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Bauersfeld, H.; Krummheuer, G. y Voigt, J. (1985). Interactional Theory of Learning and Teaching Mathematics and Related Microetnographical Studies. En H_G. Steiner: *Proceedings of the TME 1985*. Bielefeld: IDM.

Cobb, P.; Bauersfeld, H. (1995). The Coordination of Psychological and Sociological Perspectives in Mathematics Education. En H. Bauersfeld; P. Cobb, (eds.). *The emergence of MathematicalMeaning: Interaction in Classroom Cultures.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P.; Wood, T. y Yackel, E. (1993). Discourse, Mathematical Thinking and Classroom Practice. En E. Forman, N. Minick, y C. Stone, (Eds). *Contexts for Learning Sociocultural Dynamics in Children's Development.* New York: Oxford University Press.

Consejo de Formación en Educación. http://www.cfe.edu.uy/index.php/planes-y-programas/planes-vigentes-para-profesorado/44-planes-y-programas/profesorado-2008/380-matematica, recuperadoen febrero de 2016.

Cubero, R.; Cubero, M.; Santamaría, A.; de la Mata, M.; Carmona, M. y Prados, M. (2008). La educación a través de su discurso. Prácticas educativas y construcción discursiva del conocimiento en el aula. *Revista de Educación*. (346) 71-104.

Charnay, R. (1994). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. Parra e I. Saiz (Compiladoras) *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones.* Buenos Aires: Paidós Educador.

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* AIQUE, Buenos Aires.

Eisenhart, M. (1988). The Ethnographic Research Tradition and Mathematics Education Research. *Journal for Research in Mathematics Education.* 19(2), pp. 99-114.

Godino, J.; Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en Educación Matemática. *Educación Matemática.* 12 (1) 70-92.

Olave, M. (2013). Modelos de profesores formadores de matemáticas: ¿Cuáles son y en qué medida se transmiten a los futuros docentes? Un estudio de caso. (Tesis de doctorado no publicada). CICATA, del Instituto Politécnico Nacional, México. Disponible en http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/olave_2013.pdf

Richards, J. (1991). Mathematical discussions. In E. von Glasersferd (ed.). *Constructivism in Mathematics Education.* (pp. 13-52). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En A. J. Bishop, M.A. (Ken) Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education.* 1, 827- 876. Dordrecht, HL: Kluwer, A. P.

Sierpinska, A. (1998). Three Epistemologies, Three Views of Classroom Communication: Constructivism, Sociocultural Approaches, Interactionism. En H. Steinbring; M. Bartolini; A. Sierpinska, (eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom.* National Council of Teachers of Mathematics. Boston, Virginia.

Sistema Único Nacional de Formación Docente (SUNFD). Plan Nacional Integrado de Formación Docente (2008). Disponible en http://www.cfe.edu.uy/images/stories/pdfs/plan_nacional/sundf_2008.pdf

Stephan, M. y Cobb, P. (2003). The methodological approach to classroom-based research. En M. Stephan; J. Bowers y P. Cobb. (Eds). *Supporting Students' development of measuring conceptions: Analyzing students' learning in social context.* Journal for Research in Mathematics Education Monograph Nº 12 (pp.36-50). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction—an epistemological perspective.* Berlin: Springer.

Voigt, K. (1989). The Social Constitution of the Mathematical Province – A Microethnographical Study in Classroom Interaction. *The Quaterly Newsletter of the Laboratory of Comparative Human Cognition.* 11(1&2). 27-33.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of Interaction and Sociomathematical Norms. En H. Bauersfeld; P. Cobb, (eds.), *The emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Wood, T. (1994). Patterns of Interaction and the culture of Mathematics Classrooms. Cultural Perspectives on the Mathematics Classrooms. *Mathematics Education Library*, 14, 149 – 168.

Wood, T. (1995). An emerging practice of teaching. En H. Bauersfeld; P. Cobb (eds.). *The emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Yackel, E. (2000). *Creating a Mathematics Classroom Environment that Fosters the Development of Mathematical Argumentation.* Paper for Working Group 1: Mathematics Education in Pre and Primary School, Ninth ICME, Tokyo/Makuhari, Japan. Recuperado de http://www.nku.edu/~sheffield/eyackel.html

FORMACIÓN Y DESEMPEÑO DE LOS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA PARA PROVOCAR UNA ACTITUD POSITIVA EN SUS ESTUDIANTES HACIA LA MATEMÁTICA

Isidro Báez Suero, José Manuel Ruíz Socarras, María Legañoa Ferra
Universidad Autónoma de Santo Domingo (República Dominicana), Universidad de Camagüey. (Cuba)
ibaez13.18@hotmail.com, jose.ruiz@reduc.edu.cu, maria.leganoa@reduc.edu.cu

Palabras clave: formación inicial, maestro, matemática, desempeño

Key words: initial training, teacherd, mathamatic, carrying

RESUMEN: El estudio realizado es parte de una investigación en fase de desarrollo y que conforma el proyecto de doctorado del autor principal del trabajo, el cual está orientado a investigar sobre las causas de la baja calidad de la formación inicial de los docentes del sistema educativo de República Dominicana, en el área de matemática.

En la formación pedagógico-matemática inicial de los maestros del nivel básico, el desempeño de los estudiantes para maestros en su práctica en el nivel básico revela insuficiencias, en el ámbito de la actitud hacia la matemática, que limitan su formación pedagógico-matemática inicial. Existen factores claves en la formación inicial de los docentes del nivel primario que facilitan su incursión en el campo de trabajo a través de la realización de su práctica docentes.

ABSTRACT: The study is part of an investigation under development and forming the doctoral project of lead author of the work, which is aimed at investigating the causes of the low quality of the initial training of teachers in the educational system of The Republic Dominican, in the mathematics area.

In the initial mathematics-pedagogical training of teachers in the basic level, the performance of students to teachers in their practice at the basic level indicates weaknesses in the area of attitude towards mathematics that limit their initial mathematics-pedagogical training. There are key factors in the initial training of teachers at the primary level to facilitate their incursion into the field of work through the realization of their teaching practice.

INTRODUCCIÓN

El Banco Mundial señala que todos los gobiernos del planeta escrutan con atención "la calidad y el desempeño de los profesores", colocándose en la adquisición de competencias y no solo en la simple acumulación de conocimientos.

Desde el 2013, la UNESCO de conjunto con la Organización Internacional del Trabajo, el PNUD, el UNICEF y la Internacional de la Educación, celebran el Día Mundial de los Docentes bajo el lema "¡Un llamado para los docentes!", considerando que no existe una base más sólida para la paz duradera y el desarrollo sostenible que una educación de calidad proporcionada por maestros bien formados, valorados, apoyados y motivados. Así pues, la UNESCO celebra este día poniendo en el tapete la lucha contra el déficit de docentes, los obstáculos para una educación de calidad y el papel de los docentes en el desarrollo de los ciudadanos de todo el mundo.

Al mismo tiempo, hay un consenso en América Latina y el Caribe sobre la importancia de la calificación de los docentes en el contexto de las reformas educacionales que se han incorporado en varios países. Como resultado, los gobiernos han hecho y siguen haciendo importantes inversiones en la formación inicial y continua de los docentes en ejercicio Los sistemas más eficaces del mundo en la educación primaria son los de Finlandia, Singapur, Shanghái (China), República de Corea, Suiza, Países Bajos y Canadá.

La formación inicial de maestros según diferentes autores entre ellos. Calzado,(2004) y Addine (1996) aborda: la práctica laboral investigativa, Calzado (2004) competencias didácticas, Varona (2009) formación de la autoestima profesional pedagógica. Villalón (2003) formación lúdica, Sierra (2011) formación jurídica, Tamayo (2009) identidad cultural. Formación inicial del maestro de educación primaria en el ámbito de la educación matemática. Barcia (2000) contenido geométrico. Investigaciones dedicadas a resaltar la importancia de la matemática en edades tempranas. Eurydice. (2011),Mar y Padrón (2006), Socas (2011).

Los resultados obtenidos en Matemática en la educación primaria por estudiantes de Finlandia, Japón y otros países están relacionados con la valoración que tienen esas sociedades de sus maestros de primaria y la importancia de la Matemática de ese nivel educacional, pero en América Latina los resultados promedios de los alumnos de la región son inferiores a los estándares internacionales SERCE, (2012) con la excepción de la República de Cuba.

Por otro lado, en República Dominicana los resultados de SERCE (2009) la colocan en el último lugar de los 16 países participantes. También en las Olimpiadas de Matemáticas de Centroamérica y el Caribe se ocupan los últimos lugares.

Visto lo anterior, el desempeño docente de los maestros en ejercicio está relacionado con su formación inicial y el desempeño docente en las prácticas docentes en las cuales fueron formados Addine, (1998).

Lo antes expuesto, nos lleva a la conclusión de que en América Latina y el Caribe existen insuficiencias en el desempeño de los maestros de educación primaria en el proceso de enseñanza de la matemática.

Algunos autores revelan que uno de los fines de la formación inicial es cambiar las actitudes hacia la Matemática, sus concepciones sobre el papel de los maestros en la promoción del aprendizaje de la Matemática. Flores (1998) y Gómez (2005) evidencian que el sistema de formación de

maestros de matemática en un país es el producto de una tradición, una historia específica de su contexto. Godino, Batanero y Font (2007) hacen referencia a la necesidad de formar competencias didáctico-matemáticas en los docentes, entre estas, crear una actitud positiva hacia la Matemática.

Ball, Lubienski y Mewborn (2001); Thames, Sleep, Bass y Ball (2008), Godino &, Batanero (2008), entre otros han desarrollado modelos tales como: conocimiento pedagógico, conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico del contenido y conocimiento matemático para la enseñanza.

La elaboración de una estrategia para la formación inicial de los docentes que tengan como fundamento promover la valoración positiva de la Matemática, permite perfeccionar el desempeño de estos para dar respuesta a una transformación positiva del estudiante de primaria hacia la Matemática.

Para (Chirino (2002), la formación inicial del docente "Es el proceso de apropiación de conocimientos, habilidades, valores y métodos de trabajo pedagógico que preparan al estudiante para el ejercicio de las funciones profesionales pedagógicas expresada mediante el modo de actuación profesional desarrollada a lo largo de la carrera" de esta forma entendemos que la formación inicial didáctico-matemática de los maestros de primaria como el proceso de adquisición de la didáctica de la Matemática sobre los contenidos matemáticos, solo será posible cuando se use el lenguaje, los conceptos y métodos matemáticos, den situaciones problemáticas de la vida cotidiana

Debido al desarrollo vertiginoso de las ciencias humanísticas y la matemática, la sociedad actual está exigiendo la formación de profesionales de la educación competente en el dominio matemático de alto nivel, para enfrentar la docencia en una sociedad del conocimiento en la que estamos inmersos. Martínez (2000).

MARCO CONCEPTUAL

Lo establecido sobre qué es y qué debe hacer un docente del nivel primario, que enseña Matemática contribuye a que los docentes configuran su propia identidad profesional. La cual posee una parte común a todos los docentes y una parte específica según sea el área del saber a qué se dedica. En el caso del maestro de Matemática se puede definir como la identidad de ser, docente de Matemática, responsable de formar en los ciudadanos el interés por utilizar la Matemática para el conocimiento del mundo y su transformación, a partir de estudiar las relaciones entre los objetos y fenómenos, combatiendo el rechazo de parte de la sociedad que ve la Matemática como un elemento discriminatorio.

Por formación didáctica en la práctica de la enseñanza, se entiende como el proceso de observación, preparación, ejecución, análisis de clases y evaluación de propuestas de enseñanza de la Matemática que el futuro docente realizará en la actividad del proceso de enseñanza.

Musgrave (1972), plantea que un docente de matemática es un profesional con características comunes a su profesión y debe tener conocimientos precisos de la matemática y su didáctica**.** De esta forma el conocimiento del profesor de primaria, es difícil de determinar por las características específicas de la profesión y sus estudiantes en formación que no tienen conciencia clara de lo que el docente puede suministrarle.

Según Shulman (1986), uno de los componentes del conocimiento del docentes está ligado al contenido que enseña, es el conocimiento didáctico - matemático del contenido, que no es exactamente el conocimiento matemático del que dispone el investigador en matemática o un matemático puro, si no que se reduce al conocimiento matemático escolar.

Para el mismo autor el conocimiento de contenido pedagógico del docente incluye los tópicos que se enseñan habitualmente en un área de contenidos, las formas más corrientes de representar estas ideas, las analogías más poderosas, ilustraciones, el profesor tiene que tener a mano un arsenal de formas de representación, algunas de ellas derivadas de la formación mientras que otras derivadas de la práctica.

El conocimiento de contenido pedagógico incluye la comprensión de determinado tópico sea fácil o difícil. Si estas preconcepciones son falsas concepciones, los futuros profesores necesitan conocer estrategias más valiosas para que comprendan su trabajo, ya que no son una tabula rasa antes del conocimiento. Shulman, (1986)

Los conceptos anteriores llevan a los autores del artículo a formular una conceptualización de lo que se entiende por didáctica de la matemática. “Teoría de la práctica de la enseñanza que se deriva de la investigación, de la responsabilidad del proceso de enseñanza – aprendizaje, con método y técnica específica de cada grupo socio cultural del docente de matemática que se le asigna la tarea de enseñar el contenido matemático, y que la sepa ejercer, para garantizar una buena ejecución de la profesión docente”

Para los autores del presente artículo, la formación inicial didáctico-matemática de los maestros de primaria es entendida como el proceso de apropiación de la didáctica de la Matemática sobre los contenidos impartidos en el nivel primario para la construcción del sentido del lenguaje, conceptos y métodos matemáticos por parte de los niños, mediante su referencia a las situaciones y problemas matemáticos presentes en la vida cotidiana.

METODOLOGÍA

Se hizo un una revisión bibliográfica de la formación de los maestros para la educación primaria de la Región y de otros países del mundo, que tuvo en cuenta los siguientes indicadores: concepciones y creencias sobre la Matemática, dominio del contenido matemático objeto de enseñanza, métodos y estrategias empleados en sus clases en función de la motivación ,clima en sus clases, relaciones afectivas con sus alumnos, actividades de análisis reflexivas realizadas para aprender a partir de su práctica.

Las principales técnicas empleadas en el diagnóstico fueron: la revisión de documentos, el comentario de texto, prueba escrita, cuestionario, entrevistas y la observación de su desempeño docente en clases.

La revisión de documentos permitió la caracterización de la población y las restantes se realizaron con el objetivo de determinar las principales insuficiencias de los estudiantes para maestros en su desempeño docente.

Los autores asumen el enfoque sistémico estructural funcional para formalizar los criterios de desempeño de los docentes en su trabajo

- Formación didáctica matemática valorativa.
- Formación psico-social valorativa.
- Formación práctico-reflexiva-valorativa.

DESARROLLO DEL TRABAJO

Hay un consenso en América Latina y el Caribe sobre la importancia de la calificación de los docentes en el contexto de las reformas educacionales que se han incorporado en varios de los países. Como resultado, los gobiernos han hecho y siguen haciendo importantes inversiones en la formación inicial y continua de los docentes en ejercicio.

La indagación científica realizada por los autores en relación con la formación inicial de maestros de educación primaria con énfasis en el ámbito de la matemática ha arrojado lo siguiente:

- Formación inicial de maestros general. Calzado (2004) y Addine (1996) abordan la práctica labora investigativa, Calzado (2004) aborda las competencias didácticas, Varona (2009) la formación de la autoestima profesional pedagógica.
- Formación inicial de maestros de la educación primaria: formación lúdica (Villalón, 2003), formación jurídica (Sierra, 2011) e identidad cultural (Tamayo, 2009).
- Formación inicial del maestro de educación primaria en el ámbito de la educación matemática. Contenido geométrico (Barcia, 2000).
- Investigaciones dedicadas a resaltar la importancia de la matemática en edades tempranas. Eurydice. (2011); Mar y Padrón, (2006), Socas (2011).
- Concluir con la carencia de investigaciones relacionada con la formación inicial de maestros de educación primaria en el ámbito de las matemáticas dirigidas al desempeño de los maestros para lograr una actitud positiva en sus estudiantes hacia la Matemática

CONCLUSIONES

Los autores del presente artículo han podido observar una inexistencia de modelo de formación de docentes dirigidas a promover en sus estudiantes una valoración positiva de la Matemática en los maestros de educación primaria.

Una educación de calidad en el nivel primario requiere de maestros que estimulen en sus alumnos el gusto hacia la Matemática, pero la formación inicial de éstos tiende a tener falencias para atender a esta necesidad. La formación tiende a centrarse en contenidos didácticos y matemáticos, descuidando lo relativo a la formación socio-afectiva.

Se puede observar a partir de este artículo que con frecuencia hay maestros que en el nivel primario centran su trabajo en la apropiación de conocimientos y habilidades Matemáticas por los alumnos, descuidando otros factores que influyen en ese propósito, tales como la satisfacción del alumno por el aprendizaje de la Matemática, la influencia de la familia y de la comunidad.

Para los autores un docente que enseña Matemática debe poseer conocimiento sobre el contenido matemático y los procesos metodológicos que se deben seguir en el proceso de enseñanza aprendizaje para que los estudiantes adquieran los objetivos de las clases de Matemática.

Además, en relación con el dominio del contenido matemático objeto de enseñanza, se puede concluir que de forma general los estudiantes para maestros presentan dominio del contenido que enseñan, sin embargo, presentan insuficiencias en su vinculación con el conjunto de fenómenos que dan significado a los objetos e ideas matemáticas implicadas. Estas insuficiencias impactan en la poca motivación que crean en sus clases por el estudio de la matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Addine, F. (1996). *Alternativa para la organización de la práctica laboral investigativa en los institutos superiores pedagógicos.* Tesis de doctorado no publicada, Instituto Superior Pedagógico. La Habana, Cuba

Addine, F. (1998). *Didáctica y optimización del proceso de enseñanza- aprendizaje.* La Habana: IPLAC. Documento en soporte digital.

Ball, D. L.; Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* p. 433-456. Washington, DC: American Educational Research Association

Barcia, R. (2000). *La preparación geométrica de los estudiantes en la licenciatura de la educación primaria.* Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Cienfuegos. Cuba.

Camacho, G. H. M., y Padrón, M. (2006). *Malestar docente y formación Inicial del profesorado: percepciones del alumnado*. Revista Cuba: Interuniversitaria de Formación del Profesorado.

Calzada, D. (2004). *Un modelo de formación formas de organización del proceso de enseñanza–aprendizaje en la formación inicial del profesor*. Tesis de doctorado no publicada, Instituto superior Pedagógico. La Habana, Cuba

Chirino, M. V. (2002). *Perfeccionamiento de la formación inicial investigativa de los Profesionales de la educación.* Tesis de doctorado no publicada, Instituto Superior Pedagógico. La Habana, Cuba.

Eurydice (2011). *La enseñanza de las matemáticas en Europa: restos comunes y políticas nacionales.* Bruselas: Agencia Ejecutiva en el ámbito Educativo Audiovisual y Cultural.

Flores, P. (1998). *Creencias, Concepciones de los futuros profesores sobre la enseñanza de la matemática.* Granada. España: Comares.

Flores, P. (2000). *El profesor de Matemáticas, un profesional reflexivo. Departamento de Didáctica de la Matemática*. España: Universidad de Granada

Godino, J.; Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to Research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education (39)*1-2, 127-135.

Godino, J. y Batanero, C. (2008). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. En A. Poblete, VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM), Chile.

Gómez, P. (2005). *Diversidad en la formación de profesores de matemáticas: en la búsqueda de un núcleo común*. España: Universidad de Granada

Musgrave, P.W. (1972) *Sociología de la Educación*. Barcelona: Herder.

Shulman, L. S. (1986). *Those who understand: knowledge growth in teaching. Educational Researcher.* EUA: American Educational Research Association.

Sierra V. M, (2011). Investigación en educación matemática: objetivos, cambios, criterios, métodos y difusión. En *Educativo Siglo XXI: Revista de la Facultad de Educación (29)*2, p. 173-198. *España:* Universidad de Salamanca.

Socas, M. (2011). Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas en educación. Primaria. Buenas prácticas. En *Educativo Siglo XXI: Revista de la Facultad de Educación (29)*2, p. 199-224. *España:* Universidad de Salamanca.

Tamayo R. I. (2009). *Potencialidades formativas del pensamiento de Fidel Castro RUZ para el desarrollo de la identidad.* Tesis de doctorado no publicada, Instituto Superior Pedagógico. La Habana, Cuba.

Thames, M. H.; Sleep, L.; Bass, H. y Ball, D. L. (2008). *Mathematical knowledge for teaching (K-8): Empirical, Theoretical, and Practical Foundations.* En ICME 11, TSG. Recuperado el 2/08/08 de http://tsg.icme11.org/document/get/572.

UNESCO (2009). *Segundo Estudio Regional comparativo y Explicativo. Aportes para la enseñanza de la Matemática*. Chile: Oficina Regional de Educación de la UNESCO para América Latina y el Caribe OREALC/UNESCO Santiago

UNESCO (2012). Segundo *Estudio Regional comparativo y Explicativo. Reporte. Técnico*. Chile: *Organización de las Naciones Unidas, para la Educación la Ciencia y la Cultura*. Oficina Regional de Educación de la UNESCO para América Latina y el Caribe OREALC/UNESCO Santiago

Varona, L. (2009). *Metodología para la formación de la autoestima profesional Pedagógica.* Tesis de doctorado no publicada, Instituto superior Pedagógico. La Habana, Cuba.

Villalon, G.G.L (2003). *Estrategia pedagógica para la formación lúdica del maestro primario.* Tesis de doctorado no publicada, Instituto superior Pedagógico. Santiago de Cuba.

REPRESENTACIONES SOCIALES QUE ESTUDIANTES DE NIVEL MEDIO SUPERIOR POSEEN SOBRE EL BUEN PROFESOR, EL BUEN ALUMNO Y LA BUENA CLASE DE MATEMÁTICAS

Celia Araceli Islas Salomón, Fernando Morales Téllez, María Patricia Colín Uribe
CECyT NB-Instituto Politécnico Nacional (México)
arissass@hotmail.com, fernando_morales_tellez@hotmail.com, pcolin@ipn.mx

Palabras clave: representaciones sociales, buen profesor de matemáticas, buen alumno de matemáticas, buena clase de matemáticas

Key words: social representations, good math teacher, good math student, good math class

RESUMEN: En este trabajo se identifican, a través de la propuesta teórica metodológica de las representaciones sociales, las valoraciones que realizan estudiantes de nivel medio superior respecto de ellos mismos, sus maestros y la clase de matemáticas. Trabajamos con estudiantes a quienes se les aplicó un cuestionario con preguntas abiertas y se les realizó entrevistas grupales en equipos de 3 o 4 integrantes. Las repuestas del cuestionario fueron analizadas localizando dimensiones que concentraran un significado particular con la intención de organizar categorías que permitieran establecer jerarquías de los contenidos y ubicar el campo de la representación. Las entrevistas grupales contribuyeron a esclarecer el significado de las palabras, frases y nociones de sentido común utilizadas por los estudiantes. De manera general se puede resumir que un buen profesor es aquel que sabe enseñar paso a paso y hace entretenida la clase; mientras que una buena clase de matemáticas es donde se aprende sin aburrirse y se resuelvan muchos ejercicios prácticos.

ABSTRACT: This paper identifies, through theoretical methodological approach of social representations, the assessments made by high school students about themselves, their teachers and math class. We work with students who were applied a questionnaire with open questions and group interviews were conducted in teams of 3 or 4 members. The questionnaire responses were analyzed by locating dimensions concentrate particular significance with the intention of organizing categories that allow establish hierarchies of content and locate the field of representation. Group interviews helped to clarify the meaning of words, phrases and notions of common sense used by students. Generally it can be summarized that a good teacher is one who can teach step by step and makes the class entertaining; while a good math class is where you learn without getting bored and many practical exercises are resolved.

INTRODUCCIÓN

La presente investigación pretende contribuir a aquellas investigaciones que se han planteado la necesidad de conocer a los estudiantes y recuperar sus opiniones y experiencias en el ámbito escolar. Por ejemplo, Guzmán y Saucedo (2007: 7), mencionan que en la actualidad las investigaciones referidas a los estudiantes han ampliado la problemática al pasar de tomarlos en cuenta para conocer si aprenden en las aulas o para identificar los grupos socioeconómicos a los que pertenecen, a tomarlos en cuenta para adentrarse en el campo de sus experiencias de la escuela, de sus procesos subjetivos a través de los cuales viven y dan sentido a lo que la escuela les ofrece.

En particular, la presente investigación es una contribución a la línea de investigación que busca identificar el *conocimiento de sentido común asociado a las matemáticas escolares*. Dicha línea parte de la idea de que el núcleo del conocimiento de sentido común es que la enseñanza de las matemáticas por parte del profesor, produce aprendizaje matemático por parte del alumno. Pero, en el marco del sentido común ¿Qué es aprender matemáticas? ¿Qué son las matemáticas? ¿Qué es enseñar matemáticas? ¿Existe una relación diferente a la de causa-efecto entre enseñanza y aprendizaje? Dada la naturaleza de los objetos sociales involucrados, las respuestas a estas preguntas son inherentemente relativas al contexto y los grupos sociales que construyen la realidad social reflejada en el conocimiento de sentido común. Es por ello que hemos optado por realizar algunas investigaciones que buscan conocer las representaciones sociales (entendidas como expresiones del conocimiento de sentido común) que algunos actores educativos tienen acerca de las matemáticas, su aprendizaje y su enseñanza.

Pero ¿Cuándo este proceso tiene éxito? ¿Cómo debería ser la enseñanza? ¿Bajo qué condiciones ocurre el aprendizaje? Las respuestas a estas preguntas, en el marco del conocimiento de sentido común, se constituyen como el *deber ser* del sistema didáctico en el ideal de cómo debe funcionar el proceso de enseñanza-aprendizaje o el ideal de cómo debe ser el maestro y el estudiante en la clase de matemáticas. En particular el presente es un estudio que indaga *las valoraciones asociadas a las matemáticas*.

Así, lo que se plantea como objetivo de esta investigación es el *conocer el deber ser* del sistema didáctico, como expresión del conocimiento de sentido común. Conocer las *valoraciones* que estudiantes de nivel medio superior tienen sobre ellos mismos y sobre los maestros en la clase de matemáticas, sería una vía de acceso al deber ser. Es por ello que de manera particular se ha implementado la presente investigación que busca conocer las representaciones sociales que estudiantes de nivel medio superior poseen sobre el buen profesor, el buen alumno y la buena clase de matemáticas

MARCO TEÓRICO

Los *valores*, forman parte de los objetos y acciones que el ser humano persigue por considerarlos deseables o apreciables. En general valor es todo aquello que deber ser objeto de preferencia o de elección (Abbagnano, 2004). De manera general dentro de este rubro se encuentran: la salud, riqueza, poder, amor, virtud, belleza, inteligencia, cultura, entre otros.

Los valores son significados socialmente construidos agregados a las características de los objetos y las acciones; es decir, son atribuciones hechas por un individuo mediado por un grupo social. Así,

la existencia de un valor es el resultado de la interpretación que hace una persona o grupo de la utilidad, deseo, importancia, interés, belleza del objeto o la acción (Frondizi, 1992). *Valorar* los comportamientos es saber que uno puede hacer ciertas cosas que están "bien" o "correctas" y otras que, por el contrario, son "malas" o "incorrectas". Es decir, la valía del objeto es en cierta medida, atribuida por el sujeto, en acuerdo a sus propios criterios e interpretación, producto de un aprendizaje, de una experiencia, la existencia de un ideal, e incluso de la noción de un orden natural que trasciende al sujeto en todo su ámbito.

De acuerdo con Gutiérrez (1993) los valores son:

1) *bipolares* (siempre se pueden mencionar por pares: bondad-maldad, belleza-fealdad, verdad-falsedad, etc.). El valor negativo es sólo una privación del correspondiente valor positivo (sólo el valor positivo existe efectivamente; el valor negativo sólo es una privación del correspondiente valor negativo),

2) *trascendentes*, es decir, sólo se dan en toda su perfección en su propia esencia; pero en su existencia real se dan con una gama muy variada de perfección,

3) *preferibles*; es decir que atraen o inclinan hacia sí mismos la voluntad del hombre que las capta y

4) son *objetivos*; ya que se dan en las cosas o las personas independientemente de que sean conocidos, o no, por alguien en particular.

En contraposición a la idea de objetivad antes señalada se encuentra el *acto de valorar* (una persona o un grupo asigna valor a un objeto); que se considera como algo subjetivo, o sea, depende de las personas que juzgan. Así, la valoración, desde un punto de vista intersubjetivo, puede ser entendida como la representación social de lo que es bueno o malo.

Las *representaciones sociales* constituyen una modalidad particular del conocimiento de sentido común, cuya especificidad reside en el carácter social de los procesos que las producen y abarcan el conjunto de creencias, conocimientos y opiniones *producidas y compartidas* por los individuos de un mismo grupo, en relación a un objeto social en particular (Guimelli, 2004). Una representación social permite guiar la acción de las personas ante un objeto social específico. Es por ello que el estudio de las representaciones sociales adquiere particular relevancia, ya que la manera en que se producen y transforman ayudará entender el comportamiento humano. La representación funciona como un sistema de interpretación de la realidad que rige las relaciones de los individuos con su entorno físico y social, debido a que determina sus comportamientos o sus prácticas. Es una guía para la acción, orientan las acciones y las relaciones sociales. Es un sistema pre-decodificación de la realidad puesto que determina un conjunto de *anticipaciones y expectativas* (Abric, 2004).

En otros términos, la representación social es un conocimiento práctico. Éste, al dar sentido (dentro de un incesante movimiento social) a acontecimientos y actos que terminan por ser habituales para nosotros, forja evidencias de nuestra realidad consensual, pues *participa en la construcción social de nuestra realidad* (Jodelet, 1986). De esta manera, las representaciones sociales se caracterizan por su carácter significante y compartido, donde su génesis son las interacciones y sus funciones obedecen a fines prácticos y son, así, una forma de conocimiento elaborada socialmente y compartida con un objetivo práctico que concurre a la construcción de una realidad común para un

conjunto social, cuya función es la elaboración de los comportamientos y la comunicación entre los individuos. Las representaciones sociales son "sistemas cognoscitivos en los que es posible reconocer la presencia de estereotipos, opiniones, creencias, valores y normas que suelen tener una orientación actitudinal positiva o negativa" (Araya, 2001).

METODOLOGÍA

La investigación fue realizada con un enfoque cualitativo, e intenta explicar la manera en que las personas significan su realidad, partiendo del supuesto, establecido anteriormente, de que la realidad se construye socialmente. Esta perspectiva se centra en la experiencia del actor social y su subjetividad como fuente para la comprensión de la realidad.

La metodología de la investigación consta de la aplicación de un cuestionario compuesto por preguntas abiertas, con el objetivo de no delimitar las respuestas de los participantes y permitir que expresen abiertamente sus opiniones, reduciendo al mínimo la influencia del cuestionario. Se propusieron dos preguntas con el objetivo de conocer la representación social de las matemáticas, de su enseñanza y su aprendizaje:

1) para ti ¿Qué es un buen profesor de matematicas? y

2) para ti ¿Qué es una buena clase de matematicas?

En el cuestionario presentado a los estudiantes, las letras mayúsculas fueron utilizadas para enfatizar el objeto social de interés en cada pregunta.

Para esta investigación contamos con la participación de los alumnos del Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos (CECyT) Narciso Bassols del Instituto Politécnico Nacional, que es una institucion planificada como centros de preparación de educación Media Superior, orientados a la instrucción profesional técnica y preuniversitaria. Se decidió trabajar con una muestra no estadística de 67 estudiantes de quinto semestre de este CECyT orientado al área de Física y Matemáticas en la ciudad de México, Distrito Federal, y en el cual se ofrecen las especialidades técnicas de computación, mantenimiento industrial, plásticos y sistemas automotrices. El tronco común en el área de matemáticas, consta de seis cursos que dedican cinco horas/clase a la semana: Algebra, Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Probabilidad y Estadística. Al momento del trabajo de campo de la presente investigación, los estudiantes estaban cursando la parte final del curso de Cálculo integral.

Trabajar con estudiantes que cursaban el quinto semestre, se debió a que pretendíamos conocer la representación social de estudiantes con cierto éxito escolar reflejado con su permanencia en el centro educativo y así conocer la representación social "propia" de la institución, de manera indirecta y bajo la hipótesis de que parte de su éxito se debe a la interiorización de las representaciones de la institución educativa donde llevaron a cabo su vida escolar por más de dos años. Para fines de comunicación con los estudiantes, se les explicó que el objetivo su participación como informantes era para realizar un "estudio de opinión" relacionado con las matemáticas.

Los estudiantes fueron identificados con las etiquetas **A*n*** (con *n* de 1 hasta 67). La etiqueta ***En*** identifica a alguno de los dos entrevistadores en los grupos focales.

RESULTADOS

A partir de las respuestas otorgadas por los estudiantes, se identificaron varias categorías; entendidas cada una como una representación social. En lo que sigue F significa la frecuencia con que la representación fue identificada en el universo de los 67 estudiantes. En cada categoría se ponen algunos ejemplos de las frases generadas por los estudiantes.

Respecto al buen profesor

- Un buen profesor sabe enseñar/transmitir/explicar (F=16)

  A31: El que sabe explicar.

  A20: Alguien que sabe cómo explicar las cosas y además de cómo lograr recordar cosas olvidadas sin perder mucho tiempo además de no hacer tan pesada la clase.

  A66: Aquel que es capaz de transmitir ideas y conceptos de manera que el alumno los digiera rápidamente.

  A24: Aquel que mediante sus clases sabe transmitir lo que ha aprendido y que sus alumnos realmente lo entiendan.

  A6: El que enseña bien el tema, explicando claramente y resolviendo dudas.

  A25: Quien explica detalladamente y resuelve dudas sobre el tema.

- Un buen profesor tiene un buen "trato personal" (F=11)

  A22: […] Que sea paciente, accesible comprensivo.

  A30: Es aquel que imparte su clase con paciencia, tolerancia, y con un nivel eficiente de preparación.

  A3: El que sabe explicarte cuantas veces sea necesario, el que tiene paciencia, el que sabe del tema y lo domina.

  A13: Aquel que nos enseña la clase con amabilidad, con gusto, con entrega… que tenga dominio sobre la materia, para que la imparta bien.

  A10: Una persona lista, expresiva, concisa, tolerante.

  A43: Aquel profesor que no se desespera y te cumple, aquel que te explica con peras y manzanas los temas a tratar.

- Un buen maestro enseña de una forma fácil/sencilla/clara/divertida (F=9)

  A9: Es aquel que nos enseña alguno de los tantos temas de matemáticas de una forma sencilla y divertida, preguntando si tenemos dudas o algo así.

  A28: Es alguien que te da o explica todos sus conocimientos para que tú los aprendas de la forma más fácil y clara.

  A29: Aquella persona que se sabe dar a entender y explica de manera fácil y comprensible.

A50: Aquel que se esfuerza para que los alumnos las comprendan y no se les hagan difíciles.

A52: Que no se harte de explicar y lo haga de una forma clara para que no veas los temas tan complicados.

A43: Aquel profesor que no se desespera y te cumple, aquel que te explica con peras y manzanas los temas a tratar.

- Un buen maestro explica paso a paso y cuantas veces sea necesario (F=7)

  A53: El que te pone buenos ejemplos y te explica a detalle cada caso, el que conoce no sólo el tema que vayas a ver sino muchos para aclarar cualquier duda.

  A54: Aquel maestro que explica bien un ejercicio o el tema visto en clase, además de que sepa muy bien realizar ejercicios explicando paso a paso.

  A56: Aquel que no enseñe los temas rápidamente, sino que se tome el tiempo para aclarar dudas o repasar los temas complicados.

  A60: Es aquel que hace la clase amena, dinámica y sobre todo CLARA y trata de llegar al resultado por el camino más fácil lo explica todo de una forma ni muy rápida ni muy lenta digamos que en un tiempo medio (me chocan los profesores que se sacan las cosas de la manga y explica muy rápido).

- Un buen maestro sabe matemáticas y sabe explicar (F=7)

  A47: El que domina perfectamente las matemáticas y sin problema puede explicarlas a cualquier persona.

  A58: Una persona que domina a “perfección” los temas y que sabe transmitir de una manera correcta el conocimiento.

  A59: Es el profesor que entiende lo que está explicando y sabe dar a entender a los demás es decir a los alumnos lo que está diciendo.

- Un buen maestro es el que tiene conocimientos (F=5)

  A15: Es la persona que debe de tener todos los conocimientos sobre la materia.

  A14: Lo más importante, ya que de ahí viene todo el conocimiento.

  A48: Alguien con el quien se pueda dialogar, para una cuestión sobre su clase y que domine a la perfección todos los temas a ver.

  A53: El que te pone buenos ejemplos y te explica a detalle cada caso, el que conoce no sólo el tema que vayas a ver sino muchos para aclarar cualquier duda.

  A3: El que sabe explicarte cuantas veces sea necesario, el que tiene paciencia, el que sabe del tema y lo domina.

Respecto a la buena clase

- Una buena clase no es aburrida y dinámica (F=15)

  A4: En la que no estás aburrido […]

A6: Aquella en la que no se hace frustrante ni tediosa, […].

A7: Una clase en donde no se te hagan tediosas y aburridas las matemáticas además de un profesor que lleve a cabo su clase dinámicamente y entendible.

A9: Es aquella en la que podemos estar sin aburrirnos […].

A10: En aquella donde se aprende de una manera dinámica […]

A12: Aquella que es amena […]

A13: […] pero con cierta dinamicidad (sic.), que no sea aburrida…esa sería una buena clase.

A16: Una clase que es dinámica […].

A21: Es una clase llena de enseñanza y diversión.

A32: Una clase entretenida, […].

- En una buena clase hay aprendizaje sin aburrimiento (F=12)

  A22: En la que un maestro logra que aprendas algo pero sin hacerlo aburrido o monótono.

  A21: Es una clase llena de enseñanza y diversión.

  A27: Dar lo mejor de conocimientos, que sea divertida y didáctica y no aburrida.

  A33: Una clase divertida y que le entienda.

  A34: Que aprendas pero que no sea aburrida.

  A36: En la que aprendes, no te aburres y quedas satisfecho.

  A48: Que no sea aburrida y que aprenda lo más posible.

  A40: Aquella en la cual aprendo, me rio, me divierto, pongo atención […].

- En una buena clase hay muchos ejercicios y participación de estudiantes (F=10)

  A1: La que está enriquecida de ejercicios y de mucha participación de mis compañeros.

  A3: […] y ejercicios para contestar, revisando respuestas para saber si lo hacemos bien.

  A13: Es aquella en la cual nos hacen pensar para solucionar un problema […].

  A15 Es cuando todo el salón está bien atento a ella, haciendo ejercicios sobre el tema y participando en la misma.

  A16: […] y donde muestren ejemplos del tema visto.

  A17: Aquella en la que aprendes y aplicas conocimientos en un problema.

  A62: Una clase donde haya silencio y se pase a resolver ejercicios al pizarrón de manera constante.

- En una buena clase aprendes (F=10)

  A6: […] y en la cual se quedan los conocimientos aprendidos.

  A9: […] y entendiéndole a los temas que se expongan en ella.

A11: Entenderle a lo que explica el maestro.

A17: Aquella en la que aprendes y aplicas conocimientos en un problema.

A19: Que sea didáctica y que aprendamos.

A24: Aquella en la cual aprendes algo nuevo.

A29: Es un lugar en donde se enseñan a detalle las matemáticas.

A31: Donde aprendes de manera

- Explicación paso a paso / Buena explicación (F=8)

A30: Es aquella que se imparte paso a paso de cómo llegar a un resultado "x".

A55: Una clase en donde te explique paso a paso el procedimiento y no se salten pasos.

A59: Es una clase en la que sea claro y preciso lo enseñado.

A60: Explicar claramente.

A67: Una buena clase es con un buen material didáctico con una buena enseñanza o explicación por parte del profesor.

A41: Que utiliza métodos prácticos accesibles a sus alumnos y que te toma en cuenta.

A56: Aquella que el maestro antes de iniciar clase aclare el tema anterior.

A61: Que no dure 2 hrs completas y que se base en ejemplos sencillos antes de pasar a ejercicios más complejos.

CONCLUSIONES

A través del análisis de los datos presentados podemos afirmar que los significados globales de las representaciones sociales de las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje pueden ser formulados de la siguiente manera:

El ***aprender matemáticas*** se encuentra estrechamente ligado al colectivo social otorgado a las matemáticas para resolver problemas de la vida cotidiana; de ahí su importancia en la vida diaria. El significado que los estudiantes asignan a la frase "aprender matemáticas", lo asocian con diversas metáforas en donde, utilizan verbos transitivos (poseer/ adquirir/tener) y los objetos de la acción corresponden con las funciones otorgadas a las matemáticas. Así se tiene que aprender matemáticas: 1) poseer/adquirir conocimientos para aplicar /[poner en práctica]/[resolver problemas], 2) poder/saber resolver problemas de la vida diaria, 3) poder/saber hacer cálculos y operaciones y 4) razonar/[pensar con lógica]/[tener la habilidad] para poder/saber resolver problemas. Dos características son asociadas a las personas que aprenden matemáticas: atención e inteligencia.

El ***enseñar matemáticas*** se encuentra estrechamente ligado a la metáfora de la transferencia de un bien o una posesión por parte de quien enseña a través de la explicación. Pudimos observar que el verbo "enseñar" es asociado a otros verbos transitivos donde los objetos de la acción son el conocimiento, la capacidad de razonamiento/comprensión/lógica o resolver problemas. Así, tenemos que "enseñar matemáticas": 1) trasmitir/dar/compartir/mostrar/ brindar conocimientos, 2)

conocer/dominar/ comprender/saber para transmitirlo/compartirlo/darlo, 3) trasmitir/dar/[ayudar a tener] capacidad de razonamiento/comprensión/ lógica y 4) [ayudar a]/[mostrar cómo] resolver problemas.

Podemos considerar que los resultados que obtuvimos de las respuestas de los estudiantes (cuestionarios y entrevistas), expresan el conocimiento que los estudiantes tienen del sistema didáctico. Cabe mencionar que, como estudiantes del IPN, sus respuestas sobre la naturaleza y la función de las matemáticas estuvieron apegadas al quehacer tecnológico para el cual la Institución (IPN) fue diseñado, por lo que, el aprendizaje de las matemáticas es para estos estudiantes un proceso de transferencia del saber hacer problemas o el conocimiento y la habilidad necesaria para ello. A su vez, la enseñanza de las matemáticas es la trasferencia del saber hacer por parte de quien enseña a través de la explicación. El que enseña (el maestro) es concebido como transmisor, director y el actor principal del proceso de enseñanza y de aprendizaje y el estudiante es considerado como un receptor y una suerte de espectador. Así, las representaciones sociales de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son formas particulares de las representaciones sociales de enseñanza y aprendizaje en general, pero con contenidos y organización diferentes, sobre todo debido al conocimiento matemático.

De manera general se puede resumir que para los estudiantes un buen alumno de matemáticas es aquel que puede resolver problemas de matemáticas en poco tiempo y utilizando la razón. Un buen profesor es aquel que sabe enseñar paso a paso y hace entretenida la clase; mientras que una buena clase de matemáticas es donde se aprende sin aburrirse y se resuelvan muchos ejercicios prácticos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abric, J.C. (2004). *Prácticas sociales y representaciones*. México: Ediciones Coyoacán.

Araya, S (2001). La equidad de género en la educación. En E. Vivero (Ed.) *La Ventana (13)*2, 159-187. Universidad de Guadalajara, México.

Abbagnano, N. (2004). *Diccionario de filosofía*. México: Fondo de Cultura Económica.

Frondizi, R. (1992). *¿Qué son los valores?* México: Fondo de Cultura Económica

Gutiérrez, R. (1993). *Introducción a la ética.* México: Editorial Esfinge.

Guimelli, C. (2004). *El pensamiento social.* México: Ediciones Coyoacán.

Guzmán, C. y Saucedo ,C. (2007). La *voz de los estudiantes: Experiencias en torno a la escuela.* México: Ediciones Pomares.

Jodelet, D. (1986). “La representación social: fenómenos conceptos y teoría” en Serge Moscovici (Ed.) *Psicología social II. Pensamiento y vida social. Psicología social y problemas sociales* (pp.469-494). Barcelona, España: Paidós.

UNA EXPERIENCIA DE FORMACIÓN DE PROFESORES EN MODELACIÓN MATEMÁTICA EN ENTORNOS MIXTOS DE APRENDIZAJE

Paula Andrea Rendón-Mesa, Juan Fernando Molina-Toro, Yadira Marcela Mesa, Jhony Alexander Villa-Ochoa
Universidad de Antioquia (Colombia)
paula.rendon@udea.edu.co, juan.molinat@udea.edu.co, yadira.mesa@udea.edu.co, jhony.villa@udea.edu.co

Palabras clave: modelación matemática, formación de profesores, entornos mixtos de aprendizaje

Key words: mathematics modeling, mathematics teacher training, blended-learning

RESUMEN: En este documento se analiza un episodio que se deriva de la experiencia de formación de profesores en modelación matemática. Los participantes fueron profesores de un programa de maestría en Educación (Matemática) quienes cursaron un Seminario que se diseñó a partir de algunas características de un entorno Blended-Learning. El episodio que se analizó refuerza la necesidad que los profesores que se inician en el estudio de la modelación matemática, conozcan estrategias y maneras de hacer modelación, pero, sobre todo, participen en experiencias a través de las cuales ellos mismos desarrollen proyectos de modelación matemática. El diseño, ejecución y validación de este tipo de modelación requiere de un acompañamiento y confrontación continua. Para ello, los entornos Blended Learning se constituyeron en medios que trascienden usos meramente divulgativos y se convirtieron en escenarios de discusión y reflexión para el desarrollo de los proyectos de modelación.

ABSTRACT: In this paper we discuss an episode derived from experience of teacher training to mathematical modelling. The participants were teachers of a master in Mathematics Education who were enrolled a seminar developed on blended learning environment. The episode reinforces the need for teachers who are new to the study of mathematical modeling should know strategies and ways of doing modeling, but above all, must participate in experiences through which to develop projects themselves mathematical modelling. The design, implementation and validation of this type of modeling requires support and continuous confrontation, for it, blended learning environments constitutes means that transcend purely informative purposes and become the stage for discussion and reflection for the development of projects modeling.

INTRODUCCIÓN

En las últimas dos décadas ha aumentado el número de países que proponen que sus currículos vayan más allá de los aspectos conceptuales y procedimentales de las matemáticas para promover el desarrollo de habilidades/capacidades, a través de las cuales los estudiantes puedan usarlas en "contextos reales" (NCTM, 2000; MEN, 2006; SEP, 2011; MEP, 2013). La articulación con estos propósitos curriculares implica la convergencia de al menos dos acciones. La primera se asocia con las estrategias, recursos y epistemologías que sean afines a los usos académicos, sociales y culturales de las matemáticas; y la segunda, con la formación de profesores (y de otros actores educativos) para que aporten a la integración de tales aspectos en las aulas de clase.

La modelación matemática, como dominio de investigación, se ocupa de generar reflexiones y acciones que den sentido a las matemáticas escolares a través del estudio de fenómenos propios de otras ciencias (incluyendo las matemáticas), la sociedad y la cultura. A pesar de que existen líneas de investigación en modelación/aplicaciones, la formación de profesores y la conjunción de ambas; se reconoce en la literatura la complejidad a la que se enfrentan tales líneas, principalmente para integrar la modelación en las aulas de clase (Kaiser y Maaß, 2007; Villa-Ochoa y López, 2011; Villa-Ochoa, 2015).

La formación de profesores de matemáticas en y para la modelación matemática es un tema que ocupa el interés de investigadores a nivel internacional. Algunos trabajos muestran la importancia de reconocer las creencias y concepciones de los profesores acerca de la modelación (Frejd, 2012), otros presentan aportes en relación con el conocimiento necesario para que el profesor pueda implementarla en el aula de clase (Kaiser y Maaß, 2007) y otros, consideran algunas experiencias que se deben posibilitar a los profesores para dinamizar la cultura alrededor de la modelación matemática (Villa-Ochoa y López, 2011).

Como una manera de atender a las necesidades de formación de los profesores en modelación matemática, se diseñó un Seminario en el marco de un programa de maestría en Educación (Matemática) en el cual, los participantes (profesores de matemáticas en ejercicio) estudiaron alternativas para mediar el uso de la modelación matemática en las aulas de clase. Al mismo tiempo, el Seminario promovió acciones para que los profesores *vivieran* experiencias de modelación matemática, entre ellas, la modelación a través de proyectos.

Por lo anterior, en este documento presentamos y analizamos algunos resultados de una experiencia de modelación con profesores de matemáticas pertenecientes a un programa de maestría en Educación Matemática. La experiencia se desarrolló en un ambiente *Blended-Learning,* en el cual utilizamos conferencias *online*, videos, laboratorios y un grupo cerrado de Facebook para lograr los propósitos del Seminario. En particular, analizamos el desempeño de uno de los participantes en la elaboración del proyecto de modelación.

REFERENTES TEÓRICOS

La formación de profesores y la modelación matemática

Nuestra visión de formación de profesores, parte de la necesidad de que los profesores de matemáticas tomen conciencia de la importancia del saber y la experiencia con diversas temáticas en el momento de plantear sus prácticas didácticas. Conforme Silveira y Caldeira (2012) informan, en la literatura se demuestra que los obstáculos y resistencias de la integración de la modelación

matemática en las aulas de clase apuntan hacia las dificultades en los ámbitos constitutivos del trabajo docente, como: preparación de clases, relación con los estudiantes y sus respectivas familias, estructura administrativa y pedagógica de las escuelas, currículo y cuestiones personales *(e.g.* inseguridad frente a los nuevos desafíos). A nivel local, Villa-Ochoa y López (2011) reportaron la necesidad de que los profesores desarrollen un *sentido de realidad,* es decir, cierta sensibilidad para reconocer situaciones en el marco de las ciencias, la sociedad y la cultura que sean susceptibles de ser matematizados en las aulas de clase. En el mismo contexto, se reportó la necesidad de buscar estrategias para que los profesores superen la visión de los enunciados verbales estereotipados, como la única manera de hacer modelación matemática en las aulas de clase (Villa-Ochoa, 2015).

Como otra necesidad de formación, la literatura también reporta el desarrollo de un conocimiento del profesor. En cuanto a ello, pueden distinguirse tres características que se interrelacionan, a saber: (a) una comprensión del contenido matemático, (b) una comprensión de la multiplicidad de maneras en que se puede desarrollar el pensamiento de los estudiantes, y (c) un conocimiento de las estrategias pedagógicas que se pueden extraer en diferentes contextos para apoyar el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

Para Doerr y Lesh (2011) estas características en sí mismas no captan plenamente la distinción más fundamental en la naturaleza de los conocimientos de los profesores, entre las acciones que los maestros tienen en sus prácticas y las maneras en que ellos ven e interpretan sus prácticas. Tales investigadores señalan que una característica distintiva de una excelente enseñanza se refleja en la riqueza de maneras en las que el profesor interpreta su práctica, no sólo en las acciones que ella toma. Las necesidades de formación que se presentaron, se consideran en el diseño de programas de formación de profesores y se articulan a las maneras, metodologías y ambientes en los que esos programas han de desarrollarse. El Seminario que describimos en este artículo, debía atender a profesores en diversas regiones aisladas entre sí, por ello, pensamos en una metodología *Blended-Learning,* es decir, un ambiente en el que se usaron estrategias presenciales y *online* para desarrollar el currículo propuesto. En el siguiente apartado presentaremos algunos aspectos relativos a esta metodología de aprendizaje.

El ambiente de aprendizaje

En este espacio de formación pretendíamos que se reconocieran los principales elementos referentes a la modelación matemática como un recurso en el aula de clase y como una posibilidad para desarrollar investigación educativa. Bajo estas intenciones, se analizaron algunas situaciones en diversos contextos, a la luz de la modelación matemática y en ellas se reconocieron elementos fundamentales, principales significados, tendencias y perspectivas en la investigación en modelación matemática. Se identificaron las diferentes maneras en que se puede plantear la modelación en el aula de clase con el fin de promover la creación de estrategias e integrarla con las prácticas de los profesores de matemáticas. Al considerar tales dinámicas de actuación estructuramos el Seminario en cuatro ejes temáticos que se mencionan más adelante, los cuales se desarrollaron en un ambiente mixto de aprendizaje *Blended-Learning*.

Blended-Learning es un término que no admite una comprensión homogénea en educación. Graham (2006) señala que en la investigación internacional se encuentra diversidad de interpretaciones relacionadas frente a los componentes que se combinan. Así, este autor señala ambientes en los que el término (*blended*) mixto se refiere a (i) la combinación de medios y

modalidades de formación, (ii) la combinación de métodos y (iii) la combinación de ambientes presenciales (*face-to-face*) y *online*. Para el autor, las dos primeras acepciones están imbricadas en la discusión sobre el rol de los medios y de los métodos en el aprendizaje. Por su parte, de acuerdo con la tercera acepción, Grahan ofrece una definición en la que busca una integración de dos modelos de enseñanza que históricamente permanecen separados, a saber los sistemas de enseñanza tradicional y los sistemas de aprendizaje distribuidos y enfatiza en el rol central de las tecnologías digitales en dicho ambiente.

Güzera y Canera (2014) argumentan que los entornos *Blended-Learning* se perciben útiles, agradables, de apoyo, flexibles y motivadores para los alumnos; pero, estos factores son insuficientes para garantizar el éxito del aprendizaje. Para ello, se hace necesario que los profesores motiven a los estudiantes para una mayor participación en el entorno y encuentren maneras de crear la interacción social a través de una mayor colaboración. Según los autores, la combinación de metodologías presenciales (*face-to-face*) y *online* se debe planificar con precisión con el fin de beneficiarse de este enfoque. Para estos investigadores la pregunta por la manera en que se deben combinar los ambientes y los recursos sigue abierta. En el siguiente apartado describimos el ambiente del Seminario y la manera en que articulamos los recursos presenciales y *online* para atender a los propósitos de formación.

La estructura del Seminario

El Seminario se consolidó en cuatro ejes temáticos que dan fundamento teórico y metodológico a la modelación matemática. El primer eje temático se denominó ***Modelación matemática. Perspectivas, tendencias y desafíos para la educación matemática,*** la discusión se centró en conocer las perspectivas que existen en la investigación y en las prácticas docentes, así como las implicaciones para el aula de clase.

Un segundo eje temático se denominó ***Contextos y problemas en el aula de clase*** y se realizaron precisiones frente al significado de "lo auténtico", cercano o situado y cómo el contexto cumple un papel relevante a la hora de definir la manera de hacer modelación en el aula de clase.

Un tercer eje temático hizo referencia a las diferentes concepciones que puede tomar la modelación matemática. En este sentido se plantearon ideas acerca de la ***Modelación como proceso, actividad, competencia, estrategia didáctica, método de investigación escolar, ambiente de aprendizaje y práctica pedagógica.*** La discusión en este eje temático permitió que los profesores ampliaran el panorama acerca de la manera de proponer la modelación en el aula de clase de acuerdo con la intencionalidad que plantearan para la misma. Además, de generar una toma de conciencia de los modos de concebirla y desarrollarla.

Un cuarto y último eje relacionó ***la modelación con la tecnología en el aula de clase.*** Este momento permitió que los maestros se acercaran al uso de programas como *Tracker* y *Modellus* para considerar las potencialidades que ofrecen los software dinámicos en la construcción de relaciones entre el mundo real y las matemáticas y por tanto, reconocer el papel de la tecnología en un proceso de modelación matemática escolar. Los cuatro ejes temáticos descritos se desarrollaron con una metodología particular, la cual describimos a continuación.

Metodología del Seminario

Dado el carácter teórico y práctico de los objetos de estudio en este espacio de formación y de su denominación, adoptamos la metodología del Seminario Investigativo; es decir, los estudiantes

realizaron lecturas previas, desarrollaron talleres y participaron de las discusiones con base en la bibliografía sugerida. También, participaron de sesiones de trabajo con otras comunidades académicas, entre ellas el Seminario GEMAD- UNIANDES; Seminario Repensar las Matemáticas-México, Red de Educación Matemática de América Central y el Caribe-REDUMATE, Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática-RECOMEM con las cuales se discutieron temas en relación con el objeto de estudio de este Seminario.

Para darle sentido al trabajo conjunto y lograr que los estudiantes tuvieran diálogos con los demás profesores y colegas, se dispuso un espacio en Facebook (https://www.facebook.com/groups/778551425553750/) donde fue activa la participación por medio del chat, comentarios, entre otros.

Las actividades allí dispuestas se programaron en periodos de tiempo específico, correspondiente al desarrollo de cada eje temático. Una vez los estudiantes abordaron las discusiones y los aspectos metodológicos acerca de este tipo de estrategia, identificaron una situación/fenómeno/problema susceptible de ser modelado, formularon su proyecto e hicieron entregas parciales de sus avances. Posteriormente hicieron una presentación pública de sus resultados por medio de un video.

La evaluación del Seminario

La evaluación se consideró como un proceso de formación que se lleva a cabo de forma integral y continua. En este sentido, consideramos las elaboraciones conceptuales, reflexiones, críticas, propuestas y argumentos de los estudiantes a medida que profundizaron en el estudio de la temática. Por lo tanto, se tuvo en cuenta para el proceso evaluativo: seguimientos para cada eje temático, profundidad de las discusiones en el grupo de Facebook, asistencia y participación en las sesiones sincrónicas.

El proyecto de modelación que se desarrolló a lo largo del semestre, consideró diversos momentos, a saber: creación, ejecución y entrega final. En esta actividad se evaluó la profundidad, calidad e innovación del proyecto, la claridad de la exposición, la capacidad para responder preguntas, la profundidad en los análisis y la capacidad de síntesis. Se dio relevancia a la descripción de la situación o tema objeto de modelación, la precisión frente al cómo y de dónde surge el interés de estudiar el fenómeno a modelar, el plan de trabajo en el que se declara la pertinencia del fenómeno, las maneras en que se recolectaron los datos y cómo se analizaron, la confrontación entre los resultados, la construcción matemática y la situación, las reflexiones y consideraciones frente a la experiencia modeladora.

La modelación a través de proyectos. Una estrategia.

Como indicamos hasta el momento, este espacio para la formación de profesores involucró diversidad de componentes epistemológicos y metodológicos de la modelación, también se ocupó de que los participantes se involucraran en la realización de un proyecto de modelación matemática alrededor de un tema libre. Dicho proyecto posibilitó que los estudiantes vivieran la integración de las matemáticas con otras disciplinas y encontraran aplicaciones a su propia vida. Además, la modelación matemática por proyectos permitió que los profesores en formación consideraran la necesidad de resolver situaciones/fenómenos/problemas y en tanto, un sentido crítico de las matemáticas para la situación particular que cada uno de ellos estudió. En correspondencia con lo anterior, los maestros en formación comprendieron conceptos y procedimientos matemáticos,

puesto que analizaron el comportamiento de situaciones/fenómenos/problemas para alcanzar una posible solución.

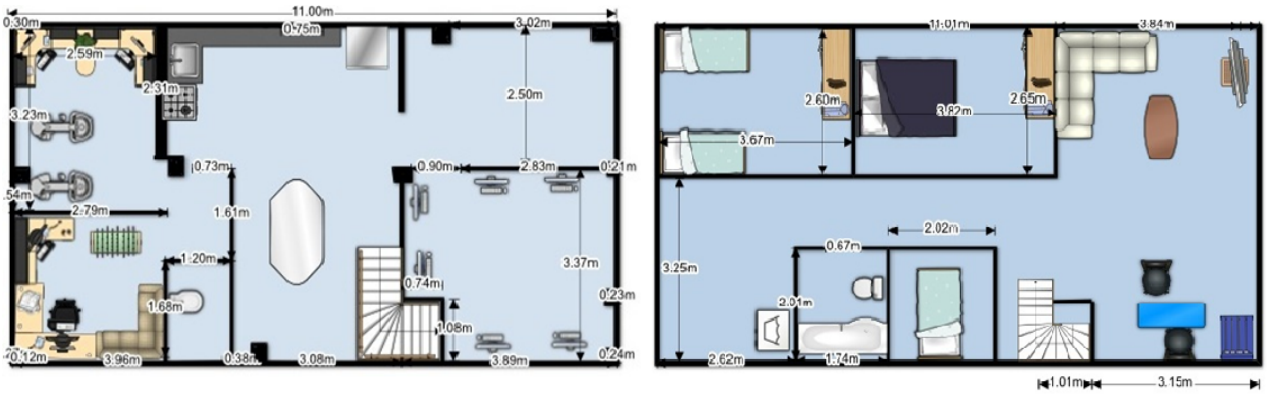
ALGUNOS RESULTADOS

Como indicamos en el apartado anterior, los estudiantes se enfrentaron a la elaboración de los proyectos de modelación. Dichos proyectos tuvieron su génesis en los situaciones/fenómenos/problemas que los profesores consideraron relevantes en sus experiencias sociales, como se evidencia en las temáticas que seleccionaron, las cuales fueron: *tiempos escolares, actividad de un mensajero, recursos naturales, solución de problemas financieros, promociones de productos para el hogar, empaques de los productos, el ritmo cardiaco, relación entre el ángulo de inclinación de un terreno y la superficie real para la construcción, descuentos, la redistribución espacial de una vivienda y la adecuación de espacio en una zona escolar.*

A manera de ejemplo, analizamos el caso del profesor Carlos (Seudónimo) quien aprovechó la realización del proyecto para dedicarse a estudiar la redistribución espacial de su vivienda. Esta idea se presentó al colectivo de formadores y demás estudiantes. Dicho diálogo permitió a Carlos cuestionarse frente a la naturaleza de su objeto de estudio, el plan para la recolección de datos y análisis frente a los alcances que él esperaba en su proyecto. A partir de esta presentación, en el colectivo de trabajo, se ofrecieron recomendaciones para el desarrollo del proyecto.

En la recolección de los datos, el profesor tomó las medidas de los diferentes espacios de su casa y generó un modelo que le permitió esquematizar y sistematizar los datos que se asociaron al rediseño general. Apoyó su trabajo en programas disponibles en la web como lo son el software *Google Sketchup* para realizar modelos 3D y la página web http://floorplanner.com/ como lo ilustra la Figura 1.

Figura 1. Propuesta de diseños



Por medio de los modelos gráficos de la redistribución espacial, el profesor en formación, hizo visible las ideas alrededor de su diseño para posteriormente, comparar las dimensiones de algunos espacios como lo indica la Figura 2.

Figura 2. Comparación de las propuestas por el profesor para su vivienda

Diseño actual	Área
Piso 1	
Negocio de internet.	8.89m²
Sala piso 1.	12.85m²
Cocina.	7.48m²
Habitación niños.	9.7m²
Habitación principal.	8.36m²
Lavadero.	7.34m²

Diseño propuesto	Área
Piso 1	
Negocio de internet.	12.34m²
Local piso 1	9.75m²
Cocina y comedor	17.705
Biblioteca y gimnasio	8.36m²
Sala de entretenimiento	7.34m²

Diseño actual	Área
Piso 2	
Sala	18.64m²
Habitación 1	10.14m²
Habitación 2	8.11m²
Cocina	4m²
Baño	3.43m²
Lavadero.	6.76m²
Balcón	NA

Diseño propuesto	Área
Piso 2	
Sala	21.64m²
Habitación Ppal	10.11m²
Habitación niños	8.08m²
Habitación niña	4m²
Baño	3.43m²
Lavadero.	6.43m²

El profesor en formación discutió los avances en sus producciones con una de las profesoras del Seminario. Para estas discusiones se usaron principalmente correo electrónico, encuentros virtuales en Skype y el chat de Facebook. Una vez Carlos definió los planos y argumentó su elección, entró en contacto con un ingeniero civil, quien analizó la propuesta y realizó sugerencias acerca de las medidas mínimas de los espacios. Con base en dichas sugerencias, Carlos refinó el bosquejo que diseñó en el software y definió un modelo final. Para divulgar los resultados finales, Carlos realizó un video, lo cargó en YouTube y lo agregó al Grupo de Facebook con el fin de dar a conocer entre sus compañeros el trabajo. Al finalizar su proyecto Carlos expresó:

> *A nivel académico me ha permitido explorar otras áreas del conocimiento, en lo que tiene que ver con el campo de la construcción de viviendas y el diseño de planos en computador aunque sea en nivel básico. Ha posibilitado ver que en el diseño actual de la vivienda se puede mejorar y aunque sea poco el espacio en área que se aumenta o disminuye, es mucho lo que se aporta al bienestar familiar. En el modelo obtenido se muestra en detalle la cantidad de área que se reorganiza. Quedan abiertas las posibilidades a nivel personal de seguir indagando por el proyecto, que con el fin de convertirlo en realidad.*

En estas reflexiones de Carlos es posible observar una valoración positiva de su experiencia sobre la modelación matemática, puesto que, el profesor en formación valoró no solo la posibilidad de trascender el carácter procedimental de la matemática, sino que también valoró su experiencia a través de la cual usó la geometría para comprender una problemática familiar y proponer alternativas para solucionarla.

ALGUNAS REFLEXIONES Y CONSIDERACIONES FINALES

Los proyectos planteados por los profesores participantes de este programa de formación se relacionaron con temas derivados de sus experiencias y necesidades personales. En tales temáticas los profesores reconocieron la modelación matemática más que una tarea clásica que se propone en los *word problems.* El desarrollo de proyectos, como los descritos en este artículo, proporcionaron a los profesores experiencias a través de las cuales identificaron maneras de matematizar fenómenos sociales, para que las matemáticas escolares y algunos fenómenos puedan articularse a través de procesos de modelación matemática.

La realización de un proyecto de modelación requiere de un acompañamiento continuo por parte de los formadores y de una confrontación con los diferentes actores en proceso educativo. Las redes sociales, videoconferencias y el correo electrónico se constituyeron en medios fundamentales para

atender a estos requerimientos; más allá se ser mecanismos de divulgación, se convirtieron en medios para la discusión académica, la problematización y la confrontación a través de las cuales se logra una compenetración con el fenómeno que se estudia a través de la matemática.

El proyecto que desarrolló Carlos se convierte en evidencia de la existencia de profesores para quienes la modelación matemática se constituye como una oportunidad para comprender situaciones/fenómenos/problemas inherentes a su cotidianidad, reconocer en ellos problemáticas que pueden estudiarse a través de las matemáticas. Este episodio ratifica nuestra visión de la modelación matemática como una práctica pedagógica en la cual los estudiantes (en este caso profesores) se involucran como protagonistas y sujetos productores del saber con respecto a la misma.

Agradecimientos al Departamento Administrativo de Ciencias, Tecnología e Innovación-COLCIENCIAS y al Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de nível Superior-CAPES (Brasil) por la financiación del proyecto “La formación posgraduada de profesores de Matemáticas en un ambiente online” contrato 282-2014.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Doerr, H. M., & Lesh, R. (2011). Models and Modelling Perspectives on Teaching and Learning Mathematics in the Twenty-First Century In G. Kaiser, Werner, R. Borromeo-Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 247-268). New York: Springer.

Frejd, P. (2012). Teachers’ conceptions of mathematical modelling at Swedish Upper Secondary school. *Journal of Mathematical Modelling and Application,* 1(5), *17*-40

Graham, C.R. (2006). Blended learning systems: Definitions, current trends and future directions. En C. J. Bonk, & C. R. Graham (Eds.), *The Handbook of blended learning: Global perspectives, local designs* (pp. 3-21).San Francisco: Pfeiffer.

Kaiser, G., y Maaß, K. (2007). Modelling in lower secondary classrooms—Problems and chances. En W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, & N. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 99-108). New York: Springer.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. Bogotá: Magisterio

MEP-Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2013). *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. Distribución de conocimientos en la implementación de los programas de Matemáticas para la Enseñanza Primaria*. Algunas sugerencias. San José, Costa Rica: MEP.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics* (Vol. 1). USA: National Council of Teachers of Mathematics.

SEP. (2011). *Plan de estudios 2011. Educación Básica* (2011th ed. pp. 1–157). México, D. F.: Secretaría de Educación Pública.

Silveira, E., y Caldeira, A. D. (2012). Modelagem na sala de aula: resistências e obstáculos. *Bolema*, 26(43), 1021-1047.

Villa-Ochoa, J. A. y López, C. M. (2011). Sense of Reality through mathematical modeling. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in the teaching and learning of mathematical modelling –ICTMA14.* (pp. 701-711) New York: Springer.

Villa-Ochoa, J. A. (2015). Modelación Matemática a partir de problemas de enunciados verbales: Un estudio de caso con profesores de matemáticas. *magis*, *Revista Internacional de Investigación en Educación,* 8(16)**.** Doi: 10.11144/Javeriana.M8-16.MMPE

LA ACTITUD CRÍTICA Y LA INTERACCIÓN EN PROFESORES DE MATEMÁTICAS QUE INVESTIGAN SU PRÁCTICA. DESARROLLOS LOGRADOS A TRAVÉS DE UNA PROPUESTA DE FORMACIÓN

Ingrid Cabezas Tenorio, Paola Córdoba Villamil, José Torres Duarte
Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Colombia)
Ipcabezast@correo.udistrital.edu.co, pacordobav@correo.udistrital.edu.co, jotorresd@udistrital.edu.co

Palabras clave: crítica, interacción, investigación, práctica, trabajo colaborativo.

Key words: critique, interaction, research, practice, collaborative work.

RESUMEN: Se reporta el desarrollo de las características crítica e interacción asociadas a la acción de investigar, como resultado de la participación de tres profesores en una propuesta de formación en investigación, diseñada en el marco del proyecto: "Formación en y hacia la investigación de profesores de matemáticas en ejercicio" (Colciencias-UD), cuyo propósito fue formar en investigación, investigando la propia práctica. Bajo el enfoque de investigación cualitativa se plantearon indicadores que permitieron identificar desarrollos de los profesores en las características y la influencia de la propuesta en dicho desarrollo, destacando la importancia del trabajo colaborativo en el proceso de formación.

ABSTRACT: This article reported the development of critical and interaction features associate to the investigate action, as a result of the participation of three teachers in a research training proposal, designed under the framework of the project: Training in and to research of practicing mathematics teachers" (Colciencias-UD), whose purpose was to form in research, researching their own practice. Under the qualitative research approach, raised indicators that allowed identify teacher's development of in the features and the influence of the proposal in this development, emphasizing the importance of collaborative work in the training process.

CONTEXTUALIZACIÓN

Partiendo del reconocimiento que autores como Porlán (2001), Perafán y Aduriz-Bravo (2005) hacen a la investigación sobre la práctica como medio para la construcción de conocimiento profesional y mecanismo de transformación de ésta, se desarrolló el proyecto *Formación en y hacia la investigación de profesores de matemáticas en ejercicio*, financiado por la Universidad Distrital Francisco José de Caldas y COLCIENCIAS. En él se configuró una propuesta de formación en investigación, sobre la base de identificar teóricamente un *deber ser* de profesor que investiga su práctica, estructurado en características.

Bajo las dinámicas del trabajo colaborativo, la propuesta promovió el desarrollo de las características estrategia, problematización, interacción y actitud crítica, mediante actividades de investigación sobre inquietudes que surgen en la práctica profesional del profesor de matemáticas. La propuesta constaba de diez actividades que incluían sesiones grupales (encuentro del equipo de profesores analizados) y sesiones plenarias (encuentro de todos los equipos de profesores).

Enmarcado en la fase de análisis de resultados del proyecto mencionado, este trabajo tiene por finalidad presentar los desarrollos logrados en las características *crítica* e *interacción*, en tres profesores que hicieron parte de la implementación de la propuesta de formación.

REFERENTE TEÓRICO

El referente teórico fue tomado de la conceptualización de características del profesor que investiga su práctica expuestas por Sánchez, Torres y Fonseca (2013), quienes definen la crítica como:

> (…) actitud permanente por reconocer y cuestionar elementos o situaciones de su práctica profesional para comprenderlos y reaccionar frente a ellos intentando persuadir a sí mismo o a otros de la posibilidad de que existen formas alternativas de comprenderlas y de actuar frente a ellas. (p. 1805)

Cada característica cuenta con sub-características o descriptores que definen aspectos que hacen parte de un profesor que la posee. En el caso de crítica las que están asociadas a ella son: ser reflexivo, apertura al cambio, ser inquisitivo, ser buscador de la verdad, razonabilidad, ser analítico y ser social (Sánchez, Fonseca & Piedra, 2013b).

Adicionalmente, como la investigación se centró también en el desarrollo de la característica interacción, Sánchez et al. (2013) la definen como "(...) la actitud permanente de relacionarse con otros para construir conocimiento profesional que trascienda" (p. 1810). Las sub-características asociadas a la interacción son: trabajar en equipo, incentivar la investigación, construir colaborativamente y socializar (Sánchez et al., 2013b).

Partiendo de estos elementos teóricos establecidos en el marco del proyecto acerca de las conceptualizaciones en torno a las características del ser investigador de su propia práctica, se diseñaron indicadores para determinar la presencia de las características en las acciones investigativas de los profesores y los desarrollos que se generan en ellas a partir de su participación en la propuesta de formación, bajo la mirada de varios autores como Zeichner (1999), Zeichner & Liston (1996), Villalobos & Cabrera (2009), Bernal & Nateras (2009), Revilla (2010) y Hernández (2009).

Algunos de los indicadores que sirvieron como elemento clave para identificar en los profesores la presencia de las características asociadas al ser investigador, en cuanto a la actitud crítica son los siguientes:

Ser reflexivo:

- Comunica ideas que revelan teorías propias sobre su práctica profesional y que pueden servir como insumo al momento investigativo que se está llevando a cabo.
- Expresa las situaciones de tensión o crítica que ha vivido en la práctica que pueden servir para el problema de investigación.
- Ejemplifica con información de su práctica, diversos momentos del proceso investigativo; ejemplo, en debates, disertaciones, deliberaciones, informes, etc.

Apertura al cambio:

- Modifica sus puntos de vista sobre la base de argumentos de sus compañeros y/o de los tutores.
- Acepta argumentos certeros de sus compañeros y/o de los tutores, incluyéndolos en sus propios argumentos.
- Indaga aspectos que muestren nuevas y diversas visiones sobre un tema determinado en el proceso de investigación.

Ser inquisitivo:

- Hace preguntas sobre aspectos de la práctica, que puedan aportar al proyecto de investigación.
- Se cuestiona acerca de argumentos propios y ajenos para contribuir efectivamente en el grupo.
- Formula preguntas que van más allá de explorar un hecho desconocido y pasan a ser preguntas que cuestionan los fundamentos ya establecidos.

Ser buscador de verdad:

- Indaga para encontrar respuesta a diversas preguntas que surgen en el proceso investigativo.
- Pide a sus compañeros que ahonden en sustentaciones haciendo uso de aspectos de su práctica o de la teoría.
- Hace referencia a diferentes y variadas fuentes para dar sustento a sus ideas entorno al problema de investigación y su desarrollo.

Razonabilidad

- Argumenta y justifica sus ideas sobre la base de conocimientos teóricos y/o prácticos y los aplica en el desarrollo del proyecto.
- Cuestiona, analiza y razona los argumentos mencionados por sus compañeros de grupo, en debates y conversaciones, para construir argumentos sólidos para el proyecto de investigación.

- Cuando una idea le parece razonable hace conjeturas, analogías, asociaciones con ideas desde la práctica y/o la teoría con el propósito de construir fundamentos para el proyecto de investigación.

Ser analítico:

- Tiene en cuenta diferentes aspectos que le permiten considerar una experiencia como posible problema de investigación.
- Identifica y expresa variables, componentes, partes, aspectos de situaciones de su práctica y las involucra en el problema de investigación.
- Tiene en cuenta que existen diversas formas de concebir, describir, interpretar un mismo fenómeno de la práctica y/o la investigación.

Ser social:

- Expresa su interés en mejorar su práctica educativa a través del proceso de investigación, apoyándose en sus pares para abordar los problemas prácticos del aula.
- Hace comentarios y expresa opiniones que reflejan que se percibe como un ente transformador de la sociedad, a través de su labor docente por lo tanto menciona la aplicabilidad que ha dado a las consultas, debates, comentarios y consejos de sus compañeros en torno a la temática de investigación en diversos momentos de su práctica.
- Expresa situaciones de la sociedad actual, que se ven reflejadas en el aula de clase y en su práctica profesional, con el fin de debatir posibles soluciones con sus compañeros y por lo tanto mejorarla.

Cabe resaltar que los indicadores que permitieron observar la presencia de la interacción en los profesores partícipes de la propuesta de formación, no surgieron como resultado de este estudio, por tanto no se reportan.

METODOLOGÍA DEL ESTUDIO

Se adoptó la investigación cualitativa como enfoque, la metodología de estudio de caso para el tratamiento de la información obtenida luego de la participación de los profesores en las actividades propuestas. Se usaron protocolos como instrumento de sistematización y el análisis de estos se enfocó principalmente en tres aspectos: la descripción de los momentos de participación de los profesores en las actividades propuestas; la identificación de las dos características en tales participaciones, por medio de los indicadores diseñados para tal fin y, el pronunciamiento de la incidencia de la propuesta de formación en las características identificadas.

Los estudios de casos corresponden a tres profesores de matemáticas en ejercicio en colegios de Bogotá, que no tenían formación en investigación o formación postgradual y estaban interesados en hacer parte de la propuesta de formación en investigación.

CONCLUSIONES

Como resultados alcanzados fue posible verificar el desarrollo de las características *crítica* e *interacción* en los profesores objeto de estudio.

En cuanto a la *crítica*, se evidenció que la cercanía de la investigación que emprendieron los profesores con su propia práctica, benefició la reflexividad que estuvo en constante desarrollo, pues inicialmente no había retrospección de la práctica y finalmente la experiencia de los profesores en el aula se convirtió en fuente inagotable de teorías propias, que posteriormente se pusieron en cuestionamiento y en la indagación descubrieron teorías consolidadas que contrastaron con la información que poseían. Otro aspecto de la crítica que tuvo grandes desarrollos fue el análisis de la pertinencia de las ideas de los otros profesores que llevó a debates respetuosos entre ellos.

Con respecto a la *interacción*, fue favorecida por el trabajo colaborativo y las dinámicas que este trae consigo. Se evidenció desarrollos propios del trabajo en equipo de los profesores, quienes inicialmente manifestaron tener poco acercamiento a sus compañeros de profesión y posteriormente lograron establecer grupos de trabajo con intereses afines en investigación sobre su propia práctica; el trabajo en equipo se convirtió en aspecto fundamental para la implementación de la propuesta de formación, puesto que fue el eje por el cual se sustentaron las actividades y se lograron resultados en el ámbito investigativo para los profesores en formación, al darles herramientas para debatir, argumentar y justificar las ideas a investigar.

En esta misma línea, los profesores mostraron desarrollos al comunicar sus avances en investigación constantemente, porque progresivamente empezaron a tomar la palabra en las discusiones y disertaciones voluntariamente, sus aportes eran constantes y cada vez deseaban hacer más comprensibles sus ideas para aportar a los demás grupos.

A partir de estas afirmaciones, se puede concluir que dichos desarrollos en las actitudes *crítica* e *interacción* fueron fruto de la propuesta de formación por cuanto creó espacios individuales y grupales de reflexión, búsqueda y contrastación de información, de debate de ideas propias y ajenas, de promulgación de ideas nuevas, de discusión y búsqueda de acuerdos y cumplimiento de los mismos; claramente las actividades ponían un acento en tales características, que con las acciones realizadas por los profesores validaron la intención de la propuesta, de formar en investigación por medio de acciones investigativas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bernal, M. y Nateras, J. (2009). La práctica del profesor reflexivo: Desarrollando competencias. *Actas del Congreso Iberoamericano de Educación*, (pp. 1-5). Buenos Aires: Congreso Iberoamericano de Educación.

Hernández, I. (2009). El docente investigador como creador de conocimiento. *Tumbaga 1* (4), 185-198.

Perafán, G. y Aduríz, A. (2005). *Pensamiento y conocimiento de los profesores. Debates y perspectivas*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Porlán, R., Martín del Pozo, R., Martín, J., y Rivero, A. (2001). *La relación teoría-práctica en la formación permanente del profesorado*. Sevilla: Díada.

Revilla, D. (2010). La práctica docente durante el desarrollo de la práctica pre-profesional docente. *Actas del Congreso iberoamericano de educación* (págs. 1-18). Buenos Aires: Congreso Iberoamericano de educación.

Sánchez, B., Torres, J., y Fonseca, J. (2013). Necesidades de formación en investigación. Algunas acciones para su determinación. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 26, 1803-1815. Bogotá: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Sánchez, B., Fonseca, J., Piedra, D. (2013b). Necesidades de formación en investigación detectadas en profesores de matemáticas de básica y media en Bogotá (Colombia). *Memorias VII CIBEM*, 5370-5377. Uruguay: Congreso Iberoamericano de Educación Matemática.

Villalobos, J. y Cabrera, C. (2009). Los docentes y su necesidad de ejercer una práctica reflexiva. *Teoría y Didáctica de las ciencias sociales 14*, 139-166.

Zeichner, K. M. (1999). El maestro como profesional reflexivo. *Memorias del 11º University of Wisconsin Reading Symposium: «Factors Related to Reading Performance»*. Milwaukee: University of Wisconsin.

Zeichner, M. y Liston, D. (1996). Historical roots of reflective teaching. En Erlbaum, L. (1996). *Reflective Teaching. An Introduction*. Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

ESTRATEGIAS QUE UTILIZAN LOS DOCENTES EN FORMACIÓN PARA RESOLVER PROBLEMAS DE CONTEO

Ana María Martínez Blancarte, Ana María Ojeda Salazar
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (México)
amatinezb@cinvestav.mx; amojeda@cinvestav.mx

Palabras clave: combinatoria, docentes en formación, estocásticos, técnicas de conteo.

Key words: combinatorics, teachers training, stochastics, counting techniques.

RESUMEN: Esta investigación, de orden cualitativo (Vasilachis, 2006), es parte de una más amplia y concierne a la propuesta de la Licenciatura en Educación Primaria (SEP, 2012b) para la idea de combinatoria, incluida en su asignatura "Procesamiento de la Información Estadística" del cuarto semestre. Debido al contenido del curso y a la propia experiencia en formación docente, su enseñanza y las prácticas de docencia en primaria (SEP, 2011c) requieren más tiempo y sincronización. Se reporta el conocimiento deficiente de técnicas de conteo de 52 docentes en formación, su uso preponderante de arreglos rectangulares para identificar el inventario de acomodos de un tipo dado, en detrimento del recurso al diagrama de árbol y a las expresiones matemáticas.

ABSTRACT: This qualitative research (Vasilachis, 2006), part of a wider one, concerns the Bachelor of Elementary Education proposal (SEP, 2012b) for the idea of combinatorics, which is included in the fourth semester course "Processing of Statistical Information". Because of this course content and the personal experience in teacher training, more time and synchronization are required for its teaching and for the students' practices of teaching in the elementary school (SEP, 2011c). Here we report the deficient knowledge of counting techniques of 52 students in training, their priming use of the rectangular arrays to identify the inventory of arrangement of a given type, to the detriment of using other resources such as the tree diagram and mathematical expressions.

INTRODUCCIÓN

Diversas investigaciones han señalado el tratamiento insuficiente de los temas de estocásticos en los distintos niveles de la educación matemática en México (por ejemplo, Perrusquía, 1998; Flores, L., 2002; Carballo, 2004; Vázquez, 2004; López, 2006; Rivera, 2011; Salcedo, 2013; Torres, 2013), así como la falta de conocimiento de estocásticos de docentes de educación básica en activo (por ejemplo, Limón,

1995; Alquicira, 1998; Elizarraras, 2004; Flores, M., 2009), lo cual requiere investigar la formación docente en estocásticos en la Licenciatura de Educación Primaria. En la reciente reforma a los planes y programas para la Educación Normal (SEP, 2012b) se dedica el cuarto semestre a estocásticos en la Licenciatura en Educación Primaria, con la asignatura "Procesamiento de la Información Estadística". Por la recencia de esta inclusión, se pretende investigar las características de la formación docente en estocásticos para la educación primaria, dadas también las reformas cercanas (SEP, 2009 y 2011c) a esta última. De particular interés aquí es la comprensión de los docentes en formación de las técnicas de conteo, luego de que arriban al cuarto semestre de la licenciatura con el conocimiento de esas técnicas adquirido en su formación antecedente básica y en el nivel medio superior.

Heredia (1998) investigó la comprensión de técnicas de conteo de 100 alumnos de secundaria. Para ello, diseñó dos versiones de cuestionarios: una plantea situaciones de conteo y la otra versión plantea situaciones probabilísticas. Diseñó dos entrevistas, cuatro sesiones de actividades sobre combinatoria y probabilidad. Concluyó que los problemas sobre la regla del producto tuvieron mayor número de respuestas transferidas a la versión de probabilidad. En el cuestionario de conteo sólo el 23% de los alumnos contestó correctamente; en el de probabilidad tuvieron dificultades al calcular el número de los casos favorables. La permutación circular fue la operación más difícil para los estudiantes; la de combinación fue mejor empleada en comparación con la de permutación con o sin repetición. La investigadora identificó dos enfoques en las respuestas de los alumnos a los problemas de probabilidad: el subjetivo y el teórico. Un alumno aplicó el enfoque subjetivo por imitación, en un segundo momento pasó de la aplicación del enfoque subjetivo al teórico y, por último, estableció la relación existente entre los casos favorables y posibles. Los estudiantes de bajo desempeño mostraron carencias en el uso del diagrama de árbol, de tablas y de expresiones numéricas; los de buen desempeño mostraron carencia en el uso de las tablas y de las expresiones numéricas.

Las preguntas que planteamos en esta parte de la investigación son:

- ¿Qué caracteriza a la comprensión de ideas de combinatoria de los maestros en formación para primaria?
- ¿Qué elementos para la enseñanza de ideas de combinatoria a alumnos de primaria proporciona el Plan y Programas 2012b (SEP) en la formación de profesores de primaria?

Los objetivos que perseguimos son:

- Identificar el Conocimiento Matemático (técnicas de conteo) para la Enseñanza (CME) de los docentes en formación para la educación primaria.
- Identificar sus dificultades de comprensión de ideas de combinatoria que repercutirían en la enseñanza en primaria que impartirían.

MARCO DE REFERENCIA

Heitele (1975) propuso diez ideas como fundamentales para un curriculum de estocásticos: medida de probabilidad, espacio muestra, regla de adición, regla del producto e independencia, combinatoria, equidistribución y simetría, modelo de urna y simulación, variable aleatoria, ley de los grandes números y muestra. Señaló que el diagrama de árbol es una representación icónica que favorece la visualización de la estructura de la multiplicidad de pasos de un experimento aleatorio, así como de todos los resultados posibles. De acuerdo al modelo evolutivo del pensamiento que proponen Piaget e Inhelder (1975), es en la etapa de las operaciones formales cuando los niños acceden a las operaciones de combinatoria (a partir de los 13 a 14 años de edad). Fischbein (1975) afirma que entre los 11 y 12 años, los niños con una enseñanza apropiada pueden asimilar los procedimientos enumerativos al construir diagramas de árbol; entre los 13 a 15 años, los niños pueden asimilar procesos combinatorios. El diagrama de árbol prefigura la regla de la suma y del producto de probabilidades y su uso contribuye a evitar que los niños se limiten al razonamiento determinista y consideren lo posible.

Según Ball y Bass (2000), el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (CME) es una composición de contenido matemático y pedagogía. Cualquier docente, de cualquier asignatura, lo requiere en su práctica diaria. Las facetas del CME son: a) *Conocimiento Matemático Especializado*, al que Hill, Ball y Schilling (2008) definen como el contenido adicional que va más allá del conocimiento matemático "común" para la enseñanza de un tópico matemático, si bien no especifican si "común" sería el conocimiento enseñado tal cual; b) El *Conocimiento de estudiantes* es el que se relaciona con los conocimientos de contenido y el razonamiento de los alumnos, es decir, el conocimiento de los conceptos, las estrategias, dudas, confusiones o ideas erróneas de los educandos sobre un tópico matemático; y c) El *Conocimiento para la enseñanza* es la fusión del conocimiento de matemáticas y de pedagogía para el diseño y planeación de la enseñanza en el aula.

Dreher y Kuntze (2015) investigaron la atención de los profesores en la clase de matemáticas a las representaciones múltiples como parte de su conocimiento profesional. Identificaron una falta de conciencia de los profesores en servicio y en formación de que "el éxito del pensamiento matemático, por lo general, depende de la interacción de las diferentes representaciones" (p. 109). Los docentes en servicio relacionaron significativamente la capacidad de cambiar las representaciones como algo esencial para el desarrollo de la comprensión matemática de los estudiantes. En cambio, los docentes en formación presentaron debilidades en la advertencia por el contenido específico de las representaciones múltiples, a pesar de que recientemente habían asistido a cursos de matemáticas. El conocimiento profesional de los docentes debe incluir el del papel de las representaciones múltiples en el aprendizaje de las matemáticas como un requisito previo importante para la atención de un tema en específico en las interacciones alumno-docente).

MÉTODO

Se realizó una investigación documental (Cortés y García, 2003) de las propuestas institucionales para estocásticos de la Licenciatura para Educación Primaria (SEP, 2012b) y de Matemáticas para Primaria (SEP, 2011c) y se identificó la consecuencia entre ambas.

Para identificar el dominio de conceptos de estocásticos al inicio de la asignatura "Procesamiento de la Información Estadística", de 52 estudiantes (19 a 31 años de edad) de cuarto semestre de la Licenciatura de Educación Primaria, se les aplicó un cuestionario, diseñado por tres docentes de la Licenciatura, con 27 reactivos: nueve fueron de relacionar columnas, 12 de opción múltiple y seis abiertos; de todos ellos, sólo los reactivos 3 y 10 (véase la Tabla 1) plantearon problemas de conteo (combinaciones y permutaciones). El cuestionario se presentó impreso a los normalistas para su contestación individual en dos horas.

A las lecciones del libro de texto de primaria y a las respuestas de los normalistas al cuestionario se les aplicó la célula de análisis (Ojeda, 2006): Situación referente; Ideas fundamentales de estocásticos implicadas; Otros conceptos matemáticos requeridos; Recursos semióticos; y Términos empleados para referirse a ideas de estocásticos.

Tabla 1. Caracterización de los reactivos de combinatoria del cuestionario.

Reactivo	Ideas fundamentales	Otros conceptos matemáticos	Recursos semióticos	Términos empleados
3. Un saco contiene 6 bolas blancas y 5 negras. Halle el número de posibilidades para sacar 4 bolas del saco, si:	Combinatoria (combinaciones) Modelo de urna	Números naturales y sus operaciones.	Lengua natural escrita, signos numéricos.	Posibilidades Contener, sacar
a) Las bolas son de cualquier color				Cualquier
b) Dos bolas sean blancas y dos negras				Dos de cada color
c) Todas del mismo color.				Todas, mismo color
10. Con tres letras, a, b y c, ¿cuántas palabras distintas de tres letras se pueden formar si:	Combinatoria (permutaciones)	Números naturales y sus operaciones.	Lengua natural escrita, signos numéricos.	Cuántas, distintas
a) las tres letras sean distintas?	(sin repetición)			Distintas
b) dos letras, por lo menos, sean idénticas?	(con repetición)			Por lo menos Idénticas

RESULTADOS DEL ANÁLISIS

Propuesta institucional de la Licenciatura para Educación Primaria (SEP, 2012b). La asignatura "Procesamiento de la Información Estadística", del 4º semestre de la licenciatura, incluye en su unidad 2 al principio fundamental del conteo (permutaciones y combinaciones), el concepto de probabilidad clásica y diagramas de árbol. Para el principio fundamental del conteo, no se consideran aspectos de interés para su enseñanza aparte del orden, tales como la distinguibilidad o no de los elementos que se cuentan, o su exclusión o no. Tampoco se proporciona la información pertinente del orden en la enseñanza primaria de las técnicas de conteo. Piaget e Inhelder (1951)

señalaron que las combinaciones aparecen antes de las permutaciones durante el desarrollo evolutivo del niño.

Propuesta institucional de primaria (SEP, 2011c). Los libros de texto vigentes en el ciclo escolar 2014-2015 proponen un escaso tratamiento de estocásticos en todos los grados; este contenido se introduce hasta el tercer grado. 52.17% de los contenidos matemáticos corresponde al eje "Sentido numérico y pensamiento algebraico", 33.33% al eje "Forma, espacio y medida"; y sólo 14.49% al eje "Manejo de la información", el cual se destina al análisis y tratamiento de la información, a la proporcionalidad y a funciones. Los libros de texto sólo incluyen tres lecciones en los diferentes grados para introducir combinatoria en primaria (la 46, "Trajes" del bloque V de 2º grado (SEP, 2012a, pp. 87-88); la 16, "Figuras y colores" del bloque I de 3er grado (SEP, 2011a, pp. 38), y la 13, "Combinaciones" del bloque I de 4º grado (SEP, 2011b, pp. 31). El objetivo de estas lecciones (véase la Tabla 2) es más de operatividad aritmética que de identificación de posibilidades.

Tabla 2. Caracterización de las lecciones del libro de texto sobre combinatoria.

Criterio de Análisis	**Nombre de la lección y ubicación**		
	Trajes Lección 46, 2º grado Quinto bloque LA: 87-88 LM: 140-142	*Figuras y colores* Lección 16, 3er grado Primer bloque LA: 38 LM: 54-55	*Combinaciones* Lección 13, 4º grado Primer bloque LA: 31 LM: 49-51
Situación	Combinaciones de ropa, de lámparas por forma y tipos de focos. Formación de números con tres cifras.	Completar tabla con figuras (círculos, rectángulos, triángulos, romboides) y colores (rojo, amarillo, verde, azul, rosa). Marcar figuras según características dadas.	Armar casas con techos y fachadas de colores diferentes. Combinar frutas para postres. Formar parejas de baile.
Ideas fundamentales	Combinatoria (Principio multiplicativo).	Combinatoria (Principio multiplicativo).	Combinatoria (Principio multiplicativo)
Otros conceptos matemáticos	Cifra, números de dos cifras, multiplicación.	Características de figuras geométricas. Multiplicación de enteros.	Multiplicación. Triángulos, rectángulos.
Recursos semióticos	Figuras de blusas, lámparas, focos y números. Lengua natural escrita. Símbolos numéricos.	Tabla y figuras geométricas (círculo, rectángulo, triángulo y romboide). Lengua natural escrita.	Figuras de fachadas de diferentes colores. Lengua natural escrita Números naturales menores de 20.
Términos empleados	Diferentes maneras	Dibujar y colorear figuras	Diferentes, similares, modelo.

En los libros de texto del alumno se privilegia el enfoque aritmético operativo para tratar el principio multiplicativo, pero se podría favorecer la continuación de contenidos de combinatoria en primaria orientándolos hacia lo posible. El libro del maestro incluye ejemplos de soluciones que puede esperar el docente a los problemas planteados a los alumnos. Es decir, se podrían reconsiderar

esas lecciones para la enseñanza de estocásticos en la escuela primaria a niños de 9 a 10 años de edad, en particular hacia las ideas de espacio muestra y combinatoria, como lo afirma Fischbein (1975), mediante actividades diseñadas para tal efecto.

Cuestionario: ideas de combinatoria. Se reveló el conocimiento deficiente de los docentes en formación de las técnicas de conteo (véase la Tabla 3).

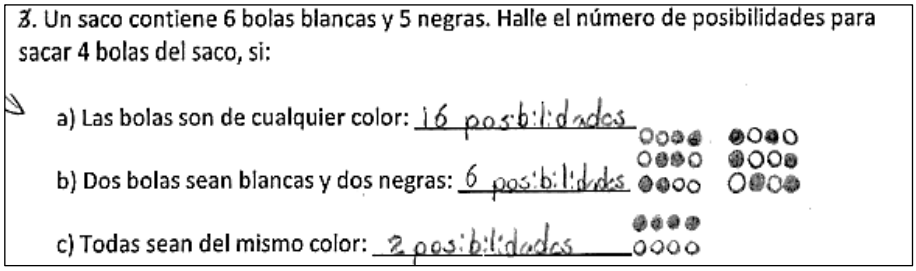
Tabla 3. Tabla 3. Tipos de respuesta a los reactivos 3 y 10 del cuestionario.

Reactivo	Correctas	Respuestas Incorrectas	Omitidas
3. Un saco contiene 6 bolas blancas y 5 negras. Halle el número de posibilidades para sacar 4 bolas del saco, si:			
a) Las bolas son de cualquier color	0	40	12
b) Dos bolas sean blancas y dos negras	0	36	16
c) Todas sean del mismo color.	0	35	17
10. Con tres letras, a, b y c, ¿cuántas palabras distintas de tres letras se pueden formar si:			
a) las tres letras sean distintas?	23	20	9
b) dos letras, por lo menos, sean idénticas?	0	35	17

Sin embargo, incluso si las condiciones de aplicación del instrumento no hubieran permitido que los estudiantes preguntaran si algunos de los incisos podrían implicar o no el reemplazo, ellos deberían haber considerado cada caso y proporcionar la respuesta respectiva.

El reactivo 3, relativo a la regla del cociente, no resultó discriminatorio; alrededor del 71% de los normalistas respondieron sus tres incisos, pero incorrectamente (véase la Tabla 3). En lugar de las respuestas esperadas, a) 330 posibilidades, b) 150 posibilidades, c) 20 posibilidades (respectivamente), obtenidas al aplicar el coeficiente binomial, nueve estudiantes (17%) dibujaron las bolas negras y blancas para enlistar todas las posibilidades y contestar incorrectamente los tres reactivos (véase la Figura 1). De la confusión entre “posibilidad” y “probabilidad”, o bien de la desatención a “número de posibilidades” en el enunciado, resultó que 60% (31) de los estudiantes interpretaron el reactivo como una solicitud de la probabilidad del caso en cada inciso, en lugar del número de posibilidades respectivo, y respondieron $\frac{4}{11}$ al inciso a). De manera semejante, para el inciso b), siete estudiantes (14%) contestaron $\frac{2}{6}$ y $\frac{2}{5}$; es decir, para la combinación más numerosa respondieron con las proporciones de bolas correspondientes a cada color en la combinación. Una estudiante multiplicó las proporciones de bolas en dos subconjuntos de cada color ($\frac{4}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{30}$) e identificó su porcentaje (consideró $\frac{30}{30}$ como el 100% y determinó 53% como el porcentaje correspondiente a la fracción que obtuvo). Sólo un estudiante (2%) comenzó a diseñar un diagrama de árbol pero lo borró y no contestó ninguno de los incisos.

Figura 1. Respuestas al reactivo 3.



El reactivo 10 fue más fácil para los estudiantes, dado que su inciso a) obtuvo 23 (44%) respuestas correctas (6 palabras), aunque para el inciso b) ninguna respuesta fue correcta (21 palabras). Para contestar al inciso a), siete estudiantes (14%) utilizaron el diagrama de árbol, dos (4%) arreglos rectangulares (véase la Figura 2) y seis (12%) enlistaron las ordenaciones de tres signos (véase la Figura 3). Ningún estudiante utilizó el principio multiplicativo, que se trata en primaria.

Figura 2. Arreglo rectangular incompleto

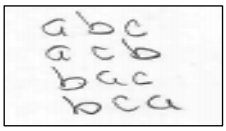
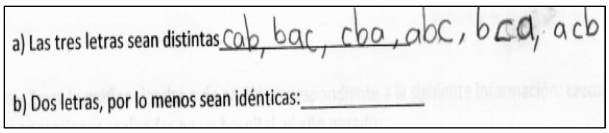


Figura 3. Listado de palabras.



Al igual que los estudiantes de secundaria de la investigación de Heredia (1998), los estudiantes normalistas emplearon representaciones gráficas (diagramas de árbol) y figurales, y procedimientos numéricos para resolver la situación planteada.

COMENTARIOS FINALES

Las propuestas institucionales de la Licenciatura y de la Educación Primaria están desfasadas en cuanto a la enseñanza de la combinatoria, contenido que se trata en licenciatura, pero para primaria el principio multiplicativo tiene fines de operatividad aritmética. A los normalistas se les facilitó más la contestación del reactivo de permutaciones que del de combinaciones, contrario a lo que Piaget e Inhelder (1951) señalan que ocurre con los niños. Los estudiantes utilizaron las fracciones para representar las proporciones de los colores de las bolas en las urnas al confundir "posibilidad" con "probabilidad". Sus recursos semióticos para contestar a los reactivos de combinatoria del cuestionario de diagnóstico fueron los signos numéricos (naturales y fraccionarios), la lengua natural escrita, el figural, el diagrama de árbol, el listado y el arreglo rectangular. Estos recursos estuvieron directamente vinculados con las situaciones planteadas y los estudiantes contaron una a una las posibilidades, sin exhibir el nivel de abstracción esperado con la aplicación del principio multiplicativo. Esto pone de relieve la conclusión a la que llegaron Dreher y Kuntze (2015) en su investigación; el docente debe tener un conocimiento profesional sobre el papel de las múltiples representaciones de un contenido matemático.

El *conocimiento de contenido especializado* de combinatoria y de recursos para operar la idea, como diagrama de árbol, arreglos rectangulares y el simbolismo matemático, es inexistente antes de recibir la formación en el tema en la licenciatura; pero ni siquiera se le podría caracterizar como el conocimiento "común" del tema, al que se refieren Hill, Ball y Schilling (2008). No sólo no se reconocen las combinaciones, sino el principio multiplicativo del conteo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alquicira, Z. M. I. (1998). *Probabilidad: Docencia y Praxis. Hacia una Fundamentación Epistemológica.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics*. (pp. 83-104). Westport, CT: Ablex.

Cortés, G.; García, S. (2003). *Investigación documental*. México: SEP, Dirección General de Educación Superior, Escuela Nacional de Biblioteconomía y Archivonomía.

Carballo, M. T. (2004). *Estocásticos en el segundo grado de educación primaria. Determinismo y azar.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Dreher, A., y Kuntze, S. (2015). Teachers' professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*. 88:89-114.

Elizarraras, S. (2004). *Enseñanza y comprensión del enfoque frecuencial de la probabilidad en el segundo grado de secundaria.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Flores L., P. (2002). *La predicción y el azar: praxis, creencias, saberes y conocimientos del docente de educación primaria*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Flores M., P. (2009). *Medios y enseñanza de estocásticos en el tercer ciclo de educación primaria.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Holland: Reidel.

Heitele, D. (1975). *An epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas*. Educational Studies in Mathematics. 6(2), 187-205.

Heredia, F. (1998). *Ideas de combinatoria y su transferencia a un contexto probabilístico. Un estudio con alumnos de secundaria.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México

Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39 *(4)*, 372-400.

Limón, A. (1995). *Elementos para el análisis crítico de la posible inserción curricular de nociones estocásticas, ausentes en los programas de preescolar y primaria*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

López, J. (2006). *Comprensión de la Ley de los Grades Números en el Tercer Grado de Secundaria.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En Filloy (Ed.) *Matemática Educativa, treinta años* (pp. 257-281). México: Santillana-Cinvestav.

Piaget, J., Inhelder, B. (1951). *The Origin of the Idea of Chance in Children*. W. W. Norton & Compañy INC. New York, 1975.

Perrusquía, E. (1998). *Probabilidad y Aritmética: estudio Epistemológico en el Estadio Medio. Dificultades de Interpretación.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Rivera, M, S. (2011). *Comprensión de Ideas Fundamentales de Estocásticos en el Bachillerato Universitario.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Salcedo, J. (2013). *Razonamiento Probabilístico en el Bachillerato Tecnológico.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Torres, O. (2013). *Limitaciones en la adquisición de Ideas Fundamentales de Estocásticos por estudiantes de Ingeniería: El caso de un Instituto Tecnológico.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

SEP (2009). *Planes y programas de estudio 2009*. Educación Básica. México.

SEP (2012a). *Matemáticas, segundo grado* (Libro para el alumno). México.

SEP (2011a). *Matemáticas, tercer grado* (Libro para el alumno). México.

SEP (2011b). *Matemáticas, cuarto grado* (Libro para el alumno). México.

SEP (2011c). *Planes y programas de estudio 2011*. Educación Básica. México.

SEP (2012b). *Planes y programas de la Licenciatura en Educación Primaria* 2012. México.

Vasilachis, I. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa*. España: Gedisa.

Vázquez, O. (2004). *Enseñanza y comprensión del enfoque clásico de la probabilidad en primer grado de secundaria.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

LEITURA DE GRÁFICOS ESTATÍSTICOS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Eduardo Keidin Sera, Ruy César Pietropaolo
Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil)
eduardosera@gmail.com, rpietropaolo@gmail.com

Palabras clave: alfabetismo estadístico, formación-profesores, gráficos estadísticos

Palavras chave: letramento estatístico, formação de professores, gráficos estatísticos.

Key words: statistic literacy, teacher training, statistical charts.

RESUMEN: El objetivo de este trabajo es discutir el proceso de enseñanza de la lectura y la construcción de cuadros estadísticos con los profesores de matemáticas de educación básica con el fin de contribuir a su desarrollo profesional. Hemos llevado a cabo un diagnóstico para investigar conocimientos de los maestros acerca de los gráficos y su enseñanza. Posteriormente se realizó una capacitación con el objetivo de ampliar la base de conocimientos para la enseñanza de conceptos relacionados con este tema, según las categorías de Ball et al (2008). Sin embargo, en este artículo se presentan algunos de los resultados preliminares del estudio diagnóstico a partir de las categorías de Shulman (1986) y se ha constatado que existe la necesidad de un avance significativo en los profesores en relación con el conocimiento del contenido, del conocimiento pedagógico del contenido curricular y del conocimiento para la enseñanza de los gráficos estadísticos en la educación básica.

RESUMO: O objetivo deste trabalho é discutir o processo de ensino da leitura e construção de gráficos estatísticos com professores de Matemática da Educação Básica, de modo a colaborar com o desenvolvimento profissional destes docentes. Realizou-se um Diagnóstico para investigar os conhecimentos dos professores sobre gráficos e seu ensino. Posteriormente, desenvolveu-se uma Formação, cujo objetivo foi ampliar a base de conhecimentos para o ensino de conceitos referentes a esse tema segundo as categorias de Ball et al. (2008). Entretanto, neste artigo apresentamos apenas alguns resultados prévios do estudo diagnóstico a partir das categorias de Shulman (1986) e constatamos que há necessidade de um avanço significativo por parte dos professores no que diz respeito aos conhecimentos do conteúdo, conhecimentos pedagógicos do conteúdo e conhecimento curricular para o ensino de gráficos estatísticos na Educação Básica.

ABSTRACT: In this paper we aim to discuss the process of teaching reading and constructing of statistical charts with mathematics teachers of basic education in order to contribute with their professional development. We conducted a diagnosis to investigate teachers' knowledge about graphics and its teaching. Then, we developed a training, whose goal was to expand the knowledge base for teaching concepts related to this issue by the categories of Ball et al (2008). However, in this article we present a few preliminary results of the diagnostic study from Shulman's categories (1986) and we found that is needed for a significant advance of teachers with regard to content knowledge, pedagogical knowledge of the content and curriculum knowledge for teaching of statistical graphics in Basic Education.

INTRODUÇÃO

Como é de conhecimento geral, o uso de gráficos está presente no cotidiano das pessoas. Eles são utilizados para a representação de um conjunto de dados, pois fornecem, de maneira mais direta, a leitura, as conclusões e até mesmo previsões. Contudo, por muitas vezes a mídia e outras organizações utilizam os gráficos de forma equivocada. Isso não significa que eles desconheçam as suas diversas representações ou pequem por alguns detalhes conceituais – escala, rótulo dos dados, por exemplo – o que cria situações que podem nos levar a interpretações errôneas ou tendenciosas. Por conta disso, a leitura de gráficos estatísticos deve fazer parte do letramento, necessário para a formação crítica do cidadão.

Nos Estados Unidos da América, por exemplo, o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) – organização não governamental formado por professores de Matemática – especifica o ensino de Estatística e Probabilidade dentro dos subcapítulos de 'Análise de Dados e Probabilidade'. O NCTM (2000) especifica os tópicos a serem abordados em quatro grupos: do jardim de infância até o segundo nível, do terceiro ao quinto nível, do sexto ao oitavo nível e do nono ao décimo segundo nível. Desta forma, cada um dos grupos apresenta 10 subdivisões, sendo uma delas intitulada *Data Analysis and Probability*.

A partir da leitura da proposta do NCTM (2000), observamos que o ensino de Estatística está presente em todos os grupos e, ao término da Educação Básica, os estudantes devem estar aptos a

> formular questões que podem ser tratadas a partir dos dados e coletar, organizar e apresentar informações relevantes para respondê-las; escolher e utilizar métodos estatísticos apropriados para a análise de dados; desenvolver e avaliar inferências e previsões com base no conjunto de dados; entender e aplicar conceitos básicos de probabilidade (NCTM, 2000, p.48).

Já o currículo australiano é destinado aos estudantes desde o Ano Fundamental até o Ano 10. A *Australian Curriculum, Assessment And Reporting Authority* (ACARA), concernente à Matemática, divide-a em três campos de conteúdo: Número de Álgebra, Medida de Geometria, Estatística e Probabilidade. Assim, como no NCTM (2000), os tópicos de Estatística também são abordados em todos os anos.

A partir da análise dos currículos de Matemática desses dois países, além de trabalhar com Estatística, em todos os anos escolares, notamos que ambos sugerem o ensino de gráficos estatísticos desde as séries iniciais até o último ano escolar. No início são apresentados gráficos simples para representar um conjunto de dados, no intuito de agrupar as informações e obter conclusões mais básicas. À medida que o aluno avança de nível escolar, eles aprendem outras formas de representações gráficas – barras, colunas, linhas, histogramas, setores, pontos – que são introduzidos de forma gradual. Paralelamente, os alunos devem investigar mais à fundo a representatividade dos dados, fazer análises críticas e tirar conclusões, e formular questões mais elaboradas.

Outra semelhança é que ambos os currículos abordam tipos de gráficos 'incomuns' no Brasil: *boxplot* e ramo-e-folhas. No NCTM (2000) esses dois gráficos são introduzidos entre os níveis 6 a 8 e são retomados entre os níveis 9 a 12. Por outro lado, o currículo da Austrália insere o gráfico de

ramo-e-folhas no Ano 7 e o *boxplot* no Ano 10. Vale ressaltar que tanto o NCTM (2000) quanto a ACARA sugerem a construção de gráficos estatísticos com e sem o uso de tecnologias digitais.

A construção e interpretação de gráficos estatísticos também fazem parte dos currículos de Matemática da Educação Básica e, no Brasil, essas habilidades são avaliadas em provas nacionais. Portanto, o tema deve ser refletido em processos formativos de professores, tanto inicial quanto continuada, sendo justamente para isso que o professor de Matemática deve estar preparado. Assim,

> Estar alfabetizado [...], supõe saber ler e interpretar dados apresentados de maneira organizada e construir representações, para formular e resolver problemas que impliquem o recolhimento dos dados e a análise das informações (Brasil, 1997, p. 84).

Os PCN (1997, 1998) dividem o Ensino Fundamental em quatro ciclos e o estudo de Probabilidade e Estatística são retratados no bloco 'Tratamento das Informações'. Nos dois primeiros ciclos, o professor deve desenvolver atividades a partir do conhecimento dos alunos, observar os acontecimentos ao redor dos estudantes e promover situações para fazer previsões e desenvolver as noções iniciais de Probabilidade e Estatística. Nos terceiro e quarto ciclos, sugere-se o desenvolvimento do raciocínio estatístico por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a coletar, organizar e analisar informações, formular argumentos e fazer inferências convincentes. Este é o momento das investigações, resolução dos problemas e criação de estratégias com argumentos e justificativas plausíveis.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) enfatizam a necessidade de utilizar as aplicações matemáticas sobre questões e problemáticas do cotidiano, o que também envolve habilidades de descrever e analisar grandes conjuntos de dados. Isso requer a coleta de uma amostra e, com base nela, fazer inferências, provisões e tirar conclusões sobre a população.

Assim, consideramos que a leitura e a construção de gráficos estatísticos devem compor todas estas etapas da Educação Básica. Todavia, apesar dos gráficos serem uma forma rápida de apresentar os dados ao leitor,

> deve-se perceber que diferentes gráficos podem produzir diferentes pontos de vista dos fenômenos sob investigação [...] e eles podem ser intencionalmente construídos para enganar ou destacar/ocultar uma tendência ou diferença específica" (Gal, 2005, p. 60).

Arteaga, Batanero, Contreras e Cañadas (2012) afirmaram que, em muitos países, o ensino de gráficos estatísticos faz parte do currículo da Educação Básica. Apesar disso, alunos e professores da educação primária não interpretam nem compreendem plenamente os gráficos estatísticos. Isso ocorre pois a inclusão da Estatística no currículo de Matemática ainda é recente, inclusive no Brasil – sendo introduzido somente a partir dos PCN (1997, 1998). Enfim, o processo de interpretação gráfica é uma habilidade importante, embora não seja uma tarefa simples, em que "muitas vezes a interpretação de gráficos estatísticos é negligenciada em pesquisas e formação de professores" (Arteaga et al*.,* 2012, p.272).

Gal (2005) é mais específico ao discutir sobre o conhecimento estatístico necessário ao letramento estatístico. Para ele, não basta apenas interpretar os dados, devemos compreender que uma determinada amostra, a depender de como foi coletada, pode ser representativa da população ou tendenciosa. Batanero e Godino (2005) também enfatizam a necessidade dos dados, pois a

estatística é a base da investigação estatística, sendo que muitas situações do cotidiano somente podem ser entendidas através dela.

Dessa forma, nossa pesquisa discute resultados parciais (fase diagnóstica) de uma pesquisa mais ampla, cuja finalidade é a discussão sobre os processos de ensino e aprendizagem de leitura e construção de gráficos estatísticos com professores de Matemática da Educação Básica, de modo a colaborar com o conhecimento profissional docente a respeito desse tema.

Os resultados dessa fase diagnóstica foram analisados a partir das categorias de Shulman (1986) – conhecimento do conteúdo especializado, conhecimento pedagógico do conteúdo e conhecimento curricular – por entendermos que elas seriam suficientes para a coleta e análise dos dados nesta primeira fase da pesquisa.

De acordo com Shulman (1986), o conhecimento do conteúdo especializado se refere à organização do conhecimento na mente do professor. Portanto, além dos domínios dos tópicos a serem ensinados, os docentes também devem conhecer fundamentos mais aprofundados sobre a temática, saber a relevância prática desse conhecimento para relacioná-lo com outras áreas. O professor deve entender e compreender o conteúdo ensinado.

Shulman (1986) também estabelece que para dominar o conhecimento pedagógico do conteúdo, o professor deve saber abordar um tema da maneira mais compreensível possível aos alunos. Para tal, vale lembrar que o docente deve conhecer diversas maneiras desta abordagem para atender à gama de alunos com experiências e cotidianos distintos. Um mesmo assunto, por exemplo, pode ser simples para uns e difícil para outros estudantes. Cabe ao professor estar atento a isto e também estar atento às concepções dos alunos.

Finalmente, Shulman (1986) argumenta que o conhecimento curricular não envolve apenas o domínio curricular sobre o tema lecionado pelo professor. Este conhecimento também requer a familiarização dos alunos com o currículo de outras disciplinas que são estudadas. Isto permite ao docente relacionar um conteúdo com outras áreas ou temas abordados em outras disciplinas estudadas pelos estudantes.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nosso processo investigativo foi realizado com um grupo de 15 professores de Matemática da Educação Básica atuantes na rede pública do Estado de São Paulo. Eles participaram do Projeto Observatório da Educação – com financiamento da CAPES – desenvolvido pela linha de pesquisa 'Formação de Professores que Ensinam Matemática' do Programa de Pós-Graduação da Universidade Anhanguera de São Paulo, que promoveu reuniões entre os pesquisadores em Educação Matemática e os professores de Matemática. Esse projeto foi desenvolvido nas dependências do Diretório de Ensino do Estado São Paulo, que é localizado na Região Norte da capital paulista.

A coleta de dados foi dividida em duas fases: diagnóstica e formativa. A primeira fase (diagnóstica) consistiu na aplicação de dois questionários. O primeiro teve o intuito de levantar o perfil dos participantes – por exemplo, a formação acadêmica, a faixa etária, o tempo de atuação em sala de aula – e os conhecimentos prévios sobre a leitura e a construção de gráficos estatísticos. O segundo questionário levantou dados sobre o conhecimento pedagógico dos professores

participantes sobre o tema, ou seja, para quais turmas esses professores lecionam gráficos estatísticos, quais são as fontes utilizadas, bem como sobre o seu conhecimento em relação ao uso de tecnologias digitais.

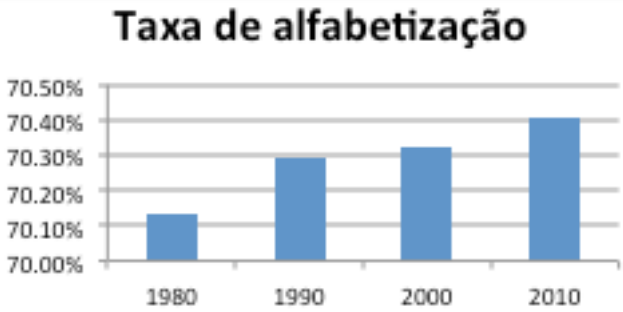
A segunda fase – processo formativo – seguiu os princípios do *Design Experiments*, que foi desenvolvido por Cobb et al. (2003). O objetivo dessa fase foi ampliar a base de conhecimentos para o ensino de conceitos referentes a esse tema segundo as categorias utilizadas por Ball, Thames e Phelps (2008).

RESULTADOS

Nosso estudo contou com a colaboração de 15 professores licenciados em Matemática, todos participantes do Observatório da Educação. Dentre eles, a grande maioria se formou em uma instituição privada e apenas um docente se formou em uma instituição pública. Concernente ao grau de ensino, três lecionavam apenas para turmas do Ensino Fundamental, quatro lecionavam apenas para turmas do Ensino Médio e oito lecionavam para ambos. O tempo médio de serviço docente foi de 14,6 anos, com desvio padrão de 7,27 anos, indicando a grande variação no tempo de serviço (como professor) dos participantes. Em relação à idade, mais da metade dos participantes apresentou uma faixa etária acima dos 45 anos. Cabe ressaltar que a faixa etária e o tempo de serviço docente não apresentaram forte correlação, ou seja, havia professores acima da média de idade e que estavam há pouco tempo atuando em sala de aula.

Para investigar o conhecimento do conteúdo especializado (Shulman, 1986) dos docentes participantes, apresentamos a evolução da taxa de alfabetização de uma população fictícia – conforme figura a seguir – para que os participantes tirassem conclusões a partir desse gráfico.

Gráfico 1. taxa de alfabetização de uma população fictícia



Fonte: Observatório da Observação

Observamos que muitos participantes fizeram somente uma leitura superficial do conjunto de dados: concluíram que a evolução demonstrada ocorre por décadas ou que houve crescimento da taxa de alfabetização. Apenas um professor se mostrou atento à escala vertical e afirmou que a evolução da alfabetização foi muito pouca em relação ao tempo. Entretanto, observamos que alguns docentes não souberam interpretar adequadamente o gráfico apresentado.

Dois participantes, além de informarem o crescimento do alfabetismo, deram ênfase a esse crescimento. O primeiro afirmou “que a população está evoluindo em educar, há um grande investimento no que se refere a alfabetizar”. O segundo foi além: “houve um crescimento significativo na taxa de alfabetização nas décadas de 1980 e 2000 e um crescimento menos

expressivo na década de 1990". Como podemos notar, não é possível analisar o crescimento da taxa de alfabetização até a década de 1980 por conta de o gráfico não apresentar informações anteriores a este período. Em relação às demais observações deste participante, o gráfico demonstra o contrário do que ele afirmou: o crescimento até 1990 foi o 'mais significativo' e a evolução de 1990 para 2000 foi o menos expressivo.

Um último professor afirmou "que o índice de alfabetização varia a cada 10% ao ano". Ele claramente não interpretou corretamente as escalas do gráfico. O crescimento aproximado de 10% a cada período não condiz com o que o gráfico apresenta. Provavelmente, esse participante desconsiderou os algarismos da unidade e da dezena referentes ao eixo vertical, atentando-se apenas às casas decimal e centesimal que a escala apresenta, pois o gráfico mostra um crescimento médio de aproximadamente 0,1 ponto percentual por período. O segundo equívoco foi afirmar que o crescimento foi anual, ou seja, demonstrou que esse participante, provavelmente, deu pouca atenção ao eixo horizontal, que está marcado em décadas.

Para investigar o conhecimento pedagógico do conteúdo (Shulman, 1986), apresentamos os resultados das seguintes perguntas: 1) Você utiliza alguma fonte de consulta para preparar as suas atividades envolvendo gráficos? Se sim, qual(is)? 2) Você utiliza algum software para que os seus alunos construam gráficos estatísticos? Justifique.

Para a primeira questão, o uso de apostilas e livros didáticos e o auxílio da internet foram as fontes mais citadas. Além disso, dois participantes também citaram o uso de materiais de provas nacionais. Ademais, dois professores informaram trazer dados do cotidiano dos alunos para discussão em sala de aula.

Referente à segunda questão, nove professores (dentre os 15) responderam que não utilizam software sobre gráficos estatísticos nas aulas por dois motivos: infraestrutura da escola – a escola não possui sala de informática disponível aos alunos – e falta de habilidade em manipular um software. Referente aos seis participantes que responderam positivamente à questão, todos informaram conhecer o Microsoft Excel e apenas um deles também afirmou que possui habilidade em manipular outros programas computacionais.

Finalmente, para investigar o conhecimento curricular (Shulman, 1986), propusemos a seguinte questão: você trabalha com gráficos estatísticos em suas aulas? Se sim, em qual(is) série(s)? Em caso negativo, procure justificar a razão.

Nas respostas apresentadas, a grande maioria dos participantes informou que trabalham com os gráficos estatísticos em sala de aula. Contudo, um único docente afirmou que não trabalha com esses gráficos "por estar trabalhando com a realidade das turmas, que estão com conhecimentos matemáticos aquém da série em que eles estão". A afirmação deste professor nos levou a entender que ele não considera o ensino de gráficos estatísticos tão relevante, devendo priorizar outros tópicos da Matemática para os seus alunos.

Dentre os professores que lecionam gráficos estatísticos, notamos uma maior predominância nas turmas do Ensino Médio (segundo e terceiro anos) e no nono ano do Ensino Fundamental, embora muitos deles reconheçam que abordam pouco sobre o tema, dois deles justificaram a pouca ênfase que o currículo do estado de São Paulo atribui para esse tema. Vale ressaltar que, conforme o Currículo do Estado de São Paulo (2012), o ensino de gráficos estatísticos consta no sexto e

sétimo anos do Ensino Fundamental, respectivamente, no quarto e terceiro bimestres, sendo que no terceiro ano do Ensino Médio é dada uma maior ênfase na interpretação de gráficos.

CONCLUSÃO

Em nossa interpretação, ao se depararem com um gráfico estatístico, as respostas dos participantes não indicaram uma análise crítica e aprofundada ou uma reflexão sobre os dados apresentados. No geral, mostraram não compreender a leitura de gráficos, fato que levou alguns professores a não identificarem uma representação tendenciosa, obtendo conclusões errôneas acerca das informações. O conhecimento do conteúdo especializado (Shulman, 1986) exige, ao menos, o domínio do tópico ensinado, o que a maioria dos participantes, aparentemente, não dominava.

Por outro lado, identificamos uma preocupação do grupo de professores em levar questões do cotidiano para discutir em sala de aula, a partir da consulta de gráficos divulgados em fontes acessíveis aos alunos. Apesar de não conhecerem o termo letramento estatístico, os professores estão promovendo-o a partir do modelo proposto por Gal (2005), cujo conhecimento sobre fatos do cotidiano é uma das condições para o letramento estatístico. Entretanto, as respostas dadas mostraram que muitos professores não utilizavam tecnologias nas aulas de estatística para auxiliar os alunos na construção de gráficos. Entendemos que esse aspecto é outro tipo de abordagem para ser discutida e analisada com os alunos sobre esse tema. Se o conhecimento pedagógico do conteúdo (Shulman, 1986) também trata de estratégias para desenvolver um conceito específico, acreditamos que muitos participantes poderiam se apropriar do uso de tecnologias digitais para a sua utilização nas aulas.

Com referência ao conhecimento curricular (Shulman, 1986), observamos claramente que, em nenhuma das respostas analisadas, houve uma preocupação dos professores com a interdisciplinaridade. Também notamos que muitos professores lecionam gráficos estatísticos em momentos distintos aos sugeridos pelo currículo do Estado de São Paulo, o que nos faz supor que estes participantes não possuem um conhecimento pleno sobre o currículo que supostamente seguem.

Então, há a necessidade de um avanço significativo por parte dos professores com respeito aos conhecimentos do conteúdo, aos conhecimentos pedagógicos do conteúdo e ao conhecimento curricular para auxiliá-los no ensino de gráficos estatísticos na Educação Básica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. y Cañadas, G. (2012). Understanding Statistical Graphs: a research survey. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa, 28* (3), 261-277.

Australian Curriculum, Assessment And Reporting Authority (ACARA). *O Currículo Australiano*. Recuperado el 23 de mayo de 2015 de http://porvir.org/wp-content/uploads/2014/09/CurriculoAustraliano_Matematica.pdf.

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59* (5), 389-407.

Batanero, C. y Godino, J. (2005). Perspectivas de la educación estadística como área de investigación. En R. Luengo (Ed.), *Líneas de investigación en Didáctica de las Matemáticas* (pp. 203-226). Badajoz: Universidad de Extremadura.

Brasil. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*: 1ª a 4ª série.

Brasil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*: 5ª a 8ª série.

Brasil. (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*: Ensino Médio.

Cobb, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design Experiment in Educational Research. *Educational Researcher, 32* (1), 09-13.

Gal, I. (2005). Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. En Bem-Ziv D. y Garfield, J., *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*, (pp. 47-78). Kluwer Academic Publishers: Dordrecht.

National Council Of Teachers Of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

São Paulo. (2012). Secretaria da Educação. *Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias*. São Paulo: Secretaria da Educação.

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge growth in teaching. *Education Researcher,15*(2), 4-14.

UNIVERSIDADE E ESCOLA EM COLABORAÇÃO PARA INVESTIGAR PRÁTICAS AVALIATIVAS SOBRE FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Nielce Meneguelo Lobo da Costa, Rosangela de Souza Jorge Ando, Rosana Jorge Monteiro Magni
Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil)
nielce.lobo@gmail.com, rosangela.ando@gmail.com, rosanamagni@ig.com.br

Palabras clave: evaluación, conocimiento profesional, grupo de estudio

Key words: evaluation, professional knowledge, study group

RESUMO: A pesquisa que subsidia este artigo está alojada em Projeto maior de formação e pesquisa, do Programa Observatório da Educação da CAPES/Inep e nele se insere na perspectiva da utilização e análise de bancos de dados de avaliações externas. A investigação ocorre a partir da colaboração estabelecida entre pesquisadores e professores de escolas públicas, para estudos sobre práticas avaliativas, focando o conteúdo de funções desenvolvido no Ensino Médio. A pesquisa qualitativa tem por objetivo investigar as reflexões de professores participantes de um Grupo de Estudos sobre processos avaliativos em Matemática e os conhecimentos construídos por eles. A fundamentação teórica quanto às reflexões compartilhadas vem dos estudos de Zeichner e dos conhecimentos profissionais, como os entende Shulman. O artigo discute um episódio sobre a construção e análise de uma avaliação diagnóstica e apresenta conclusões sobre as reflexões.

RESUMEN: La investigación que apoya el presente artículo es parte de un Proyecto más amplio de formación e investigación, el Programa Observatorio de Educación de CAPES/INEP cuya perspectiva es el uso y análisis de bancos de datos de evaluaciones externas. La investigación surge de la colaboración entre investigadores y profesores de escuelas públicas para estudios sobre prácticas evaluativas acerca del contenido de funciones en el nivel medio. Es una investigación cualitativa, su objetivo es abordar las reflexiones de profesores de un grupo de estudios sobre procesos de evaluación en Matemática y los conocimientos construidos por ellos. La fundamentación teórica sobre las reflexiones colectivas se basa en los estudios de Zeichner y en la comprensión y conocimiento profesional de Shulman. El trabajo discute un episodio sobre la construcción y análisis de una evaluación diagnóstica y se presentan las conclusiones de esas reflexiones.

ABSTRACT: The research that supports this paper is part of a boarder teacher education and research project, from the Brazilian Observatory of Education Program (Observatório da Educação) CAPES / INEP and it fits into the perspective of the use and analyze of external evaluations databases. The research occurs from the established collaboration between researchers and teachers in public schools, for studies on assessment practices, focusing on the content of functions developed in high school. The qualitative research aims to investigate the reflections of participating teachers in a Study Group on evaluation processes in mathematics and the professional knowledge built by them. The theoretical basis about the collective reflections comes from Zeichner studies and the professional knowledge as understood by Shulman. The paper discusses an episode about the construction and analysis of a diagnostic assessment and draws conclusions about the teachers' reflections.

INTRODUÇÃO

A avaliação é parte integrante da prática docente e é fundamental nos processos educacionais. A avaliação da aprendizagem feita na escola pelo professor pode auxiliá-lo a compreender o nível de aprendizagem de cada um de seus alunos. Outro tipo de processo avaliativo é o externo, ou seja, da aprendizagem em larga escala, que produz resultados globais sobre o ensino e diagnostica o desempenho de um conjunto de alunos espelhando o nível educacional.

O professor de matemática hoje tem acesso a diversos resultados de avaliações externas as quais os alunos têm sido submetidos, tais como Saresp, ENEM, etc., entretanto, a avaliação não é um fim em si mesmo, ela fornece dados para a ação educacional.

Entendemos que, qualquer que seja a avaliação da aprendizagem, ela só se torna relevante no processo educativo se os seus resultados forem analisados e utilizados para orientar os alunos e para regular a prática pedagógica. Contudo, empreender essas análises e construir intervenções didáticas não é tarefa simples para o professor.

Assim sendo, uma preocupação para nós, como formadores e investigadores em Educação Matemática é a de como promover oportunidades para que os professores discutam as avaliações externas e utilizem seus resultados para subsidiar propostas pedagógicas que impulsionem o aprendizado dos alunos em Matemática.

Nesse sentido uma proposta é a de desenvolvimento de projetos nos quais pesquisadores da universidade se unam a professores da escola básica em grupos de estudos que se dediquem a investigar práticas avaliativas. O estabelecimento de tais parcerias possibilita a criação do que Jaworski (2009) denomina de comunidades investigativas, em inglês “inquiry community”. Nesses grupos os participantes, no coletivo, questionam, problematizam, investigam e refletem sobre as mais diversas temáticas ligadas às práticas escolares e, desse modo, ocorre uma co-aprendizagem. Segundo Jaworski (2009, p.311-312), ao trabalharem em conjunto, pesquisadores da universidade e professores da escola desenvolvem um processo em que cada um pode aprender algo sobre o mundo do outro e, também, cada um pode aprender algo mais sobre seu próprio mundo e suas conexões com as instituições. Ela denomina tal processo que ocorre nesse tipo de comunidade de “co-aprendizagem investigativa” (co-learning inquiry). Nele as pessoas aprendem juntas por meio de investigação, no caso, a investigação no grupo é uma ferramenta mediacional.

A partir das inquietações expostas e da crença nas possibilidades viabilizadas por uma comunidade investigativa empreendemos a investigação que subsidia este artigo.

A PESQUISA

A pesquisa está alojada em Projeto maior, do Programa Observatório da Educação da CAPES sob nº 19366 Edital 49/2012, intitulado “Educação Continuada do Professor de Matemática do Ensino Médio: Núcleo de Investigações sobre a Reconstrução da Prática Pedagógica” e nele se insere na perspectiva da utilização e análise de bancos de dados do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP.

A investigação ocorre a partir da colaboração estabelecida entre pesquisadores e professores de escolas públicas, para estudos sobre práticas avaliativas, focando o conteúdo de funções do

currículo do Ensino Médio. O grupo de estudos, que se denomina GAAFEM (Grupo de Estudos sobre Avaliação da Aprendizagem de Funções no Ensino Médio), é formado por oito professores de cinco escolas estaduais e duas pesquisadoras da Universidade. As práticas avaliativas do conteúdo de funções desenvolvido no Ensino Médio são tema de estudos deste grupo, o qual analisa provas e avaliações de aprendizagem em Matemática desenvolvidas nas salas de aula, bem como itens, resultados de avaliações do INEP, tais como o ENEM e o PISA, e Relatórios Pedagógicos. Além disso, aplicam em sala de aula questões selecionadas; discutem erros e estratégias dos alunos, assim como o desenvolvimento de ações pedagógicas para auxiliá-los a superarem tais erros e as dificuldades encontradas, assim como, ampliarem as estratégias de enfrentamento das questões propostas nas avaliações.

A fundamentação teórica quanto às reflexões compartilhadas empreendidas no grupo vem dos estudos de Zeichner (1993). Ao longo das problematizações, investigações e estudos se fez necessário desenvolver uma atitude reflexiva dos professores em relação ao seu ensino, tendo em conta as condições que influenciam o processo avaliativo. Por meio de problematizações, buscamos promover discussões e análise crítica de modo que houvesse co-aprendizagem e pudéssemos compreender as teorias práticas utilizadas pelos professores participantes. Entendemos, seguindo (Zeichner, 1993, p.21) que: “Ao examinar suas práticas e ao expô-las aos seus pares, o professor tem mais maneiras de tomar consciência sobre suas próprias falhas. Discutindo abertamente com o grupo, se pode aprender uns com os outros (...)”

Em relação aos conhecimentos profissionais o suporte para as análises vem dos estudos de Shulman (1987) que os categorizou em Conhecimento do conteúdo específico a ser ensinado; Conhecimento pedagógico geral; Conhecimento do currículo a ser trabalhado; Conhecimento pedagógico do conteúdo disciplinar; Conhecimento dos alunos e de suas características cognitivas; Conhecimento dos contextos educacionais; Conhecimento dos fins, propósitos e valores educacionais. Essas categorias foram agrupadas por ele em três grandes grupos: Conhecimento do conteúdo específico; Conhecimento pedagógico do conteúdo; Conhecimento curricular.

O *Conhecimento do conteúdo específico* demanda além do conhecimento do conteúdo, uma compreensão das estruturas da disciplina que devem lecionar. O *Conhecimento Pedagógico do conteúdo* vai além do conhecimento do objeto, pois com este conhecimento se estabelece uma maneira de compreensão para os outros. O *Conhecimento curricular* o professor tem a visão geral do currículo da disciplina de maneira que conheça o que o aluno aprendeu antes e o que deverá aprender depois daquela etapa escolar em que o aluno se encontra.

A metodologia da pesquisa é do tipo investigação – ação, de caráter co-generativo, segundo Greenwood e Levin (2000). Para estes autores a investigação-ação que ocorre quando existe colaboração entre pesquisadores e pesquisados de modo que ocorra aprendizado das duas partes promovendo uma mudança social é denominada pesquisa co-generativa. Ela se caracteriza por estar centrada no contexto e ter por meta resolver problemas da vida real; gerar conhecimentos por um processo de comunicação colaborativa no qual todas as contribuições dos participantes são levadas a sério; produzir resultados válidos de pesquisa; tratar a diversidade de experiências e capacidades dentro do grupo local como uma oportunidade para o enriquecimento do processo de produção de conhecimento.

Os procedimentos metodológicos da investigação se dividem em três fases interligadas, a primeira contempla pesquisa documental, a segunda refere-se à pesquisa de campo com o grupo de estudos GAAFEM e a última fase é a de análise de dados. A coleta, na fase de campo é feita por questionário de entrada, gravações em vídeo e áudio dos encontros do grupo; materiais produzidos nesses encontros e materiais disponibilizados pelos professores referentes à produção de seus alunos. A análise é interpretativa utilizando os métodos de análise de conteúdo, segundo Bardin (2007) e o método de análise de vídeos, a partir da seleção de eventos críticos, segundo Powell, Francisco e Mahler (2004).

Neste artigo apresentamos um episódio sobre a construção, aplicação e análise pelo GAAFEM de uma avaliação diagnóstica sobre funções.

O episódio

As pesquisadoras da universidade propuseram, como primeira atividade do grupo, que os professores elaborassem autonomamente uma avaliação diagnóstica com o conteúdo de funções, a ser aplicada aos seus alunos do Ensino Médio, que posteriormente seria discutida em encontro do grupo.

A intenção dessa atividade de elaboração e aplicação de avaliação diagnóstica foi promover reflexões sobre processos avaliativos em Matemática, em particular, sobre os conhecimentos prévios dos alunos, de modo que tais reflexões ampliassem o conhecimento que eles tinham sobre seus próprios estudantes.

Os professores tomaram as decisões sobre a estrutura dessa avaliação, definiram que a quantidade de questões de cada prova seria cinco, todas as questões seriam fechadas, com cinco alternativas e que duas das questões seriam semelhantes para as três séries. Para a 1ª série, o conteúdo seria o relativo ao conteúdo de funções ensinado no 9º ano, para a 2ª série o conteúdo seria o da 1ª série, para a 3ª série o conteúdo seria o da 2ª série. A elaboração foi coletiva e as questões foram escolhidas de livros didáticos, de listas da internet, do Caderno do Aluno (material didático de apoio elaborado pela Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo) (São Paulo, 2009), de avaliações externas do Saresp (São Paulo, 2012), com exceção de uma das questões a qual foi de autoria de uma professora do grupo.

A avaliação diagnóstica foi aplicada aos alunos, sendo que cada professor aplicou em suas turmas, em aula dupla que perfaz um total de 100 minutos. Foram avaliados 377 alunos, sendo 155 da 1ª série, 76 da 2ª série e 146 da 3ª série do Ensino Médio.

Em relação à aplicação, os professores todos relataram que pediram aos alunos o registro de suas resoluções na folha de prova e não apenas que assinalassem a alternativa correta. Entretanto muitos dos alunos deixaram sem registro, o que dificultou a identificação de dificuldades específicas de cada aluno.

Após essa atividade de elaboração e aplicação da Avaliação Diagnóstica que foi feita sem interferência das pesquisadoras, empreendemos uma análise de todo esse processo no encontro subsequente do grupo.

Essa análise incluiu desde os enunciados e as características técnicas de cada questão, até os detalhes sobre a aplicação da Avaliação Diagnóstica nas classes e os resultados obtidos pelos alunos.

Os resultados evidenciaram que, por exemplo, na avaliação diagnóstica da 1ª série, a terceira questão teve um índice muito baixo de acerto. (Ver Figura 1)

Figura 1. Questão 3 da Avaliação Diagnóstica

3-Observe a tabela a seguir.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	10	8	6	4	2	0	-2	-4	-6

A equação que representa a relação entre x e y é
(A) y = 2x + 10.
(B) y = 2x – 10.
(C) y = x + 10.
(D) y = - 2x – 12.

Na Tabela 1 e na Figura 2 estão sintetizados: o número de alunos e as alternativas escolhidas como corretas para tal questão.

Tabela 1. Quantidade de alunos e Porcentagens por alternativa assinalada

Alternativa	A	B	C	D	E	Não assinalou	Total
Quantidade	12	33	23	40	20	27	155
% do total	7,7	21	15	26	**13**	17	100

Figura 2. Alternativa assinalada como certa

Observamos, pelos dados da Figura 2, que o gabarito E foi assinalado por apenas 13% dos alunos, sendo que a alternativa mais assinalada foi a D, por 26% dos alunos.

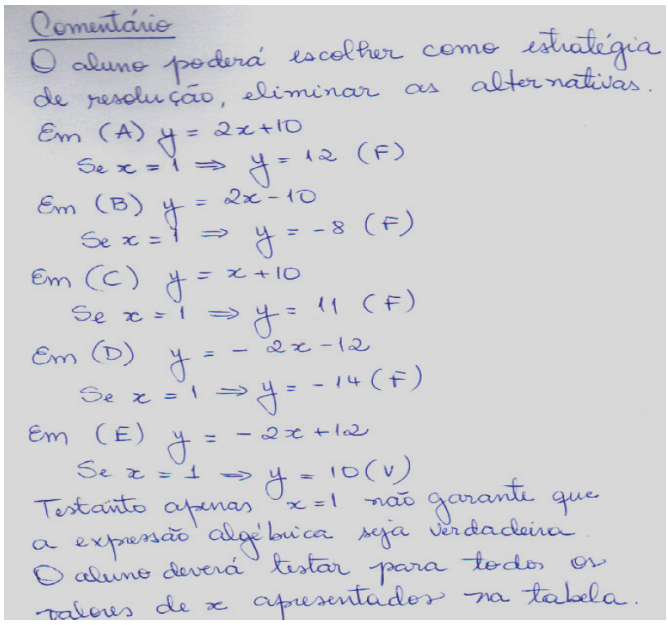
Essa constatação intrigou os professores que passaram a especular o porquê de tais erros.

Nesta questão em particular, foi discutido no grupo que a síntese da tarefa exigida do aluno é a de observar a tabela e verificar a relação de dependência entre as grandezas x e y, identificando a expressão algébrica que a representa.

Trata-se de uma questão posta em uma situação científica na qual o aluno deve mobilizar um processo cognitivo de conexão entre conteúdos matemáticos. Entendemos por situação científica aquela em que a tarefa está situada a uma certa distância do mundo do estudante, com caráter estritamente científico, neste caso da matemática e o processo de conexão é aquele que requer não apenas a reprodução de procedimentos conhecidos, mas vai além exigindo do aluno coordenar representações, estabelecer ligações entre conteúdos e procedimentos. Nesse aspecto seguimos a estrutura de avaliação do PISA (OCDE,2004).

Na discussão coletiva sobre essa questão, com relação ao enunciado, foi enfatizado que o termo "expressão algébrica" é o mais adequado a ser utilizado, em vez de "equação". Em seguida foi solicitado que cada professor do grupo identificasse e registrasse as diferentes possíveis estratégias de resolução dessa questão e seus comentários assinalados em protocolos, como o observado na Figura 3, que se refere ao registro da professora RG.

Figura 3. Protocolo da professora RG



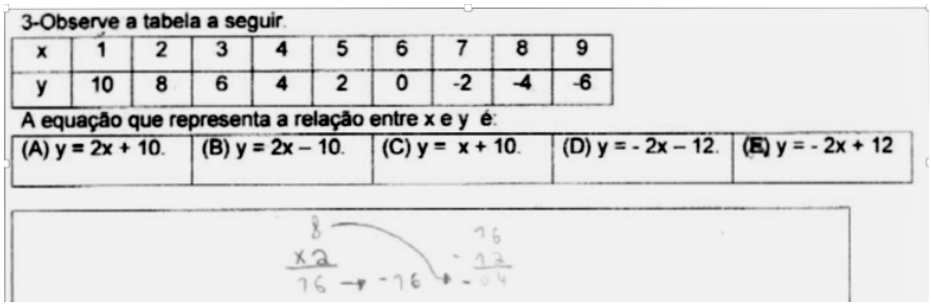
Como bem observado pela professora RG, é possível perceber que a tabela dada no enunciado apresenta alguns valores de x e o correspondente valor de y, entretanto a primeira linha indica *"Observe a tabela a seguir",* sem especificar que ela representa valores de uma função polinomial do 1° grau. Por ser esta a intenção, a comanda poderia ter sido "Observe a tabela a seguir que apresenta alguns valores de x e y de uma função polinomial do 1º grau. " A representação por meio dessa tabela de valores de x e y não garante que isso ocorra, obrigando o aluno a testar valor por valor para concluir qual a expressão correta.

Esse protocolo da professora RG evidencia que ela considera que o aluno poderá usar as alternativas como recurso, experimentando os valores na função. Observamos mobilização de Conhecimento de Conteúdo e de Conhecimento Pedagógico do Conteúdo.

Entendemos que esta atividade de levar os professores a analisarem as possíveis estratégias de resolução e depois discuti-las com os colegas possibilitou a eles refletirem sobre a matemática envolvida em cada estratégia e as possibilidades que a questão permite explorar.

Na análise dos resultados obtidos pelos alunos, alguns protocolos foram disponibilizados, como por exemplo o da professora. CL, contendo a resolução de um de seus alunos sobre tal questão (ver Figura 4).

Figura 4. Protocolo de aluno


3-Observe a tabela a seguir.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	10	8	6	4	2	0	-2	-4	-6

A equação que representa a relação entre x e y é:

(A) y = 2x + 10. (B) y = 2x – 10. (C) y = x + 10. (D) y = - 2x – 12. (E) y = - 2x + 12

Neste protocolo, podemos observar que o aluno considerou como justificativa para escolha da alternativa E (y = - 2x +12), apenas a análise de um par de valores da tabela e que o aluno escolheu na tabela o valor 8 para x e o multiplicou por 2, obtendo 16. Ao lado, subtraiu 12 de 16, obtendo – 4. Indicou com uma seta que o valor correspondente para x = 8 é -4 e concluiu, apenas testando este par que a expressão que representa a relação entre x e y é y = – 2x+12.

A análise dos protocolos trazidos pelos professores envolveu as estratégias de resolução dos alunos assim como os erros cometidos. O grupo discutiu os tipos de erros que surgiram e procurou compreender os raciocínios que levaram ao resultado encontrado pelo aluno. Em nosso entender foi uma oportunidade de trabalho conjunto entre as pesquisadoras da universidade e os professores no sentido de construir conhecimento profissional docente.

Os professores refletiram sobre práticas avaliativas, fazendo autoanalise do que praticam em termos de avaliação.

Comentário do professor WN

> Dá uma olhada nisso!
>
> Como é que a gente quer reprovar aluno por conta de meio ponto, um ponto...
>
> Olha quantos erros cometemos nessa prova... Na elaboração de uma única prova. E nas provas do ano inteiro? Quanta coisa errada deve ter lá!

O professor WN, ao final da análise de todas as três provas refletiu que é necessário analisar as elaborações de outras avaliações durante o ano letivo, no grupo de estudos para que, antes de aplicá-las, possam corrigir eventuais distorções nos enunciados a fim de melhorar avaliar os alunos

especialmente evitando erros na interpretação e no entendimento do enunciado das questões propostas.

Essas foram algumas das reflexões que surgiram relativas a uma das questões e que podem evidenciar a relevância de promover oportunidades de discussão de processos avaliativos especialmente por grupos formados por parcerias universidade-escola, na qual cada elemento do grupo contribui de forma distinta de modo que a co-aprendizagem ocorre.

CONCLUSÕES

Concluindo, estudos conjuntos entre pesquisadores da Universidade e professores da Educação Básica têm estado cada vez mais presentes na Educação Matemática, produzindo resultados tanto no campo da Educação Continuada quanto na pesquisa acadêmica sobre processos formativos. Tais estudos evidenciam a importância dessa colaboração para a ampliação do conhecimento profissional. Paralelo a isso, ressaltamos a importância de estudos sobre avaliação especialmente como um propulsor para as reflexões sobre práticas avaliativas.

Neste episódio pudemos perceber que as reflexões e investigações empreendidas auxiliaram a ampliar especialmente o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo.

Agradecimentos ao Programa Observatório da Educação (OBEDUC), da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela concessão de subsídios para o desenvolvimento desta pesquisa alojada no Projeto 19366 Edital 049/12.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

Bardin, L. (2007). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Greenwood, D., Levin, M. (2000). Reconstructing the relationships between universities and society through action research. *Handbook of qualitative research* 2, 85-106. Thousand Oaks, California: Sage Publications Inc.

Jaworski, B. (2009). Building and sustaining inquiry communities in mathematics teaching development. Em K. Krainer, T. Wood, *The international handbook on mathematics teacher education, Participants in mathematics teacher education: individuals, teams, communities and networks* (pp. 309-330). Rotterdam: Sense publisher.

Powell, A., Francisco, J., Maher, C. (2004). Uma abordagem à análise dos dados de vídeo para investigar o desenvolvimento de ideias e raciocínios matemáticos de estudantes. Tradução de Antonio Olimpio Junior. *Bolema 17* (21), 81-140.

São Paulo (Estado) Secretaria Da Educação. (2009). *Caderno do Aluno: matemática, ensino médio*. Secretaria da Educação; coordenação geral, Fini, M. I., 2ª série, v. 1. São Paulo: SEE.

_____. (2012) *Relatório Pedagógico 2011 Saresp: Matemática*. Secretaria da Educação; coordenação geral Maria Inês Fini. São Paulo: SEE.

OCDE. (2004). *Estrutura de avaliação do PISA 2003: conhecimentos e habilidades em matemática, leitura, ciências e resolução de problemas*/ OCDE – Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômicos; [tradução B & C Revisão de Textos]. São Paulo: Moderna.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57 (1), 1-22.

_____. (1986).Those who understand: Knowledge Growth. In: Teaching. *Educational Researcher, 2* (15), 4-14.

Zeichner, K. (1993) *Formação reflexiva de professores: ideias e práticas*. Lisboa: Educa.

ESTATÍSTICA NA FORMAÇÃO DO PEDAGOGO

Michel da Costa, Maria Elisabette Brisola Brito Prado
Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil)
professormichelcosta@hotmail.com, bette.prado@gmail.com

Palavras chave: formação de professores, educação estatística, curso de pedagogia, níveis de conhecimento

Key words: teacher training, statistics education, pedagogy course, levels of knowledge

RESUMO: O presente trabalho é o resultado de uma pesquisa realizada com professores recém-formados dos anos iniciais do ensino fundamental e suas relações com a educação estatística, quais suas ideias acerca do conteúdo e de como ensinar os conhecimentos de estatística e probabilidade desde os primeiros anos do ensino fundamental, tal como indica a Base Nacional Curricular Comum para a educação brasileira. Para embasarmos teoricamente nossa pesquisa, utilizamos as ideias de letramento estatístico e didática da estatística propostas por Batanero (2001), Gal (2002) e Watson (2001), associados ao atual contexto nacional brasileiro. A metodologia utilizada é de caráter exploratório e interpretativo, onde na primeira, realizada por meio de uma análise de dados institucionais de docentes, buscou-se compreender o processo de ensino efetivado no Curso de Pedagogia, dados esses confrontados com a fase posterior deste método por meio de realizações de entrevistas semiestruturadas com alunas destes professores, analisadas à luz das ideias de Shulman (1986) no que tange aos níveis de conhecimento necessário ao professor nos âmbitos de conteúdo, conteúdo pedagógico e curricular apontam para lacunas na formação destes novos professores.

ABSTRACT: This work is the result of a survey of newly trained teachers in the early years of elementary school and its relations with statistical education, which his ideas about the content and how to teach the knowledge of statistics and probability from the early years of elementary school, as shown in the National Curriculum Common Base for Brazilian education. To theoretically embasarmos our research, we use the ideas of statistical literacy and teaching of statistics proposed by Batanero (2001), Gal (2002) and Watson (2001), associated with the current Brazilian national context. The methodology used is exploratory and interpretative character, where the first, carried out through an analysis of institutional faculty data, we attempted to understand the teaching process performed in Pedagogy Course, given those faced with the later phase of this method through achievements semi-structured interviews with students of these teachers, analyzed in the light of Shulman's ideas (1986) with respect to levels of knowledge necessary for the teacher in the content of the discipline, educational content and curriculum knowledge, in this survey confirm gaps in the formation of these new teachers.

INTRODUÇÃO

As pessoas em geral, no século XXI, têm acesso a muitas informações nas diferentes ações humanas, sejam nas leituras dos jornais diários, índices econômicos do país, gráficos com saldos de gols de seus times e até mesmo nos diversos jogos de azar que muitos participam com bastante frequência e tem curiosidade em saber as reais chances de ganhar o prêmio. Com tantas informações esses indivíduos, por diversas vezes, ficam perdidos em meio a tantas informações, algumas indispensáveis, outras irrelevantes. A educação básica objetiva formar cidadãos críticos e para isso, é primordial compreender toda essa imensidão de dados que os cercam na sociedade, utilizando para isso os conhecimentos de estatística e probabilidade para a leitura do mundo em que vivem. E neste panorama surge o questionamento inicial: "o professor está preparado para ensinar seus alunos em estatística e probabilidade desde o início do ensino fundamental?" Essa relevância da estatística e probabilidade impulsionou inicialmente esse trabalho de pesquisa. Esse artigo é um levantamento inicial de uma pesquisa mais ampla que está sendo realizada no Programa de Pós Graduação em Educação Matemática, em nível de doutorado, da Universidade Anhanguera de São Paulo, da linha de pesquisa: formação de professores que ensinam matemática. No trabalho aqui apresentado, procurou-se analisar e entender o processo de formação do professor que atua nos anos iniciais em relação à educação estatística. A intenção foi identificar quais os entraves que ainda estão presentes na formação pedagógica destes docentes que ainda demonstram bastante fragilidade na condução do letramento estatístico e tratamento da informação para os alunos dos primeiros anos do ensino fundamental. Buscaram-se com isso elementos que respondam às seguintes questões: "Qual tem sido o papel exercido pelo ensino de estatística na formação inicial de professores dos anos iniciais da educação básica? De que maneira esses professores têm desenvolvido os conhecimentos necessários à educação estatística neste nível de ensino?", por meio destes questionamentos buscaremos compreender alguns dos entraves apontados na formação dos docentes pesquisados no que tange ao ensino de estatística desde os anos iniciais do ensino fundamental, bem como analisar as concepções de professores recém-formados acerca do desenvolvimento do letramento estatístico com seus alunos.

EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Atualmente, a educação estatística está bastante evidenciada nos trabalhos científicos desenvolvidos e já concluídos em diversos âmbitos de pesquisa, conforme dados apontados por Carzola et al (2010) em um Grupo de Trabalho da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. As questões que envolvem a temática em questão vêm sendo estudadas por vários pesquisadores, entre os quais destacamos Batanero (2001), Gal (2002) e Watson (2001), a referência nas ideias e indicações para o ensino de estatística, destacando a necessidade de uma formação para o professor que ensina desde os primeiros anos da educação escolar e os seguintes no que tange à conceituações referentes ao letramento estatístico, considerando uma pessoa letrada em estatística àquela que consegue interpretar e avaliar criticamente informações estatísticas, necessárias competências para interagir local e globalmente nos diferentes argumentos relacionados aos dados e fenômenos apresentados em contextos diversificados. A preocupação com a educação estatística na educação básica, apesar da inserção em vários currículos em âmbito internacional ainda não está sendo efetiva e regularmente abordada nas aulas de matemática das escolas de diversos países, conforme aponta Lopes (2014) em levantamento

realizado pelo Internacional Statical Institute (ISI), onde demostra uma grande insatisfação dos países pesquisados em relação ao ensino da estatística, em especial no ensino destes conteúdos nas escolas dos anos elementares, pois por diversas vezes esses conteúdos ainda demonstram não estar nas prioridades educacionais, estando em segundo plano na prática educativa dos docentes.

Certamente, no Brasil essa realidade não é distinta dos demais países pesquisados, fato esse evidenciado pelo novo documento que institui a Base Nacional Comum (BNC) para a educação básica, já conter a estatística desde o primeiro ano do ensino fundamental, onde o documento indica que crianças desde os seis anos de idade já podem coletar dados de um evento com uma variável, assim como também podem classificar eventos familiares envolvendo o acaso com ideias de certeza, grande chance de acontecer e impossibilidade de ocorrer.

A organização do currículo de matemática neste documento está agrupada em cinco eixos, sendo um deles: estatística e probabilidade, complementado pelos demais: geometria, grandezas e medidas, números e operações e álgebra e funções. Apesar de este documento encontrar-se ainda em ampla discussão nacional, já não há como negar a importância destes conhecimentos desde o início da escolarização, como é evidenciado no fragmento do documento a seguir:

> Com relação à Estatística, os primeiros passos envolvem o trabalho com a coleta e a organização de dados de uma pesquisa de interesse dos/as estudantes. O planejamento de como fazer a pesquisa ajuda a compreender o papel da Estatística na vida cotidiana. Mais que isso, a forma como se podem comunicar dados oriundos de pesquisa e a sua leitura crítica são fundamentais para o pleno exercício da cidadania. Assim, a leitura, a interpretação e a construção de tabelas e gráficos têm papel fundamental, bem como a forma de produção de um texto escrito para a comunicação de dados, pois é preciso compreender que o texto deve sintetizar ou justificar as conclusões. (Brasil, 2016, p. 266)

Corroboram com isso algumas pesquisas realizadas recentemente na última década referentes ao ensino da estatística e probabilidade na educação básica, entre as quais se destacam no panorama da academia: Costa (2012), Lemos (2011), Silva (2007), Costa (2004) e Lopes (2003). Todos esses pesquisadores demonstram preocupação em contribuir com a educação estatística na educação básica, porém ainda ficam lacunas dessa temática em relação à formação de nossos professores e consequentemente de seus alunos em relação aos conhecimentos indispensáveis ao desenvolvimento de competências essenciais ao letramento estatístico para alunos dos anos iniciais do ensino fundamental. Pesquisas recentes Oliveira (2013), Souza (2013) evidenciam a dificuldade dos professores do ensino básico em abordar temas como contagens, probabilidade e estatística, considerados por esses docentes como os conteúdos de mais difícil compreensão pelos alunos.

Na formação inicial do professor que trabalha nos anos iniciais, assim como nos demais cursos da área de humanas, a estatística, enquanto disciplina da matriz curricular do curso, é considerada uma disciplina difícil, tediosa e pouco relevante. Muitos destes alunos também associam que a estatística é o mesmo que aula de matemática, possivelmente pela forma com que é desenvolvida no processo de ensino, pois são valorizadas a memorização de algoritmos e fórmulas, os cálculos excessivos e construções de gráficos e pouco desenvolve a formação deste futuro docente para compreensão das múltiplas realidades, bem como a ideia de variabilidade e aleatoriedade.

Nesse sentido, o professor poderia melhor estar utilizando a estatística como forma de intervenção nos âmbitos sociais, políticos e cognitivos. Concordamos com que indica Biajone(2010) quando afirma que o curso de pedagogia deve ter a estatística conduzida de forma diferente, pois deve perder a excessiva ênfase nos aspectos computacionais e na memorização de fórmulas. Ao invés disso, a educação estatística deve estar associada às práticas sociais, bem como ter suas atividades ligadas à tomada de decisões na perspectiva de resolução de problemas.

Concordamos, nesta perspectiva, com as ideias de D'Ambrósio (2001, 2014) quando compreende que a matemática precisa ser ensinada de forma a garantir a capacidade dos estudantes para os desafios com os quais se deparam no contexto atual, em uma sociedade que demanda de seus educandos a formação para a criticidade, com conhecimentos sólidos dessa disciplina, sendo a matemática uma forma de inclusão e não excluir como tem sido feito em diversos aspectos ligados diretamente nos âmbitos dos processos de ensino e de aprendizagem. A escola nesse sentido deve preparar para conhecer e conviver com as conquistas da humanidade, pois a prioridade da educação atual deve estar pautada na ética de respeito, solidariedade e cooperação para o convívio harmonioso e produtivo de várias culturas. Esse caminho, conforme evidencia D'Ambrósio (2014) deve conduzir a paz para quatro dimensões: interior, social, ambiental e militar, pois sem atingir a paz nas múltiplas dimensões dificilmente a civilização moderna sobreviverá.

EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA NA FORMAÇÃO DOCENTE

Nesse sentido, a estatística chega de encontro com uma educação reflexiva para a tomada de decisões, sendo que a formação do professor dos anos iniciais em nível superior nos cursos de pedagogia deve prever na disciplina Estatística o duplo objetivo: ensinar estatística enquanto ferramenta para compreensão das situações aleatórias diversas, e também, oferecer subsídios para que seja capaz de desenvolver em seus futuros alunos os conhecimentos e habilidades necessárias para resolver suas próprias situações no âmbito do letramento estatístico.

Na perspectiva apontada, o problema desta pesquisa está relacionado primeiramente a: Que conhecimentos são indispensáveis ao professor dos anos iniciais para que desenvolva a educação estatística com seus futuros alunos? Desta questão, são derivados os três principais objetivos preliminares desta pesquisa: diagnosticar quais as barreiras existentes entre a formação inicial de professores e suas ações nos processos de ensino e de aprendizagem com seus alunos no que diz respeito à educação estatística; revelar possibilidades existentes no contexto atual para que a educação estatística aconteça de forma significativa desde os primeiros anos de escolarização e compreender quais conhecimentos de estatística devem ser desenvolvidos nos cursos de pedagogia, nos âmbitos específicos, pedagógicos gerais e pedagógicos do conteúdo.

METODOLOGIA

Esta é uma pesquisa qualitativa, onde se busca explorar os dados de forma descritiva, exploratória, analítica e reflexiva. Utilizamos como instrumento de coleta pesquisa documental com planos de ensino de três professores, além de suas provas e entrevistas semiestruturadas com 6 (seis) alunas formadas por um Programa de Formação Inicial de Professores, em parceria com o Governo Federal e uma Universidade da Região Metropolitana da Baixada Santista, no litoral do Estado de São Paulo. Os primeiros dois instrumentos metodológicos tiveram o objetivo de

compreender as concepções dos professores da disciplina estatística, bem como de que forma eles conduziam os processos de ensino e de aprendizagem em suas aulas. Já o terceiro instrumento, a entrevista semiestruturada com as alunas egressas destes professores já tinha a intenção de comprovar ou não as concepções dos professores de estatística, bem como verificar o que essas alunas pensam a respeito da educação estatística e seus conhecimentos estatísticos e relacionados à didática deste importante eixo curricular. Para uma análise mais detalhada destes dados, utilizamos a teoria de Shulman (1986), onde categorizamos os dados qualitativos em consonância com os diferentes níveis de conhecimento que o professor precisa apropriar-se na prática docente: o conhecimento do conteúdo específico, o conhecimento pedagógico geral e o conhecimento do conteúdo.

ANÁLISE DOS DADOS

Por meio da análise dos documentos institucionais verificamos que dos três professores pesquisados, apenas um tem a preocupação em desenvolver com seus alunos os conhecimentos necessários ao ensino de estatística que esses utilizarão com seus futuros alunos em sala de aula. Os outros dois docentes têm grande preocupação em desenvolver os conhecimentos da estatística enquanto instrumento, porém não se preocupando em desenvolver os conhecimentos propostos por Shulman relacionados ao currículo e ao conhecimento pedagógico do conteúdo. Outro dado que confirma essa informação é o fato de tanto os planos de ensino quanto as provas do curso de pedagogia serem praticamente iguais a de outros cursos na área de administração e mesmo cursos na área de exatas.

Na análise das entrevistas semiestruturadas, evidenciamos algumas lacunas destes conhecimentos necessários e ainda não desenvolvidos em conformidade com as ideias de Shulman, pois não houve a preocupação com os níveis de conhecimento pedagógico e curricular. As seis alunas pesquisadas foram unânimes em afirmar sobre a importância da disciplina na formação do professor para atuar no anos iniciais do ensino fundamental, exemplificaram que utilizarão tais conhecimentos para fazer com que seus alunos compreendam melhor dados organizados em tabelas e gráficos diversos.

Entre as pesquisadas, duas alunas (A e B) ressaltam que há necessidade de o professor que ensina a disciplina tenha um enfoque diferenciado na pedagogia, pois segundo essas, o professor que tiveram lecionou a disciplina da mesma forma que também leciona nos cursos de administração e engenharia, por exemplo.

Percebemos com isso que houve grande preocupação com o conhecimento do conteúdo específico, mas não para os outros níveis necessários à relação com a educação e à formação para o letramento estatístico. Esse fato é explicitado pelas vozes das alunas B e D:

> [...] para mim foi praticamente aula de matemática, pois forma cálculos por diversas vezes, sem contexto educacional. [...] quando usando gráficos e tabelas sempre se pedia a leitura dos dados, sem uma visão crítica destes, nem possíveis conclusões. (Aluna D)
>
> [...]calculei variância, desvio-padrão e outras medidas, mas não descobri até agora em quais situações reais de sala de aula eu utilizarei tais conhecimentos (Aluna B)

A fala da aluna D evidencia a distribuição dos conteúdos de estatística pelos professores com ênfase nos elementos da estatística descritiva e explorando pouco o potencial da inferencial. Já na aluna B, verificamos a falta de relação do conhecimento do conteúdo com o pedagógico e o curricular, ficando um conteúdo sem nexo para as mesmas.

Quanto às dificuldades apresentadas, cinco das pesquisadas apontam que tiveram nos conteúdos ligados ao ensino da combinatória e probabilidade. Uma delas destaca que:

> [...] durante as aulas não deixaram (professores) clara a relação da probabilidade com a estatística, por isso tiveram (alunos) dificuldade. Foi um conteúdo acumulado no outro, sem qualquer vínculo percebido. (ALUNA A)

Confrontando os materiais institucionais (plano de ensino e modelos de provas aplicadas) verificamos que a análise dos documentos do professor que percebemos ter a preocupação da formação de seus alunos nos três níveis de conhecimento proposto por Shulman, também é evidenciado pela fala da aluna E:

> Para mim, as aulas de estatística sempre foram ótimas, o professor além de nos ensinar estatística também trabalhou nas aulas maneiras possíveis de como ensinar estatística nos anos iniciais. Usou bastante os Parâmetros Curriculares Nacionais na parte Tratamento de Informações. Também trouxe artigos científicos para que refletíssemos sobre o ensino destes conteúdos. (ALUNA E)

No depoimento da aluna E fica evidenciada a necessidade de ampliarmos as discussões acerca da educação estatística na política de formação inicial e continuada de professores, bem como também deixa bastante transparente a ideologia de quanto é preciso o professor relacionar às pesquisas científicas com as práticas de ensino nos cursos de licenciatura, pois essas possuem um grande potencial em enriquecimento cultural destes futuros professores, bem como a atualização nos referenciais teóricos que embasam seus processos educativos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa pesquisa possibilitou ampliar o debate acerca da educação estatística na formação do professor da educação básica, pois ainda há muitas instituições de ensino superior que ainda não demonstram grande importância com o processo formativo dos alunos dos cursos de licenciatura no que tange a questões didáticas e da prática do letramento estatístico nestes cursos. A estatística é um dos cinco eixos que compõem a Base Nacional Curricular Comum em nosso país, sendo desta forma necessária uma atenção maior aos conteúdos nos aspectos conceituais e metodológicos deste eixo, já que para atingir os objetivos de aprendizagem propostos é necessário ao professor conhecer bem o conteúdo que irá ministrar em suas aulas nos ensino fundamental, desde os anos iniciais.

Ainda verificamos que há necessidade de aprofundarmos a pesquisa no sentido de mostrar que a estatística deve ser desenvolvida nos cursos de formação de professores, articulando teoria e prática, onde os futuros professores vivenciem situações e que aprendam além dos conhecimentos ligados aos conteúdos de combinatória, probabilidade e estatística, mas que também consigam relacionar às suas salas de aula por meio da formação de conhecimentos nos níveis de ensino do conteúdo e de currículo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Universidad de Granada. Disponível em: <http://www.ugr.es/~batanero>. Acesso em 27/11/2014.

Biajone, J. (2010). Projeto estatístico na pedagogia: promovendo aprendizagens e (re)significando atitudes. In: Lopes, C. E., Coutinho, C. Q. e S.; Almouloud, S. A. (Orgs). *Estudos e reflexões em educação estatística.* Campinas: Mercado de Letras, pp.173-192.

Brasil. (2016). *Base nacional comum curricular*. (2ª Versão Revista). Ministério da Educação. Brasília: Ministério da Educação. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=36131> Acesso em15/05/2016.

Carvalho, C. F. (2001*). Interacção entre pares*: contributos para a promoção do desenvolvimento lógico e do desenvolvimento estatístico no 7º ano de escolaridade*. Tese de Doutorado* da Universidade de Lisboa, Portugal.

Carzola, I. M., Kataoka, V. Y. e Silva, C. B. (2012) *Trajetória e perspectivas da educação estatística no Brasil: um olhar a partir do GT12*. In: Lopes, C. E., Coutinho, C. Q. e S. e Almouloud, S. A. (Orgs). *Estudos e reflexões em educação estatística.* Campinas: Mercado de Letras, pp.11-26.

Costa, G. D. F. (2012). *A metodologia de projetos como uma alternativa para ensinar estatística no ensino superior*. Tese de Doutorado da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).

D' Ambrósio, U. (2014). Reflexões sobre conhecimento, currículo e ética. In: Machado, N. J., D'Ambrósio, U.; Arantes, V. A. (Orgs.). *Ensino de matemática:* pontos e contrapontos. São Paulo: Summus, pp. 73-122.

D' Ambrósio, U. (2001). Desafios da educação matemática no novo milênio. *Educação Matemática em Revista, 8*(11), 7-14.

Gal, I. (2002). Adults statistical literacy: meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review*, *70*(1),1-25.

Lemos, M. P. F. (2011). *O desenvolvimento profissional de professores do 1º ao 5º ano do ensino fundamental em um processo de formação para o ensino e a aprendizagem das medidas de tendência central*. Tese de Doutorado da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Costa, N. M. L. (2004). *Formação de professores para o ensino da matemática com a informática integrada à prática pedagógica*: exploração e análise de dados em bancos computacionais. Tese de Doutorado da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Lopes, C. E. (2003). *O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatística e probabilidade na educação infantil*. Tese de Doutorado da Universidade Estadual de Campinas.

Lopes, C. E. (2010). Os desafios para educação estatística no currículo de matemática. In: Lopes, C. E., Coutinho, C. Q. S., Almouloud, S. A. (Orgs). *Estudos e reflexões em educação estatística* (pp. 47-63). Campinas: Mercado de Letras.

Novaes, D. V. (2011). *Concepções de professores da educação básica sobre a variabilidade estatística*. Tese de Doutorado da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Silva, C. B. (2007). *Pensamento estatístico e raciocínio sobre variação: um estudo com professores de matemática*. Tese de Doutorado da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Souza, A. C. (2013). *O desenvolvimento profissional de educadoras da infância*: uma aproximação à educação estatística. Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática. São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul.

Souza, L. O. (2014). *O desenvolvimento profissional de professores para o ensino de probabilidade em tarefas de investigação estatística*. In: Lopes, C. E., Coutinho, C. Q. e S.; Almouloud, S. A. (Orgs). *Estudos e reflexões em educação estatística* (pp. 73-100). Campinas: Mercado de Letras.

Watson, J. (2001). Profiling teachers' competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of chance and data. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *4*(4), 305-337.

O PROFESSOR DE MATEMÁTICA E AS TECNOLOGIAS DIGITAIS MÓVEIS NO ENSINO DE FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU

Willian Rocha Padilha, Maria Elisabette Brisola Brito Prado
Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil)
padilhafpf@gmail.com; bette.prado@gmail.com

Palavras chave: apropriação, tablet, prática pedagógica

Key words: appropriation, tablet, teaching practice

RESUMO: Nesse trabalho de pesquisa procuramos compreender como um grupo de professores de Matemática da Educação Básica se apropria das Tecnologias Digitais Móveis (TDM), mais especificamente dos tablets para ensinar Função Polinomial do 1º grau. Foi desenvolvida uma Oficina, vinculada ao Projeto Observatório da Educação, abordando esse conteúdo com o uso dos recursos do software Grapher no tablet para um grupo de seis professores da Educação Básica. A pesquisa de natureza qualitativa centrou a análise dos dados coletados para desvelar como ocorre o processo de apropriação pedagógica da tecnologia desse grupo de modo a propiciar aos professores a construírem uma nova forma de ensinar, que integra os artefatos da cultura digital no seu fazer pedagógico.

ABSTRACT: In this research work we seek to understand how a group of Basic Education mathematics teachers appropriates the Digital Mobile Technologies (TDM), more specifically the tablets to teach polynomial function of the 1st degree. One workshop was developed, linked to the Centre for Education Project, addressing such content through the use of Grapher software features on the tablet to a group of six teachers of Basic Education. The qualitative research focused analysis of data collected to reveal how is the process of pedagogical appropriation of technology of this group in order to provide teachers to build a new way of teaching, which integrates the digital culture artifacts in their pedagogical practice.

INTRODUÇÃO

Diante da realidade em que as tecnologias digitais avançam novas demandas surgem na sociedade e, consequentemente no âmbito educacional. Em se tratando das tecnologias digitais móveis (TDM), desde 2007, o governo brasileiro tem incentivado projetos, inicialmente por meio de Projeto UCA (Um Computador por Aluno), que disponibilizou os laptops para mais de trezentas escolas com o propósito de criar e socializar formas diferentes para se utilizar tecnologias digitais nas escolas públicas. Mais recentemente, no ano de 2012, o Ministério da Educação investiu na compra de tablets que foram disponibilizados, primeiramente para os professores do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino, para serem utilizados como instrumento pedagógico, proporcionando mobilidade e acesso via wi-fi a conteúdos digitais.

Embora as experiências com o uso das TDM serem recentes, já existem algumas pesquisas originadas principalmente do Projeto Um Computador por Aluno (UCA) como, por exemplo, os estudos de Almeida e Prado (2009), que apontam um aspecto bastante inovador pelo fato dessa tecnologia móvel estar nas mãos dos alunos em sala de aula. Esta possibilidade de uso pedagógico requer novas formas de ensinar e de aprender, que implica na reconstrução da prática do professor.

De fato, antes do surgimento da tecnologia móvel, as escolas dispunham apenas de laboratórios de informática e o uso do computador dependia de agendamentos prévios e da disponibilidade de acesso, uma vez que um único laboratório tinha que atender um grande número de alunos e professores de uma mesma escola. Essa nova situação caracteriza, segundo Eivazian (2012), "[...] um novo paradigma de uso da tecnologia na educação" (p.15).

Em particular as tecnologias digitais com *touchscreen* presentes no iPods, iPhones e tablets, despertam a curiosidade e o interesse dos estudantes, podendo contribuir para a agilidade de raciocínio e envolvimento com relação às atividades que podem ser desenvolvidas.Além disso, fica evidente a facilidade dessa geração atual dos estudantes para o manuseio dos dispositivos móveis, para a descoberta e a colaboração entre eles, as quais proporcionam a busca e troca de informações, auxiliando de forma prazerosa a aprender com o outro.

No contexto do ensino de Matemática, os estudos de Bairral (2013) salientam que além da mobilidade esse dispositivo possui uma nova característica relacionada à interatividade por meio do *touchscreen* (tela sensível ao toque). Nos seus estudos com estudantes do Ensino Médio e o aprendizado geométrico com uso do software *Geometric Constructer* no tablet, identificou o potencial do dispositivo *touchscreen* para a aprendizagem da Geometria Dinâmica:

> *[...] assumimos que a manipulação nesse tipo de ambiente deve ser vista como uma ferramenta cognitiva que potencialize nos aprendizes as suas habilidades de exploração, de elaboração de conjecturas e de construção de diferentes meios de justificá-las. (Bairral, 2013, p.8).*

Considerando que a TDM pode ser potencializadora de processos cognitivos, torna-se necessário compreender como alunos e os professores usam os recursos no contexto da escola, com foco nos conteúdos curriculares. Concomitante a essa demanda também nos instiga a investigar e refletir sobre a preparação do professor para o aproveitamento do potencial das tecnologias digitais nos processos de ensino e de aprendizagem.

Assim reconhecendo tal necessidade e urgência, uma vez que essas tecnologias evoluem muito rapidamente e o acesso pelos estudantes muitas vezes é quase imediato ao seu surgimento, nesse artigo, o nosso objetivo é de identificar concepções e o modo como um grupo de seis professores de Matemática no qual atuam se apropriou do uso pedagógico dos tablets para ensinar Função Polinomial do 1º grau.

DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

Esta pesquisa se desenvolveu no contexto de uma Oficina, vinculada ao Projeto Observatório da Educação da CAPES. Nessa Oficina foi abordado o conteúdo de Função polinomial do 1º grau com o uso dos recursos do software Grapher no tablet que foi disponibilizado pelo governo brasileiro aos professores da Educação Básica. Participou dessa Oficina um grupo formado por seis professores de Matemática que atuam no Ensino Fundamental II e Médio. A coleta de dados aconteceu no período de agosto a novembro de 2014, durante os encontros quinzenais realizados em uma escola da rede pública do estado de São Paulo. Utilizamos como procedimentos metodológicos uma abordagem de natureza qualitativa, seguindo os pressupostos de Bogdan e Biklen (1994).

Foram utilizados questionários, entrevistas semiestruturadas, protocolos das atividades desenvolvidas pelos professores e registros dos encontros com a utilização de vídeo, áudio-imagem e diário de campo do formador/pesquisador. Durante os encontros na Oficina, o formador/pesquisador interagiu com os professores, visando prepará-los para utilização dos recursos do tablet de forma contextualizada aos conteúdos matemáticos, especialmente aqueles voltados para a Função Polinomial do 1º grau.

O questionário foi elaborado contendo questões relacionadas ao perfil dos professores e à familiaridade e conhecimento do tablet tanto em relação ao uso pessoal como profissional. As entrevistas foram aplicadas após os encontros de formação, com o intuito de ouvir os relatos dos professores sobre as experiências vivenciadas no curso. Além disso, foram feitos registros das observações e atividades desenvolvidas pelos professores como uso de softwares educacionais para a exploração de diferentes registros de representação de funções e, particularmente, de gráficos de funções polinomiais do 1º grau.

A análise dos dados quanto ao processo de apropriação da tecnologia pelos participantes se desenvolveu com base teórica nos estudos de Sandholtz, Ringstaff, Dwyer (1997); Almeida e Valente (2011). Esses autores acompanhando as experiências de implantação das tecnologias nas escolas identificaram que tal processo ocorre de forma gradativa, iniciando pela adoção das tecnologias e domínio operacional para outros que se aproximam de sua prática pedagógica sem o uso das tecnologias. De fato, o professor, na maioria das vezes, não teve contato com as tecnologias digitais na sua vida como estudante e na sua formação inicial.

Daí a importância de compreender como o professor se apropria dessa tecnologia para que o processo de formação continuada possa desenvolver estratégias que favoreçam desde a fase bem inicial, caracterizado por elementos relacionados ao domínio operacional e técnico até as fases mais avançadas em que o professor de forma autônoma integra os recursos tecnológicos aos conteúdos matemáticos, construindo uma nova forma de ensinar, ou seja, um ensino que integra os artefatos da cultura digital no seu fazer pedagógico.

Para tanto, Prado e Lobo da Costa (2013), salientam que o processo de apropriação tecnológica pode evoluir quando os professores têm a oportunidade de vivenciar, durante a formação um processo reflexivo e de compartilhamento entre os colegas e com a mediação do formador.

Assim, tendo como base tais princípios, a Oficina desenvolvida com o grupo dos seis professores procurou favorecer o diálogo e a integração entre eles durante a exploração dos recursos do tablet e do software Grapher de forma contextualizada, a partir de conteúdos matemáticos do currículo escolar.

DESCRIÇÃO E ANÁLISE

As análises preliminares permitiram identificar as reações dos professores ao interagirem com os tablets usando o software Grapher nos encontros realizados na Oficina.

Logo no inicio, assim que o grupo de professores conheceu a proposta da Oficina, alguns deles manifestaram o interesse de aprender a usar as tecnologias digitais móveis, mas também manifestam preocupações considerando a realidade escolar, conforme mostra os extratos a seguir:

> _Prof-B: *Eu tenho um tablet e não uso [...] mas penso que tenho que conhecer o programa, fazer a oficina e me dedicar [...]. Mas quando penso nos quarenta alunos que tenho na sala de aula, acho que é difícil*.

Na fala do Prof-B fica claro que ele reconhece a necessidade de aprender a usar a tecnologia, mas questiona como viabilizar o seu uso na estrutura de sala de aula. É um aspecto que vai além de saber usar a tecnologia, pois envolve o contexto e a necessidade de repensar a prática pedagógica.

Nesse sentido Mendes e Almeida (2011) observou em sua pesquisa que é preciso rever o espaço físico das salas de aula, o planejamento e a gestão da aula para que o professor possa acompanhar as descobertas e questionamentos dos alunos quando interagem com a tecnologia no processo de aprendizagem.

Isso mostra que esse novo paradigma, em que as tecnologias digitais móveis estão nas mãos dos alunos em sala de aula, provoca reflexões dos professores sobre o seu papel e as formas de interagir com os alunos.

> _Prof-F: *Esse método que a gente usa em sala de aula não dá mais! Esses alunos não são como nós éramos como estudantes do ensino médio que ficávamos sentados quietos ouvindo o professor [...]. Hoje o aluno esta numa outra realidade. Eu acho que a partir do momento que você leve alguma coisa que fale mais próximo da linguagem deles, chamaria sim atenção dos alunos para aprender [...].*

Nota-se que o professor entende que essa geração é diferente, esses alunos são nativos digitais e, portanto, é necessário rever a forma de ensinar. De fato alguns professores do grupo deixam claro que têm consciência de que não dá para negar que as tecnologias digitais precisam fazer parte do contexto da aula e que eles necessitam conhecer suas potencialidades pedagógicas para as integrarem ao ensino de matemática.

Os professores inicialmente exploraram o software Grapher no tablet realizando atividades que envolveram funções. O Grapher é um software gratuito e fácil de utilizar que possibilita a criação de

gráficos de funções, mudança no pano de fundo do plano cartesiano, troca nas cores das grades, ampliação e redução de imagem por meio do toque e abertura com os dedos. Com isso, torna possível modificar escalas, produzir um efeito de "zoom" e observar particularidades dessas funções.

Durante a formação, os professores, utilizaram o tablet para o ensino de funções polinomiais do 1º grau e discutiram com os colegas as possibilidades pedagógicas que conseguiam identificar, como mostram os depoimentos a seguir na situação em que desenvolviam a criação do gráfico f(x) = x-1 usando o software Grapher.

> _Prof-A: *No tablet é mais fácil porque posso mostrar para o aluno o coeficiente linear no gráfico e através de zoom o aluno pode perceber as mudanças de valores e que a reta permanece a mesma independente dos valores de y.*
>
> _Prof-C: *O aluno gosta do visual fica mais fácil perceber e analisar os gráficos e comparar as funções.*

Observa-se logo no início em que os professores interagem com o software no tablet, o que chama mais atenção é a possibilidade de facilitar a visualização. De fato, isto faz parte do processo de apropriação do professor, ou seja, de fazer o uso da tecnologia para apresentar o gráfico para o aluno, adotando a mesma atitude utilizada em sala de aula. Para tanto, como ressalta Maltempi (2008, p. 62), é *necessário que o professor reorganize e reflita sobre sua prática ao inserir tecnologias em sala de aula, o que demanda tempo e esforço do docente [...].*

Isto significa que o professor precisa compreender as implicações dos recursos tecnológicos no processo de aprendizagem do aluno, bem como suas potencialidades e restrições. Essa compreensão é que poderá levar o professor a propor tarefas para que o aluno possa manipular os recursos dos softwares no contexto matemático, propiciando o levantamento de hipóteses e a elaboração de conjecturas acerca dos conceitos envolvidos.

Entretanto, mesmo concebendo esta forma em que o aluno ativamente explora as potencialidades dos recursos tecnológicos, ainda impera o modelo habitual de ensino. No grupo de professores, um deles que já tinha familiaridade com o uso do tablet e do software Grapher, propôs desenvolver uma aula com os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental usando o tablet e o Grapher com o intuito de explorar o crescimento e decrescimento da função polinomial do 1º grau, os aspectos relacionados à lei de formação de cada função e analisar o gráfico de cada uma delas. Para tanto, o Prof-A, organizou uma dinâmica diferente da sala de aula, formando grupos de seis alunos usando dois tablets, mas antes, ou seja, na aula anterior o professor ensinou o conteúdo de função em sala de aula. Isto mostra que o uso da tecnologia foi feito para confirmar aquilo que o aluno tinha aprendido na aula dada habitualmente.

Essa prática para desenvolver um conteúdo primeiramente utilizando-se do giz e da lousa para ensinar função e, posteriormente, fazer o uso do tablet apenas para confirmar os resultados, pode ser entendida por uma das fases do processo de apropriação que, segundo Almeida e Valente (2011), leva algum tempo para que o professor possa fazer o uso integrado da tecnologia ao currículo, como afirmam:

> O processo de apropriação da tecnologia e sua integração nas atividades curriculares demandam tempo e acontecem de modo gradativo, como foi constatado na evolução do uso pedagógico do computador [...] (p.44).

Os dados analisados deixam evidenciada a complexidade do processo de apropriação da tecnologia para ser utilizada no contexto da prática do professor. Isto porque o fazer pedagógico é construído e consolidado no cotidiano da sala de aula e no contexto escolar. Diante disso, a formação requer propiciar novas vivencias integrando as tecnologias digitais na prática do professor para que ele possa refletir sobre seu fazer e reconstruir conhecimentos que possam lhe oferecer referenciais para subsidiar as inovações de sua prática.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

O uso das tecnologias digitais de comunicação e informação já é tratado com tema indispensável na prática formativa dos docentes e sua utilização nas diferentes ações em que o professor utiliza em sala de aula para aperfeiçoar os processos de aprendizagem de seus alunos.

Neste panorama a pesquisa mostrou que é importante que as instituições responsáveis pela formação de professores venham ajudar os professores a criarem novas possibilidades de ensinar os alunos em um cenário tão imediatista.

Essas ferramentas tecnologias como o tablets e celulares devem ser exploradas e aliadas às múltiplas situações aprendizagem no sentido de que nos processos formativos é preciso criar situações em que o professor aprenda não apenas a operacionalizar os recursos tecnológicos, mas que possa atribuir sentido pessoal e profissional para o seu uso. Portanto a formação requer propiciar novas vivencias integrando as tecnologias digitais na prática do professor para que ele possa refletir sobre o seu fazer pedagógico, compartilhar essas reflexões individuais e coletivas no grupo de profissionais convivendo em um processo que possa se apropriar e de fazer a reconstrução de um conhecimento para subsidiar as inovações de sua prática de forma condizente com a sociedade da cultura digital que vivemos.

A pesquisa exposta nesse artigo procurou mostrar algumas possibilidades de otimização dos recursos das TDIC em sala de aula, mas ainda existe há necessidade que novas pesquisas venham acrescentar as que estão em desenvolvimento, pois essa área esta sempre se reconstruindo e requer atualização constante nas novas ideias, concepções e metodologias para o processo de ensinar.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Almeida, M.E.B. & Valente, J.A. (2011). *Tecnologias e currículo: trajetórias convergentes ou divergentes?* São Paulo: Paulus.

Bairral, M. A. (2013). Do clique ao touchscreen: Novas formas de interação e de aprendizado matemático. In *36a Reunião Nacional da Anped*. Sistema Nacional de Educação e Participação Popular: Desafios para as Políticas Educacionais. Goiânia: Anped/UFG (pp. 1-18).

Bogdan, R.C.; Biklen, S.K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação.* Porto, Portugal: Porto Editora Ltda.

Eivazian, A.M.B. (2012). O Computador Móvel e a Prática de Professores que Ensinam Matemática em uma Escola do Projeto UCA. *Dissertação de Mestrado em Educação Matemática*. Universidade Bandeirante de São Paulo, Brasil.

Maltempi, M. V. (2008). Educação matemática e tecnologias digitais: reflexões sobre prática e formação docente. *Acta Scientiae*, v.10, n.1, jan./jun. p.60 – 66.

Mendes, M.; Almeida, M.E.B. (2011). Utilização do laptop educacional em sala de aula. In: Almeida, M.E.B.; Prado, M;E.B.B. (orgs.). *O computador portátil na escola* – Mudanças e desafios nos processos de ensino e aprendizagem. São Paulo: Avercamp.

Prado, M.E.B.B. & Lobo da Costa, N.M. (2013). O processo de apropriação das TIC e a reconstrução de novas práticas no ensino de matemática. In *Actas VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática – CIBEM*. Montevidéu, Uruguai. (pp. 6973-6980). Available for download at: <http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/588.pdf>. Last accessed: February 20, 2015.

Sandholtz, J.H.; Ringstaff, C.; Dwyer, D.C. (1997). *Ensinando com Tecnologia*: criando salas de aula centradas no aluno. Porto Alegre: Ed. Artes Médicas.

CONCEPTUALIZACIÓN DE COMPETENCIA REFLEXIVA Y DIFICULTADES EN SU DESARROLLO

María José Seckel, Adriana Breda, Vicenç Font, Gemma Sala
Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile. Pontificia Universidad Católica do Río Grande do Sul, Brasil. Universidad de Barcelona, España.
mseckel@ucsc.cl, adriana.breda@gmail.com, vfont@ub.edu, gsala@ub.edu

Palabras clave: formación inicial, competencia de reflexión, prácticas y evaluación.

Key words: initial training, competition for reflection, assessment practices.

RESUMEN: Este trabajo corresponde a una investigación cualitativa que, por medio de un estudio de caso, busca profundizar en los procesos formativos de futuros profesores de educación general básica con mención en matemática de una universidad chilena, respecto al desarrollo de la competencia de reflexión. Los datos evidencian que los participantes consideran relevante el desarrollo de la competencia de reflexión para lograr mejorar la práctica. Por otra parte, señalan algunas dificultades para su desarrollo.

ABSTRACT: This work aims to improve the development of the reflexive competence in teachers of basic education from a chilean university. A qualitative assessment was conducted using data from a study case, and the development of the reflective competence for teaching improvement was considered as relevant by the participants. Results, however, also showed that there are some difficulties for its development.

INTRODUCCIÓN

La incorporación de la reflexión sobre la práctica en la formación inicial de profesores está relacionada, entre otros aspectos, con la amplia investigación sobre el desarrollo profesional del profesor, que ha puesto de manifiesto la necesidad de investigar sobre su desarrollo y evaluación.

En el ámbito de la formación inicial, distintos países han impulsado un conjunto de reformas en las que domina un modelo organizado por competencias profesionales. En Chile, dicha tendencia se ha concretado en la publicación del Ministerio de Educación, en el año 2012, de los estándares que se espera que hayan alcanzado los egresados de la carrera de pedagogía general básica al finalizar sus estudios de grado. Una de las competencias que se ha considerado en esta publicación es la reflexiva, en Seckel y Font (2015) se formuló y una propuesta de caracterización de la competencia reflexiva con grados de desarrollo y descriptores y se realizó un diagnóstico del nivel de desarrollo de esta competencia en un grupo de futuros profesores chilenos que estudian la carrera de pedagogía general básica. Los resultados obtenidos mostraron un bajo nivel de desarrollo de dicha competencia. En esta investigación nos hemos interesado en investigar como "viven" los estudiantes que muestran este bajo nivel de competencia reflexiva y sus formadores la competencia de reflexión en la institución donde estudian y trabajan. En particular nos hemos interesado en responder a las siguientes preguntas:¿Qué piensan los futuros profesores y sus formadores acerca de la competencia de reflexión? ¿Qué dificultades observan en el desarrollo de dicha competencia en la institución donde estudian y trabajan?

MARCO DE REFERENCIA

Competencia de reflexión

El tema de la reflexión sobre la propia práctica lleva algunos años de recorrido, podríamos decir que el primer autor que acerco el concepto de profesor reflexivo es Dewey. Para este autor, un valor propio del pensamiento reflexivo es aquel que nos libera de la actividad meramente impulsiva y puramente rutinaria, es decir, nos capacita para dirigir nuestras actividades con previsión y fines claros (Dewey, 1989). Así mismo, Schön (1992), plantea la necesidad de la formación de profesionales reflexivos, destacando que las escuelas deben replantearse tanto la epistemología de la práctica como los sustentos pedagógicos sobre los que se asientan sus planes de estudio, a la vez que deben favorecer cambios en sus instituciones de modo que den cabida a un prácticum reflexivo como un elemento clave en la preparación de sus profesionales. Más recientemente, Brockbank y McGill (2002) manifiestan que la reflexión es una competencia que permite aprender de la práctica y conseguir mejorarla. En esta misma línea Perrenoud (2004), sostiene que para lograr conseguir docentes reflexivos se necesita diferentes ingredientes. Por una parte, se necesita que el profesor tenga un método para la reflexión (que en líneas generales puede ser similar en diferentes materias) y por otra parte, son necesarios marcos conceptuales específicos de cada disciplina que sirvan para entender, organizar y analizar la información sobre la que se reflexiona.

El Ministerio de Educación en Chile ha manifestado a través de distintas publicaciones que la reflexión es una de las habilidades que el profesor necesita para alcanzar buenas prácticas pedagógicas. Esto lo podemos apreciar en dos de sus publicaciones. La primera publicación está dirigida a los profesores, en ella han manifestado que:

> El docente reflexiona críticamente sobre las estrategias desarrolladas y sus efectos en los aprendizajes de los alumnos, evaluando cómo se cumplieron los objetivos propuestos y si los alumnos se comprometieron con las actividades de aprendizaje. A partir de este análisis, el profesor reformula sus estrategias de enseñanza para hacerlas más efectivas, de manera que respondan a las necesidades de aprendizaje de todos sus estudiantes (Mineduc, 2008, p.33).

La segunda publicación entrega orientaciones sobre cuáles son las competencias que deberían desarrollar los profesores de educación básica en la etapa de formación inicial. En ella han considerado que la competencia de reflexión se manifiesta cuando:

> Al mismo tiempo, se considera que se manifiesta cuando: "Analiza críticamente su práctica pedagógica y la de otros docentes en función de su impacto en el aprendizaje de los estudiantes, y propone y fundamenta cambios para mejorarla. Para ello posee herramientas para observación y evaluación de clases y está preparado para ser observado y recibir retroalimentación de acuerdo a su desempeño (Mineduc, 2012, p. 39).

En ambos trabajos la competencia de reflexión tiene un carácter transversal, es decir, cada profesor debe ser capaz de movilizar dicha competencia en el contexto de la disciplina que enseña.

Desde la didáctica de la matemática surgen distintas propuestas que aportan marcos conceptuales relacionados con el desarrollo de la competencia de reflexión, como son: la competencia mirar con sentido (Mason, 2002), la metodología Lesson Study (Fernández & Yoshida, 2004), la metodología Concept Study (Davis, 2008), Conocimiento matemático para una enseñanza de las matemáticas de calidad (Hill et al., 2008), la competencia de análisis didáctico en el enfoque ontosemiótico (Godino, Contreras & Font, 2006; Font, Rubio, Giménez & Planas, 2009; Font, Planas & Godino, 2010).

Domingo (2009), plantea que las tareas presentadas por los docentes universitarios para desarrollar la competencia reflexiva deben estar acompañadas de orientaciones que permitan comprender cómo se debe reflexionar. En el ámbito de la formación del profesorado, distintos autores se han interesado en investigar sobre cómo deben ser los procesos de reflexión guiados (Nolan, 2008; Giménez, Font & Vanegas, 2013), mostrando técnicas, pautas u orientaciones que son útiles para desarrollarla. Por otra parte, Perrenoud (2004) recalca que formar practicantes reflexivos no puede limitarse a añadir un módulo reflexivo al programa de formación, por lo que se requiere que estas tareas estén presentes durante todo el proceso de formación inicial. Godino y Batanero (2008) consideran que los procesos de orientación (reflexión guiada) no se limitan únicamente a la reflexión que surge de la práctica de los futuros profesores, sino que también debe estar presente en las tareas que se presentan en los procesos de formación académica. En particular el marco del EOS, se propone organizar la parte valorativa de la reflexión de los profesores mediante el uso de los criterios de idoneidad didáctica (Breda, Font y Lima, 2015) y la parte descriptiva y explicativa por medio de las seis facetas o miradas siguientes:

1. Epistémica: se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de un significado de referencia.
2. Cognitiva: expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.

3. Interaccional: grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje.
4. Mediacional: grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje.
5. Emocional: grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio.
6. Ecológica: grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social, etc.

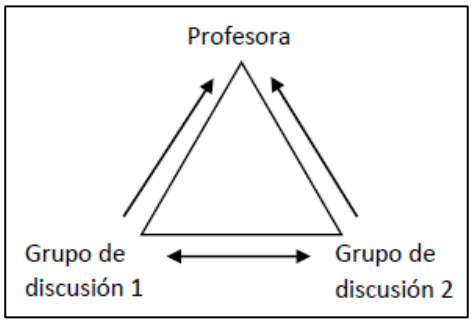
METODOLOGÍA

Esta investigación ha seguido una metodología cualitativa para lo cual se seleccionó el método de estudio de caso único de tipo instrumental (Stake, 2007). El caso se ha conformado con una profesora y 17 estudiantes que participan en una cátedra que se imparte en el segundo semestre del cuarto año de la Carrera de Pedagogía en Educación General Básica con Mención en Matemática en una Universidad chilena.

Los datos o unidades de análisis se han obtenido por medio de dos grupos de discusión (con los estudiantes) y una entrevista (a la profesora), con los cuales hemos realizado un tipo de categorización inductiva, es decir, dichas categorías surgen del discurso de los participantes.

Finalmente, para alcanzar nuestros objetivos, hemos procedido a realizar una triangulación de datos.

Figura 1. Triangulación de datos

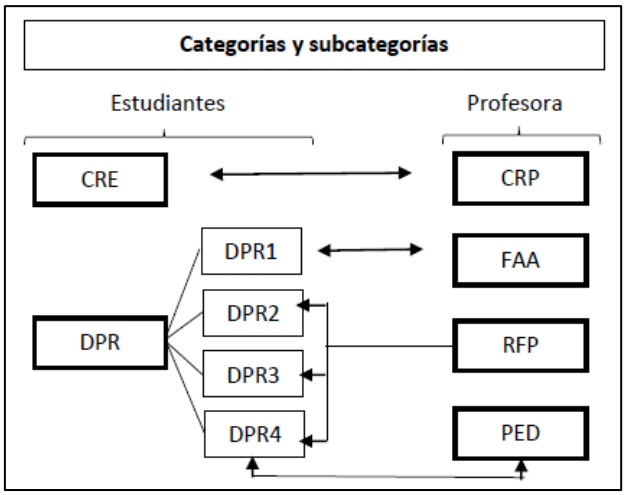


ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

El desarrollo de la competencia de reflexión fue la temática central tanto en los grupos de discusión como en la entrevista. La información recolectada nos permite, por una parte, comprender como se ha trabajado esta competencia en años anteriores y, por otra parte, nos aporta con información relevante a la hora proponer un ciclo formativo que permita mejorar el nivel de competencia en los futuros profesores. Dado a los objetivos que persigue este trabajo, nos centraremos en aquellas categorías y subcategorías que nos dan la posibilidad de construir una conceptualización de competencia de reflexión basada en el discurso de los participantes, como también, en aquellas que se relacionan con las dificultades que perciben en su desarrollo. En la figura 1 observamos las

categorías y/o sub-categorías que surgen del discurso de los estudiantes (grupos de discusión) y de la profesora (entrevista), así como las relaciones que existen entre ellas.

Figura 2. Categorías y sus relaciones.



Primera relación

La primera relación que observamos corresponden a las categorías CRE (Competencia de reflexión según los estudiantes) y la CRP (competencia de reflexión según la profesora). A partir del análisis de estas categorías, logramos asignar el siguiente significado a la competencia de reflexión (el cual fue presentado y discutido con los participantes): "Competencia que permite reflexionar sobre la práctica pedagógica (propia o ajena) antes y después de una implementación. Es importante desarrollar dicha competencia en los futuros profesores, pero esta debe tener una estrecha relación con la competencia matemática para lograr mejorar la práctica"

Segunda relación

En la segunda etapa de análisis, logramos realizar tres tipos de relaciones:

En la primera se establece una relación entre la sub-categoría DPR1 (Escasa orientación de los profesores) y la categoría FAA (falta de acuerdos académicos). De acuerdo a los datos, podemos ver que existe coherencia entre el discurso de los estudiantes y la profesora respecto a una misma problemática: ausencia de una formación intencionada para el desarrollo de la competencia de reflexión. Esto lo podemos evidenciar en el discurso de los estudiantes cuando plantean que "depende del profesor si se reflexiona bien después de las prácticas", "no recibimos orientación para hacer observaciones", "es que las reuniones de práctica se supone que son para la reflexión pedagógica, pero no se da o depende de quién lo haga". Del mismo modo, podemos observarlo en el discurso de la profesora, quien frente a la pregunta ¿han tomado decisiones respecto a cómo quieren desarrollar esta competencia en los futuros profesores? Nos dice: "no hemos tenido conversaciones de ello", "está todo en un plano muy teórico".

La segunda tiene que ver con la categoría RFP (rechazo de los futuros profesores) y su relación con las categorías DPR2 (baja experiencia), DPR3 (poco tiempo de práctica) y DPR4 (mala evaluación). De acuerdo a los datos, consideramos que el rechazo de los futuros profesores hacia las tareas que requieren reflexionar se puede explicar a través de tres dificultades a las que hacen

mención futuros profesores, las cuales surgen en el contexto de sus prácticas (siete prácticas cursadas, con una duración de un semestre cada una). La primera explicación radica en que los futuros profesores consideran que sus experiencias de práctica no les permite alcanzar seguridad para reflexionar sobre el trabajo matemático de todos los niveles de educación básica. Manifiestan que estos no son asignados de manera estratégica (repiten los niveles, sólo conocen los niveles de primer ciclo de enseñanza básica o solo los de segundo ciclo, etc.), lo que provoca que no tengan una visión amplia de la enseñanza de la matemática en educación básica (DPR2). La segunda explicación se refiere al tiempo que les asignan para ir a los centros de práctica, el cual no aumenta de manera progresiva. En las primeras ocho prácticas asisten un día cada semana, lo que no les permite observar ni implementar una unidad didáctica completa (DPR3). Finalmente, consideramos que la tercera explicación radica en la baja valoración que le entregan los futuros profesores a la evaluación que reciben (DPR4) al momento de reflexionar sobre las prácticas. Manifiestan que en algunas ocasiones no comunican todas sus ideas respecto a una clase observada por que pueden perjudicar la calificación de algún compañero.

En la tercera relación volvemos a centrarnos en los procesos evaluativos y toma más fuerza la última explicación que hemos mencionado en el punto anterior. En esta tercera relación vemos que la profesora se alinea con esta temática, manifestando que las pautas de evaluación deben ser mejorados, pero que no se han generado espacios para que los formadores trabajen en eso (PED).

CONSIDERACIONES FINALES

Los participantes consideran relevante el desarrollo de la competencia de reflexión para lograr mejorar la práctica y la vinculan con la competencia matemática. Por otra parte, señalan algunas dificultades para su desarrollo y evaluación, relacionadas, en su mayor parte, con la falta de la utilización de pautas explícitas que orienten la reflexión. En este sentido, vemos que los futuros profesores coinciden con lo planteado por Perrenoud (2004), quien señala la necesidad de que los formadores de futuros profesores cuenten con un marco de referencia que sirva como estructura de acogida al momento de reflexionar sobre la práctica propia o ajena.

Finalmente, cabe señalar que una manera de intentar revertir las dificultades encontradas es a través de la utilización de pautas explícitas que orienten la formación y evaluación, como se ha aplicado en diversas investigaciones y propuestas de formación (Godino & Batanero, 2009; Rivas, Godino & Konic, 2009; Giménez, Font & Vanegas, 2013).

Agradecimientos. Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación I+D EDU2012-32644 del Ministerio de Economía y Competitividad de España, titulado: “desarrollo de un programa por competencias en la formación inicial de profesores de secundaria de matemática”.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brockbank, A. y McGill, I. (2002). *Aprendizaje reflexivo en la educación superior*. Madrid: Morata.

Breda, A., Font, V. y Lima, V. M. R. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática* 8(2), 1-41.

Davis, B. (2008). Is 1 a prime number? *Developing teacher knowledge through concept study. Mathematics Teaching in the Middle School* (NCTM), 14(2), 86-91.

Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos*: Nueva exposición de la relación entre pensamiento y proceso educativo. Barcelona etc.: Paidós.

Domingo, A. (2009). Desarrollar la competencia reflexiva en la educación superior. Diez propuestas para el aula universitaria. *Revista panamericana de pedagogía,* 19, 33-50.

Fernandez, C. y Yoshida, M. (2004). *Lesson study*: a Japanese approach to improving mathematics teaching and learning. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105.

Font, V., Rubio, N. Giménez, J. y Planas, N. (2009). Competencias profesionales en el Máster de Profesorado de Secundaria, *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 51, 9-18.

Giménez, J., Font, V. y Vanegas, Y. (2013). Designing Professional Tasks for Didactical Analysis as a research process. En C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education* (pp. 581-590). Oxford: Proceedings of ICMI Study 22.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.

Godino, J. D. & Batanero, C. (enero, 2009). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. En I. Guzmán (Presidencia), *VI congreso iberoamericano de educación matemática*, Puerto Montt, Chile.

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction*, 26 (4), 430-511.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice*. The discipline of noticing. London: Routledge-Falmer.

Mineduc (2008). Marco para la buena enseñanza. http://www.docentemas.cl/docs/MBE2008.pdf

Mineduc (2012). Estándares orientadores para egresados de carreras de Pedagogía en Educación Básica. http://www.cpeip.cl/usuarios/cpeip/File/librosestandaresvale/libromediafinal.pdf

Nolan, A. (2008). Encouraging the reflection process in undergraduate teachers using guided reflection. *Australian Journal of Early Childhood*, 33(1), 31-36.

Perrenoud, P. (2004). *Diez nuevas competencias para enseñar*: Invitación al viaje. Barcelona: Graó.

Rivas, M., Godino, J.D., & Konic, P. Análisis epistémico y cognitivo de tareas en la formación de profesores de matemática. En M.J. González, M. T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en educación matemática XIII* (pp. 453-462). Santander: SEIEM.

Seckel, M.J. y Font, V. (2015). Competencia de reflexión en la formación inicial de profesores de matemática en Chile. *Práxis Educacional*, 11(19), 55-75.

Schön, D. A. (1992). *La formación de profesionales reflexivos*: hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones. Barcelona: Paidós.

Stake, R.E. (2007). *Investigación con Estudios de Casos.* (4 Ed.). Madrid, España: Morata.

PROFESSORES DE MATEMÁTICA DISCUTINDO TEORIA E PRÁTICA SOBRE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Rosana Jorge Monteiro Magni, Nielce Meneguelo Lobo da Costa, Rosangela de Souza Jorge Ando
Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil)
rosanamagni@ig.com.br; nielce.lobo@gmail.com; rosangela.ando@gmail.com

Palavras chave: formação continuada; grupo de estudos; desenvolvimento profissiona, resolução de problemasl.

Key words: continuing education; study group; professional development, problems solutions

RESUMO: O propósito deste artigo é analisar um episódio ocorrido em um processo formativo no qual um grupo de professoras refletiram sobre Teoria e Prática de Resolução de Problemas no ensino da Matemática. Essa analise integra uma pesquisa de doutorado em andamento que tem como objetivo investigar o desenvolvimento profissional de tais professoras. A metodologia da pesquisa é qualitativa de cunho co-generativo, segundo Greenwood e Levin (2000), o embasamento quanto ao desenvolvimento profissional vem dos estudos de Ponte (1994) e, no tocante aos conhecimentos necessários para a docência Shulman(1986). A análise dos dados coletados permitiu constatar que as discussões teóricas e a proposição, resolução e análise de problemas levaram à construção de conhecimentos por parte do grupo. Concluímos que houve ampliação do conhecimento profissional, especialmente do conhecimento pedagógico do conteúdo, e também indícios de desenvolvimento profissional.

ABSTRACT: The purpose of this paper is to analyze an episode in a formative process in which a group of teachers reflected on Theory and Troubleshooting practice in the teaching of Mathematics. This analysis incorporates a doctoral research in progress that aims to investigate the professional development of these teachers. The research methodology is qualitative co-generative nature, according to Greenwood and Levin (2000), studies from Ponte (1994) basemen the professional development and, studies Shulman (1986) with respect to the knowledge needed for teaching in mathematics. The data analysis allowed establishing that the theoretical discussions and proposals, analysis and resolution of problems led to the construction of knowledge by the group. We conclude that there was an increase of professional knowledge, especially the pedagogical content knowledge. , and professional development indicators.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Este artigo apresenta resultados parciais de um estudo em andamento que se insere na linha de pesquisa "Formação de Professores que Ensinam Matemática" do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo/ UNIAN-Brasil. Tal estudo desenvolve-se na esfera do Projeto Nº 19 366 – Edital 49/2012, dessa Universidade intitulado "Educação Continuada do Professor de Matemática do Ensino Médio: Núcleo de Investigações sobre a Reconstrução da Prática Pedagógica" do Programa Observatório da Educação da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior/ CAPES, do Ministério da Educação brasileiro, aqui intitulado Projeto "OBEDUC Práticas". Um dos objetivos de tal Projeto é o de proporcionar aos professores de Matemática uma formação continuada mediante estratégias que articulem teoria, prática docente e pesquisa. Assim sendo, a coordenadora do Projeto, em parceria com profissionais de uma Diretoria de Ensino da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, desenvolveu ao longo de dois anos ininterruptos (2013 e 2014) cursos e constituiu um grupo de estudos.

Nos **cursos** participaram professores da Educação Básica da rede estadual de ensino de Matemática das cidades de São Paulo e Guarulhos. Professores, mestrandos e doutorandos do Programa de Pós-graduação da Universidade ministraram tais formações. Os encontros dos **cursos** aconteceram ao longo do ano de 2013, aos sábados pela manhã, e também, no primeiro semestre de 2014, às terças-feiras no período noturno.

Entre os participantes desses cursos, cinco professoras foram convidadas para compor um **grupo de estudos**, aqui denominado Grupo Constelações. As integrantes são aqui referidas por nomes fictícios*: Orion, Draco, Ara, Taurus e Lyra* e o grupo foi constituído, além dessas professoras, por duas pesquisadoras da Universidade. O grupo se reunia quinzenalmente, aos sábados no período da manhã, alternados com os encontros dos cursos.

O tema gerador tanto dos cursos quanto do grupo de estudos foi a Resolução de Problemas.

Nos **cursos** foram discutidos problemas históricos; os que utilizam o jogo como recurso para a resolução; os que aplicam o método de Cingapura; os do campo aditivo e multiplicativo. Para esses estudos, foram utilizados nesses cursos referenciais sobre a Resolução de Problemas, tais como Dante (2009), Polya (2006), Pozzo (1998) e Schoenfeld (1985). Além disso, tomou-se por base a pesquisa de Bryant e Nunes (2012) desenvolvida na Universidade de Oxford – Inglaterra.

Salientamos que as atividades apresentadas e discutidas nos cursos, foram aplicadas em sala de aula pelas cinco professoras do Grupo Constelação, que traziam os resultados para a socialização e discussão no âmbito dos encontros com demais professores cursistas.

O **grupo de estudos** discutiu nos encontros: as atividades propostas nos cursos; a aplicação das atividades pelas cinco professoras nas salas de aula; a elaboração de um artigo para participar de um evento científico; textos teóricos que subsidiam o tema Resolução de Problemas, como: Echeverria(1998), Polya (2006) e Dante (2009); a videoconferência assistida – proferida pelo professor Luís Meneses da Universidade de Lisboa, a qual abordou o tema: Práticas de ensino exploratório da Matemática; a aplicação nas salas de aula de atividades exploratórias e os resultados dessa aplicação com os alunos.

Ressaltamos que ao longo desse percurso se constituiu efetivamente o Grupo de Estudos Constelações, que passou a ter um caráter cooperativo e colaborativo, que entendemos pode auxiliar o desenvolvimento profissional docente, como enfatiza Boavida & Ponte (2002). Os integrantes a cada momento, criaram vínculos, uma parceira ímpar, inquestionável e incontestável um ambiente de estrita cumplicidade e colaboração. Corroboramos aqui com as ideias de Boavida e Ponte (2002), quando dizem que,

> Juntando diversas pessoas que interagem, dialogam e refletem em conjunto, criam-se sinergias que possibilitam uma capacidade de reflexão acrescida e um aumento das possibilidades de aprendizagem mútua, permitindo, assim, ir muito mais longe e criando melhores condições para enfrentar, com êxito, as incertezas e obstáculos que surgem. (Boavida e Ponte, 2002, p. 44).

No contexto desta pesquisa as ações empreendidas tiveram a intenção de promover articulação entre teoria e prática no tocante ao tema em questão, como já nos referimos neste artigo. Pretendeu se desenvolver, entre os professores tanto os participantes dos cursos quanto os do grupo de estudos, a reflexão sobre a prática, sobre a sala de aula, sobre os teóricos que subsidiem suas ações pedagógicas.

A pesquisa de doutorado em andamento, que dá suporte a este artigo, analisa o processo de constituição do Grupo de Estudos Constelações e as características que favoreceram o desenvolvimento profissional dos envolvidos do grupo.

A intenção deste artigo é analisar um episódio ocorrido nesse grupo de estudos no qual as professoras participantes refletiram sobre Teoria e Prática de Resolução de Problemas no ensino da Matemática.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para este artigo apresentamos um recorte da fundamentação teórica que subsidia a pesquisa.

No tocante a constituição do grupo de estudos nos apoiamos em Murphy e Lick (1998), que dão suporte para análise desse tipo de organização. Segundo esses pesquisadores, um grupo de estudos pode ser visto como uma pequena quantidade de pessoas com os mesmos fins (metas e objetivos em comum), procurando aperfeiçoar os conhecimentos pessoais e profissionais dos envolvidos, assim favorecendo o desenvolvimento profissional docente. Tais pesquisadores, ressaltam ainda que um grupo de estudos pode propiciar a reflexão dos participantes visando o aprimoramento das práticas pedagógicas e possivelmente obtenção de soluções para que os professores superem os desafios com que se deparam no dia a dia na profissão docente.

O Grupo Constelações foi organizado e estruturado segundo estudos de Murphy e Lick (1998), De acordo com esses pesquisadores, deve existir entre os integrantes do grupo de estudos um acordo na elaboração no plano de ação a ser trilhado; as ações devem ser constantemente avaliadas, e se houver a necessidade de mudanças no transcorrer das ações, deverão ser replanejadas, sempre em comum acordo com seus integrantes. Além disso, os encontros do grupo precisam ter uma agenda pré-definida, as discussões realizadas nos encontros devem ser registradas e estabelecer normas no início dos trabalhos.

Na constituição do Grupo Constelações, identificamos o que Ponte (1997) sinaliza em seus

estudos: que o desenvolvimento profissional são os movimentos, empreendidos pelo professor, que levam à reestruturação de sua prática pedagógica, partindo de reflexão, ação e nova reflexão.

Os pesquisadores Boavida e Ponte (2002, p. 45), consideram nos processos de educação continuada o trabalho colaborativo como sendo o que ocorre em "casos nos quais diversos intervenientes trabalham conjuntamente, não numa relação hierárquica, mas numa base de igualdade de modo a haver ajuda mútua e a se atingirem objetivos que a todos beneficiem". Entendemos que no trabalho colaborativo diferentes visões permitem a composição de representações interpretativas consistentes sobre a questão estudada e investigada.

A partir desses teóricos foram realizadas análises que compõe este episódio e estabelecidos alguns resultados.

METODOLOGIA

A pesquisa que subsidia este artigo é de natureza qualitativa de cunho co-generativo, segundo Greenwood e Levin (2000), ou seja, um tipo de pesquisa-ação conduzida democraticamente entre os participantes, na qual o conhecimento é co-gerado e o significado é construído no processo de investigação.

Para atingir o objetivo da pesquisa os seguintes procedimentos metodológicos foram traçados: participar das ações formativas do projeto; constituir e acompanhar o grupo de estudos; analisar as ações do grupo de estudos e os indícios de transformação da prática. Identificar as evidências de promoção do desenvolvimento profissional.

Os instrumentos escolhidos para a investigação, foram: 1) Questionário: na fase diagnóstica – coletamos informações sobre o perfil das professoras participantes da pesquisa, sobre a formação e o conhecimento sobre a Resolução de Problemas; 2) Observação participante: ocorreu por um período de dois anos, no desenvolvimento do projeto, com o objetivo de observar de forma participativa todos os encontros do curso e do grupo de estudos; 3) Relato reflexivo: sempre que possível, após as atividades programadas, coletar informações sobre as percepções das cinco professoras bolsistas do projeto durante, a participação do grupo de estudos e desenvolvimento das atividades em sala; 4) Atividades desenvolvidas pelas professoras e seus alunos – durante as observações e em conversas com as professoras no grupo de estudo; 5) Registro de entrevista – no final do desenvolvimento do projeto – com as professoras participantes da pesquisa para coletar informações sobre as experiências vivenciadas tanto nos cursos quanto no grupo de estudos; 6) Diário de Bordo: em todo o processo de investigação, onde descrevíamos nossas percepções;7) Gravação de áudio e/ ou vídeos - em todos os momentos do projeto – com a finalidade de registrar as ações e depoimentos das cinco professoras, nos cursos e no encontro do grupo de estudos.

Para a análise interpretativa do percurso do grupo de estudos recorremos à triangulação dos dados.

DISCUTINDO TEORIA E PRÁTICA SOBRE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O episódio, aqui descrito e analisado, refere-se a um dos encontros do Grupo Constelações. Inicialmente as pesquisadoras do grupo, propuseram às professoras – *Taurus, Orion, Draco, Ara e*

Lyra, que respondessem a um questionário que tinha a intenção de coletar as opiniões e conhecimentos prévios sobre o tema: Resolução de Problemas.

Entre as questões propostas a elas, estava a seguinte:

Existem diferenças entre problemas e exercícios? Em caso afirmativo, quais?

As respostas das professoras estão a seguir:

> Profª. Taurus: *Sim, porque o aluno precisa interpretar o problema e analisar os dados; e o exercício, é sempre por comparação.*
>
> Profª. Orion: *Sim, geralmente no exercício não há necessidade de interpretar o texto e a solução é mecânica, seguindo apenas o exemplo.*
>
> Profª. Draco: *Sim, o exercício, através do exemplo, o aluno consegue fazer. O problema é um processo, é necessário coletar os dados fornecidos pelo problema; analisar e identificar qual operação a ser realizada.*
>
> Profª. Ara: *Sim. O exercício trabalha a fixação de métodos de manipulação, já o problema exige uma capacidade maior de competências e habilidades.*
>
> Profª. Lyra: *Sim. Exercício é exercitar, reproduzir o aprendido. Problema é análise, requer conhecimento de conteúdos novos e aprendidos anteriores.*

Analisando tais registros, verificamos que as professoras foram unânimes em considerar que problema é diferente de exercício. Na concepção delas essa diferença ocorre especialmente porque os exercícios, em geral, estão ligados a técnicas previamente ensinadas em aula, as quais devem ser reproduzidas pelo aluno, a partir de modelos pré-definidos, não requerem descoberta e nem invenção, diferentemente do que ocorre em um problema. Entretanto não houve consenso sobre como estabelecer precisamente o que pode ser considerado como problema.

Assim sendo, foi decidido em conjunto empreender estudos teóricos de modo a identificar, a luz de diversos autores o que vem a ser um problema, assim como as heurísticas para definir as estratégias de resolução, os tipos de problemas.

Continuando a discussão do grupo, procurando subsidiar as professoras, as pesquisadoras indicaram estudos teóricos alicerçados em textos de Echeverria (1998), Polya (2006) e Dante (2009) sobre a Resolução de Problemas. Os seguintes temas guiaram os estudos: 1) diferentes significados para o que se considera problema; 2) o que se entende por resolver um problema e 3) tipos de problema e a inserção da Resolução de Problemas no Currículo de Matemática. Observamos que a intenção com essa atividade era a de que a teoria começasse a subsidiar e iluminar a prática.

Em dos encontros do grupo, no decorrer dos estudos desses teóricos, emergiram falas, tais como:

> Profª. Lyra: *Estes textos, nunca tinha lido. Não conhecia essas fases que o autor fala para propor a Resolução de Problemas aos alunos. Mas, eu faço já isso.... Mais ou menos... Mas, eu ensino assim.*

As fases às quais a professora se refere em sua fala, são as propostas no livro “Como Resolver um Problema” de Polya (2006). São elas, 1ª Compreensão; 2ª Estabelecimento de um Plano; 3ª Execução do Plano e 4ª Retrospecto. Observamos nessa fala que intuitivamente a professora

propõe e ensina Resolução de Problemas utilizando as proposições de Polya (2006) quanto às etapas de resolução, mesmo desconhecendo a teoria.

Uma outra fala foi:

> Profª. Orion: *Como é importante a teoria, agora começo a entender mais sobre como propor problemas para os meus alunos – não tinha essa ideia. Eu não gosto de propor problemas para os meus alunos. Faço e ensino porque faz parte do currículo.*

Percebemos no discurso da professora Orion, que ela refletiu sobre a sua prática, quando declarou o quanto foi relevante esses estudos. Inferimos que a professora não se sentia segura para ensinar e nem gostava disso, ou considerava irrelevante ensinar a Resolução de Problemas.

Tais discussões evidenciaram as dúvidas, crenças e a maneira como os professores inseriam (ou não) a metodologia da Resolução de Problemas na prática docente. No excerto acima identificamos uma crença que interfere na prática da professora Orion.

Esse momento de discussão também, serviu de mote para a reflexão sobre a prática docente, observamos tal indício na fala a seguir:

> Profª. Lyra: *Eu proponho problemas para os meus alunos, mas estou pensando em mudar o jeito de ensinar a resolve-los, preciso ensinar de forma que eles aprendam de verdade.*

Nessa fala notamos que a professora Lyra está consciente das dificuldades dos alunos e da ineficiência das técnicas que utiliza, entretanto não notamos indícios por essa fala de que a teoria esteja auxiliando a compor novas práticas.

Discutimos ainda no grupo mitos típicos dos estudantes sobre problemas matemáticos que serviram de mote para mais reflexões sobre a prática docente. Alguns desses mitos discutidos, segundo Echeverria:

> (...) os problemas matemáticos têm uma e somente uma resposta correta; existe somente uma forma correta de resolver um problema matemático e, normalmente, o correto e seguir a última regra demonstrada em aula pelo professor; os estudantes que entenderam Matemática devem ser capazes de resolver qualquer problema em cinco minutos ou menos. (Echeverria, 1998, p.46):

As professoras concordaram com as proposições de Echeverria (1998), ficando evidenciado nas seguintes falas:

> Profª. Taurus: *Dizem os alunos - todo problema matemático tem que ter resposta, e única.*
>
> Profª. Taurus: *Os alunos falam – professora, só alguns alunos conseguem resolver problemas matemáticos. Ésó para quem é inteligente, só quem sabe mesmo matemática consegue resolver problemas*.

Identificamos por meio dessas falas, que as professoras têm o conhecimento do que os alunos afirmam sobre esses mitos. Na discussão elas estabelecem relações entre os aspectos teóricos descritos pelos autores e o que ocorre em sua prática docente de ensinar a resolver problemas. Essas falas estão apoiadas ao conhecimento pedagógico que as professoras têm e também evidenciam ampliação do conhecimento profissional, uma vez que agora têm suporte da teoria.

Outro momento de reflexão sobre a prática ocorreu durante a análise de um problema com enunciado dúbio. Apresentamos o problema a seguir:

Problema: *Uma sorveteria há 6 sabores de sorvete, que podem ser servidos com 2 tipos de cobertura: chocolate e caramelo. De quantos modos diferentes você pode pedir um sorvete, se escolher só um sabor?*

Na discussão do grupo, obtivemos duas respostas para a resolução do problema. São elas, 6 e 12. O enunciado deu margem para duas interpretações diferentes. Na Matemática quando utilizo o (e), são as duas coberturas juntas, caramelo e chocolate ao mesmo tempo. Sinalizamos que na vida real, o (e) significa ter duas opções, ou cobertura de chocolate ou de caramelo. Tal problema permitiu que o grupo discutisse que nem sempre um problema tem uma única solução e quanto é importante interpretar o seu enunciado.

A análise dos dados coletados permitiu constatar que as discussões teóricas e a proposição, resolução e análise de problemas levaram à construção de conhecimentos por parte do grupo.

Mediante análise das discussões acima, concluímos que houve ampliação do conhecimento profissional, especialmente do conhecimento pedagógico do conteúdo.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Os estudos, as reflexões e as discussões realizadas no Grupo Constelações descritos neste episódio, auxiliaram os seus integrantes para o desenvolvimento de atividades na temática da Resolução de Problemas. Observamos que as propostas dos assuntos estudados, foram sempre de interesse e definidas em comum acordo pelas professoras, buscando novas estratégias de ensino e aprendizagem. Ressaltamos a importância do trabalho cooperativo entre professores de Matemática, como uma alternativa para o desenvolvimento profissional dos envolvidos.

Observamos que ficou evidenciado nas falas, nos registros, nas expressões e nos gestos das professoras, uma forte potencialidade no grupo, ou seja, a possibilidade da mudança, da transformação, da incorporação de novas práticas pedagógicas no dia a dia da sala de aula.

Na visão dessas professoras, elas estão se aprimorando na sua formação profissional e refletindo sobre a prática de sala de aula, consequentemente mudando procedimentos didáticos e metodológicos, o que possivelmente auxilia o processo de desenvolvimento profissional docente.

Contatamos que as discussões teóricas e a proposição, resolução e análise de problemas levaram à construção de conhecimentos por parte do grupo. Concluímos que houve ampliação do conhecimento profissional, especialmente do conhecimento pedagógico do conteúdo, e também indícios de desenvolvimento profissional.

Agradecemos ao Programa Observatório da Educação (OBEDUC), da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela concessão de bolsas e demais subsídios para o desenvolvimento desta pesquisa alojada no Projeto 19366/12 Edital 049/12.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Boavida, A. M. y Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Org) *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: APM. Lisboa: Quinta Dimensão.

Bryant, P.; Nunes, T.; Evans, D.; Gottardis y I.; Terlektsi, m. (2012). *Teaching mathematical problem solving in primary school*. Departament of Education, University of Oxford.

Dante, L.R. (2009). *Formulação e Resolução de Problemas de Matemática: Teoria e Prática.* São Paulo: Ática.

Echeverría. M. D. P. P. (1998). A Solução de Problemas em Matemática. In Pozo, J. I. (org). *Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender* (pp.43-51). Porto Alegre: Artmed.

Greenwood, D., & Levin, M. (2000). Reconstructing the relationships between universities and society through action research. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook for Qualitative Research,* (2nd ed.) (85-106). Thousand Oaks, California: Sage Publications Inc.

Murphy, C., & Lick, D.(1998). *Whole faculty study groups: A powerful way to change schools and enhance learning.* Califórnia: Corwin, 188 p.

Polya, G. (2006). *A arte de resolver problemas.* Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência.

Ponte, J.P. (1994). *O desenvolvimento profissional do professor de matemática. Educação e Matemática*. Acesso em 01 de outubro de 2015 em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos-por-temas.htm

Ponte, J. P. (1997). *O conhecimento profissional dos professores de matemática.* (Relatório final de Projecto “O saber dos professores: Concepções e práticas”). Lisboa: DEFCUL.

Schoenfeld, A. (1995). *Mathematical Problem Solving*. New York, Academic Press.

Shulman, L.S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, V. 15 (2), 4-14.

LAS NECESIDADES FORMATIVAS PEDAGÓGICAS DEL DOCENTE DE MATEMÁTICA DE LA FACULTAD INTRODUCTORIA DE LAS CIENCIAS INFORMÁTICAS

Ivonne Burguet Lago, José Benito Rodríguez Sosa, Anelys Vargas Ricardo
Universidad de las Ciencias Informáticas, Universidad de las Ciencias Pedagógicas. (Cuba)
iburguet@uci.cu, josebenitors@ucpejv.rimed.cu, anelys@uci.cu

Palabras clave: competencias pedagógicas, necesidades formativas pedagógicas, superación profesional

Key words: teaching skills, pedagogical training needs, professional overcoming

RESUMEN: La investigación que en este informe se presenta, tiene la finalidad de contribuir al desarrollo de la competencia pedagógica del docente de matemática. Para que el proceso resulte con la calidad requerida se debe diseñar una superación profesional del docente que parta de las necesidades formativas pedagógicas individuales e institucionales. Cabe entonces preguntarse ¿cuáles son las necesidades formativas pedagógicas de estos docentes, en este nuevo contexto? Después del estudio de investigaciones de autores que han abordado las competencias pedagógicas del docente en la actualidad, sumado al contexto de esta facultad, se proponen las necesidades formativas pedagógicas del docente de matemática en la Facultad Introductoria de las Ciencias Informáticas.

ABSTRACT: The research presented in this report, aims to contribute to the development of pedagogical competence of teachers of mathematics. To make that this process to have the required quality, it is required to design a plan for professional development of teachers that starts from individual and institutional educational needs. So the question is: what are the pedagogical training needs of these teachers, in this new context? After research study authors have addressed the pedagogical skills of teachers today, and the context of this faculty, this work exposes the pedagogical training needs of teachers of mathematics at the Introductory of Informatic Sciences Faculty.

INTRODUCCIÓN

La superación del docente en Cuba desde el triunfo de la revolución y hasta la fecha ocupa un lugar destacado en la política educativa cubana actual, plasmada explícitamente, como una necesidad social, en los lineamientos 145, 146, 147 y 153 de la Política Económica y Social del Partido y la Revolución aprobados en el año 2011(Tabloide, 2011). Política que ha sido ratificada por el Ministerio de Educación Superior en diferentes momentos e intervenciones de sus dirigentes, (Díaz, 2011 y 2013). Y abordada, en resultados de investigaciones científicas que no han perdido vigencia en la actualidad y constituyen referentes teóricos de investigaciones posteriores y de disposiciones legales dictadas al respecto, que regulan y norma la superación en Cuba, (MES, 2004) y (MES, 2008).

A partir del análisis de numerosos resultados científicos que enriquecen el proceso, entre los que se destacan por la relación que poseen con el propósito de este trabajo, el aporte de (Añorga, 1989) quien con su teoría cubana de Educación Avanzada define un conjunto de principios y regularidades para la organización del proceso de superación de todos de los profesores universitarios.

Después del análisis de los principios establecidos para el Sistema de superación de los profesores de los centros de Educación Superior adscritos al Ministerio de Educación Superior y los definidos por la teoría cubana de Educación Avanzada, se observa como uno de los principios rectores: el principio del carácter que, condiciona la ejecución de las actividades de superación profesional a la verdadera existencia de una necesidad.

El diseño de la superación profesional en una universidad debe responder a las necesidades de preparación de sus docentes para realizar sus funciones y a sus principales exigencias institucionales. Para concretar este diseño es necesario también el análisis cuidadoso de las necesidades formativas pedagógicas que posee el docente.

La Universidad de las Ciencias Informáticas, en diferentes espacios ha expresado su preocupación por la insuficiente preparación pedagógica de su claustro, a pesar de las acciones de superación que se realizan. Para proyectar la superación debe partir del análisis de las necesidades formativas pedagógicas del docente, las cuales deben estar en correspondencia con las exigencias de la universidad al nivel de competencia pedagógica que requiere el docente para este contexto. Cabe entonces preguntarse, ¿Cuál es el modelo de competencia pedagógica definido para el docente de la Universidad de las Ciencias Informáticas?, Y en el caso que nos ocupa para este trabajo, ¿Cuáles son las necesidades formativas pedagógicas del docente de matemática de la Facultad Introductoria de las Ciencias Informáticas? Dar respuesta a estas interrogantes constituye precisamente el propósito fundamental de este estudio y es por ello que se propone como objetivo en un primer momento la conceptuación del modelo de competencia pedagógica del docente para este contexto. Posteriormente se propone un procedimiento para realizar el análisis de las necesidades formativas pedagógicas del docente y para finalizar se muestra la aplicabilidad del procedimiento aplicado en el departamento de matemática de la Facultad Introductoria de las Ciencias Informáticas.

MATERIALES Y MÉTODOS

Para el desarrollo del presente trabajo los materiales básicos utilizados son tesis de doctorados e investigaciones científicas con la intención de un acercamiento al estado del arte de la temática que se presenta para la cual se tuvo en cuenta con prioridad los presupuestos teóricos sobre Educación Avanzada relacionados con la competencia pedagógica del docente y el análisis de necesidades formativas pedagógicas.

La lógica de la investigación se desarrolló a partir de considerar para el cumplimiento de los objetivos trazados los siguientes métodos científicos (Hernández, 2008):

- Histórico-Lógico: permitió conocer los diferentes autores y posiciones que se asumen en relación a las competencias e identificar modelos de competencia pedagógica del docente en Cuba y en otros contextos internacionales.
- Análisis documental: para el estudio de resultados de investigación y de documentos relacionados con la competencia pedagógica del docente.

En las indagaciones empíricas se utilizaron las siguientes técnicas que permitieron recopilar información acerca de las necesidades formativas pedagógicas del docente :

- Encuesta: se realiza una encuesta a los docentes de matemática de la Facultad Introductoria de las Ciencias Informáticas, para conocer las necesidades formativas pedagógicas identificadas desde su propia perspectiva, a partir del modelo de competencia pedagógica del docente definido para este contexto.
- Entrevista grupal a estudiantes: para obtener información sobre conocer las necesidades formativas pedagógicas del docente identificadas desde la perspectiva de sus estudiantes.
- Prueba de desempeño profesional pedagógico: permite conocer las necesidades formativas pedagógicas del docente desde las perspectivas de sus directivos docentes.

A partir del análisis de los resultados de estas indagaciones empíricas y de asumir el criterio con respecto a la triangulación: “Entendemos por triangulación, el cruzamiento de las informaciones buscando la fortaleza y complementariedad de los distintos instrumentos, entrecruzándose resultados cualitativos y cuantitativos” (Añorga, 2012, p.17); se procedió a aplicar una triangulación metodológica, donde se contrastan los resultados que se obtienen por separado, se analizan las coincidencias y divergencias. Esto permitió obtener un criterio integrador sobre necesidades formativas pedagógicas del docente.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En las últimas décadas, se ha polemizado en muchos trabajos de investigación en Ciencias Pedagógicas, sobre las competencias del docente, así como los modelos de competencia del docente universitario, desde la perspectiva de diversos autores e instituciones. Las definiciones consultadas, refieren rasgos esenciales como: sistemas de conocimientos, habilidades, aptitudes, actitudes, valores, comportamientos, elementos afectivos; traducidas en comportamientos observables en el desempeño; son resultado de un proceso de superación; se corresponden con el contexto; relacionadas con los saberes.

Al igual que existen numerosas definiciones de competencias, se evidencia, a partir del análisis documental realizado, la existencia de varios criterios para clasificarlas en dependencia de los rasgos que se empleen para caracterizarlas, y de la propia cultura en que se desarrollan.

Después del presente estudio los autores, acercándose a una definición operacional para la competencia pedagógica del docente de la Universidad de las Ciencias Informáticas, la conceptualizan como: relación dialéctica de los conocimientos (saber conocer), procedimientos (saber hacer), valores (saber ser), que integradas en un todo y fundamentadas en la lógica del comportamiento profesional y el comportamiento humano en un determinado contexto, permiten el saber transformarse en el desempeño de las funciones investigativa, docente y educativa que se dinamizan en las dimensiones científica, metodológica y de comportamiento humano del docente.

A partir del análisis de los diferentes modelos de competencias profesionales del profesorado universitario presentados por (Saravia, 2004), (Santos, 2005), (Zabalza, 2006), (Betanzos, 2007), (Hirle, 2010), con base en las competencias comunes a todos los autores, hemos construido la propuesta de modelo de competencia pedagógica del docente de la Universidad de las Ciencias Informáticas.

Se analizó también las propuestas de las competencias profesionales del profesor de la Universidad de las Ciencias Informáticas, las cuales se consideran deben ser expresión de las diferentes aristas y esferas de su actuación en el ámbito universitario y conformado por subcompetencias o competencias específicas, como son: competencia didáctica, académica, productiva, investigativa, comunicativa, ética, cultural y tecnológica.

Se considera que en la propuesta de competencias profesionales del profesor de la Universidad de las Ciencias Informáticas, no se contempla explícitamente la competencia pedagógica del docente, las subcompetencias definidas quedan muy abarcadoras en su definición y poco contextualizadas a esta universidad, no se presentan indicadores que faciliten evaluar el nivel de desarrollo de las mismas alcanzado por el docente, por lo que se propone un modelo de competencia pedagógica del docente de la universidad, que parte de las ideas expresada por nuestro comandante en jefe Fidel Castro Ruz, en el año 2002, al visualizar la universidad que apenas comenzamos a construir hoy.

Para el modelo de competencia pedagógica del docente se proponen tres dimensiones:

Científica: relacionada con el saber conocer, expresa el dominio de los conocimientos propios de la formación docente adquirida durante el ejercicio profesional, posibilita la comprensión, reflexión y actualización de su área de conocimiento.

Metodológica: relacionada con el saber hacer, expresa el saber aplicar y transferir con eficiencia a situaciones nuevas, los conocimientos, procedimientos y experiencias adquiridas.

Comportamiento humano: relacionada con el saber ser, expresa el actuar conforme a las propias convicciones, a la ética, entendimiento interpersonal, adecuada comunicación, cooperación con los demás y un comportamiento orientado al grupo.

Cada dimensión tiene un determinado número de niveles que reflejan conductas observables y requieren de alternativas de superación que posibiliten su desarrollo a partir de la experiencia práctica. Por lo cual se definen para cada dimensión de la competencia pedagógica, indicadores que facilitan la organización del proceso de superación para desarrollar la competencia y la

evaluación de su desarrollo mediante comportamientos observables en el desempeño profesional pedagógico.

Los indicadores propuestos se refieren a:

Conocimiento del área de actuación: su fundamento es el placer de comprender, de conocer, de descubrir, de desarrollar en los alumnos la habilidad de reflexionar, un espíritu de cuestionamiento, de los porqués.

Docencia e investigación: reconoce la estrecha relación entre la comprensión y aplicación sistemática de los contenidos mediante la investigación.

Trabajo político ideológico: formación de valores a través de lo curricular y lo metodológico

Planear el proceso enseñanza aprendizaje: se trata de un proceso continuo que implica seleccionar conocimientos, organizarlos, actualizarlos, rectificarlos definir qué debe enseñarse, en qué orden, con que prioridad, con qué recursos.

Las tecnologías de la información y la comunicación para la formación: significa el saber emplear las tecnologías en función de la mejora del proceso de enseñanza- aprendizaje.

Conocimiento de sí mismo: es conocer sus necesidades educativas, sus potencialidades, actuar conforme sus propias convicciones, asumir responsabilidades, tomar decisiones y por medio de la reflexión, tratar de mejorar su modo de actuar.

Habilidad para comprender al otro: significa el entendimiento interpersonal, la comunicación, la cooperación con los demás, disponer de un comportamiento orientado al grupo.

El modelo de competencia pedagógica del docente que se propone posee tres dimensiones, que se derivan en siete subdimensiones y estos para una mejor comprensión se desglosan en 31 indicadores (ver anexo 1 y anexo 2).

A partir del modelo de competencia pedagógica propuesto se elaboran y aplican para el análisis de las necesidades formativas pedagógicas los siguientes instrumentos:

Entrevista grupal para conocer las necesidades formativas pedagógicas del docente desde la perspectiva de sus estudiantes.

Prueba de desempeño profesional pedagógica para conocer las necesidades formativas pedagógicas del docente desde la perspectiva de su directivo docente.

Encuesta para conocer las necesidades formativas pedagógicas del docente desde su propia perspectiva.

Para procesar la información obtenida a partir de cálculo porcentual y tablas de frecuencia (la moda y la mediana), se empleó el “SPSS Statistics” versión 22 de 2011 y el MS Excel para la presentación con mejor visualización de la información en gráficas estadísticas. Atendiendo a las conclusiones obtenidas por la aplicación de la triangulación metodológica se obtiene las principales necesidades formativas pedagógicas (en orden de prioridad) identificadas en el docente de matemática de la Facultad Introductoria de las Ciencias Informáticas:

- Promueve la confección de materiales, folletos y artículos derivados de su quehacer docente

- Proporciona oportunidades de intercambios de experiencia en eventos y actividades metodológicas
- Gestiona su superación pedagógica
- Produce trabajos investigativos que dan respuesta a problemáticas de la práctica docente
- Trabaja la didáctica específica de su disciplina de manera creativa y participativa
- Produce objetos de aprendizajes en las herramientas de la web 2.0

El procedimiento permitió también identificar como potencialidades formativas pedagógicas del docente de matemática de la Facultad Introductoria de las Ciencias Informáticas, las siguientes:

- Preparación política ideológica
- Promueve el desarrollo de valores éticos
- Trabaja con independencia cognoscitiva, con responsabilidad y convicción
- Sabe escuchar a sus alumnos y a sus compañeros
- Utilizar una comunicación eficiente y usa la palabra de manera constructiva, clara, directa y respetuosa
- Promueve el aprendizaje social
- Establece redes virtuales de intercambio de documentación y experiencia

El procedimiento propuesto para el análisis de las necesidades formativas pedagógicas del docente se muestra en el anexo 3.

El análisis de las necesidades de superación pedagógica del docente, es imprescindible para garantizar el éxito en el diseño de la superación del docente. Santos en el año 2005 refiere que el proceso de profesionalización en general contribuye al desarrollo de las competencias profesionales y como microsistema del mismo define un proceso para en lo particular permitir el desarrollo de la competencia pedagógica. Los autores de la presente investigación asumen como microsistema al proceso de superación profesional para el desarrollo de la competencia pedagógica del docente que definen como un proceso continuo y dialéctico que garantiza, mediante un aprendizaje personalizado el desarrollo de la competencia pedagógica en correspondencia con el desempeño profesional pedagógico que exige un determinado contexto.

CONCLUSIONES

El estudio realizado en este trabajo acerca de las necesidades de superación pedagógica del docente de matemática de la Facultad Introductoria de las Ciencias Informáticas permitió conceptualizar el modelo de competencia pedagógica del docente en el contexto de la Universidad de las Ciencias Informáticas.

En síntesis, la aplicación de estos instrumentos y posteriormente la triangulación metodológica permite un acercamiento a las necesidades formativas pedagógicas del docente de la Facultad de las Ciencias Informáticas, procedimiento que puede hacerse extensible a otros colectivos de docentes y a partir de ahí diseñar la superación pedagógica del colectivo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Añorga, J. (1989). *El perfeccionamiento del Sistema de Superación de los profesores universitarios*. Tesis de Doctorado no publicada. La Habana, Cuba.

Añorga, J. (2012). *Las particularidades de la producción intelectual en el desarrollo de la teoría de la Educación Avanzada*. La Habana, Cuba: Universidad de Ciencias Pedagógicas "Enrique José Varona".

Betanzos, A. (2007). *El perfil profesional del profesorado universitario*. Tesis de Doctorado no publicada. Universidad de Barcelona, España.

Castro, F.(2002) *Tropa de futuro*. Palabras del comandante en jefe en la Universidad de las Ciencias Informáticas el 12 de diciembre de 2002. Cuba: Oficina de publicaciones del Consejo de Estado de la República de Cuba.

Díaz, M. (2011). Presentación de las Proyecciones de trabajo. Curso 2011-2012 en la Universidad de las Ciencias Informáticas. [Citado 2 de septiembre de 2011]. Disponible en: de http://cice.uci.cu/news.php

Díaz, M. (2013). Presentación de las Proyecciones de trabajo. Curso 2013-2014 en la Universidad de las Ciencias Informáticas. Mesa redonda. [Citado 12 de septiembre de 2013]. Disponible en: de http://internot.uci.cu.

Hernández, R. (2008). *Metodología de la investigación*. La Habana, Cuba: Editorial Félix Varela.

Hirle, V. (2010). *Las necesidades formativas pedagógicas del profesorado universitario de las FADBA*. Tesis de Doctorado no publicada. Barcelona, España.

Ministerio de Educación Superior. (2004). Reglamento de la Educación de Posgrado de la República de Cuba. [Resolución Ministerial 132/2004].

Ministerio de Educación Superior. (2008). Sistema de superación de profesores de los centros de educación superior adscritos al Ministerio de Educación Superior. [Instrucción No. 3/2008].

Santos, J. (2005). Modelo Pedagógico para el mejoramiento del desempeño pedagógico profesional de los profesores de Agronomía de los Institutos Politécnicos Agropecuarios. Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas no publicada, Ciudad Habana.

Saravia, M.(2004). Evaluación del profesorado universitario: un enfoque desde la competencia profesional. Tesis para optar por el grado de doctor en calidad educativa. Universidad de Barcelona. España.

Tabloide. (2011). VI Congreso del Partido Comunista de Cuba. Información sobre el resultado del Debate de los Lineamientos de la Política Económica y Social del Partido y la Revolución. Documento impreso.

Zabalza, M. (2006). Competencias docentes del profesorado universitario: calidad y desarrollo profesional. Madrid: Narcea.

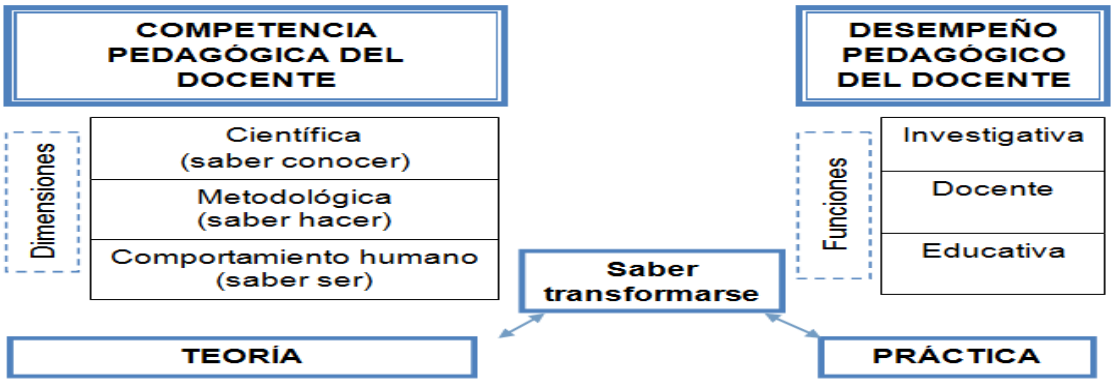
ANEXOS

Anexo1: Modelo de competencia pedagógica del docente de la Universidad de las Ciencias Informáticas.

Competencia pedagógica	
Dimensión: Científica (Saber conocer)	
Subdimensiones	**Indicadores**
○ Conocimiento del área de actuación	1.1.1-Trabaja los contenidos de manera que el alumno entienda la aplicación práctica en su propia formación
	1.1.2-Trabaja los contenidos desde una dimensión social y científica-técnica de manera contextualizada
	1.1.3-Posibilita medios para que el alumno asuma la investigación como algo esencial y significativo en su formación académica y profesional
	1.1.4-Estimula en sus alumnos la curiosidad intelectual, el espíritu crítico y reflexivo
1.2- Docencia e investigación	1.2.1-Promueve el aprendizaje de los alumnos mediante la investigación
	1.2.2-Promueve la interdisciplinaridad a fin de que el alumno perciba que se puede construir el conocimiento en la interacción de las asignaturas
Dimensión: Metodológica (saber hacer)	
Subdimensiones	**Indicadores**
2.1- Trabajo político ideológico	2.1.1-Aprovecha el contenido de sus clases para desarrollar valores morales, patrióticos y éticos
	2.1.2-Reflexiona sobre el acontecer nacional e internacional
	2.1.3-Desarrolla una dimensión social y científico-técnica en las clase y actividades metodológicas con el colectivo de asignatura
2.2- Planificación del proceso de enseñanza-aprendizaje	2.2.1-Trabaja la didáctica específica de la disciplina de manera creativa y participativa
	2.2.2-Trabaja la integración de las asignaturas a fin de fortalecer la formación integral del alumno
	2.2.3-Desarrolla una metodología que motiva al alumno a aprender
	2.2.4-Crea condiciones hacia la comunicación afectiva, franca y abierta, tanto en la clase como fuera de ella
2.3- Las tecnologías de la información y la comunicación para la formación	2.3.1-Utiliza las herramientas de la Web 2.0 para la enseñanza e investigación
	2.3.2-Diseña las asignaturas en el entorno virtual de aprendizaje
	2.3.3-Produce objetos de aprendizajes

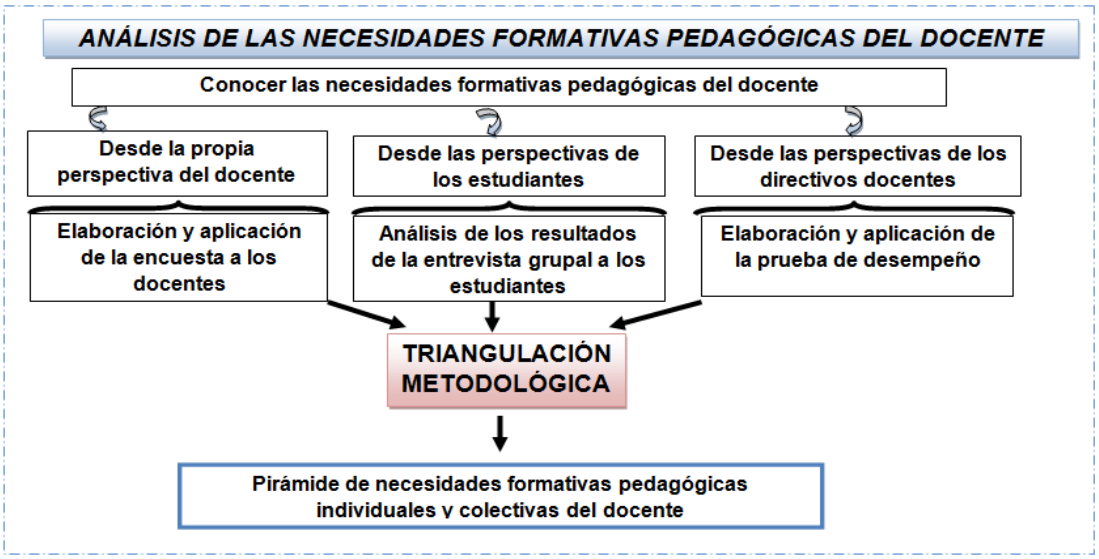
Anexo 2: Modelo de competencia pedagógica del docente

Figura 1. Modelo de competencia pedagógica del docente



Anexo 3: Esquema del procedimiento propuesto para el análisis de necesidades formativas pedagógicas

Figura 2. Procedimiento para el análisis de necesidades formativas pedagógicas



NÚMEROS RACIONALES NEGATIVOS. INTERPRETACIONES FORMULADAS POR DOCENTES EN FORMACIÓN

Gil Arturo Saavedra Mercado, Aurora Gallardo Cabello, Esmeralda Ivonne Espinoza Martínez.
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (México)
gsaavedra@cinvestav.mx, agallardo@cinvestav.mx, iv2nne@yahoo.com.mx

Palabras clave: fracción, decimal, negativo, significado

Key words: fraction, decimal, negative, meaning

RESUMEN: En el presente artículo se aborda una temática poco estudiada dentro de la matemática educativa: los conceptos de números racionales en su representación tanto fraccionaria como decimal y su conjugación con la negatividad. Nuestro marco teórico contempla los estudios sobre fracciones realizados por Kieren, fracciones y razones abordados por Freudenthal, decimales desarrollados por Ávila y fracciones negativas analizados por Saavedra y Gallardo. El objetivo principal es conocer los significados que los docentes en formación poseen para cada uno de los conceptos mencionados, reconociendo que cada uno de ellos representa de manera aislada, una tarea compleja dentro del aula. No debe ignorarse el entramado trayecto que la negatividad ha tenido dentro de las matemáticas.

ABSTRACT: This article deals with a subject little studied within educational mathematics: concepts of rational numbers, fractional representation both decimal and conjugation with negativity. Our theoretical framework includes studies on fractions by Kieren, fractions and ratios addressed by Freudenthal, decimals developed by Avila and negative fractions by Saavedra and Gallardo. Our main objective is to know the meanings held by teachers in training for each of the above concepts, recognizing that each of them represents in an isolated manner, a complex task in the classroom. The network path that negativity has had within mathematics should not ignore.

INTRODUCCIÓN

El trabajo se centra en la interpretación que los docentes en formación manifiestan al desarrollar actividades sobre números racionales en sus representaciones fraccionarias y decimales, y a su vez, asociados a la negatividad. Estos conceptos matemáticos representan por sí mismos, una parte compleja en el estudio de las matemáticas escolares, por ello resulta muy interesante estudiar sus vínculos durante el trabajo en el aula y la movilización de estos conocimientos al poner en marcha la enseñanza de los mismos.

La conveniencia de realizar el presente estudio se manifiesta también, por la proximidad temporal en que los estudiantes normalistas se enfrentarán a situaciones de enseñanza ante grupos de secundaria, a manera de prácticas profesionales e incluso como docentes encargados de grupo. Resulta entonces importante reflexionar sobre el conocimiento que los docentes en formación poseen sobre estos conceptos.

Para quienes se dedican a la labor educativa, no es desconocida la complejidad para el tratamiento de las fracciones y los decimales. La cuestión de la negatividad no es diferente, la historia advierte la clandestinidad de los números negativos y las vicisitudes que hubieron de pasar para formar parte de nuestros conceptos matemáticos actuales (Gallardo, 1994, 2002). Recordemos la categoría de la negatividad acuñada por Lizcano (1993), quien hace referencia a los antecedentes históricos de los números negativos y aclara que éstos no podrían considerarse aún como los enteros de hoy, y es necesario mantener voluntariamente impreciso el término de negatividad para poder ampliar paulatinamente su campo de referencia y ser así aceptadas sus diversas construcciones en las distintas culturas.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Estudios recientes han puesto de manifiesto un escaso tratamiento de los números racionales en la forma de expresión fraccionaria (Saavedra, 2011), como decimal (Ávila, 2008). Se ha encontrado evidencia sobre la nimia comprensión que de estos números tienen docentes y alumnos (Fazio y Siegler, 2010). Vamvakoussi y Vosniadou (2010) afirman que comprender fracciones es esencial para el aprendizaje de álgebra, geometría y otros ámbitos de la matemática escolar.

Brousseau (1980), menciona que existen razonamientos intuitivos guiados por modelos erróneos prevalecientes desde la educación primaria hasta la universidad al trabajar con números decimales. Dicha aseveración también puede ser extendida a las fracciones debido a su equivocada asociación a las reglas de los números naturales.

Ávila (2008) realizó un estudio con docentes de educación primaria, para determinar el grado de conocimiento que poseen sobre los decimales y la vinculación con su manera de enseñar las matemáticas en el aula. En su estudio, se advierte que los docentes no comprenden el concepto de número decimal, asociándole propiedades de los naturales, argumentando que son números “naturales con punto”. Una situación similar prevalece para las fracciones.

Nos hemos planteado entonces, las siguientes preguntas de investigación:

¿Qué sentidos de negatividad en las fracciones y los decimales reconocen los docentes en formación de telesecundaria?

¿Cómo influyen los conceptos de fracciones y decimales negativos en el trabajo escolar desarrollado por los docentes en formación, al impartir clases sobre dichos tópicos?

MARCO TEÓRICO

Para Kieren (1983, 1988) los números racionales representan un sistema sofisticado de conocimiento para modelar situaciones reales, y son uno de los ejemplos más importantes del concepto matemático de campo. Para él, la construcción de la fracción comprende el control de operadores aditivos y multiplicativos; es un proceso que incluye experiencias matemáticas y contenidos del pensamiento tales como la identificación de partes y formación de equivalencias usando una variedad de imágenes y madurando desde lo metafórico hasta el uso del lenguaje formal. El tema de Fracciones está dotado de múltiples constructos, a saber: cociente, medida, operador, razón y la relación parte-todo (Kieren, 1983, 1984, 1988).

Así mismo, Freudenthal (1983) identifica didácticamente a las fracciones como números racionales, cuando éstas surgen de un modo muy concreto, adoptando el sentido de "fracturadores", "comparadores" y "operadores multiplicativos". Denomina fracción a las distintas expresiones del mismo número racional (por ejemplo, el número racional $\frac{1}{2}$ puede estar representado por las fracciones $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8},$ etc.). Este autor hace hincapié en la polifacética sobrevivencia de las fracciones a nivel del lenguaje cotidiano. Aclara también la conveniencia al denominar Razón a un par ordenado de números de la forma $\frac{p}{q}$ (igual que las fracciones), vinculados a la proporcionalidad, con la anotación de que si se le interpretara como un cociente, es decir, *p* dividido por *q*, se pierde el sentido ligado a la función que la ha originado, a pesar de conservar el mismo valor numérico, pues el significado de razón es hablar sobre la relación entre magnitudes, independientemente del tamaño de las mismas.

Por otra parte, el número decimal tiene aplicación en la vida cotidiana y son útiles en otros contextos de proporcionalidad, por ejemplo en los porcentajes (Block y Mendoza, 2010): conversiones de moneda, cálculo de costos, etc. Al referirse a los decimales, Brousseau (1980) menciona que en las matemáticas escolares, se encuentran obstáculos del tipo didáctico, epistemológico e histórico.

Con respecto a la negatividad, Gallardo (1994, 2002) realizó un estudio mostrando evidencias de que los negativos constituyen un obstáculo para la enseñanza del álgebra escolar. Una de sus conclusiones exhibe que la extensión del dominio numérico de los números naturales a los enteros se convierte en un elemento crucial para lograr la competencia algebraica en la resolución de problemas y ecuaciones.

Además, esta autora advirtió que los estudiantes dotaban de sentidos intermedios al entero, a saber: número sustractivo, número signado, número relativo y número aislado en la resolución de tareas aritmético – algebraicas antes de lograr la extensión del dominio de los números naturales a los enteros. Así mismo, el trabajo realizado por Saavedra (2011), muestra que es posible ampliar el dominio a los números fraccionarios y es concebible realizar la extensión hacia los números decimales.

Lo anterior pone de manifiesto la relevancia del estudio de las fracciones y los decimales, y más aún su asociación a la negatividad, pues nos enfrentamos a obstáculos o momentos de ruptura, y es precisamente hacia estos puntos coyunturales donde pretendemos que los profesores en formación (normalistas) se enfrenten.

MÉTODO

Para responder a las interrogantes, es necesario recurrir a una investigación de corte cualitativo sobre los procesos cognitivos de los sujetos durante la adquisición de conceptos matemáticos y su puesta en práctica al momento de transmitirlos.

Dado que se plantea el estudio de fenómenos específicos bajo una perspectiva local, es necesario recurrir a un constructo teórico que explique los hallazgos empíricos del tema abordado. Nos apoyamos en los Modelos Teóricos Locales (MTL) de Filloy (1999), para comprender los procesos de significado y sentido en la actividad matemática escolar. Este autor acuña el término "Sistema Matemático de Signos" (SMS) que describe las producciones de los estudiantes en entrevista clínica o en situación de aula. El carácter Local del MTL, se debe al hecho de que explica el proceso de enseñanza aprendizaje de un contenido matemático concreto en un momento histórico determinado y con un grupo de personas específico, como es el caso de nuestro estudio.

Nuestra población corresponde a un grupo de 8 docentes en formación que se encuentran en el séptimo semestre de la Normal Superior y al mismo tiempo realizan prácticas en las escuelas secundarias.

Se utilizan los siguientes instrumentos metodológicos:

• Cuestionario Exploratorio: Se consideran 15 ítems cuyo contenido favorece el trabajo con números decimales y fracciones, a la vez que en algunos de ellos se vinculan estos conceptos al trabajo con la negatividad. Nos apoyamos en la resolución de ecuaciones simultáneas, desarrollo de porcentajes, comparación de cantidades numéricas expresadas como fracciones y decimales positivos y negativos, problemas de enunciado verbal históricos y del presente, ejercicios referidos a contextos escolares distintos a las matemáticas tales como cinemática y de la vida cotidiana.

• Entrevista Individual Videograbada: Realizada a 2 normalistas seleccionados según sus respuestas en el cuestionario exploratorio y las actividades desarrolladas durante las prácticas en un grupo de secundaria, con el fin de realizar un estudio en profundidad.

La validación de los resultados recabados se analiza mediante el método de Triangulación. Se llevará a cabo considerando la toma de datos del cuestionario inicial, la información recabada durante la entrevista videograbada y mediante un cuestionario final a los docentes entrevistados (Cohen y Manion, 1990).

Ejemplos de los ejercicios planteados en el estudio

Resuelve la siguiente ecuación.

$$6x^2 + x - 1 = 0$$

En este ejercicio se presenta una solución positiva y una negativa, ambas dentro del conjunto de los números racionales. Se visualiza el significado asignado a la fracción al resolver la ecuación, en este caso cociente. Se observa también el nivel de aceptación de los números negativos que los

docentes en formación poseen: el de número aislado. Llama la atención el hecho de que cuando encuentran como solución un número fraccionario, tienden a "convertirlo" a su expresión decimal para realizar la comprobación de la misma.

Un ejercicio muy peculiar por su contenido y desarrollo, es uno tomado de los textos de Chuquet (1484), adaptado en las cuestiones monetarias al contexto actual:

"Un comerciante ha comprado cierto número de manzanas a un precio tal que, si vende 3 por un peso, gana 15 pesos; y si vende 4 por un peso, gana 14 pesos. ¿Cuántas manzanas compró y cuánto pagó por ellas?"

Resulta interesante la solución presentada por "Alma", una de las entrevistadas. Para resolverlo, ella plantea un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, de la siguiente manera:

$$\frac{x}{3} - y = 15$$

$$\frac{x}{4} - y = 14$$

Donde la *x* representa el número de manzanas, la *y* representa el pago por las manzanas.

Al resolver el sistema, encuentra las siguientes soluciones:

x=12 y, *y=-11*

Lo interesante, es que "Alma" al encontrar estas soluciones, realiza casi de manera automática la comprobación de resultados y parece totalmente sorprendida por el hecho de que su resultado *y=-11* sea correcto. Permanece un tanto incrédula hasta que realiza un interpretación adicional

> *"lo que pasa es que, al que se llevó las manzanas a vender le debían dinero y se lo pagaron además de darle las manzanas. O sea que, no pago nada por llevarse las manzanas, sino que le dieron las manzanas y también 11 pesos"*.

Esto nos lleva a considerar una situación similar a la planteada por Chuquet en el Siglo XV, quien consideró necesaria una interpretación adicional de los valores encontrados, porque en su época no se aceptaban las soluciones negativas en problemas de enunciado verbal.

CONCLUSIONES

Para la interpretación de la negatividad, tanto en fracciones como en decimales, los niveles de aceptación hallados son el de número sustractivo y el de número aislado predominantemente, aunque también aparece en menor medida el nivel de aceptación como número relativo cuando realizan comparaciones para determinar valores mayores o menores. Se observa en el estudio que pueden prescindir de la conversión para comparar cantidades, cuando se les presentan números expresados como fracción o decimal, ya que las asocian al mismo número racional. Esto último representa una concepción más formal del número racional, pues logran vincular un número a sus representaciones fraccionaria o decimal.

El significado más frecuente que asignan a la fracción es el de cociente, dado que precisan realizar la conversión para validar la cantidad numérica y asignarle algún sentido. También se observa el

uso de la fracción como operador, lo cual les posibilita el poder manejar la cantidad en forma de fracción común y realizar operaciones que se extienden del dominio aditivo al multiplicativo, por ejemplo al resolver la ecuación cuadrática.

Además los decimales son utilizados como una escritura complementaria a los naturales "agregándoles un punto y la parte decimal" tal como lo describen Ávila y García (2008).

La movilización de los racionales negativos se percibe fuera de los ámbitos escolares cuando resuelven situaciones en las cuales se involucra el concepto de porcentaje, al cual interpretan unas veces como fracción y otras como decimal. En estos casos prescinden del algoritmo tradicional de porcentaje y utilizan el número racional que representa la cantidad solicitada, sea que incluya un incremento o un descuento hecho en el que además se presenta el nivel de número sustractivo de los negativos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ávila, A. (2008). Los profesores y los decimales. Conocimientos y creencias de un contenido de saber cuasi invisible. *Educación Matemática 20 (2)*, 5-33.

Ávila, A. y García S. (2008). *Los números decimales: más que una escritura*. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Block, D. y Mendoza, T. (2010). El porcentaje: lugar de encuentro de las razones, fracciones y decimales en las matemáticas escolares. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13 (1)*, 177-190.

Brousseau, G. (1980). Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques 1 (1)*, 11-59.

Chuquet, N. (1484). *Triparty en la science des nombres*. Ms. Bibll. Nationale, Fonds Française. Appendice, núm. XLIII, pp. 427/fol. 159r-v

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de Investigación Educativa*. Madrid: La Muralla.

Fazio, L. y Siegler, R. (2010). *Enseñanza de las fracciones*. Suiza: Academia Internacional de la Educación y la Oficina Internacional de Educación (UNESCO).

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Holland: Reidel Publishing Company.

Gallardo, A. (1994). *El estatus de los números negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural – number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics 49*, 171-192.

Kieren, T. (1983). Partitioning, equivalence and the construction of Rational Number Ideas. *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*, 506-508.

Kieren, T. (1984). Mathematical Knowledge Building: The Mathematics Teacher as Consulting Architect. *35th International Congress on Mathematical Education*, 187-194

Kieren, T. (1988). Personal knowledge- of rational numbers: Its intuitive and formal development. *Number Concepts and Operations in the Middle Grades, Reston, National Council of Teachers of Mathematics 2*, 162-181.

Lizcano, E. (1993). Imaginario colectivo y creación matemática. Barcelona: Gedisa.

Saavedra, G. (2011). *Estudio de las fracciones negativas en educación básica*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Vamvakoussi, X.; Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and instruction, 28(2)*, 181-209.

VALORACIÓN DE LA EDUCACIÓN ESTADÍSTICA EN CARRERAS DE CIENCIAS SOCIALES: LA PERCEPCIÓN DEL PROFESOR

Enrique Hugues Galindo, Irma Nancy Larios Rodríguez, Gerardo Gutiérrez Flores
Universidad de Sonora (México)
ehugues@mat.uson.mx, nancy@mat.uson.mx, gerardo@mat.uson.mx

Palabras clave: educación estadística, evaluación, profesor, competencia estadística

Key words: statistics education, evaluation, teacher, statistical competence

RESUMEN: Ante la necesidad de valorar el estado actual de la educación estadística y alternativas para su mejora en una universidad pública, se ha planteado un proyecto de investigación considerando tres perspectivas: profesor, estudiante y medios utilizados en el proceso de instrucción; en carreras de ciencias sociales. Retomando aquí la primera perspectiva, se hace un balance y se reportan indagaciones realizadas en profesores empleando inicialmente un cuestionario que pretende enfocar la opinión acerca del modelo educativo vigente y su ejecución, cómo perciben que esto impacta el desarrollo de sus cursos de Estadística y la concepción que asumen de educación estadística, y luego una entrevista encaminada a profundizar en las opiniones de los profesores.

ABSTRACT: Due to the necessity of rating the current status of the statistics education and the alternatives for improvement in a public university, has been brought up a research project considering three perspectives: professor, student and means used in the teaching process, in social science careers. Returning to the first perspective, professor, an overview has been made, and the inquiries are reported here using a questionnaire that pretends to approach the opinion about the current educational model and its implementation, how they perceive its impact on the development of their Statistics courses and the assumed conception of statistics education. Then, an interview aimed to deepen in the professors points of views.

INTRODUCCIÓN

El modelo educativo en la Universidad de Sonora, surge de una reforma que adopta cambios en la visión del proceso de enseñanza aprendizaje acordes a una postura racionalizada de tendencias educativas recientes y con una pretensión modernizante. Prioriza el lugar que le corresponde al aprendizaje de los estudiantes en el proceso de instrucción y alienta acciones encaminadas a que su desarrollo les permita responder a los desafíos planteados por una variedad de problemas que enfrentan tanto durante su formación como al ejercer su profesión, de modo que alcancen un "nuevo perfil, con sentido de actualización y actitud de autoaprendizaje, capaz, competente, proclive a la interdisciplinariedad y al trabajo en equipo, responsable, consciente de sus deberes y exigente en compartir actitudes, habilidades y conocimientos cada vez más certificados y acreditados" (UNISON, 2003, p.13).

Sin embargo la permanencia de este modelo ha acumulado tiempo y dudas suficientes como para que emerja la inquietud de valorar sus alcances, y más fuertemente aún se percibe la necesidad de una evaluación en el ámbito de la educación estadística, área de interés del trabajo que se reporta, por los grandes avances habidos en esta disciplina y en las que se sustenta.

PROBLEMÁTICA

Haciendo un somero balance del estado actual de la educación estadística encontramos que, internacionalmente, se realizan esfuerzos de investigación y de aplicación de sus resultados en desarrollos prácticos dirigidos al trabajo en el aula, en consonancia a la creciente importancia mundial otorgada a la Estadística en la escuela y en otros ámbitos.

La disciplina estadística ha podido llevar sus aplicaciones prácticamente a todo campo de conocimiento gracias a su potencial para resolver problemas mediante sus diversas herramientas. En alguna medida, tales aplicaciones han traído una invasión de "estadísticas" en las actividades del mundo de hoy (desde las tareas más cotidianas hasta las más especializadas) y esto acarrea que las personas necesiten de una educación estadística para enfrentarlo.

Particularmente, en el caso de las carreras de ciencias sociales en la Universidad de Sonora, los planes y programas de estudio buscando concretar el desarrollo de una enseñanza en función del aprendizaje que realiza el alumno se orienta mediante el desarrollo de competencias y atribuyen a la formación estadística un papel instrumental para contribuir a ese desarrollo. Para ese fin se cuenta sólo con un curso común a las siete carreras del área llamado Estadística Descriptiva y, para dos de ellas, se adiciona otro llamado Estadística Inferencial, cursos comprometidos en procurar una cultura crítica hacia el manejo de la información y el impulso al uso de la tecnología tanto en tal manejo como en el proceso de instrucción (UNISON, 2004).

Lo expresado pone de manifiesto la posibilidad de que en las carreras de ciencias sociales de la institución de referencia se esté desarrollando una adecuada formación estadística de los estudiantes al involucrarlos en la resolución de problemas que requieren de los procesos estadísticos, poniéndolos en contacto con la naturaleza de la disciplina, sus propósitos y formas de pensamiento, más allá del dominio de algoritmos y técnicas así como de una comprensión fragmentada de conceptos. Sin embargo no hay indicios de que esto realmente sucede pues se basa en expectativas o documentos y no de lo que sucede al nivel del aula.

La reflexión sobre la situación descrita ha llevado a plantear un proyecto que tiene como principal pregunta de investigación: ¿Cuál es el estado actual de la educación estadística en la Universidad de Sonora y cómo debiera orientarse?, específicamente en carreras de ciencias sociales, involucrando la caracterización de la educación estadística implementada, considerando en eso, entre otras facetas, la intervención del profesor en dicho proceso. De hecho, lo que aquí se presenta es un breve análisis de las indagaciones realizadas entre profesores respecto a la educación estadística, utilizando dos instrumentos: un cuestionario y una guía de entrevistas.

MARCO CONCEPTUAL

Por diversas razones se toma como referencia el primer curso de Estadística para las carreras de ciencias sociales en la Universidad de Sonora y la primera de ellas es la de ser el único común a todas pero una adicional sería que tiene características importantes para la formación estadística de los estudiantes, que permiten decir que es un curso básico pero fundamental. En él se propone el desarrollo de capacidades en los estudiantes que van, en ese caso, más allá de las descripciones básicas de los datos para entrar al análisis de lo que es posible iniciar de ellas: "Conjeturar acerca del comportamiento de la distribución de los datos", "Generalizar hacia el comportamiento de la distribución de la población", etc. (UNISON, 2004); requiriendo al profesor: "Propiciar las condiciones para que los estudiantes, generalicen, abstraigan y sinteticen en términos de conceptos y propiedades de los objetos estadísticos", entre otras medidas, (UNISON, 2004).

Tales propósitos ilustran algunos efectos esperados del modelo curricular: un estudiante más participativo en el desarrollo de sus aprendizajes y un profesor que promueve tal desarrollo; particularmente en la formación estadística. Una formación que les permita realizar un estudio estadístico básico y entender estudios realizados por otros, así como ubicar cuándo su trabajo requiere el apoyo de un experto.

Una análisis de este tipo de ideas arroja que resultan un tanto alineadas con las características del movimiento de reforma que en educación estadística es impulsado por la comunidad científica internacional interesada en el tópico y que particularmente apunta a un cambio de foco de procedimientos de la Estadística a la comprensión de sus conceptos e ideas encaminadas a su puesta en práctica: "hay menos necesidad de enfatizar los cálculos, y más necesidad de enfocarse a la comprensión de cómo son conducidos e interpretados los estudios estadísticos" (Utts, 2003, citado por Newton, Dieteker y Horvath, 2011, p. 9).

Así mismo, tales ideas o capacidades puestas en movimiento en el contexto de problemas para cuya solución se requiere de una muestra de datos resultarán cercanas a lo que puede llamarse una competencia estadística, de lo cual no se tiene un consenso sino que es más bien un concepto en desarrollo y que resulta muy adecuado para la Estadística, tanto por su naturaleza como por sus fines (Sánchez y Hoyos, 2013, p. 215-217).

Lo anterior también captura la importancia que la visión actual de la educación estadística otorga tanto al proceso estadístico: compuesto de cuatro procesos: Formular preguntas, Recolectar datos, Analizar datos e Interpretar datos; como al razonamiento estadístico que es necesario desplegar en él, concepto este último que ha levantado consenso como rasgo indispensable en la formación

estadística (Franklin, Kader, Mewborn, Moreno, Peck, Perry, Sheaffer, 2005, citado por Newton et al, 2011, p. 10).

METODOLOGÍA

Dada la importancia del papel que juega el profesor en el acontecer del aula de clase, se ha considerado su opinión como perspectiva clave al valorar el estado actual de la educación estadística, opinión que se recaba en torno a tres aspectos: modelo educativo y su ejecución; impacto de esto en el desarrollo de curso de Estadística y concepción de educación estadística con la que el profesor orienta ese desarrollo; a través de un cuestionario y una guía de entrevista.

Cuestionario

Como un primer acercamiento a la percepción del profesor de lo que sucede en el aula se ha diseñado un cuestionario recabando sus opiniones, el que consta de once preguntas (seis abiertas y el resto cerradas) distribuidas en los aspectos mencionados como se indica en la siguiente tabla y el cual fue administrado por escrito.

Tabla 1. Distribución de preguntas de cuestionario por aspecto y tipo de pregunta

	Opinión acerca del modelo educativo vigente y su ejecución	Impacto del modelo educativo en educación estadística	Concepción de educación estadística
Abiertas		4 y 5	7, 8 y 9
Cerradas	1, 2 y 3	6	10 y 11

Para la aplicación del cuestionario se selecciona una muestra no aleatoria de seis profesores impartiendo el curso inicial de Estadística en carreras de Ciencias Sociales (de los dos último años un universo de veinte profesores), selección que se hace considerando tanto experiencia docente (poca o mucha) como formación (licenciatura, posgrado educativo, posgrado disciplinar).

Tomando una de las preguntas más relevantes en cada aspecto y de las que aquí se comentarán respuestas más adelante, las preguntas tres, cuatro y siete del cuestionario (denotadas como P3, P4 y P7, respectivamente), son:

- P3. En caso contrario, marque en el paréntesis, ¿En cuáles de los siguientes aspectos considera que se han obtenido logros sustantivos?

( ) Desarrollar en los estudiantes la capacidad de resolver problemas.

( ) Desarrollar trabajo interdisciplinario.

( ) Implementar el uso de tecnologías computacionales.

( ) Promover el desarrollo de actitudes en los estudiantes.

( ) Promover el trabajo en equipo.

( ) Promover en el estudiante el trabajo independiente.

( ) Otro: _____

- P4. En su experiencia, ¿Cuáles son las acciones en el salón de clase que le han dado resultado para promover el aprendizaje en sus estudiantes?

- P7. ¿Cuáles considera que son las competencias estadísticas que debe de desarrollar un profesionista en ciencias sociales?

Debiendo aclararse que en P3 "contrario" corresponde a quienes respondieron "si" o "parcialmente" a pregunta uno, ¿Los planes y programas de estudio están correctamente orientados al logro de lo anteriormente declarado?

Guía de entrevistas

A fin de completar, precisar o profundizar ideas de los profesores, se retomaron algunas preguntas del cuestionario cuya respuesta fue imprecisa y/o interesante como guía para realizar entrevistas entre ellos, la cual fue administrada verbalmente por uno de los autores de este trabajo y audio grabado. Lo que se retoma del cuestionario es indicado en la siguiente tabla aunque, como se puede ver comparando con tabla anterior, no se retoman todas las preguntas ni se plantean en el mismo formato (forma abierta o cerrada).

La entrevista se aplicó a cuatro de los seis profesores que respondieron el cuestionario por ser quienes estaban disponibles en el tiempo dedicado a esa tarea.

Tabla 2. Distribución de preguntas de guía por aspecto y tipo de pregunta

	Opinión acerca del modelo educativo vigente y su ejecución	Impacto del modelo educativo en educación estadística	Concepción de educación estadística
Abiertas	2 a), b), 3 a), b)	6	8 a), b) 9
Cerradas		4 a), b), 5 a), b),	7 a), b)

Precisamente las preguntas tres, cuatro y siete fueron reformuladas para la entrevista (por lo que ahora se denotan como R3, R4 y R7, respectivamente), de la siguiente manera:

- R3. a) Explique por qué SI o por qué NO considera que se han obtenido logros sustantivos en "Implementar el uso de tecnologías computacionales", de hecho ¿qué concibe como ese uso? b) Explique por qué SI o por qué NO considera que se han obtenido logros sustantivos en "Promover (entre los estudiantes) el trabajo en equipo", de hecho ¿qué concibe como ese trabajo?

- R4. a) ¿Considera que el trabajo colaborativo ha dado (o puede dar) resultados para promover el aprendizaje de los estudiantes? ¿Por qué? b) ¿Considera que el uso de la tecnología computacional ha dado (o puede dar) resultados para promover el aprendizaje de los estudiantes? ¿Por qué?

- R7. De entre los enunciados que aparecen abajo y que pueden ser considerados competencias estadísticas a desarrollar en un profesionista en ciencias sociales, seleccione los cuatro que le parezcan más importantes y argumente su selección.

a) Argumenta la validez del uso de un procedimiento estadístico en un contexto dado.
b) Comunica resultados de análisis de situaciones donde se utilizan técnicas estadísticas.
c) Conjetura y plantea preguntas acerca el comportamiento de las variables o datos en base a la reflexión y/o conocimientos previos de una situación bajo estudio.
d) Discrimina entre diferentes situaciones problemáticas aquellas en cuya solución hay que recurrir a datos así como el tipo de preguntas que pueden ser esclarecidas
e) Emplea procedimientos estadísticos para resolver situaciones problemáticas.
f) Evalúa diferentes alternativas de obtención y clasificación de datos seleccionado las más pertinentes para abordar una problemática bajo estudio.
g) Identifica las regularidades e invariantes en el comportamiento de las variables o datos en base a resultados de sus elaboraciones o análisis estadísticos.
h) Organiza el abordaje de una situación dada en un proyecto con diversas etapas del proceso estadístico desde la selección de una muestra hasta la interpretación contextual de resultados.
i) Plantea hipótesis a partir de análisis estadísticos.
j) Plantea preguntas y conjeturas acerca de los comportamientos de los datos que puede arrojar la observación de una variable en una situación dada.
k) Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar información y apoyar el análisis de datos.
l) Utiliza lenguaje estadístico para interpretar información en el contexto de la situación bajo estudio.
m) Valora la pertinencia de diferentes procedimientos estadísticos en situaciones problemáticas.

RESULTADOS

Presentamos a continuación resultado sobre preguntas más relevantes tanto del cuestionario como de la guía.

Respuestas a cuestionario

En P3, tres de los seis profesores que respondieron el cuestionario consideran que ha habido logros sustantivos en “Implementar el uso de tecnologías computacionales” y “Promover el trabajo en equipo”.

En respuestas a P4, cuatro profesores destacan como acciones para promover aprendizaje “el trabajo en colaboración” y “el uso de tecnología computacional”, aunque la mención al estudiante en si casi es nula, salvo por un profesor que señala que sus acciones están encaminadas a que (el estudiante) logre “una mejor comprensión de conceptos así como la implementación de análisis de datos”.

Las respuestas a P7 acerca de competencias estadísticas a desarrollar en estudiantes fueron algo diversas, pudiéndose agrupar como las que se inclinan más al manejo INSTRUMENTAL (por ejemplo: “Solución a problemas con la aplicación de la estadística”, “Tomar decisiones en función

de los resultados estadísticos e interpretación", "Descripción de tablas y gráficas", "Capacidad de recolectar datos de manera apropiada", etc.) que al OPERATIVO ("Cálculo de estadísticos", "Elaboración de tablas y gráficas de datos", "Determinación de tamaño de muestra", "Conocimiento de la distribución normal y la chi cuadrada", etc.).

Respuestas a guía de entrevistas

En R3 en las respuestas:

a) Acerca de haberse obtenido logros sustantivos en "Implementar el uso de tecnologías computacionales", hay una división de opiniones, mostrando una concepción limitada, superficial o muy general de tal uso: manejo rápido de datos para posibilitar análisis, automatizar lo operativo para captar ideas motivando interpretación con ahorro de tiempo y capacidad y potencial para acceder a conceptos y sus relaciones.

b) Alrededor de "Promover (entre los estudiantes) el trabajo en equipo", hay muy poca respuesta, uno de dos de acuerdo, compartiendo que la materia y el área se prestan a esto pero se da aisladamente (en algunas actividades y trabajo en proyecto). El trabajo en equipo se ve como: Distribuir tarea/trabajo, ayudarse entre estudiantes y complementar ideas.

Para R4:

a) Al trabajo colaborativo la mayoría, tres de cuatro, considera que ha dado (o puede dar) resultados para promover el aprendizaje de los estudiantes, pues: "Cada uno puede llevar el trabajo de diferente forma y… completar (se)", "… con el tiempo se va fusionando… se ve apoyo entre ellos… (surge trabajo) más crítico…" y "… (como) forma de aprender que se da a otro nivel… (por) discusión de ideas entre ellos y el lenguaje… que es diferente del docente al alumno…"

b) En cuanto al uso de la tecnología computacional se opina, dos de dos, que si ha dado (o puede dar) resultados para promover el aprendizaje de los estudiantes sea porque "Diversos estudios lo confirman…" o "… se da la organización más rápido… más volumen de datos…"

La selección de competencias que hacen los profesores en R7 aparece en la segunda fila de la tabla siguiente, donde E1, E2, E3 y E4, denotan a los profesores entrevistados.

Tabla 3. Concentrado de respuestas a R7 y su clasificación.

	E1	E2	E3	E4
	e, h, i, k	a, c, d, f	c, d, f, g	c, g, h, j
I. Formular preguntas	h	c d	c d	c h
II. Recolectar datos	e	f	f	
III. Analizar datos	e k	f	f g	g j
IV. Interpretar datos	i			
Razonamiento estadístico	h	a		h

Siendo argumentos dados para sus selecciones:

- "… más que en lo procedimental mi interés es que le encuentren el sentido (al) uso de las herramientas estadísticas dentro de lo que ellos hacen" [E2]

- "… el curso de Estadística Descriptiva… no es un curso completo… (es) lo mínimo… No (se trata de)… hacer un análisis… profundo pero si (saber cuándo recurrir a) un especialista…" [E3]

- "Creo que esas competencias resumen o implican otras planteadas… y creo que esas exhiben que el estudiante es capaz de realizar y relacionar sus conjeturas estadísticas con los datos (evidencia) apropiadamente recabados…" [E4]

CONCLUSIONES

Haciendo un balance de la información obtenida, acerca de la opinión del modelo educativo vigente y su ejecución, aunque las respuestas no se inclinan claramente por una opinión favorable o desfavorable a una ejecución acorde del modelo educativo, dejan ver que no ha llegado a (o terminado de) implantarse, destacan también la falta en el profesor de una visión más completa de las principales características del modelo educativo, como centrar el proceso de instrucción en el estudiante y, por tanto, el necesario ajuste de roles en el profesor.

Acerca del impacto del modelo educativo en educación estadística, si bien el modelo educativo motivó a los profesores a organizar y renovar sus formas de trabajo parece ser que tuvo mayor impacto la literatura en educación estadística que el modelo, de lo cual no necesariamente se compenetraron por completo y transpusieron a su trabajo en el aula. Parece que las concepciones educativas características de la reforma no han sido digeridas del todo y de ahí las dificultades para adaptarlas a la educación estadística de campo. Haberlo hecho hubiera justificado e impulsado una

serie de cambios en su quehacer, conjugándose ambas directrices, acarreando su concreción y acentuación.

Finalmente respecto a la concepción de educación estadística en el profesor, la información obtenida en cuestionario y refrendada en entrevista, principalmente en pregunta 7, siguiendo a Newton, Dieteker y Horvath (2011), muestra una concepción más influenciada por las primeras tres fases del proceso estadístico: Formular preguntas, Recolectar datos y Analizar datos, sobre todo la tercera que es operativa o técnica, valorando un tanto menos la segunda y mucho menos la cuarta: Interpretar datos. Por otra parte la atención global al razonamiento estadístico es considerada apenas incipientemente por su consideración escasa.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., Sheaffer, R. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A pre-K-12 curriculum framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association.

Newton, J., Dietiker, L., Horvath, A. (2011). Statistics Education in the United States: Statistical Reasoning and the Statistical Process. En C. Batanero, G. Burril, C. Reading (Eds.) *Teaching Statistics in School Mathematics – Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp. 9-13). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Sánchez, E., Hoyos, V. (2013). La Estadística y la propuesta de currículos por competencias. En A. Saucedo (ED.) *Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas.* Caracas, Venezuela: Universidad Central.

UNISON (2003). Lineamientos generales para un modelo curricular de la Universidad de Sonora. *Gaceta*, febrero de 2003. Hermosillo, México: Universidad de Sonora.

UNISON (2004). *Programas de Estudio de Cursos de Matemáticas en la División de Ciencias Sociales de la Universidad de Sonora*. Recuperado el 9 de enero de 2015 de http://www.mat.uson.mx/sitio/docenciaDCS.php

Utts, J. (2003). What educated citizens should know about statstics and probability. *American Statistician*, 57(2), 74-79.

FORTALECIMIENTO DE LOS CONOCIMIENTOS BÁSICOS EN ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD EN DOCENTES DE LA EDUCACIÓN BÁSICA REGULAR

Elizabeth Advíncula Clemente, Augusta Osorio Gonzales
Pontificia Universidad Católica del Perú (Perú)
eadvicula@pucp.edu.pe, arosorio@pucp.edu.pe

Palabras clave: formación de profesores, estadística, probabilidad

Key words: teacher training, statistics, probability

RESUMEN: Nuestra investigación es aplicada y busca elaborar talleres de fortalecimiento en contenidos básicos de Estadística y Probabilidad, dirigidos a profesores de primaria. Los contenidos considerados son los que se incluyen en el Mapa de progreso de Estadística y Probabilidad, que forma parte de los nuevos Estándares de Aprendizaje Nacionales. Nuestra labor comprenderá el diseño, la aplicación y el perfeccionamiento de talleres para cada ciclo del nivel primario. Este proceso asegurará la constante revisión y mejora de los problemas que puedan surgir durante su ejecución

ABSTRACT: Our research is applied and seeks to develop workshops that will target and strengthen the basic content of Statistics and Probability of primary teachers. The workshops will follow closely the content considered within the Progress Map of Statistics and Probability. This content is part of the new National Learning Standards which was prepared by Ministry of Education. Our work will involve design, application and continuous assessment of workshops for each cycle of the primary level. This process will ensure the constant revision and improvement of any problems that may arise during their implementation.

PROPÓSITO

Nuestra investigación es aplicada y busca elaborar talleres de fortalecimiento en contenidos básicos de Estadística y Probabilidad, que los profesores de primaria requieren para su trabajo en el aula de clase. Los contenidos a tener en cuenta son los que forman parte de los nuevos Estándares de Aprendizaje Nacionales.

Los Estándares Nacionales presentan el desarrollo progresivo de dos competencias: procesar e interpretar diversidad de datos transformándolos en información y analizar situaciones de incertidumbre para formular predicciones que permitan tomar decisiones adecuadas. Esta descripción se realiza en base a tres aspectos: recopilación y procesamiento de los datos, interpretación y valoración de los datos, y análisis de situaciones de incertidumbre.

El primer aspecto se relaciona con la capacidad para trabajar con los datos, recopilarlos, clasificarlos, organizarlos, representarlos y determinar sus medidas descriptivas en función a un propósito y con la finalidad de brindar insumos para la interpretación de los mismos. El segundo aspecto, indica la capacidad para convertir en información los datos procesados, mediante la lectura, interpretación, inferencia y valoración de la confiabilidad y representatividad de los mismos con la finalidad de tomar decisiones. Y el último aspecto, está asociada a la capacidad para identificar, describir, modelar una situación aleatoria, determinar sus componentes (espacio muestral, el contexto y sus restricciones) y estimar la probabilidad de ocurrencia de los sucesos relacionados con ella, con la finalidad de predecirlos y tomar decisiones.

Nuestra labor comprenderá el diseño, la aplicación y el perfeccionamiento de talleres de fortalecimiento, preparados para que los docentes revisen los contenidos de los aspectos indicados y los problemas de aprendizaje relacionados con estos contenidos, y se prepararen en la construcción de problemas para la enseñanza de dichos contenidos.

Para el diseño de los talleres de fortalecimiento nos basamos en los resultados de los talleres piloto trabajados durante el 2014 con 150 docentes de educación primaria de todo el país y en los resultados obtenidos al realizar una medición con 380 alumnos del nivel primario respecto al dominio de los contenidos considerados en los nuevos Estándares de Aprendizaje Nacionales.

ANTECEDENTES

En nuestro país la incorporación de los contenidos relacionados a la estadística y la probabilidad en el nivel primario se efectuó a partir del segundo grado de primaria y es en la actual propuesta que los contenidos se incorporarán desde el nivel inicial (5 años). Sin embargo, sabemos que a pesar de que se indique la inclusión de contenidos de estadística y probabilidad en los Estándares Nacionales, esto no asegura su enseñanza; es decir, es posible que esto solo quede en el papel. Esta problemática ya fue registrada por algunos investigadores como Jiménez y Jiménez (2005) o Grima (2010), quienes describen la realidad de muchos países, la inclusión de estos contenidos al final de los cursos de Matemáticas y que por ello son apenas estudiados y en algunos casos ni siquiera vistos.

La consecuencia de esta problemática es el nivel de conocimientos estadísticos con que egresa un alumno de la enseñanza básica. Durante ocho años hemos observado la falta de conocimientos básicos que presentaron nuestros alumnos de un primer curso de Estadística a nivel universitario y

eso hizo que nos preocupemos por investigar sobre los conocimientos estadísticos que los alumnos de educación básica llegan a manejar durante su vida escolar.

En la investigación que realizamos durante el 2013 (Advincula y Osorio, 2015) consideramos la medición en dos puntos de la enseñanza básica, uno con alumnos finalizando el 4to grado de primaria y otro con alumnos finalizando el segundo año de secundaria. Los resultados nos permitieron concluir que hay aspectos de la enseñanza de la estadística y la probabilidad que los alumnos no han alcanzado en su momento.

Esto nos hizo reflexionar y pensar que el problema no solo está en la falta de tiempo dado a la estadística durante las clases o en el hecho que los temas quedan al final del año escolar, sino que en muchos casos también está involucrado el poco interés de los docentes en estos temas o el poco dominio en la enseñanza de los mismos. Sobre estos puntos se han realizado muchas investigaciones, como la de Batanero (2009) donde se muestra el análisis de diferentes investigaciones sobre la formación de profesores para el área de Estadística o la de Estrada (2010), donde se aplican instrumentos para poder relacionar la actitud hacia la estadística y el dominio de los conceptos básicos en docentes en actividad y en formación.

Sumamos a lo anterior nuestra experiencia en la enseñanza a docentes de educación primaria, dentro del Diplomado Virtual de Enseñanza de las Matemáticas de Primaria que se dicta en la Facultad de Educación de la PUCP, al cual asisten docentes de todo el país. Hemos dictado el curso en cuestión en cinco ocasiones diferentes con un promedio de 60 docentes por vez y hemos observado las serias deficiencias que presentaron muchos de ellos. Estas deficiencias son en muchos casos causadas por una falta de instrucción básica en el tema y no por decidía o falta de interés de los docentes.

Estas deficiencias también se hicieron evidentes durante las pruebas y entrevistas realizadas con los docentes de primaria en los talleres piloto del 2014, donde ellos mismos nos expresaron sus inquietudes con respecto a la enseñanza de la estadística y sobre todos con los temas vinculados con la probabilidad.

Por tal, podemos afirmar que un paso básico para mejorar el aprendizaje de los alumnos es mejorar el dominio de los conocimientos básicos de los docentes. El preparar talleres de fortalecimiento para los docentes de primaria con el fin de fortalecer su pensamiento estadístico, es una de las mejores maneras para iniciar un proceso que conlleve a largo plazo a una mejora en el dominio de los contenidos de la estadística y la probabilidad en alumnos durante su educación básica.

DISEÑO

Para comenzar el diseño de los talleres de fortalecimiento a trabajar durante el 2015 nos basamos en la experiencia que tuvimos dictando los talleres piloto del 2014, lo cuales trabajamos con apoyo del Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas IREM-PUCP, del cual somos miembros.

En estos talleres se realizaron diversas tareas: medir la habilidad de los docentes para resolver problemas de estadística y probabilidad, revisar con los docentes la importancia de la enseñanza de la estadística en el nivel primario, lograr la determinación por parte de los docentes de los

conceptos estadísticos necesarios para la enseñanza de los contenidos considerados en los Estándares Nacionales para los ciclos del nivel primario, revisar dichos contenidos y la revisión de propuestas de los docentes para el trabajo con alumnos en el aula.

El proceso de evaluación de las pruebas aplicadas a los docentes en estos talleres nos ha permitido caracterizar los errores en los que incurren y poder elaborar estrategias que permitan evitarlos. Hay un porcentaje de docentes de primaria que presenta errores similares a lo que encontramos en los alumnos durante nuestra investigación realizada durante el 2013.

También hemos observado que el grado de conocimiento de los docentes respecto a contenidos vinculados con la probabilidad es muy pobre, tal es así que tuvieron serias dificultades para poder diferenciar el concepto suceso del concepto espacio muestral o el concepto espacio muestral del concepto situación aleatoria.

La información recogida en los talleres piloto nos permitió establecer las partes básicas de nuestros talleres de fortalecimiento, que son: revisión de conceptos básicos, revisión de los indicadores de aprendizaje incluidos en los nuevos estándares de aprendizaje, reconocimiento de los problemas encontrados en los alumnos y creación de problemas.

Para definir el énfasis que tendría el desarrollo de los contenidos, es decir, la parte didáctica, hemos decidido que la teoría del Pensamiento Estadístico de Wild y Pfannkuch (1999) es la más pertinente para el trabajo relacionado con la recopilación, procesamiento, interpretación y valoración de los datos. Hemos considerado la dimensión 1 de esta teoría: la planificación del Ciclo de la Investigación (PPDAC), que hace referencia a la forma en que un investigador actúa y piensa en el transcurso de una investigación empírica. Este ciclo es la base fundamental para poder relacionar todos los contenidos propuestos en los dos primeros aspectos indicados al inicio de este documento.

Durante los talleres piloto observamos que los docentes de primaria tienen cierto dominio de los temas relacionados con la organización de datos, utilizando tablas simples y dobles, y la presentación de datos mediante diversos gráficos. También observamos que tenían una seria dificultad para poder relacionar estos contenidos con conceptos como variable estadística, población, muestra y con la construcción de instrumentos. Esto nos permitió pensar que los docentes de primaria no consideran la fase de identificación del problema y la fase de planificación en la gestión de los datos, como parte de lo que deben dar a conocer a sus alumnos durante el trabajo en el aula.

Por otro lado, observamos que los docentes no veían la necesidad de culminar un problema de gestión de datos respondiendo a una pregunta inicial en el contexto planteado, sino les bastaba que los alumnos respondieran mecánicamente preguntas diversas hechas sobre las tablas o gráficos construidos. Es decir, no veían la importancia que los alumnos reconozcan el proceso seguido en el trabajo con los datos, como un medio para obtener información y llegar a una posible conclusión sobre un problema planteado.

Nuestra prioridad en el taller de fortalecimiento de estadística es el de profundizar en lo que es el ciclo PPDAC y como la ejecución de este se puede poner al alcance de los alumnos de cualquier grado del nivel primario.

Una de las modificaciones sustanciales introducidas en los Estándares Nacionales fue la inclusión de contenidos relacionados con las probabilidades desde los 5 años de edad y el trabajar probabilidades bajo el planteamiento clásico en el V ciclo del nivel primario, que antes se trataba en el nivel secundario. Lo que implicará un mayor desenvolvimiento del profesor de primaria en estos temas. Al respecto, pudimos observar que en las pruebas aplicadas durante los talleres piloto, solo un 10% de los docentes podía definir apropiadamente el concepto de probabilidad y menos de un 30% de los evaluados podía resolver un problema simple de probabilidades bajo el planteamiento clásico.

Respecto al taller de probabilidades, nuestra mayor preocupación será la consolidación de conceptos básicos. Usaremos como marco didáctico el trabajo de investigación de Osorio (2012), donde se utiliza a la situación aleatoria como el concepto base para la comprensión de la probabilidad y la que permite articular todos los conceptos relacionados con la probabilidad alrededor de la clasificación de las situaciones aleatorias. Se espera que la revisión de los conceptos a la luz de este marco les permita a los docentes una mejor comprensión de lo que deben esperar de sus alumnos en cada grado del nivel primario.

Cada taller tendrá una duración de 20 horas divididas en tres jornadas. En el caso del taller de estadística, cinco de esas horas serán dedicadas a la revisión de conceptos y errores de los alumnos, cinco horas al trabajo con los indicadores de aprendizaje y las diez restantes a la construcción de problemas por parte de los docentes. En el caso del taller de probabilidades, diez de las horas se dedicarán a la revisión de conceptos, cinco horas al trabajo con los indicadores de aprendizaje y las cinco restantes a la construcción de problemas.

Las estrategias a utilizar serán: actividades colaborativas a desarrollar por los docentes, plenarias para consolidar los conceptos, revisión de problemas propuestos a los alumnos, revisión de respuestas erradas de los alumnos a diferentes problemas, creación grupal de problemas para un tema y grado especifico y su revisión en plenario para poder detectar mejoras.

RESULTADOS

Lo que se considera como producto principal de esta investigación es el diseño de los dos talleres y la experiencia adquirida durante sus aplicaciones.

Otro producto serán los problemas preparados por los docentes durante los talleres, los que serán mejorados por los mismos docentes con nuestro apoyo y difundidos para que los docentes de primaria tengan la oportunidad de poder aplicarlos.

El impacto que prevemos tengan estos talleres son:

- la difusión en sus respectivos colegios de la experiencia vivida por los docentes participantes en los talleres
- el incremento en la enseñanza de los contenidos de estadística y probabilidad en las aulas
- el obtener insumos para la elaboración de un material de consulta para el área de estadística y probabilidad dirigido a los docentes de la Educación Básica Regular.

El producto de esta investigación será relevante para cualquier institución escolar de nuestro país que esté interesada en la capacitación de sus docentes pues les permitirá contar con un producto que promueva el fortalecimiento de conocimiento docente en estadística y probabilidad así como el

mejoramiento de la enseñanza de los contenidos de estas áreas. Lo que permitirá a los alumnos llegar al nivel secundario con conocimientos estadísticos básicos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Advincula, E. y Osorio, A. (2015) Midiendo los logros de estudiantes de la Educación Básica Regular en Estadística y Probabilidad. En J. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M. Gea y M. López (Eds.), *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (2),* (pp. 381-387). Granada. Recuperado el 30 de marzo de 2015 de

http://www.estadis.net/3/actas/Actas%20de%20las%202%20Jornadas%20Virtuales.pdf

Batanero, C. (2009). Retos para la formación estadística de los profesores. En *II Encontro de Probabilidade e Estatística na Scola. Universidade do Minho*, Portugal: Braga. Recuperado el 30 de marzo de 2015 de http://www.ugr.es/~batanero

Estrada, A (2007). Actitudes hacia la Estadística: un estudio con profesores de educación primaria en formación y en ejercicio. *Actas del XI Simposio de la SEIEM* (pp. 121-140). ISSN: 1888-0762, ISBN: 84-7985-261-5. Recuperado el 25 de marzo de 2015 de http://web.udl.es/usuaris/z4084849/es/publicaciones1.html

Jiménez, L. y Jiménez, J. (2005, mayo). Enseñar probabilidad en primaria y secundaria? ¿Para qué y por qué? *Cidse - Revista virtual matemática - Educación e Internet, 6(1).* Recuperado el 25 de marzo de 2015 de

http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/contribuciones-v6-n1-may2005/arti-aleat/index.html

Grima, P. (2010). Estadística: Enseñar y crear actitudes positivas a través de casos prácticos. *Revista Iberoamericana de Educación matemática, 24*, 11 – 26. ISSN: 1815-0640

Wild, C.J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review, 67(3),* 223 - 265. México. Recuperado el 20 de marzo de 2015 de

http://iase-web.org/documents/intstatreview/99.Wild.Pfannkuch.pdf

Osorio, A. (2012). *Análisis de la idoneidad de un proceso de instrucción para la introducción del concepto de probabilidad en la enseñanza superior*. Tesis de Maestría no publicada, Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú. Recuperado el 10 de enero de 2015 de

http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/4658

INVENCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS POR ALUMNOS DE LA LICENCIATURA DE PSICOLOGÍA EDUCATIVA DE LA UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Cuauhtémoc Gerardo Pérez López, Alba Yanalte Álvarez Mejía, Ana María Martínez Jiménez, Sonia Zúñiga Ibarra
Universidad Pedagógica Nacional (México)
cgperez@upn.mx, yalvarez@upn.mx, sonizuga@hotmail.com

Palabras clave: Problema aritmético, Invención de problemas, Solución de problemas

Key words: arithmetical problem, posing problem, problem solving

RESUMEN: Con el objetivo de Identificar y clasificar los enunciados inventados por estudiantes de la Licenciatura de Psicología Educativa, dirigidos a alumnos de 1º, 3º, 5º de primaria. Veinticuatro estudiantes inventaron problemas a partir de una imagen e información del Plan de estudios. Los enunciados se clasificaron en a) problemas o no problemas aritméticos; b) problemas simples o compuestos. De 72 producciones, 18 fueron problemas simples y 50 compuestos. Los problemas aritméticos con mayor frecuencia fueron simples aditivos de combinación, simples multiplicativos de isomorfismo de las medidas, problemas compuestos de dos procesos la mayoría sin correspondencia con los contenidos del Plan.

ABSTRACT: In order to identify and classify the posing problems by students of the Bachelor of Educational Psychology, the poblems were posed for students of 1st, 3rd, 5th grade. Twenty-four students invented problems from an image and information of the curriculum. The statements were classified in a) problems or arithmetic problems; b) simple or compound problems. From 72 productions, 18 were simple problems and 50 compounds. The most common arithmetic problems were simple additive combination, simple multiplicative isomorphism of measures problems composed of two processes most mismatched with the contents of the curriculum

■ INTRODUCCIÓN

En México a partir de la reforma de 1993, la enseñanza de las matemáticas se basa en la construcción de conocimientos derivadas de experiencias concretas, del diálogo, la interacción y la confrontación de puntos de vista, además del reforzamiento por la interacción con los compañeros y profesor. La resolución de problemas se considera herramienta funcional y flexible en el diseño de actividades que le permitan resolver situaciones problemáticas que se plantee al alumno. Este enfoque coloca en primer término el planteamiento y resolución de problemas como forma de construcción de los conocimientos matemáticos.

De acuerdo con el Plan de estudio 2009 de Primaria, "Con el estudio de las matemáticas en la educación básica se busca que los niños y jóvenes desarrollen:

- Una forma de pensamiento que les permita interpretar y comunicar matemáticamente situaciones que se presentan en diversos entornos socioculturales.
- Técnicas adecuadas para reconocer, plantear y resolver problemas, formular y validar conjeturas, utilizar procedimientos propios, comunicar, analizar e interpretar ideas y procedimientos de solución.
- Una actitud positiva hacia el estudio de esta disciplina y de colaboración y crítica, tanto en el ámbito social y cultural en que se desempeñen como en otros diferentes." (SEP, 2009, pág.77).

Así, los educadores deben promover acciones que motiven la actividad matemática de forma autónoma y flexible, en las que los alumnos hagan uso de sus propios conocimientos y procedimientos para plantear, formular, validar, sus conocimientos por medio de la resolución de problemas.

■ INVENCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS

La NCTM (1980, citado en Ayllón, et al, 2008) pone de manifiesto que la resolución de problemas se debe considerar como eje central en la enseñanza y aprendizaje de la aritmética escolar. Una propuesta para abordar este tema es la invención de problemas por parte de los estudiantes.

En el plano curricular sobre la invención de problemas, Cázares, Castro y Rico (1998) encontraron diferentes formas de abordar el estudio para la confección de problemas aritméticos: el estudio del comportamiento cognoscitivo de los estudiantes, la comprensión y desarrollo de habilidades enfocadas a la invención de los mismos, el papel que juegan los verbos en los enunciados, el uso de las palabras clave que sugieren el tipo de operación a aplicar, incluso estrategias de resolución de los problemas aritméticos.

De acuerdo a Silver (1994, citado en English 1997), la invención o planteamiento de problemas es una actividad en la que no sólo va implícita la creación de nuevos problemas, sino también la elaboración de modificaciones o reformulación de un problema que se está resolviendo, Castro (2008) indica además que la actividad de inventar puede darse antes, durante y después de resolver el problema. Según Silver (1994, citado en English 1997), la actividad de la invención de problemas puede realizarse antes de resolver el problema, cuando el objetivo no es encontrar la solución sino la creación de un problema a partir de una experiencia o situación; durante el proceso de resolución cuando el resolutor no puede resolver el problema original, la invención se produce a

través de la reformulación del problema dado cuando se modifica el objetivo, meta o condición del problema ya resuelto. La invención de problemas aritméticos lleva al alumno a relacionar conceptos y procesos que ha adquirido en distintos momentos de su vida escolar (Polya 1989, Castro 2008, Cazares 2000).

Para poder inventar problemas, como propone English (1997), es necesario que los alumnos sean capaces de: a) entender lo que es un problema; b) identificar los diferentes tipos de problemas y, c) percibir situaciones matemáticas en formas diversas. Silver y Cai (2005) consideran indispensable en la invención de problemas determinar, en un primer momento, si la producción contiene o no pregunta; si es un problema matemático o no; si los datos que presenta son suficientes para resolverlo. De acuerdo a los autores la invención de problemas genera una variedad diversa de respuestas, por tal motivo consideran indispensable involucrar a los alumnos en una actividad matemática auténtica, en la que mencionan dos variantes: a) Invención de problemas *como un procedimiento de evaluación* de conocimiento matemático y b) Invención de problemas *como objetivo de la clase*.

En este caso Silver y Cai (2005), sugieren tres aspectos a considerar: a) cantidad**.** Número de producciones correctas que los alumnos o individuos generen; b) originalidad. Se refiere a la creación de problemas que llevan a respuestas poco usuales o comunes y c) complejidad. se considera la sofisticación de las relaciones matemáticas involucradas.

Para Silver (1994), en toda clase de matemáticas, la resolución de problemas desempeña un papel importante. Su relevancia ha generado que en las investigaciones sobre el tema se trabaje en diferentes aspectos: el tipo de problema, el momento y la manera en la que se debe presentar, la estructura de los problemas, la cantidad y otros más. Sin embargo, el tema de inventar problemas, es un aspecto que ha sido tratado en pocas ocasiones, restringiendo esta tarea a profesores y a los autores de libros. Al respecto, Ayllón (2004) concluye que la invención de problemas no se reduce a estos agentes educativos, sino que puede extenderse a quienes están en formación.

De acuerdo a Baxter (2005) la invención de problemas permite que el profesor conozca lo que el alumno sabe de conceptos matemáticos, para hacerlo puede basarse en el tipo y la complejidad de los problemas planteados en los que se observará el nivel de manejo numérico que el alumno posee; considerar también que solucionar un problema inventado por un alumno o compañero es un gran reto, en el que encontrar la respuesta correcta no es lo único importante; con este procedimiento los alumnos tendrán más posibilidades de mostrar lo que saben hacer, llevándolos a hacer matemáticas y asumir la responsabilidad en la discusión en clase. Como consecuencia, ellos se perciben como matemáticos eficientes y capaces, lo que conlleva un cambio de actitud hacia las matemáticas.

En otro orden de ideas, una de las materias optativas que se imparten en la Licenciatura de Psicología Educativa en el plan 90 es Modelos de Enseñanza–Aprendizaje de las Matemáticas. En el curso se propone conocer la línea de desarrollo evolutivo que se inicia con el conocimiento matemático informal en niños de preescolar que de manera gradual se transforma en formal conforme el alumno avanza en los grados escolares (UPN, 1990).

Bajo esta perspectiva, el objetivo del presente es identificar y clasificar los enunciados inventados por estudiantes de octavo semestre de la Licenciatura de Psicología Educativa, dirigidos a alumnos de 1º, 3º y 5º de primaria a partir de una imagen y de información seleccionada de Planes y

Programas de Estudios de la SEP 2009, de acuerdo con las siguientes categorías: problemas o no problemas aritméticos; problemas simples o compuestos; problemas aditivos y problemas multiplicativos; problemas aditivos en las categorías de cambio, combinación, comparación e igualación, problemas multiplicativos en las categorías de isomorfismo de las medidas y producto de las medidas, su correspondencia con los contenidos matemáticos de la SEP 2009.

■ MÉTODO

Tipo de estudio y diseño

El presente es un estudio descriptivo de tipo cuantitativo-cualitativo. Cuantitativo en relación con el tratamiento de los datos y cualitativo de acuerdo con el análisis de los problemas para la clasificación de éstos en las correspondientes categorías.

Participantes

Un grupo constituido por 24 estudiantes de la Licenciatura en Psicología Educativa de octavo semestre, inscritos en la materia optativa Modelos de Enseñanza–Aprendizaje de las Matemáticas, en el cuarto mes del curso.

Instrumentos

Imagen como estímulo visual. Obtenida del bloque II del libro de texto gratuito de Matemáticas de primer grado de Primaria (SEP, 2009, págs 32-33). Los números se modificaron debido a que la imagen original del libro de texto de Primaria está dirigida a alumnos de 1°, y se pidió que los problemas aritméticos fueran planteados para 1º, 3º y 5º; por esa razón se manejaron precios más elevados con números enteros, permitiendo a los participantes la graduación de la complejidad de acuerdo con el grado escolar al que se dirige el problema aritmético.

- Situación A. Hoja donde se mencionan los ejes temáticos, 1. Sentido numérico y pensamiento algebraico, 2. Forma, espacio y medida, 3. Manejo de la información (SEP 2009, págs. 77-78). Así como una selección de contenidos específicos que se estudian en los diferentes grados de Educación Primaria, con el propósito de ofrecer a los participantes un marco de referencia para la invención de los problemas aritméticos
- Situación B, Hoja con información sobre lo que se busca desarrollar en los niños y jóvenes a través de las matemáticas como el pensamiento, habilidades y técnicas de resolución y el valor de las actitudes positivas ante los problemas aritméticos. Hace referencia a la didáctica, metodología apoyada en actividades de estudio que despierten el interés y la reflexión de los alumnos, el medio y los conocimientos previos (SEP 2009, pág. 77).

Hoja con la siguiente consigna: "*A partir de la imagen que se presenta, plantea un problema aritmético para alumnos de primer grado de primaria, otro para tercero y uno más para quinto grado. Para la elaboración de los problemas, considera el contexto real del alumno.*"

■ PROCEDIMIENTO

La aplicación se realizó a un grupo constituido de octavo semestre de la Licenciatura de Psicología Educativa, en un salón de clases de la Universidad Pedagógica Nacional, enumerándose del 1 al 2; se colocaron los números 1 en el extremo derecho del salón y los números 2 en el extremo

izquierdo. Una vez ubicados en sus respectivos lugares se proyectó el estímulo visual durante 90 min.

■ RESULTADOS

La clasificación de los enunciados producidos por los participantes se realizó de la siguiente manera:

1. Problemas aritméticos, si contienen información de tipo cuantitativo y si se realizan operaciones aritméticas como lo menciona Cazares et al, (1998); Puig y Cerdán (1988). Aquellos enunciados que no cumplieron las características mencionadas por estos autores se clasifican en problemas no aritméticos.
2. Problema simples y compuestos de acuerdo a Castro et al, (1997).
3. Los problemas simples se clasifican en: aditivos de acuerdo a Heller y Greeno (1978, citado en Vicente et al 2008), y multiplicativos como lo propone Vergnaud (1991).
4. Los problemas compuestos se clasifican de acuerdo a Castro et al (1997).

   De un proceso, cuatro tipos: (+, -, x, /), sin combinaciones.

   De dos procesos, se presentan seis tipos: (+, -) (+, x) (+, /) (-, /) (x, /) (x, -).

   Tres procesos con cuatro tipos (+,-, x) (+,-, /) (+, x, /) (-, x, /).

   Cuatro procesos, un solo tipo (+,- , x, /).

5. Correspondencia de los problemas aritméticos con los contenidos seleccionados del grado escolar al que van dirigido.

Para llevar a cabo esta clasificación, las autoras de la presente resolvieron los enunciados inventados por los participantes, considerando el grado para el que fueron destinados y la selección de los contenidos para cada grado de acuerdo con los Programas de estudio de la SEP 2009, eso no significa que sea la única manera de resolver los problemas, puede haber tantas maneras como resolutores, tampoco significa que sea la manera correcta de resolverlos, simplemente es una forma de resolver de entre muchas que se pueden realizar.

Todos los participantes del presente cumplieron con la consigna; inventaron un problema para 1°, 3° y 5° grados, por lo que se obtuvo un total de 72 producciones. Los resultados obtenidos se organizan y presentan en tablas de contingencia en donde las producciones se muestran por grados, por situación.

Tabla 1. Frecuencia de problemas aritméticos y problemas no aritméticos por situación y por grado

Problemas	Situación A			Situación B			Total
	Primero	Tercero	Quinto	Primero	Tercero	Quinto	
Aritméticos	9	13	12	7	11	11	63
No aritméticos	4	0	1	4	0	0	9
Total	13	13	13	11	11	11	72

En la tabla se clasifican los enunciados de los participantes, en específico si sus producciones son problemas aritméticos o no de acuerdo con la clasificación de Puig y Cerdán (1988); Cázares, et al (1998). Se observa que la mayoría son problemas aritméticos, ya que para su solución se requiere realizar operaciones aritméticas. En 8 casos, los problemas planteados para primer grado se presentan con enunciados cuya solución no requiere operaciones aritméticas. En adelante sol se tomarán en cuenta los 63 enunciados que sí son problemas aritméticos.

De los enunciados considerados problemas aritméticos se examinó las operaciones aritméticas involucradas para resolver el problema y catalogar en simples y compuestos, como se presenta en la tabla 2.

Tabla 2. Frecuencia de problemas aritméticos simples o compuestos por situación y por grado

Problemas	Situación A			Situación B			Total
	Primero	Tercero	Quinto	Primero	Tercero	Quinto	
Simples	4	3	4*	4	0	2	17
Compuestos	5	10	10	**4	**13	**10	52
Total	9	13	14	8	13	12	69

A partir de la clasificación de Castro, et al (1997), en esta tabla se hace la clasificación de problemas aritméticos en simples y compuestos. Simples cuando se establece una relación entre dos datos en el problema planteado y sólo se tiene que realizar una operación aritmética y compuestos cuando interviene más de una relación entre los datos del enunciado y se realiza por lo menos dos operaciones distintas o una misma operación varias veces para obtener la solución del problema. En la tabla se observa datos numéricos con asterisco, esto se debe a que en un problema aritmético las preguntas planteadas generan otros problemas diferentes entre sí. Debido a la clasificación utilizada de simples y compuestos, los problemas aritméticos difieren de la primera tabla, puesto que en la situación a en 5° grado un enunciado se convirtió en tres problemas aritméticos simples y en la situación b en 1° grado uno se convirtió en 2 problemas compuestos, en 3° grado dos enunciados se convirtieron en 4 compuestos y en 5° grado un enunciado se convirtió en 2 problemas compuestos, teniendo así, un total de 69 problemas, 17 simples y 52 compuestos, cantidad que difiere de la tabla 1 donde el total de los problemas aritméticos es 63.

Los problemas simples se categorizan en aditivos y multiplicativos, se consideran aditivos a los que involucran suma o resta, mientras que son multiplicativos si la solución implica multiplicación o división. Los problemas aditivos organizaron en las categorías de cambio, combinación, comparación e igualación. Los problemas simples multiplicativos a su vez se organizaron de acuerdo con su estructura: isomorfismo de las medidas o producto de las medidas. Los problemas aritméticos compuestos se clasificaron de acuerdo con los procesos utilizados para resolverse uno, dos, tres o cuatro procesos.

Se observó que en la situación A, conforme va avanzando en los grados escolares los problemas simples aditivos van disminuyendo y son más frecuentes los problemas simples multiplicativos y en B no hay ninguno.

Con base en la clasificación semántica elegida, en los problemas aritméticos simples aditivos inventados se presentaron con más frecuencia en primer y tercer grado los de combinación en la situación A, mientras que en la situación B las categorías de cambio e igualación se presentaron en la misma frecuencia en primer grado. Se observó que los problemas de combinación y cambio son los que más se presentan, le siguen los de igualación y ninguno de comparación. Los problemas aritméticos simples de estructura multiplicativa se presentaron en la situación A, en tercer y quinto grados, con estructura de isomorfismo de las medidas.

Los participantes inventaron problemas aritméticos compuestos incluso para alumnos de primer grado; en este caso fueron compuestos que se resuelven con dos operaciones del mismo tipo: suma-suma o de dos operaciones diferentes suma y resta, lo cual está dentro de los aprendizajes propuestos para este nivel escolar.

Se observa que en quinto grado aparecen problemas compuestos de una misma operación, multiplicación-multiplicación, esto no significa que al tratarse de dos operaciones iguales, el problema sea de fácil resolución. En tercero y quinto grados prevalece la invención de los problemas compuestos donde se realizan dos y tres procesos.

Tabla 3. Frecuencia de problemas aritméticos de acuerdo a la correspondencia de los aprendizajes esperados por la SEP por situación y por grado

Corresponden	Situación A			Situación B			Total
	Primero	Tercero	Quinto	Primero	Tercero	Quinto	
Sí	7	1	6	6	2	6	28
No	2	12	8	2	11	6	41
Total	9	13	14	8	13	12	69

En esta tabla se presentan los problemas inventados por los participantes de acuerdo con la información resumida algunos de los aprendizajes esperados para 1°, 3° y 5° grados de Primaria. De los problemas en la Situación A, 14 problemas inventados entre 1°, 3° y 5° grados, sí corresponden a lo mencionado en el resumen de los aprendizajes esperados por la SEP en la Hoja 1. En la situación B, 14 problemas inventados entre 1°, 3° y 5° grados también corresponden a los aprendizajes esperados por la SEP referidos en la Hoja 1, aun cuando ellos no tuvieron acceso a esa información

■ DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En los resultados obtenidos se observó que tanto en la situación A como en la situación B se presentan problemas no aritméticos en primer grado, pero en la situación A también se presenta un

problema no aritmético en quinto grado; conviene recordar que los estudiantes de la situación A tenían la información relacionada con los aprendizajes esperados en los Programas de la SEP.

Un dato relevante es que los participantes mostraron preferencia para plantear más problemas simples aditivos que multiplicativos, situación que se asemeja con los resultados obtenidos en la investigación realizada por Ayllon (2004), donde se plantearon seis veces más problemas aditivos que multiplicativos.

Los problemas compuestos se presentan en la mayoría de los problemas aritméticos inventados, observando la combinación de operaciones aritméticas distintas o la repetición de una misma varias veces para encontrar la solución al problema dado. La mayoría de los problemas compuestos son de dos procesos, con menor frecuencia los de tres y aún menos los de cuatro procesos.

Se observó que en la mayoría de los problemas aritméticos inventados tanto en la situación A como en la situación B, para primer grado, se presenta el manejo de números naturales hasta el 100, operaciones de suma y resta con dos dígitos, de acuerdo con los contenidos seleccionados de Programas de estudio de la SEP (2009) para esta investigación.

Para poder llevar a cabo la clasificación de los problemas aritméticos inventados, fue necesario resolverlos, lo que generó un debate para determinar qué procesos y operaciones se deberían realizar, para su resolución. Se observó que los problemas se pueden resolver mediante diferentes operaciones aritméticas. Ante esta situación se consensó considerar el grado para el que fueron destinados y la selección de los contenidos para cada grado de acuerdo con los Programas de estudio de la SEP (2009).

Se puede decir que, no todos los enunciados inventados por los estudiantes cumplieron con las características para ser considerados problemas aritméticos. Contenían datos numéricos, tenían una pregunta, contaban con un contexto, sin embargo no se aplicaban operaciones aritméticas, característica fundamental de acuerdo a Cázares et al, (1998), Puig y Cerdán (1995), pero la mayoría de los enunciados 63 de 72 cuentan con las características establecidas por los autores.

Los estudiantes inventaron más problemas aritméticos simples donde se realiza una suma o resta que aquellos donde se realiza una multiplicación o una división.

Para identificar si el contenido de los problemas inventados corresponde con los contenidos curriculares en 1º, 3º y 5º grados de primaria, establecidos por la SEP 2009, se obtuvo que la mayoría de los problemas inventados por los participantes 41 de 69 no cumplen con los contenidos seleccionados con los aprendizajes esperados en los Programas estudio de la SEP 2009 y solo 28 de 69 sí corresponden. De los 28 que si corresponden se observa que hay mayor correspondencia en los problemas aritméticos dirigidos a primer y quinto grados en ambas situaciones.

En relación con identificar si los estudiantes que recibieron información de los contenidos aritméticos que se revisan en 1º, 3º y 5º grados de primaria inventan problemas acordes con el grado escolar al que va dirigido. En el caso de la situación A, que es la que recibió información de los contenidos, se aprecia que 7 de 9 problemas inventados para primero, están acordes los contenidos con el grado escolar, mientras que para tercero 1 de 13 presentan correspondencia con el grado, y para quinto grado 6 de 14 si corresponden con los contenidos curriculares seleccionados, los resultados obtenidos en la situación B, donde, en primer grado 6 de 8 si

corresponden, en tercer grado 2 de 13 sí corresponden y en quinto grado 6 de 12 si tienen correspondencia, por lo que no se puede concluir que la información proporcionada de los contenidos haya influido para inventar problemas acordes con el grado escolar al que van dirigido,

La resolución de problemas está establecida en los Programas de estudio de la SEP 2009 como forma de enseñanza de las matemáticas, sería interesante, como propuesta, que en los contenidos curriculares de la Materia Modelos de Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas se incluyeran dichos Programas, e ir a la par de las nuevas formas de enseñanza de las matemáticas.

Se considera que de la presente investigación empírica sobre la invención de problemas aritméticos planteados por estudiantes de la Licenciatura en Psicología Educativa de la Universidad Pedagógica Nacional, se pueden desprender otros estudios.

1 Se podría replicar la investigación incluyendo la resolución del problema, por parte de los inventores, ya que no se puede asegurar que los puedan resolver. Si los inventores resuelven sus propios problemas aritméticos proporcionan información acerca de las estrategias de resolución que esperan, y se podría detectar si utilizan algunas de las propuestas por Polya (1989).
2 Otra propuesta es que algunos alumnos de Educación Básica Primaria a quienes van dirigidos los problemas aritméticos los resolvieran para corroborar si son problemas para ellos, si son resolubles con los elementos con que cuentan.
3 Una investigación más sería en la modificación del estímulo visual:
   - La invención de problemas aritméticos con y sin imagen en una misma población para detectar si la imagen facilita o dificulta la actividad.
   - Contrastar si una imagen en movimiento facilita o no la creación de problemas aritméticos en relación con una imagen estática.
4 Realizar una investigación donde se efectúe una entrevista a los inventores de los problemas aritméticos para indagar:
   a. Qué estaban pensando en el momento de la invención.
   b. Qué conocimientos pusieron en práctica.
   c. Cuáles fueron los pasos que siguieron.
   d. Cuáles fueron las dificultades a las que se enfrentaron.

■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ayllón, B., Castro, E. y Molina, M. (2008). Invención de problemas por alumnos de educación primaria. En: M. Molina, P. Pérez-Teyteca y M.A. Fresno (eds.). *Investigación en el aula de matemáticas* (pp. 67-84). Granada: SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Ayllón, M. (2004). *Invención de problemas con números naturales, enteros negativos y racionales*: *Tarea para Profesores de Educación Primaria en formación*. Memoria de Tercer Ciclo. Granada: Universidad de Granada.

Baxter, J. (2005). Some Reflections on Problems Posing: A Conversation with Marrior Walter. *Teaching Children Mathematics, 12*(3), 122-128.

Castro, E. (2008). Resolución de Problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. *Investigación en Educación Matemática XII*. XII SEIEM. 113-140.

Castro, E., Castro, E., Rico, L., Gutiérrez, J., Tortosa, A., Segovia, I. González, E. Morcillo, N. y Fernández, F., (1997). *Problemas aritméticos compuestos de dos relaciones.* En Sierra, M. y Rico, L., (Eds.). *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 64-77). Zamora: Universidad de Granada.

Cazares, J. (2000). *La invención de problemas en escolares de primaria. Un estudio evolutivo*. Memoria de tercer ciclo. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Cazares, J. Castro, E. Rico, L. (1998). La invención de problemas en escolares de primaria. Un estudio evolutivo. *Aula, 10*, 19-39.

English, L.D. (1997). The Development of Fifth-grade Children's problem posing abilities. *Educational Studies in Mathematics, 34*(3), 183-217.

Polya, G (1989). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas Aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

SEP. (2009). *Educación Básica. Primaria. Plan de estudios.* México. SEP.

Silver, A. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For the Learning Mathematics, 14*(1), 19-28.

Silver, A. y Cai, J. (2005). Assessing student`s Mathematical Problem Posing. *Teaching children Mathematics, 12*(3), 129-135.

UPN (1990). *Programa de la materia de Modelos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas*. México: Licenciatura de Psicología Educativa, UPN.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas

Vicente, S., Orrantia y J., Verschaffel, I. (2008). Influencia del conocimiento matemático y situacional en la resolución de problemas aritméticos verbales: ayudas textuales y gráficas**.** *Infancia y Aprendizaje, 31*(4), 463-483.

MODELACIÓN COMO PRÁCTICA GENERADORA DE SABERES. LECTURA Y CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICAS EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

Santiago Ramiro Velázquez, Josip Slisko Ignjatov, René Santos Lozano
Secretaría de Educación Guerrero, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Universidad Autónoma de Guerrero (México)
sramiro@prodigy.net.mx,jslisko@fcfm.buap,santos_oasis@hotmail.com

Palabras clave: modelación, graficación, práctica, usos, significados

Key words: modeling, charting, practice, usage, meanings

RESUMEN: En este artículo reportamos avances de una investigación en proceso sobre lectura y construcción de gráficas, enmarcada en el manejo de la información, uno de los ejes que vertebran las matemáticas en educación secundaria. Varias investigaciones consideran la relevancia de que los estudiantes desarrollen habilidades para modelar y resolver problemas. Consideramos la modelación como práctica social generadora de saberes y medio para el aprendizaje de las matemáticas. Se documenta como se escolariza el saber al abordar lectura y construcción de gráficas y se pretende analizar diversas evidencias sobre lo que hacen profesores y alumnos cuando abordan este contenido, y estructurar y gestionar una propuesta para trabajarlo como práctica de modelación.

ABSTRACT: In this article we report progress of ongoing research on reading and graphic construction, part of the management of information, one of the pillars that underpin mathematics in secondary education. Several studies consider the importance of students to develop skills to model and solve problems. We consider modeling as a social practice and knowledge generating means for learning mathematics. It documents how knowledge is schooled in dealing with reading and construction of printing and is intended to analyze various evidence on what teachers and students do when addressing the content and structure and manage a proposal to work it as a practice of modeling.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se dan a conocer avances de una investigación en proceso sobre lectura y construcción de gráficas, que se enmarca en el manejo de la información, uno de los ejes que vertebran las matemáticas en educación secundaria, en unidad con los otros dos ejes sentido numérico y pensamiento algebraico, y forma, espacio y medida, en educación secundaria (alumnos de 12 a 15 años).

Varias investigaciones consideran la relevancia de que los estudiantes desarrollen habilidades para modelar y resolver problemas en contextos auténticos. Modelar es un "proceso que utiliza principios y técnicas esencialmente matemáticas, para el análisis de situaciones reales" (Bassanezi y Salett, 1997, p. 13). Córdoba (2011) considera que la modelación es una práctica que ejercen estudiantes y profesores en diversos escenarios y contextos, en respuesta a una situación o fenómeno de interés para los alumnos. En este sentido los partidarios de la modelación en la enseñanza consideran que los estudiantes pueden elegir un tema de su interés, investigar al respecto, y con la orientación del profesor elaborar un modelo que represente y explique lo investigado. Nosotros sostenemos que abordar la lectura y construcción de gráficas como una práctica de modelación, asegura que los alumnos resuelvan problemas en forma autónoma y a la vez logren ser autónomos.

En esta dirección se puede conjeturar que la lectura y construcción de gráficas como práctica de modelación, es un medio para el aprendizaje de las matemáticas. De manera que es necesaria la estructuración de acciones didácticas orientadas a dicha lectura y construcción. A fin de que los alumnos conciban ideas sobre patrones, cambio y variación, y aseguren una flexibilización de su pensamiento para argumentar, explicar y hacer cambios para obtener resultados deseados, acordes con las condiciones de la situación que se modela (Velázquez y Santos, 2013).

Consideramos que en la actividad docente, por lo general se escolariza el saber referente a la lectura y construcción de gráficas, lo que dificulta reconocer sus usos, significados y construcción a través de la modelación como práctica social generadora de saberes. Modelación como práctica social es un proceso de análisis y explicación de situaciones de relevancia social, en donde los participantes no se limitan a verificar lo que hacen sino a problematizar del por qué lo hacen así. Al revelar las condiciones del por qué, cómo, para qué lo hacen y cómo se transforman al ejercer esta práctica (Cantoral, 2013).

Evidencias de esta escolarización, se tienen en términos de que el número de alumnos que finalizan la educación secundaria en México es menor que la media de la OCDE (Del Valle, 2015), y una de las razones de esta problemática es que la escuela no ofrece ambientes atractivos de aprendizaje que aseguren una formación integral de los estudiantes. De modo que se puede afirmar que la construcción social de saberes en distintos escenarios, a través de una práctica de modelación, contribuye a que los alumnos sean conscientes de cómo se transforman y continuar en este sentido.

Documentamos esta escolarización por medio de un estudio del estado del arte que revela varias tendencias en la modelación. Como práctica social generadora de saberes, como medio para el aprendizaje de las matemáticas, como simulación-experimentación y para la formación ciudadana. El objetivo es analizar, diversas evidencias sobre lo que hacen profesores y alumnos cuando

abordan este contenido y estructurar y gestionar una propuesta para trabajarlo como práctica de modelación.

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

La metodología que se utiliza en este trabajo es de corte cualitativo en términos de estudio de casos, y se integra con diversas actividades para el logro del objetivo de la investigación. En este marco se hace un análisis del estado del arte a fin de explicar diversas posiciones sobre la modelación como práctica social, en el campo de lectura y construcción de gráficas. Se analizan los diarios de campo de quince alumnos de cinco escuelas secundarias de Acapulco, Gro. y se realiza una entrevista participativa con ocho profesores a fin de que realicen una evaluación cualitativa de las producciones de los alumnos, de manera que en colaboración con quienes hacen esta investigación se estructure una propuesta metodológica, que considere la lectura y construcción de gráficas por medio de la práctica de modelación.

ESTADO DEL ARTE

En este apartado se analizan diversas investigaciones que estudian la modelación o la graficación, a fin de reconocer tendencias en este ámbito y aportes sobre la construcción de saberes en escenarios escolares y no escolares.

Cordero y Flores (2007) hacen un estudio del uso de las gráficas por medio de un análisis del discurso matemático plasmado en los libros de texto de educación básica. Se enfocan en el uso de las gráficas a fin de revelar la función de esta práctica social y las formas de desarrollo del uso del conocimiento. Suárez y Cordero (2010), sostienen la pertinencia didáctica del uso de las gráficas en la modelación y explican bases epistemológicas que aportan argumentos, sobre las potencialidades didácticas del uso de gráficas en la modelación. Estos argumentos son “La gráfica antecede a la función, la gráfica es argumentativa y las gráficas tienen un desarrollo” (Suárez y Cordero, p. 223-225).

Por su parte Muñoz (2010), estudia un campo de prácticas sociales como una unidad de análisis abierta, en el sentido de entrelazar vías entre las dimensiones epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural, y con otras dimensiones. En la generación y difusión de saberes, donde lo conceptual y algorítmico se produce en su concepción más amplia e integrados.

Dolores (2007) explora qué lecturas e interpretaciones hacen los alumnos de educación básica, de las gráficas publicadas en diversos medios de información. Con el propósito de analizar concepciones propias de los alumnos y el papel de las gráficas en la comprensión de conceptos o propiedades matemáticas y desarrollo del pensamiento. Torres (2004) investiga sobre la modelación y las gráficas, constatando que los alumnos del nivel medio superior confunden las características de una recta con su altura y su pendiente.

Un aspecto relevante en esta lectura y construcción que está ausente en la escuela, corresponde a las condiciones de surgimiento de las gráficas, en las que los trabajos de Oresme (Boyer, 1999) plasmados en su tratado *figuración de cualidades*, revelan la cuantificación de las formas variables. En este tratado se puede ver que las figuras geométricas y las proporciones matemáticas son importantes en el estudio de fenómenos de variación.

Sostenemos que la lectura y construcción de gráficas que se trabaja en diversos momentos y a lo largo de los tres grados de educación secundaria, se aborde como práctica de modelación en la que las personas a partir de una serie de situaciones, seleccionen las de su interés, investiguen al respecto y construyan modelos que representen y expliquen la relevancia de estas situaciones. De manera que como se afirma en líneas anteriores, los alumnos expresen cómo trasforman y cómo se transforman al realizar esta práctica. "… la modelación posee su propia estructura, está constituida por un sistema dinámico, puede llevar a cabo realizaciones múltiples y hacer ajustes a su estructura para llegar al resultado deseable, es un medio que propicia el razonamiento y la argumentación, busca explicaciones a un rango y enfatiza invariantes, trae una idea en una realización para satisfacer un conjunto de condiciones". (Suárez, y Cordero, 2010, p. 2).

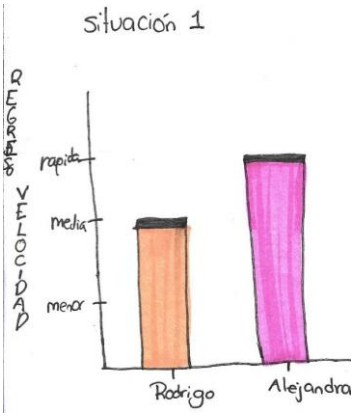
Como se puede mirar en estas posiciones se refleja la necesidad de un rediseño del discurso matemático escolar, en el que predominen las prácticas sociales, particularmente la modelación. De manera que estas prácticas sean un fundamento en la construcción de saberes dentro y fuera de la escuela, en un ambiente de equidad donde nadie impone y los alumnos como integrantes de grupos poblematizan sobre lo que hacen, por qué lo hacen así, cómo transforman las situaciones hacia el logro de objetivos y cómo ellos se transforman.

ESTA INVESTIGACIÓN

Una experimentación

Compartimos la idea de que la modelación como práctica social generadora de saberes es un medio para el aprendizaje de las matemáticas, en este sentido gestionamos con un grupo de alumnos de 8º grado situaciones de modelación de movimiento, en los patios de la escuela. Una de estas situaciones –situación 1- consiste en que un alumno se desplaza de un sitio a un lugar determinado a una velocidad constante, regresa al lugar de partida a igual velocidad. Otro alumno hace un desplazamiento similar con velocidad constante pero diferente en la ida a la del regreso. La participación del grupo consiste en actuar y visualizar lo que pasa en esta situación y explicar lo que sucede considerando distintos modelos. Los trabajos de los alumnos evidencian saberes parcelados, ya que no integran ideas, nociones, conceptos, significados y estructuras con métodos, técnicas y procedimientos (Muñoz, 2010), ver Fig. 1. De la respuesta y proceder en la situación 1, se puede conjeturar que la falta de integración de saberes, hace que los alumnos miren lo superficial de un acontecimiento. También suponer que si ejercemos la modelación como se sostiene en líneas anteriores, haríamos una explicación que incluyera distintos modelos que describen la situación planteada. De manera incipiente se mira este proceder en la participación grupal, con la orientación del profesor con quien previamente socializamos la pertinencia de esta práctica social.

Figura 1. Producción de uno de los alumnos similar a la de otros compañeros, que refleja un proceder y respuesta parcial, o bien, diferente a la situación 1



Los diarios de campo de alumnos

En este apartado realizamos un análisis de las producciones de los estudiantes al resolver tareas y problemas en el ámbito de lectura y construcción de gráficas. En estos diarios se muestran saberes parcelados y escolarizados como lo afirmado en líneas anteriores, de manera que impera la reproducción de ideas de los profesores y de los libros que utilizan como textos oficiales. Así se evidencia cuando se plantea a los alumnos una situación sobre la reducción del porcentaje de población de diversos países, que vivían o viven con 2.5 dólares diarios (Díaz, 2013). Un fragmento de esta información está en la tabla de la Fig. 2.

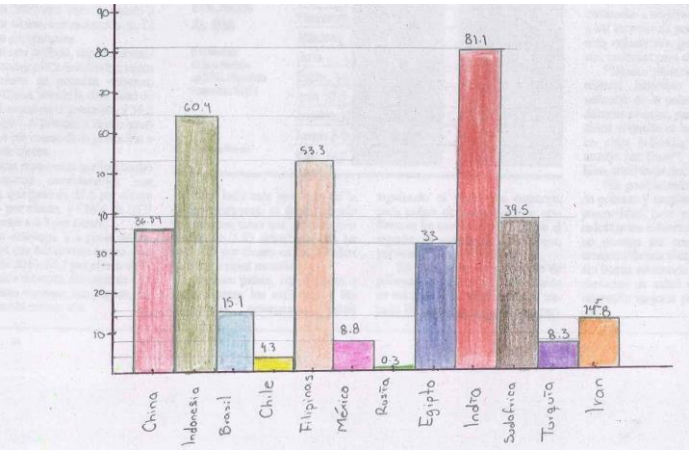
Disminución del porcentaje de población que vivía o vive con 2.5 dólares diarios, en el período de 1995 a 2010.

Figura 2. Fragmento de una tabla sobre la reducción del porcentaje de población.

País	Porcentaje de Población que en el año 2010 vivía con menos de 2.5 dólares	Porcentaje de reducción de esta población
China	36.5	54.5
Brasil	15.5	22.5
México	8.5	13.0

Se trata de que los alumnos hagan una lectura de esta información y la comuniquen en los formatos adecuados (uso de gráficas, tablas, textos, pertinentes), la Fig. 3 muestra el trabajo de algunos alumnos al respecto.

Figura 3. Gráfica que elaboran algunos alumnos con base en una tabla de reducción de porcentaje, en donde solo consideran el porcentaje de población del 2010 de diversos países, sin considerar el porcentaje de reducción de dicha población

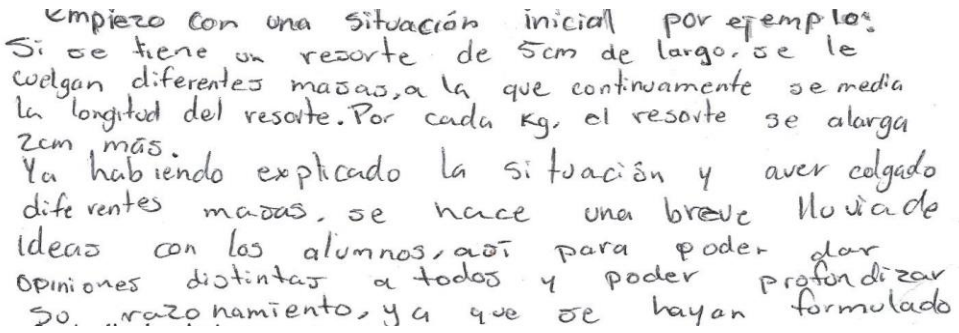


En este estudio preliminar de los diarios de los alumnos se constata la problemática en el ámbito que se investiga y la pertinencia de rediseñar el trabajo, a través de una práctica social de modelación.

Trabajo con los profesores

En la primera fase de la entrevista participativa con los profesores se plantea cómo abordan con sus alumnos la lectura y construcción de gráficas en los siguientes términos. Expliquen de manera breve y concisa cómo abordan con sus alumnos el siguiente apartado: 8.4.5.Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal entre dos conjuntos de cantidades. Representación de la variación (SEP, 2011, p. 42). Las explicaciones de los participantes reflejan aspectos de experimentación y modelación, más centradas en los profesores que en los alumnos, muestran su predominio y no se miran rudimentos de la modelación como práctica social. Miremos las producciones de la profesora A en el siguiente manuscrito.

Figura 4. Respuesta de la profesora A, a la primer pregunta de la entrevista


Empiezo con una situación inicial por ejemplo:
Si se tiene un resorte de 5cm de largo, se le
cuelgan diferentes masas, a la que continuamente se media
la longitud del resorte. Por cada kg, el resorte se alarga
2cm más.
Ya habiendo explicado la situación y aver colgado
diferentes masas, se hace una breve lluvia de
ideas con los alumnos, así para poder dar
opiniones distintas a todos y poder profundizar
su razonamiento, ya que se hayan formulado

Otra situación planteada consiste en el estudio de opiniones predeterminadas a fin de explorar puntos de vista de los profesores, como se muestra a continuación. Analicen estos casos:

El profesor B sostiene que se atienda de manera puntual el modelo didáctico propuesto en los documentos oficiales, en las diversas actividades que realizan profesores y alumnos a fin de lograr los aprendizajes esperados.

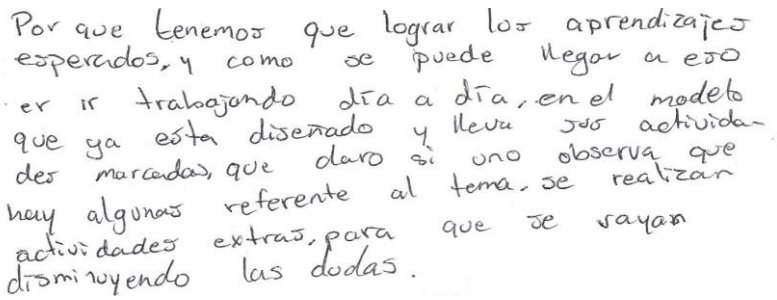
Por su parte la profesora C considera que los profesores habrán de superar constantemente los desafíos que se les presentan en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, para ello requieren de un empoderamiento académico continuo.

¿Con cuál de las dos opiniones estás de acuerdo?:

¿Por qué razones?:

Los criterios de los profesores están divididos casi por mitad, los que están de acuerdo con el docente B argumentan que es preferible seguir el modelo didáctico propuesto por la SEP, como se muestra en la siguiente descripción de una de las profesoras.

Figura 5. Argumentos de los profesores que comparten la propuesta del docente B


Por que tenemos que lograr los aprendizajes esperados, y como se puede llegar a eso es ir trabajando día a día, en el modelo que ya esta diseñado y lleva sus actividades marcadas, que claro si uno observa que hay algunas referente al tema, se realizan actividades extras, para que se vayan disminuyendo las dudas.

En tanto que los que están con la opinión de la profesora C, sostienen que los docentes deben ser creativos y disponer de recursos académicos y materiales para atender las necesidades emocionales e intelectuales de los alumnos.

REFLEXIONES FINALES

Lo que reportamos en este trabajo es preliminar, ya que falta un análisis a profundidad de los diarios de campo de los alumnos y de las entrevistas participativas con los profesores. Sobre la propuesta metodológica, que considere la lectura y construcción de gráficas por medio de la práctica de modelación, no se hace un reporte completo debido a que está en proceso de estructuración y gestión. No obstante se constatan avances en los trabajos de los profesores con quienes ya socializamos la modelación como práctica social generadora de saberes.

En el mismo sentido las diversas explicaciones y evidencias incluidas en este artículo, dan cuenta de la problemática en este campo y conforman una primera base de orientación, para rediseñar el discurso matemático escolar. En términos de una práctica de modelación, en el ámbito de lectura y construcción de gráficas. En donde los alumnos son los principales participantes, sin imponerles ideas predeterminadas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bassanezi, R. y Salett, M. (1997). Modelación matemática: una antigua forma de investigación-un nuevo método de enseñanza. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas* (35), 13-25.

Boyer, C. (1999). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. México: Gedisa Editoral.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 10 (1), 7-38.

Córdoba, F. (2011). *La modelación en Matemática Educativa. Una práctica para el trabajo de aula en ingeniería*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, México.

Del Valle, Z. (2015, 2 de Octubre). La deserción es uno de los principales problemas educativos en México, dice directora de la OCDE. *EL SUR*, p. 27.

Díaz, U. (2013, 14 de Octubre). Es México la quinta economía emergente que más ha reducido la pobreza extrema en 15 años: BM. *EL SUR*, p. 30.

Dolores, C. (2007). Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 10 (1), 69-95.

Muñoz, G. (2010). Hacia un campo de prácticas sociales como fundamento para rediseñar el discurso escolar del cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13 (4-II), 283-302.

Suárez, L. y Cordero, F. (2010). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13 (4), 319-333.

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programas de estudio de matemáticas en educación secundaria*. D. F, México: Autor.

Torres, A. (2004). *La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, México.

Velázquez, S. y Santos, R. (2013, Octubre). Lectura y construcción de gráficas en educación secundaria. *En resúmenes del XLVI Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, realizado en la Universidad Autónoma de Yucatán*, Mérida, México.

DOCENTES DEL ÁREA MATEMÁTICA FRENTE AL USO DE AULAS VIRTUALES EN LA FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE JUJUY (ARGENTINA)

Marisa Digión, Virginia Jure, Graciela Maldonado, Cecilia Rodriguez
Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Jujuy (Argentina)
marisadigion@gmail.com, virginiajure@gmail.com, mgmdec@gmail.com,

Palabras clave: matemática, aula virtual, docentes, actitud, capacitación

Key words: mathematics, virtual classrooms, professors, attitude, training

RESUMEN: Este trabajo presenta los resultados del estudio realizado a docentes del Área Matemática de una Unidad Académica Universitaria Argentina respecto a la actitud y la capacitación recibida, sobre la implementación de aulas virtuales como complemento del aula presencial. La investigación tuvo un enfoque mixto y alcances exploratorio, descriptivo y explicativo. Los datos recogidos se procesaron con las herramientas de la estadística descriptiva y del análisis cualitativo. Las conclusiones indican que, si bien los docentes tienen una actitud medianamente favorable para desarrollar el proceso educativo utilizando aulas virtuales, el impacto de la capacitación recibida sobre el procedimiento para hacerlo, ha sido bajo.

ABSTRACT: This paper presents the results of a study conducted on professors of the Mathematics Department in this Argentinean university academic as regards the attitude and training received, about the implementation of virtual classrooms as a complement of the traditional classroom. The research had a mixed approach as well as an exploratory, descriptive and explanatory scope. The data collected were processed with the descriptive and quantitative analysis tools. Conclusions show that, even though professors have a fairly favorable attitude to develop the educational process using virtual classrooms, the impact of the training received over the procedure to perform it, has been low.

INTRODUCCION

En la última década del siglo XX surge y se extiende a escala global un hecho que exige a la Educación revisar, una vez más, las formas de favorecer el acceso al conocimiento. La revolucionaria aparición de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs) y su irrupción en el ámbito educativo plantea a sus actores el desafío de repensar el modelo pedagógico tradicional. Si bien "integrar las tecnologías digitales en las aulas y los centros educativos y redefinir los contenidos culturales del curriculum parecen medidas urgentes" (Área Moreira, 2009, p.11), en este proceso resulta vital realizar una profunda reflexión sobre de qué manera hacer uso de ellas sin sobrevalorar su importancia sobre los restantes elementos del sistema que regula la enseñanza y el aprendizaje.

La forma en que las TICs pueden incorporarse a la Educación se ha convertido en un espacio abierto de investigación, en el que muchos han puesto sus esfuerzos para generar una nueva ecología conceptual que sostenga el denominado modelo virtual de educación. La multiplicidad de aristas desde las cuales se producen los distintos análisis da cuenta hoy de un gran abanico de conceptualizaciones, justificaciones teóricas y resultados de experiencias concretas y contextualizadas.

En particular, este trabajo presenta una de las líneas de indagación planteada en el marco de un proyecto de investigación relacionado con la factibilidad y la conveniencia de implementar aulas virtuales como complemento del aula presencial en una Institución Universitaria de la República Argentina. Dicha línea tiene que ver con *los docentes*, con su actitud respecto a la incorporación de estos entornos virtuales como parte del proceso de enseñanza y aprendizaje y, con el impacto real que ha tenido en la práctica, la capacitación institucional recibida por los mismos sobre habilitación y uso de las aulas virtuales. Si bien la citada investigación fue realizada sobre la población de docentes que integran las distintas Áreas Académicas de la Institución Universitaria de referencia, en esta instancia, solo se presentan los resultados y las conclusiones obtenidas en el abordaje a docentes pertenecientes al Área Matemática.

MARCO REFERENCIAL

La adopción del término sociedad del conocimiento en la educación universitaria busca innovar en la organización de los espacios y las prácticas formativas para promover la investigación, impulsar la integración de los sectores productivos y viabilizar la interdisciplinariedad (Fandiño Parra, 2011). Este posicionamiento académico requiere generar ambientes que integren el uso de las TICs para que el alumno tenga una comprensión y una gerencia más activa en el proceso educativo a través de materiales, actividades y proyectos multimediales.

Especialistas en tecnología educativa sostienen que la incorporación de estas herramientas digitales permitiría a los nativos digitales que hoy transitan las aulas de la Educación Superior lograr más y mejores aprendizajes. La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO) va un paso más allá sobre la calidad y la significatividad de dichos aprendizajes; sostiene que estas tecnologías permitirían "desarrollar sociedades más democráticas e inclusivas, que fortalezcan la colaboración, la creatividad y la distribución más justa del conocimiento científico y que contribuya a una educación más equitativa y de calidad para todos" (2013, p.10).

Incorporar las TICs a las aulas de cualquier nivel de enseñanza requiere, esencialmente, de la adopción un nuevo paradigma educativo en el que tenga cabida el buen uso de las tecnologías digitales ya que, como lo expresa Área Moreira (2009), el énfasis debe ser puesto en lo educativo y no en lo tecnológico.

Guido y Vercino (2010) relatan que las Universidades Argentinas empezaron en el año 1990 a incorporar las TICs para la gestión administrativa. Lenta pero sostenidamente, dichas tecnologías fueron marcando su presencia en el contexto académico. Actualmente una de las formas en la cual lo hacen es integrando parte de espacios denominados aulas virtuales. Digión, Marcoleri y Montalvetti se refieren a ellas diciendo "es un aula […] que puede ser parte de un aula presencial o independiente de ella; es una herramienta dentro de la Educación que utiliza las tecnologías digitales para desarrollar nuevas estrategias de enseñanza y de aprendizaje" (2014, p.1876).

Es en este contexto donde surge la figura del docente. Éste, necesariamente, se ve obligado a modificar un modelo de enseñanza sostenido durante mucho tiempo, modelo inapropiado al momento de pensar en las TICs como una opción válida para revertir los tradicionales, y muchas veces poco exitosos, caminos de acceso al conocimiento.

> Con el advenimiento de las nuevas tecnologías, el énfasis de la profesión docente está cambiando desde un enfoque centrado en el profesor y basado en clases magistrales, hacia una formación centrada principalmente en el alumno dentro de un entorno interactivo de aprendizaje. El diseño e implementación de programas de capacitación docente que utilicen las TICs efectivamente es un elemento clave para lograr reformas educativas profundas y de amplio alcance (UNESCO, 2004, p.5).

Autores como Cabero (2010) y Santoveña (2010), sostienen que las TICs despiertan mucho interés en los docentes; éstos las consideran útiles y beneficiosas para motivar y desarrollar el proceso de enseñanza y aprendizaje. No obstante, al indagarlos respecto a las posibilidades reales de la implementación de las mismas, ponen de manifiesto un conjunto de barreras que, en la realidad –por lo menos en la actual-, dificultarían tal acción: tiempo, acceso, recursos y alfabetización digital.

Pensar en las TICs como parte del proceso educativo es pensar en incorporar una importante innovación. Como tal, y como ha ocurrido históricamente, las mismas son resistidas inicialmente, hasta que surge el conocimiento y el reconocimiento de que dicha innovación coadyuvaría a favorecer el acceso a los saberes por parte de los estudiantes. Havelock, citado por López Noguero (2007), realiza una clasificación sobre los factores que tienden a provocar dichas resistencias. Entre ellos menciona a los factores input, que son los que obstaculizan los cambios desde dentro de una institución educativa; en esta categoría aparecen los docentes.

Sobre el tema Sunkel (2006) puntualiza respecto a cuáles serían las estrategias para superar estas resistencias y otorgar un grado de seguridad mayor a los profesores. Por una parte, deben aprender a manejar equipos informáticos y, por otra, deben a aprender a utilizarlos con propósitos educativos. Esto también les significaría imbuirse en una nueva cultura y expandir los horizontes educacionales. Sin lugar a dudas, llegar a este punto óptimo, requerirá un cambio de actitud en los profesores para poder superar la percepción de amenaza que sienten: "[…] que las tecnologías reducen o degradan el rol del profesor" (*op.cit*, p.44).

De la última cita se puede inferir que, quizás, el principal factor de rechazo/reticencia de las TICs por parte de los educadores es el temor a ser desplazados en lo que han hecho toda su vida: haber sido la fuente principal del conocimiento.

Son precisamente *los docentes*, el objeto de estudio que se aborda en este escrito; en particular lo son un grupo de éstos que integran el Área Matemática de la Facultad de Ciencias Económicas (FCE) de la Universidad Nacional de Jujuy (UNJu).

TRABAJO DE CAMPO

El Contexto

Distintas Universidades de la República Argentina se encuentran realizando, desde hace algunos años, experiencias pedagógicas-tecnológicas relacionadas con la implementación de aulas virtuales, ya sea como complemento educativo del aula presencial (Blended Learning) o como espacio único de enseñanza y aprendizaje (Electronic Learning). Un indicador indiscutido de ello es la gran cantidad de trabajos que se exponen en eventos académicos relacionados con distintas áreas del conocimiento.

En este sentido, a partir del mes de abril del año 2011, la UNJu impulsó e implementó un proceso de capacitación sistemática a su planta docente en el uso de las TICs utilizadas en el contexto de aulas virtuales. Desde entonces son más de diez las cohortes de profesores pertenecientes a las distintas Unidades Académicas e Institutos los que han iniciado su alfabetización digital. Dicha formación resultó a sus destinatarios una actividad totalmente enriquecedora y movilizadora. Por tal razón, convencidos de las potencialidades de esta herramienta virtual, algunos de los primeros capacitados estimaron conveniente la implementación inmediata de aulas virtuales en las materias donde desempeñan sus funciones. Tal es el caso de los pertenecientes a la FCE, Unidad Académica integrante de la UNJu, que en el segundo cuatrimestre del ciclo lectivo 2011, las habilitaron en carácter de experiencia piloto. El camino emprendido no fue fácil. Se tuvieron que sortear múltiples inconvenientes. Precisamente fueron éstos los que llevaron al conjunto de docentes que se habían involucrado con el funcionamiento de las aulas virtuales a interrogarse sobre si el desafío encarado en cuanto a modificar la forma de enseñanza era una cuestión realmente viable y con beneficios académicos suficientes que compensaran las situaciones problemáticas identificadas. Así nació el proyecto de investigación “Aulas Virtuales en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Jujuy. Factibilidad y Conveniencia”, aprobado y financiado por la Institución Universitaria de Nivel Superior. Es en el marco del citado proyecto donde se definieron varias categorías de análisis, siendo una de ellas la de *los docentes*.

Este trabajo presenta el abordaje y los resultados de dos aspectos indagados sobre los mismos considerando, del universo involucrado, solo a los docentes integrantes del Área Matemática. Por tal razón se detalla a continuación la experiencia llevada a cabo en general sobre toda la planta docente de la FCE y los resultados y las conclusiones solo sobre los profesores que forman parte de las cuatro materias de la citada Área Académica.

La experiencia

La categoría de indagación *docentes* fue analizada en tres etapas consecutivas.

- La primera etapa tuvo como objetivo recabar datos sobre la condición de los profesores de la FCE en lo que se refiere a la capacitación institucional brindada sobre implementación de aulas virtuales. Cabe acotar que la totalidad de la planta docente debía capacitarse pero era opcional el momento en el cual decidiera realizarla (se implementaron diferentes cohortes).

A partir de las planillas proporcionadas por las autoridades de la UNJu y los organizadores de la capacitación institucional se realizó una investigación documental que derivó en la conformación de una base de datos. A partir de ella se pudo determinar, entre otras cuestiones: la cantidad de docentes capacitados de la FCE, por cohorte de capacitación, con la indicación de su condición final -Aprobado, Desaprobado, Abandonó, No inició la capacitación- y, los cargos ocupados por los capacitados en cada una de las cátedras en la que se desempeñan –profesores y auxiliares docentes-. Los datos recolectados de esta instancia fueron procesados a partir de las técnicas de la estadística descriptiva.

- En la siguiente etapa se planteó como objetivo conocer la dirección y la intensidad de la actitud de los docentes respecto a la utilización y la practicidad de las tecnologías digitales en el ámbito educativo.

Con tal fin se aplicó, en los meses de febrero y marzo del año 2013, una encuesta a la totalidad de docentes de la Unidad Académica. Para llegar a cada docente se dividió a esta población según Área Académica de pertenencia (Matemática, Contable, Administración, Economía y Ciencias Sociales, y Jurídica). El formulario utilizado constaba de dos partes. En la primera, se solicitaban datos identificatorios del docente y referidos a su situación etaria, laboral académica y profesional; también se incorporaron preguntas cerradas sobre la utilización que realizaban de la computadora y de Internet. En la segunda parte, se insertó la herramienta utilizada por Prach (2007); tal elección se debió a que la misma, que perseguía idéntico objetivo, ya había sido validada e incluía un conjunto de sentencias de particular interés para la investigación. Integrada por veinte aseveraciones, el instrumento de toma de datos fue elaborado a partir de una escala Likert. Permitía al encuestado manifestar su acuerdo o desacuerdo con cada una de las afirmaciones, pudiendo elegir sólo una de las cinco posibles respuestas: Completamente de acuerdo, De acuerdo, Ni de acuerdo ni en desacuerdo, En desacuerdo, y Completamente en desacuerdo. El procesamiento de la encuesta fue, básicamente, cuantitativo. En particular, la metodología para procesar la segunda parte de la misma consistió en: cuantificar cada respuesta asociada a cada aseveración, con valores oscilantes entre 5 y 1 y, obtener el valor promedio del conjunto de valores individuales obtenidos para las veinte afirmaciones. Si el resultado se acercaba a 5, se concluía que el docente tenía una actitud completamente favorable a la utilización de las TICs; si se acercaba a 1, la actitud era completamente desfavorable; y si se aproximaba a 3, se entendía que el docente se mostraba indiferente entre las dos opciones anteriormente mencionadas. El formulario fue entregado a los profesores de manera presencial o a través del correo electrónico. Su devolución fue realizada por los mismos canales, contestando el 70% de los profesores del total de la planta docente de la FCE.

- Finalmente el objetivo de la tercera etapa fue establecer el impacto de la capacitación institucional recibida por los profesores a través de la habilitación efectiva y el uso de aulas virtuales como complemento del aula presencial en el contexto de las cátedras en la cual cada uno se desempeñaba.

A fin de generar los datos necesarios para indagar sobre este aspecto, se procedió a realizar dos acciones. La primera fue chequear la situación de cada cátedra en cuanto a la habilitación, o no, de aulas virtuales asociadas a ellas. Para ello, se buscó en el campus virtual UNJu Digital la información sobre las aulas virtuales implementadas para las diferentes cátedras de las carreras de Contador Público, Licenciaturas en Administración y Economía - ciclo de articulación- de la FCE. Tal acción respondió a la necesidad de conocer si las aulas virtuales habilitadas seguían funcionando de manera continua. Una segunda cuestión que se realizó fue la categorización de las posibles situaciones en las cuales se encontraba cada una de las cátedras de la Institución, tomando como indicadores a los siguientes: a) profesor a cargo de la cátedra capacitado, o no; b) docentes integrantes de la cátedra capacitados, o no -por lo menos uno de ellos- y c) aula virtual de la cátedra habilitada, o no; así se determinaron las diferentes situaciones que podrían darse al combinar los mismos. Paso siguiente se identificó a las cátedras residentes en la Facultad con las opciones citadas. Para cada una de las ocho posibles, se elaboraron preguntas bases para ser respondidas por el profesor a cargo de la cátedra – titular, asociado o adjunto-, las que les fueron formuladas en forma de entrevista; el objetivo fue conocer los motivos por los cuales cada cátedra se encontraba en una situación determinada. El grado de respuesta a esta consulta resultó alto (100%). El procesamiento de los resultados obtenidos se realizó aplicando técnicas del análisis cualitativo.

Resultados

Como se indicó precedentemente, si bien los resultados de la indagación, incluyen el abordaje realizado a la totalidad de la planta docente de la FCE de la UNJu, los que se consignan a continuación, se limitan a aquellos relativos sólo a los integrantes del Área Matemática. En algunos casos, éstos son relacionados con los correspondientes determinados para otras Áreas Académicas.

De las tres etapas emprendidas en la investigación se determinó que:

a) Solo el 33% de los docentes del Área Matemática manifestaron la intención de capacitarse, llevando a cabo la misma de manera efectiva y exitosa (calificación final: Aprobado). Cabe aclarar que, al momento de realizarse el corte para procesar los datos ya se había capacitado más del 50% de la planta docente de la Institución.

b) Del total de diez personas que realizaron la capacitación, solo una era profesor a cargo de cátedra y los restantes nueve eran auxiliares docentes.

c) De las cuatro asignaturas que integran el Área Matemática, la que mayor proporción de docentes capacitados tuvo fue Análisis Matemático (71%), seguida por Cálculo Financiero (40%), Algebra y Geometría Analítica (20%) y Estadística (17%).

d) El valor promedio de actitud de los docentes de Matemática (profesores y auxiliares docentes) respecto al uso y practicidad de las TICs en el ámbito educativo fue de 3,8 con una desviación estándar de 0,3. Tal valor muestra una inclinación *medianamente favorable* a la incorporación de las tecnologías digitales radicadas en la Internet, en sus respectivas cátedras.

e) Comparando el valor promedio de actitud de los docentes del Área Matemática con los obtenidos en otras Áreas Académicas, resulta el más bajo de todos ellos (Administración: 4,20; Jurídica: 4,00; Economía y Ciencias Sociales: 3,85 y Contable: 3,83).

f) Se pudo comprobar que, no necesariamente, el tener una actitud medianamente favorable a la incorporación de las tecnologías digitales al proceso educativo, se correspondía con la intención de capacitarse en la temática.

g) En cuanto a las situaciones que se plantearon al categorizar las cátedras del Área respecto a los tres parámetros tomados en consideración (profesor a cargo de la cátedra capacitado, o no; docentes integrantes de la cátedra capacitados, o no -por lo menos uno de ellos- y aula virtual de la cátedra habilitada, o no), se identificaron las siguientes situaciones:

Caso 1: Dos cátedras no tenían profesor a cargo de catedra capacitado, no tenían aula virtual habilitada pero si había algunos integrantes de la misma capacitados.

Caso 2: Una cátedra si tenía profesor a cargo de cátedra e integrantes capacitados –algunos- y también contaban con una aula virtual habilitada pero no se encontraba funcionando.

Caso 3: Una cátedra no tenía ni profesor a cargo de cátedra capacitado ni tampoco docentes capacitados a través del curso promovido por la UNJu, pero sí mantenían un aula virtual habilitada y funcionando.

Indagados los docentes a cargo de las cátedras indicadas en el Caso 1 respecto a cuáles eran los motivos por los cuales habiendo docentes capacitados en el manejo de aulas virtuales en su cátedra no se había habilitado la misma se obtuvieron respuestas relacionadas con: falta de personal para dedicarse exclusivamente a esa tarea; insuficiente preparación tecnológica y pedagógica por parte de los docentes para abordar el emprendimiento; inviabilidad de la propuesta a nivel de estudiantes (carencia de: dispositivos digitales adecuados, de conexión a internet domiciliaria y alfabetización tecnológica) y mayor valoración académica del contacto personal para la enseñanza de la matemática.

Al docente a cargo de la cátedra descripta en el Caso 2 se le preguntó sobre la razón por la cual el aula virtual de su cátedra estaba habilitada pero no funcionaba. Al respecto indicó que solo la había utilizado un año, pero que la cantidad de inconvenientes que tuvo que sortear para mantenerla en funcionamiento durante ese ciclo lectivo lo había desalentado en continuar trabajando en ese espacio; también indicó que si bien la capacitación institucional recibida durante seis meses había sido de buen nivel, se requería una capacitación continua y contextualizada tanto en lo tecnológico como en lo pedagógico.

Finalmente, al docente abordado en el Caso 3 (próximo a obtener el beneficio de la jubilación) al consultarle sobre por qué no había realizado la capacitación indicó que, estimaba, que dicho espacio de capacitación podía ser mejor aprovechado por los más jóvenes; además explicó que si bien los integrantes de su cátedra no habían realizado la capacitación institucional, tenían conocimiento del tema por otros cursos realizados fuera de este ámbito; de todas maneras aclaró que, por el momento, solo se utilizaba el aula virtual como repositorio de material informativo y didáctico pero que era intención de la cátedra incorporar, progresivamente, otros espacios acordes a la formación a través de estos entornos virtuales.

CONCLUSIONES

Visto el trabajo de indagación realizado y los resultados obtenidos es posible concluir que pocos son los docentes del Área Matemática la FCE de la UNJu que mostraron interés por conocer los pormenores del uso de las aulas virtuales, aunque todos ellos tenían una actitud medianamente favorable a la incorporación de la tecnologías digitales en sus cátedras. Ergo, la capacitación institucional brindada por la UNJu respecto a la implementación de aulas virtuales como parte del proceso educativo aún no ha tenido el impacto esperado en las cátedras que integran el Área Matemática.

Finalmente, la incorporación de las TICs en el ámbito académico analizado es un proceso que, aunque con dificultades y resistencias, ya se ha iniciado. Sin embargo, como todo proceso, requerirá que tanto los actores educativos como las condiciones institucionales se adecuen, progresivamente, a las exigencias que requiere la implementación de la modalidad de enseñanza presencial con apoyo de aulas virtuales, siempre y cuando se considere a este hecho factible y conveniente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Área Moreira, M. (2009). *Introducción la Tecnología Educativa*. Recuperado el 28 de noviembre del 2014 de http://webpages.ull.es/users/manarea/ebookte.pdf

Cabero, J. (Dir.) (2010). *Usos del e-learning en las Universidades Andaluzas: Estado de la cuestión y análisis de buenas prácticas*. España: GID

Digión, M., Marcoleri, M. y Montalvetti, P. (2014). Actividades Educativas en un aula virtual de Análisis Matemático. En L. Sanjuro, A. Caporossi y N. Placci (Eds.), *Actas del VIII Congreso Iberoamericano de Docencia Universitaria y de Nivel Superior*, 1873-1880. Rosario: Humanidades y Artes Ediciones. Recuperado el 12 de febrero del 2015 de

http://www.fhumyar.unr.edu.ar/AIDU/LIBRO%20DE%20ACTAS%20CONGRESO.pdf

Fandiño Parra, Y. J. (2011). La educación universitaria en el siglo XXI: de la sociedad de la información a la sociedad del conocimiento. *Revista Iberoamericana de Educación 55(3)*, 1-10. Recuperado el 17 de noviembre del 2014 de http://www.rieoei.org/jano/3965Fandino_Jano.pdf

Guido, L. y Vercino, M. (2010). La oferta universitaria virtual en universidades nacionales argentinas y su expansión territorial: Un estudio de casos de campos virtuales. *Archivos de Ciencias de la Educación, 4(4),* 1-16. Recuperado el 28 de noviembre del 2014 de http://www.archivosdeciencias.fahce.unlp.edu.ar/article/view/ARCHv04n04a09/pdf_21

López Noguero, F. (2007). *Metodología participativa en la Enseñanza Universitaria.* España: Narcea

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (2004). *Las tecnologías de la información y la comunicación en la formación docente.* Recuperado el 23 de noviembre del 2014 de http://www.unesco.org.uy/ci/publicaciones/lastecnologias.pdf

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (2013). *Enfoques estratégicos sobre las TICS en Educación en América Latina y el Caribe.* Recuperado el 23 de noviembre del 2014 de

http://www.unesco.org/new/fileadmin/MULTIMEDIA/FIELD/Santiago/images/ticsesp.pdf

Prach, M. S. (2007). *Las actitudes de los docentes universitarios frente a la incorporación de Internet en el dictado de sus materias El caso de la Facultad Regional Haedo*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Tecnológica Nacional. Buenos Aires. Recuperado el 23 de octubre del 2014 de http://www.edutecne.utn.edu.ar/tesis/tesis_prach.pdf

Santoveña, S. (2010). Un curso virtual óptimo en la diplomatura de educación social de la UNED. *Revista de Medios y Educación*, *37(Julio-Diciembre)*, 185-196. Recuperado el 17 de noviembre del 2014 de

http://www.sav.us.es/pixelbit/pixelbit/articulos/n37/15.pdf

Sunkel, G. (2006). Las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en la educación en América Latina. Una exploración de indicadores. *Comisión Económica para América Latina y el Caribe. Serie Políticas sociales*, *126*, 1-70. Recuperado el 27 de noviembre del 2014 de

http://repositorio.cepal.org/bitstream/handle/11362/6133/S0600907_es.pdf?sequence=1

¿QUÉ PIENSA EL PROFESOR DE LA EVALUACION EN SU PRACTICA DOCENTE?

Ana Sofia Aparicio Pereda, Rosa Eulalia Cardoso Paredes
Universidade de São Paulo (Brasil), Institución Educativa Privada "Miguel Grau" (Perú)
anasofiap@usp.br, rcardoso@pucp.edu.pe

Palabras clave: Evaluación, práctica docente, pensamiento docente, teorías implícitas

Key words: Assessment, teaching practice, teaching thinking, implicit theories

RESUMEN: Nuestro estudio explora el pensamiento que el profesor tiene acerca de su práctica docente en la evaluación a través del Cuestionario anónimo de experiencias docentes de Jáuregui et al. (2003), que evalúa cuatro dimensiones enfocadas en las teorías implícitas: evaluación del aprendizaje; planificación de la evaluación; atribución causal del rendimiento y sistema de calificación y pruebas.

En total participaron 128 profesores de enseñanza básica de una institución privada con sede en la ciudad de Lima-Perú y además de diferentes especialidades. De la muestra total del estudio, se enfocó en el grupo de profesores que dictaban Ciencias y Matemáticas, siendo estos un total de 49 participantes.

ABSTRACT: Our study explores the thoughts that the teacher has about their teaching practice in the assessment through anonymous questionnaire teaching experiences of Jauregui et al. (2003), which evaluates four dimensions implicit theories focused on : assessment of learning; evaluation planning ; causal attribution of performance and system qualification and testing .

They included 128 primary school teachers from a private institution with headquarters in Lima - Peru and different specialties. Of the total sample our study focused on a group of professors who taught science and math and totaling 49 participants.

INTRODUCCIÓN

La evaluación va más allá del carácter puramente técnico, revela también, situaciones cognitivas, ideológicas, afectivas e contextuales de los sujetos que forman parte de ella. Como es mencionado por Carr (1999), la evaluación puede manifestarse como una práctica "incrustada en la teoría", al mostrar la conexión entre las teorías y el quehacer pedagógico.

Muchas veces existen algunas concepciones, creencias, representaciones a nivel institucional que no son explicitas. Esto es que no están documentadas o no aparecen explícitamente en los documentos institucionales, más son manifestadas y practicadas en el quehacer pedagógico diario por los responsables del proceso de enseñanza e aprendizaje, los docentes de aula.

Así mismo, el estudio del pensamiento docente constituye un área de investigación de larga tradición, especialmente en la realidad educativa norteamericana, en Latinoamérica es un área trabajada hace pocos años y cuyos resultados no son difundidos lo suficientemente como para que estos produzcan efectos de mejora en las prácticas diarias. El estudio de las teorías implícitas centradas en el profesor, inicialmente propuestas por Nisbett y Ross (1980); Clark y Peterson (1984), permiten una comprensión del cómo y porqué el proceso de enseñanza tiene la apariencia y funcionamiento que lo caracterizan, en el que subyacen procesos de pensamiento llamados teorías implícitas, no en el entendido epistemológico, sino más en el entendido de creencias y proposiciones razonablemente explícitas acumuladas por los docentes como consecuencia de su variada experiencia formativa tanto crítico conceptual, como en la propia dinámica de sus funciones. La investigaciones como de Riquelme (2000), Perafán (2002), Jáuregui et al (2003) e Turpo (2011) son desarrolladas y centradas en el estudio del pensamiento del profesor relacionadas con sus prácticas pedagógicas y de evaluación.

JUSTIFICACIÓN

Al ser las prácticas evaluativas de los profesores, orientadas por sus pensamientos, relativamente poco investigadas, ha sido un motivo para que haya impedido develar y solucionar problemas o controversias asociadas sus resultados o consecuencias en el proceso. Es por eso que con esta investigación se ha querido aproximar a las teorías y concepciones implícitas del profesor de matemáticas y ciencias a partir de una reflexión de los resultados encontrados. Consideramos que este tipo de estudios puede orientar acerca de la evaluación por parte de los profesores y conocer las prácticas docentes develando las disonancias, contradicciones y /o repercusiones posteriores en sus estudiantes.

OBJETIVOS

Las prácticas evaluativas de los profesores, orientadas por sus pensamientos, han sido relativamente poco investigadas, lo que ha impedido develar y solucionar problemas o controversias asociadas sus resultados o consecuencias en el proceso.

Nuestro estudio explora los pensamientos que el profesor tiene acerca de su práctica docente en la evaluación a través de cuatro dimensiones: teorías implícitas sobre evaluación del aprendizaje; teorías implícitas sobre planificación de la evaluación; teorías implícitas subyacentes sobre atribución causal del rendimiento; teorías implícitas sobre sistema de calificación y pruebas

Con nuestra investigación queremos aproximarnos a las teorías y concepciones implícitas del profesor de matemáticas y ciencias a partir de una reflexión de los resultados encontrados. Creemos que este tipo de estudios puede orientar acerca de la evaluación por parte de los profesores y conocer las prácticas docentes develando las disonancias, contradicciones y /o repercusiones posteriores en sus estudiantes.

MARCO TEÓRICO

El estudio del pensamiento docente constituye un área de investigación de larga tradición, especialmente en la realidad educativa norteamericana, en tanto que en el contexto latinoamericano, recién se encuentra en sus inicios. En Chile, Riquelme Bravo (2000) se interesó en investigar las teorías implícitas y las prácticas de evaluación del rendimiento. El estudio de las teorías implícitas inicialmente propuestas por Nisbett y Ross (1980); Clark y Peterson (1984), permiten una comprensión del cómo y porqué el proceso de enseñanza tiene la apariencia y funcionamiento que lo caracterizan, en el que subyacen procesos de pensamiento llamados teorías implícitas, no en el entendido epistemológico, sino más en el entendido de creencias y proposiciones razonablemente explícitas acumuladas por los docentes como consecuencia de su variada experiencia formativa tanto crítico conceptual, así como en la propia dinámica de sus funciones, su práctica.

En lo sustancial, el estudio ha develado que uno de los problemas cruciales está en el pensamiento del docente, tal vez, debido a la orientación formativa básicamente instrumental, que no lo induce a ser creativo, crítico y autocrítico de sus propias experiencias; es posible aun cuando se le provean las mejores condiciones de trabajo en el aula, el mejor equipamiento, e incluso una mejora sustancial en sus remuneraciones, no habrían cambios significativos, podría ser entonces crucial cambiar el enfoque formativo del docente, más allá de los esfuerzos por modernizar la currícula, descentralizar la educación, o buscar la ansiada calidad con equidad.

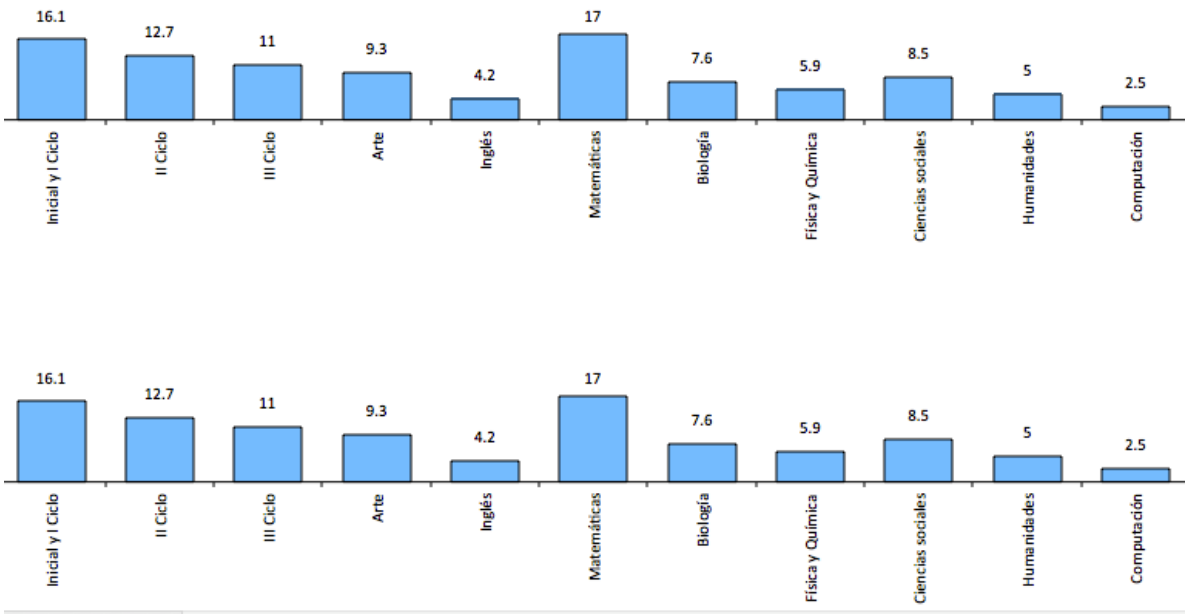
METODOLOGÍA

Muestra de estudio: Para el estudio del significado personal declarado hemos evaluado 118 profesores de enseñanza básica de diferentes especialidades (ver Tabla 1). Se evalúan las respuestas en 4 rubros: Teorías implícitas, estilos de evaluación, estilos instrumentales de evaluación y percepciones docentes. A continuación son detallados los resultados encontrados en cada uno.

Tabla 1. Profesores participantes en el estudio de teorías implícitas de acuerdo a la plana docente en el CBB

Planas	Frecuencia	%
I Ciclo	19	16.10
II Ciclo	15	12.71
III Ciclo	13	11.02
Inglés	6	5.08
Ciencia y Matemática	**49**	**41.53**
Ciencias Sociales	10	8.47
Humanidades	6	5.8
Total	118	100.00

Figura 1. Docentes participantes por plana en porcentajes



De acuerdo al cuadro 1 y a la figura 1, podemos observar que los mayores porcentajes de profesores participantes del estudio son de la especialidad de Matemáticas, Inicial y I ciclo y II Ciclo

Instrumentos

El cuestionario anónimo de experiencias docentes es presentado por Jáuregui , R.; Carrasco del Carpio, L. y Montes, I. (2003), comprende 30 ítems válidos (13 enunciados positivos y 17 negativos). Para determinar la confiabilidad del instrumento los autores usaron el método de

consistencia interna Alfa de Cronbach (esta medida asume que los ítems miden un mismo constructo y que están altamente correlacionados). Cuanto más cerca se encuentre el valor del alfa a 1 mayor es la consistencia interna de los ítems analizados. El instrumento alcanzo un Alpha de 0,80, que indico una buena confiabilidad.

Los enunciados se distribuyen en 4 dimensiones: teorías implícitas sobre evaluación del aprendizaje (ítems 4, 7, 11, 13, 16, 18, 24, 27 y 28); teorías implícitas sobre planificación de la evaluación (ítemes 3, 6, 9,15, 17, 21 y 22); teorías implícitas subyascentes sobre atribución causal del rendimiento (ítemes 1,2,5,8,12,20,26,29 y 30); teorías implícitas sobre sistema de calificación y pruebas (ítemes 10,14,19, 23 y 25). Adicionalmente, se formó una subescala denominada percepciones hacia el sentido de la evaluación (ítemes 7, 11, 13, 14, 18, 23, 24, 28 y 29). Esta última sub escala permitió a los autores calcular un puntaje global para establecer diferencias de promedios (prueba T y prueba ANOVA) de acuerdo al género y tiempo de servicio de los profesores por ellos evaluados. Nuestra investigación no hará uso de estos análisis.

El análisis de nuestra investigación se enfoca en las respuestas globales dadas por la muestra de profesores (N=118) de Ciencias y Matemáticas en cada una de las dimensiones evaluadas.

RESULTADOS

En general los profesores de matemáticas y ciencias evaluados piensan en su mayoría que hay una fuerte influencia del profesor en el rendimiento de los alumnos y se califica como el responsable de la planificación y calificación en la evaluación.

En la tabla 2 se muestra las respuestas de los profesores evaluados para cada dimensión que se hace referencia (Teorías implícitas sobre evaluación del aprendizaje, sobre la planificación de la evaluación, sobre la atribución causal del rendimiento y sobre el sistema de calificación y pruebas) y podemos observar a través de los puntajes obtenidos a los ítems mejor valorados por los evaluados.

Tabla 2. Porcentaje de respuestas del cuestionario de experiencias docentes en profesores de Matemática y Ciencia

Ítem	**Teorías implícitas sobre evaluación del aprendizaje para los profesores**	CA	A	I	D	CD
4	Es preferible no comunicar anticipadamente a los alumnos cómo serán evaluados para asegurar la objetividad del proceso	2.5	15.3	11.0	44.9	26.3
7	Es preferible evaluar al fin de un período de enseñanza que hacerlo seguido	0	2.5	3.4	32.2	61.9
11	Cuando un alumno es informado acerca de cómo será evaluado le damos la posibilidad de que aprenda mientras se prepara para este proceso	32.2	55.1	3.4	6.8	2.5

13	La misión de la evaluación es hacer que todos o casi todos los alumnos dominen las competencias	7.6	19.5	9.3	50.8	12.7
16	Es recomendable que el profesor asuma una actitud seria el día que tome exámenes para evitar que los alumnos “copien”	12.7	33.9	7.6	28.0	17.8
18	Está claro que la evaluación fundamentalmente sirve para apreciar el rendimiento del alumno a fin de asignar un puntaje justo	7.6	29.7	11.9	36.4	14.4
24	Es normal que hayan deficientes, regulares y buenos alumnos como resultado de la enseñanza	13.6	41.5	21.2	18.6	5.1
27	Al observar el trabajo cotidiano de los alumnos, los estamos evaluando	39.0	43.2	16.9		0.8
28	La evaluación es un proceso permanente cuando aplicamos con mucha frecuencia exámenes o pruebas escritas	7.6	13.6	22.0	47.5	9.3
	Teorías implícitas sobre planificación de la evaluación para los profesores					
3	La determinación de metas de aprendizaje en un asunto que debe dejarse a criterio del docente	6.8	46.6	11.9	27.1	7.6
6	No es necesario planificar por escrito el proceso de evaluación del aprendizaje, en especial cuando ya se tiene experiencia	1.7	3.4	3.4	35.6	55.9
9	Cuando uno tiene un plan fijado de evaluación es preferible no modificarlo así las circunstancias lo requieran	3.4	10.2	4.2	54.2	28.0
15	No es necesario efectuar retroalimentación en alumnos con rendimiento exitoso	8.5	12.7	5.1	50.0	23.7
17	Es preferible elaborar los instrumentos de evaluación con la debida anticipación	57.6	29.7	0.8	5.9	5.9
21	Durante la enseñanza, el docente trata de recordar y de llevar a la práctica esa imagen mental del plan (que en parte no consta por escrito)	4.2	33.9	16.9	30.5	14.4
	Teorías implícitas subyacentes sobre atribución causal del rendimiento en profesores					
1	Cuando todos los alumnos tienen un rendimiento aceptable, es porque el docente ha hecho un buen trabajo	28.8	64.4	2.5	4.2	0
2	El buen trato del docente durante la toma de una prueba escrita o examen influye decididamente en el rendimiento del alumno	16.9	46.6	6.8	20.3	9.3
5	No hay prueba mal tomada, sino alumno mal preparado	0	15.3	14.4	37.3	33.1

8	El docente debería pasar por alto los errores cometidos los alumnos que muestran dificultades de aprendizaje	2.5	7.6	1.7	28.0	60.2
12	Los alumnos con dificultad para aprender que provienen de entornos marginales deberían ser exigidos en menor intensidad (tener experiencias diferentes para ellos, a fin de no frústrales)	11.0	34.7	8.5	33.9	11.9
20	Hay alumnos que por su escasa capacidad intelectual no están en condiciones de enfrentar los desafíos escolares	5.1	21.2	11.0	38.1	24.6
26	La eficacia de un docente está relacionada con el rendimiento de sus alumnos	12.7	42.4	24.6	16.9	3.4
29	El rendimiento deficiente es atribuible fundamentalmente al alumno	0	2.5	22.0	41.5	33.9
30	Los problemas de aprendizaje de los alumnos no son responsabilidad del docente, sino mayormente del entorno familiar	0.8	13.6	21.2	49.2	15.3
	Teorías implícitas sobre sistema de calificación y pruebas para los profesores					
10	Los docentes varones tienden a molestarse más fácilmente durante una sesión de evaluación con alumnos indisciplinados	0	5.9	13.6	40.7	39.8
14	En muchos casos las pruebas orales pueden llegar a ser más pertinentes que las pruebas escritas	18.6	58.5	7.6	14.4	.8
19	La calificación con escala vigesimal es más pertinente que el uso del sistema por letras	24.6	25.4	27.1	16.9	5.9
22	En la evaluación del aprendizaje es preferible tener una programación minuciosa para evitar que le profesor haga lo que le parece	21.2	44.1	11.0	16.1	7.6
23	La evaluación puede transcurrir muchas veces sin necesidad de aplicar pruebas escritas	36.4	35.6	22.0	4.2	1.7
25	Los trabajos en grupo no permiten diferenciar el rendimiento individual del alumno, lo que dificulta su evaluación	1.7	11.9	22.9	47.5	16.1

CA: Completamente de acuerdo **A:** Acuerdo **I:** Indiferente **D:** Desacuerdo **CD:** Completamente en desacuerdo

CONCLUSIONES

En general los profesores de matemáticas y ciencias evaluados piensan en su mayoría que hay una fuerte influencia del profesor en el rendimiento de los alumnos y se califica como el

responsable de la planificación y calificación en la evaluación. Así, los ítem mejor valorados por dimensión se dan de la siguiente manera:

En la dimensión evaluación del aprendizaje son: "Es recomendable que el profesor asuma una actitud seria el día que tome exámenes para evitar que los alumnos "copien" (ítem 16); Es normal que hayan deficientes, regulares y buenos alumnos como resultado de la enseñanza" (ítem 24); "al observar el trabajo cotidiano de los alumnos, los estamos evaluando" (ítem 27).

En la dimensión planificación de la evaluación: "La determinación de metas de aprendizaje es un asunto que debe dejarse a criterio del docente" (ítem 3).

En la dimensión atribución causal del rendimiento: "Cuando todos los alumnos tienen un rendimiento aceptable, es porque el docente ha hecho un buen trabajo" (ítem 1); "El buen trato del docente durante la toma de una prueba escrita o examen influye decididamente en el rendimiento del alumno" (ítem 2); "La eficacia de un docente está relacionada con el rendimiento de sus alumnos" (ítem 25).

Así mismo, en la dimensión sobre sistema de calificación y pruebas: "La evaluación puede transcurrir muchas veces sin necesidad de aplicar pruebas escritas" (ítem 23).

COMENTARIOS FINALES

Desde esta investigación, podemos inferir que es muy importante conocer la prácticas que los docentes realizan en el día a día en sus aulas para poder identificar los las teorías implícitas que ellos manejan. A través de sus respuestas y lo que se pueda observar, podremos saber por ejemplo si aún siguen pensando que "es preferible evaluar al fin de un período de enseñanza que hacerlo seguido", o que se siga clasificando a los alumnos de manera subjetiva "deficientes, regulares y buenos alumnos", así como que ellos sigan desconociendo las formas en que deben ser evaluados y solamente con un determinado tipo de pruebas. Es decir que aún hay una concepción de evaluación en términos de calificación. Del mismo modo se observa que la eficacia de un docente está relacionada con el rendimiento de sus alumnos y el fracaso es atribuible fundamentalmente al alumno o la problemática que este puede tener desde la familia. Aún se sigue observando una evaluación muy individualista por ello las respuestas muestran que los docentes siguen pensando que "los trabajos en grupo no permiten diferenciar el rendimiento individual del alumno" y más bien produce una dificultad en su ejecución.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Carr, W. y Kemmis, S. (1999). *Teoría crítica de la enseñanza.* Barcelona: Martínez Roca.

Clark, C. y Peterson, P. (1984). East Teacher's thought process Lansing. *Research Series No. 72.* Institute for Research on Teaching, Michigan State University.

Jauregui, R.; Carrasco del Carpio, L.; Montes I. (2003). *Evaluando, evaluando; qué piensa y que hace el docente en el aula.* Tesis de Maestría publicada. Universidad Católica de Santa María. Perú.

Nisbett y Ross (1980). *Human inference: strategies and shortcomings of social judgment.* Englewood Cliffs. NJ: Prentice Hall.

Perafán, G. y Adúriz, A. (2002). *Pensamiento y conocimiento de los profesores. Debate y perspectivas internacionales*. Universidad Pedagógica Nacional. Colombia

Riquelme Bravo, P. (2000). Teorías implícitas y su influencia en la práctica pedagógica de un grupo de profesores pertenecientes a una escuela urbano marginal de Temuco. En: *Congreso Nacional Reduc "Investigación Educativa e Información".* Santiago de Chile.

Turpo, O. (2011). Concepciones y Prácticas Evaluativas de los Docentes del Área Curricular de CTA en las II. EE. Públicas de Educación Secundaria de Arequipa. *Revista Peruana de Investigación Educativa* Nro 3. 159-200

ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS. UN ENFOQUE REGIONAL

Ángel Gabriel López Arens, Alma Rosa Pérez Trujillo, Leticia Pons Bonals, Rita Angulo Villanueva
Universidad Autónoma de Chiapas, Universidad Autónoma de San Luis Potosí (México)
aglopezarens@hotmail.com, almarpt@hotmail.com, pbonals@hotmail.com, rodriguezcenobia@gmail.com

Palabras clave: Estrategias didácticas, formación docente, enseñanza de las matemáticas, enfoque regional.

Key words: Teaching strategies, teacher training, teaching mathematics, regional approach.

RESUMEN: En este texto presentamos los resultados obtenidos en el diplomado que hemos denominado “Estrategias didácticas para la enseñanza de las matemáticas. Un enfoque regional”, el cual fue implementado con profesores de matemáticas que pertenecen a tres escuelas preparatorias del estado de Chiapas, México; este diplomado sirvió como una herramienta de investigación y cuyos resultados nutren a la investigación denominada “Reforma educativa y contexto escolar. Construcción de competencias matemáticas en escuelas preparatorias de la región Centro-Norte de Chiapas”, el trabajo realizado permitió profundizar en el análisis y reflexión de los principios de la RIEMS, de las posibilidades y límites que esta les impone para impulsar procesos de enseñanza aprendizaje en contextos específicos. La investigación que aún está en proceso ha seguido la ruta apoyada en la teoría sociocrítica y la metodología Investigación Acción Participativa.

ABSTRACT: In this paper, we present results obtained in diploma curse that we call "teaching strategies for teaching mathematics. A regional approach ", which was implemented with math teachers belonging to three high schools in the state of Chiapas, Mexico; This graduate served as a research tool, the result of research feed called "Educational reform and school context. Construction of mathematical skills in high schools in the North Central region of Chiapas, "allowed the work to deepen the analysis and reflection of the principles of RIEMS, the possibilities and the limits imposed on them to promote teaching and learning processes in specific contexts. The research is still in the process has followed the path supported by the socio-critical theory and participatory action research methodology.

INTRODUCCIÓN

En México, las reformas educativas se comienzan a implementar en diferentes momentos en los niveles educativos, quedando de la siguiente manera: en el nivel preescolar en 2004, en secundaria en 2006, en primaria y preparatoria en 2009. Una de las características más importantes de estas reformas educativas es que introducen el enfoque por competencias, visto éste, como un constructo angular que sirve para referirse a un conjunto de conocimientos, habilidades y actitudes que los sujetos requieren para desarrollar algún tipo de actividad en un contexto concreto.

Considerando lo anterior, creemos que es importante analizar los procesos que tienen que ver con la construcción de competencias matemáticas que se han dado en algunas de las escuelas preparatorias del estado de Chiapas, México que se encuentran ubicadas en la región Centro-Norte de este estado, ya que el proceso de implementación de la Reforma Integran de Educación Superior (RIEMS) en estas instituciones se dio de manera diferente, teniendo en un inicio como protagonistas principales a los profesores representantes de áreas de conocimiento de todas las preparatorias del estado, quienes participaron en reuniones a nivel regional y estatal y que con el acompañamiento de investigadores educativos de la Universidad Autónoma de Chiapas y el Grupo Técnico Académico de la Secretaría de Educación del Estado de Chiapas (GruTA), realizaron el diseño de los programas de estudio bajo el enfoque por competencias con los que trabajarían todas las escuelas preparatorias del estado.

Retomando lo anterior y considerando la perspectiva teórica sociocrítica, que es desde la que hizo la investigación, se tiene como propósito “analizar el efecto de los significados que construyen los profesores de preparatoria de la región centro norte de Chiapas sobre las competencias matemáticas que los alumnos desarrollan en el marco de la implementación de la RIEMS”.

Es importante señalar que se ha observado que la RIEMS ha sido asumida mediante un proceso en el cual algunos docentes convocados como representantes de áreas de conocimiento a reuniones de nivel regional y estatal han logrado generar cierta capacidad de cambio que se refleja cuando asumen la reforma de una manera específica, significando y contextualizando los planteamientos de la misma en los programas de las asignaturas que ellos mismos diseñaron. Esto da pie a la implementación de un proceso de formación docente el cual recupere las necesidades y situaciones que se enfrentan en cada contexto escolar y que toma como base las experiencias y conocimiento práctico de las y los docentes en un proceso de investigación, reflexión y acción orientado a la transformación.

De ahí que siguiendo la idea de la emancipación desde la teoría crítica y la metodología investigación acción participativa (ambas descritas en apartados siguientes) los profesores de nivel medio superior que han optado por un modelo de formación que los lleva a profundizar en el análisis y reflexión de los principios de la RIEMS, de las posibilidades y límites que esta les impone para impulsar procesos de enseñanza aprendizaje en contextos concretos. Se implementa el trabajo de formación con 17 profesores que imparten clases de matemáticas en tres preparatorias del estado, seis profesores de la Escuela Preparatoria Número 7 ubicada en la zona poniente de Tuxtla Gutiérrez, Seis profesores de la preparatoria Renovación Ángel Robles Ramírez, ubicada en el municipio de Acala y cinco profesores de la preparatoria Salomón González Blanco, ubicada en el municipio de Berriozábal, quienes se han involucrado en un proceso de investigación-acción acompañados de un grupo de investigadores universitarios a lo largo de nueve meses, este trabajo

evidencia la necesidad de situar los procesos de formación docente en el campo de la investigación sobre política educativa, ya que sólo a partir del análisis profundo de las políticas que inciden en su trabajo, es posible que construyan la capacidad de cambio necesaria para transformar su práctica docente y para que incidan en la mejora de los procesos de enseñanza aprendizaje que impulsan en sus escuelas.

MARCO TEÓRICO

El posicionamiento epistemológico de la investigación es sociocrítico y derivado de éste se profundizará en la teoría crítica de la enseñanza, desde la cual no se reconoce al conocimiento como un producto auto engendrado al cual se accede de manera espontánea o improvisada, sino a través de la disciplina intelectual, donde el sujeto se apropia de la realidad objetiva, mediante una serie de procedimientos o actividades integradas, no niega los contenidos, ni tampoco la producción científica. Al contrario, insiste en su estudio críticamente, es decir, analizando detalladamente los contenidos de acuerdo con los problemas sociales, culturales y políticos.

Como parte de un discurso más amplio la teoría crítica de la enseñanza se inscribe en la teoría crítica que sustenta el discurso de emancipación, la cual considera primordiales los procesos que conduzcan a una sociedad sin injusticia, esto expone la dependencia del universo teórico con el universo de los hechos, es decir, el universo social. Según Pérez (2006) el propósito de la teoría consiste de “la emancipación del hombre de la esclavitud”, asimismo, este autor menciona que para el filósofo alemán Theodore Adorno (1976, p. 35), la teoría es “indisputablemente crítica” y para Herbert Marcuse (1978, pp. 55), el pensamiento dialéctico como forma de crítica funciona conectando conocimiento y dominación, “el último propósito debe ser el pensamiento crítico por el interés en el cambio social”.

Max Horkheimer ni siquiera considera necesario discutir la eficacia o la validez lógica de la teoría tradicional. Está convencido y tiene muy claro que el modelo tradicional de ciencia funciona: “los progresos técnicos de la época burguesa son inseparables de esta función de cultivo de la ciencia” (2000, p. 249). Lo que considera necesario debatir es, además de su concepción de la razón, la forma en que entiende la función social de la teoría. Esto es lo que para Horkheimer, resulta más característico y más criticable de la teoría tradicional: “su pretensión de neutralidad” (2000, p. 231). Junto con Friedrich Hegel y con Georg Lukács piensan, es que el análisis de la sociedad existente es en sí un elemento de esa sociedad, una forma de autoconciencia. De acuerdo con lo anterior, esto significa, que no hay teoría que permanezca al margen de la realidad social, fundamentalmente porque no existe tal lugar imaginario incontaminado.

En la teoría crítica de la enseñanza se consideran bajo crítica todos aquellos componentes que están relacionados con el proceso, tomando como legítimos aquellos que favorecen el proceso de aprendizaje de habilidades y el desarrollo de las capacidades que fomentan las posturas críticas de los aprendices respecto de los que sucede en el mundo, rechazándose los que lo entorpecen de una o de otra manera. Se presenta como una combinación de todos los factores que intervienen de manera positiva en la evolución del proceso cognoscitivo del ser humano, en su práctica de búsqueda hacia el encuentro de los criterios de verdad y de aplicabilidad en el arduo proceso de transformación de la realidad en correspondencia con las prioridades determinadas por las motivaciones y los intereses del sujeto cognoscente y del medio social en que se desarrolla. Se

trata, entonces, de una propuesta teórica que asuma las transformaciones que se están produciendo en las sociedades desarrolladas avanzadas, transformaciones que quedan insuficientemente entendidas en las doctrinas tradicionales existentes.

En esta investigación se reconoce que los actores sociales significan y construyen su realidad, y que está íntimamente ligada con las relaciones que estos actores establecen con el contexto en el que se desarrollan, así como se vuelve necesario construir a partir de la visión de los docentes que participaron en la elaboración de los programas de desarrollo de competencias matemáticas.

METODOLOGÍA

Como hemos mencionado, utilizaremos a la Investigación-Acción Participativa (IAP)

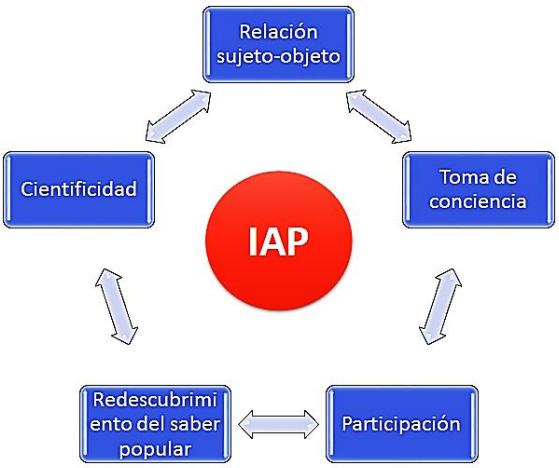
> Se puede definir como un método de estudio y acción que busca obtener resultados fiables y útiles para mejorar situaciones colectivas, basando la investigación en la participación de los propios colectivos a investigar. Que así pasan de ser "objeto" de estudio a sujeto protagonista de la investigación, controlando e interactuando a lo largo del proceso investigador (diseño, fases, devolución, acciones, propuestas...) y necesitando una implicación y convivencia del investigador externo en la comunidad a estudiar (Alberich, 2007, p. 6).

Considerando lo anterior, en la investigación se analizaron los procesos educativos y de cambio escolar tomando como base la teoría crítica y la IAP, para ello el investigador se integrará como parte del grupo de docentes que conforman la academia de matemáticas de las escuelas preparatorias y junto con los docentes de las tres escuelas seleccionadas en la región Centro-Norte generará propuestas pedagógicas que tomen como base los factores identificados por los docentes como determinantes en los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

Como puede verse, la IAP, es una metodología que apunta a la producción de conocimientos propositivos y transformadores, mediante un proceso de debate, reflexión y construcción colectiva de saberes entre los diferentes docentes y los alumnos de matemática de la región Centro-Norte con el fin de lograr la transformación de la realidad educativa en esta área de conocimiento.

En esta metodología se combinan dos procesos, conocer y actuar, involucrando en ambos procesos a los docentes y alumnos de matemáticas cuya realidad se aborda. Combina teoría y práctica, y además posibilita el aprendizaje, la toma de conciencia crítica de los actores sobre su realidad, su empoderamiento, el refuerzo y ampliación de sus redes sociales, su movilización colectiva y su acción transformadora, estos elementos pueden observarse en la figura 1. En la investigación, tiene como meta que la comunidad sea autogestora del proceso de implementación de lo que en materia de matemáticas implica la RIEMS, apropiándose de él, y teniendo un control operativo que le permita un “saber hacer” lógico, para poder entender y crítico para poder juzgar dicho proceso.

Figura 1. Elementos a considerar en la IAP (Fuente: Elaboración propia).



Aplicando esta metodología el investigador interviene en la realidad no sólo porque su tarea científica requiere de problematizarla, sino que, además, y como un factor distintivo de la investigación acción participativa, esta actitud cuestionadora debe ser también asumida por la propia comunidad de los docentes, los alumnos y las autoridades de las escuelas preparatorias de la región Centro-Norte como condición fundamental en el proceso de transformación. Así el proceso de investigar deja de ser un acto unidireccional para conformarse como un concepto que define, no solamente una acción en sí misma, sino un proceso de reflexión-acción-reflexión encaminado por actores que comparten, debaten y aportan al "otro" saberes particulares.

Alberich (2007, p. 7) menciona que la IAP

> es una metodología porque ordena/organiza un conjunto de técnicas y las orienta en un cierto sentido democratizador Que esa democratización se [dé] a nivel solo micro (dentro de un grupo, dentro de una institución o de un sistema productivo) o se plantee preguntas a nivel macro (cambio de ese sistema) dependerá del nivel epistemológico (para qué/para quien se realiza la investigación).

De tal forma que, como parte de la estrategia metodológica empleada, se han organizado tres etapas en la investigación, las cuales de describen de manera general en la tabla 1 y en las que se proponen, además, las técnicas de investigación a utilizar:

Tabla 1. Organización del diplomado

Primera etapa	Segunda etapa	Tercera etapa
▪ Identificación de actores ▪ Negociación de acceso a las tres escuelas ▪ Análisis de los programas de matemáticas I, II, III, IV, V y VI ▪ Entrevistas a profundidad con los representantes regionales que formaron parte del equipo estatal responsable de diseñar estos programas	▪ Diseño del diplomado ○ Reuniones de planeación ○ Implementación del diplomado ○ Reunión de evaluación de avances con docentes	▪ Cierre de la investigación ▪ Informe final de la investigación

Fuente: Elaboración propia.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DEL DIPLOMADO

Como hemos mencionado, en este escrito nos centraremos en la segunda etapa, por ello presentaremos aspectos del diseño e implementación del diplomado “Estrategias didácticas para la enseñanza de las matemáticas. Un enfoque regional”. Los primero pasos que se dieron, estuvieron relacionados con la indagación en las escuelas del nivel medio superior involucradas en este proceso de investigación, inició con una serie de reuniones en las que investigadores educativos universitarios, recabaron los datos generales de quienes estuvieran dispuestos a colaborar en el diseño de una propuesta de formación alternativa (nombre, edad, sexo, año de ingreso al subsistema y al plantel como docente, asignaturas que imparte) y dialogaran sobre los siguientes aspectos:

- Los cambios que ha provocado la RIEMS en su trabajo
- Los problemas y retos que enfrentan en las aulas
- Los procesos de formación en los que se han inscrito
- Las formas que en el plantel se han implementado para socializar los contenidos de la reforma e intercambiar experiencias didácticas

A partir de los resultados obtenidos y del interés mostrado por los docentes para participar en un proceso formativo que respondiera a las necesidades que habían detectado se elaboró un proyecto enmarcado en un proceso de investigación-acción, en el que se incorporaron docentes del área de matemáticas de las tres escuelas preparatorias estatales ya mencionadas.

Una característica del diplomado y la que podríamos mencionar como principal es que se plantea como un **proceso cíclico de reflexión-acción-reflexión**, en el que se reconstruye la relación entre **conocer y hacer, entre sujeto y objeto**, configurando y consolidando en cada paso la capacidad de autogestión de los involucrados en su propio contexto escolar, esta capacidad se genera desde

dentro y desde abajo: desde dentro de la academia de matemáticas de las escuelas; desde abajo, pues lleva a la participación incluso de quienes no han podido con las matemáticas en estudios académicos, pero que poseen información y conocimientos que enriquecen al colectivo.

El diplomado se dividió en cuatro módulos, los módulos 1 y 3 se trabajaron con profesores de todas las academias (comunicación, ciencias sociales, ciencias experimentales y matemáticas) y en los módulos 2 y 4, se trabajó únicamente con profesores de la academia de matemáticas; los objetivos de los cuatro módulos son:

Módulo 1. Planeación y *curriculum*

Proponer y analizar un marco histórico conceptual y metodológico acerca del diseño curricular para construir una plataforma informativa común que permita a los docentes comprender reflexivamente los procesos generados ante un proceso de cambio curricular.

Módulo 2. Los programas de matemáticas: contenidos y competencias

Analizar los aspectos contextuales e institucionales que intervienen en el diseño e implementación de los programas de matemáticas en las Escuelas Preparatorias.

Módulo 3. Experiencias docentes. Un enfoque biográfico en la docencia

Reflexionar acerca de los aspectos históricos que caracterizan la vida de las personas que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las escuelas.

Módulo 4. Los programas de matemáticas: contenidos y competencias

Analizar las necesidades específicas que presenta cada contexto escolar en cuanto a la enseñanza de las matemáticas.

De las reflexiones y análisis que se han derivado del diplomado, se han construido algunas categorías que permiten organizar y sistematizar la información que los profesores expresan. Las categorías construidas son tres: currículo, didáctica y contenido disciplinar, cada una de las cuales se divide en subcategorías. En la tabla 3 se muestra una tabla que describe la organización de esta categoría y sus subcategorías.

Tabla 3. Categorías y problemas identificados por los docentes en el Diplomado “Estrategias didácticas para la enseñanza de las matemáticas. Un enfoque regional”

Categoría	Sub categoría	Problemas
Currículo	Planeación	En la construcción de los programas no se consideraron elementos de formación curricular No existe articulación entre los programas ni por fase ni por línea (horizontal-vertical) En la planeación no existe una selección pertinente de las competencias de tal modo que se abusa de unas y se olvidan otras
	Articulación	No existe una revisión de consecuencia Distancia entre el dominio de los contenidos disciplinares y los contenidos metodológicos de la docencia

	Estructura conceptual científico didáctica	La diversidad de formaciones universitarias (conceptos, metodologías, perspectivas y paradigmas) que distancian el diálogo
Contenido disciplinar	Ejes disciplinares	Geometría analítica Algebra Funciones Aritmética Trigonometría Razón geométrica Aplicaciones de rectas y curvas Traslado de funciones Ausencias en la RIEMS
	Relación ejes competencias	
Didáctica	Enseñanza basada en competencias	Herramientas de software que apoyen la enseñanza Planeación Compartir experiencias entre pares Creación Recursos didácticos Evaluación - rúbricas Socializar competencias Diseño de actividades de aprendizaje (en aula, fuera de aula) Secuencias didácticas (desde la organización de contenidos) Situaciones didácticas Diseño de proyectos integrales (PI) Investigación matemática Innovación
	Estrategias didácticas	
	Herramientas didácticas	
	Instrumentación didáctica	
	Evaluación de aprendizajes	

Fuente: Elaboración propia con base en la información obtenida en el diplomado.

A lo largo del diplomado se ha observado que en los docentes prevalece una preocupación didáctica, sin embargo, en cada sesión, independientemente del tema que se trate, se ha presentado una preocupación por los fines de la educación y el papel que cumple la RIEMS en el contexto de la política educativa actual.

Durante las sesiones de trabajo del diplomado y a través del proceso reflexivo de su ejercicio profesional, los docentes han profundizado en los problemas que viven en el aula y en sus escuelas, en los espacios de reunión del diplomado han participado en conjunto y de manera activa en la búsqueda de soluciones a los problemas identificados y sobre todo en los procedimientos que ellos mismos ponen en práctica en la búsqueda de estas soluciones, el diplomado en su estructura plantea ciertas actividades que propician esta tarea de introspección, pero son los docentes quienes han asumido esta responsabilidad de ejecución con conciencia clara de lo que buscan, llegando a cuestionar su papel como docentes y su influencia en la formación de los jóvenes chiapanecos a partir incluso de la implementación de nuevas formas de trabajo entre las que se incluye el uso de la tecnología.

Si bien es cierto que en los docentes sigue prevaleciendo una preocupación por el “hacer”, lo que nos lleva a pensar en una definición instrumental de su práctica, situación que se muestra en la siguiente tabla en la cual se han listado los problemas que identifican en su práctica docente; el

espacio de reflexión que abre el diplomado ha permitido constatar la importancia que tiene el conocimiento de la política educativa para contextualizar esta práctica. Este aspecto ha resultado evidente para los investigadores, así como para los docentes, quienes, poco a poco, enmarcan su quehacer más allá del aula y discuten sobre su papel y actuación como sujetos sociales y políticos que tienen la obligación y el derecho de incidir en las decisiones políticas sobre la educación.

Este proceso formativo y el grado de reflexión que se ha alcanzado evidencia que los esquemas formativos "en masa" no son los más adecuados para formar a los docentes.

COMENTARIOS FINALES

A pesar de que la implementación de las reformas educativas en México se da como un mandato general, hemos encontrado que la RIEMS ha sido asumida en las escuelas del nivel medio superior en Chiapas a través de un proceso en el cual algunos de los docentes de las escuelas preparatorias del estado han logrado generar capacidad de cambio, la cual se refleja cuando están dispuestos a profundizar sus conocimientos sobre la política educativa que respalda esta reforma para asumir una posición específica y poner en marcha una modalidad particular de trabajo que modifica su práctica docente en el sentido que a ellos les parece adecuado.

A partir de los resultados obtenidos y del interés mostrado por los docentes para participar en un proceso formativo que respondiera a las necesidades que habían detectado se elaboró un proyecto enmarcado en un proceso de investigación-acción, en el que se incorporaron docentes del área de matemáticas de tres escuelas preparatorias. El diplomado se constituye en un proceso cíclico de reflexión-regreso a las escuelas-valoración en colectivo que tiene como meta que los docentes de matemáticas son autogestores del proceso de implementación de la RIEMS, apropiándose de las estrategias didácticas de las matemáticas, pero entendiendo su actuar como un proceso crítico que les lleva a juzgar dicho proceso en el marco de la política educativa actual.

Como se ha venido observando en el diplomado en el que participan los docentes de matemáticas, la formación no es un proceso que se limita a mejorar las estrategias didácticas, asunto que priorizan la mayoría de los docentes cuando recurren a procesos de formación y actualización, sino a comprender que esta práctica está inserta en un marco político institucional que es necesario conocer y comprender para enfrentar. La generación de espacios de reflexión y debate desde los marcos de significado de los docentes, que son a fin de cuentas los que estarán dispuestos a implementar o resistirse a una reforma, particularmente a la que aquí nos ocupa, conlleva un conocimiento de las medidas de política educativa que afectan el trabajo en las escuelas. No hay que olvidar que la finalidad de toda reforma educativa se orienta hacia la formación de personas conscientes de su realidad, de sus posibilidades de desarrollo humano y del papel que pueden asumir en la sociedad de la que forman parte.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alberich (2007). *IAP, redes y mapas sociales: desde la investigación a la intervención social.* En Revista Portularia Vol. VIII, nº 1, (131-151) Universidad de Huelva

Contreras, J. (2010). Ser y saber en la formación didáctica del profesorado: una visión personal. En *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado* 68 (24, 2), 61-81.

Giroux, H. (1997) *Los profesores como intelectuales. Hacia una pedagogía crítica del aprendizaje.* Barcelona: Paidós-MEC.

Horkheimer, M. (2000). *Teoría tradicional y teoría crítica*. España: Ediciones Paidós Ibérica, S. A.

Korthagen, F. (2010). La práctica, la teoría y la persona en la formación del profesorado. En *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado* 68 (24, 2), 83-101.

Pérez, A. (2004). *La cultura escolar en la sociedad neoliberal*. Madrid: Morata

Pérez, A. (2010). Aprender a educar. Nuevos desafíos para la formación de docentes *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 68 (24,2), 37-60.

Pérez, K. (2011). Desarrollo, organización y acción colectiva en espacios rural-urbanos del distrito federal, en *Revista Artículos y ensayos de sociología rural*, (10), 20-36.

Pérez, G. (2006). *Teoría y Modelos Pedagógicos.* Medellín, Colombia: fundación universitaria Luis Amigó, Facultad de Educación.

Sen, A. (2007). *Identidad y Violencia. La ilusión del destino*. Madrid: Katz

MUSEO DE HISTORIA Y FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS: EVOLUCIÓN Y ALCANCES PARA LA FORMACIÓN DOCENTE EN COSTA RICA

Ma. Elena Gavarrete V., Jesennia Chavarría V., Margot Martínez R.
Universidad Nacional (Costa Rica)
marielgavarrete@gmail.com, jesenniach@gmail.com, margomr@gmail.com

Palabras clave: Historia de las Matemáticas, Visión Sociocultural, Formación Docente, Museo, Evolución

Key words: History of Mathematics, Sociocultural Vision, Teacher Training, Museum, evolution

RESUMEN: En este trabajo se describe la trayectoria del Museo "Juan Félix Martínez" desde su nacimiento – hace más de una década – como un proyecto de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica. Esta trayectoria aborda cuatro fases: las dos primeras conllevan la fundación y constitución del Museo como un proyecto institucional; la tercera corresponde a la transición del Museo hacia una base teórica, centrada en la visión sociocultural de las matemáticas. Todas estas fases nutren el diseño y fundamentos de las actividades que se van a ejecutar en la cuarta fase, con el fin de promover el abordaje de la historia de la matemática desde la visión sociocultural como recurso didáctico en la formación docente.

ABSTRACT: This paper describes the path of "Juan Felix Martinez" Museum since its birth - more than a decade ago - as a project of Mathematics School at National University from Costa Rica. This path addresses four phases: the first two involve the establishment and constitution of the museum as an institutional project; the third phase corresponds to the transition of the Museum into a theoretical basis, focusing on the sociocultural view of mathematics. All these phases nourish the design and foundations of the activities that will be carried out in order to promote the approach to the history of mathematics through the sociocultural vision as a teaching resource in the teacher training that will be developed in the fourth phase.

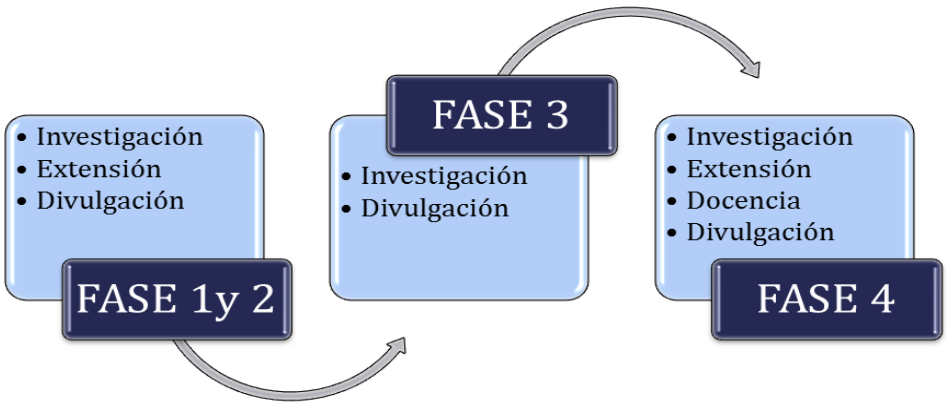
INTRODUCCIÓN

El Museo de Historia de las Matemáticas de la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA), inició en el año 2000 como una iniciativa de la profesora Carmen González Argüello, de la Escuela de Matemática. El proyecto nace como una propuesta de la profesora González, a partir de su experiencia en el curso de Historia de la Matemática del plan de estudios de la carrera Enseñanza de la Matemática, pues reconoció la necesidad de divulgar la historia de esta disciplina con propósitos culturales y didácticos.

Dicho proyecto, estuvo orientado a la investigación y la extensión, con un énfasis en la extensión, lo que llevó a la profesora González a dedicar el proyecto a la memoria del profesor Juan Félix Martínez, debido al carisma y capacidades profesionales que mostró como docente de matemáticas durante su trayectoria académica. De esta forma, el proyecto desde sus orígenes se denominó Museo de Historia y Filosofía de las Matemáticas "Juan Félix Martínez", como una forma de rendir homenaje a tan ilustre educador de la provincia de Heredia en Costa Rica.

El Museo ha generado actividades que promueven reflexiones, para la formación de profesores, sobre la importancia del abordaje de la historia de la matemática como recurso didáctico. De este modo, la evolución del proyecto se enmarca en cuatro distintas fases, en las cuales ha tenido componentes de investigación, extensión, divulgación y docencia; como se resume en la Figura 1.

Figura 1. Evolución del proyecto por fases



MARCO TEÓRICO

El proyecto ha variado respecto a su marco teórico original y actual, puesto que se ha desarrollado desde el año 2000, es decir, con más de una década de ejecución. De manera que, en un principio, su marco teórico estuvo constituido por las corrientes relacionadas con la importancia de la Historia de la Matemática en los procesos de formación docente, así como con el desarrollo científico de una sociedad. Es por esta razón, que las actividades tendieron a visualizar la matemática desde una perspectiva humana y accesible a la sociedad.

Esta postura teórica se enriqueció con los aportes de Ubiratán D'Ambrosio y Alan Bishop, respecto a la matemática en la cultura y en los grupos culturales. Esta perspectiva, claro está, se nutre de diversas posturas teóricas que actúan como ejes que guían y enriquecen la orientación del proyecto. Sus principales elementos serán mencionados brevemente a continuación.

La **Enculturación Matemática** (Bishop, 1988, 1999, 2001), es una propuesta teórica completa y versátil en cuanto a la sensibilización docente hacia la matemática como un fenómeno cultural compartido socialmente.

Además, esta teoría plantea el proceso de Enculturación como un mecanismo teórico y metodológico que conlleva a una apropiación del conocimiento matemático del propio contexto. Por otra parte, la Enculturación le permite al docente desarrollarse profesionalmente como investigador, mejorar su práctica docente y favorecer el aprendizaje significativo con pertinencia cultural.

Según Bishop (1988) por muchos años la matemática estuvo desvinculada del entorno cultural. Sin embargo, a partir de investigaciones antropológicas y estudios comparativos de diferentes culturas, se ha mostrado que "las matemáticas son un hecho cultural y que otros grupos culturales han creado ideas que claramente son otras matemáticas" (Bishop, 1988, p.123).

El **Programa de Etnomatemáticas** (D'Ambrosio, 1985, 1997, 2008) aporta un fundamento teórico-epistemológico y educativo que rescata el pensamiento matemático no académico de grupos culturalmente diferenciados y lo toma como punto de partida para la enseñanza de las matemáticas académicas.

Desde este programa, también se aborda la investigación sobre el pensamiento matemático desarrollado por grupos gremiales, tales como carpinteros, artesanos, ingenieros, albañiles, médicos, agricultores, modistas, pescadores, entre otros, y busca mecanismos para incorporarlo al currículo escolar desde un paradigma educativo socioconstructivista.

La **Educación Matemática Crítica** (Skovsmose, 1999) promueve la equidad en el acceso a una educación matemática de calidad. La finalidad es que los docentes desarrollen competencias matemáticas, tecnológicas y reflexivas para formar ciudadanos capaces de analizar situaciones sociales que pudieran perjudicarle en su integridad civil.

La **Socioepistemología** trata de los fenómenos del conocimiento matemático que se desarrolla a través de las prácticas sociales (Cantoral y Farfán, 2008) y según Cantoral (2013), su finalidad primordial es humanizar y transformar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, de manera coherente con las necesidades, intereses, derechos y diferencias particulares de todas las personas que conforman un conglomerado social.

Por lo anterior, es evidente que no existe un único marco teórico, sino que el proyecto se ha visto orientado por los planteamientos de diferentes líneas teóricas.

METODOLOGÍA

El proyecto, tal y cómo se evidencia en la Figura 1, ha seguido una estructura metodológica a partir de fases.

La **Fase 1** promovió la *investigación* en los estudiantes de la carrera Enseñanza de la Matemática a través del curso sobre Historia de la Matemática, en el cual los estudiantes indagaban sobre aspectos de la Historia Universal de las Matemáticas, y efectuaban réplicas del material histórico consultado. Ejemplo, ábacos, tablillas de conteo, entre otros.

La **Fase 2** desarrolló actividades en los ámbitos de *extensión* e *investigación*, a través de proyectos de carácter multi e interdisciplinario, desarrollados con la participación de profesores en formación

inicial y en ejercicio, así como también con estudiantes de secundaria y miembros de algunas comunidades con un oficio en común, como artesanos, pintores, agricultores, entre otros. Estos proyectos, se desarrollaron en torno a investigaciones de la matemática implícita en la realidad costarricense, como por ejemplo: la matemática en la pintura costarricense (Chavarría, 2013), el proceso de implementación del Sistema Internacional de Unidades, atendiendo el marco social, legal y organizativo (Chavarría y Chaves, 2008), entre otros. En paralelo a estas investigaciones, se promovió la realización de mini-proyectos de investigación para la construcción de biografías de matemáticos a nivel internacional, desde un punto de vista anecdótico que fueron realizados por estudiantes de la carrera de Enseñanza de la Matemática.

Por otra parte, la extensión se desarrolló a partir de la realización de salas de exhibición itinerantes, de manera que el Museo estuviera accesible a distintos centros educativos de Costa Rica, esta iniciativa se denominó *TransforMate*.

La **Fase 3** se complementa con fundamentos teóricos, aludiendo aspectos socioculturales, políticos y aquellos que tienen que ver con el dominio afectivo y procura mantener la coherencia interna desarrollada en las fases anteriores.

En esta fase se promovieron actividades de reflexión filosófica respecto a las matemáticas como producto humano y como construcción social. Esa reflexión tiene trascendencia en la pedagogía, pues al propiciar una visión más amplia de las matemáticas se pretende impactar en la actitud docente y motivar la creatividad en la acción didáctica y en la investigación.

Las distintas actividades desarrolladas han estado dirigidas a formadores universitarios, investigadores y estudiantes de la carrera de Enseñanza de la Matemática; y a través de charlas, minicursos, talleres y conferencias, se ha promovido el abordaje teórico y metodológico de la Historia de la Matemática desde la Visión Sociocultural (Martínez; Chavarría y Gavarrete, 2015).

IMPACTO

El proyecto, a partir de las distintas fases, ha impactado de diversas formas en la formación inicial y permanente de los docentes de matemática de secundaria y en sus estudiantes.

En la **Fase 1**, se promovió la investigación en historia de la matemática en los profesores en formación inicial de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la UNA, de forma que visualizaran la matemática como una construcción humana y recrearan elementos histórico-matemáticos.

La **Fase 2** por su parte, con el proyecto *TransforMate*, dirigido a estudiantes y profesores de secundaria, permitió la construcción de salas de exhibición itinerantes en distintas instituciones educativas del país, en las cuales se mostraron tanto elementos de la historia universal como de la historia de algún contenido matemático y su aplicación en la vida real; por ejemplo, el Teorema de Pitágoras, cuya sala de exhibición consistió en mostrar la cultura de la Grecia Antigua, las demostraciones de dicho teorema y su aplicación en actividades cotidianas. Para la construcción de dichas salas se brindó capacitación a los docentes y estudiantes de secundaria, de forma que fueran los mismos estudiantes quienes ofrecieran información al resto de la población estudiantil sobre los tres componentes de las salas, descritos previamente. Este sub-proyecto, además, permitió que los estudiantes de la carrera Enseñanza de la Matemática de la UNA interactuaran

con docentes y estudiantes de secundaria en la construcción de las salas, lo cual aportó en sus conocimientos histórico-matemáticos, así como didácticos.

La **Fase 3**, por su parte, ha impactado tanto a estudiantes de la carrera Enseñanza de la Matemática, como a investigadores y docentes de la Escuela de Matemática de la UNA.

En lo que confiere a los estudiantes, el proyecto ha ofrecido capacitación para la realización de investigaciones etnográficas, así como, ha orientado y motivado a realizar investigaciones sobre personalidades destacadas de la Historia de la Matemática o de la Educación Matemática en Costa Rica.

En cuanto a los académicos e investigadores de la Escuela de Matemática, se desarrollaron diversas actividades académicas que se enuncian a continuación:

- El curso *"La Construcción del Conocimiento Matemático desde una Visión Social y Cultural",* ofrecido por el Dr. Domingo Yojcom (Universidad de San Carlos de Guatemala).
- La charla "*Visión Socio - Antropológica de la Matemática"* ofrecida, en conjunto, por el Dr. Yojcom y la M.Sc. Natalia De Bengoechea (Universidad Pedagógica Nacional de México); abordó una breve descripción de los enfoques para la enseñanza de las matemáticas, que sirviera como base para reflexionar sobre el pensamiento matemático y la matemática que se promueve en la educación formal.
- El Seminario "*Dominio Afectivo en Matemática"*, a cargo del M.Sc. Marcelo Casis (Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, de Chile), estuvo centrado en el bloqueo que sufren muchos estudiantes ante las clases de matemática.
- La Conferencia "*Reflexiones sobre una Acción Pedagógica para el Programa Educativo de Etnomatemáticas: una Perspectiva de Modelización*" a cargo de Dr. Milton Rosa y Dr. Daniel Orey (Universidad Federal de Ouro Preto, Brasil); que abordó una reflexión sobre el programa de Etnomatemáticas, como una propuesta para perfeccionar las matemáticas occidentales con la incorporación de valores como ética, respeto, solidaridad y cooperación, así como acciones pedagógicas para el aula, que contemplan actividades culturalmente relevantes.

Otro aspecto del proyecto que tiene impacto sobre los estudiantes de la carrera Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional, está relacionado con el curso de Historia de la Matemática que se imparte a nivel de licenciatura. Este curso se ha visto enriquecido con los aportes del proyecto, dado que académicos vinculados a éste han sido responsables de impartirlo desde el 2003, aspecto que ha beneficiado su gestación y marcha. A raíz de las actividades desarrolladas en este curso, relacionadas con la Visión Socio-Cultural de las Matemáticas, los estudiantes del curso han externado frases como las siguientes:

- Se debe incluir más elementos de la cultura costarricense en el currículo educativo para que no olvidemos nuestras raíces
- Los educadores tenemos la responsabilidad de cambiar la mentalidad popular que concibe la matemática como una materia alejada de la realidad y fuera de lo cotidiano
- Los estudiantes deben visitar los museos para que puedan percibir en los objetos diversas aplicaciones matemáticas y ver la matemática fuera del salón de clase

- La visita a los museos en busca de elementos matemáticos presentes en nuestra cultura autóctona genera herramientas para acercar a nuestros estudiantes a las contribuciones de la matemática en el desarrollo histórico de la humanidad
- La matemática está presente en todo lo que nos rodea y así ha sido desde el principio de nuestra existencia
- Es importante incorporar nuestra cultura en la resolución de problemas matemáticos, que además ayudará a que nuestros estudiantes aprendan integralmente.

En la actualidad el curso de Historia de la Matemática brinda una perspectiva cultural de la evolución de los quehaceres matemáticos, señalando oportunamente las condiciones ideológicas en las cuales se dieron los resultados matemáticos, y cuáles fueron las características de los matemáticos de cada época histórica. Se pretende que dicho curso sirva como un instrumento valioso para motivar a los docentes en formación para que otorguen a la Historia de la Matemática el carácter didáctico funcional en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

REFLEXIONES FINALES

A nivel prospectivo, se pretende que este proyecto pueda producir material bibliográfico y generar nuevas acciones formativas desde diversas posturas epistemológicas para continuar generando conciencia entre los futuros docentes sobre las diferentes formas de hacer matemática a través de la incidencia en el curso de Historia de la Matemática y en actividades de formación permanente para los educadores costarricenses.

Desde esta perspectiva sociocultural se procura preparar a los docentes en formación inicial para la investigación, de forma que esto contribuya a reafirmar los elementos culturales propios como principios fundamentales que orienten los procesos educativos y a la vez se fortalezcan las identidades de los pueblos.

La **Fase 4** del proyecto, que inició en enero del 2016, plantea el desarrollo de actividades orientadas a la formación inicial o permanente de docentes, que ofrezcan una propuesta formativa en Didáctica de la Matemática y promuevan competencias multiculturales, a través del conocimiento de la Historia y la Filosofía de las Matemáticas desde una Visión Sociocultural y también desde una perspectiva holística de la realidad.

Todo esto a través de metodologías innovadoras y la adquisición de competencias profesionales científicas y de investigación y desde esta perspectiva teórica. Se integra un desarrollo de estrategias pedagógicas que promueven la innovación docente y favorecen la Educación Matemática Intercultural, contribuyendo a ensanchar las posibilidades de la competencia de planificación docente en un grupo de profesionales.

Se pretende orientar a los docentes para identificar etnomatemáticas de su entorno y promover reflexiones en torno a integrar elementos de la identidad cultural regional y las matemáticas en el desarrollo curricular, pues es una finalidad de esta etapa el desarrollo de acciones didácticas contextualizadas a partir de un signo cultural, que se obtengan como resultado de una experiencia de los docentes implicados como investigadores de su propio proceso de Enculturación Matemática.

Como producto del proceso de formación docente, se espera obtener de la cuarta fase recursos didácticos elaborados por los docentes que formen parte de dicho proceso, basados en la Historia y Filosofía de las Matemáticas desde una Visión Sociocultural.

Se busca que estos recursos faciliten la *contextualización activa* en el entorno escolar y favorezcan la enseñanza de la matemática con pertinencia sociocultural que incentive la identidad cultural.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bishop, A. (1988). Aspectos sociales y culturales de la Educación Matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 6* (2), 121-125.

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática, la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.

Bishop, A. (2001). Lo que una perspectiva cultural nos cuenta sobre la historia de las matemáticas. UNO, 26(8), 61-72.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2008). Socioepistemología y Matemáticas. En P. Lestón, C. Crespo, C. Oropeza y H. Parra (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21,* p. 740- 753, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la matemática educativa: Estudios sobre construcción social del conocimiento*. México: Gedisa

Chavarría, J. y Chaves, E. (2008). Desarrollo histórico y percepción del proceso de implementación del sistema internacional de unidades en Costa Rica. *Cuadernos de Investigación y formación en educación matemática, 3*(4), pp. 99-123.

Chavarría, J. (2013). La matemática en la pintura costarricense: un primer acercamiento. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27*, pp.1049-1056.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its Place in the History and Pedagogy of Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 5* (1), 44-48.

D'Ambrosio, U. (1997). Globalización, educación multicultural y etnomatemática. En UNESCO-Santiago (Ed.), *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos. Jornadas de reflexión y capacitación sobre la matemática en educación* (pp. 13-26). Santiago de Chile, UNESCO-Santiago-OREALC. Recuperado el 02 de agosto de 2012 de http://unesdoc.unesco.org/images/0011/001159/115928so.pdf.

D'Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática. Eslabón entre las tradiciones y la modernidad.* México: Limusa.

Martínez, M., Chavarría, J. y Gavarrete, M. (2015). Teorías y metodologías sugeridas para abordar la visión sociocultural de las matemáticas. *Vivencias, Filosofías & Ciencias, 2*(2), pp. 15-24.

Skovsmose, O. (1999). Hacia una filosofía de la Educación Matemática Crítica. Bogotá, Colombia: Una empresa docente.

EXPLORANDO LA FORMACIÓN INICIAL. REFLEXIÓN SOBRE EL DISEÑO Y APLICACIÓN DE UNA SITUACIÓN DE MODELACIÓN ESCOLAR

María Esther Magali Méndez Guevara
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero (México)
mquevara83@gmail.com

Palabras clave: modelación escolar, argumentos, profesionalización docente

Key words: modelling for school, reasoning, teachers' professionalization

RESUMEN: Se reporta un acercamiento a la formación inicial de profesores de matemáticas desde una categoría de modelación escolar. Se buscó incluir dicha categoría en las prácticas docentes de los futuros profesores, esto mediante experiencias vividas en sus cursos habituales de metodología, el desarrollo y análisis de diseños basados en la modelación escolar y el rediseño o diseño de situaciones propias. Entre los resultados obtenidos están los referentes a su concepción sobre la matemática Educativa y su labor como docente, además del desarrollo de sus saberes matemáticos.

ABSTRACT: This report is an approach to preservice teachers of Mathematics from a category of modeling school. We sought to include the above mentioned category in the educational practices of the future teachers, this by means of experiences lived in his habitual courses of methodology, the development and analysis of designs based on the school modeling and the redesign or design of own situations. Among the obtained results, those relating to his conception on the Educational Mathematics and his labor as teacher, besides the development of his mathematical knowledge.

INTRODUCCIÓN

Esta investigación fue un primer acercamiento formación inicial docente, teniendo en cuenta tres aspectos que dieron contexto a esta:

El primero fue reconocer que todo Sistema Educativo Nacional se hace explicito ante el quehacer de sus profesores, pues son ellos quienes ponen en juego los elementos que se proponen en este, desde ahí que sea preciso desarrollar investigación en torno a la profesionalización de los docentes y cómo se puede lograr esta desde la formación inicial y continua de estos actores. Aquí se evidencia un problema; a pesar de las reformas que se proponen desde el Sistema Educativo, estas no trascienden pues hace falta modificar la práctica de formación docente, de manera que rompa con el rol pasivo de los docentes y en su lugar se promueva un profesional critico capaz de comprender los cambios y adaptarse a ellos (OREALC/UNESCO, 2006). Al respecto incluir la investigación en la formación inicial puede ser un medio que propicie el desarrollo profesional y promueva al profesor como un actor capaz de adaptarse a los cambio, construir lo necesario y responder a las necesidades que la sociedad y el sistema le demanda. Sin embargo, la investigación en la formación inicial de futuros profesores de ciencias o en particular de la matemática, es poco frecuente y además poco valorada (Solís-Espallargas, Escriva & Rivero, 2015).

El segundo aspecto, se toma de las aportaciones de investigaciones en la línea de formación docente, más que aspectos teóricos, nos focalizamos en los métodos que han permitido conocer; las concepciones, creencias, conocimientos profesional deseable o los tipos de conocimientos que los docentes deberían tener (Moreno & Azcárate, 2013;Crespo & Micelli, 2013; Sosa & Ribeiro, 2015; Godino, 2009), rescatamos como fundamental aquellos que propician la reflexión sobre la práctica docente (Parada & Pluvinage, 2014), el análisis de su quehacer docente de forma crítica (Climent, Romero-Cortés, Carrillo, Muñoz-Catalán & Contreras, 2013) y consideramos impórtate gestionar la problematización de los saberes matemáticos escolares (Reyes & Cantoral, 2014) en la formación inicial del profesor de matemáticas.

Así se desarrolló una investigación con estudiantes de un curso de metodología de la enseñanza de las matemáticas I y II, cuyo trabajo se concreto, desarrollo y reporto en los meses finales de cada curso a modo de trabajo final. La pregunta que motivo esta exploración fue ¿cómo incluir un resultado de investigación en Matemática Educativa en la formación de profesores de Matemáticas de manera que este pueda trascender en su práctica docente?. En concreto exploramos ¿cómo incluir una categoría de modelación escolar en las prácticas docentes?. Así consideramos necesario propiciar una reflexión en torno a sus saberes matemáticos, su quehacer profesional y analizar un ejemplo específico de su futura práctica docente, la planeación de una clase.

Nuestro tercer aspecto, fue el instrumento fundamental en el estudio, aquel que provocó la problematización del saber matemático escolar (Reyes & Cantoral, 2014), una categoría de modelación para la matemática de la escuela (Méndez & Cordero, 2014) para tratar situaciones especificas, aquí se reporta el caso de la integral definida (Tocto & Méndez, 2015).

ELEMENTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

Desde la formación inicial consideramos algunos elementos que la UNESCO (OREALC/UNESCO, 2006) encontró importantes en el análisis de modelos innovadores de la formación inicial de

docentes que realizo en países seleccionados de América Latina y Europa: 1. *El planteamiento de una nueva relación dialéctica entre la teoría y la práctica*, es decir en nuestra exploración nos dimos a la tarea de dar conocer metodologías para el diseño de actividades matemáticas como la ingeniería didáctica (Artigue, 1995) enfatizando en la realización de un diseño y la exploración de este; 2. *Fomentar la investigación en la formación inicial de docentes como una manera de reorientar la reflexión y la mejora de la docencia*, nuestro labor fue, una vez que se exploró el diseño propiciamos la fase de reflexión sobre este, tanto en el alcance de sus objetivos como en el rol que ellos tuvieron; 3. *Fomentar un enfoque transdisciplinar*, la actividad promovió enlazar elementos de la matemática y la física como medio contextual para el diseño; 4. *Combinar una formación generalista de base, con una especialización final*, en este sentido no es solo formar matemáticamente sino como profesional de la matemática educativa; 5. *Impulsar procesos de construcción social*, para esto se gestiono actividades que les hicieran vivir procesos de construcción de saberes matemáticos y reflexionar sobre los procedimientos que emergen en estas construcciones, para ello la categoría de modelación escolar (Méndez, 2013) fue eje; 6. *Aprovechar las potencialidades de las tecnologías de la información y la comunicación para flexibilizar la oferta*, se aprovecho el Facebook para mantener un grupo abierto, en donde se comentarán dudas o compartiera información para el desarrollo de sus actividades.

De la literatura sobre formación inicial, concordamos con Llinares (1990) y García, Azcárate y Moreno (2006), en que uno de los elementos determinantes en las prácticas profesionales de los profesores es la forma en cómo ellos conocen la matemática escolar y sus concepciones con respecto a su aprendizaje, y la naturaleza misma de las matemáticas. Por tal motivo, la etapa de formación inicial y, a mi consideración, en las unidades de aprendizaje que correspondan a metodologías, didáctica y/o Investigación son cruciales para incluir a nuestros estudiantes para profesor en la reflexión sobre sus saberes matemáticos, las formas de aprender-enseñar matemáticas, la función y valoración de los instrumentos de aprendizaje y el análisis de sus prácticas docentes en relación a las producciones que propiciaron.

En este primer acercamiento seguimos cuatro fases a lo largo de dos unidades de aprendizaje (figura 1); La primera fase promovió como una de las tareas del curso, realizaron actividades especificas de diseño y análisis, sobre alguna temática de cálculo, siguiendo las fases de la teoría de situaciones didácticas y se realizo un previo de esta actividad siguiendo una de las fases de la ingeniería didáctica. En la segunda fase los estudiantes fueron participes de una puesta en escena de situaciones de modelación, los diseños fueron de corte Socioepistemológico y uno de ellos trato sobre la integral indefinida (Tocto & Méndez, 2015), con los estudiantes se discutió; sus producciones matemáticas, los objetivos de cada situación, el eje de los diseños es decir la modelación escolar, el rol de los actores en el desarrollo del diseño y, grosso modo, los elementos teóricos que sustentaban la categoría. La tercera fase fue dar a conocer algunos métodos de recolección y análisis de datos cualitativos que permitieron validar el diseño y reflexionar sobre la práctica docente para esto nos enfocamos principalmente en el análisis de vídeos de clase (Climent, *et.al*., 2013), esto con el objetivo de que ellos rediseñaran o diseñaran su primera versión de actividad matemática para después ejecutar la ingeniería didáctica y validar el diseño, el trabajo culminó en un reporte escrito y una presentación oral en algún evento de la comunidad de matemática educativa, la cual podría ser: la Jornada Científico Estudiantil que realiza nuestra Unidad Académica, el Congreso Nacional de la Sociedad Matemática, la Escuela de Invierno en

Matemática Educativa y/o la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, todo esto porque en dichos eventos las propuestas son evaluadas y validadas por personas externas a quienes realizamos este proyecto.

Figura 1.

Figura 1. Esquema gerenal de las fases del proyecto

Los aspectos teóricos para la formación inicial de profesores son diversos pero coincidimos con Freudenthal (1991, citado en Alsina, 2010) quien argumentaba que el conocimiento sobre la práctica educativa tiene que ser un conocimiento creado por las personas en formación y no un conocimiento creado anteriormente por terceros y transmitido por ellos. De tal modo, que es determinante incluir a quien se forma, en el desarrollo de sus conocimientos y cómo él puede provocarlos, esto va a llevar a problematizar sus saberes matemáticos y didácticos, en concordancia con esto estuvieron planeadas nuestras fases.

Otro elemento que se considero es el análisis del discurso pues este favorece la interacción social y una mejor predisposición de los estudiantes al aprendizaje matemático (Alsina, 2010). Así cuándo se estudia a la formación inicial de profesores de matemáticas, la reflexión sobre la experiencia profesional constituyendo al desarrollo de conocimiento matemático y pedagógico de los profesores, pues le permite reconocer elementos puntuales sobre su práctica docente y esto lleva a modificar sus esquemas sobre la enseñanza (Parada & Pluvinage, 2014).

En esta exploración tratamos de articular los elementos citados anteriormente considerando que esto permitiría la problematización de saberes matemáticos (Reyes & Cantoral, 2014) y podría dar pie a nuevas prácticas docentes, esquemas sobre el rol del profesor y formas de desarrollar conocimiento.

El medio que permitió problematizar los saberes matemáticos es una categoría de modelación para la matemática escolar, la cual se nombro categoría de modelación escolar (Méndez, 2013), esta funciona como el argumento que organiza patrones de comportamientos involucrando las condiciones iniciales o criterios de una situación especifica, favoreciendo la constitución de conocimientos matemáticos. Los elementos principales de esta categoría son; la experimentación o experiencia evocada de donde se obtienen o tienen sentido los datos expresados en gráficas o tablas numéricas, las cuales al ser usadas para describir o analizar comportamientos locales y globales de lo estudiado se transforman en un modelo, además al querer predecir a corto o largo

plazo (o aproximar a un valor específico) promueve la formulación de expresiones algebraicas o analíticas siendo estas un conjunto que simboliza las condiciones iniciales y el comportamiento general de la situación estudiada. Todo esto se hace tangible en los diseños de situación, y para la experiencia que reportamos se uso esta categoría de modelación escolar para provocar el desarrollo de argumentos sobre la integral definida desde el uso de las gráficas.

En este escrito comparto el caso de Manuel un estudiante de la licenciatura en Matemáticas, con perfil en Matemática Educativa. Quien realizo una exploración de su diseño con jóvenes de la licenciara de matemáticas de primer año.

RESULTADOS Y REFLEXIONES

Los resultados que comparto fueron analizados en dos direcciones; desde el profesor en formación y desde mi rol como docente-investigador.

Desde el profesor en formación

Desde la experiencia de Manuel, su trabajo final consistió en elaborar un diseño de una situación de aprendizaje tomando en cuenta a la modelación escolar como marco referencial (Méndez & Cordero, 2014) para provocar los usos de gráficas- elementos numéricos - analíticos que resignificarán la integral definida.

De tal manera que Manuel rediseño una situación basada en el diseño de Tocto y Méndez (2015), con el objetivo de que los partícipes desarrollarán argumentos de la integral definida mediante el análisis local de las gráficas y la caracterización de su comportamiento por intervalos. Estos argumentos podrían ser expresados mediante la modelación de los datos gráficos, aplicando nociones de geometría analítica y cálculo. O bien mediante el uso del áreas bajo la curva, estudiando principalmente el uso de las nociones más que la “correcta aplicación de estas”.

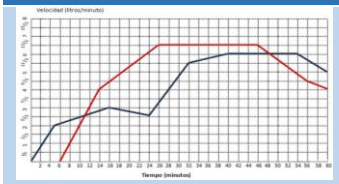
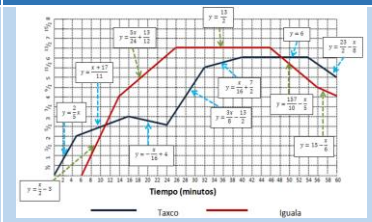
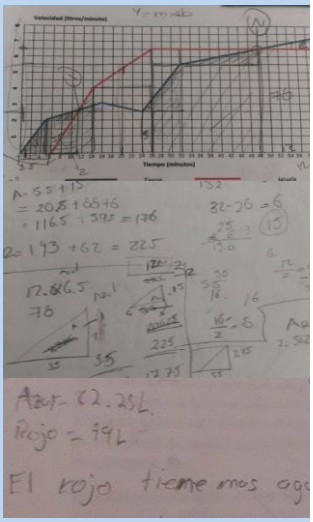
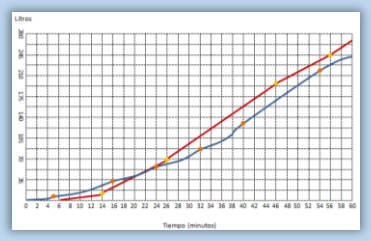
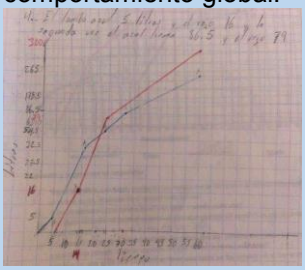
El diseño planteo el análisis de una situación que consiste en el llenado de dos tambos que son colocados debajo del canal de una casa (Figura 2), uno en la ciudad Taxco de Alarcón y otro en Iguala de la Independencia. Y se proporcionan gráficas que muestra el incremento por minuto del llenado de los tambos en un día lluvioso por un periodo de una hora, y desde el análisis de estas se pide responder a seis preguntas.

Figura 2. Canal de agua

Para Manuel, la evaluación del diseño fue; este logró provocar el análisis de la situación de manera que se comprende la importancia de las condiciones iniciales de la situación, la valoración de los comportamientos locales y provocar en los participes los usos de sus saberes hasta la construcción

de los modelos de funciones lineales y constantes. Agrego a su informe final una tabla que muestra; el diseño, lo que el esperaba que los participes hicieran y lo que realmente sucedió, a continuación tomo algunos elementos de la tabla original de Manuel

.

Lo que planteó	Lo que esperaba	Lo que aconteció
		Usaron la noción de área bajo la curva para calcular litros. 
Según las gráficas, 1. ¿en algún momento los recipientes se llenaran a la misma velocidad?, si es así, ¿cuántos litros tendrá cada tambo?", 2. "a los 26 minutos ¿qué tambo tiene más agua?", 3. "¿en algún instante los tambos tendrán el mismo contenido de agua? si es así, ¿cuántos litros tendrá?", 4. "¿cuántos litros de agua tendrá cada tambo desde que por primera vez tienen la misma velocidad de llenado hasta la segunda vez que tienen la misma velocidad?", 5. "expresa en una gráfica la forma en la cual se fueron llenando los tambos" y 6. "¿qué tambo se llenó más?".	Si usaban sus saberes escolares esperaba que identificarán las funciones a trozos de la gráfica, y después calcularan la integral definida, por ejemplo para la pregunta 2, si se calcula la suma de las integrales definidas de las funciones de Taxco: $\int_0^5 \frac{2}{5}x\,dx + \int_5^{16}\left(\frac{x+17}{11}\right)dx + \int_{16}^{24}\left(-\frac{x}{16}+4\right)dx + \int_{24}^{26}\left(\frac{3x}{8}-\frac{13}{2}\right)dx = 60\frac{1}{4}$ Después se calcula la suma de las integrales definidas de las funciones de Iguala: $\int_6^{14}\left(\frac{x}{2}-3\right)dx + \int_{14}^{26}\left(\frac{5x}{24}+\frac{13}{12}\right)dx = 68\frac{1}{6}$ Entonces hasta el minuto 26 el tambo de Iguala se ha llenado más que el de Taxco. La otra opción es que se calculará por aproximación con el área bajo la curva de cada sesión. Con respecto a la respuesta 5, se pretendía que la gráfica expresará los comportamientos globales. 	con lo cual se aproximaron a los resultados esperados. Sin embargo fueron más semejantes las gráficas que expresaron el comportamiento global. 

De la tabla anterior noten cómo pone él en juego sus saberes sobre integral definida, aunque cabe mencionar que cuando él estuvo en el rol de estudiante realizando el diseño de Tocto (Tocto & Méndez, 2015) no usó esto sino el área bajo la curva, lo cual nos deja ver que aún sigue privilegiando los argumentos tradicionales por sobre los funcionales. Durante su exploración del

diseño, se sorprendió cuando a los participes les fue más útil el cálculo del área por sobre la integral definida, pero comprendió que entonces hace falta "algo" más para tratar esto. Además, el mismo reflexiono sobre lo que este trabajo le dejo:

…lo puedo decir es que logre fortalecer mis conocimientos, además de que me ha servido como una plataforma para realizar investigaciones futuras…

… logre obtener experiencia en el proceso de enseñanza – aprendizaje mediante el uso de actividades de aprendizaje…

DESDE MI ROL DE PROFESOR-INVESTIGADOR

El desarrollo del proyecto me permite asentar que incluir a la investigación en la formación inicial permite a los jóvenes reconocer sus fortalezas y debilidades con respecto a sus saberes matemáticos, comprender en el uso las metodologías y valorar su práctica profesional. Además el diseño de una situación de aprendizaje formulado por ellos resulta ser un reflejo de sus saberes matemáticos, su comprensión teórica-metodológica.

Otro punto importante y motivante para los jóvenes es lograr tener un proyecto que compartir a la comunidad, es decir, esto los hace sentirse parte de la comunidad de matemáticos educativos.

En determinante voltear la mirada a la formación inicial de profesores de matemáticas, pues es cuando se quiere o se puede incluir elementos de la investigación en los programas de estudio. Es decir se requiere planear un proyecto de investigación con elementos específicos a problematizar desde un conjunto de unidades de aprendizaje, más que un seminario final de tesis, se requiere de una trabajo transversal a su trayectoria académica.

Agradecimientos. Se agradece al programa para el desarrollo profesional docente, para el tipo superior, por el financiamiento al proyecto "Modelación escolar y la construcción social de conocimiento matemático" con folio UAGRO-PTC-052.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, A. (2010).El aprendizaje reflexivo en la formación inicial del profesorado: un modelo para aprender a enseñar matemáticas. *Educación Matemática*, *22*, (1) 149-166.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En P. Gómez (Ed.) *Ingeniería Didáctica en educación matemática* (pp. 33-59). Una empresa docente & Grupo editorial Iberoamérica, México

Crespo, C. & Micelli, M. (2013). Representaciones y creencias de futuros docentes sobre la matemática. *Revista Premisa, 15*(59), 3-20.

Climent, N., Romero-Cortés, J., Carrillo, J., Muñoz- Catalán, M. & Contreras L. (2013). ¿Qué conocimiento y concepciones movilizan futuros maestros analizando un vídeo de aula?. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 16* (1),13-36.

García, L., Azcárate, C, & Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (1), 85-116.

Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del profesor de Matemáticas. *Revista Iberoamericana de educación Matemática, 20*, 13-31.

Llinares, S. (1990). Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y el diseño de programas de formación. *Revista de Didáctica de las Matemáticas, 51*, 92-101.

Méndez, M. (2013). *Desarrollo de red de usos del conocimiento matemático: la modelación para la matemática escolar.* (Tesis no publicada de doctorado). Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Méndez, M. y Cordero, F. (2014). La modelación. Un eje para la red de desarrollo de usos. En Lestón, P. (Ed.). *Acta latinoamericana de Matemática Educativa,* Vol. 27, (1603-1610). México, DF: Colegio de Matemáticas Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Moreno, M. & Azcárate, C. (2013). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las ciencias, 21* (2), 265-280.

OREALC/ UNESCO. (2006). *Modelos innovadores en la formación inicial docente*, en J. Murrillo (Coord.). Chile. ISBN: 956-8302-57-3

Parada, S. & Pluvinage F. (2014). Reflexiones de profesores de matemáticas sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17 (1), 83 -113.

Reyes, D. & Cantoral, R. (2014). Socioepistemología y Empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático. Bolema, 28(48), 360-382.

Solís - Espallargas, C., Escriva, I. & Rivero, A. (2015). Una experiencia de aprendizaje por investigación con Cajas negras en formación inicial de maestros. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias 12*(1), 167-177, 2015.

Sosa. L. & Ribeiro, M. (2015). El conocimiento profesional como característica distintiva de profesionalización docente en la formación de profesores. *Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa, Educación*. Periodo: Enero – Junio. 1-19.

Tocto, M. & Méndez, M. (2015). Modelación y la emergencia de la integral. En R. Flores (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18,* 914-920. México, DF: Colegio de Matemáticas Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

DISCUTINDO ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS DA FORMAÇÃO DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMATICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL NO BRASIL

Renata Camacho Bezerra, Maria Raquel Miotto Morelatti
Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Brasil), Universidade Estadual Paulista (Brasil)
renata.bezerra@unioeste.br, mraquel@fct.unesp.br

Palavras chave: formação de professores, matemática, anos iniciais

Key words: teacher education, mathematics, early years

RESUMO: Devemos advogar em defesa da democratização do ensino e da busca de maior qualidade no mesmo, e para isso é necessário que a sociedade participe das decisões na educação, pois a escola e o professor, e de forma particular neste artigo, o professor de Matemática, que não mudar frente às novas demandas sociais poderá provocar a exclusão, a evasão e consequentemente o fracasso no processo de ensino e aprendizagem. Num país tão contraditório de riquezas e pobrezas em universos tão próximos, a escola e a educação no Brasil, nunca foram tão acessíveis como nas últimas duas décadas! Ainda podemos melhorar muito, mas é importante pensarmos a qualidade na educação como um processo e não apenas como resultado de um determinado momento histórico. Diante disso, neste artigo (re)construímos a história da formação do professor que ensina Matemática no Brasil e com isso esperamos contribuir com o repensar a formação do professor no Brasil.

ABSTRACT: We should advocates for the democratization of education and the search for higher quality in it, and it is necessary for society to participate in decisions on education because the school and the teacher, and in a particular way in this article, the math teacher, that does not change the face of new social demands can lead to exclusion, avoidance and consequently failure in the process of teaching and learning. In a country so contradictory of wealth and poverty in so close universes, school and education in Brazil have never been as accessible as in the last two decades! We can still greatly improve, but it is important to think about the quality of education as a process and not just as a result of a particular historical moment, before that, this article (re) construct the history of the teacher education who Mathematics teaches in Brazil and with it we hope to contribute to rethink the teacher education in Brazil.

INTRODUÇÃO

Acredito que devemos advogar em defesa da democratização do ensino e da busca de sua maior qualidade e, para isso, é necessário que a sociedade participe das decisões na educação, pois a escola e o professor e, de forma particular, neste artigo, o professor de Matemática, que não mudar frente às novas demandas sociais poderá provocar a exclusão, a evasão e, consequentemente, o fracasso no processo de ensino e aprendizagem.

Num país tão contraditório de riquezas e pobrezas em universos tão próximos, a escola e a educação em nosso país, nunca foram tão acessíveis no Brasil! E podemos constatar isso quando analisamos a história, como bem afirma Saviani (2011), *"... o presente se enraíza no passado e se projeta no futuro. Portanto eu não posso compreender radicalmente o presente se não compreender as suas raízes..."* (Saviani, 2011, p.04).

Ainda podemos melhorar muito, mas é importante pensarmos a qualidade na educação como um processo e não apenas como resultado de um determinado momento histórico. E na busca por mais qualidade no ensino é necessário repensarmos nossas escolas e a educação, frente às novas demandas sociais, e com isso também repensar a formação de professores.

Embora acreditemos que a mudança na formação do professor não é suficiente para mudar a educação como um todo, ela é totalmente necessária para começarmos a repensar e a discutir a educação e a escola.

Diante do exposto acima não é possível e nem é nosso objetivo esgotar a discussão, pois apenas apresentamos discussões e considerações acerca da bibliografia estudada e das reflexões coletivas e individuais realizadas.

Resgate Histórico da Formação dos Professores e dos Professores que Ensinam Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental no Brasil

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB (Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996), em vigor, estabelece em seu capítulo VI, artigo 62 que:

> A formação de docentes para atuar na educação básica far-se-á em nível superior, em curso de licenciatura, de graduação plena, em universidades e institutos superiores de educação, admitida, como formação mínima para o exercício do magistério na educação infantil e nas quatro primeiras séries do ensino fundamental, a oferecida em nível médio, na modalidade Normal (Brasil, 1996, p.20)

Diante disso, temos que o professor habilitado a lecionar Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental teve sua formação em nível superior no Curso de Pedagogia ou Normal Superior ou em nível médio, no curso normal/magistério/CEFAM.

No ensino superior, a Resolução do Conselho Nacional de Educação/Conselho Pleno CNE/CP no. 01 de 15 de Maio de 2006 determina que os egressos dos cursos de Pedagogia devam estar aptos a *"VI- ensinar Língua Portuguesa, Matemática, Ciências, História, Geografia, Artes, Educação Física, de forma interdisciplinar e adequada às diferentes fases do desenvolvimento humano".*

Para compreendermos o alcance dessas Leis, bem como a sua importância, é necessário, (re)construir a história e entender como a formação de professores se deu ao longo dos anos na educação do país.

Para Romanelli (1986), os jesuítas foram à primeira figura representativa do professor no país.

> Assim, os padres acabaram ministrando, em princípio, educação elementar para a população índia e branca em geral (salvo as mulheres), educação média para os homens da classe dominante, parte da qual continuou nos colégios preparando-se para o ingresso na classe sacerdotal, e educação superior religiosa só para esta última. A parte da população escolar que não seguia a carreira eclesiástica encaminhava-se para a Europa, a fim de completar os estudos, principalmente na Universidade de Coimbra, de onde deviam voltar os letrados (Romanelli, 1986, p.35)

Além disso, segundo a autora, "*A obra da catequese, que, em principio constituía o objetivo principal da presença da Companhia de Jesus no Brasil, acabou gradativamente cedendo lugar, em importância, à educação da elite*" (Romanelli, 1986, p.35).

No período que compreende o Brasil colônia, passando pelas aulas régias implantadas pelas reformas pombalinas até os cursos superiores criados a partir da vinda de D. João VI, em 1808, é praticamente inócua a preocupação com a formação de professores (Tanuri, 2000).

> Nos períodos de inexistência da escola normal e mesmo durante o seu funcionamento, as várias províncias lançaram mão de instrumentos economicamente mais interessantes para recrutamento de docentes: os exames ou concursos. Estes, limitados, às matérias do ensino primário e aos "métodos principais de ensino", submetidos a uma política partidária de protecionismo e desprovidos de rigor, só puderam carrear para o magistério um pessoal de baixo nível e exíguas habilitações... (Tanuri, 2000, p.65)

A formação de professores durante muito tempo não foi prioridade do governo, e ainda hoje em alguns aspectos não o é, embora historicamente possamos perceber que há muito já havia preocupação com a seleção dos professores.

> Iniciativas pertinentes à seleção não somente antecedem as de formação, mas permanecem concomitantemente com estas, uma vez que, criadas as escolas normais, estes seriam por muito tempo insuficiente, quer numericamente, quer pela incapacidade de atrair candidatos, para preparar o pessoal docente das escolas primárias (Tanuri, 2000, p.62).

Em 1827, quando foi promulgada a Lei Geral do ensino, de acordo com Almeida (2009), a preocupação com a formação de professores aparece legalmente pela primeira vez, pois a lei determinou a criação de escolas de primeiras letras e estabeleceu exames de seleção para mestres e mestras. Porém, somente sete anos depois, em 1833, foi criada a primeira escola normal brasileira em Niterói, no Rio de Janeiro, que teve uma pequena duração, pois foi fechada em 1849.

> Na verdade, em todas as províncias, as escolas normais tiveram uma trajetória incerta e atribulada, submetidas a um processo contínuo de criação e extinção, para só lograrem algum êxito a partir de 1870, quando se consolidam as ideias liberais de democratização e obrigatoriedade da instrução primária, bem como de liberdade de ensino... (Tanuri, 2000, p.64)

Ainda, de acordo com Tanuri (2000), quando de sua instalação, algumas escolas normais apresentavam uma organização didática muito simples, pois o conteúdo não ultrapassava o nível primário, ou seja, aprendia o que se ia ensinar e, ainda, a formação pedagógica se limitava a uma única disciplina que podia ser Pedagogia ou Métodos de Ensino.

Na época em que as escolas normais foram criadas, em 1833, para ser professor bastava ser uma pessoa de bem, exercer o magistério por dois anos e ser aprovado em concurso promovido pelas Províncias (Almeida, 2009). Com isso, as escolas normais se estabeleceram em grande parte por iniciativas das Províncias e, a principio, eram destinadas aos homens e depois passou a atender as mulheres pertencentes à burguesia.

Já em 1932, de acordo com Almeida (2009), o Manifesto dos Pioneiros ressaltava a importância da formação de professores primários ocorrer no ensino superior. Acreditava-se nesta época que unindo os princípios e os ideais se elevariam a cultura dos professores e, consequentemente, a qualidade do ensino. Na literatura consultada, pela primeira vez aparece a vinculação direta entre a qualidade do ensino e a formação do professor.

Vale destacar que o curso de pedagogia foi criado oficialmente no Brasil em 1939 através do Decreto-Lei no. 1.190, de quatro de abril, com características diferentes das que temos hoje e, também, o Decreto Lei 8.530/46 que normatizou o ensino normal. Em 1953, foi criado o Decreto-Lei 1821 que equiparou os cursos normais aos cursos secundários, possibilitando a viabilização do acesso ao ensino superior.

Ainda em 1946, era grande o número de professores leigos principalmente porque havia um limite de 25 anos para o ingresso ao curso normal, diante disso muitos professores não puderam se qualificar e, na visão de Almeida (2000), este momento histórico contribuiu para a precariedade do salário dos professores, bem como, de suas condições de trabalho.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei 4.024 de 20/12/1961), de acordo com Tanuri (2000), trouxe a equivalência legal de todas as modalidades de ensino médio, descentralizou a administração e promoveu a flexibilidade curricular que possibilitou o rompimento da uniformidade curricular das escolas normais. Esse fato acarretou uma distorção ainda maior na formação de docentes em todo o país. A LDB de 1971 extinguiu a formação de docentes em cursos normais (de nível ginasial) e o curso normal passou a ser um dos ramos da profissionalização de 2º. Grau, que passou a ser denominado de Habilitação Especifica para o Magistério de 1º. Grau, constituindo-se de uma base comum obrigatória para todo o país. Além disso, a formação de especialistas e professores para o curso normal passou a ser feita apenas pelos cursos de Pedagogia. A LDB de 1996 possibilitou a formação de professores em nível médio e superior e avança ao considerar a formação em nível superior, mas ao mesmo tempo é tímida nesse avanço, pois ainda admite como mínima a formação em nível médio.

> À formação, em nível superior, de professores para o início da escolaridade vêm-se desenvolvendo pontualmente na última década, em alguns estados do país, em Institutos Superiores de Formação de Professores. Embora em escala reduzida, tais experiências devem ser registradas como reflexo das preocupações pertinentes à melhoria da qualidade da formação e como tendência cada vez mais destacada de elevar essa formação ao nível superior. (Tanuri, 2000, p.84)

Ao longo dos anos houve algumas iniciativas governamentais de incentivo à formação docente, do profissional que atua nos anos iniciais do ensino fundamental, mais precisamente, na década de 80, merecendo destaque o projeto CEFAM – Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério. Uma iniciativa que se deu primeiro em âmbito federal e depois estadual. Embora em diversos períodos houvesse orientações através de Leis e Decretos, a educação no país sempre

foi marcada, desde o descobrimento, pelas discrepâncias entre os estados e, há que se ressaltar que, até o início da República, pouco se "*fez no terreno da educação popular*" (Tanuri, 2000).

Não se vislumbra ao longo da história nenhuma preocupação com o ensino da Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental e os primeiros registros não mostram sequer a preocupação com a formação deste professor, bastava ter algum conhecimento e boa reputação para ser professor em nosso país. Com o passar dos anos passa a ser atribuída importância à formação dos professores, também porque se vislumbra nela a possibilidade de melhorar a qualidade na educação.

A literatura nos mostra que é na década de 80 que a formação de professores ganha destaque no cenário mundial e nacional. Nessa mesma década, a formação de professores de Matemática e dos que ensinam Matemática em todos os níveis ganha considerável destaque, que ocorre por diversos motivos, dentre eles, pelo baixo desempenho de nossos alunos nos exames nacionais e internacionais no que tange à disciplina e pelo movimento conhecido como Educação Matemática que ganha força e destaque no cenário nacional e mundial. Embora algumas ações vinculadas à Educação Matemática datem de muito antes, é nesta década que se ganha visibilidade, com base na literatura consultada, a discussão sobre a formação do professor que ensina Matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Corroborando com Vieira e Gomide (2008), acreditamos que é importante refletir a trajetória da escola para se chegar à implantação de reformas educacionais que orientem a formação docente com vistas à implantação de um novo projeto social e, ainda, estudar a formação de professores, pois a mesma se constitui num elemento fundamental para se atingir os objetivos visados pela educação, uma vez que é o professor que, em sua prática, operacionaliza as grandes linhas propostas pelas reformas educacionais. "... A educação no Brasil teve avanços, como na universalização e no acesso ao ensino fundamental, mas ainda permanece marcada pelas características históricas e sociais das nossas inúmeras diferenças e desigualdades" (Leite, 2011, p.15).

Como diz Beisiegel (2005, p.115) *"..., a escola não perdeu qualidade, uma vez que ela foi se alargando se estendendo a setores cada vez mais amplos da população. A escola mudou"*. Diante disso,

> Se a escola pública quiser ser fiel à sua origem e vocação democrática, ela terá de se ajustar ao novo papel de educadora universal e principalmente das crianças de famílias socialmente excluídas. O que significa repensar-se por inteira e recolocar o conteúdo da instrução, a metodologia didática, a formulação de regras de conduta e o disciplinamento dos participantes do processo educativo. Chego a pensar que a reforma requerida pode beirar uma revolução à medida que exige de professores, que provavelmente sempre se enxergaram como diferenciadores, a conquista de uma nova identidade. (Singer, 1996, p.14)

Como afirma Di Giorgi e Leite (2010), o senso comum nos faz acreditar que a expansão quantitativa não foi acompanhada pela expansão qualitativa, no entanto precisamos ter noção de que "... a expansão quantitativa de vagas e de alunos matriculados representou uma conquista

para a maioria da população brasileira, gerando uma nova situação histórica" (Di Giorgi; Leite, 2010, p. 305).

É fato que a escola que não muda provoca exclusão, por isso advogamos por uma maior democratização do ensino e pela busca de sua melhor qualidade, entendendo que a sociedade mudou e a escola deve mudar também. Hoje, necessitamos de uma escola que, como afirma Di Giorgi (2004), se preocupe com a educação de forma global e com o aluno em seus diferentes contextos.

> ... a finalidade da educação escolar na sociedade tecnológica, multimídia e globalizada, é possibilitar que os alunos trabalhem os conhecimentos científicos e tecnológicos, desenvolvendo habilidades para operá-los, revê-los e reconstruí-los com sabedoria. O que implica analisa-los, confrontá-los, contextualizá-los. Para isso, há que os articular em totalidades que permitam aos alunos irem construindo a noção de "cidadania mundial" (Pimenta, 2000, p.23)

Diante disso; a escola, as disciplinas e, de forma particular, a Matemática deve contribuir com a educação que se quer no nosso país e para isso,

> Há uma necessidade de os novos professores compreenderem a Matemática como uma disciplina de investigação. Uma disciplina em que o avanço se dá como consequência do processo de investigação e resolução de problemas. Além disso, é importante que o professor entenda que a Matemática estudada deve de alguma forma, ser útil aos alunos, ajudando-os a compreender, explicar ou organizar sua realidade (D´Ambrosio, 1993, p.35)

Os cursos de formação de professores devem permitir que os futuros professores de Matemática ou dos professores que irão ensinar Matemática possam compreender a Matemática de uma forma diferente, pois "*As pesquisas sobre a ação de professores mostram que em geral o professor ensina da maneira como lhe foi ensinado*" (D´Ambrosio, 1993, p.38) e, ainda, "*... futuros professores constroem seu conhecimento sobre o ensino da Matemática através de suas experiências com o ensino",* diante disso, é fundamental que o futuro professor que ensina Matemática vislumbre em sua formação "*... à investigação, à resolução de problemas, às aplicações, assim como uma análise histórica, sociológica e política do desenvolvimento a disciplina"* (D´Ambrosio, 1993, p.39).

> Embora o saber seja pessoal e evolua com o tempo e a experiência, ele é *cultural*, isto é, constitui-se "pela interação com os outros 'membros da nossa cultura'". O nosso saber não é isolado, ele é partilhado e transforma-se, modifica-se a partir da troca de experiências e da reflexão coletiva com os outros (Fiorentini; Júnior; Melo, 1998, p. 322).

Portanto, seja na Matemática ou em qualquer outra disciplina, corroboramos com Tardiff (2011) quando nos diz:

> Defendo, portando, à unidade da profissão docente do pré-escolar à universidade. Seremos reconhecidos socialmente como sujeitos do conhecimento e verdadeiros atores sociais quando começarmos a reconhecer-nos uns aos outros como pessoas competentes, pares iguais que podem aprender uns com os outros. Diante de outro professor, seja ele do pré-escolar ou da universidade, nada tenho a mostrar ou a provar – mas posso aprender com ele como realizar melhor nosso ofício comum (Tardiff, 2011, p. 244).

Por tudo que foi apresentado e discutido até esse momento, acreditamos que cada vez mais é "... *imprescindível ressaltar a importância do papel do professor na educação de qualidade. Não existe educação de qualidade sem professor de qualidade"* (Di Giorgi; Leite, 2010, p.320).

> E ..., professor de qualidade é profissional bem formado, motivado, com formação continuada baseada nos problemas da prática, realizada principalmente na própria escola, que participa ativamente do projeto politico-pedagógico, que pensa a sua prática. É o professor intelectual, crítico-reflexivo. Para que haja tais professores, é necessário mudar a sua formação inicial, a sua formação continuada e, sobretudo, a relação vertical, autoritária e desrespeitosa que caracteriza a forma de atuação da maioria das instâncias educacionais centrais com os professores (Di Giorgi; Leite, 2010, p.320).

Ainda há muito por fazer em nossa educação e de forma particular na formação de nossos professores que ensinam matemática. Para que possamos transformar a escola que temos na escola que queremos, precisamos investir maciçamente na formação de professores, seja esta formação inicial ou continuada.

A partir do momento em que se começou a discutir a qualidade na educação e a vinculá-la diretamente a formação de professores, muita ações foram e ainda estão sendo propostas e executadas pelos governos federal, estadual e municipal, mas é fato que ainda há muito por fazer.

Não esgotamos o assunto e outros poderão dar continuidade ao (re)construir a história e ampliar as suas reflexões e proposições.

> Não obstante, mantiveram-se análises críticas e focos de resistência à orientação dominante na politica educacional, que tendem a se fortalecer, neste novo século, à medida que os problemas se agravam e as contradições se aprofundam, evidenciando a necessidade de mudanças sociais mais profundas. Nesse contexto, seria bem-vinda a reorganização do movimento dos educadores que permitisse a par do aprofundamento da análise da situação arregimentar forças para uma grande mobilização nacional capaz de traduzir em propostas concretas a defesa de uma educação pública de qualidade acessível a toda a população brasileira (Saviani, 2011, p.451).

Porém, reforço as ideias de Saviani (2011) sobre a importância da "*defesa de uma educação pública de qualidade acessível a toda a população brasileira*", ideias que bem retratam o sentimento ao finalizar as discussões e reflexões proporcionadas pelas leituras ao (re)construir parte da história da formação dos professores que ensinam Matemática no Brasil, história esta que se mistura e é parte da própria história da educação brasileira.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Almeida, M. B. (2009). *A Formação Inicial de Professores no Curso de Pedagogia: Constatações sobre a Formação Matemática para a Docência nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental.* Dissertação de Mestrado. UEM, Maringá, Paraná, Brasil.

Brasil. (1961). *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*: nº 4.024/61. Brasília.

Brasil. (1971). *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*: nº 5.692/71. Brasília.

Brasil. (1996). *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*: nº 9.394/96. Brasília.

Brasil. (2006). *Resolução do Conselho Nacional de Educação* CNE/CP 1/2006. Diário Oficial da União, Brasília, Seção 1, p. 11.

Romanelli, O. de O. (1986). *História da Educação no Brasil*. 8ª. Edição. Petrópolis/RJ: Vozes.

Saviani, D. (2011). *História das Ideias Pedagógicas no Brasil.* 3ª. Edição. Campinas/SP: Autores Associados.

Tanuri, L. M. (2000). História da formação de professores. *Revista Brasileira de Educação. (14)* São Paulo/SP.

LA FORMACIÓN INICIAL DE MAESTROS. EPISTEMOLOGÍA, CARACTERÍSTICAS Y PERSPECTIVAS

Roberto Byas, Ramón Blanco Sánchez.
Universidad Autónoma de Santo Domingo (República Dominicana), Universidad de Camagüey (Cuba)
robertobyas@hotmail.com, ramón.blanco@reduc.edu.cu

Palabras clave: formación inicial, epistemología, matemática

Key words: initial preparation, epistemology, mathematics.

RESUMEN: El presente trabajo reporta los resultados parciales de una investigación en curso, realizada en colaboración entre la Universidad Autónoma de Santo Domingo (UASD) y la Universidad de Camagüey (UC), desarrollada con el objetivo de determinar causas y llegar a propuestas para mejorar la formación de los futuros docentes de Matemática. La formación de un maestro exitoso en la sala de clases depende de múltiples factores, pero en el presente trabajo se aspira a trabajar con aquellos que pueden presentar un mayor efecto en el resultado esperado, de modo que sea posible alcanzar una mejoría en la preparación de los docentes.

ABSTRACT: The present work reports partial results from an research in course, carried out in collaboration among the Autonomous University of Saint Domingo (UASD) and the University of Camagüey (UC), the aim of the investigation is to determine causes and to arrive to proposals in order to improve the formation of futures mathematical teachers.

The training of a successful teacher at the lecture room depends of multiple factors, but at the present work, it aspires to work with those factors that present a bigger effect in the prospective result, so that will be possible to reach a improvement in the preparation of the teachers.

INTRODUCCIÓN

Los estudios realizados muestran la gran variedad de problemas que enfrenta la formación de maestros de Matemática en los diferentes niveles educacionales, problemas que por demás tienen un carácter universal, aunque se agudiza en los países de América Latina, en especial en aquellos con un menor desarrollo.

La formación de maestros de Matemática exitosos en la sala de clases es una necesidad para el desarrollo científico de nuestros países, dado que el mundo tecnológico en el que vivimos demanda continuamente más conocimientos matemáticos y mayor profundidad en los mismos.

La situación actual en la formación de maestros de Matemática no es algo que se pueda resolver de manera inmediata, pero es necesario trabajar en aras de mejorar esta situación, donde la determinación de los problemas que se manifiestan en dicho proceso formativo es un punto de partida para avanzar en la dirección adecuada.

También es necesario proponer vías de solución basadas en estudios rigurosos sobre el proceso formativo de los maestros de Matemática y las características ontológicas y epistemológicas de la Matemática, de modo que las acciones que se realicen tengan fundamentos científicos, que brinden cierta garantía de éxito en el trabajo a realizar.

DESARROLLO

En la literatura especializada se puede encontrar reiteradamente que uno de los problemas notables que presenta la formación de maestros, de manera general, y de forma más notoria en países de América, está dado en que las carreras de formación docentes no presentan mecanismos de selección ni de especificidad adecuados para atraer estudiantes talentosos y aptos para esta profesión.

Es un hecho que la mayoría de estudiantes en carreras de educación no provienen de los percentiles superiores de los niveles precedentes. Esto establece que el recurso humano que se dedica a la docencia posee, de entrada, serias limitaciones.

Un ejemplo es el caso de España, donde se considera que hay suficientes estudios que señalan los déficits educativos de la enseñanza secundaria, y que se puede constatar que gran parte de los estudiantes de la Facultad de Educación carecen de conocimientos matemáticos, así como de la capacidad para expresarse y argumentar sobre conceptos matemáticos básicos (Palarea, 2011).

Pero el que las carreras docentes no resulten atractivas a los jóvenes, es un problema que se escapa al alcance de las instituciones a cargo de la formación de los mismos, es un problema que depende en gran medida de la posición social que ocupa el docente, la cual es superada por la que ocupan otros profesionales, esta situación influye en los jóvenes a la hora de decidir por una profesión determinada.

Por lo tanto, aunque esta es una causa bien identificada, que influye en los resultados respecto a la formación docente, ya que al no contar con alumnos con buen desarrollo cognoscitivo, hay que ajustar el desarrollo del proceso formativo a las posibilidades reales de los alumnos con los que se cuenta, lo cual introduce ciertas limitaciones en los resultados a alcanzar, esta es una causa sobre la que no es posible influir desde las instituciones a cargo de la formación de maestros.

Por lo que es más importante atender aquellas situaciones sobre las que se puede trabajar desde las instituciones a cargo de la formación de los maestros, como la que se manifiesta con un grado de generalidad amplio, la cual consiste en la casi inexistente pedagogía específica de la Matemática, los estudiantes reciben asignaturas de corte pedagógico, pero no vinculadas de manera directa al proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática, ya sea referida a temas o contenidos específicos o ligados a las características epistemológicas propias de esta ciencia.

Por otra parte no preparan para articular adecuadamente pedagogía y Matemática en la mediación pedagógica, no incluyen en sus planes experiencias o resultados relevantes presentes en la educación matemática internacional y en la mayoría de los casos están desvinculados de la práctica de aula (Alfaro y Alpizar, 2013).

Se entiende que la formación inicial y permanente de docentes de Matemática carece de elementos y experiencias integradoras de conocimientos matemáticos y pedagógicos, que permitan a los futuros profesionales construir, revisar y modificar sus sistemas conceptuales, aptitudes y habilidades como parte de su proceso de aprendizaje (Rico, 2004). Se requiere que el maestro pueda distinguir entre el conocimiento de la ciencia en sí y el conocimiento de la ciencia a enseñar, alegando que la transposición didáctica no implica un conocimiento simplificado de la ciencia, sino un conocimiento diferente (Martín, 2013).

Por otra parte, en el caso de España, se considera que hay suficientes estudios que señalan los déficits educativos de la enseñanza secundaria, y que se puede constatar que gran parte de los estudiantes de la Facultad de Educación carecen de conocimientos matemáticos, así como de la capacidad para expresarse y argumentar sobre conceptos matemáticos básicos (Palarea, 2011).

No obstante lo anterior, sistemáticamente se argumenta que no basta con la formación disciplinar del profesor de Matemática, se requieren del profesor conocimientos profesionales (como los conocimientos didácticos) que les permitan entender la complejidad de sus prácticas profesionales y cualificar su ejercicio acorde a las condiciones socioculturales del país (Guacaneme, 2013), (Godino, 2009).

La Asociación Internacional para la Evaluación de los Logros en Educación (IEA), por sus siglas en inglés, en el 2012, plantea que la enseñanza de la Matemática en las escuelas primarias y secundarias, cada vez es un reto mayor en todo el mundo, dado que por una parte la demanda de conocimientos cambia, donde se ha evidenciado, cada vez más claramente, que la respuesta a estas nuevas demandas de conocimientos a partir de reformas en la preparación de los maestros, resulta problemática dado una falta de consenso en lo que respecta hacia donde debe ser enfocada dicha reforma (Hill, Sleep, Lewis y Ball, 2007). Por otra parte existen pocos controles de calidad que se aplican en los planes de formación inicial de docentes (Alfaro y Alpizar, 2013).

Los autores del presente trabajo se afilian a una línea de investigación internacional que se ha orientado a procurar identificar el conocimiento necesario que debe adquirir el maestro para la enseñanza de la Matemática, de modo que pueda realizar un trabajo de calidad.

En esa dirección se encaminan los trabajos de los investigadores Deborah Ball, Thames, M. y Phelps, G. de la universidad de Michigan, quienes dirigen una serie de estudios con el fin de comprender cómo el conocimiento de los profesores da forma a su práctica de aula y cómo estas prácticas finalmente afectan el aprendizaje de sus estudiantes (Ball, Thames, y Phelps, 2008).

Estos investigadores y otros que también trabajan sobre esta línea han llegado a identificar diferentes tipos de conocimientos que contribuyen a la formación de los maestros de Matemática, o en otras palabras, conocimientos necesarios para que sean exitosos en la sala de clases.

Estas investigaciones han permitido determinar, que el maestro de Matemática no logra un trabajo docente de calidad, solo con poseer conocimientos matemáticos por una parte y pedagógicos por otra, pero sin una integración entre los mismos, sino que además el conocimiento matemático que necesita tiene diferentes características, esto es, que no es suficiente el conocimiento referido al "saber sabio" tiene que dominar además el "saber a enseñar".

Al respecto R. Martín argumenta la necesidad de una distinción adecuada entre el conocimiento de la ciencia en sí (saber sabio) y el conocimiento de la ciencia a enseñar (saber a enseñar), alegando que la transposición didáctica no implica un conocimiento simplificado de la ciencia, sino un conocimiento diferente (Martín, 2013).

Autores como Even y Ball, denominan el saber a enseñar: "Conocimiento Específico del Contenido" o sea el que corresponde al conocimiento matemático que permite al docente realizar tareas de enseñanza (Even y Ball, 2009). Mientras que otros autores definen el Conocimiento Específico del Contenido, como el "conocimiento matemático para enseñar. Además, denominaciones aparte, en muchos casos el contenido matemático que se ha ofrecido a los docentes en formación no se ha enfocado hacia un profesional que debe desenvolverse en la acción pedagógica.

Aunque se trabaja e investiga sobre los componentes de la preparación del maestro de Matemática, existen en la bibliografía diferentes denominaciones, por lo que en aras de una mejor comprensión de la propuesta al respecto, es necesario conceptualizar dichos componentes.

Por lo que en el presente trabajo se denominará: "Contenido específico para la clase" al contenido cuyo dominio permitirá al profesor tener múltiples maneras de conceptualizar el contenido del nivel correspondiente, representarlo de diversas maneras, usar diferentes registros de representación, determinar los aspectos clave de cada tópico, y ver conexiones con otros tópicos del mismo nivel. El dominio profundo del contenido específico para la clase, permitirá al maestro seleccionar las "grandes ideas" para ser propuestas a los alumnos, así como responder con flexibilidad a las cuestiones que le planteen.

Evidentemente el maestro no logrará un eficiente trabajo en el aula, si no tiene un dominio adecuado del "Contenido en la ciencia Matemática" de aquella parte de esta que debe llevar al aula, o en otras palabras el saber sabio.

Pero el maestro no solo necesita el dominio del contenido que aparece en el programa de la asignatura que imparte, debe poseer conocimientos de las relaciones existentes entre los distintos temas matemáticos y la trayectoria de su aprendizaje en los distintos niveles escolares, tanto precedentes como subsecuentes. El cual es denominado aquí: "Conocimiento en el Horizonte Matemático", esta es una de las distinciones más recientes, en lo que respecta a los diferentes aspectos de la preparación del maestro.

Realmente no es novedad que el docente deba conocer las relaciones existentes entre los distintos temas matemáticos y la trayectoria de su aprendizaje en los diferentes niveles escolares. No obstante, los autores consideran que resulta además de útil, necesario, establecer dichas

denominaciones, pues contribuyen a dar precisión al proceso de formación de maestros, tanto desde el currículo teórico, como de la ejecución del currículo en el aula.

Otra especificación, que aparece en la literatura y que también debe ser parte de la formación del maestro, se refiere a lo que denominan: "Conocimiento Específico del Contenido y de los Estudiantes", designando como tal, el que es utilizado al enseñar un contenido específico e incluye conocer aspectos particulares de los alumnos, sus errores comunes y sus dificultades habituales, mis concepciones o comprensiones erróneas, así como las estrategias que suelen utilizar. Es importante enfatizar que no se refiere a un conocimiento del estudiante de forma general sino en correspondencia al contenido con el que se trabaja.

En el presente trabajo, en aras de una mayor precisión conceptual, se denominará este aspecto como: Dominio del Contenido, la información y formación de los estudiantes. Insistiendo de nuevo en que dicha especificación no se refiere simplemente a un diagnóstico de los estudiantes para identificar sus conocimientos previos, sino que tiene como meta que el maestro identifique en cierta medida el desarrollo cognoscitivo de sus estudiantes, así como la forma en que enfrentan el nuevo contenido.

Resulta parta de la actividad del maestro que pueda juzgar la comprensión del alumno y conocer cómo evoluciona su razonamiento matemático, qué aprendizajes son previos a otros o qué tipos de problemas son comprensibles para su edad; así como las estrategias de cálculo comunes en los alumnos.

Conocer a los estudiantes como personas que piensan, implica tener sensibilidad sobre lo que los estudiantes piensan, lo que proporciona información adicional sobre cómo los estudiantes dan sentido a la Matemática y sobre cómo pueden construir sus conocimientos (Kristjánnsin, 2010).

Conocer a los estudiantes como personas que aprenden, supone ser consciente de la teoría del aprendizaje asumida y sus implicaciones en términos de las actividades de clase, las interacciones con los estudiantes y la forma de presentar el contenido.

Así la integración del Contenido específico para la clase con el dominio del Contenido Específico y de los Estudiantes, implica saber construir, a partir del razonamiento de los estudiantes y las estrategias utilizadas por ellos, procesos pertinentes para tratar y corregir sus errores y concepciones erróneas, seleccionar tareas de enseñanza, identificar y utilizar materiales y recursos didácticos, etc.

Evidentemente no es suficiente concluir que existe un contenido específico que el maestro debe dominar para impartir una docencia exitosa, o al menos de calidad, es necesario determinar cuál es este contenido, hasta qué punto debe dominarlo y además qué debe saber de sus estudiantes en relación con el contenido que imparte.

El docente de Matemática debe dominar fundamentos teóricos y prácticos que le permitan entender el orden lógico de los contenidos matemáticos según la percepción de los matemáticos puros y acorde con los libros de texto y planes de estudios; así como entender la percepción de los estudiantes de dichos contenidos, en concordancia con sus edades y desarrollo mental (Hill, Sleep y Lewis, 2008).

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se han podido precisar los diferentes tipos de contenidos que deben conformar la preparación del maestro de Matemática, concretando las características de cada uno, indicando de manera general que conocimientos debe componer cada uno de dicho contenidos.

Quedan dos aspectos en los que es necesario llegar a resultados concretos, por una parte determinar el currículo de cada uno de estos componentes: Contenido en la ciencia Matemática, Contenido específico para la clase, Conocimiento en el Horizonte Matemático y el Contenido Específico y de los Estudiantes.

Pero por otra parte, cómo integrar los componentes señalados en el proceso de formación de los futuros maestros, determinando un balance adecuado según el tiempo requerido para cada componente. Donde a lo que integración respecta debe ser efectiva, esto es, que desde cada componente se contribuya a la formación de los restantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alfaro, A. y Alpízar, M. (2013). El proyecto matemática para la enseñanza media (matem-una): percepción de los estudiantes sobre los cursos recibidos y las carreras en educación superior que eligieron. *UNICIENCIA* 27(1), 34-58.

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? [Conocimiento del contenido para la enseñanza: ¿Qué hace de esto especial?] *Journal of Teacher Education* [Revista de Formación de Profesores], 59(5), 389-407. 79. 60.

Even, R., y Ball, D. (2009). *The professional education and development of teachers of mathematics*: The 15th ICMI Study. New York: Springer.

Godino, J. (2009).Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Revista Unión*, SSN: 1815-0640 (en línea), Número 20, pp. 13-31.

Guacaneme E. A. (2013). Informe sobre la Formación inicial y continua de Profesores de Matemáticas: El caso de Colombia. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Año 8. pp 11-49.

Hidalgo, S. et al. (2008). Estatus afectivo-emocional y rendimiento escolar en matemáticas. *Revista Uno*, 49, 9-28. 91.

Hill, H., Sleep, L., Lewis, J., & Ball, D. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge: What knowledge matters and what evidence counts? In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111–156). Charlotte, NC: Information Age Publishing. 99.

Hill, H. Sleep, L., & Lewis, J. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers‟ Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.

Kristjánnsin K. (2010). *The self and its emotions*. Cambridge: Cambridge University Press.

Legg, A. & Locker, L. (2009). Math performance and its relationship to math anxiety and metacognition. *North American Journal of Psychology*, 11(3), 471- 486.

Martín, R. (2013). El dominio de los contenidos escolares: competencia profesional y formación inicial de maestros. *Revista de Educación*, 360( ), 363-387.

Olfos, R. (2010). Conocimiento Pedagógico del Contenido y su incidencia en la Enseñanza de la Matemática a Nivel de Educación Básica. *Proyecto FONIDE* Nº F410980.

Palarea, M. (2011). Informe del Seminario: La formación inicial del profesorado de matemáticas ante la implantación de los nuevos grados en infantil, primaria y máster de secundaria. *Educatio Siglo XXI*, 29 (2), 225-234.

Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. Profesorado. *Revista de Curriculum y Formación de Profesorado*, 8(1), 1-15.

LAS COMPETENCIAS DOCENTES COMO OBJETO DE ANÁLISIS: UNA EXPERIENCIA PARA REPENSAR LAS PRÁCTICAS EDUCATIVAS EN EL AULA DE MATEMÁTICA

Lilian Cadoche
Facultad de Ciencias Veterinarias, Universidad Nacional del Litoral (Argentina)
lcadoche@fcv.unl.edu.ar

Palabras clave: competencias docentes; análisis; revalorización; prácticas educativas; aula de Matemática

Key words: teaching skills; analysis; revalorization; educational practices; mathematics classroom

RESUMEN: Analizar la formación docente y las prácticas que producen resultados satisfactorios es un debate siempre vigente, tensionado por las exigencias de un sistema que requiere de actualización, experticia, tolerancia y hasta resignación. Para impulsar una reflexión y una relectura de la actividad pedagógica hoy se habla de la "formación por competencias". Este modelo apunta a pensar en una formación integral, que propicie tanto el "saber", como el "querer", "poder" y "hacer". Para el análisis del concepto de competencias docentes, en Universidad Nacional del Litoral (Argentina) un grupo de docentes investigadores reflexionamos respecto de las competencias necesarias en la formación del docente de Matemática, En el trabajo exponemos aquellas habilidades que definimos como "didáctico-pedagógicas" y nos detenemos en el análisis de las habilidades de programar, planificar, producir materiales de enseñanza, guiar el proceso educativo y evaluar en el aula de Matemática.

ABSTRACT: Analyze teacher training and practices that produce satisfactory results is a long ongoing debate, stressed by the demands of a system that requires updating, expertise, tolerance and even resignation. To encourage reflection and reread the pedagogical activity, we speak today about formation in competences. This model aims to think about an integral formation, that consider "know" as "want", "be capable" and "doing". For the analysis of the concept of teaching skills at Universidad Nacional del Litoral (Argentina) a group of researchers are thinking about the skills needed in the training of teachers of mathematics. In this work we expose those skills defined as "didactic and pedagogical "and we deepen in the skills for programming, planning, production of teaching materials, guide and evaluate the educational process in the classroom of Mathematics.

INTRODUCCIÓN

El debate sobre la formación docente y las condiciones que permiten procesos de enseñanza y aprendizaje satisfactorios, es rico, dinámico y siempre vigente. A veces motivado por inquietudes reales, a veces por modas importadas, a veces de prácticas exitosas que anhelamos repetir …

Ahora bien, hoy se habla de "formación por competencias", lo que desemboca en ¿qué competencias? ¿cómo formo en competencias?, e inexorablemente: ¿qué competencias necesito tener como docente?.

Y aunque los cambios, modas o "nuevos enfoques" puedan generarnos algunas molestias o confusiones, esta acción de repensar el acto educativo*, pone un nuevo énfasis sobre los objetivos praxeológicos de la formación (esto es, relacionados con la acción en busca de la satisfacción, y según prioridades), invisibilizados, o poco articulados con los epistémicos* (Coronado, 2009)

El enfoque de la "formación por competencias" construye un espacio estimulante para abordar cuestiones de la formación docente continua y en servicio, entendiendo esta como un proceso de interacción abierto, cooperativo, dialógico y flexible destinado al desarrollo de la profesionalidad docente en y desde su contexto cotidiano, buscando mecanismos de satisfacción personales con la tarea cotidiana y de satisfacción de los alumnos a quienes va dirigido nuestro esfuerzo.

Esta tarea puede dejarnos agobiados y rendidos o, por otro lado , estimularnos a buscar nuevos recursos, métodos o estrategias que permitan encontrar sentido y valor a nuestro esfuerzo.

Y la cosa pasa por asumir el rol de docente, como profesión, como trabajo, como origen de nuestros recursos económicos, pero también como fuente de satisfacción personal y estímulo para el crecimiento como seres humanos.

¿A que llamaremos competencia?

En este contexto, seguimos la propuesta de Coronado (2009) y entenderemos por competencia al *conjunto integrado y dinámico de saberes, habilidades, destrezas, actitudes y valores puestos en juego en la toma de decisiones, en el desempeño concreto del sujeto, en un determinado espacio (profesional, laboral, etc.).* Implica tanto un saber, como la habilidad, motivación y destreza para actuar en función de dicho conocimiento de una manera ajustada, reflexiva y creativa a la situación y el contexto. Y en este concepto se destaca ante todo la integración y articulación de saberes en contextos cambiantes. Se pueden poseer distintas capacidades, habilidades o dominios cognoscitivos pero estos recursos no son competencias si no están integrados.

La competencia no es una disposición previa a la acción (*talento natural*), sino que se adquiere, se desarrolla y consolida en ella. Ya generada, se constituye en recurso para futuras acciones y se suma al capital profesional del sujeto ampliando sus posibilidades de acción.

"En la competencia es indisociable el saber, de su puesta en marcha, por lo cual, los incidentes, los problemas o las situaciones de la práctica son oportunidades necesarias para el mantenimiento, enriquecimiento, complejización y desarrollo de las competencias" (Le Boterf, 1995, p.47).

Competencias Docentes

Cuando hablamos específicamente de Competencias Docentes no hablamos de competencias académicas, ni de aquellas asociadas a quienes poseen títulos docentes específicos, sino del que ejerce la docencia , esto es, su trabajo es la docencia.

Las competencias docentes implican, entre otros, un conjunto de desempeños en lo que hace al diseño, planificación, organización, atención a emergentes, ejecución, evaluación y ajuste de una "propuesta didáctica" intencional, articulada y coherente, inserta en contextos inciertos y cambiantes.

El concepto de "competencia" asociado a la educación ha sido objeto de cuestionamientos porque se vincula inmediatamente a la noción de "demanda del mercado". Recurriendo a Zabalza (2003, p.71),

"No se trata solo de generar dispositivos formativos para proporcionar trabajadores al mercado , sino de dotar al futuro trabajador de herramientas y recursos, de competencias polivalentes que incrementen su capacidad para tomar decisiones en torno a su propio proyecto laboral, en el marco de la realidad politico-social-económica en la que se haya inserto. Habilidades, destrezas y conocimientos que le permitan moverse, mutar, migrar y/o reciclarse dentro del sistema laboral."

En este esquema se concibe a la enseñanza dentro de un paradigma que la define como como " *una actividad compleja, contextualizada y cargada de valores, que requiere en muchas ocasiones, actuaciones de tipo ético o político. Una actividad situada social e históricamente, que involucra a instituciones y sujetos con sus condicionamientos y determinaciones*". (Ruiz Bueno, 2001).

Resumiendo, la complejidad del contexto sociocultural, los acelerados cambios, la emergencia de problemáticas inéditas en el campo educacional, plantean desafíos renovados a los docentes que tienen que estar cada vez más flexibles y abiertos al aprendizaje, como también a desaprender modalidades de trabajo que se tornan inadecuadas.

Y estas demandas de estrategias didácticas diseñadas, planificadas y ejecutadas con una intencionalidad formativa, conducen al campo laboral, y por ello la necesidad de "repensar" al docente como profesional competente para integrar la teoría y la práctica en, de y para el trabajo.

Se trata de mirar el desarrollo de nuestras competencias docentes como un proceso que nos ayude a perfeccionarnos profesionalmente, a cumplir con el mandato social que nos legitima y encontrar satisfacciones en lo que hacemos. Las competencias docentes son competencias profesionales por ello en su definición es preciso interrogar a la profesión y sus marcos epistemológicos y valores y a quienes la ejercen en tanto trabajadores respecto a qué hacen, cómo lo hacen y cómo saben que lo que hacen está bien hecho.

¿Qué significa la introducción del enfoque por competencias para la formación docente?:

- Un aporte para asegurar la pertinencia de las propuestas formativas
- Una vía para el acercamiento a las demandas internas (del sujeto como profesional preocupado por su desempeño) y externas, tanto de la institución educativa, como de la sociedad y sus destinatarios
- La superación de métodos de formación que generan conocimiento inerte o anecdótico, para centrarse en la actividad de los sujetos y en su potencial para utilizar sus conocimientos para la resolución de problemas
- Un énfasis en la importancia de aportar experiencias para construir profesionalidad

- Un intento por mejorar, más que la eficacia o excelencia, la laboriosidad y productividad, la preocupación por los condicionamientos del contexto, los resultados y el servicio.

UNA PROPUESTA

La competencia docente es básicamente una competencia social**,** tiene que ver con participar significativamente en lo institucional y político, con mediar profesionalmente las interacciones que derivan en el propio desarrollo personal, y fundamentalmente, del otro - el alumno - ser un agente de cambio, un transmisor y un recreador de cultura.

Por eso la propuesta de profesionalización desde un enfoque de competencias que alentamos desde este ensayo responde a un conjunto de premisas y principios:

- La formación docente continua responde a una inquietud manifiesta de los propios docentes, es un emprendimiento individual y colectivo
- Como dispositivo, constituye una oportunidad para la expansión o ampliación de la profesionalidad de base
- El docente en ejercicio es competente, cualquiera sea su experiencia, pero esta competencia puede enriquecerse por la formación
- La formación no “forma” o “desarrolla” ya que esto es atribución del sujeto; es solo una oportunidad sistematizada para enriquecer, ampliar, debatir, consolidar, las competencias que el sujeto posee
- La formación debe incidir en la relación del sujeto con su trabajo, en la forma en que percibe, analiza, organiza, reformula, cómo sobrelleva las tensiones y enfrenta los desafíos del porvenir
- El plan es alentar a diseñar estrategias, elaborar materiales, etc., que pongan en evidencia la integración de conocimientos, habilidades y valores (tomado de Coronado, 2009)

Competencias específicas didáctico-pedagógicas en el aula de Matemática

Recorreremos brevemente las competencias asociadas específicamente a la tarea didáctico-pedagógica para detenernos en su reflejo en la actividad en el aula de Matemática.

Competencia General

Diseñar, conducir y evaluar los procesos de enseñanza y aprendizaje observando, comprendiendo, aplicando y resignificando los marcos epistemológicos integradores de la educación, teniendo como meta que los alumnos desarrollen sus capacidades cognitivas, sociales y afectivas.

En esta competencia general diferenciamos:

1. Programar. Diseñar y estructurar un programa analítico acorde al diseño curricular, la normativa institucional y las necesidades de formación de los alumnos.

Programar en el aula de Matemática. Proponemos hacer foco en las competencias de:

- Seleccionar: Aquí se vuelve imprescindible la consulta a un texto actualizado, tecnológicamente asociado a potencialidades que apelen a distintos registros y permitan el ensayo repetido, la búsqueda de caminos de solución alternativos, etc.
- Jerarquizar: no es imprescindible que todo contenido deba ser expuesto en el aula y desarrollado sin permitir la incorporación de lecturas de otros autores, libros, etc. El docente debe jerarquizar los contenidos para mostrar aquellos relevantes, en palabras de Perkins (1995) "tópicos generativos" ricos en conexiones y disparadores de nuevos interrogantes
- Recortar: Inevitablemente no todo concepto puede ser incluido en la planificación para la enseñanza y el aprendizaje en el aula, sin embargo, sería menester recuperar la protección epistemológica de los contenidos a desarrollar. En el afán de administrar los tiempos siempre escasos, el docente relega a un lugar secundario (cuando no ausente) la formalización teórica. Esa desprotección del razonamiento que conduce a una propiedad o a una fórmula produce aprendizajes frágiles o ritualizados que frente a nuevos desafíos no permiten su recuperación y aplicación. No toda la teoría pero sí la necesaria para enmarcar las posibles derivaciones prácticas que la misma propone.
- Integrar: el proceso de integración es no solo necesario sino imprescindible. El aprendizaje de teorías, métodos de resolución, fórmulas, demandan de su inclusión en un entorno más complejo que permitan ver sus vínculos con esta y otras disciplinas. No alcanza con que sea útil aquí y ahora en esta clase para este problema, es preciso que su aprendizaje sea flexible para que pueda ser recuperado en otro espacio en el que sus alcances tengan validez y permitan hallar el resultado buscado.
- Diseñar, comunicar: Es saludable, necesario y recomendable que todo aquello que sea el producto del trabajo del docente para transformar conocimientos en objetos de aprendizaje sea conocido por los alumnos. El programa debería ser una "creación conjunta" permanente entre el docente y los resultados de su práctica educativa, en comunicación diaria con los alumnos, sus opiniones, reacciones, aprendizajes y errores. No hacemos hincapié en este ensayo en la acción de comunicar como "competencia docente" porque forma parte de otra propuesta del mismo grupo de trabajo pero en esta "comunicación" el docente acerca sus representaciones al alumno, establece los códigos de interacción, induce las formas de acercamiento al saber sabio con su impronpta, sus intencionalidades educativas y hasta su ideología.

2. Planificar. Desarrollar un plan de trabajo anual o semestral para el espacio curricular que contemple tiempos, recursos, actividades a llevar a cabo e instancias de evaluación y recuperación

Planificar en el aula de Matemática

Cuando hablamos de programar nos encontramos afuera del aula, con el corpus de conocimientos que deben ser incluidos en la propuesta educativa. Cuando planificamos bajamos al espacio de aula, con sus tiempos, sus limitaciones de espacio, sus códigos de interacción con los alumnos, su carga del aquí y ahora con estos actores, con estas circunstancias. Por lo tanto la planificación debe ser flexible, adecuada a cada contexto, con los recursos, tiempo y espacio disponibles. Es un quehacer cotidiano, que se estructura desde el programa pero que de manera circular se

retroalimenta de los avances diarios. ¿Cuándo enseñar? ¿de qué manera? ¿a quiénes? ¿con qué recursos?, son las respuestas que hay que hallar para planificar una actividad que debe plasmar en acciones el proyecto que estipula la programación. En el aula de Matemática diseñar una estrategia que interese, motive y estimule la participación, es hoy no una posibilidad sino una necesidad. Son nuevas cabezas con formas de reflexionar, interpretar y elaborar contenidos y procedimientos distintos a aquellas que integraban las aulas digamos, diez años atrás. El impacto de la imagen, la inmediatez, la posibilidad de respuestas inmediatas a casi cualquier tema vía internet, exige que el docente revise sus propuestas para asegurar teorías ricas que ofrezcan comprobaciones empíricas estimulantes, pero además con anclaje a una realidad movilizadora, que no necesariamente tiene que ser con los inevitables "problemas de aplicación", ficciones elaboradas para usar los conceptos sin demasiada creatividad, sino con propuestas que reten al aprendizaje ritual para invitar a relacionar, reflexionar críticamente, buscar varios caminos de abordaje e incluso cambiar de paradigma (del positivismo de la medida y la precisión, a la hermenéutica con su cuota de incertidumbre y posibilidad de resultados abiertos).

En la planificación como competencia docente se destacan la posibilidad de seleccionar, ordenar, secuenciar, prever, elaborar, diseñar, comunicar. Es una competencia porque es un guion abierto a la improvisación que debe integrar lo que establece el programa con las posibilidades reales que presenta el contexto, como mapa de ruta, y es en ella donde es más perceptible la profesionalidad docente. Detrás, antes de la práctica áulica es donde se despliega gran parte del trabajo docente.

Para los docentes de Matemática más que en otras disciplinas hay que estar preparado para habilitar a los alumnos a plantear sus dudas, a darles "permiso" para hablar, debatir, criticar para que el dudoso prestigio del que goza la materia -"es solo para inteligentes"- se despegue del imaginario colectivo para transformarse en una actividad rica, divertida y estimulante que establece las bases de muchas de las realizaciones identificadas hoy como grandes progresos humanos.

3. Producir actividades, materiales y entornos de instrucción. Diseñar actividades, entornos y materiales educativos conforme a criterios de relevancia, congruencia y funcionalidad

Producir actividades, materiales y entornos de instrucción en Matemática

Esta competencia se identifica como tal porque nadie mejor que el profesor puede seleccionar, diseñar, redactar, desarrollar, formular, analizar, sintetizar, prever, elaborar y comunicar actividades, materiales didácticos y entornos de enseñanza y aprendizaje que resulten exitosos no solo porque el rendimiento promedio medido por estándares convencionales así lo manifiesta, sino porque tanto el propio profesor como sus alumnos se identifican y comprometen con el intento educativo.

El docente competente elabora material que incluye teorías, lemas y teoremas indiscutibles y tal vez abstrusos, pero enfatiza la riqueza de su demostración para otras demostraciones y/o reflexiones lógicas. Utiliza con frecuencia anclajes históricos para volver creaciones humanas a abstracciones supuestamente alejadas del mundo real. Se esfuerza por emplear recursos de su entorno, procurando acercar la materia al sujeto, sus intereses y motivaciones; no ya por un programa prefijado sino por un proceso interactivo donde objeto de aprendizaje y aprendiz se imbrican, se enriquecen, y producen resultados que cumplen los objetivos didácticos pero además satisfacen las expectativas internas de sus actores. Diseñar entornos de aprendizaje cooperativo, de aprendizaje en servicio, de resolución de proyectos grupales, de integración de equipos

interdisciplinares pueden ser propuestas que cambien el tradicional espacio de interacción docente-alumno-matemática en otro más flexible, abierto a la discusión y a la creatividad, con el empleo de múltiples registros, con fortalezas en las representaciones gráficas pero sin recostarse en ellas como único estímulo.

Es un imperativo hoy la inclusión de tareas que apelen a todos los sentidos a los que la matemática puede movilizar: el sonido, la imagen, la armonía estética, la multiplicidad de formas de resolución de problemas que hoy con la ayuda de la informática son accesibles, prácticos y divertidos.

4. Guiar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Conducir el proceso de enseñanza y aprendizaje desarrollando un guion de clase y afrontando los emergentes propios de la dinámica de trabajo del entorno de aprendizaje seleccionado

Guiar el proceso de enseñanza y aprendizaje en Matemática

Aquí el docente competente organiza, desarrolla, comunica, promueve, ajusta, controla, adapta su propuesta didáctica al alumno. Es esta una competencia clave para el profesor de Matemática. La disciplina "per se" es de difícil captación inmediata, sea por sus altos niveles de abstracción o por las pocas (aparentes) oportunidades que ofrece para emitir opiniones o debatir en torno a sus conceptualizaciones. Sabemos por propia experiencia que el aprendizaje de la Matemática es generador o de grandes "odios" o de grandes "amores". Suscita entusiasmo en quienes disfrutan de sus algoritmos y su potencialidad para transformar en igualdades algebraicas o sistemas o gráficos el enunciado de problemas aparentemente ajenos a sus procesos de abstracción pero también genera rebeliones, negaciones y hasta disgusto en aquellos que la consideran una creación odiosa de algunos trasnochados que elaboraron argumentos farragosos para transformar en símbolos inentendibles problemas cotidianos o de aplicación a otras disciplinas. El docente debe generar confianza y voluntad de trabajo además de deseos de aprender. Su propuesta debe ser dinámica, adaptada a cada circunstancia, cada particularidad del tema, el contexto, sus recursos, los conocimientos previos, etc.

Es una competencia porque sin dudas sí debe promover aprendizajes, organizados, adaptados y controlados, debe responder integrando saberes disciplinares con competencias sociales que le permitan empatía con sus alumnos, confianza, capacidad para la resolución de conflictos, comunicación eficaz, condiciones sin las cuales sus intervenciones resultarán vacías y mudas para los oídos de sus alumnos.

En esta tarea la interrogación para corregir y controlar ayuda, promueve y desarrolla condiciones para el intercambio asertivo de ideas. Un buen docente desde esta propuesta es también un buen mediador, un "periodista" que interroga de modo que en la misma pregunta haya posibilidad de aprendizaje, de captar tópicos centrales, de interpretar oportunidades de aplicación y consecuencias que podría ocasionar el desconocimiento o uso incorrecto de conceptos o procedimientos.

5. Evaluar. Diseñar y planificar instancias e instrumentos de evaluación que permitan recolectar evidencias de conocimientos, desempeños y competencias transversales conforme a criterios de objetividad, transparencia y flexibilidad.

Evaluar en el aula de Matemática

El docente tiene entre sus tareas ineludibles la de controlar y legitimar conocimientos. El proceso de evaluación es uno de los más difíciles, muchas veces injusto y delicado que debe desarrollar. Su habilidad para realizar esta tarea se evidencia cuando planifica evaluaciones acordes a los contenidos compartidos, cuando busca evidencia de conocimientos que ha consensuado, cuando elabora, diseña, administra, revisa , en función del material que ha elaborado o elegido, los métodos que ha ensayado, los procedimientos que ha afianzado entre sus alumnos. En Matemática el lugar de la interpretación es inestable e impreciso, razón por la cual es preciso haber revisado problemas anteriores, analizado variables, enfatizado la validez del método para las condiciones adecuadas, contrastado teoría con ejemplos que le den fortaleza, resuelto problemas que tengan ricas derivaciones y oportunidades de aplicación con otras variable y/o datos.

El examen debe ser un instrumento tanto de recuperación de aprendizajes como de enseñanza. El error es tan ilustrativo como el acierto si se lo comparte, si se debate acerca del porqué de su aparición, si se lo toma como una posibilidad y no como un desastre.

La retroalimentación a partir del proceso de valoración es también una competencia que no se debe descuidar. El nuevo planteo didáctico, el nuevo material o la nueva interacción docente-alumno debería retomar los problemas observados en las evaluaciones para corregir caminos insistentemente errados y mostrar los detalles que permitirían que estos no se repitan. Cuando el docente competente se pregunta ¿qué aprendieron mis alumnos? debería preguntarse también ¿qué necesitan aprender? ¿qué necesito aprender yo?.

Las estrategias o técnicas de evaluación deberían contemplar las consignas que se han consensuado en el aula; si se solicitan interpretaciones, críticas, respuestas que no han sido compartidas o planteadas a priori es posible que el resultado de esa valoración no sea el esperado, no por falta de conocimientos sino por desacuerdos entre consignas y prácticas realizadas. Es en esos detalles importantes donde es preciso fijar acuerdos, regular expectativas, desafiar a la creatividad pero sobre la base de acuerdos preestablecidos y no esperar resultados sobresalientes de propuestas regulares, ni resultados insuficientes de propuestas bien elaboradas. Del equilibrio entre lo entregado, practicado y consensuado dependerá el éxito de la empresa educativa.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Coronado, M. (2009). *Competencias docentes: ampliación, enriquecimiento y consolidación de la práctica profesional*. Buenos Aires: Noveduc.

Le Boterf, G. (1995). *De la competence: essai sur un attracteur étrange.* París : Editions d'Organisation.

Perkins, D. (1995). *La escuela inteligente*. Barcelona: Gedisa.

Ruiz Bueno, (2001). *La evaluación de programas de formación de formadores en el contexto de la formación en y para la empresa*, Tesis doctoral, Barcelona: UAB.

Zabalza, M. (2003). *Competencias docentes del profesorado universitario*. Madrid: Narcea.

JOGO COM DADOS E A COMPREENSÃO DOS CONHECIMENTOS DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM FORMAÇÃO INICIAL SOBRE PROBABILIDADE

José Ivanildo Felisberto de Carvalho, Robson Macedo Candeias.
Universidade Federal de Pernambuco (Brasil), Universidade Anhanguera De São Paulo (Brasil)
ivanfcar@hotmail.com, profmacedo@uol.com.br

Palavras chave: educação matemática. ensino de probabilidade. formação de professores. conhecimento matemático para o ensino.

Key words: mathematics education. probability teaching. teachers' education. mathematical knowledge for teaching.

RESUMO: O propósito deste trabalho é discutir os conhecimentos necessários ao professor para o ensino de Probabilidade na escola básica por meio de uma atividade de jogos com dados. Temos como marco teórico os estudos sobre conhecimentos necessários aos professores para o ensino de matemática. Aplicamos uma atividade denominada "o lançamento de três dados" a um grupo de 48 estudantes de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do Brasil. Os resultados apontam lacunas e dificuldades no conhecimento desse grupo sobre Probabilidade. A formação de professores em matemática, especificamente concernente aos temas probabilísticos, deve ser melhorada para que seja possível alcançar patamar satisfatório do Conhecimento Matemático para o Ensino de Probabilidade.

ABSTRACT: The purpose of this article is to discuss the necessary knowledge of the teacher for teaching probability in elementary school through a gaming activity with data. We have as a theoretical framework the studies necessary knowledge to teachers for the teaching of mathematics. We applied an activity named "the launch of three dice" for a group of 48 students of Degree in Mathematics of a public university in Brazil. The results show gaps and difficulties in the knowledge of this group of probability. The formation of mathematics teachers, specifically concerning the probabilistic issues, must be improved so that it is possible to achieve satisfactory levels of Mathematical Knowledge for Teaching Probability.

INTRODUÇÃO

No Brasil, encontramos recomendações curriculares para que o ensino de Probabilidade seja abordado tanto na etapa de escolaridade do Ensino Fundamental (estudantes de 6 a 14 anos) como na etapa do Ensino Médio (estudantes de 15 a 17 anos) (Brasil, 1997; 1998; 2006). É justamente para essas etapas de escolaridade que professores de matemática em formação inicial serão responsáveis para desenvolver com os estudantes as noções elementares de Probabilidade. Dentre estas noções, temos a compreensão do acaso, experimentos aleatórios, mapeamentos de espaços amostrais e a quantificação de probabilidades, nos quais devem ser abordados e trabalhados com os estudantes visando o letramento probabilístico dos mesmos (Gal, 2005).

Os professores devem estar preparados para lidar com situações que envolvem a matemática da incerteza e do risco. Contreras, Díaz, Batanero e Cañadas (2013) têm sugerido a necessidade de melhorar a educação sobre Probabilidade que professores recebem durante sua formação para prepará-los mais adequadamente para a sua atividade docente. Os professores devem estar convencidos da importância da abordagem dos temas probabilísticos no Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Batanero (2015, p.13) aponta que a introdução da Probabilidade na escola, pode ser justificada por diversas razões, entre elas a de que “o azar impregna nossa vida e rodeia a criança desde a infância; é importante proporciona-lhes ferramentas para compreender o azar.”

A pesquisa que aqui tratamos se justifica pela necessidade de desenvolvermos investigações que tratem dos conhecimentos dos professores sobre Probabilidade, particularmente dos professores destinados a etapa de escolarização do Ensino Fundamental e Médio. Banatero (2015) advoga que investigações sobre Probabilidade são poucas comparadas com outros temas da Matemática. E que muitas das investigações que já foram conduzidas sobre Probabilidade situam-se em sua maioria com futuros professores de Educação Primária.

ANTECEDENTES

Fernandes, Ferreira, Kataoka, Souza e Gonçalves (2008) observam em seus estudos que atualmente no Brasil, a ausência de temas relacionados com a Probabilidade e estatística nos principais cursos de matemática é uma deficiência grave na formação inicial de professores. Isso vai influenciar a competência dos professores em trabalhar com o tema da Probabilidade no Ensino Fundamental e Médio.

Nos estudos de Pietropaolo, Silva, Campos e Felisberto de Carvalho (2015), com professores em exercício dos anos finais do Ensino Fundamental no Brasil, os resultados indicaram que uma parte razoável dos professores participantes da pesquisa tem domínio não-satisfatório de noções e procedimentos relativos à Probabilidade como, por exemplo, a determinação do espaço amostral para calcular a probabilidade de um evento. Foi possível também concluir que as estratégias utilizadas por esses docentes para ensinar Probabilidade não são muito diversificadas, possivelmente por não dominarem suficientemente tais noções. Ou seja, os professores demonstraram ter um repertório de estratégias insuficiente para a tarefa de ensinar as primeiras noções desse tema aos alunos do 6º ao 9º anos. Outro estudo foi o desenvolvido por Theis e Savard (2010)envolvendo conceitos probabilísticos e a preparação de aulas de Probabilidade por professores do Ensino Secundário, utilizando um software que simulava jogos de sorte-azar; os

autores consideram que os professores sujeitos de sua pesquisa não estavam suficientemente preparados para ensinar os conceitos de Probabilidade e não aproveitaram o uso do software para discutir os diferentes conceitos. Já Carter (2008) propôs um questionário a um grupo de 210 futuros professores, também do Ensino Secundário. Ao analisar as respostas encontrou erros na compreensão sobre sequências aleatórias e ainda, indiferença com respeito ao efeito do tamanho da amostra.

Ives (2009) realizou um estudo com cinco futuros professores de matemática do Ensino Secundário, com foco nos conhecimentos desses professores. Registros de entrevistas pessoais e das atividades realizadas foram analisados sob a perspectiva de alguns quadros teóricos, dentre eles os estudos sobre conhecimentos de professores de matemática baseado Ball, Thames e Phelps (2008), teoria essa que também utilizamos em nossa escolha teórica e discutimos na seção que se segue. A pesquisadora descobriu que os futuros professores apresentam orientações que tendem a ser quase objetiva (matemática e estatística), com pouca evidência de orientações subjetivas. Pontua que para um futuro professor com uma orientação matemática mais forte, eles podem ter dificuldade ao lidar com situações que são mais de natureza estatística e probabilística. Com a investigação a pesquisadora descobriu que as atividades que envolvem situações pedagógicas tendem a ser mais eficazes em induzir conhecimento do que atividades que envolvem apenas questões do conhecimento matemático.

Estes estudos apontam a urgência de uma melhor abordagem da Probabilidade na formação inicial do professor de matemática.

ESCOLHAS TEÓRICAS

Como o propósito deste trabalho é discutir os conhecimentos necessários ao professor para o ensino de Probabilidade na escola básica por meio de uma atividade de jogos com dados, tomamos como base os estudos de Ball, Thames e Phelps (2008). Esses estudos também nos serviram de guia na condução da atividade e na análise dos dados. Estes pesquisadores visão, entre outras questões, o que os professores necessitam saber e ser capazes de fazer, efetivamente, para desenvolver o trabalho de ensinar. Vamos discorrer sobre duas categorias deste modelo ao qual focamos neste texto – o conhecimento comum do conteúdo e o conhecimento especializado do conteúdo.

O *conhecimento comum do conteúdo* refere-se ao conhecimento colocado em jogo para resolver determinados problemas matemáticos por qualquer pessoa que tenha estudado Matemática seja professor ou não. No que diz respeito ao ensino de Probabilidade, o professor deve ter a capacidade de, por exemplo, diferenciar entre eventos aleatórios e determinísticos e mapear espaços amostrais de eventos mais simples.

No tocante ao *conhecimento especializado do conteúdo* – este inclui, por exemplo, aspectos como identificar ideias matemáticas que dão base a resolução de um problema e prever erros de alunos compreendendo as estratégias de raciocínio que determinados problemas matemáticos envolvem. Com o conteúdo de Probabilidade o professor deve dominar as noções que sustentam o conceito de Probabilidade e, além disto, compreender os diferentes papéis dos significados probabilísticos (intuitivo, clássico, frequencista, subjetivo e axiomático). O modelo aponta outras categorias que não explicitaremos nesse momento.

Outra escolha teórica em que nos embasamos consiste nos estudos de Batanero (2005). A autora discorre sobre cinco significados probabilísticos, a saber: intuitivo, clássico, frequentista, subjetivo e axiomático. Vamos tratar apenas sobre os dois significados abordados pela atividade "Lançamento de três dados" – o clássico e o frequentista.

O significado da Probabilidade clássica foi sistematizado por Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827) e é largamente utilizado no ensino até os dias de hoje: "a razão deste número àquele de todos os casos possíveis é a medida desta probabilidade, que assim não mais é que uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis (P_A) e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis (N)." (LAPLACE, 1814, p. 35 *apud* COUTINHO, 2007, p.16). Esta abordagem para encontrar *a priori* a probabilidade é denominada como probabilidade clássica, teórica ou até laplaciana: $P(A) = P_A / N$.

Considere-se que, no decurso de ***N*** realizações de uma experiência, um acontecimento ***A*** ocorre N_A vezes ($0 \leq N_A \leq N$). A probabilidade do acontecimento é definida como o limite, quando ***N*** tende ao infinito, da frequência relativa de ocorrência do acontecimento ***A.*** Esta definição compreende o significado frequentista. Como podemos observar a probabilidade frequentista é calculada com base na realização de um número crescente de ensaios. Podemos dizer que é uma probabilidade calculada *à posteriori.* Assim, a abordagem frequentista vai relacionar a probabilidade da experiência aleatória com a frequência relativa do acontecimento, que tende a estabilizar quando se repete esta experiência um número grande de vezes tendendo a infinito: $\lim_{n\to\infty} Fr_n (A) = P(A)$.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esta investigação corresponde a um estudo de caso, no qual aplicamos uma análise qualitativa de conteúdo para extrair e compreender os conhecimentos dos participantes da pesquisa durante a implementação de uma sequência didática orientada para a construção do conhecimento sobre probabilidade. Salientamos que neste estudo com os licenciandos em matemática centramos o olhar para o conhecimento comum e especializado do conteúdo proposto por Ball, Thames e Phelpes (2008), uma vez que não estamos analisando a sua prática.

Conforme exposto em nosso marco teórico, da categorização discorrida por Batanero (2005), a atividade que aqui apresentamos uma análise, trata apenas dos significados clássico e frequentista. Convém informar que a referida atividade fez parte de uma sequência didática desenvolvida com os estudantes; mas como não será possível apresentar nesse texto todas as atividades que compõe a sequência e a análise das respostas, discutiremos apenas a primeira atividade que foi o "Lançamento de três dados" e as conclusões surgidas mediante a análise qualitativa da mesma. Os participantes da pesquisa foram 42 estudantes matriculados na disciplina de Estatística de um curso de Matemática-Licenciatura de uma instituição superior pública do Brasil. Todos os estudantes estavam cursando a disciplina pela primeira vez, no entanto, este conhecimento deve está sistematizado na conclusão da etapa de ensino anterior, no Brasil esta etapa corresponde ao Ensino Médio.

A atividade denominada "Lançamento de três dados" teve como objetivo perceber a abordagem frequencista como uma estimativa da probabilidade e a influência da lei dos grandes números. Os participantes realizam a atividade individualmente e com uso do computador.

Enunciamos da seguinte forma: Jogue 3 dados e some os pontos obtidos e anote todos os resultados .Repita essa jogada 20 vezes. Responda o questionário anotando quantas vezes você conseguiu uma soma de 3 pontos, quantas de 4, quantas 5, etc.(Atenção: só responda o questionário após as 20 jogadas).

Ao final apresentávamos as seguintes questões: 1). *Qual a chance, ao lançar os dados, o resultado da soma ser 8?* 2) *Qual a probabilidade, ao lançar os dados, o resultado da soma ser 8?*

Os estudantes registravam suas respostas em um formulário virtual que se constituíram nos protocolos de análise. Para análise desses protocolos adotamos uma perspectiva de análise qualitativa e não apenas quantitativa com base em acertos e erros. Por meio dos protocolos e do debate em sala de aula pudemos levantar dados (estratégias adotadas e justificativas dos estudantes) para uma análise mais significativa no que concerne aos conhecimentos (comum e especializado) de probabilidade, envolvendo dois dos significados de probabilidade pontuados por Batanero (2005), ao qual estamos apresentando neste texto.

Os estudantes foram informados que as respostas geradas pelo formulário virtual seriam identificadas pelos pesquisadores, mas eles teriam suas identidades protegidas. Todos aceitaram participar voluntariamente da atividade e da pesquisa.

Dessa forma, a atividade proposta teve como finalidade investigar os conhecimentos dos estudantes do curso de Matemática-licenciatura (futuros professores de matemática) segundo as categorias de Ball, Thames e Phelpes (2008), especificamente o conhecimento comum e especializado do conteúdo.

Considerando o espaço da formação inicial dentro de uma perspectiva dialógica, após todos terem respondido levamos para a sala de aula algumas das respostas para discussão, permitindo assim refletir sobre os conhecimentos envolvidos com a atividade e a mobilização do significado clássico e do significado frequentista.

Para finalizar, propomos a construção de uma animação gráfica com as frequências acumuladas das respostas dos lançamentos realizados pelos 35 estudantes por meio de um simulador gráfico. Desta forma, realizamos a comparação entre o gráfico dos lançamentos de um estudante e o gráfico dos lançamentos de todos os estudantes, ou seja, o último gráfico apresentado contém a frequência acumulada de 700 lançamentos (35 estudantes x 20 lançamentos). Foi possível visualizar a noção da lei dos grandes números – frequências tendem a se estabilizar com um maior número de lançamentos.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

A implementação da atividade “Lançamento dos três dados” com os futuros professores de matemática nos propiciou identificar algumas noções apresentadas por esse grupo e utilizá-las para a discussão e ressignificação do conceito de Probabilidade. Uma primeira inferência envolveu o significado da noção de “chance” e “probabilidade” É comum essas noções causarem certa confusão do ponto de vista do seu significado. Entendemos chance como as possibilidades de um determinado evento acontecer; e a probabilidade o número que mede esta chance.

Incluímos as questões 1). *Qual a chance, ao lançar os dados, o resultado da soma ser 8?* 2) *Qual a probabilidade, ao lançar os dados, o resultado da soma ser 8?* sabendo que não são as mesmas

coisas. Os resultados nos apontam que com este grupo também houve dificuldade em compreender a diferença entre chance e probabilidade. Ter clareza dessa diferença ajuda na compreensão da noções probabilísticas elementares e permeia o conhecimento especializado de Probabilidade. Abaixo a resposta de um dos participantes.

Figura 1. resposta do estudante nº 17

chance:	probabilidade:
20, porque a soma 8 pode acontecer nas 20 jogadas.	S={3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18} Evento da soma ser 8: P= 1/15 = 0,067 = 6,7%

Podemos observar da resposta do estudante nº 17, futuro professor de matemática, (figura 1) a dificuldade no mapeamento do espaço amostral, ao apresentar que $P = {}^{1}/_{15}$ se deve ao fato de que em seus lançamentos a soma 8 apareceu apenas 1 vez, e ainda, concluí erroneamente o total de casos possíveis deste experimento. . Alguns estudantes registraram que o espaço amostral seria 18, isto é, a soma das faces dos três dados (cada dado tem 6 faces: 6 x 3 = 18). Salientamos que é preciso saber trabalhar com qualquer espaço amostral para compreender e quantificar as probabilidades de um evento específico.

Figura 2. resposta do estudante nº 19

5 chances
1+2+5=8
1+3+4=8
1+1+6=8
2+2+4=8
2+3+3=8

No caso do estudante n. 19 (figura 2) percebemos a dificuldade com o mapeamento de todas as possibilidades. O estudante não leva em conta, por exemplo, que com os números 1, 3 e 4 podemos ter seis diferentes possibilidades ao permutar estes três números. Outro estudante escreveu que *"são varias as chances"* e que *"nesse meu caso foi 2 em 20..."* como se a probabilidade de sair a soma 8 nesses experimento fosse diferente para cada estudante que a realizasse. Tais dificuldades se categorizam como lacunas no conhecimento comum do conteúdo.

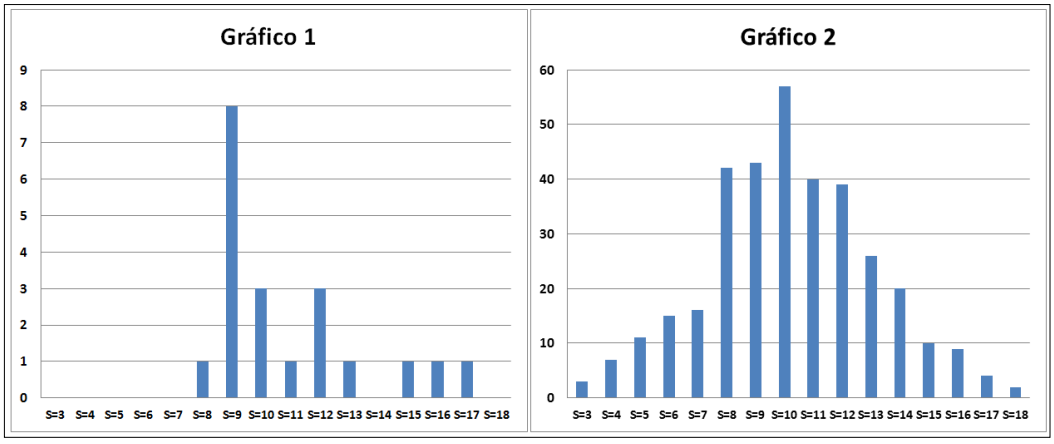
De todos os licenciandos, temos cinco estudantes que conseguiram mapear corretamente as possibilidades (21 chances) e encontrar corretamente a probabilidade em sua forma fracionária pela regra de Laplace (21/216) ou em porcentagem (aproximadamente 9,72%).Apresentamos na figura 3 uma dessas respostas.

Figura 3. resposta do estudante nº 23

Sabendo que a probabilidade de sair um número no dado é 1/6.
Você joga três dado então: 1/6 x 1/6 x 1/6 = 1/216.
Como 21 foi a soma ser 8 e 216 a chance total de sair outros números, então a probabilidade da soma ser 8 é 21/216.

A seguir, na figura 4, apresentamos duas imagens da animação gráfica que utilizamos para discussão com os estudantes. Esses gráficos foram construídos a partir do preenchimento do formulário virtual.

Figura 4. Frequência dos lançamentos de um estudante (gráfico 1) e frequência acumulada dos lançamentos dos trinta e cinco estudantes (gráfico 2)



O gráfico 1 apresenta a frequência do resultado com base em apenas os 20 lançamentos realizados por um estudante. E o gráfico 2 apresenta a frequência acumulada dos 35 estudantes que responderam essa atividade (700 lançamentos).

Como podemos observar os estudantes, participantes desta pesquisa, chegam ao Ensino Superior com dificuldades em seu conhecimento sobre probabilidade. Compreender os procedimentos e significados das noções probabilísticas que dão base a essas construções permeiam tanto o *conhecimento comum como o especializado do conteúdo* (Ball, Thames e Phelps, 2008) e deve fazer parte do repertório do professor de matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As discussões por nós discorridas neste texto colocam em destaque a necessidade de promover com professores em formação inicial atividades que permitam um melhoramento do conhecimento comum e especializado do conteúdo. Concordando com Pietropaolo, Silva, Campos e Felisberto de Carvalho (2015) há de se tomar decisões e traçar uma metodologia que promova a ressignificação

dos conhecimentos dos professores relativos à probabilidade. Este trabalho, tanto aponta resultados em que as dificuldades dos estudantes são reveladas, como acena para uma proposta de trabalho na formação inicial dos professores de matemática levando em considerações as referidas dificuldades. As dificuldades aqui sinalizadas se categorizam como lacunas no conhecimento do conteúdo. Ao mobilizar tais conhecimentos com os licenciandos em matemática (futuros professores) estaremos avançando na transição do conhecimento comum para o conhecimento especializado de probabilidade, e que, reverbere no Conhecimento Matemático para o Ensino de Probabilidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ball, D., Thames, M. H.,& Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of teacher educacion*, 5(1), 389-407.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matemática Educativa, 8*(3), p. 247-263.

Batanero, C. (2015). *Retos en la investigación sobre didáctica de la probabilidad.* Relme 29 - Panamá: Carmen Batanero, 2015. 39 slides: com cor, acompanha texto.

Brasil. (1998). *Parâmetros curriculares nacionais: matemática, 5ª a 8ª série*. Brasília: Ministério de Educação e Cultura – Secretaria de Ensino Fundamental.

Brasil. (1997). *Parâmetros curriculares nacionais: matemática, 1ª a 4ª séria.* Brasília: Ministério da Educação e Cultura – Secretaria de Ensino Fundamental.

Brasil. (2006). *Orientações curriculares nacionais para o Ensino Médio – ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.* Brasília: Ministério da Educação – Secretaria de Ensino Médio e Tecnológico.

Carter, T. A. (2008). Preservice teacher knowledge and understanding of probability and statistics. In: Kulm, G. *Teacher knowledge and practice in middle grades mathematics (pp.19-43).* Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Contreras, J. M., Díaz, C., Batanero, C., & Cañadas, G. R. (2013). Definiciones de la probabilidad y probabilidad condicional por futuros profesores. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa e N. Climent (Eds.), *Actas XVII Investigación em Educación Matemática* (pp.237-244). Bilbao: SEIEM.

Coutinho, C. Q. S.(2007). Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? *REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *2*(3), 50-67.

Fernandes, F. M. O. de, Ferreira, E. B., Kataoka, V. Y., Souza, A. A., & Gonçalves, L. R. (2008). Investigação dos cursos de licenciatura em matemática nas universidades federais do Brasil: disciplinas de probabilidade e estatística. *Resumos do 18º Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística*, Caxambu: MG.

Gal, I. (2005). Towards “probability literacy” for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. In: G. A. Jones. *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning, (pp.39-63).* New York, NY: Springer.

Ives, S. E. (2009). *Learning to teach probability: relationships among preservice teachers' beliefs and orientations, content knowledge, and pedagogical content knowledge of probability*. Tese de Doutorado, Faculty of North Carolina State University.

Pietropaolo, R. C., Silva, A. F. G., Campos, T. M. M., & Felisberto de Carvalho, J. I. (2015). Conhecimentos de professores para ensinar probabilidade nos anos finais do ensino fundamental. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática,* 8(3), 126-156.

Theis, L. & Savard, A. (2010). Linking probability to real-world situations: how do teachers make use of the mathematical potential of simulations programs? *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society - Proceedings of the 8th International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS8, July, 2010), Ljubljana, Slovenia. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

TRASPASO DE REDES DE APRENDIZAJE A PROFESORES QUE NO PARTICIPARON DE SU DISEÑO

Adriana Gómez Reyes, Claudia Flores Estrada.
IPN, UNAM (México)
orodelsilencio@yahoo.com.mx, claudia.mo@gmail.com

Palabras clave: Red de Aprendizaje, Cálculo, Variables.

Key words: Learning Network, Calculus, Variable

RESUMEN: El presente trabajo tiene el propósito de dar cuenta de la aplicación de una red de aprendizaje configurada a partir de actividades de Cálculo Diferencial diseñadas por un grupo de profesores de Nivel Medio Superior de Instituto Politécnico Nacional. La red de aprendizaje permite al docente tener material didáctico y al estudiante poner en juego el conocimiento previo con el nuevo al transitar de una representación a otra, para este estudio fue resuelta por profesores del área de matemáticas, física, química e inglés y a estudiantes.

ABSTRACT: This paper aims to account for the implementation of a learning network configured from Differential Calculus activities designed by a group of High Scholl teachers of Instituto Politécnico Nacional. The. learning network allows teachers have teaching materials and students put into play previous knowledge to move from one representation to another; for this paper was resolved by physics, chemistry and English teachers and by some high school students to.

INTRODUCCIÓN

La investigación matemática busca aportar conocimiento, principalmente en el proceso cognitivo; además, busca la construcción de propuestas y situaciones didácticas para analizar su potencial como promotora de ciertos aprendizajes matemáticos. Como estrategia matemática se consideran las "Redes de Aprendizaje" que están constituidas por Actividades de Aprendizaje relacionadas entre sí, lo que facilita una mejor comprensión de conceptos importantes en la Unidad de Aprendizaje de Cálculo Diferencial para el estudiante de Nivel Medio Superior (Flores, Gómez, Ruíz y Torres, 2015). La red de aprendizaje se vincula desde perspectivas diferentes y se articula de diversas maneras, según el objetivo didáctico que se desea cumplir o la competencia que se quiere alcanzar (Flores, 2014).

En el diseño de la Red presentada se consideraron los resultados de investigación estudiados en algunas sesiones del Seminario Repensar las Matemáticas (SRM) (https://repensarlasmatematicas.wordpress.com/).

En el presente trabajo se documenta el traspaso de una Red de Aprendizaje a profesores que no participaron en su diseño y planeación para tener evidencia de cómo se apropian de la actividad al aplicarla a los estudiantes. Por traspaso nos referiremos al pasar la red de actividades de los profesores que la planearon a otros profesores que no participaron de dicho diseño y planeación y a quienes se les presentó y aplicó la red de aprendizaje, su objetivo y a su vez se les invitó a aplicarla a estudiantes del Nivel Medio Superior para hacer las observaciones que presentamos en este trabajo. Dicha presentación se llevó a cabo en un taller donde participaron cinco profesores del Instituto Politécnico Nacional (IPN) del Nivel Medio Superior del área de matemáticas, física, química e inglés y para observar como lo aplicaba uno de ellos (profesor de matemáticas) a estudiantes, también del Nivel Medio Superior del IPN.

DESARROLLO

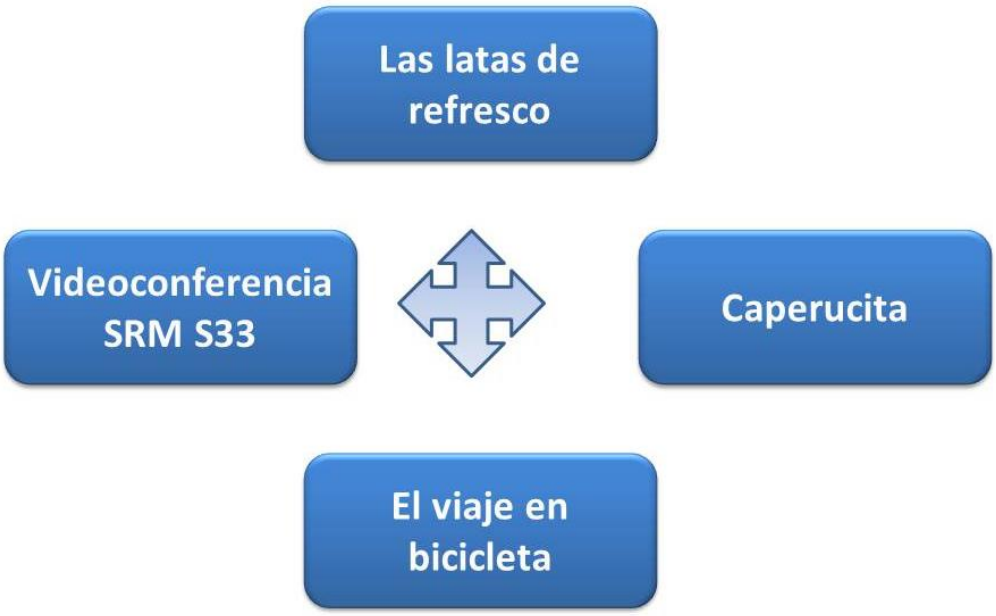
El marco de referencia lo ubicamos en la importancia del estudio del currículo para la mejora del sistema educativo. Desde el marco de los currículos, el currículo formal es la planeación del proceso de enseñanza-aprendizaje basado en el programa académico; los programas de un plan de estudio consideran los objetivos generales y particulares de aprendizaje o bien la competencia general y las competencias particulares. Suárez, Torres y Ortega (2012) hablan del Currículo Potencialmente Aplicado (CPA) cuya finalidad es acercar el currículum propuesto por la institución con el CPA por el profesor y más aún, con el logrado por los estudiantes, es decir entre las metas educativas que persigue una institución y la forma en que los docentes lo interpretan e instrumentan el currículo en sus clases, y lo que los estudiantes aprenden. El CPA puede estar compuesto por materiales como los paquetes didácticos que se usan en el aula (Suárez, Cordero, Daowz, Ortega, Ramírez y Torres, 2005). Partiendo de esta idea, se consideró la elaboración de material estructurados como redes de aprendizaje que favorezcan el logro de competencias requeridas en el programa académico, dando además la posibilidad de ajustarlo de acuerdo a las necesidades específicas del grupo y del profesor.

Este CPA destaca la importancia de que el docente cuente con materiales acordes al currículo planeado así como la necesidad de organizar talleres de familiarización con los materiales y las estrategias, y comunidades de seguimiento y evaluación para los profesores.

Innovar con el currículo potencialmente aplicado para una materia específica en un nivel educativo específico requiere tomar en cuenta un gran conjunto de factores que den viabilidad y pertinencia a los cambios deseados. La mejora en la calidad educativa requiere de la innovación educativa en la que se implique al profesor en cambios en los materiales curriculares. Estudiosos de la Innovación Educativa como estrategia de transformación de las Instituciones Educativas (véase por ejemplo, Ortega, Ramírez, López, Torres, Servín, Suárez y Ruíz, 2007) identifican a los resultados de la investigación como una fuente sólida de ideas y mecanismos para concretar las transformaciones que se desean.

La Red de Aprendizaje (RA) se caracteriza por ser un conjunto de actividades variadas, relacionadas, con un objetivo de aprendizaje en común. La RA utilizada se construyó para el curso de Cálculo Diferencial, y consta de un video de una de las sesiones del SRM (https://repensarlasmatematicas.wordpress.com/), en el cual mencionan las competencias matemáticas en actividades de aprendizaje y la importancia del trabajo colaborativo, y tres actividades de aprendizaje elaboradas por los autores (una de tipo lúdica y dos problemas, uno de funciones lineales y otro de contexto gráfico), dicha configuración se puede ver en la *imagen 1*.

Imagen 1. Red de aprendizaje. (Elaboración propia)



En la *tabla 1* se muestran las características de la RA con las características de cada una de las actividades y un orden propuesto. Cabe resaltar que cada profesor decide si utiliza la red completa o si modifica el orden, según la situación propia del grupo.

Tabla 1. Red de Aprendizaje (Flores et al, 2014)

Tiempo	Problemas	Problema con guía	Actividades en internet	Lecturas	Otros
5 h	Las latas de refresco. Caperucita. 2h	El viaje en bicicleta 2h			Videoconfe-rencia SRM S33 1 h
Orden	1. Las latas de refresco 2. Caperucita 3. El viaje en bicicleta 4. Videoconferencia de la sesión S33 del SRM				
Temática	Variable y función				
Competencias	Trabajo en equipo Autonomía Se expresa y comunica				
Representa-ciones	Algebraica, gráfica, tabular y textual				
Tecnología	Software graficador (Geogebra)				
Producto integrador	Reporte de trabajo en equipo				

Con la finalidad de hacer evidente de cómo se apropian los profesores de cada una de las actividades se les solicitó aplicar el modelo PER como se usa en IPN (2004), se le llama el modelo PER (Propósito, Estrategia y Resultado), a una descripción que hace quien resuelve la actividad (posterior a su resolución), de cuál creen que es el propósito de esta actividad, de cuál creen que es la estrategia que se sigue para cubrir este propósito, y de cuál creen que es el resultado que se espera obtener.

El viaje en bicicleta

Andrés sale con sus amigos a pasear en su bicicleta, por lo que recorren aproximadamente $1km$ de camino plano hasta llegar a una colina que tiene una altura de $30\ m$, después de subir la colina y bajar del lado opuesto deciden regresar para llegar a tiempo de ver su programa favorito a su casa, justo una hora después de que salieron.

a) Bosqueja el camino recorrido por Andrés.

b) Haz una gráfica de la distancia recorrida contra el tiempo. Observa las gráficas elaboradas por tus compañeros, ¿Qué tienen en común las gráficas? ¿Qué diferencias tienen?

c) Elabora una gráfica que represente la distancia a la que se encuentran de su casa en cada momento. ¿Cuál es la diferencia con respecto a las gráficas del punto anterior? ¿Puede ser la misma gráfica?

d) ¿Cuáles son las variables de este problema? ¿Qué valores puede tomar? ¿Cuál depende de cuál?

e) ¿En qué momento van más rápido? ¿En qué momento van más despacio?

f) Haz una gráfica de la velocidad que llevan a cada momento.

Resultados. Para evaluar la resolución de los problemas utilizamos una lista de cotejo (tabla 2) y una matriz de resultados como las describen Flores y Gómez (2009). Las notas A1, A2 y A3 corresponden al trabajo de los estudiantes; P1 se refiere al trabajo de los profesores, pero no son suficientes los reportes escritos de resolución de problemas, por lo que se revisan los videos para obtener la información de los otros dos equipos.

Tabla 2. Lista de cotejo: Viaje en bicicleta. (Elaboración propia)

	A1	A2	A3	P1	Video profesores	
Bosqueja el camino recorrido	√	√	√	√	√	√
Hace la gráfica de la distancia recorrida contra tiempo	√	√	X	√	√	√
Hace la gráfica de la distancia de la casa	√	√	√	√	x	√
Hace una comparación entre las dos gráficas de distancia	X	X	X	X	√	√
Identifica las variables, cual es la dependiente	√	√	√	X	X	√
Identifica los dominios de las variables	√	√	X	X	X	X
Distingue correctamente las diferentes velocidades	√	√	√	X	X	√
Grafica las velocidades	√	X	X	√	X	√
Grafica correctamente las velocidades	X	X	X	√	X	√

Características del bosquejo de la trayectoria:						
Redondea	√	√	√	X	X	X
Incluye tiempos	X	X	X	√	X	X
Incluye distancias	√	√	√	√	√	√
Características de las gráficas						
Redondea	√	X	X	X	X	X
Incluye tiempos	X	X	X	X	X	X
Incluye distancias	X	X	X	X	X	√
Incluye velocidad	X	X	X	X	X	X
Incluye sentido	X	X	X	X	X	X
Contesta el modelo PER	X	X	X	X	X	X

Tanto los profesores en el taller en que se les presentaron las actividades, como los estudiantes en su trabajo con uno de los profesores, entregaron reportes escritos de la resolución del problema, dónde se pidió que comentaran lo que hicieron y por qué lo hicieron. En la lista de cotejo se consideraron las observaciones en el video pues los reportes escritos, especialmente los de los profesores, son muy escuetos en sus comentarios. Aun así podemos observar las coincidencias y las diferencias del trabajo de los profesores y de los alumnos, por ejemplo, todos los estudiantes redondearon las cantidades mientras que ninguno de los profesores lo hizo. Los estudiantes trabajaron mejor los dominios que los profesores, pero cabe mencionar que la mayoría de los profesores no eran de matemáticas.

El modelo PER, fue contestado solamente por algunos de los profesores, En general se refirieron al propósito de la red, como la introducción a los conceptos de función, variable. En cuanto a la estrategia, los reportes hacen referencia a la discusión en los equipos, pero no a los problemas, y dicen que el resultado es bueno, que la red de las actividades si es útil para comprender los conceptos buscados.

La matriz de resultados (que no se muestra por falta de espacio) permite la comparación de los resultados esperados con los obtenidos y se considera, para una etapa posterior, instruir a los profesores para que la utilicen con los estudiantes comparando así los resultados que ellos esperaban, con los que encontraron en la aplicación con los alumnos. Al considerar los resultados nos permite a nosotros, como investigadores, la comparación de los resultados que nosotros esperábamos al planear la actividad, con lo que los profesores esperaban y con lo que en realidad sucedió con los estudiantes.

Para la evaluación de la red de aprendizaje se ha considerado un cuestionario para conocer las dificultades, actitudes, conocimientos y habilidades que enfrentarían los estudiantes ante este tipo de actividades en el aula. Al finalizar la sesión de estas actividades, se les aplicó un cuestionario a los profesores que nos sirva de base para concluir su opinión sobre si dichas actividades o el

material didáctico es apto para poder aplicarlo con alumnos del nivel medio superior del IPN. En el caso de la profesora que aplicó la red de aprendizaje con los estudiantes realizó el cuestionario por segunda vez.

Se muestran las observaciones hechas por los profesores durante el taller y la aplicación de la profesora a estudiantes del NMS en la *tabla 3*.

Tabla 3. Observaciones de los profesores. (Elaboración propia)

Preguntas	Observaciones
En relación a las actividades de aprendizaje que trabajó en la sesión. ¿Alumnos de qué semestre las pueden trabajar? ¿Para qué fines de aprendizaje serían útiles?	En general los maestros opinaron que en tercer semestre; una vez realizada la actividad la profesora no especificó el semestre, pero si insistió en que necesitan saber graficar, pero esta se aprende desde secundaria (entre 12 y 15 años). En cuanto a los fines de aprendizaje, todos los profesores, hablaron de habilidades cognitivas, pero después de la aplicación la profesora hace referencia a que va más allá de contenidos matemáticos y físicos.
¿Cuáles estima que serían las principales dificultades que tendrían sus alumnos?	En general los profesores marcaron como dificultad la falta de conocimientos previos, y comentaron algo sobre el trabajo en equipo y las dificultades sobre expresar sus ideas, así como argumentarlas. Después de la aplicación las dificultades observadas van sobre el trabajo en equipo, y la comunicación a través de expresiones matemáticas.
¿Qué conocimientos, habilidades y actitudes se requieren del alumno para trabajar las actividades?	Los profesores indicaron sobre todo la necesidad de una buena actitud para el trabajo en equipo; misma que se manifestó luego de la aplicación con estudiantes, además de comprensión lectora.
A partir de lo que conoce de sus alumnos, ¿modificaría en algo los enunciados de las actividades o haría una introducción ante ellos antes de iniciar las actividades?	Los profesores indican que se van adecuando al grupo a partir del monitoreo, pero no especifican un cambio previo en los enunciados, alguno habla de una explicación previa. Tras la aplicación la profesora relata que los alumnos esperan un trabajo tradicional, por lo que se requiere que se acostumbren a este trabajo, así como la creación de un ambiente de aprendizaje que permita este trabajo.

Durante el desarrollo de la actividad, ¿qué dificultades espera se presenten en los alumnos y cómo intervendría usted de manera que no se pierdan los objetivos de aprendizaje de la actividad?	La preocupación de los profesores nuevamente recae en el trabajo en equipo más que en la actividad misma, proponen cuidar el monitoreo, también posterior a la aplicación
A partir de su experiencia en esta sesión, ¿recomendaría llevarlas a cabo con los alumnos?	Los profesores sí recomiendan usarla en grupo. Alguno de los profesores comentó de hacer correcciones aunque nunca indicaron cambios, aun cuando se les preguntó.

CONCLUSIÓN

Se pretende que el estudiante tome decisiones, en equipo, en cuanto al método que emplearán en la resolución del problema; al docente, se le pide que organice las discusiones, haciendo comentarios o dando “pistas” cuando lo crea necesario. Para esto es necesario que el docente conozca el material.

La red de aprendizaje permite al docente tener material didáctico y al estudiante adquirir un método de trabajo que le permita vincular y pasar de una representación a otra, es decir un método de trabajo que les permita organizarse y sistematizar el proceso de su propio aprendizaje.

Tener un material didáctico desarrollado para acercar el Curriculum Institucional con el Curriculum Logrado (Suárez, et al, 2012), ayuda al profesor en su labor, pero tenerlo organizado en redes favorece que los diferentes aprendizajes se vayan ligando y organizando de manera que sea más fácil y eficiente al apoyarse en conocimientos relacionados y al cobrar significado con el contexto del estudiante, sin importar si se basa en situaciones reales o imaginarias.

Para la evaluación de la red de aprendizaje se consideró el cuestionario (*tabla 3*) para conocer la opinión de los profesores sobre las dificultades, actitudes, conocimientos y habilidades que enfrentarían los estudiantes ante este tipo de actividades en el aula.

El instructor del taller moderó durante la sesión con profesores de diferentes áreas incluía la de matemáticas. Los profesores consideran que las actividades de aprendizaje pueden aplicarse o llevarse a cabo con alumnos a partir del tercer semestre del Nivel Medio Superior, porque el estudiante adquiere conocimientos nuevos y considera los conocimientos previos de física y de matemáticas. En forma general la profesora que aplicó la red de actividades a estudiantes considera que es importante poner en juego los conocimientos previos con los nuevos para el razonamiento cognitivo en la construcción de conocimientos matemáticos.

Agradecimientos. El desarrollo es posible gracias al apoyo recibido por la Secretaría de Investigación y Posgrado (SIP) del Instituto Politécnico Nacional asignado al proyecto 20152076. *Evaluación del aprendizaje logrado con actividades del currículo potencialmente aplicado en el área de matemáticas*.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Flores, C., Gómez, A., Ruíz, B. y Torres, JL (2015). Redes de Aprendizaje en la construcción de conocimiento matemático. *Revista Congreso Internacional de Prácticas Educativas Innovadoras,* 2(3), 77-82.

Flores, C. (2014). La enseñanza de las matemáticas a través de la investigación: la red de actividades de aprendizaje. En J.L. Torres y L. Suárez (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 27, 1465-1473. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Flores, C.; Torres, J.L.; Gutiérrez, N.; Gómez, A., Huerta, J.J. y Ruiz, B.R. (2014). *Redes de aprendizaje*. IPN. México.

Flores, H. y Gómez, A. (2009). Aprender Matemática, Haciendo Matemática: la evaluación en el aula. *Educación Matemática*, 21 (2).2, 117-142.

IPN (2004). Álgebra. *Libro para el estudiante*. IPN. México.

Ortega, P., Ramírez, M., Torres, J., López, A., Servín, C., Suárez, L. y Ruiz, B. (2007). Modelo de innovación educativa. Un marco para la Formación y el desarrollo de una cultura de la Innovación. *Revista Iberoamericana de Educación a Distancia,* 10(1), 145-173.

Seminario Repensar las Matemáticas. (sf). Recuperado el 18 de mayo de 20116 de https://repensarlasmatematicas.wordpress.com/

Suárez, L.; Cordero, F.; Daowz, P.; Ortega, P.; Ramírez, A.; Torres, J.L. (2005). De los Paquetes Didácticos hacia un Repositorio de Objetos de Aprendizaje: Un reto educativo en matemáticas. Uso de las gráficas, un ejemplo. *RIED-Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, 8 (1 y 2), 307-334.

Suárez, L.; Torres, J.L.; Ortega, P. (2012). Las matemáticas del bachillerato en el instituto politécnico nacional. En C. Dolores. (Ed.) ¿Hacia dónde reorientar el currículum de matemáticas del Bachillerato? México: Plaza y Valdés.

UN ESTUDIO CUANTITATIVO DEL CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO DEL MAESTRO DE MATEMÁTICAS Y SU "SABER ACTUAR" EN EL AULA

María D. Cruz Quiñones, Mourat Tchoshanov, Osiel Ramírez, Sergio Flores
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez (México), University of Texas (El Paso, EUA)
maria.cruz@uacj.mx, mouratt@utep.edu, osiel.ramirez@uacj.mx, seflores@uacj.mx

Palabras clave: El conocimiento del maestro, el saber actuar, análisis correlacional, tipo cognitivo del conocimiento matemático del maestro

Key words: Teacher content knowledge, knowing-to act, correlational analysis, cognitive type of the Mathematical teacher content knowledge.

RESUMEN: El objetivo de este estudio fue medir el conocimiento del contenido matemático del maestro de secundaria y su relación con el "saber actuar" del maestro. La pregunta de investigación es: ¿Qué tan asociados están los tipos cognitivos del conocimiento matemático con el "saber actuar" del maestro? Un estudio correlacional se desarrolló para establecer la relación entre estos dos tipos del conocimiento del maestro. Dos encuestas se aplicaron a 70 maestros de secundaria en la frontera norte de México. Una encuesta mide el conocimiento del contenido matemático del maestro (TCKS) y la otra examina el "saber actuar" (KtAS) del maestro.

ABSTRACT: The purpose of this study was to measure the content knowledge of mathematics middle school teachers and seek for its association with their "knowing-to act". The research question is: to what extent are the cognitive type of mathematical content knowledge associated with the "knowing-to act" of middle school teachers? The correlational study was conducted to look for the association between these two kinds of teacher knowledge. Two surveys were administered to 70 middle school teachers in a border city between Mexico and the United States. The Teacher content knowledge survey measures the mathematical content knowledge of the teachers. The knowing-to act survey measures the "knowing-to act" of the participating teachers.

CONTEXTUALIZANDO EL PROBLEMA

El conocimiento del maestro es un tema fundamental para la enseñanza, aprendizaje y cultura. El proceso de enseñanza y aprendizaje es un aspecto crítico para moldear la cultura de las personas. Por lo tanto, enfocarse en componentes de este proceso como lo es el conocimiento del maestro es relevante para el campo educativo. Debido a que el conocimiento del maestro tiene un impacto en el aprendizaje de los estudiantes, investigar acerca del conocimiento del maestro es una línea de investigación digna y valiosa de estudiar. En los últimos 25 años, un creciente número de estudios enfocados a investigar el conocimiento del maestro han sido desarrollados (Shulman, 1986; Taylor, 2011; Tchoshanov, 2011).

Sin embargo, el conocimiento del maestro es muy amplio e incluye diferentes tipos de conocimiento. El análisis y la clasificación de los diferentes tipos de conocimientos que un maestro debe tener para enseñar matemáticas efectivamente es relevante para los maestros, los programas de formación docente, investigadores educativos y las autoridades educativas que crean y promulgan políticas y/o reformas educativas. Las clasificaciones y conceptualizaciones del conocimiento del maestro permitirán a maestros frente a grupo o estudiantes-maestros (estudiante que estudia para ser docente) estar conscientes del conocimiento que se necesita tener como conocimiento base para la enseñanza de las matemáticas. Basándose en investigaciones enfocadas a esta línea de investigación, autoridades educativas y programas de formación docente podrán tomar decisiones acerca de cómo los maestros deben estar preparados para ayudar a sus estudiantes a aprender matemáticas.

En el área de la matemática educativa, investigadores han estudiado cierto tipos del conocimiento del maestro y sus componentes (An, Kulm, y Wu, 2004; Davis y Simmt, 2006; Tchoshanov, 2011). Algunas categorizaciones del conocimiento del maestro en matemáticas son: el conocimiento del contenido matemático del maestro (Tchoshanov, 2011); el conocimiento pedagógico del contenido (An et al., 2004); el conocimiento del currículum de matemáticas (Ball, Thames, and Phelps, 2008; Shulman, 1986); el “saber actuar” (Mason, 1998); entre otras. La compleja naturaleza del conocimiento matemático para la enseñanza de matemáticas pone a prueba a investigadores educativos a investigar y definir con precisión cada tipo del conocimiento del maestro. Además, las interacciones entre estos tipos de conocimiento del maestro son cruciales como parte del conocimiento base para la enseñanza de las matemáticas. Es por ello, que investigadores han reconocido la importancia de esta línea de investigación y se han enfocado en estudiar algunas de las interacciones entre tipos de conocimiento (An et al., 2004; Koehler y Mishra, 2009). Por lo tanto, más investigación es necesaria acerca de la naturaleza de las interacciones entre tipos de conocimiento matemático del maestro. Adicionalmente, saber qué tipos de conocimientos tienen una influencia directa en la práctica docente puede ayudar a mejorar los programas de formación docente y las prácticas de la enseñanza de matemáticas. Esta investigación provee argumentos a los programas de formación docente y a las autoridades educativas para tomar decisiones importantes acerca de lo que los maestros necesitan saber para enseñar matemáticas en una manera efectiva.

El objetivo de este estudio fue medir el conocimiento del contenido matemático del maestro de secundaria y su relación con el “saber actuar” del maestro. La pregunta de investigación es: ¿Qué tan asociados están los tipos cognitivos del conocimiento matemático con el “saber actuar” del maestro?

MARCO TEÓRICO

Esta investigación se fundamenta en el modelo del conocimiento del maestro desarrollado por Shulman (Shulman, 1986 y1987). Shulman (1986) distinguió tres categorías del conocimiento del maestro: a) conocimiento del contenido; b) conocimiento pedagógico del contenido; y c) conocimiento de la currículum. Él definió el conocimiento del contenido como "la cantidad de organización del conocimiento como tal en la mente del maestro" (Shulman, 1986, p.9). Esta categoría de conocimiento incluye tres tipos cognitivos de conocimiento matemático (Tchoshanov, 2011): el tipo cognitivo 1 (se refiere al conocimiento del contenido matemático del maestro sobre hechos, datos, y procedimientos); el tipo cognitivo 2 (es el conocimiento de conceptos y conexiones matemáticas); y el tipo cognitivo 3 (conocimiento de modelos matemáticos y generalizaciones).

El tipo cognitivo 1 es el conocimiento que requiere la memorización y aplicación de reglas, datos y algoritmos básicos de matemáticas para resolver procesos rutinarios. Por ejemplo la memorización de la regla de la división de fracciones. El tipo cognitivo 2 es diferente del conocimiento del tipo 1 en el sentido de que este tipo se enfoca en el entendimiento conceptual de las matemáticas a través del incremento de cantidad y calidad de las conexiones entre procedimientos matemáticos e ideas. Por ejemplo, un maestro que sea capaz de desarrollar una historia o problema contextual a partir de una división de fracciones.

El tipo cognitivo 3 es el conocimiento más teórico: esté tipo de conocimiento requiere probar conjeturas, generalizar, demostrar teoremas, etc. Por ejemplo, más de la mitad de los maestros encuestados tuvo dificultades para responder correctamente a la siguiente pregunta: "¿La siguiente proposición es verdadera? (si *a, b, c, y d son números enteros positivos)*: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Problemas como este requieren un tipo diferente de conocimiento. A este tipo de conocimiento se le llama conocimiento de modelos y generalizaciones. Doerfler (1991), Presmeg (1997) y otros investigadores exploraron este tipo de conocimiento y sus componentes así como la relación entre la generalización y los diferentes modos de representación.

El otro tipo de conocimiento analizado en esta investigación fue el "saber actuar". El "saber actuar" es el proceso donde "el conocimiento que permite a la gente actuar creativamente en vez de solo reaccionar a un estímulo como si fuera un comportamiento entrenado" (Mason and Spence, 1999, p.136) emerge. De acuerdo a Mason y Spence (1999), existe una ausencia del "saber actuar" que conlleva a los maestros de matemáticas a no ser capaces de responder creativamente en el momento aun cuando ellos posean el conocimiento del contenido matemático y pedagógico.

Considerando el trabajo de Mason y Spence (1999), se utiliza el término "saber actuar" como el "conocimiento activo que es presente en el momento que se requiere" (p.135). Mason y Spence (1999) mencionan que este constructo depende de la estructura de la atención en el momento, en otras palabras, "saber actuar" depende de lo que uno está consciente. También fueron identificadas por Mason y Spence (1999) diferentes formas del saber que son el enfoque central de la educación institucionalizada. Estas formas del saber son: el "saber-que" (knowing-that) que se refiere al conocimiento de los hechos; el "saber-como" (knowing-how) que se refiere al conocimiento de las técnicas y procedimientos; y el "saber-porque" (knowing-why) que significa tener la capacidad de

explicar los fenómenos y las acciones" (Mason y Spence, 1999, p.137). Estas tres formas del saber constituyen el "saber-acerca de" (knowing-about).

La naturaleza de las interacciones de estas formas del saber es compleja. Se puede identificar que el "saber-como" es influenciado directamente por el "saber-que", el "saber actuar" depende del "saber-como", y el "saber-porque" incluye el "saber-que" y el "saber-como" (Mason y Spence, 1998).

METODOLOGIA

El diseño metodológico de la investigación es de índole cuantitativo. Un estudio correlacional se desarrolló para establecer la asociación entre estas dos categorías del conocimiento del maestro. Para ello se adaptó y tradujo una encuesta que mide el conocimiento del contenido matemático del maestro de secundaria. Este instrumento es llamado "la encuesta del conocimiento del contenido del maestro" (TCKS). Así mismo, se utilizó otro instrumento llamado "la encuesta del saber actuar del maestro" (KtAS). Estas encuestas se aplicaron a 70 maestros en la frontera norte de México y Estados Unidos. Los maestros tuvieron 2 horas para responder a ambos instrumentos. Una hora y media fue designada para la encuesta TCKS y media hora para la encuesta KtAS.

Muestra

Los participantes de este estudio fueron 70 maestros de matemáticas de secundaria. Todos los maestros estaban dando al menos una clase de matemáticas a nivel secundaria. La muestra fue conformada por maestros de 26 secundarias públicas.

El 56% de los maestros fueron hombres y el resto fueron mujeres. El 62.5% de los maestros estaban impartiendo clase en un solo grado. El resto daba clases a 2 o más grados de secundaria. Adicionalmente, el 20.9% de los maestros tienen menos de 6 años de experiencia docente, mientras que el 22.5% de los maestros tienen entre 7 y 13 años de experiencia. El 14.5% de los maestros de matemáticas de este estudio tienen entre 14 y 20 años de experiencia. El porcentaje de maestros con más de 20 años de experiencia fue el 41.9%.

Instrumentos

La "Encuesta del Conocimiento del Contenido del Maestro" (TCKS) mide el conocimiento del contenido matemático del maestro. Esta encuesta consiste de 33 preguntas de los temas de algebra, probabilidad y estadística, sentido numérico, geometría y medida. Las preguntas o ítems son de opción múltiple. Diez preguntas miden el conocimiento de tipo cognitivo 1 (conocimiento de hechos, datos y procedimientos). El conocimiento de tipo cognitivo 2 (conocimiento de conceptos y conexiones) es medido por 13 ítems. Otros diez ítems miden el conocimiento de tipo cognitivo 3 (conocimiento de modelos matemáticos y generalizaciones). Esta encuesta es internamente consistente y fue validada utilizando el coeficiente de Cronbach .839 (Tchoshanov, 2011).

La "Encuesta del Saber Actuar" (KtAS) fue desarrollada para medir el "saber actuar" del maestro de matemáticas de secundaria. Esta encuesta consta de 11 ítems. Cada ítem es una situación de clase. A estas situaciones de clase se les llamo situaciones KtA. Las situaciones KtA son aquellas donde el "saber actuar" del maestro se pone a prueba y este aparece o no aparece. En cada ítem, se le pregunta al maestro que haría primero en una específica situación. El maestro debe ordenar del 1 al 5 las cinco opciones dadas en cada ítem. Cada opción es una acción que el maestro haría

en esa situación. El maestro debe escribir el 1 a la opción que el haría primero, el 2 a su segunda opción y así sucesivamente.

RESULTADOS Y DISCUSION

Para el análisis de los datos, se removieron 6 participantes. Cinco de ellos porque fueron considerados como extremos y un participante no se dio cuenta de los ítems de la última página de la KtAS, por lo tanto no los contesto y fue removido del análisis. La muestra incluyo a 64 maestros.

Después del análisis de los datos, los resultados muestran que no existe correlación entre conocimiento matemático del contenido del maestro que fue medido por la encuesta TCKS y su "saber actuar "examinado por medio de la encuesta KtAS (coeficiente de Pearson *r(64)=.17, p>.05*). En otras palabras, el conocimiento del contenido matemático que un maestro posea no es una indicación de que el maestro sabe actuar en el momento durante la enseñanza de matemáticas. Como Mason y Spence (1999) mencionan, el conocimiento del contenido matemático es parte del "saber-acerca de" que es el conocimiento acumulado que se puede ser adquirido, pero esto no significa que pueda ser utilizado en un situación de clase como las situaciones consideradas en este estudio como "situaciones del saber actuar" (situaciones KtA).

Adicionalmente, Mason y Spence (1999) consideran que más que solo conocimiento matemático es necesario para que un maestro sea capaz de actuar efectivamente en el momento requerido. "Saber- acerca de" es considerado como un conocimiento estático que una persona puede poseer, pero eso no significa que ese conocimiento pueda ser utilizado para actuar o accionar creativamente en una situación particular. También Skemp (1979) hizo esta distinción. Él distinguió entre tener conocimiento acerca de algo y ser capaz de utilizarlo como una técnica en una nueva situación o en el momento necesario. Por lo tanto, como se puede observar la ausencia de correlación entre el conocimiento del contenido matemático medido por la encuesta TCKS y el "saber actuar" examinado por la encuesta KtAS fue previamente identificada en la revisión bibliográfica y en el marco teórico, y ahora es también fundamentada por los resultados de este estudio.

En el análisis correlacional también se examinó la correlación entre cada tipo cognitivo de conocimiento del contenido matemático del maestro y el "saber actuar". Los resultados muestran que no existe correlación entre el tipo 1 y 2 con el "saber actuar" respectivamente (*r(64)=.13*, *p>.05; r(64)=.0001, p>.05*). Sin embargo, se encontró que el tipo cognitivo 3 (conocimiento de modelos y generalizaciones matemáticas) esta correlacionado significativamente con el "saber actuar" del maestro (r(64)=.27, p<.05). Esta correlación estadísticamente significativa se obtuvo con el puntaje de los ítems del tipo cognitivo 3 (T3) del conocimiento del contenido matemático y el puntaje de la encuesta del "saber actuar" (KtAS). Este resultado es clasificado como una correlación de efecto mediano de acuerdo a la interpretación de r^2 recomendada por los estándares de Cohen (1988). Lo que nos indica que maestros que tienen más conocimiento de modelos matemáticos y generalizaciones son más capaces de pensar en cómo actuar de una manera deseable durante la enseñanza de matemáticas que los maestros con un conocimiento limitado de modelos matemáticos y generalizaciones.

Mason y Spence (1999) mencionan que "saber actuar" es menos factible cuando no se tiene conocimiento. Como el "saber actuar" es el proceso donde el conocimiento es mandado llamar para

ser utilizado en el momento requerido, si no existe conocimiento, entonces, no puede ser mandado llamar. En este estudio, los resultados reportan que los maestros que tienen un conocimiento más fuerte acerca de modelos matemáticos y generalizaciones (tipo cognitivo 3) fueron los que mejor pensaron como actuar de una manera deseable durante su enseñanza que los maestros con un conocimiento limitado de modelos matemáticos y generalizaciones.

Este resultado agrega a la discusión que los maestros que tengan un conocimiento matemático que les permita generar y probar conjeturas, hacer generalizaciones, y probar teoremas, entre otra habilidades, tienen más posibilidad de "saber actuar" en el momento. Es importante señalar que para ser capaz de generar conjeturas y poder probarlas, cierto conocimiento procedural y conceptual es requerido. De acuerdo con Tchoshanov (2011) el tipo cognitivo 3 del conocimiento del contenido matemático del maestro requiere que el conocimiento y razonamiento del maestro sea capaz de generalizar enunciados matemáticos, diseñar modelos matemáticos, hacer y probar conjeturas, y probar teoremas. De aquí que los puntajes obtenidos en la encuesta del "saber actuar" (KtAS) fueron generalmente más altos cuando los maestros tenían un más alto conocimiento de los modelos matemáticos y generalizaciones (T3).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

An, S. Kulm, G., y Wu, Z. (2004). The pedagogical content knowledge of middle school, mathematics teachers in China and the U.S. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 7, 145-172.

Ball D., Thames, M., y Phelps G.(2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education,* 59(5), 389-407.

Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioural sciences*. Hillsdale, NJ:Lawrence Erlbaum Associates.

Davis, B., y Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 293–319.

Doerfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching*. Dordrecht: Kluwer.

Koehler, M. J. y Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 9(1), 60-70.

Mason, J. (1998). Enabling Teachers to be Real Teachers: Necessary Levels of Awareness and Structure of Attention. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1(3), 243-267.

Mason, J. y Spence, M. 1998, Towards a Psychology of Knowing-To, En C. Kanes, M. Goos, y E. Warren (Eds.) *Teaching Mathematics in New Times: Proceedings of Mathematics Education Research Group of Australasia 21,* 1, (pp. 342-349). Gold Coast, Sydney: MERGA.

Mason, J. y Spence, M.(1999). Beyond mere knowledge of mathematics: The importance of knowing-to act in the moment. *Educational Studies in Mathematics, 38*(1)*,* 135-161.

Presmeg, N. C. (1997). Generalization using imagery. En L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images* (pp. 299–312). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher,*15(2), 4-14.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Rewiew*, 57(1), 1-22.

Skemp, R. R. (1979). *Intelligence, learning and action – A foundation for theory and practice in education.* New York, NY: Wiley.

Taylor, C. (2011) *Facilitating the development of elementary prospective teachers' PCK: A case study of a mathematics teacher educator's actions and purposes* (Doctoral dissertation). University of Missouri, Columbia, Missouri.

Tchoshanov, M. (2011). Relationship between teacher knowledge of concepts and connections, teaching practice, and student achievement in middle grades mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 76, 141-164

LA GEOMETRÍA EN LA CONSTRUCCIÓN DE CAJAS DE REGALO Y DE LÁMPARA ARTESANALES

Magdalena Rivera Abrajan, Raúl Salas Vega
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero (México)
magrivab@hotmail.com, rasve@hotmail.com

Palabras clave: Geometría, Formación de profesores reflexión, práctica docente

Key words: Geometry, Teacher training, reflection, teaching practice..

RESUMEN: En la formación de profesores de Matemáticas el formador juega un papel primordial como aquel que apoya al estudiante-profesor en el desarrollo y la mejora de la enseñanza de las matemáticas. Considerando el contexto del profesor en servicio en un programa de actualización continua de profesorado, se propone un taller a un grupo de profesores asistente a la RELME 29 que propicie la reflexión sobre el conocimiento matemático y didáctico necesario para reproducir dicha propuesta en sus aulas. La propuesta gira alrededor de un taller sobre construcción de cajas de regalo y lámparas artesanales, donde se presentan conceptos básicos de la geometría plana y espacial. Las observaciones y sugerencias, así como aquellos elementos que dieron pie a la reflexión de los participantes, apoyarán la continuación de esta investigación que se encuentra en proceso.

ABSTRACT: Teacher training in math, the trainer plays a major role as one who supports the student-teacher in developing and improving the teaching of mathematics.

Considering the context of the teacher in service in a program of continuous updating of teachers, a workshop for a group of teachers attending the RELME 29 is proposed. In order to lead to reflection on the mathematical and didactic knowledge required to reproduce this proposal in their classrooms.

The proposal turns around a workshop on the manufacturing of gift boxes and handcrafted lamps, where basic concepts of Plane and Spatial Geometry are introduced. Comments and suggestions, as well as those elements that gave rise to the reflection of the participants will support the continuation of this ongoing investigation.

INTRODUCCIÓN

Dentro del sistema de formación continua de profesores de Matemáticas, el formador juega un rol fundamental debido a su responsabilidad para ayudar a resignificar el conocimiento profesional para la enseñanza de las Matemáticas. La confección y gestión de las actividades que se pone a disposición para tal aprendizaje son un factor decisivo para tal fin y deberán contener y dejar ver los aspectos específicos que se busca que los estudiantes desarrollen y aprendan, en un primer momento en los profesores- estudiantes para ser rediseñadas y ser ejecutadas en su clase de Matemáticas. Nuestra investigación pretende estudiar la inserción de las prácticas instruccionales de los formadores en la práctica profesional de los profesores de Matemáticas por medio del desarrollo de actividades de reflexión, particularmente de la construcción de cajas de regalos y lámparas artesanales, la reflexión girará entorno al conocimiento geométrico inmerso en la actividad y al papel del profesor, como orientador de la misma en su aula. Se diseñó un primer acercamiento al taller sobre construcción de cajas de regalos y se presentó en el marco de la 29 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, realizada en la ciudad de Panamá, en este escrito presentamos la actividad así como las reflexiones que se realizaron durante los días de trabajo.

FUNDAMENTACIÓN Y MÉTODO

En el proceso de formación de profesores de Matemáticas, los formadores tienen como objetivo que el futuro profesor construya conocimiento y adquiera experiencias referentes al proceso de enseñanza (Christiansen y Walter, 1986). Sin embargo, Deulofeu, Márquez y Santmartí (2010) mencionan que la forma de desarrollar la actividad Matemática en el aula de los profesores surge principalmente de su experiencia como alumnos, al conformar creencias sobre la actividad matemática escolar y reflejarlas en su práctica docente.

En este sentido el formador deberá establecer actividades que proporcionen oportunidades de aprender a enseñar matemáticas, planificar la enseñanza, analizar la gestión a través de episodios de aula y trabajar a partir de realizaciones de alumnos, estableciendo una fuerte relación teoría-práctica (Boyd et al., 2009). Así mismo, coincidimos con Llinares y Krainer, (2006) quienes mencionan que el desarrollo profesional del formador se produce por procesos de aprendizaje a través de prácticas reflexivas las cuales permiten interpretar cómo las interacciones que ocurren en el interior de una comunidad de formadores de profesores de matemáticas ayudan, tanto a los que se incorporan a dicha comunidad como a los miembros experimentados, a crecer profesionalmente.

Sobre la reflexión, Chapman (2009, p. 125) sostiene que esta se inicia cuando el educador se encuentra con algún aspecto problemático de la práctica, y trata de darle sentido, así, los estudiantes-profesores al reflexionar sobre la enseñanza que realizan y al reexaminar los posibles dilemas o conflictos que puedan surgir durante sus clases les permitirá ir modificando sus formas de concebir su práctica y el aprendizaje de sus estudiantes, considerando nuevas formas de enfocar la enseñanza de las Matemáticas.

Escolarmente el desarrollo del pensamiento geométrico es una de las metas que se busca desde los niveles más elementales de la educación en México, buscando formas de que el alumno domine estas relaciones con el espacio para que pueda representar y describir el mundo en que

vivimos y conocer y reconocer los entes geométricos como modelizaciones de su realidad (SEP, 2011). Es por esto que delimitamos nuestra actividad a algunos elementos de la Geometría escolar al establecer una construcción geométrica de una caja de regalo donde emerjan herramientas matemáticas que ayuden al estudiante-profesor en su práctica profesional.

LA EXPERIENCIA EN RELME 29

El objetivo del taller es que los profesores reflexionen sobre una actividad de construcción de una caja de regalo, la reflexión que se les pide es alrededor del conocimiento matemático que podría ser enseñado, así como de la reproducción de la actividad en su aula y sus implicaciones.

A continuación presentamos la actividad y finalizaremos con algunas reflexiones que se originaron durante los dos días del taller.

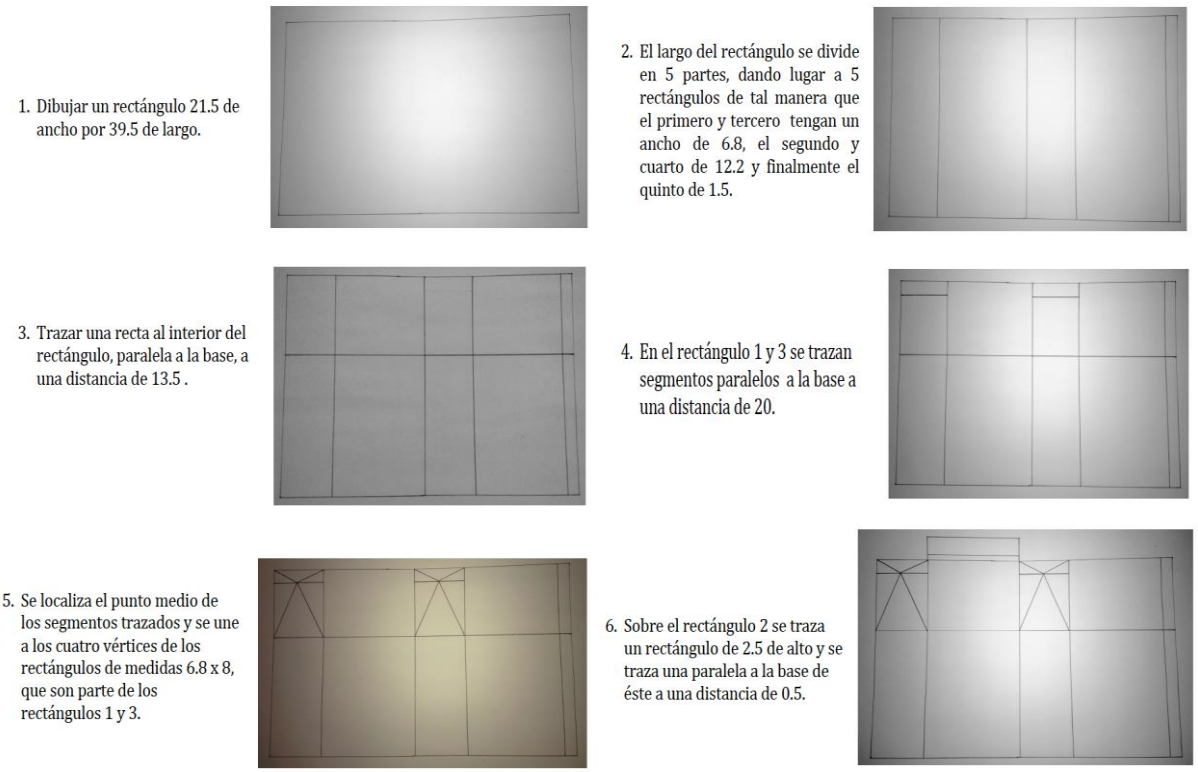
Sesión 1 (1hora y Media)

Se les proporciona el siguiente material:

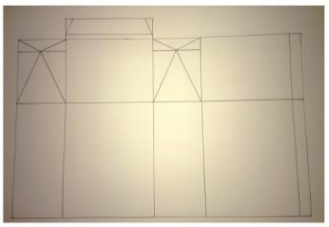
- Un Rectángulo de cartulina
- Regla, transportador, Lápiz, Tijeras y Resistol

La explicación de la construcción de la caja-sobre (imagen 1)

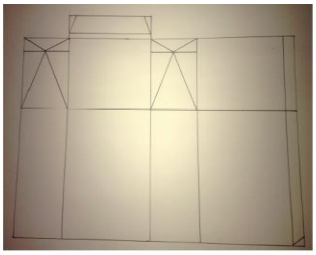
Imagen 1. Construcción de la caja sobre



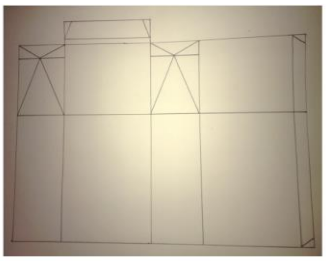
7. Los puntos de intersección de esta paralela con el rectángulo los unimos en la parte superior del rectángulo a una distancia de 1 de los vértices superiores.



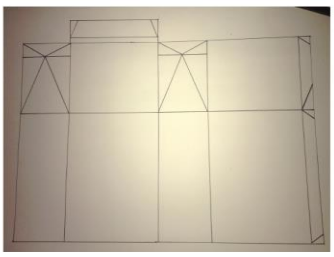
8. El ángulo inferior izquierdo del rectángulo 5 se divide en ángulos de 30^0 y 60^0 tomando como referencia su base.



9. El ángulo superior izquierdo del rectángulo 5 se divide en un ángulo de 30^0 y $60°$ tomando como referencia su base.

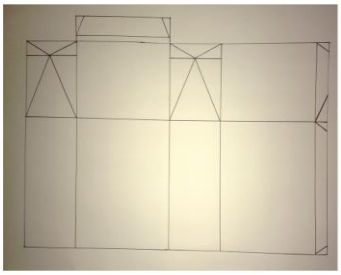


10. El ángulo de 180^0 o que se forma en la unión de los dos rectángulos que forman el rectángulo 5 se dividirán en ángulos de 30^0, 60^0, 30^0 y 60^0 tomando como referencia el lado izquierdo.

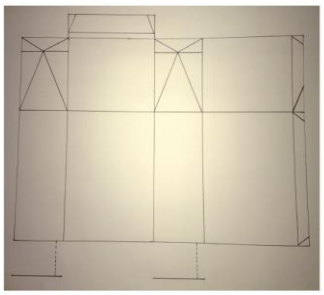


12. De la unión de los rectángulos 1 y 2 se mide 1 cm hacia el interior del rectángulo 1, sobre ese punto se trazará una perpendicular a la base hasta tocar la paralela exterior.

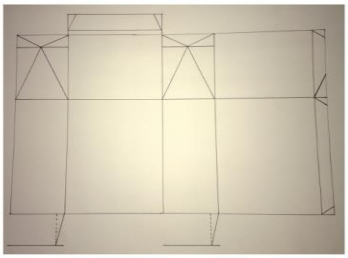
11. Se traza una paralela exterior a 3.5 de la base del rectángulo 1 y 3



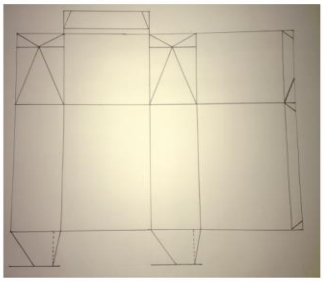
13. Se hace lo mismo en la unión de los rectángulos 3 y 4, hacia el interior del rectángulo 3, sobre ese punto se trazará una perpendicular a la base hasta tocar la paralela exterior.



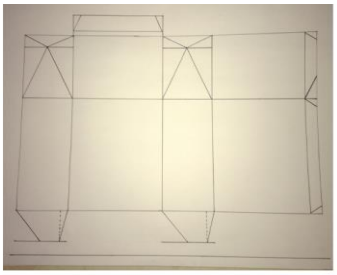
14. En el rectángulo 1 se une el punto de intercepción de la perpendicular con la paralela exterior al vértice inferior derecho. Se hace lo mismo para el rectángulo 3.



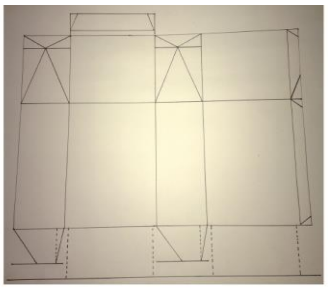
15. Del punto de unión de la perpendicular con el segmento trazado anteriormente se miden 2.5 cm hacia la izquierda, sobre ese punto se une con el vértice inferior izquierdo del rectángulo 1, se hace lo mismo para el rectángulo 3.



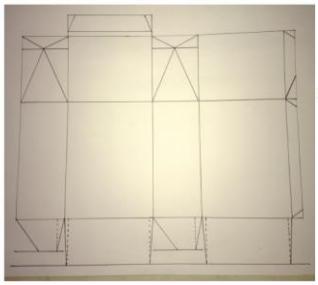
16. Se traza una paralela exterior a 5 cm. de la base del rectángulo mayor.



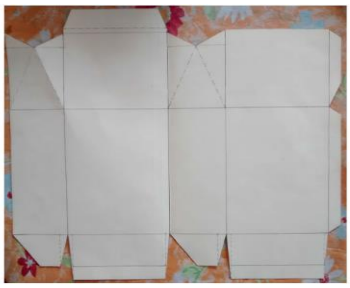
17. Se mide 0.5 cm en cada uno de los vértices inferiores derechos e izquierdos de los rectángulos 2 y 4. Sobre esos puntos se trazan perpendiculares a la base hasta la paralela exterior a 5 de la base.



18. Se unen los puntos de intersección de las perpendiculares con la paralela exterior a 5 con los vértices inferiores derechos e izquierdos de los rectángulos 2 y 4



19. Se recorta y se marcan los dobleces y Se pegan las pestañas



Posteriormente se les pidió que reflexionaran sobre el contenido Matemático inmerso en la construcción de la caja así como alguna propuesta sobre qué papel jugaría en el desarrollo de la actividad en su aula. Las preguntas que guiaron la reflexión son: ¿Qué Elementos Matemáticos identifican en la actividad?

¿Qué Matemáticas enseñarían con la realización de esta actividad en tu aula?

¿Cómo reproducirían la actividad en su aula?

ALGUNOS ELEMENTOS PARA REFLEXIONAR

Durante la realización del taller algunos elementos que se observaron como principales, en el desarrollo de la actividad fueron:

- **Forma de trabajo con el profesor**; Se recomienda que se realice de manera individual, esto es para que la reflexión en un primer momento sea propia, resultado de la experiencia vivida, posteriormente al compartirla con sus pares se nutra la reflexión personal con las experiencias vividas por los otros.

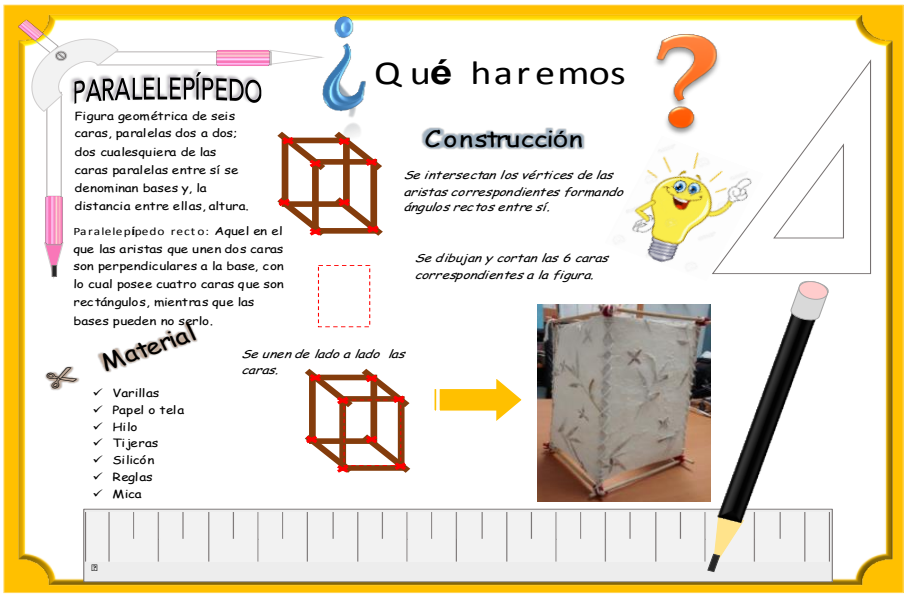
  Nota: Lo anterior no significa que la mejor manera de realizarla con los alumnos sea de forma individual.

- **Sobre el lenguaje**: El lenguaje que se usa, a pesar de considerarse que es necesario la utilización de un lenguaje matemático preciso, debe de ser sencillo de leer y comprender, sin manejo de muchos conceptos matemáticos, debido a que es parte de la reflexión que los profesores identifiquen dichos conceptos.

- **Sobre la reflexión**: Es necesario que algunas preguntas guíen la reflexión, algunas sugerencias de preguntas pueden ser: ¿Qué Elementos Matemáticos identifican en la actividad? ¿Cómo reproduciría la actividad en mi aula?

Al final del curso se les proporciono una idea sobre cómo presentar la actividad a alumnos de secundaria o bachillerato (Imagen 2)

Imagen 2. Presentación de la actividad en el aula



CONCLUSIONES

Según Schon (1987) la reflexión dentro y sobre la práctica permite, a los profesores, desarrollarse continuamente y aprender de sus experiencias. Desde estas perspectivas, el proceso de comprensión y mejora de la práctica debe partir de la reflexión sobre la experiencia propia. La reflexión de los profesores sobre la enseñanza debería ser un aspecto inherente de su trabajo y permitir su desarrollo y crecimiento. Esta reflexión deberá incluir: la planeación de la actividad, el papel de orientador de la misma, y tratar de resolver los dilemas de la práctica en el aula, cuestionándose los supuestos y valores que él o ella tienen acerca de la enseñanza de las Matemáticas.

A través del proceso de reflexión, se podrían desarrollar nuevos patrones de pensamiento para abordar las complejidades de la enseñanza de las Matemáticas (Schon, 1987).

El presentar actividades manuales no cotidianas como la elaboración de cajas de regalos y reflexionar acerca de su práctica al realizarla en su salón de clases podría permitirles, a los profesores, dar un paso atrás de sus formas rutinarias y considerar opciones alternativas para la enseñanza logrando un impacto en el aprendizaje de sus alumnos. En la presentación del taller en Relme 29 no pudimos lograr una reflexión de la práctica debido a que los participantes no se observaron ni reflexionaron como realizadores de la misma, sin embargo pudieron reflexionar acerca de la actividad y la pertinencia de probar e incorporar actividades manuales como parte de su clase de Matemáticas.

El proceso de reflexión de la propia práctica depende del contexto, la perspectiva y la riqueza del repertorio que uno trae a ese contexto, y de una capacidad de dibujar en un nivel de reflexión apropiado a ese contexto. También depende de la propia capacidad para observar, "estar despierto a las posibilidades, ser sensible a la situación y dar una respuesta adecuada" (Mason, 2002, p. 7).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Boyd, D., Grossman, P., Lankford, H., Loeb, S. y Wyckoff, J. (2009). Teacher Preparation and Student Achievement. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, *31(4),* 416-440.

Chapman, O. (2009). Educators reflecting on (researching) their own practice. In R. Evan y D. Ball (eds.) *The professional education and development of teachers of mathematics The 15th ICMI Study* (pp. 121-126). New York: Springer.

Christiansen, B. y Walter, G. (1986). Task and activity. En B. Christiansen, A.G. Howson y M. Otte (eds.). *Perspectives on Mathematics Education (*pp. 243-307). Reidel: Reidel Publishing company,

Deulofeu, J., Márquez, C. y Sanmartí, N. (2010). Formar profesores de secundaria: la experiencia de la Universitat Autònoma de Barcelona. *Cuadernos de Pedagogía,* 80-84.

Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutiérrez y P. Boero (eds.). *Handbook of research on the Psycology of Mathematics Education (PME)*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Mason, J. (2002). Researching your own practice: The discipline of noticing. New York: Routledge Falmer.

Secretaria de Educación Publica. (2011). *Programa de estudio 2011; Guía para el maestro, educación básica secundaria.* Recuperado el 20 de febrero del 2015 de http://basica.sep.gob.mx/reformaintegral/sitio/pdf/secundaria/plan/MatematicasSec11.pdf

Schon D (1987). *Educating the reflective practitioner*. San Francisco: Josey Bass.

NUDOS Y PATRONES: UNA FORMA DE EXPRESIÓN MATEMÁTICA DE GUATEMALA Y COSTA RICA

Ana Patricia Vásquez Hernández, Darwin Alexander Moreno Gatica
Universidad Nacional de Costa Rica (Costa Rica), Centro Escolar El Roble (Guatemala)
patrimate76@gmail.com, damoreno@ceroble.edu.gt

Palabras clave: Nudos y patrones; Matemática y Artesanías; Patrones Matemáticos; Quipú

Key words: Knots and patterns, Mathematics & Crafts, Mathematical patterns, Quipú

RESUMEN: El presente artículo muestra los resultados de un taller realizado en RELME 29, sobre nudos y patrones como una forma de expresión matemática de Guatemala y Costa Rica. Dicha actividad representó un esfuerzo mancomunado de investigadores de las etnomatemáticas de ambos países centroamericanos, con el propósito de ofrecer a los participantes, la vivencia de fabricación de tejidos que se construyen mediante nudos y patrones, así como la confección de quipús, que son cuerdas anudadas utilizadas para el resguardo de la información contable. Su objetivo radica en identificar la importancia etnomatemática que implica para América Latina estos tipos de confección artesanal, y la importancia de su vinculación en el salón de clase. Lo anterior es un esfuerzo que forma parte de la salvaguardia del patrimonio cultural intangible latinoamericano.

ABSTRACT: This article shows the results of a workshop held in RELME 29 on knots and patterns as a form of mathematical expression of Guatemala and Costa Rica. This activity represents a joint effort by researchers Ethnomathematics of both Central American countries in order to provide participants with the experience of manufacturing fabrics are constructed by knots and patterns and making quipu, which are knotted cords used to guard the accounting information. Its aim is to identify Ethnomathematics importance for Latin America involving these types of hand crafted, and the importance of their relationship in the classroom. This is an effort that is part of safeguarding intangible cultural heritage of Latin America.

INTRODUCCIÓN

El presente taller es propuesto por el esfuerzo mancomunado de investigadores de la etnomatemática de Guatemala y Costa Rica, con el propósito de ofrecer a los participantes la fabricación de tejidos que se construyen con la utilización de nudos y patrones, así como la confección de quipú, cuerdas anudadas para el resguardo de la información contable.

Se pretende que los y las participantes, identifiquen la importancia etnomatemática que implica para América Latina este tipo de confección, con el propósito de sugerir su aplicabilidad en el salón de clase como rescate y preservación del conocimiento matemático ancestral, aportando así a la Salvaguardia del Patrimonio Cultural Intangible (UNESCO, 2011).

ANTECEDENTES

Guatemala es un país centroamericano que se caracteriza por sus extraordinarias confecciones artesanales, todas ellas, fácilmente comprobables en los mercados de artesania nacional. Costa Rica es un país que cuenta con una riqueza artesanal también, pero que también utilizó como parte de su legado, el uso del quipú (cuerdas anudadas) como método para resguardar información contable por parte de algunos grupos indígenas.

En ambos países, la mayoría de poblaciones escolares actuales, desconocen la importancia de artefactos culturales como un rico elemento de aprendizaje de las matemáticas y en la actualidad, la escuela integra de manera muy incipiente la importancia que ésta merece.

La etnomatemática es el eje vinculante en este taller donde comprendemos por etnomatemática según D´Ambrosio (2013), como “la matemática practicada por grupos culturales, tales como comunidades urbanas y rurales, grupos de trabajadores, grupos profesionales, niños de ciertas edades, sociedades indígenas y otros” (p.13) relacionada con entornos socio-culturales. Así también el auge de este programa de investigación y la importancia de visibilizar las particularidades de las prácticas y saberes locales como medio de valorización de estos espacio humanos, apoyado por las propuestas de Blanco (2011), Bishop(2005), D´Ambrosio (2001) y D´Ambrosio (2013).

Para el caso de Guatemala, la etnomatemática está implícita en el Currículo Nacional Básico de primaria y en el de secundaria existe un componente dedicado a la misma, sin embargo no existe un compromiso de la comunidad educativa por resaltar lo valiosos de nuestra cultura en el caso de Guatemala la elaboración de tejidos por medio de patrones y en el caso de Costa Rica apenas nos estamos abriendo a procesos de contextualización activa para los aprendizajes significativos escolares en primaria y secundaria.

Bajo trabajos predecesores, en la investigación del quipú por parte de Vásquez (2014), cuyo énfasis lo ha desarrollado en rescatar la ancestralidad de esta práctica y comunicarlo ante la comunidad científica y el trabajo de Moreno (2014) no solo en la identificación de patrones en creaciones artesanales, sino también articulándolo con entornos educativos de primaria con resultados existentes, es que se muestra los resultados del taller realizado dirigido a docentes en ejercicio y docentes en formación.

Como parte de estos antecedentes, se muestran las siguientes dos imágenes, para mostrar parte del trabajo antecesor que han realizado los autores sobre el tema de los nudos y patrones en cada uno de sus países.

Imagen 1. Trabajo realizado por los estudiantes del profesor darwin moreno sobre creaciones artesanales utilizando nudos e identificando patrones. Centro escolar el roble, Guatemala. 2014

Imagen 2. Trabajo de investigación realizado por la profesora Ana Patricia Vásquez sobre el quipú como una forma ancestral de resguardar información contable.

METODOLOGÍA

Este taller plantea la base de su propuesta sobre los resultados de investigaciones realizadas en Guatemala y Costa Rica, sobre la utilización de nudos y patrones con grupos de artesanos de tradición ancestral. Por tal, su investigación se clasifica como cualitativa con enfoque etnográfico tal cual lo indica Hernández, Fernández, Batista (2010, p.491); así mismo su diseño fue micro etnográfico por centrarse en un solo tipo de confección material en grupos de artesanos por tradición ancestral como fue la utilización de nudos y patrones en tejidos y quipú. Se aborda también desde la perspectiva del diseño meta etnográfico, ya que se hizo una revisión de estudios etnográficos en dos países para determinar relaciones entre ambos. (Hernández et al. 2010, p.503).

El taller se desarrolla bajo una metodología activa de participación de los involucrados en el desarrollo de destrezas para la confección de tejidos donde se utilicen nudos para la confección de artefactos de uso cotidiano o como método para el resguardo de la información contable de algunos grupos.

Se presenta una base de información general por treinta minutos y posteriormente los asistentes al taller construyen por sí mismos mediante una guía, a partir de diversos tipos de nudos propuestos, los patrones que conforman un tejido, para determinar en ello, la fundamentación matemática y la estrecha relación de esta disciplina y el saber humano latinoamericano.

RESULTADOS

Objetivo

El objetivo del taller fue identificar la importancia etnomatemática que implica la confección de pulseras artesanales y el quipú para su vinculación con el salón de clase.

Materiales

Los materiales necesarios para la confección de las pulseras son cuerdas enceradas de tres colores. Cada participante debe conseguir un metro por color. Los materiales necesarios para la confección de un quipú corresponden entre 5 y 8 cuerdas enceradas de un metro cada una, una cuerda de algún material de mayor espesor que se sugiere cuerda de cabuya y chaquiras o abalorios de colores. Se muestra a continuación los materiales que fueron utilizados en ambas actividades.

Participantes y Tiempo

Para el desarrollo del taller se requiere de un grupo máximo de veinte personas. Para cada confección artesanal se requiere de hora y media, por tal para confección un quipú y una pulsera se deberá contar con tres horas contacto.

Imagen 3. Grupo participante del taller Nudos y Patrones. RELME 29. Panamá

Metodología y Productos

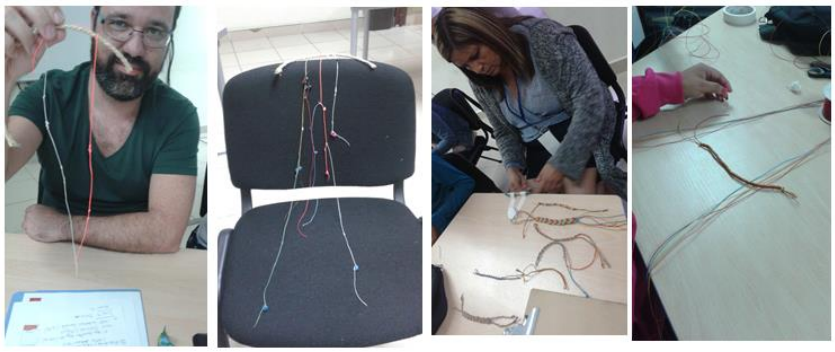
Para el desarrollo del taller se dispuso de dos sesiones de trabajo de hora y media cada una. El grupo se subdividió en dos subgrupos, donde el subgrupo 1 trabajó el primer día patrones en la confección de pulseras y el subgrupo 2 trabajó el primer día en la confección de un quipú. La segunda sesión los subgrupos se invirtieron, para experimentar el trabajo del día anterior de sus otros compañeros de taller. Por tal cada participante construyó un quipú y una pulsera en el taller.

Imagen 4. Metodología utilizada en el taller Nudos y Patrones. RELME 29. Panamá

Productos y Conclusiones

Los productos tangibles del taller fueron una pulsera y un quipú como se muestra en la siguiente imagen.

Imagen 5. Metodología utilizada en el taller Nudos y Patrones. RELME 29. Panamá



Parte de las conclusiones a las que llegaron los participantes de este taller fueron:

La importancia de remembrar el trabajo que hacían nuestros antecesores, los primeros pobladores latinoamericanos.

La complejidad utilizada en cada tejido, y la agilidad que debe tenerse para desarrollar artes manuales.

La complejidad que implica desarrollar tejidos hacia la derecha y hacia la izquierda, situación que causó impotencia al inicio en los participantes y luego de algunos minutos de trabajo se logró alcanzar esa meta.

La satisfacción de ver un resultado tangible del trabajo que se hace. Para varios participantes esto les motivó a seguir trabajando en líneas homólogas e indicaron que esa misma satisfacción sería percibida por los y las estudiantes si desarrollaran algo como esto.

Se identificó que este taller era de importancia para ser desarrollado en primaria, con el tema de patrones para el tejido y con el tema de valores posicionales numéricos para el quipú.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Blanco-Álvarez, H. (2011). *La postura sociocultural de la educación matemática y sus implicaciones en la escuela*. *Revista Educación y Pedagogía*, 23 (59), 59-66.

Bishop, A. (2005). *Aproximación sociocultural a la educación matemática*. Santiago de Cali: Universidad de Valle.

D'Ambrosio, U. (2001). *La matemática en América Central y del Sur: una visión panorámica.* En: A. Lizarzaburu & G. Zapata (comps.). *Pluriculturalidad y aprendizaje de la matemática en América Latina Experiencias y desafíos*. (Págs. 88 105). España. Morata/ ORIEIB-Andes/DSE.

D´Ambrosio, U. (2013) *Etnomatemática, entre las tradiciones y la modernidad*. Belo Horizonte. Auténtica.

Moreno, D. (2014). Descubriendo patrones en nuestra cultura. Lara, C. (Presidencia), *28 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Curso corto desarrollado en Barranquilla, Colombia.

UNESCO. (2011). Convención 2003 para la Salvaguardia del Patrimonio Cultural Intangible. Recuperado en enero de 2015 de http://www.unesco.org/culture/ich/index.php?lg=es&pg=00451

Vásquez, A. (2014). Quipú: Método ancestral para resguardar la información contable. Meza, G. (Presidencia), *9 Festival Internacional de Matemática*. Conferencia llevada a cabo en el congreso en Quepos, Costa Rica.

TENDENCIAS EN LOS CRITERIOS DE SELECCIÓN DE CONTENIDOS EN MAESTROS DE MATEMÁTICA EDUCATIVA. UNA APROXIMACIÓN A LAS ECCD

Rita Angulo Villanueva, Alma Rosa Pérez Trujillo, Ángel Gabriel Arens, Agustín Grijalva Monteverde
Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Universidad Autónoma de Chiapas, Universidad de Sonora (México)

Palabras clave: curriculum, estructuras conceptuales científico-didácticas (ECCD)

Key words: curriculum, scientific teaching conceptual structures (STCS)

RESUMEN: Profesores de carreras de Matemática Educativa en universidades mexicanas tienen una variada formación profesional (ciencias sociales, ciencias prácticas, ciencias básicas o matemática educativa). Sus perfiles formativos generan diversidad en la selección de contenidos; éstos aparecen en el curriculum fragmentados y dificultan la integración de los conocimientos a los alumnos, lo que resulta en bajo rendimiento académico. Nuestro objetivo es presentar los resultados de la prueba piloto de los instrumentos realizada en dos universidades mexicanas, constituyen un primer avance de la investigación acerca de las estructuras de pensamiento con las que los profesores modifican los contenidos del plan curricular, es decir, las Estructuras Conceptuales Científico Didácticas (ECCD) (Angulo, 2007). La metodología implicó una entrevista a profundidad a 12 profesores, su transcripción y su posterior análisis e interpretación mediante el análisis de discurso en tres de sus niveles: fragmentos discursivos, conjuntos temáticos y códigos; todos ellos permitieron su organización en categorías analíticas.

ABSTRACT: Mexican university teachers in Mathematics Education racing have a varied vocational training (social sciences, practical sciences, basic science or mathematics education). Their training profiles generate diversity in the selection of content; they are fragmented in curriculum and hinder the integration of knowledge to students, resulting in poor academic performance. Our goal is to present the results of the pilot of the instruments held in two Mexican universities, constitute a first step of research on the structures of thought with which teachers modify the content of the curriculum, ie the Conceptual Structures scientific Teaching (ECCD) (Angulo, 2007). The methodology involved an in-depth interview to 12 teachers, interviews were transcribed and subsequently analysis and interpretation by analyzing of discourse on three levels: the discursive fragments, the thematic sets and codes; all of them were organized in analytical categories.

PROBLEMATIZACIÓN

Los profesores-investigadores universitarios modifican contenidos constantemente. Modifican con base en conocimientos empírico-pedagógicos y en conocimientos científicos propios de la disciplina en la que están formados. A esta combinación de conocimientos se le ha llamado Estructura conceptual científico didáctica (ECCD) (Angulo, 2007). La ECCD es una forma de pensamiento utilizada como parámetro para la modificación de contenidos en una carrera, está constituida por conocimientos y relaciones entre conocimientos científicos y por consideraciones pedagógicas para seleccionarlos, organizarlos y enseñarlos. La ECCD es un hecho social característico de un cierto grupo, en este caso, la comunidad de matemáticos educativos.

Cuando los profesores modifican contenidos lo hacen cotidianamente, no esperan a períodos preestablecidos de evaluación y reformulación curricular, ello involucra una adecuación continua de contenidos. Cuando dicha adecuación se realiza sin trabajo colegiado de por medio, genera que se enseñen en el aula contenidos fragmentados y que representen un problema de integración en el aprendizaje de los alumnos.

Considerando lo expuesto, en esta investigación se partió de los *supuestos* siguientes: 1. Existe una fragmentación del conocimiento en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas como resultado del proceso de transformación del conocimiento en contenidos educativos; y 2. Los profesores pueden propiciar una comprensión integrada del conocimiento científico en los alumnos a partir de reconocer sistemáticamente la Estructura Conceptual Científico Didáctica (ECCD) con base en la que organizan los contenidos de su materia y los que enseñan a los estudiantes.

METODOLOGÍA

El estudio se hace con la metodología cualitativa de Análisis del Discurso con la entrevista a 12 profesores que colaboran en programas de Matemática Educativa (ME) en dos universidades: Universidad Autónoma de San Luis Potosí (UASLP) y Universidad Autónoma de Chiapas (UNACH); asimismo 1 cuestionario a cada uno de los mismos profesores, los resultados del cuestionario permitieron corroborar los datos obtenidos en la entrevista. En la entrevista realizada se preguntó por las competencias que consideraban esenciales para un egresado de la licenciatura en el caso de los profesores de la UASLP y de la maestría en la UNACH, en el cuestionario se indagó tanto sobre la orientación formativa como uno de los criterios de selección de contenidos así como sobre las fuentes y procedimientos empleados para la de selección de contenidos.

PRINCIPIOS TEÓRICOS

Los principios teóricos que apuntalan la investigación derivan de la conceptuación de la ECCD que es una forma de pensamiento utilizada como parámetro para la modificación de contenidos en un programa de estudios. Está constituida por conocimientos y relaciones entre conocimientos científicos y por consideraciones pedagógicas para seleccionarlos, organizarlos y enseñarlos. La ECCD es un hecho social característico de un cierto grupo. Por ser de tipo mental se considera una representación…“representar es hacer presente [algo] en la mente, en la conciencia” (Jodelet, 1986, p. 475.) por medio de signos o símbolos. La representación a pesar de ser consciente opera automáticamente, el profesor que recurre a ella lo hace sin pensarla explícitamente, no la reconoce como un esquema organizado y no sabe que la está utilizando como criterio de selección.

La Teoría de las representaciones sociales supone una visión ternaria de la realidad, misma que considera al sujeto social en interacción con el individuo y con el contenido de la representación. Por esta razón la representación, según estos teóricos, tiene una fuerte carga de sentido común y se gesta y desarrolla en grupo. En el caso de los profesores de matemática educativa se consideró la formación de un grupo, en este caso, de docentes en matemáticas (sujeto social), de un contenido de carácter científico (matemática) y de individuos (sujeto individual). Si el contenido de la representación es científico como en el caso que comentamos y la actividad que los agrupa es docente (sujeto social) y tal práctica se ejerce a partir de la experiencia pedagógica (que no la formación) se está realizando una práctica de sentido común. Luego entonces si reflexionamos sobre estos componentes (pedagógico y científico) la Teoría de las representaciones sociales resulta idónea para analizar este tipo de grupos.

La Teoría de las representaciones sociales (Moscovici, 1986 y Jodelet, 1986 y 2000) permite comprender la ECCD como un modelo teórico que revela la interacción entre disciplinas científicas y pedagogía (Jodelet, 2000, p.11), asume la posibilidad del "…encuentro entre distintas corrientes de pensamiento…" (Jodelet, 2000, p.13).

Las representaciones sociales, según Jodelet (1986), se construyen por: imágenes mentales sobre objetos (a) que concentran un conjunto de significados (b) implícitos en los elementos de la representación. Los elementos de la representación (c) que en el caso de estudio son el matemático y el pedagógico, implican sistemas de referencia (d) como la Matemática y la Pedagogía, mismas que permiten la interpretación y dar un sentido a la realidad (e), por ejemplo, la pedagogía caracteriza el fenómeno educativo y la enseñanza; la representación social en sí (en este caso, de los matemáticos educativos contiene categorías (f) como la "idoneidad epistémica" o la "idoneidad didáctica" para clasificar informaciones o novedades; dichas categorías constituyen teorías como la Teoría Ontosemiótica que –en conjunto- permiten interpretar la enseñanza de la matemáticas (g), a la vez que, implican y una forma de pensar la realidad (h) en la que se una fijar posición (i), por ejemplo, "enseñar a través de situaciones didácticas", por lo que conllevan una forma de conocimiento social (j). En la propuesta se desarrollarán cada uno de estos elementos asociados a la ME. Para su profundización teórica consultar Angulo (2007).

La representación social siempre está referida a un objeto, adopta el carácter de imagen una vez que ha sido percibido por el sujeto, tiene un carácter simbólico y significante, constructivo, autónomo y creativo (Jodelet, 1986). Es temporal y se reconstituye continuamente.

Cada grupo de profesores, según su formación y especialidad así como experiencia, podría disponer la estructura de distinta forma e incluso no incluir los mismos conceptos. No obstante, consideramos que en la ECCD existen conceptos nodales comunes a todos los profesores-investigadores y que son los mismos que contiene la estructura de la disciplina.

La construcción de las representaciones sociales pasa por: La construcción de lo real en una representación social; y, el anclaje de ésta en el imaginario colectivo. Ambas actividades permiten relacionar la actividad cognitiva con lo social (Jodelet, 1986).

La construcción implica: a) una selección y descontextualización de informaciones; b) la objetivización de las informaciones por medio de imágenes; c) la constitución de un núcleo figurativo mediante la organización de las imágenes y sus relaciones; y, d) la naturalización de los elementos del núcleo figurativo al concederles una ubicación en la estructura.

El anclaje conlleva: a) la asignación de sentido, b) la instrumentalización, c) el anclaje en sí, y d) el enraizamiento. El anclaje implica el enraizamiento en un grupo social, es decir, el grupo que comparte la ECCD.

¿La Matemática Educativa como disciplina científica tiene un objeto de investigación híbrido en tanto abrevan en ella conceptualizaciones provenientes de las ciencias exactas, las ingenierías y las ciencias humanas y sociales?, ¿existe fragmentación del conocimiento entre los componentes de contenido pedagógico y matemático? ¿la fragmentación del contenido ofrece dificultades a los alumnos para integrar el conocimiento matemático educativo?

RESULTADOS

Es importante señalar que si bien se levantaron datos de la licenciatura de la UASLP (9 semestres) y la maestría de la UNACH (4 semestres), el sujeto de análisis son los profesores, no los programas, si bien en algún momento de la investigación habrá que referirlos.

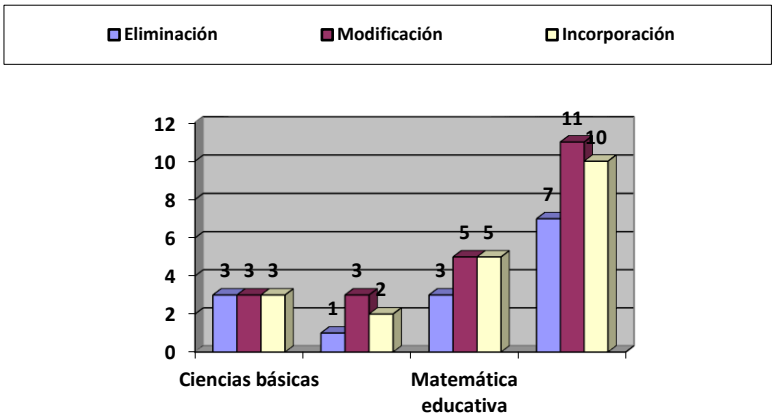
A. En las 12 entrevistas aplicadas, se analizaron dos niveles discursivos, en el primer nivel discursivo se extrajeron 118 fragmentos relevantes, los cuales generaron su agrupación en 7 categorías: Dominio de las matemáticas, Habilidad pedagógica, Habilidad para la investigación, Competencias integradoras, Manejo de un segundo idioma, Lectura y redacción y Actitudes éticas.

Para el segundo nivel de análisis se encontraron diversos códigos en cada Categoría. Es importante observar con que insistencia los profesores refirieron cada uno de los códigos, ello evidencia la importancia atribuida a cada categoría.

Un primer dato destacable es que la categoría Competencias Integradoras fue la que obtuvo mayor incidencia, incluso más que las involucradas directamente con el eje temático de la carrera (Dominio de las matemáticas y Habilidades pedagógicas). En específico, el código de “Aplicación a la matemática”, perteneciente a esta categoría muestra una incidencia destacable. Al respecto Díaz (2013) hace notar la tendencia latinoamericana de generar curricula muy apegadas a las demandas inmediatas del contexto más que para un conocimiento disciplinar profundo que los prepare para responder a distintas circunstancias. Podríamos abogar a favor de una enseñanza que si bien otorgara mayor flexibilidad y creatividad para la selección de contenidos hiciese énfasis en un conocimiento disciplinar experto.

B. En el procesamiento de los cuestionarios se detectó la presencia de profesores provenientes de tres áreas de conocimiento de acuerdo con su formación de licenciatura: Ciencias Prácticas (Ingenierías) el 23%, Ciencias Básicas (Física y Matemáticas) el 30% y Matemática Educativa 46 %. Aunque cabe señalar que al interior de los profesores con formación en Matemática Educativa, la formación de base fue de ingeniería en un 50%, de Físico Matemáticas en 33% y de Matemática Educativa sólo un 17%. La composición descrita nos permite aventurar como hipótesis que los profesores que dan clase en licenciaturas y posgrados de Matemática Educativa tienen distintas formaciones disciplinarias y por tanto lógicas epistémicas o de producción de conocimiento distintas. Circunstancia que nos permite vislumbrar una dificultad de integración de contenidos para los alumnos de estas carreras. Presentamos ahora los resultados a cuatro de las 27 preguntas del cuestionario (Ver figura 1).

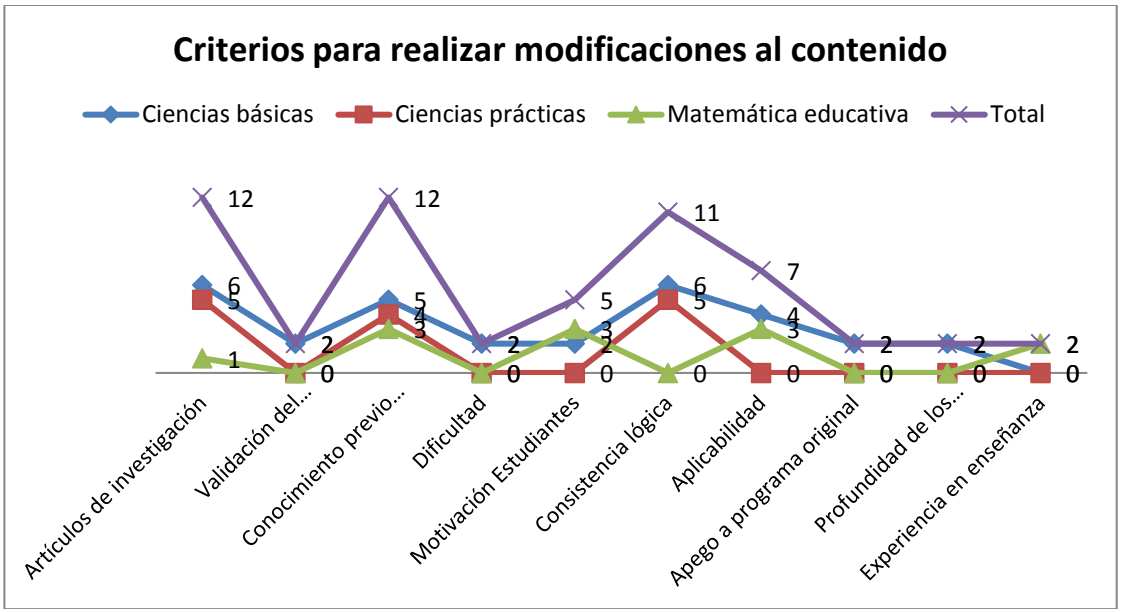
Figura 1. Concentrado sobre áreas de conocimiento.



Con respecto al hecho de si los profesores realizan modificaciones a los contenidos el 84% de los profesores señalan modificar cotidianamente los contenidos de los programas, 11 de ellos modifican o intercambian contenidos, 10 incorporan y 7 eliminan contenidos. Este panorama da cuenta de una actividad cotidiana entre profesores de educación superior, la modificación de contenidos.

En relación con los criterios de modificación de contenidos, los profesores señalaron un total de 10: la actualidad del contenidos, su dificultad y congruencia interna así como su profundización más rápida; la motivación y los conocimientos previos de los alumnos; los resultados de investigación, la aplicabilidad del conocimiento, la preservación del programa original, y la experiencia docente, en la figura 2 mostramos el concentrado. Entre ellos los más empleados fueron: Los conocimientos previos, la congruencia interna de los contenidos y los avances de investigación; éstos fueron señalados por la totalidad de los investigadores, es decir, el 100%.

Figura 2. Criterios utilizados para modificar el contenido curricular.



Este resultado permite considerar que los profesores no se mantienen dentro del *curriculum* oficial sino que diseñan uno de acuerdo con las necesidades.

Acerca de las fuentes que utilizan para la selección de contenidos, se indicaron: el *curriculum*, libros de texto, artículos de investigación, Internet, medios masivos de comunicación, experiencia personal y de los pares, y los problemas del contexto. Entre ellos, los de mayor importancia fueron los documentos de investigación y con una relevancia media los libros de texto y el internet, todos los demás con escasa presencia. Con respecto a las fuentes de los contenidos se hace evidente la importancia de la investigación proveniente de las respectivas áreas de los docentes (no de la Matemática Educativa) así como la prevalencia de libros de texto y el ascenso cada vez mayor del Internet.

CONCLUSIONES

Los resultados preliminares (cuyos datos se obtuvieron entre agosto de 2013 y abril de 2014) que hemos presentado nos permitieron validar el instrumento utilizado (cuestionario). Estos resultados iniciales permitieron detectar una tendencia de pensamiento compartida entre los profesores que imparten clases en estos programas. Tal forma de pensamiento permite vislumbrar una modificación continua en los contenidos de los programas. Así como los criterios que se emplean para dicha modificación. Se apreció también una cierta tendencia a la fragmentación del contenido, dado que la selección se hace desde tres lógicas de pensamiento distintas. Esta estimación adquiere una importancia central si se considera que existen dificultades para lograr que los estudiantes universitarios integren un conocimiento que reciben fragmentado.

Además nos encontramos ante la presencia de un problema de construcción del conocimiento especializado por parte de los profesores, es decir, el conocimiento matemático pedagógico. Es un problema de dos aristas, de un lado un grupo de profesores que seleccionan y organizan contenidos así como dan clase desde cuatro lógicas epistémicas distintas (ciencias exactas, ciencias prácticas y Matemática Educativa). De otro lado, para la UASLP un grupo de estudiantes de nivel universitario que tiene dificultades para integrar esos conocimientos a lo largo de su formación y, aún más, para llevarlos a la práctica en la enseñanza de las matemáticas en niveles de educación media y media superior.

Ubicamos a este problema de construcción del conocimiento matemático pedagógico como objeto de estudio de la Matemática Educativa en tanto disciplina científica. Problema que ha sido abordado en múltiples ocasiones con respecto a los alumnos, particularmente a los alumnos de los niveles educativos preescolar, básico, medio y medio superior (OCDE, 2013; OCDE, s/f); no obstante, existen pocos estudios que aborden el problema –desde la perspectiva de investigación- en alumnos de educación superior. Tampoco existen estudios que aborden el problema de la fragmentación del conocimiento en las tareas de los profesores universitarios, particularmente las que se refieren al diseño curricular, en este caso la selección y organización de los contenidos.

Ya desde este momento se puede apreciar una estructura interna en los datos recolectados, ofreciéndonos una posible y rica lectura de las ECCD de los profesores. Este resultado permite considerar que los profesores no se mantienen dentro del curriculum oficial sino que diseñan sus programas de acuerdo con las necesidades del contexto. Consideramos que con estos estudios

hemos identificado una línea de investigación necesaria para fortalecer el campo de la matemática educativa en su carácter de disciplina científica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Angulo, R. (2007). *La estructura conceptual científico didáctica*. México: Plaza y Valdés.

Díaz, M. (2013). Currículum: debates actuales. Trazos desde América Latina. *[Con]textos*, *2 (8)*, 21-33.

Jodelet, D. (1986). La representación social: fenómenos, concepto y teoría, en S. Moscovici (Eds) (1986), *Psicología social II. Pensamiento y vida social. Psicología social y problemas sociales* (pp. 469-494), Barcelona: Paidós.

Jodelet, D. (2000). Representaciones sociales: contribución a un saber social sin fronteras, en D. Jodelet y A. Guerrero (Eds) *Develando la cultura. Estudios en representaciones sociales* (pp. 7-30), México: Universidad Nacional Autónoma de México.

OCDE. (2013). MÉXICO –Nota País–Resultados de PISA 2012. Recuperado el 12 de mayo de 2014, de *Programme for international student assessment*: http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-results-mexico-ESP.pdf

OCDE. (sf). El programa PISA de la OCDE: Qué es y para qué sirve. Recuperado el 30 de septiembre de 2014, de *Programme for International Student Assessment*-OCDE: http://www.oecd.org/pisa/39730818.pdf

CARACTERIZACIÓN DEL MTSK DE LOS DOCENTES EN FORMACIÓN: APROXIMACIÓN DESDE SUS CONCEPCIONES SOBRE EL KFLM Y EL KMLS

Francisco Javier Hernández Gutiérrez, Eugenio Lizarde Flores
Escuela Normal Rural "Gral. Matías Ramos Santos" México
frajaher_79@hotmail.com, life_genio@yahoo.com.mx

Palabras clave: Conocimiento especializado, formación de docentes

Key words: Specialized knowledge, teacher training

RESUMEN: El objetivo de este estudio es caracterizar el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Carrillo, Contreras, Climent, Escudero-Ávila, Flores-Medrano, & Montes, 2014) en el proceso de formación inicial de los futuros docentes de educación primaria en la Escuela Normal Rural "Gral. Matías Ramos Santos" en Zacatecas, México. Para ello, se realizó un estudio estadístico correlacional de Pearson con la aplicación de un cuestionario con reactivos Likert. La muestra consistió en 52 alumnos que cursan el cuarto semestre de la licenciatura. Los resultados demuestran una relación estadísticamente significativa en las correlaciones tanto en los niveles de dificultad de la enseñanza de los contenidos de matemáticas, como en su aprendizaje.

ABSTRACT: The aim of this study is to characterize the specialized knowledge of the mathematics teacher (Carrillo, et al. 2014) in the process of initial training of future teachers of primary education in the Escuela Normal Rural "Gral. Matías Ramos Santos" in Zacatecas, México. For this, a Pearson correlation statistical study of the application of a questionnaire with Likert was performed. The sample consisted of 52 students in the fourth semester of the degree. The results show a statistically significant relationship in correlations both levels of difficulty of the teaching of mathematics content, and learning.

INTRODUCCIÓN

Este estudio forma parte de otro más amplio en el que pretendemos caracterizar el *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (MTSK por sus siglas en inglés) (Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán, 2013) (Carrillo, Contreras, Climent, Escudero-Ávila, Flores-Medrano, & Montes, 2014), principalmente en la vertiente de la formación inicial, es decir, cómo se plantea que se construya desde las propuestas curriculares oficiales (DOF, 2012) y (SEP, 2012), con la posibilidad de valorar los alcances y limitaciones de éstas, así como las eventuales transformaciones que se generan tanto en las concepciones iniciales de los futuros docentes, como en el dominio disciplinario y la configuración del conocimiento especializado, bajo la consideración de que lo "especializado" alude a lo que es necesario y específico a la enseñanza de la matemática.

En el presente estudio se reportan los resultados de la aplicación de una encuesta a una muestra compuesta por 52 alumnos que cursan el 4º semestre de la LEP, tomando como foco de análisis los subdominios KoT, KFLM y KMLS, con lo cual se cubren a su vez el dominio matemático como el didáctico comprendidos en el MTSK.

Aunque ésta contempló 56 variables, aquí reportamos los resultados del análisis de correlación de Pearson entre el nivel de dificultad de la enseñanza y aprendizaje que los estudiantes normalistas conciben al didactificar los 28 problemas matemáticos relacionados a los 8 temas del Programa de Estudio de matemáticas para sexto grado (SEP, 2012).

Los resultados indican que hay una correlación significativa entre las concepciones que el docente asume de la dificultad para que los alumnos aprendan el contenido y sus propias dificultades para desarrollar estrategias de enseñanza, es decir, en la medida que asumen un contenido difícil para aprender por parte de los niños, al mismo tiempo asumen que les representará mayores dificultades en su enseñanza; al parecer estas concepciones se generan desde la constatación de sus propias dificultades como resolutores de los mismos problemas matemáticos a los que se enfrentan.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Los resultados internacionales en competencia matemática, como los que reporta la prueba PISA 2012, muestran que México se encuentra en el lugar 53 de 65 países evaluados. El porcentaje de los niveles de desempeño en nuestro país, indican una alta concentración en el segundo y tercer nivel con 32% y 28% respectivamente, en contra de sus porcentajes más bajos en los niveles más altos de desempeño, con un 13% en el cuarto nivel, un 4% en el quinto nivel y 0% en el sexto nivel (INEE, 2013). Esta problemática se sigue presentando de manera recurrente y nos convoca a poner atención en la formación inicial de profesores.

El debate actual (NCTM, 2015; Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán, 2013) en torno a la formación matemática de los profesores, incluye la discusión respecto a la pertinencia de que el maestro sea un especialista en la materia, es decir, tal y como sucede en otros países donde primero se es Licenciado en Matemáticas (formación disciplinar) y luego se recibe habilitación para ejercer la docencia; sin embargo nosotros asumimos que, más que ser "especialista", el profesor debe tener un conocimiento "especializado", sobre todo cuando nos referimos a la formación

matemática de los profesores de educación primaria, (Lizarde, Hernández & Loera, 2015) como es el caso de los resultados de investigación que aquí reportamos.

Ahora bien, ¿a qué nos referimos con "conocimiento especializado"? al igual que Shulman (1986) el MTSK, como marco teórico para caracterizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán, 2013; Carrillo, Contreras, & Flores, 2013; Carrillo, y otros, 2014; Montes, y otros, 2015) considera dos grandes dominios: *El conocimiento matemático* como disciplina científica que se utiliza por parte del docente en un contexto escolar y; *el Conocimiento didáctico del contenido* como los aspectos relacionados con el contenido matemático como objeto de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Estos dos dominios a su vez cuentan con subdominios. El conocimiento matemático se subdivide en *Conocimiento de los temas matemáticos (KoT),* se refiere al conocimiento que el docente tiene sobre los contenidos que desarrolla con sus alumnos; *Conocimiento de la estructura matemática (KSM)*, contempla el conocimiento que le posibilita al profesor enseñar los temas matemáticos como fundamentación para su complejización posterior y; *Conocimiento de la práctica matemática (KPM)*, establece la relación entre el conocimiento de los temas matemáticos y los procedimientos y prácticas que se realizan para su construcción.

En el dominio Conocimiento didáctico del contenido se establecieron los subdominios: *Conocimiento de las características del aprendizaje (KFLM)*, maneja las características de aprendizaje que conlleva el aprendizaje en los contenidos específicos de las matemáticas; *Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)*, se refiere a los recursos, materiales, estrategias didácticas y metodológicas como se presenta el contenido, y; *Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)*, se enfoca a la intencionalidad y conocimiento del profesor sobre los niveles de logro en los aprendizajes de los alumnos considerando el momento escolar determinado y su grado de desarrollo.

La aportación de la teoría del MTSK a este estudio, se enfoca en la caracterización y búsqueda de correlaciones para encontrar las vinculaciones estadísticas de los subdominios: Conocimiento de los temas matemáticos (KoT), Conocimiento de las características del aprendizaje (KFLM) y Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las Matemáticas (KMLS), desde las concepciones de los docentes en formación del cuarto semestre de la Licenciatura en educación primaria.

Dos elementos más es importante considerar en el proceso de análisis de las concepciones de los futuros profesores y de su configuración en el conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria. Primero, estudios como el de (Lizarde, 2013) y (Hernández & Lizarde, 2015) demuestran la modificación en las concepciones de los futuros docentes vinculada con la práctica del conocimiento matemático y su didactificación a lo largo de su formación en la escuela normal; y segundo, la articulación entre las concepciones "oficiales" que permean los programas de estudio de matemáticas (SEP, 2012) y su análisis en los programas de matemáticas de la Escuela Normal.

METODOLOGÍA

Perfil y delimitación de los participantes

La población objeto de estudio fue de 60 casos con posibilidad de una muestra mínima de 52, estando la proporción de la muestra *p* entre ± 0.05 de la proporción *P* de la población con un 95% de nivel de confianza de acuerdo con Krejcie y Morgan (1970). En la aplicación concreta de la encuesta se contó con la aportación de la muestra mínima (52 casos) que corresponde al 86.6% de la población total.

Este estudio se desarrolló a partir de una muestra que la componen alumnos de Licenciatura en Educación Primaria de la Normal Rural "Gral. Matías Ramos Santos" de San Marcos, Loreto, Zacatecas. Las muestras se centraron en dos grupos de cuarto semestre, considerado así por ser en este semestre en el que se cierra la preparación de matemáticas su enseñanza y aprendizaje mediante los cursos de la malla curricular.

Diseño del instrumento

El instrumento para la recolección de datos que se utilizó para este estudio fue una encuesta elaborada por los autores del artículo. Los argumentos teóricos considerados para su elaboración, surgieron de la propuesta de la teoría del MTSK, con la intención de recuperar lo referente a los subdominios: *Conocimiento de los temas matemáticos (KoT), Conocimiento de las características del aprendizaje (KFLM) y Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las Matemáticas (KMLS),* relacionándolos con el actual Plan y Programas de Estudio para Educación Primaria 2011 y el Plan para formación de Licenciados en Educación Primaria 2012 en México.

El instrumento se elaboró a partir de 28 problemas matemáticos extraídos de los ocho temas matemáticos establecidos en el libro de texto de matemáticas para sexto grado de educación primaria: Números y sistemas de numeración, Problemas aditivos, Problemas multiplicativos, Figuras y cuerpos geométricos, Ubicación espacial, Medida, Proporcionalidad y funciones y Análisis y representación de datos. Constó de cuatro variables nominales para la caracterización de los respondientes y 56 variables ordinales, en el caso de estas últimas, la forma de responder fue a través de una variación de la escala Likert con cinco opciones para responder del 1 al 5, que corresponden al grado de dificultad que el normalista otorga a la enseñanza y aprendizaje del problema planteado. Los valores asumidos fueron: muy fácil (1), fácil (2), relativamente difícil (3), difícil (4) y muy difícil (5).

Dentro de las propiedades psicométricas del instrumento, se realizó una exploración de la consistencia interna del instrumento utilizando el método de *Alfa de Cronbach,* del que se obtuvo un coeficiente total de confiabilidad para las 56 variables ordinales de .941 y una correlación inter-ítem de .233, puntaje que supera el criterio de Rosenthal (1994) y Cadena (2007).

Procedimiento

Con la finalidad de encontrar la correlación entre el nivel de dificultad de la enseñanza y aprendizaje que los estudiantes normalistas conciben al didactificar los 28 problemas matemáticos relacionados a los 8 temas del Programa de Estudio de matemáticas para sexto grado, se desarrolló un análisis de correlación de Pearson de dos listas a un nivel de significancia de $p \leq .050$. Se transformaron las 56 variables ordinales en 16 variables complejas, que corresponden a los 8 temas matemáticos, midiendo en cada caso, tanto la dificultad en su enseñanza, como en su aprendizaje: *Tema números y sistemas de numeración enseñanza, Tema números y sistemas de*

numeración aprendizaje, Tema problemas aditivos enseñanza, Tema problemas aditivos aprendizaje, Tema problemas multiplicativos enseñanza, Tema problemas multiplicativos aprendizaje, Tema figuras y cuerpos geométricos enseñanza, Tema figuras y cuerpos geométricos aprendizaje, Tema ubicación espacial enseñanza, Tema ubicación espacial aprendizaje, Tema Medida enseñanza, Tema Medida aprendizaje, Tema proporcionalidad y funciones enseñanza, Tema proporcionalidad y funciones aprendizaje, Tema Análisis y representación de datos enseñanza y Tema Análisis y representación de datos aprendizaje.

Las características que se consideraron para el uso de la prueba paramétrica correlacional fueron: N superior a 30 casos, nivel de medición numérica en las variables, una distribución normal en los datos de los 56 reactivos considerados a partir de su agrupación en 16 variables complejas, utilizando la prueba estadística de Kolmorov-Smirnov y; la homocedasticidad de las varianzas en las mismas a partir de un análisis estadístico de Levene, considerando un nivel de probabilidad ≥0.050 en estos dos últimos casos. Con respecto a la normalidad de las varianzas, la evidencia demuestra que se acepta hipótesis nula en 13 de las 16 variables complejas. Con respecto a la homogeneidad de las varianzas, el resultado permite manifestar que las varianzas de las variables se observan como homogéneas y por lo tanto tienen homocedasticidad y se acepta la posibilidad del uso de estadística paramétrica (Tabla 1).

Tabla 1. Prueba de Levene para homogeneidad y Prueba Kolmorov-Smirnov para normalidad de varianzas.

Variables complejas	*Prueba de Levene*		*Prueba Kolmorov-Smirnov*	
	F	*p.*	$Z_{K\text{-}S}$	*p.*
Tema números y sistemas de numeración enseñanza	.479	.492	.710	.694
Tema números y sistemas de numeración aprendizaje	2.354	.131	.821	.510
Tema problemas aditivos enseñanza	.572	.453	.680	.745
Tema problemas aditivos aprendizaje	.850	.361	1.093	.183
Tema problemas multiplicativos enseñanza	3.895	.054	1.000	.270
Tema problemas multiplicativos aprendizaje	1.975	.166	1.361	.049
Tema figuras y cuerpos geométricos enseñanza	1.163	.286	1.812	.003
Tema figuras y cuerpos geométricos aprendizaje	.145	.705	1.377	.045
Tema ubicación espacial enseñanza	.132	.718	.981	.291
Tema ubicación espacial aprendizaje	2.185	.146	1.110	.170
Tema Medida enseñanza	.551	.462	.587	.881
Tema Medida aprendizaje	.075	.785	.581	.888
Tema proporcionalidad y funciones enseñanza	1.254	.268	.984	.288
Tema proporcionalidad y funciones aprendizaje	.014	.906	.982	.290
Tema Análisis y representación de datos enseñanza	.005	.947	.824	.505
Tema Análisis y representación de datos aprendizaje	2.032	.160	.723	.673

Para correr el análisis de método de Alfa de Cronbach, la Correlación Inter-Ítem y Correlación de Pearson se utilizó el paquete estadístico Statística 7, para la prueba de homogeneidad y normalidad de las varianzas, se utilizó el software estadístico SPSS 21.

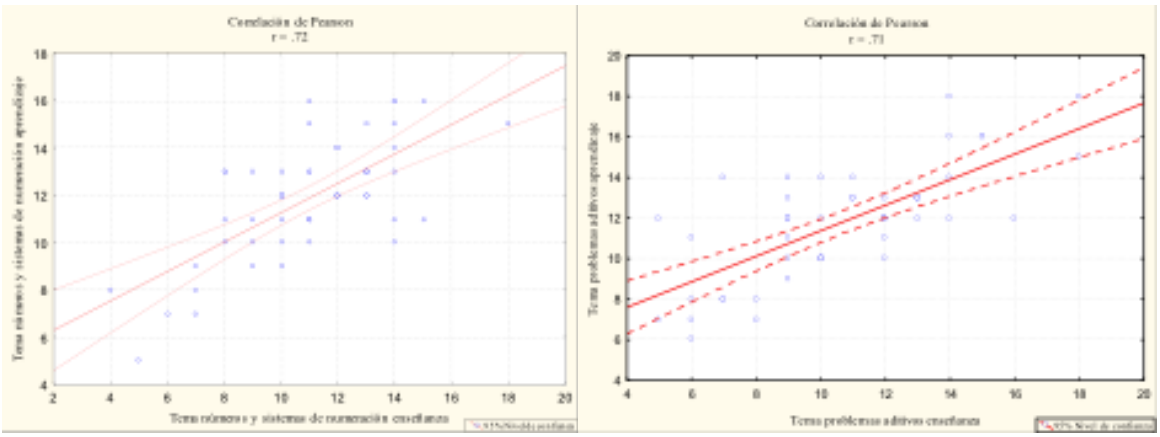
RESULTADOS

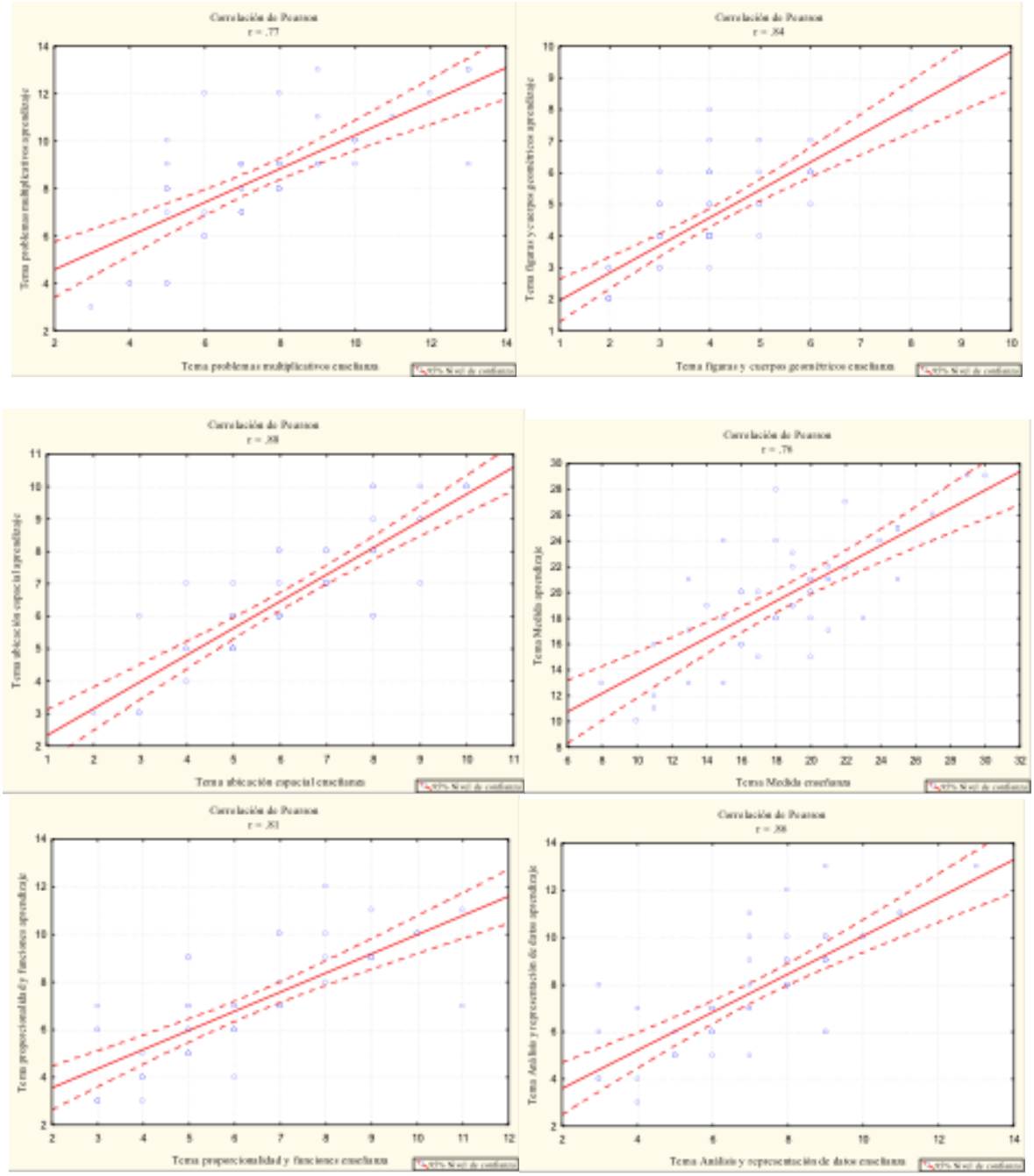
Los resultados demuestran niveles estadísticamente significativos en las correlaciones, es decir, existe una verdadera relación distinta a cero en todas las variables complejas sobre los temas de estudio de matemáticas en las que el futuro maestro indicó el nivel de dificultad que implicaría su enseñanza, obtuvo una correlación significativa con relación a la dificultad sobre el mismo tema en su aprendizaje por parte del alumno de sexto grado de educación primaria.

La variable compleja *Tema números y sistemas de numeración enseñanza* tuvo una correlación de 0.72 con respecto a su homóloga en el aprendizaje, en el caso de *Tema problemas aditivos enseñanza* su correlación fue de 0.71 con *Tema problemas aditivos aprendizaje, Tema problemas multiplicativos enseñanza* 0.77 con *Tema problemas multiplicativos aprendizaje*, *Tema figuras y cuerpos geométricos enseñanza* 0.84 con la variable de aprendizaje, la correlación más fuerte se observó en el *Tema ubicación espacial enseñanza* 0.88 con *Tema ubicación espacial aprendizaje, Tema Medida enseñanza* 0.76 con *Tema Medida aprendizaje, Tema proporcionalidad y funciones enseñanza* 0.81 con la variable de aprendizaje y *Tema Análisis y representación de datos enseñanza* 0.86 de correlación con su variable compleja de aprendizaje (FIGURAS 1-8).

En términos generales el estudio indicó correlaciones positivas en todas las variables, además se observa la correlación significativa entre la dificultad expuesta para la enseñanza de los temas matemáticos, con la dificultad expuesta por el futuro maestro de educación primaria sobre el mismo tema pero en su aprendizaje por parte de los niños de sexto grado.

Figuras 1 a 8. Gráficos de Correlación de Pearson de las variables complejas





CONCLUSIONES

La caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de educación primaria en formación inicial, muestra a partir del estudio que se ha desarrollado, la confirmación de relación entre dos de los subdominios del MTSK con el centro que marca la propia teoría. Es decir, las concepciones del docente manifiestan que existe un vínculo significativo entre *El conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* (KMLS) con *El conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas* (KFLM). El análisis demuestra una correlación significativa entre las variables complejas, en este caso, las que miden los niveles de dificultad que

asume el futuro maestro sobre alguno de los temas matemáticos al enseñarlo, así como la dificultad que cree que tendrá sobre ese mismo tema el aprendizaje del niño de sexto grado.

Por lo que se confirma la relación intrínseca que el docente en formación otorga tanto a la dificultad en la enseñanza de contenidos, como en su aprendizaje. De tal forma que, si el estudiante normalista cree que se le dificultará didactificar un contenido específico de matemáticas, también será complicado en el mismo nivel para el alumno y, de igual forma, que si al futuro maestro se le facilita dicho contenido, al alumno de sexto grado le será más sencillo aprenderlo.

No en un sentido unilateral de que, si el maestro no conoce algo, el alumno tampoco lo hará, pero sí, en el sentido de una intencionalidad didáctica, en la que entre mayor integración e intención tenga el docente de las características del conocimiento matemático y su didactificación, habrá una mejor respuesta en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cadena G. C.H. (2007). La medición en las ciencias sociales y psicología. En R. Landero y M. González (Comps.), *Estadística con SPSS y metodología de la investigación,*139-165. México: Trillas.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Ed.), *Actas del CERME 8,* 2985 - 2994. Antalya, Turquía.

Carrillo, J., Contreras, L., & Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina, & I. Segovia (Ed.), *Investigación en didáctica de la matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (págs. 193 - 200). Granada: Comares.

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E., & Montes, M. Á. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.* Huelva: Universidad de Huelva publicaciones.

DOF. (2012). *Acuerdo 649 por el que se establece el Plan de Estudios para la formación de maestros de educación primaria.* México: Autor.

INEE. (2013). *México en PISA 2012.* México: Autor.

Hernández, G. F., & Lizarde, E. (2015). Las concepciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de los profesores de primaria en formación inicial. Presentada en *XIV CIAEM.* Chiapas: CIAEM.

Krejcie, R. V. & Morgan, D. W. (1970). Determining sample size for research activities. *Educational and psychological measurement*, 30, 607-610.

Lizarde, E. (2013). *Transposición y destransposición del saber matemático y didáctico. Representaciones y prácticas en la formación inicial de docentes.* Huelva: Servicio de publicaciones de la UHU.

Lizarde, F. E., Hernández, G. F., & Loera, S. S. (2015). “Problemas de enseñanza”: una alternativa para la construcción del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Presentada en *XIII CNIE.* Chihuahua: COMIE.

Montes, M. Á., Contreras, L. C., Liñan, M. d., Muñoz-Catalán, M. C., Climent, N., & Carrillo, J. (2015). Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas. *Revista de Educación* (367), 36-62.

NCTM. (2015). *De los principios a la acción para garantizar el éxito matemático para todos.* México: NCTM.

Rosenthal, R. (1994). Parametric measures of effect size. En H. Cooper & L.V. Hedges (Eds.). *The Handbook of Research Synthesis* (pp. 231-260). New York: Russell Sage Foundation.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Research*, 4-14.

SEP. (2012). *Acuerdo 592 para la articulación de la educación básica.* México: Autor.

HACIA LA MODIFICACIÓN DE LAS PRÁCTICAS DOCENTES DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS DEL BACHILLERATO

Agustín Grijalva Monteverde, Silvia Elena Ibarra Olmos
Universidad de Sonora (México)
guty@mat.uson.mx, sibarra@mat.uson.mx

Palabras clave: profesores de matemáticas, bachillerato, prácticas docentes

Key words: mathematics teachers, high school, teaching

RESUMEN: En años recientes, en México se ha establecido un modelo curricular basado en competencias, desde el nivel preescolar (5 años) hasta el nivel medio superior (15-18 años), que constituyen el sistema educativo obligatorio mexicano. Para su implementación, se han realizado acciones para actualizar a los profesores, pero de carácter tan general que les es muy difícil concretar el modelo en sus disciplinas específicas de enseñanza, como sucede en matemáticas, centro de nuestro interés. La mayoría de los profesores se formaron con base en modelo educativo distinto los materiales didácticos de apoyo a su labor no están producidos pensando en las competencias y los procesos de evaluación se realizan con estándares de la formación tradicional. Se describen aquí algunas acciones y su impacto con los profesores, orientadas a modificar las prácticas docentes en el bachillerato.

ABSTRACT: In the recent years, in Mexico it has established a curricular model based on competences, from the pre-school level (5 years) up to the average top level (15-18 years), which constitute the educational obligatory Mexican system. For his execution, different actions have been realized to update the teachers, but of character so general that they is very difficult to make concrete the model in his specific educational disciplines, like it happens in mathematics, center of our interest. The majority of the teachers were formed in educational different model, the didactic materials of support to his labor they are not produced thinking about the competences and the processes of evaluation are realized by standards of the traditional formation. Some actions and his impact are described here by the teachers, orientated to modifying the educational practices in the upper secondary education (the baccalaureate).

INTRODUCCIÓN

El modelo educativo mexicano implementado en México en los últimos años se basa en las llamadas competencias y los profesores de preescolar (5 años) hasta bachillerato (15-18 años) han debido modificar sus prácticas docentes para promover en sus estudiantes la construcción de conocimientos, el desarrollo de habilidades y la generación de actitudes positivas.

El reto de los profesores es de gran magnitud y las herramientas de las cuales disponen son limitadas. En el caso del bachillerato se han ofrecido diplomados que profundizan en la enseñanza basada en competencias, pero son de carácter tan general que, en el caso de las matemáticas, es difícil concretar en el aula las nuevas formas de trabajo requeridas. De hecho el primer problema estriba en la ambigüedad del mismo término de competencias, el cual se concibe y define de diversas formas en la literatura especializada.

En este contexto el grupo de trabajo de Matemática Educativa de la Universidad de Sonora ha elaborado hasta el momento cinco textos o Módulos de Aprendizaje (de un total de seis) de matemáticas de un sistema estatal de bachillerato que incorpora a cerca de 20,000 estudiantes por año, en el cual se plasma una concepción de las competencias que sirve de base tanto a las actividades cotidianas de los alumnos como de los profesores. En el modelo mexicano basado en competencias se reconocen tres tipos de competencias: las genéricas, transversales a la educación de los jóvenes, las disciplinares, que son específicas de la disciplina de estudio de un determinado curso y las profesionales, referentes a la capacitación para el trabajo. Para el estudio que realizamos las de interés nuestro son las competencias genéricas y las disciplinares.

Con base en lo establecido en los documentos oficiales, en particular en Reforma Integral de la Educación Media Superior (2008) , tenemos que las competencias genéricas son 11 y entre ellas están las siguientes: competencias para la comunicación oral y escrita, para el pensamiento crítico y reflexivo, para el aprendizaje autónomo y competencias para el trabajo colaborativo. En el caso de las competencias disciplinares en matemáticas son 8 y en ellas se establece lo que se espera de un egresado del bachillerato:

- Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
- Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.
- Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea.

- Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el (estudio de un proceso) o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Desde nuestra perspectiva, las competencias genéricas y disciplinares de forma conjunta establecen las habilidades y actitudes necesarias para la resolución de problemas.

LAS PRÁCTICAS DOCENTES DE LOS PROFESORES

Este trabajo se centra en la concepción del texto de Matemáticas 4 para promover la trasformación de las prácticas docentes de los profesores en el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora (COBACH) y sus escuelas incorporadas. La temática del texto es el estudio de la variación y de las funciones, correspondiendo a lo que genéricamente pudiéramos llamar un curso de precálculo.

En el texto que estaba vigente en el COBACH se declara estar elaborado con base en las competencias, pero ni los directivos, ni los profesores del Colegio de Bachilleres concordaban con esta idea. Un análisis realizado por el equipo de trabajo en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora concluyó en el mismo sentido. El texto está elaborado de forma tradicional, con una presentación de conocimientos matemáticos organizada en la noción de funciones reales de variable real y su tratamiento usual, que sólo promovía el trabajo de los profesores con base en las exposiciones tipo conferencia magistral y deja a los estudiantes la ejercitación de rutinas de reproducción de lo hecho por el profesor.

Un primer reto en la elaboración del nuevo texto consistió en diseñar actividades de aprendizaje que promovieran una nueva forma de trabajo tanto para estudiantes como para profesores. Siguiendo los lineamientos de observancia obligatoria en la Reforma Integral de la Educación Media Superior (2008), los textos deben escribirse en Bloques con temáticas específicas, cada Bloque debe estar organizado en secuencias didácticas y cada secuencia didáctica en actividades de inicio, de desarrollo y de cierre.

En este contexto y considerando que la modificación de las prácticas docentes de los profesores es un proceso complicado por diversas razones, entre ellas que los profesores fueron formados con metodologías y dinámicas de trabajo diferentes a aquéllas que se les solicita aplicar ahora y, por otra parte, los instrumentos y herramientas de trabajo con los que cuentan no son los más adecuados, el texto o módulo de aprendizaje de Matemáticas 4 que se diseñó en principio para el trabajo de los estudiantes lleva implícita una forma diferente del trabajo de los profesores y a ella queremos referirnos.

Las actividades del texto han sido escritas basándonos en los planteamientos de la denominada Reforma Integral de la Educación Media Superior o RIEMS (2008), el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS), tomando como ejes las nociones de práctica matemática, la tipología de objetos matemáticos primarios, (Godino y Batanero, 1994), los criterios de idoneidad didáctica, (Godino et al. 2007), así como aspectos específicos en la formación de profesores, (Godino, 2004).

Como puede verse en Ávila, G. R.,Grijalva, M. A., Villalva, G. M., Ibarra, O. S., Villaseñor, G. G. (2015), en el nuevo texto se pone el énfasis en el estudio de la variación y cada tipo de función aparece o emerge como resultado de analizar las situaciones problemas que se plantean.

El nuevo texto también está escrito por bloques pero ahora, en lugar de hablar de funciones se plantean los siguientes: variación proporcional, variación inversamente proporcional, variación exponencial y variación logarítmica, variación periódica y, finalmente, las funciones como modelo matemático de la variación.

Las secuencias didácticas de cada bloque tienen su punto de partida en el planteamiento de situaciones problema que la mayoría de las ocasiones son de carácter extramatemático y encaminadas a caracterizar lo que denominamos tipos básicos de variación. La pretensión es usar los tipos básicos de variación para la caracterización de situaciones problema en los que es posible analizar algebraicamente, tabular o numéricamente y de forma gráfica los fenómenos involucrados, determinando, sin el uso de las herramientas del cálculo, como el papel de las concavidades en las gráficas de las funciones.

Pero, estos aspectos ¿cómo se relacionan con el trabajo de los profesores? En los planteamientos de la Reforma Integral para la Enseñanza Media Superior (2008) se establece que para lograr que el profesor promueva adecuadamente el desarrollo de las competencias de sus alumnos, él mismo debe desarrollar un conjunto de competencias profesionales docentes, que en principio incluyen el desarrollo de las competencias que se espera tengan sus alumnos al egresar del bachillerato. Consecuentemente, el profesor debe ser capaz de hacer las actividades propuestas en los textos, las cuales no necesariamente se corresponden con las que venían realizando con anterioridad.

Adicionalmente, se establece que las competencias profesionales docentes de un profesor son:

- Organiza su formación continua a lo largo de su trayectoria profesional
- Domina y estructura los saberes para facilitar experiencias de aprendizaje significativo.
- Planifica los procesos de enseñanza y de aprendizaje atendiendo al enfoque por competencias, y los ubica en contextos disciplinares, curriculares y sociales amplios.
- Lleva a la práctica procesos de enseñanza y de aprendizaje de manera efectiva, creativa e innovadora a su contexto institucional.
- Evalúa los procesos de enseñanza y de aprendizaje con un enfoque formativo.
- Construye ambientes para el aprendizaje autónomo y colaborativo.
- Contribuye a la generación de un ambiente que facilite el desarrollo sano e integral de los estudiantes.
- Participa en los proyectos de mejora continua de su escuela y apoya la gestión institucional.

Algunas de estas competencias son de carácter general, en algún sentido similares a las competencias genéricas de los estudiantes, pero ahora ubicadas en el trabajo docente. Así por ejemplo, si a un estudiante se le pide el desarrollo de competencias para realizar trabajo colaborativo, aquí se establece que el profesor debe ser capaz de construir ambientes adecuados para el trabajo colaborativo de sus alumnos.

Pero otras, aún dentro de su generalidad, tienen una relación más estrecha con su actividad específica. Así, si en el Módulo de Aprendizaje se plantean situaciones problema en un ambiente extramatemático propicio para motivar el trabajo estudiantil, ¿cómo promueve el profesor que tengan validez en contextos disciplinares, curriculares y sociales amplios? ¿Cómo lleva a la práctica procesos de enseñanza de manera efectiva, creativa e innovadora? ¿Cómo le ayuda el Módulo de Aprendizaje o, en su caso, como lo limita?

En términos generales, el texto o Módulo de Aprendizaje consiste en un planteamiento global de planificación de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, atendiendo al enfoque por competencias, como se señala en el punto 3 de la lista anterior. Pero precisamente por ese carácter global y abstracto, se requieren de las competencias profesionales docentes del profesor, quien atiende alumnos y grupos de alumnos específicos, con problemáticas específicas, en contextos específicos, que obligan al desarrollo de la creatividad del profesor y a usar recursos didácticos que trascienden al texto.

Una característica del texto es la promoción de situaciones problema que tuvieran su origen en contextos externos a la matemática, no sólo para su trabajo en el aula sino también para mostrar a los profesores que ellos mismos pueden recopilar y generar situaciones creativas que sean motivantes para sus estudiantes. Una actividad típica del texto es la siguiente actividad de cierre de la secuencia didáctica 3 del Bloque 2:

Muchos de los medicamentos que un médico receta para el tratamiento de una enfermedad están formulados para aplicar determinadas dosis a los adultos y no existen dosis preestablecidas para aplicarlo en el tratamiento de las enfermedades de los niños.

En casos como el descrito, los médicos pueden aplicar diferentes reglas, como las que puedes consultar en la dirección electrónica

http://www.eneo.unam.mx/repositorioenfermeria/enfermeriamanuales/ecologiasaludmedioambiente/ENEOUNAM-ManPracticasFarmacologiaLEO.pdf

Entre las reglas que se señalan ahí, tenemos la llamada Regla de Young que se usa para modificar la dosis de los adultos, que denotaremos con la letra d (d es constante), con el propósito de adaptarlas a los niños. La regla establece:

Dosis de medicamentos. La regla de Young es una fórmula que se usa para modificar las dosis de medicamentos de adultos, a fin de adaptarlas a niños. Si **d** representa la dosis de un adulto, en miligramos, y $\boldsymbol{t}$ es la edad del niño en años, entonces, la dosis del niño puede representarse, por medio de la siguiente función:

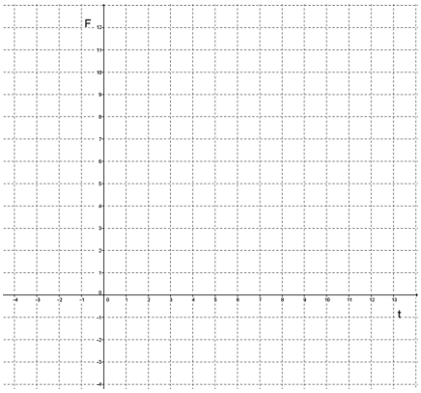
$$F(t) = \frac{td}{t + 12}$$

Se recomienda usar esta forma de calcular la dosis de medicamento para niños entre 2 y 12 años de edad.

Si la dosis d del medicamento que debe tomar un adulto de una medicina específica es de 100 mg cada 8 horas, ¿cuál debe ser la dosis que se administre a un niño de 5 años?

Haz una gráfica que represente esta relación.

Figura 2.21



Con base en la gráfica indica si se trata de una función creciente o decreciente y señala cómo es el comportamiento de la rapidez (mayor o menor cada vez) con la cual sucede el aumento o disminución de la dosis.

Primeros acercamientos de los profesores. Con el propósito de que los textos sirvieran de base al trabajo no sólo de los alumnos, se tuvo en cuenta que su seguimiento como principal material didáctico disponible por los docentes para sus labores, se propusieron dinámicas de trabajo que, aunque diferentes a las tradicionales, estuvieran suficientemente cerca de las prácticas de los profesores y se siguió el siguiente procedimiento:

- Se incorporó a un grupo de profesores del COBACH, seleccionado por las instancias académicas del Colegio, que diera seguimiento a la propuesta de texto desde su diseño y elaboración.. De esta manera, cada vez que se concluía un Bloque temático, era sometido a la consideración de la comisión, quien, con base en su experiencia y el conocimiento específico de las prácticas de sus compañeros de trabajo, hacía observaciones sobre las secuencias propuestas y la viabilidad de que sus compañeros maestros las implementaran. Con base en dichas observaciones, cada Bloque fue reelaborado para su edición.
- Cuando se hubieron incorporado las observaciones y sugerencias, se editó formalmente el Módulo de Aprendizaje y antes de iniciar clases, se ofreció un curso-taller sobre el uso del texto a todos los profesores del bachillerato, con una duración de 20 horas presenciales de trabajo
- Se abrió un foro estatal virtual de todos los profesores que estuvieran usando el texto, para el intercambio de dudas y experiencias, así como para recoger sus observaciones.

- Finalmente se realizaron reuniones, al final del semestre, para cerrar esta etapa de recolección de experiencias y sugerencias de modificación y hacer una evaluación de los resultados obtenidos con su uso.

Las observaciones de los profesores fueron muy variadas respecto a los tópicos señalados, Pero centrando nuestro interés en el impacto que el texto pidiera tener en la modificación de las prácticas docentes, mencionamos las siguientes:

- Las clases siguiendo el texto son diferentes, porque de entrada los profesores no inician desarrollando un tema, sino planteando una situación problema y organizando las acciones de los estudiantes, según se trate de trabajo individual, por equipo o de discusión grupal.
- Al principio del curso, los estudiantes mostraron resistencias a modificar su actividad y exigían al profesor que "explicara en el pizarrón" los temas tratados. Pero en poco tiempo se habituaron a la dinámica de trabajo.
- Los estudiantes señalaron con frecuencia que ahora sí les quedaba claro para que servían las matemáticas.
- Para los profesores resultó novedoso que pudieran estudiarse sin cálculo aspectos de la variación que sólo habían tratado con la derivada. Manifestaron incluso que algunos aspectos fortalecieron sus concepciones matemáticas, que antes sólo abordaban como procedimientos algorítmicos, sin profundizar en los significados de la variación.
- Un aspecto particularmente novedoso consistió en el análisis de los tipos básicos de variación y su relación con las representaciones gráficas.
- Otro aspecto que resaltaron es que pare ellos fue novedoso que se usaran con frecuencia situaciones que se planteaban o de forma verbal, o de forma numérica, o de forma gráfica o de forma algebraica, pero se resolvieran con una representación de origen diferente a la de inicio, transitando algunas veces entre más de una forma de representación.
- Por otro lado, consideraron que existen partes del texto muy densas, tanto por su extensión como por su nivel de dificultad.
- Por diferentes razones el tiempo de estudio siempre se reduce, en relación a lo planeado, y el texto obliga a ser muy cuidadoso en las partes que se seleccionan para el trabajo de los estudiantes.

CONCLUSIONES

Una conclusión que se puede obtener de la opinión de los profesores es que el Módulo de Aprendizaje impacta tanto en las prácticas de los estudiantes como en la de los profesores, pero los elementos con los que se cuenta aún son muy pocos. Para tener una panorámica más amplia y planificar actividades que fortalezcan la modificación de las prácticas docentes de los profesores, es necesario hacer programas sistemáticos de seguimiento y realizar investigación sobre los efectos de este tipo de acciones en la formación de profesores.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ávila, G. R.,Grijalva, M. A., Villalva, G. M., Ibarra, O. S., Villaseñor, G. G. (2015). *Matemáticas 4*. Guadalajara, México. Grupo de Servicios Gráficos del Centro, S.A. de C.V.

Godino D. J., Batanero C. (1994). Significado Institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 14, nº 3, pp. 325-355*

Godino, J.D., Batanero, C., Cid, E., Font, V., Ruiz, F. y Roa, R. (2004). *Didáctica de la Matemática para maestros*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de granada. Disponible en http://www.ugr.es/local/jgodino/

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, Volumen XXVII, Nº 2, 221-252.*

Krenzer, Udo (2006). *Compendio de métodos antropológico forenses para la reconstrucción del perfil osteo-biológico*, Centro de Análisis Forense y Ciencias Aplicadas, Voumen 7, (Guatemala).

Reforma Integral de la Educación Media Superior (2008). Secretaría de Educación Pública. Recuperado el 21 de enero del 2012 en http://www.reforma-iems.sems.gob.mx

Moreno, A. (2012*). Evaluación del desarrollo de competencias matemáticas en el bachillerato. Un estudio de situaciones que involucran la integral de una función*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad de Sonora.

Corral C. (2014). *Prácticas docentes en las matemáticas del bachillerato*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad de Sonora.

LAS FRACCIONES Y LAS EXPLICACIONES DE LOS PROFESORES DE PRIMARIA EN SITUACIÓN ESCOLAR

Evelia Reséndiz B., Sergio Correo G., Ramón J. Llanos P.
Universidad Autónoma de Tamaulipas (México)
erbalderas@uat.edu.mx, scorrea@uat.edu.mx, rjardiel@uat.edu.mx

Palabras clave: Discurso, Explicación, Fracción, pensamiento numérico.

Key words: Speech, Explanation, Fraction, numerical thinking.

RESUMEN: La presente investigación en proceso pretende abordar el estudio sobre la enseñanza de las fracciones. Una de las maneras de tener acceso a la información sobre cómo se introduce y desarrolla el tema de las fracciones consiste en analizar el discurso del profesor, pero también el de la interacción social que se realiza en el aula escolar. El objetivo principal del trabajo pretende analizar las maneras como se introduce y desarrolla el tema de las fracciones en situación de enseñanza en tercer grado de primaria. La metodología es de corte cualitativo, su utilizarán los registros etnográficos y grabaciones en audio.

ABSTRACT: This research study aims to address the process of teaching fractions. One of the ways to have access to information on how introduces and develops the theme of the fractions is to analyze the speech teacher, but also the social interaction that takes place in the classroom. The main objective of the paper analyzes the ways will be introduced and develops the theme of Fractions in teaching situation in third grade. The methodology is qualitative; ethnographic records its use and audio recordings.

INTRODUCCIÓN

La Secretaria de Educación Pública (SEP, 2008) en su afán de mejorar la calidad de la educación y de elevar los niveles educativos, ha considerado como prioritarios los conocimientos que se adquieren en las asignaturas de español y matemáticas, sin descuidar la relación con otras asignaturas.

El Programa de Estudios de Matemáticas de tercer grado de educación primaria tiene como propósito que mediante el estudio de las matemáticas los niños desarrollen formas de pensar que les permitan formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas, así como elaborar explicaciones para ciertos hechos numéricos o geométricos, utilicen diferentes técnicas o recursos para hacer más eficientes los procedimientos de resolución y muestren disposición hacia el estudio de la matemática, así como al trabajo autónomo y colaborativo. (SEP, 2009)

Por otro lado, en los últimos años, se han propuesto programas académicos con el objetivo de mejorar los niveles de aprendizaje en general y principalmente de las matemáticas. No obstante, los resultados de las pruebas PISA, ENLACE y EXCALE muestran que los aprendizajes de niños y jóvenes no alcanzan el nivel primario de aprovechamiento (competencias básicas).

Año tras año los alumnos han sido evaluados con la prueba ENLACE y se han obtenido resultados poco favorables. A continuación se presenta la referencia histórica de la puntuación promedio en Matemáticas. Si bien los resultados muestran una tendencia favorable, aún se está lejos llegar a niveles adecuados:

Tabla 1. Secretaria de Educación Pública, prueba ENLACE

Factores	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Matemáticas-Primaria (3°-6°)	509.3	512.8	522.6	529.5	544.1	571.6

El porcentaje de niños cuyo puntaje los ubicó por debajo del dominio básico de matemáticas en 3° grado de primaria en el 2010 fue de 31.8%, y la meta para el 2018 es de 27.0% (Presidencia de la República, 2013).

Ante la problemática anterior (resultados de las pruebas), la presente investigación en proceso pretende abordar el estudio sobre la enseñanza de las fracciones por medio del discurso en el aula, ya que asumimos que la palabra es la herramienta que se utiliza la mayor parte del tiempo. Una de las maneras de tener acceso a la información sobre cómo se introduce y desarrolla el tema de las fracciones consiste en analizar el discurso del profesor, pero también el de la interacción social que se realiza en el aula escolar. Por lo anterior, delimitamos el problema de investigación a través de las siguientes preguntas: ¿cuál es el papel que juegan las fracciones en el discurso del profesor? ¿qué sucede con las fracciones en la interacción en el aula? El objetivo principal de nuestro trabajo es analizar las maneras como se introduce y desarrolla el tema de las fracciones en situación de enseñanza en tercer grado de primaria.

Consideramos que la comunicación continúa es un tema central en la reforma de la educación de las matemáticas (NCTM, 1991), pues hay muchas preguntas que deben ser contestadas con relación al discurso en el aula y los factores que contribuyen al desarrollo del discurso matemático escolar. Las matemáticas generalmente se consideran como un cuerpo de conocimiento individual y socialmente construido y como lenguaje especializado para comunicar diversos aspectos de nuestro mundo (Pimm, 1991); sin embargo, el nuevo conocimiento matemático –individual o compartido- se construye a través de las interacciones y conversaciones entre maestros y alumnos. El movimiento entre el sentido personal de un concepto y el significado matemático compartido resulta crucial para que el aprendizaje se lleve a cabo (Bartolini-Bussi, 1998).

Tal consideración del proceso de enseñanza-aprendizaje enfatiza la importancia de las interacciones en el aula y el contenido matemático que se está discutiendo. Por ello, el estudio de tales interacciones y de ese contenido o el significado compartido de conceptos influye en el desarrollo de los debates.

MARCO TEÓRICO

En este apartado se muestra de manera concreta la revisión teórica sobre el abordaje y análisis del discurso de profesores en el aula, entendida como un espacio de enseñanza-aprendizaje, y de manera particular, de la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

En cuanto a los estudios sobre los profesores de esta disciplina, se rescata que la función de la matemática educativa en la actualidad tiene fundamentos y tendencias que marcan la pauta que se debe tomar en cuenta para que la didáctica empleada nos oriente de la mejor manera. Cantoral y Farfán (2005), afirman que actualmente se considera al profesor como un profesional reflexivo, que decide, diseña, implementa y experimenta estrategias de acción para lograr el aprendizaje de sus alumnos. Así el profesor debe innovar métodos de enseñanza para los alumnos, no solo basarse en los textos o programa de estudios que le son entregados para impartir la materia.

Por otro lado, Villa y Cuartas (2009) comentan que es necesario el desarrollo de un sentido de realidad, el cual se entiende como la sensibilidad que un profesor debe tener frente a la realidad, y que además incluye la intuición y la capacidad de detectar las situaciones y oportunidades del contexto sociocultural frente a las cuales se pueda movilizar el conocimiento de los estudiantes;, dicho sentido incluye una buena dosis de imaginación y creatividad, así como reflexionar sobre lo que sucede en el aula y prestar atención a las necesidades de los alumnos.

En cuanto al *Discurso* en el aula, Aparicio y Cantoral (2006), Forero (2008) y Reséndiz (2009), y señalan que es necesario asignarle al papel del lenguaje verbal y no verbal un lugar privilegiado en la construcción del conocimiento y en las diversas maneras como los maestros crean contextos comunicativos en el aula, para apoyarlos en la construcción conjunta de la comprensión de la matemática escolar.

Kieran, Forman y Sfard (2001), citado por Preiss, Larrain y Valenzuela (2011), argumentan que si el interés es que el niño comprenda las matemáticas y aprenda no solo “adquiriendo” sino elaborando los procesos y estructuras matemáticas, aquello que debe ser investigado son los procesos de comunicación en los que el pensamiento matemático ocurre. Según Ruiz y Pachano (2002), los diálogos maestro alumnos ocupan casi todo el tiempo y el espacio de la clase y además su

estructura lineal, no sólo permite que la maestra mantenga el control de todo lo dicho y hecho durante la clase, sino que limita la interacción oral entre iguales. Es decir, el diálogo alumno-alumno en torno al tema de la clase es poco frecuente y cuando se da, éste resulta poco importante desde la óptica del maestro.

Al considerar al discurso como un medio para estudiar las prácticas sociales (Candela, 1999), partimos de que el discurso en el aula tiene una organización explicativa, ya que toda intervención se puede ver orientada hacia la comprensión de alguna idea, noción o concepto. La explicación engloba a aquellos recursos discursivos que tienden a comprender una noción, idea, hecho, objeto o fenómeno, y van más allá de una descripción, pues tratan de encontrar sus causas o vías para entenderlos. No sólo genera una actividad reflexiva, sino también es un medio explícito que dispone el profesor o el estudiante para unir o enlazar ideas. Da una o más razones para volver comprensible un dato, fenómeno, resultado o comportamiento (Duval, 1999).

Para el caso concreto de los estudios previos sobre el análisis del discurso en el aula de Matemáticas, son varias las investigaciones que dan cuenta de la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las *fracciones*. En el caso de la fracción, hay que reconocer que tiene cuatro significados: medida, cociente, razón y operador multiplicativo, en ese orden su grado de dificultad, pero necesarios para comprender en su totalidad esta especialidad de las Matemáticas. Y como lo apunta Luelmo (2004), las fracciones para los alumnos son un problema de aprendizaje, por lo tanto para los maestros es un problema de enseñanza. Con lo que podemos establecer la delgada línea que divide este predicamento y tratar de encontrar un punto de partida hacia una posible solución. En concreto, en este trabajo nos enfocaremos en un problema muy significativo de la matemática, las fracciones, que si de entrada los números ya causan un rechazo en los alumnos, el fraccionarlos parece ser un obstáculo para el maestro al momento de querer reconstruir y construir con los niños este concepto matemático que se vuelve un obstáculo de aprendizaje. Y como señala (Bachelard, 1987), un “obstáculo en las ciencias genera una inercia que dificulta el proceso de construcción de un saber nuevo, lo que constituye el acto de conocer”.

Al respecto podemos imaginar que el alumno llega con ciertos conocimientos que pueden constituir una barrera al momento de escuchar la explicación que el maestro le va a proporcionar, y con el docente puede pasar un fenómeno similar. Se manifiestan varias problemáticas en el uso de las fracciones para expresar razones, una de las cuales se refiere a que el maestro enfoca poco los procedimientos realmente utilizados por sus alumnos y propiciados por el tipo de problemas que él plantea (Ramírez y Block, 2009). Por su parte, Mochón y Morales (2010) opinan que con respecto a las fracciones y los números decimales, es interesante que los profesores no las definan como intrínsecamente complicadas, sino que las asocien a su propia incapacidad de entenderlas: “Porque se me hacen difíciles de entender”, “Se me dificultan. No entiendo por qué y entonces cómo les enseño a ellos”, “Yo lo entendí de manera mecánica…” Estas percepciones que tienen los maestros sobre las deficiencias en su conocimiento especializado se tomaron como oportunidades para discutir cómo podrían ampliar su conocimiento.

También se han desarrollado todo tipo de variantes útiles para proporcionar las mejores herramientas para trasmitir de una manera adecuada las fracciones en las matemáticas básicas para que a partir de este punto queden solucionadas las dudas para el futuro. Al respecto, Ramírez y Block (2009) comentan que el hecho de que los maestros tejan sus clases con el hilo de las ideas disponibles, heredadas o compartidas acerca de los objetos de enseñanza, no significa que estén

atrapados en ellas; está documentado que los cambios son posibles y los procesos de apropiación, aunque complejos, si se asocian al interés de la noción de razón para el aprendizaje de las matemáticas parece ocurrir, sobre todo, antes de que ésta se exprese con una fracción o bien independientemente de la fracción. El conflicto entre lo implícito funcional y lo explícito se presenta cuando este último no se construye a partir del primero, más bien lo niega, y no logra mostrar su funcionalidad.

Estos autores refieren a la práctica de enseñar como lo que se tiene disponible pero no que se quede en solo eso, sino también buscar otras alternativas en el aula para las diferentes exigencias de alumnos.

Los mismos autores refieren que en "El aula, último eslabón de la cadena de la transposición didáctica, habría cierta diversidad de respuestas. El profesor en su tenaz esfuerzo por organizar la enseñanza de este tema, contribuye a la comprensión de la problemática que se enfrenta en la enseñanza escolar" (Ramírez y Block, 2009, p.50) con lo que compromete al docente a rediseñar si así es pertinente la manera en que manejará su discurso y habituará la cultura matemática en el aula.

Por su parte, Perea y Valdemoros (2009) afirman que la concepción constructivista pretende que los alumnos aprendan y se desarrollen en la medida en la que construyen significados apropiados en torno a los contenidos que se van a enseñar. El papel de la fracción como operador es el de transformador multiplicativo de un conjunto hacia otro conjunto equivalente.

METODOLOGÍA

El método cualitativo de investigación es apropiado cuando se intenta conocer o analizar situaciones en un determinado contexto, sociedad o grupo y generar un entendimiento acerca de la situación. McMillan y Schumacher (2005), afirman que la investigación interactiva cualitativa es el sondeo con el que los investigadores recopilan los datos en situaciones reales por interacción con personas seleccionadas en su propio entorno así como describe y analiza las conductas sociales colectivas e individuales, opiniones, pensamientos y percepciones.

Consideramos que nuestra investigación debe instalarse en el salón de clase y efectuarse con métodos y técnicas de investigación cualitativa para percibir el acto de enseñanza en plenitud, tomando en cuenta que, idealmente, el aula es un espacio común para el entendimiento mutuo, para cierta construcción y negociación del conocimiento y para la formación de significados compartidos; en tal sentido, enseñar es fundamentalmente comunicar (Edwards y Mercer, 1987).

Esta investigación se realizará mediante el estudio de caso, para lo cual se seleccionarán sólo el audio y el registro etnográfico para obtener los datos necesarios para intentar responder al problema de investigación. En el estudio participarán dos maestras de primaria que imparten tercer grado, a quienes se pedirá autorización para observar y tomar notas de campo de las sesiones en las que las maestras enseñen el concepto de fracción. Entonces la metodología considerada es de corte cualitativo, su utilizarán los registros etnográficos y grabaciones en audio. Con ello, se estudiará la naturaleza de interacciones sociales que se viven con este fenómeno de enseñanza, lo social será entonces la forma de entender una particular interacción: la argumentación" (Reséndiz, 2009).

El trabajo de campo abarcará las siguientes etapas:

- Obtención de datos (observación en la situación de campo)
- Elaboración de los registros de la observación
- Análisis, descripción e interpretación de resultados
- Síntesis e interpretación global
- Integración de productos de investigación
- Redacción del informe

REFLEXIONES

El origen de nuestra investigación es la diversidad de las situaciones que se generan durante la enseñanza, la cual implica que se presenten constantemente factores de improvisación como parte cotidiana y como posibilidades de aprendizaje ante ambientes nuevos. Se pretende indagar ciertas particularidades y ahondar sobre los factores que infieren sobre las situaciones didácticas. Por tal motivo, se eligió el discurso en el en aula para nuestro estudio y el tema matemático de las fracciones.

La investigación en proceso considera a los profesores como actores que cotidianamente reconstruyen su trabajo mediante experiencias, estrategias y prácticas que asimilan, acomodan, rechazan, modifican o aceptan en un proceso sin fin. Ellos determinan lo que explican, la intencionalidad y los medios que ocupan, de ahí que un análisis profundo sobre su quehacer, centrado en el qué, el por qué y el cómo haya sido nuestra forma de encarar el estudio que ahora reportamos.

Recordemos que la teoría de situaciones de Brousseau (1986) se basa en una aproximación constructivista que actúa bajo el principio de que una noción se construye en el ambiente de situaciones de enseñanza. En el aula se crea un discurso que elaboran tanto maestro como alumnos. Si bien en un principio consideramos sólo las explicaciones del docente tuvimos que cambiar nuestra óptica, pues observamos que los alumnos desempeñaban un papel central en el discurso de la clase; el docente es la única y principal fuente de autoridad matemática, pero es de gran importancia dar cuenta de cómo se trabaja la fracción en la interacción.

El discurso; sin embargo, no sólo es lenguaje; es lenguaje en acción, o lenguaje como un medio para lograr fines cognitivos, sociales u otros. Como discurso, las matemáticas establecen un cierto universo: las matemáticas son un modo de ver al mundo y de pensar sobre él. Como este universo se establece por medio de la comunicación y la construcción de convenciones y comprensiones compartidas de los contextos, el tipo de conocimiento matemático que los estudiantes desarrollan depende de las características de las situaciones de comunicación en que se desarrollan.

Algunos de los resultados preliminares, que se han obtenido de los análisis de los registros de observación de las clases de los maestros donde podemos identificar cuatro dimensiones que las articulan:

- El desarrollo de una cultura matemática en la clase: las normas y reglas que rigen el discurso y la comunicación matemática en el aula.

- El papel del profesor en el desarrollo de las clases de matemáticas.
- Las características de las tareas matemáticas (problemas, ejercicios, actividades).
- El aprendizaje: la relación entre lo matemático y lo cognitivo en un contexto social.

En matemáticas elementales de mayor riqueza y complejidad se encuentran las fracciones, razones y proporciones. Esta complejidad se refleja en el hecho de que se pueden ver con varios significados, emergen cinco formas en las que se pueden pensar las fracciones: relación parte-todo, cociente, medida, operador y razón. Estas categorías son útiles para comprender la complejidad de las fracciones, pero no se deben pensar como categorías excluyentes, pues en un solo problema una fracción podría presentarse con dos o más de los anteriores significados.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aparicio, E. y Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 9(1), 7-30.

Bachelard, G. (1987). *La formación del espíritu científico.* México: Editorial Siglo XXI.

Bartolini-Bussi, M. (1998). Verbal interaction in the mathematics classrom: A Vygotskiananalisis. En H. Steinbring, M. G. Bartolini-Bussi & A. Sierpinska (Eds.), *Languaje and communication in the mathematics classromm* (pp. 65-84), Reston, VA: NCTM.

Brousseau, G. (1986a). Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 7(2),* 33-115.

Candela, A. (1999). *Ciencia en el aula. Los alumnos entre la argumentación y el consenso.* México: Paidós.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2005). Matemática Educativa. *Conversus donde la ciencia se convierte en cultura. Revista del Instituto Politécnico Nacional,* 44, 26 – 34. (Versión original en *Relime 6*(1), Matemática Educativa: Una visión de su evolución).

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Grupo Editorial Iberoamérica (Versión original en francés en: "Petit X", 31, 1992, 37-61).

Edwards, D. y Mercer, N. (1987). *El conocimiento compartido: El desarrollo de la comprensión en el aula.* Barcelona: Paidós.

Forero, A. (2008*).* Interacción y discurso en la clase de matemáticas. *UniversitasPsychologica 7(3),*787-805.

Luelmo, M. (2004*).*Concepciones Matemáticas de los Docentes de Primaria en relación con la Fracción como Razón y como Operador Multiplicativo. *Revista del Centro de Investigación. Universidad La Salle 6(22),* 83-102.

McMillan, J. y Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa. 5° Edición.* España: Pearson.

Mochón, S. y Morales, M (2010*).* En qué consiste el "conocimiento matemático para la enseñanza" de un profesor y cómo fomentar su desarrollo: un estudio en la escuela primaria. *Revista Educación Matemática 22(1),* 87-113.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (1991*). Professional Standards for Teaching Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Perea, P. y Valdemoros, M. (2009). Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. *Educación Matemática 21(1),* 29-61.

Pimm, D. (1991). *El lenguaje matemático en el aula.* Madrid: Morata.

Preiss, D., Larrain, A., Valenzuela, S. (2011*).* Discurso y Pensamiento en el Aula Matemática Chilena*. Psykhe 20(2),*131 – 146.

Presidencia de la República. Programa Sectorial de Educación 2013-2018. Diario Oficial de la Federación del viernes 13 de diciembre de 2013.

Ramírez, M. y Block, D. (2009). La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares. *Revista Educación Matemática 21(1), 63-90.*

Reséndiz, E. (2009*).* Discurso, Comunicación e Interacción en la Clase de Matemáticas*. Revista Internacional de Ciencias Sociales y Humanidades 19(2),* 115–134.

Ruiz, D. y Pachano, L. (2002). Los diálogos en las clases de matemática*. Educere 6,* 19-28.

SEP (2008). Educación Básica. Primaria. Plan de estudios 2009. Etapa de prueba, México.

SEP (2009). Programas de estudio 2009. Tercer grado. Educación básica. Primaria, México.

Villa, J. y Cuartas, C. (2009). ¿Realidad en las matemáticas escolares?: reflexiones acerca de la "realidad" en modelación en EducaciónMatemática. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte 12(2),* 29-40.

CREENCIAS ACERCA DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN DOCENTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Evelia Reséndiz B., Perla E. Arredondo U., Sergio Correa G., Ramón J. Llanos P.
Universidad Autónoma de Tamaulipas (México)
erbalderas@uat.edu.mx, perla_eau@hotmail.com, scorrea@docentes.uat.edu.mx,rllanos@uat.edu.mx

Palabras clave: Creencias docentes, matemáticas, educación

Key words: Beliefs teachers, math, education

RESUMEN: Los docentes cuentan con diferentes estilos de enseñanza sobre todo a la hora de impartir una clase de matemáticas, en esta investigación se pretende identificar las creencias que subyacen al pensamiento de los profesores de primaria sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. En este nivel educativo, el Estado de Tamaulipas cuenta con una mayor cobertura, y es aquí, en primaria, donde el alumno aprenderá a hacer frente a las necesidades de la vida cotidiana y donde el profesor toma un papel relevante. El presente estudio es de corte cuantitativo

ABSTRACT: Teachers have different learning styles especially when teaching a math class in this research is to identify the beliefs that underlie the thinking of primary teachers on the process of learning of mathematics. At this level, the state of Tamaulipas has more coverage, and it is here, in primary, where the student will learn to cope with the needs of everyday life and where the teacher takes a role. This study is of quantitative nature.

INTRODUCCIÓN

Dentro de las matemáticas cada palabra utilizada tiene un significado fijo y definido, la enseñanza de las matemáticas cuenta con una tradición formalista, no son de origen social sino que se hallan fuera de la acción humana. Con base a lo anterior Martín (1998), menciona que la concepción tradicionalista de la naturaleza de las matemáticas ha repercutido en la concepción que se tiene sobre la pedagogía de las matemáticas y la concepción que se tenga sobre estás, es tan importante que incluso afecta a los formadores de profesores a la hora de introducirlos en los currículos de matemáticas. Y en ese sentido las explicaciones sobre el estado de la enseñanza de las matemáticas en la escuela son muchas y diversas.

Las creencias son inducidas socialmente y surgen de variadas fuentes tales como las tradiciones, el sentido común, las costumbres sociales y las experiencias vividas (Martínez ,2013).

Como lo menciona Martínez (2013), los conocimientos sobre matemáticas como las creencias constituyen bases que sustentan las decisiones en el aula e influyen tanto en los contenidos allí movilizados como en los objetivos perseguidos y en la selección de contenidos y actividades de aprendizaje. De allí que representen elementos clave que inciden en las tendencias de los pensamientos de los docentes y las didácticas utilizadas.

Esto significa que el conocimiento acerca de las creencias en el aula influye en los objetivos, los contenidos, actividades y así mismo se van modificando los pensamientos y las didácticas utilizadas por los docentes, mostrando así un cambio en la enseñanza.

Los profesores no actúan ni desarrollan su trabajo mecánicamente, bajo sus acciones subyacen unas creencias, que se han ido elaborando a lo largo de su vida y que influyen sobre su enseñanza (Amador, 1998).

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

De acuerdo con García, Azcárate y Moreno (2006), las creencias son ideas poco elaboradas, generales o específicas, que forman parte del conocimiento que posee la persona (docente, estudiante) e influyen de manera directa en su desempeño. Las creencias inciden, de manera decisiva, en todo lo que supone el proceso de enseñanza aprendizaje y se utilizan como filtro para todo aquello que supone el proceso enseñanza-aprendizaje. Por lo tanto las creencias son entidades estáticas que hay que descubrir y tienen su influencia sobre las acciones de las personas.

Las creencias tienen una naturaleza proposicional y que las concepciones son constructos cognitivos que pueden verse como el marco subyacente que organiza los conceptos en el individuo, la diferencia fundamental radica en que las creencias ponen de manifiesto aspectos que se consideran verdades en algún ámbito, mientras que las concepciones son las nociones principales que describen ese ámbito. Esto significa que las concepciones son un constructo más general. Por lo que las concepciones que las personas tienen de lo que son las matemáticas afectan a sus creencias sobre la forma en que ellas deben presentarse.

Por otro lado las creencias acerca de las matemáticas se pueden representar como un continuo donde, en uno de sus extremos, se ubica la creencia de que las matemáticas son un conocimiento cierto y absoluto constituido por una colección de conceptos fijos e infalibles que deben ejercitarse

y memorizarse para entender su empleo y, en el otro extremo, se ubica la creencia de que el individuo inventa o crea el conocimiento matemático de acuerdo con las necesidades de la ciencia o de la vida diaria, por lo que éste se modifica continuamente y está en constante revisión e innovación (Lebrija, Flores, y Trejos, 2010).

Por lo tanto las creencias acerca de las matemáticas se presentan como conceptos inequívocos que deben formarse y memorizarse para lograr entenderlas, así también, por otro lado, se crea el conocimiento matemático de acuerdo a las necesidades de cada persona. Los docentes cuentan con diferentes estilos de creencias de enseñanza sobre todo a la hora de impartir la clase de matemáticas. Al abordar la noción de sistemas de creencias, los profesores implícitamente o explícitamente basan sus creencias, formadas en las primeras etapas de la vida, tanto de su formación inicial, sus experiencias como alumnos y sus experiencias como docentes (Panes y Parra, s/f).

Dicho lo anterior esto se refleja en que los profesores tienen sus propias teorías y creencias y estas influyen sobre sus percepciones a la hora de impartir una clase, teniendo así diferentes contextos en los cuales las creencias asocian la praxis de la enseñanza dando diferentes enfoques.

Los docentes se ven participes en cambios ya sean del currículum o socioculturales dentro de la institución, se las ingenian para lograr una mejor didáctica, mostrando así la principal problemática de las creencias docentes influenciadas por ideales personales y afectivas, estás influyen en el proceso de enseñanza aprendizaje.

De acuerdo con lo antes descrito se considera importante identificar las creencias de los profesores que enseñan matemáticas en la educación primaria. Esta investigación se realizará dentro de la educación primaria en el Estado de Tamaulipas en particular en la zona centro del Estado y por ser la que tiene un mayor cobertura, además que forma parte de un nivel en el que la enseñanza de las matemáticas juega un papel indispensable.

El objetivo planeado en esta investigación es conocer las creencias que subyacen al pensamiento de los profesores de primaria sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Así también se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuáles son las creencias de los profesores sobre el proceso de la enseñanza –aprendizaje de las matemáticas en educación primaria en Cd Victoria Tamaulipas?

ACERCAMIENTO TEÓRICO

Diferentes investigaciones relacionadas con las teorías del aprendizaje hacen mención a diferentes conjeturas como lo son la teoría asociacionista, la teoría cognitivista y la constructivista.

La teoría asociacionista

La teoría asociacionista es empirista y uno de sus principales fundadores fue Aristóteles, para él, el conocimiento se encontraba en la experiencia sensorial, por lo que a este tipo de conocimiento se le denominaba asociacionista, porque generaba nuevos conocimientos a partir de las asociaciones que logra con imágenes o distintos elementes que provienen de los sentidos y de la experiencia (Orozco, 2009).

Uno de los principales investigadores dentro de la teoría asociacionista fue el psicólogo Edward Thorndike que de acuerdo con su teoría la cual denomino Ley del efecto el aprendizaje se explicaba como una conexión o nexo entre un estímulo y una respuesta. (Barrera, 2004)

Las teorías conductistas son entendidas como asociativas, más precisamente como un asociacionismo conductual; es decir a cada estímulo se le asocia una respuesta.

La teoría cognitiva

La psicología cognitiva se preocupa del estudio de procesos tales como lenguaje, percepción, memoria, razonamiento y resolución de problema. Ella concibe al sujeto como un procesador activo de los estímulos. Es este procesamiento, y no los estímulos en forma directa, lo que determina nuestro comportamiento. Bajo esta perspectiva, para Jean Piaget, los niños construyen activamente su mundo al interactuar con él y pone énfasis en el rol de la acción en el proceso de aprendizaje, la cual se denominó teoría del desarrollo cognitivo (Severo, 2012).

La teoría constructivista

El constructivismo según Díaz Barriga y Hernández, (2004) surge como una corriente epistemológica preocupada por los problemas del conocimiento. Señala que los seres humanos son producto de su capacidad para adquirir conocimiento y para reflexionar sobre sí mismos.

El constructivismo es un término utilizado para designar todas aquellas perspectivas que dan importancia a la construcción del conocimiento por parte de los alumnos en el proceso de enseñanza aprendizaje.

El docente actúa como guía, orientador de este proceso aportando la ayuda pedagógica que el alumno demande. En el proceso interactúan por lo tanto el profesor, el alumno y los contendidos seleccionados dentro del constructivismo se puede destacar como uno de los principales autores a Piaget, Vigostky y Bruner (Díaz, 2003).

Sistemas de Creencias

Las creencias son inducidas socialmente y surgen de variadas fuentes tales como las tradiciones, el sentido común, las costumbres sociales y las experiencias vividas (Martínez, 2013).

Al abordar la noción de sistemas de creencias, los profesores implícitamente o explícitamente basan sus creencias, formadas en las primeras etapas de la vida, tanto de su formación inicial, sus experiencias como alumnos y sus experiencias como docentes.

Los autores Lebrija, Flores, y Trejos, (2010) plantean que las creencias que tienen principalmente efecto en las acciones que toman los maestros de matemáticas en su salón de clase pueden clasificarse dentro de un continuo y en categorías que hablan de la naturaleza del conocimiento matemático y del proceso de conocerlo.

Creencias acerca de las matemáticas. Se pueden representar como un continuo donde, en uno de sus extremos, se ubica la creencia de que las matemáticas son un conocimiento cierto y absoluto constituido por una colección de conceptos fijos e infalibles que deben ejercitarse y memorizarse para entender su empleo y, en el otro extremo, se ubica la creencia de que el individuo inventa o crea el conocimiento matemático de acuerdo con las necesidades de la ciencia o de la vida diaria, por lo que éste se modifica continuamente y está en constante revisión e innovación.

Creencias acerca de cómo se aprende matemáticas. También pueden ubicarse en un continuo; en un extremo, la creencia de que el alumno juega un papel activo en la construcción de su conocimiento, por lo que debe propiciarse que los alumnos desarrollen sus fortalezas y analicen y discutan.

Creencias acerca de la enseñanza. En este continuo, se cree que el papel del profesor es transmitir el conocimiento, se ve la enseñanza como el proceso central para adquirirlo y se cree que los alumnos deben ejercitar y memorizar conceptos y procedimientos. En el otro extremo, se cree que enseñar a los alumnos implica que aprendan a pensar como los matemáticos y que la enseñanza debe orientarse a comprender conceptos y procedimientos como un medio para resolver problemas, se cree, asimismo, en la necesidad de adecuar la enseñanza a las cualidades del conocimiento y a características cognoscitivas y afectivas de los alumnos.

Concepciones de los docentes sobre las matemáticas

Un elemento importante a considerar para la comprensión de las concepciones es conocer cómo se originan y como se organizan. Sobre la formación de las concepciones y creencias existe consenso entre diferentes autores en señalar que ambas tienen su origen en la experiencia, en la observación directa, en la información recibida, y en ocasiones pueden ser inferidas de otras creencias. Esto se relaciona con su carácter dinámico (Moreano y Asmad, 2008).

De acuerdo a un estudio acerca de las creencias de los profesores en Matemáticas, Ernest (1988) citado en Martín (1998) observó que entre los muchos elementos clave que influyen la práctica de la enseñanza de las Matemáticas, hay tres que son los más notables:

1. Los contenidos o esquemas mentales de los profesores, particularmente el sistema de creencias relacionadas con las Matemáticas y su enseñanza y aprendizaje.

2. El contexto social de la situación de enseñanza, particularmente las limitaciones y oportunidades que ofrece.

3. El nivel de los procesos de pensamiento y reflexión del profesor.

Parte de los "contenidos" o esquemas mentales de los profesores es su conocimiento de las Matemáticas.

Por esta razón las influencias que tienen las concepciones sobre el actuar de los docentes han hecho que estas sean consideradas elementos clave para comprender los procesos de enseñanza aprendizaje que se dan en el aula.

METODOLOGÍA

El presente estudio es de corte cuantitativo. Se aplicó un cuestionario, el cual consta de una serie de preguntas que considera diferentes puntos, consta de preguntas abiertas y preguntas cerradas.

Esta investigación se lleva a cabo dentro del proyecto “Plataforma de enseñanza en línea para aprendizaje de competencias docentes y digitales, aplicadas a la educación básica, bajo una metodología B-lerning en el contexto del estado de Tamaulipas”, la propuesta está conformada por cuatro diplomados: enseñanza de las ciencias, valores, profesionalización docente en matemáticas y lectoescritura.

Tabla 1. Total de escuelas primarias en el municipio de Victoria

Sostenimiento	Alumnos	Docentes	Escuelas	Grupos
Fed. Transf.	35,287	1,350	143	1,440

Por lo tanto se llevó a cabo la aplicación de encuestas en las instituciones educativas del sector No.10 y No.22, dirigidos a maestros de 1°a 6° año de primaria, con un total de 258 docentes encuestados.

Para el diseño de los instrumentos se usaron preguntas en escala de likert, donde se seleccionaron cinco apartados fundamentales para tomar en cuenta al identificar las creencias y prácticas acerca de la enseñanza de las matemáticas en educación primaria los cuales son: Habilidades, Planificación, Enseñanza interactiva, Evaluación y clima Organizacional.

RESULTADOS

De acuerdo al objetivo planteado en la investigación, los profesores expresaron lo siguiente (en las preguntas abiertas):

Las principales creencias docentes donde estos mismos se encuentran totalmente de acuerdo y bastante de acuerdo son:

- Considero que es imprescindible para el aprendizaje de las Matemáticas, que el alumno cuente con una buena capacidad lógica.
- El alumno debe acceder al conocimiento matemático a través de su propia experimentación.
- Pienso que para que la enseñanza de las matemáticas se realice de forma efectiva, es necesario que exista una buena coordinación entre los profesores de los distintos ciclos.
- Considero que la enseñanza de las Matemáticas debería acostumbrar a los niños a sobrepasar la realidad concreta, para traducirla en conceptos y abstracciones.
- En mi programación de Matemáticas considero como objetivo muy importante la resolución de problemas aritméticos.
- Cuando inicio la explicación de una operación aritmética, por ejemplo la suma, dedico un prolongado período de tiempo a que los niños manipulen objetos.
- Cuando evalúo el rendimiento matemático de mis alumnos, presto la máxima atención a cómo resuelven los problemas aritméticos
- Ciento enormes intereses por enseñar Matemáticas y, por este motivo, estoy constantemente preocupado por introducir técnicas nuevas.
- Pienso que para que la enseñanza de las Matemáticas se realice de forma efectiva, es necesario que exista una buena coordinación entre los profesores de los distintos ciclos.

Por otro lado de acuerdo a sus creencias los docentes mencionan que se encuentran medianamente o nada de acuerdo con ciertas prácticas dentro de sus clases.

- Pienso que los alumnos en matemáticas deben de memorizar.

- Las actividades que con más frecuencia incluyo en mi programación de Matemáticas, son las de realización de operaciones aritméticas.
- Es muy conveniente que, cuando los alumnos realizan problemas aritméticos, trabajen en grupos reducidos porque así aprenden a pensar en voz alta.
- La evaluación de Matemáticas me indicará mejor lo que aprendieron mis alumnos, si la realizo sin avisarles previamente.
- Generalmente, preparo un único modelo de evaluación para todos los alumnos de mi clase.
- El número de aprobados y reprobados de la clase de Matemáticas es un indicador de la eficacia del profesor
- Personalmente opino que mi formación pedagógica es suficiente y que mi práctica educativa es la que me puede aportar nuevas ideas y procedimientos de enseñanza.
- Normalmente, elaboro una única programación de Matemáticas para todo el curso escolar.
- De ninguna manera permito a mis alumnos contar con los dedos.
- Casi siempre, las pruebas de evaluación tienen como finalidad lograr una selección, más que valorar la formación matemática de los niños.
- En general, los profesores tenemos niveles muy bajos de autoestima y satisfacción personal.

CONCLUSIONES PREELIMINARES

Los profesores señalan que dentro de sus creencias de cómo se aprende matemáticas, el alumno es un activo en la construcción del conocimiento así como de su capacidad lógica para su aprendizaje.

Sus creencias acerca de su enseñanza nos muestra que su pedagogía dentro del aula es distinta y se adecua dependiendo de su entorno, sus métodos educativos son diferentes permitiéndose utilizar objetos para manipular su enseñanza o bien sus mismas manos para lograr un aprendizaje significativo. Ver la memorización dentro de las matemáticas ya no es una creencia presente dentro del pensamiento de los docente, si no por el contrario se ven preocupados por introducir nuevas técnicas y que el alumno pueda acceder al conocimiento matemático a través de su propia experiencia.

Para los docentes la evaluación también juega un papel muy importante dentro de sus creencias ya que se adecuan a las diferentes circunstancias, no solo cuentan con un único modelo de evaluación para todos los alumnos de su clase, ni tampoco una única programación para todo el curso escolar, por el contrario contando con cada contexto diferente su programa y evaluación varían.

Como lo mencionan Lebrija *et al* (2010), quienes plantean que las creencias acerca de la enseñanza de las matemáticas que tienen principal efecto en las acciones que toman los docentes, se cree que enseñar a los alumnos implica que aprendan a pensar como los matemáticos y que la enseñanza debe orientarse a comprender conceptos y procedimientos como un medio para resolver problemas, así también se cree en la necesidad de adecuar la enseñanza a las cualidades del conocimiento y a características cognoscitivas y afectivas de los alumnos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barrera, J. (2004). *Asociasonismo*. Recuperado el 29 de septiembre del 2015 de www.teoria de sistemas.blogspot.mx

Díaz Barriga, F. y Hernández, G. (2004). *Estrategias de enseñanza para un aprendizaje significativo*, México, Ed. McGraw Hill.

Díaz, C (2003). *Dificultades de aprendizaje del algebra*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Tamaulipas. México.

García, L., Azcárate, C. y Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 22 (1), 86-116.

Lebrija, A., Flores, R. y Trejos, M. (2010). El papel del maestro, el papel del alumno: un estudio sobre las creencias e implicaciones en la docencia de los profesores de matemáticas en Panamá. *Revista Educación Matemática 22(1),* 33-45.

Martín, E. (1998).*Creencias y prácticas del profesorado de primaria en la enseñanza de las matemáticas.* Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Laguna. San Cristóbal de La Laguna. España.

Martínez, O. (2013). Las creencias en la educación matemática.*Revista venezolana de educación 17(1),* 235-243.

Moreano, G. y Asmad, U. (2008). Concepciones sobre la enseñanza de matemática en docentes de primaria de escuelas estatales. *Revista de Psicología.16 (2)* 300-334.

Orozco, E. (2009). Las teorías asociacionistas y cognitivas del aprendizaje: diferencias, semejanzas y puntos en común. *Revista Docencia e Investigación 19,* 175-191.

EVALUACIÓN FORMATIVA DE PROBLEMAS CREADOS POR FUTUROS PROFESORES DE MATEMATICA

Lorena Salazar-Solórzano
Universidad de Costa Rica, Costa Rica
lorena.salazarsolorzano@ucr.ac.cr

Palabras clave: creación de problemas, profesores de matemática, formación inicial, educación matemática.

Key words: creating problems, math teachers, initial formation, mathematics' education.

RESUMEN: Este trabajo presenta resultados preliminares de una investigación que pretende evaluar problemas creados por futuros profesores de matemática con el objetivo de mejorar esta competencia en ellos. Se indujo a que fueran los propios estudiantes quienes determinaran criterios de calidad como: claridad, sintaxis, coherencia, originalidad, relación con la teoría, grado de desafío e interés y si generaban procesos de pensamiento que indujeran a la asimilación de conceptos matemáticos. La guía de observación y análisis de los problemas creados, fueron los instrumentos para recopilar la información necesaria, la cual fue organizada con un enfoque cualitativo. Los resultados de este estudio muestran cómo el proceso de buscar rúbricas para clasificar "un buen problema" aunado a la evaluación por pares, dio lugar a una mejora en la invención de nuevos problemas.

ABSTRACT: This paper presents preliminary results of a study aimed at evaluating problems created by future mathematics teachers in order to improve this competition in them. As quality criteria were considered: clarity in the redaction, syntax, consistency, originality, relationship to theory, degree of challenge and interest generated and if they involve thought processes that induce the assimilation of mathematical concepts. The guide observation and analysis of the problems created were the tools to gather the necessary information, which was organized with a qualitative approach. The results of this study show how the process of seeking criteria to qualify a "good problem" joined with peer evaluation of the problems, resulted in an improvement in the invention of new problems.

INTRODUCCIÓN

Este documento reporta algunos resultados preliminares de la última fase de una investigación que tiene como objetivo desarrollar la competencia de creación de problemas en futuros profesores de matemática para secundaria. Esta fase consiste en el análisis didáctico, evaluación y mejoramiento de problemas creados por estudiantes de la carrera Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional y de la Universidad de Costa Rica. En Salazar (2014a) se reportan algunos resultados de las fases previas, iniciando con un análisis de problemas planteados en libros de texto, básicamente en Bartle (2010) en los que se les pedía a los alumnos para profesores, analizar los problemas referentes al tema de propiedades de funciones continuas, y sin resolverlos intentar descubrir cuál fue la intención del autor al proponerlos. Una vez hecho esto en una segunda fase, se les pedía después de resolver un problema dado, realizarle modificaciones, cambiando los requerimientos del problema, en este caso concreto modificando las funciones, variando los intervalos del dominio y el tipo de discontinuidad. La fase 3 se solicitaba que los estudiantes crearan problemas en una modalidad de trabajo colaborativo, en el tema de funciones continuas en intervalos cerrados, de modo que respondieran a un objetivo dado y que debería ser resuelto por otro grupo. En Salazar (2015a) los estudiantes muestran creaciones de problemas para enfatizar la importancia de una hipótesis en una actividad llamada ¿Y si no…qué pasa? Finalmente, la última fase que es la que se reporta en este documento, pretendía que los estudiantes hicieran una reflexión y análisis de algunos de los problemas creados por futuros profesores de matemática, de modo que estos pudieran ser objeto de evaluación y clasificación tomando en cuenta criterios, elementos y aspectos que ellos mismos en consenso con la docente del grupo, debían determinar en conjunto. Con esto se esperaba que los estudiantes reflexionaran sobre qué elementos podrían tomarse en cuenta para decidir si un problema era mejor que otro y sobre qué elementos debería tener un "buen problema". Es por esto que el objetivo de esta investigación fue la siguiente: Investigar si la búsqueda de criterios para la clasificación y evaluación de problemas matemáticos planteados por futuros profesores de matemática, ayuda a superar algunas de las limitaciones presentadas y mejora la competencia de creación de problemas.

La estructura del artículo es la siguiente: después de esta introducción, en la que se explican el problema y el objetivo de la investigación se expone el marco teórico utilizado, luego se explica la metodología cualitativa seguida de la descripción de la experiencia y análisis de resultados para terminar con unas consideraciones finales.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Debido a que los nuevos currículos de matemática para secundaria en Costa Rica, declaran la resolución de problemas como el enfoque principal de enseñanza, los futuros profesores de matemática deben ser competentes en la creación de problemas, ya que en su labor docente deberán inducir a sus estudiantes a resolver problemas para introducir algún tema nuevo. Sin embargo, la formación inicial de profesores de matemática se ha centrado históricamente en que ellos resuelvan problemas y no se les involucra en actividades en las que ellos por sí mismos, deban plantear algunos, o realicen al menos algunas variaciones a problemas dados. Esto ha dado lugar a un profesional con poca capacidad de creación y que se limita a escoger uno o varios libros de texto de editoriales comerciales para obtener de ahí problemas planteados por otros profesionales, matemáticos puros, investigadores o personas desligadas de la educación

secundaria, lamentablemente descontextualizados y ajenos a la realidad de los estudiantes a los que se les aplicarán. Mallart, Font y Malaspina (2015) comentan que los alumnos "(…) tienden a asumir que ellos siempre dispondrán de otras fuentes (libros de texto o internet) para proveerse de problemas para plantear a sus futuros alumnos." Por otro lado, investigaciones en creaciones de problemas indican que los futuros docentes carecen de habilidades necesarias para crear "buenos problemas", como por ejemplo Singer y Voica (2013) los cuales reportan un estudio sobre planteamiento de problemas en profesores de matemática en la que consideraron tres aspectos: claridad, coherencia y originalidad. Estos autores indican que 17 % de los problemas creados, eran incompletos, 8 % estaban incorrectos y la mayoría de ellos (70%) no eran interesantes según los expertos consultados. Por otro lado, Tichá y Hošpesová (2013) concluyen que los enunciados propuestos por futuros maestros de primaria, revelaron deficiencias en la comprensión del tema mismo tratado (fracciones). Otros autores como Ellerton, (2013), Malaspina (2013) y Salazar (2014a) señalan que los futuros profesores deberían como mínimo realizar variaciones de un problema dado. En Malaspina (2013), por ejemplo, se reporta una experiencia con profesores sobre la modificación de problemas a partir de episodios de clase en los profesores debían crear problemas haciendo variaciones al problema que interviene en el episodio, obteniéndose resultados positivos. Por otro lado, en Salazar (2014b) se muestran algunas experiencias de aula en educación universitaria en las áreas de análisis y álgebra en cursos de matemática formal para futuros profesores de matemática, en donde la estrategia de creación de problemas resultó ser una actividad muy productiva para la comprensión y aprendizaje de algunos temas de estas áreas. La misma concluye que después de inducir a los estudiantes para profesores a crear problemas, estos "(…) modificaron sus conductas respecto a otros temas que habían estudiado previamente, en concreto ahora no se limitaban a intentar resolver la tarea propuesta sino que reflexionaban sobre su enunciado, consiguiendo de esta manera una mejor comprensión de la teoría que se tenía que utilizar en su resolución." (Salazar, 2014a, p. 74).

Cuando un estudiante crea un problema, debe tener la teoría muy clara y si no la tiene clara, es un medio de aclarársela en el proceso de la misma creación, indagando en las posibles soluciones que un segundo individuo podría dar, dirigiendo su atención a los detalles, hipótesis y al objetivo a conseguir, adecuándolo al contexto y al nivel de los estudiantes al que va dirigido y preocupándose de expresarlo de manera coherente y cuidando el uso de un lenguaje que no dé cabida a ambigüedades. Pero esto no se logra si no se incluyen actividades de creación de problemas en las aulas, acompañados de una reflexión sobre la práctica, que haga conciencia de todos estos elementos a considerar al crear un problema. Aunque este tipo de actividades consumen más tiempo, los resultados bien valen la pena, como señala Salazar (2015b, p.74), "although these tasks were more time-consuming than traditional lecture sessions, they facilitated the

understanding of the subsequent topics, which could then be presented more quickly". De modo que la creación de problemas puede utilizarse como una estrategia didáctica para lograr conocimiento matemático en los estudiantes y debería ser parte de la formación inicial de profesores de matemática.

¿Pero cuándo y bajo qué condiciones podría considerarse un problema ser un "buen problema"?. Mallart, Font y Malaspina (2015) señalan que "(…) el alumno que tiene competencia en análisis didáctico y una lista de criterios, consigue aplicarla de manera más eficiente en la reformulación de

su problema inicial que aquel alumno que carece de dicha competencia, aunque tenga buen nivel de competencia matemática." (Conclusiones, párr. 5) Ellos consideran que un "buen problema" es aquel que satisface criterios como los siguientes:

- La dificultad no es muy grande y se percibe una solución alcanzable.
- Los contenidos que se tratan y/o las estrategias resolutivas se conocen.
- Resulta claro en qué consiste el problema (determinar o demostrar algo).
- Se intuye un camino para obtener la solución o conjeturar una solución.
- Permite hacer verificaciones para mantener o rechazar las conjeturas.
- Permite establecer conexiones ya sea entre varios temas matemáticos con situaciones reales o con otros campos del conocimiento.

Por otro lado el proyecto PISA considera tres clases de complejidad en los ítems propuestos en sus exámenes, los cuales de alguna manera podría verse como una clasificación para evaluar problemas, desde un nivel más simple a uno más complejo. Estos niveles son: problemas de reproducción, problemas de conexión y problemas de reflexión. Según Rico (2007) el primer nivel se refiere a problemas que son familiares al estudiante, requieren procedimientos rutinarios, aplicación de fórmulas, algoritmos y propiedades matemáticas. En el segundo nivel los problemas requieren mayores exigencias en la interpretación y se necesitan relaciones entre las diferentes representaciones y aspectos del problema, mientras que en el tercer nivel, se requiere que los estudiantes realicen procesos de razonamiento, argumentación, intuición y generalización. De modo que el "arte de inventar", van más allá del hecho de crear problemas interesantes a los alumnos a los que van dirigidos. Deben responder a un objetivo y a un nivel de complejidad adecuado.

METODOLOGÍA

Para conseguir el objetivo de investigación, se tomó como muestra a los estudiantes de un curso en paralelo de análisis de variable real de la Universidad Nacional (UNA) y de la Universidad de Costa Rica (UCR), las cuales preparan estudiantes para ser profesores de matemática de secundaria. Se trata de alumnos de tercer año en la UCR y de quinto año en la UNA, por lo que podría decirse que ya tienen madurez en su formación inicial así como conceptos matemáticos suficientemente sólidos para la experiencia a realizar.

Para la recolección de información se tomaron en cuenta entrevistas y cuestionarios aplicados por los estudiantes a profesores en ejercicio y análisis de los problemas creados así como de sus reflexiones. Se llevó una bitácora con las anotaciones de la experiencia, comentarios, percepciones y actitudes de los estudiantes. Se realizaron seis tareas las cuales se realizaron en grupos de estudiantes de dos a tres estudiantes. Para el diseño de estas tareas se tomaron en cuenta los cuatro aspectos que propone Malaspina (2013) para la creación de problemas: información, requerimiento, contexto y entorno matemático.

Tabla 1. Características para el diseño de tareas

Información	Problemas de libro de texto y problemas creados por futuros profesores de matemática
Requerimientos	Tarea 1: Investigación sobre lo que es un buen problema Tarea 2: Establecimiento de criterios para un buen problema Tarea 3: Análisis y evaluación de problemas creados Tarea 4: Sugerencias de mejora de los problemas creados Tarea 5: Creación de problemas propios
Contexto	Intra-matemático
Entorno matemático	Contenidos matemáticos: Funciones reales continuas. Procesos: Demostración.

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

Se presenta en esta sección la descripción de la experiencia, tomando en consideración algunos de los resultados hallados. Para la tarea 1 que consistió en investigar sobre lo que es un buen problema, los estudiantes realizaron búsquedas en la web, en revistas y realizaron entrevistas a profesores con amplia experiencia y a expertos, de modo que tuvieron algunos elementos para clasificar un "buen problema". A continuación se presentan los resultados de la tarea 2, en la que se determinaron los criterios, para clasificar y evaluar un buen problema. Estos fueron consensuados por los estudiantes de la experiencia y la docente del grupo.

Tabla 2. Criterios de calidad para un buen problema

Criterio	Características presentes
Redacción y coherencia	Lenguaje claro, sencillo, preciso y que el estudiante conoce, sobre todo el lenguaje matemático. Presenta un texto con lo justo y necesario sin ambigüedades e información extra. Tiene datos suficientes y coherentes. Presenta una demanda clara para resolver el problema.
Relación con la teoría y nivel del problema	Se adapta al nivel de los estudiantes al que va dirigido. Involucra conocimientos que el estudiante ya conoce. Se conocen estrategias de solución. El problema tiene posibilidades reales de ser resuelto en un tiempo prudencial determinado.
Grado de desafío e interés	Resulta ser un reto al estudiante. Logra motivarlo a hallar su solución. Es interesante para el alumno, atractivo y contextualizado a sus intereses
Originalidad y procesos de pensamiento matemático	No es una adaptación o variación de algún problema. Se sale del marco de los problemas estudiados. Permite realizar conexiones intra-matemáticas y con otras áreas del conocimiento. Desarrolla procesos matemáticos de conexión, argumentación, razonamiento y comunicación. Es un problema que en el proceso de solución lleva a reafirmar conceptos matemáticos previos y consolidar los nuevos.

Para la ejecución de la tarea 3, que consistía en el análisis y evaluación de problemas, se les dio a cada grupo una lista de problemas creados por estudiantes para profesores de otro ciclo, es decir ajenos a ellos, y su tarea consistía en darle una evaluación de acuerdo a los criterios de calidad establecidos en la tarea anterior. Los problemas a evaluar se relacionaban al tema de propiedades de funciones continuas de variable real, específicamente a la propiedad de composición de funciones continuas.

La pregunta y el problema que dio origen a las modificaciones y a la creación de los problemas se muestran a continuación

Pregunta generadora:

¿Cuándo se puede meter el límite dentro de una composición? Es decir cuando es válido que

$\lim_{x\to c}(gof)(x) = g\left(\lim_{x\to c} f(X)\right)$

Problema Generador: (Bartle, 2010)

Sea g definida en IR por $g(1)=0$ y $g(x) \coloneqq 2$ si $x \neq 1$, y sea $f(x) \coloneqq x+1 \ \ \forall x \in IR$.

Demostrar que $\lim_{x\to 0}(gof)(x) \neq (gof)(0)$. ¿Por qué este hecho no contradice el teorema de composición de funciones?

A continuación se presentan algunos de los problemas creados por los futuros profesores de matemática y la evaluación que se le dio al problema.

Tabla 3. Evaluación de problemas creados de acuerdo a los criterios de tabla 2

PROBLEMA	Redacción	Teoría	Desafío	Procesos	NOTA
Problema 1: Sean $g(x) = x-2$ y $f(x) = x^2$. Justifique porqué se cumple $\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(f(c))$	2	1	1	1	5
Problema 2: Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2 - x + 1$ y $g(x) = \ln x$. Pruebe que $\lim_{x\to c} (g\circ f)(x) = g(f(c))$, $\forall c \in \mathbb{R}$	3	2	2	1	9
Problema 3: Sean $g(x) = \ln x$ y $f(x) = x+1$. Justifique porqué se cumple que $\lim_{x\to -1} (g\circ f)(x) \neq g(f(-1))$	2	3	3	3	11
Problema 4: Sea $g(x) = \sqrt{x}$ y $f(x) = x^2 - x$. Determine los valores de x=c para los cuales se da la igualdad $\lim_{x\to c} (g\circ f)(x) = g(f(c))$	2	2	2	3	9
Problema 5: Sea $g(x) = \text{sen}(x)$ y $f(x) = 1/x$. Justifique que $\lim_{x\to 0} (g\circ f)(x) \neq g(f(0))$	2	3	2	3	10
Problema 6: Sea $f(x) = [\![x]\!]$ y $g(x) = 1/(x^2+1)$. Determine si puede afirmarse que $\lim_{x\to 1} (g\circ f)(x) = g(f(1))$	2	3	2	3	10
Problema 7: Sean $f(x) = x\,sen(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$ y $g(x) = 2$, si $x \neq 0$, $g(0) = -1$. ¿Se cumple $\lim_{x\to 0} (g\circ f)(x) = g(f(0))$?	2	3	3	3	11

Nota: (1) Presenta el criterio mencionado muy pobremente, (2) Logra el criterio parcialmente, (3) Presenta el criterio satisfactoriamente.

Varios de los problemas no aclaran que *f* y g son funciones ni sus dominios, por lo que obtienen un puntaje de 2 puntos en redacción. El problema 1 se trata de un par de funciones continuas, no presenta gran interés ni desafío para un estudiante, más que reforzar el teorema de composición de funciones continuas (TCFC). El segundo problema toma en cuenta que la composición esté bien definida buscando que *f* tenga valores positivos, pero no representa un interés mayor que el mismo teorema TCFC, por lo que los estudiantes le dieron un punto en originalidad. El problema 3 y 4 presentan un grado mayor de originalidad y razonamiento por cuanto lleva a revisar la definición de la composición, y a los casos en que $\ln x$ y $sen(1/x)$ no están definidos en x=1 y en x=0

respectivamente, lo que lleva a la reflexión sobre la existencia de objetos matemáticos. Los problemas 6 y 7 obtuvieron un puntaje mayor pues presenta un mayor desafío al estudiante porque la pregunta, a diferencia de los anteriores está planteada en forma interrogativa, aspecto que lleva a los estudiantes a cuestionarse si esto será cierto no, buscando casos particulares. Por otro lado el tipo de discontinuidad inevitable presenta mayor interés al problema original en que la discontinuidad era evitable.

Finalmente se les pidió una generalización al problema original, lo que les exigió un mayor nivel de dificultad pues esto es "hacer matemática". Se les proporcionó una guía de preguntas para ayudarles en su tarea. Después de mucha discusión en los grupos, y luego a nivel de todo el estudiantado junto con la docente, fueron detallando las características de cada una de las funciones, hasta obtener, con gran satisfacción entre todos, la generalización siguiente:

Problema 8: Generalización del problema generador:

Sea *g* definida en IR por $g(x) := h(x)$ para $x \neq c$ y $g(c) = a$, donde $h(c) \neq a$. Si $f(x)$ es una función continua, invertible $\forall x \in IR$ tal que h es continua en $f^{-1}(c)$, entonces $\lim_{x \to f^{-1}(c)} (gof)(x) \neq (gof)(f^{-1}(c))$. ¿Por qué este hecho no contradice el teorema de composición de funciones continuas?

CONCLUSIONES

Ante la pregunta de investigación sobre si la búsqueda de criterios para la clasificación y evaluación de problemas matemáticos planteados por futuros profesores, ayudaba a superar algunas de las limitaciones presentadas y a mejorar la competencia de creación de problemas, la respuesta es sin duda que sí. En siguientes creaciones de problemas, los estudiantes tomaron en cuenta las rúbricas que ellos mismos en consenso con la docente habían seleccionado, mostrando más cuidado a la hora de redactar un problema y un mayor grado de originalidad en la invención de sus problemas. Al reflexionar sobre lo que debe ser un "buen problema matemático" y sus alcances, concientizaron la necesidad de tener un objetivo claro a enfatizar con el problema, visualizaron sus propios errores y en cómo no volver a cometerlos. Mostraron más interés en llamar la atención a una hipótesis en particular de alguno de los teoremas y se volvieron más suspicaces al detectar detalles que antes pasaban desapercibidos.

La evaluación en pares resultó ser muy positiva, dado que al evaluar el trabajo de sus compañeros, se empoderaron de los criterios de calidad establecidos en conjunto, lográndose un mayor beneficio que si la docente hubiera sido la evaluadora, según sus comentarios. Sintieron la responsabilidad de adjudicar un número a cada problema tratando de ser justos en su labor, tarea nada fácil si no se tienen criterios adecuados.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bartle, R. y Sherbert, D. (2010). *Introducción al análisis matemático de una variable*. México: Limusa.

Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics*, *83(1), 87-101.*

Malaspina, U. (2013a). Nuevos horizontes matemáticos mediante variaciones de un problema. *Unión*, *35, 135-143*.

Malaspina, U. (2015b). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Memorias de XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* Chiapas, México.

Mallart, A, Font, V. & Malaspina, U. (2015). Reflexión sobre el significado de qué es un buen problema en la formación inicial de maestros. *Perfiles Educativos* (En prensa)

Rico, Luis (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1(2), pp. 47-66*

Salazar, L (2014a). Diseño de tareas a partir de la modificación de problemas planteados en libros de texto y su implementación con futuros profesores de matemática. *Revista Paradigma vol. XXXV (1),* junio 2014 V-2, 55 – 77.

Salazar, L (2014b). Creación de problemas: un método alternativo para introducir

reafirmar el concepto de grupo. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*. *Vol. 15, No 1,* Agosto - Febrero 2015, 1-35

Salazar, L. (2015a). ¿Y si no se cumple,. . ., qué pasa? Reforzando conceptos matemáticos en futuros profesores de matemática para Secundaria. *Memorias del Encuentro Centroamericano de Matemática Educativa II ECAME*, Cartago, Costa Rica § 15–17 Julio 2014. TEC.

Salazar, L. (2015b). Problem-posing as a didactic resource in formal mathematics courses to train future secondary school mathematics teachers. *Journal of Technology and Science Education (JOTSE), 5(2), 64-74*.

Singer. F. M. y Voica, C. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Educational Studies in Mathematics, 83(1), 9-26.*

Tichá, M. y Hošpesová, A. (2013). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 133-143.

143.

LAS PRUEBAS DE HIPÓTESIS EN LA VISIÓN DE DOCENTES DE ESTADÍSTICA

Christiane Ponteville, Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González", Facultad de Farmacia y Bioquímica. Universidad de Buenos Aires (Argentina)
chponteville@gmail.com, crccrespo@gmail.com

Palabras clave: inferencia estadística, pruebas de hipótesis

Key words: inferential statistics, hypothesis test

RESUMEN: En este trabajo se presentan los resultados obtenidos al realizar una encuesta a docentes de estadística vinculada con su conceptualización de las pruebas de hipótesis. Las respuestas fueron analizadas teniendo en cuenta la utilidad de las pruebas de hipótesis, su validación y su relación con la ciencia, las aplicaciones de las pruebas de hipótesis, la importancia de las hipótesis nula y alternativa, los niveles de significación de una prueba de hipótesis y la relación con los recursos tecnológicos. En las respuestas obtenidas se pudo identificar características que reflejan su formación profesional.

ABSTRACT: In this paper the results obtained by performing a survey of statistics teachers linked with their conceptualization of statistical hypothesis testing are presented. The responses were analyzed taking into account the usefulness of hypothesis testing, validation and its relationship to science, applications of hypothesis testing, the significance of the null and alternative hypotheses, significance levels of a hypothesis test and the relationship with technology resources. Patterns reflecting professional training were identify in the obtained responses.

LA VISIÓN DE LOS DOCENTES SOBRE LAS PRUEBAS DE HIPÓTESIS

El desarrollo y difusión de temas vinculados a la estadística en general y, a las pruebas de hipótesis en particular, son una demanda cada vez más urgente de nuestras sociedades modernas. Este proceso social de culturalización estadística ha generado la necesidad de incorporar a los diferentes niveles de la educación conceptos y prácticas relacionados con las probabilidades y la estadística (Batanero, 2002).

Tanto en el nivel medio como en el superior, existen estudios que abordan el problema de la comprensión de conceptos vinculados al contraste estadístico de hipótesis. Algunas de ellas abordan las dificultades y los obstáculos que tienen los alumnos para comprender el concepto de prueba de hipótesis (Korin, 2008).

Esta propuesta de trabajo se encuentra enmarcada en un trabajo de maestría en el cual se analizaron diversos aspectos del discurso matemático escolar para poder realizar un análisis socioepistemológico de la enseñanza de las pruebas de hipótesis. Teniendo en cuenta elementos de la alfabetización estadística, se analizaron las pruebas de hipótesis como parte de una construcción sociocultural, resignificándolas a través del análisis de su enseñanza. Para mostrar las ideas germinales de las pruebas de hipótesis se analiza el comienzo de las ideas estadísticas para luego introducirse en la aparición de las probabilidades con los juegos de azar y la génesis y desarrollo del método estadístico hasta principios del siglo XX. Finalmente presentar los momentos históricos de la creación de las pruebas de hipótesis con la controversia de la cual fueron actores sus creadores. En este marco se muestran las particularidades que tiene la enseñanza de las pruebas de hipótesis en el aula identificando características en libros de texto y formas de argumentación relacionadas con las pruebas de hipótesis en el discurso matemático escolar (Ponteville, 2015).

Los docentes a cargo de la enseñanza de los temas de estadística, al igual que los profesionales que trabajan en esta disciplina, poseen formaciones diversas y experiencias de trabajos relacionadas con la estadística en diversos ámbitos de trabajo. A partir de esta realidad, es posible plantear la hipótesis de que su visión de las pruebas de hipótesis es distinta y que esto se refleja en el aula. Trataremos de identificar como estas diferentes visiones contemplan aspectos de la controversia establecida en los orígenes históricos de las pruebas de hipótesis (Urbisaia y Brufman, 2008).

En este marco, con el fin de comprender en que forma los docentes se acercan a las pruebas de hipótesis, su relación con la ciencia y sus componentes históricos se realizó una encuesta a un grupo de docentes que ejercen cargos de docentes auxiliares en la cátedra de Matemática de las carreras de Farmacia y Bioquímica de la Universidad de Buenos Aires. La cátedra de Matemática dicta dos asignaturas: Matemática y Bioestadística.

De los encuestados, dos son licenciados en matemática y el resto son estudiantes o egresados de las carreras de Farmacia y de Bioquímica y forman parte de la escuela de ayudantes de la cátedra. La antigüedad docente de los primeros es de más de diez años, mientras que los últimos tienen como máximo tres años en esta actividad.

ENCUESTA: ¿PARA QUÉ SIRVEN LAS PRUEBAS DE HIPÓTESIS?

Esta encuesta fue pensada para que, a través de las respuestas obtenidas, abrir la posibilidad de analizar los diferentes tipos de argumentaciones utilizados en el uso de las pruebas de hipótesis como objeto de validación científica y acceder al análisis de prácticas sociales vinculadas a la conceptualización de las pruebas que los docentes asocian a las mismas.

Se estableció previamente que esta encuesta no era evaluativa, o sea, las diferentes preguntas no serían calificadas, aunque no fue anónima para poder identificar su formación y antecedentes al momento de analizar las respuestas obtenidas. Se les explicó que el centro del análisis estaría en las argumentaciones utilizadas.

Esta encuesta se organizó a partir de un cuestionario formado por una lista de ítems abiertos a los que debían responder. Para hacerlo se les explicó que tenían la posibilidad de utilizar cualquier estrategia discursiva que consideraran pertinente como enumeraciones de ejemplos, listados de ideas, referencias bibliográficas o mapas conceptuales si lo consideraban oportuno. También se les indicó que podían referenciar entre sí los ítems relacionándolos, no siendo necesario que respetaran el orden en que estaban formulados. Pudieron responder las preguntas planteadas en sus casas, para darles oportunidad de que pensaran y pudieran explayarse lo que consideraran oportuno en las respuestas.

Las preguntas que se realizaron a los encuestados fueron las siguientes:

1) ¿Cuándo utiliza pruebas de hipótesis en su actividad profesional o cuando cree que utilizaría pruebas de hipótesis en su futura profesión?

2) ¿Es imprescindible el uso de las pruebas de hipótesis en la validación científica?

3) ¿Para qué tipo de situaciones utiliza o puede utilizar pruebas de hipótesis?

4) ¿Es imprescindible plantear las hipótesis nula y alternativa?

5) ¿Cuál es la diferencia entre utilizar un nivel de significación prefijado y calcular el nivel justo de significación?

6) Enuncie una situación de su actividad profesional en la cual:

- *Utilizaría una prueba de hipótesis*
- *No utilizaría una prueba de hipótesis*

En el caso de no estar ejerciendo la profesión, imagine una situación.

7) ¿De qué manera aparecen las pruebas de hipótesis en los programas informáticos que usted conoce? Describa brevemente.

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS OBTENIDAS

A pesar de habérseles dado oportunidad de utilizar diversas estrategias de respuesta, todos los ítems fueron respondidos de manera textual, no incluyendo ningún cuadro ni mapa conceptual ni gráfico.

A continuación se presenta el análisis de algunos de los aspectos más relevantes que pueden extraerse de las respuestas obtenidas.

Acerca de la utilidad de las pruebas de hipótesis

La primera pregunta del cuestionario estaba orientada a que los docentes mostraran cuáles son las utilidades de las pruebas de hipótesis que reconocen como más importantes y si las valoran desde lo teórico o realmente a través de las utilidades prácticas en su carrera (Ponteville, Núñez, 2010).

En relación a la utilidad de las pruebas de hipótesis en su profesión, claramente puede detectarse en las respuestas su formación básica.

Los matemáticos respondieron de manera general y global, haciendo hincapié en la posibilidad de *"decidir la verdad de una afirmación controlando cierto nivel de riesgo"* sin realizar ejemplificación.

En el resto de las respuestas aparecen aplicaciones concretas:

> *"Utilizo pruebas de hipótesis, por ejemplo para el análisis cuantitativo de encuestas" … "También pretendo utilizarla en el futuro para el análisis y revisión crítica de estudios en ciencias de la salud (meta-análisis)."*

A partir de las respuestas puede inferirse que estos encuestados identifican con claridad la presencia en la estadística de conceptos como muestra, población, toma de decisiones a partir de una muestra y su importancia en esta disciplina y sus aplicaciones.

Acerca de la validación y la ciencia

La segunda pregunta se orientó a que respondieran si las pruebas de hipótesis son indispensables para la validación científica. Con ella se intentaba identificar la visión de ciencia que tienen estos docentes y de qué manera comprenden la práctica de la validación del conocimiento científico.

Los ayudantes cuya formación es matemática, reconocen como no indispensable en uso de las pruebas de hipótesis para la validación científica, si bien las justificaciones difieren bastante en la profundidad de su argumentación. En una de las respuestas se identifica una visión amplia de la ciencia, en el sentido en que al pensar en ciencia comprenden a la práctica de la validación, con las normativas propias a cada ciencia y consensuadas por los científicos como comunidad.

Las otras respuestas pueden caracterizarse con:

> *"Diversas disciplinas, entre ellas las Ciencias de la Salud, se rigen actualmente bajo el paradigma de validación científica estadística para sus análisis cuantitativos."*
>
> *"Dar validez científica se refiere al hecho de que una proposición sea aceptada como verdadera, por lo tanto, las pruebas de hipótesis son el punto de partida de todo proyecto de investigación"…*
>
> *"Creo que es imprescindible, no solo porque se exige de esa manera desde las autoridades; sino porque a través de éstas se da el sello"…*

En estas últimas respuestas, cuyos autores fueron los docentes provenientes de las carreras de bioquímica y farmacia, se pone en evidencia que al hablar de ciencia unen esta idea directamente a las Ciencias de la Salud, concebidas como un conjunto de disciplinas dedicadas a la adquisición de conocimientos para su aplicación en la promoción del bienestar físico, mental y social de los individuos y reconocen a las formas de validación como resultado de consensos dentro de la comunidad científica. Aparece aquí la consideración de los errores.

Acerca de las aplicaciones de las pruebas de hipótesis

La tercera pregunta solicitaba de manera directa situaciones en las que se aplican las pruebas de hipótesis. La mayoría enumeraron en este ítem, ejemplos concretos de aplicaciones propias de su ámbito de trabajo.

En una de las respuestas se pone en evidencia el reconocimiento de la importancia de los modelos matemáticos en los estudios estadísticos de poblaciones, concibiéndolos como representaciones de un proceso a través de la abstracción y la interpretación. El hecho de su reconocimiento de su importancia por parte de profesionales de la salud nos parece de sumo interés en el aula.

En la sexta pregunta, se retomaba el tema de las aplicaciones, pero ahora solicitando explícitamente ejemplos donde aplicar y otros donde no aplicar las pruebas de hipótesis. La idea de esta pregunta fue detectar si los docentes tienen asumido que a pesar de la importancia de esta forma de validación para la estadística, deben cumplirse ciertas condiciones en las situaciones en las que es posible su aplicación. Algunos identificaron que podían responderla junto con la tercera, otros propusieron aplicaciones no contempladas previamente.

Nuevamente y como ocurrió en algunas de las preguntas anteriores, las respuestas de los docentes de formación matemática se orientan a buscar condiciones generales, pero no llegan a ejemplos concretos. Las respuestas de los docentes provenientes de las ciencias de la salud, separan claramente las decisiones estadísticas del análisis de casos particulares y estudios de casos, para los cuales no son aplicables las pruebas de hipótesis.

Acerca de la importancia de las hipótesis nula y alternativa y de los niveles de significación de una prueba de hipótesis

La cuarta pregunta de la encuesta se refería al hecho de si era imprescindible plantear hipótesis nula y alternativa en una prueba de hipótesis. En todos los casos las respuestas fueron similares aunque las argumentaciones difieren: lo exige el modelo, es la base de la prueba, permite una interpretación transparente del diseño experimental.

En las respuestas vinculadas con la importancia de las hipótesis nula y alternativa puede apreciarse una mirada de las pruebas de hipótesis que corresponde a la visión de la Teoría de Neyman-Pearson, que establece, como hemos dicho previamente, dos hipótesis posibles: la nula y la alternativa. Las dos fuentes de posible error consisten en rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera y no rechazarla cuando es falsa. Sin embargo, las justificaciones dadas en otras respuestas se centraban fuertemente sobre los conceptos relacionados con tener evidencia para tomar una decisión.

Una vez reconocida la importancia de las hipótesis nula y alternativa, en la quinta pregunta, se buscaba transparentar la visión que tienen los docentes en relación a los niveles de significación de las pruebas de hipótesis. Aquí la argumentación se apoyó en plantear simultáneamente niveles de significación con el nivel justo. Estas respuestas permitieron evidenciar la presencia de elementos de las dos posturas de la controversia fundacional de las pruebas de hipótesis.

Acerca de las pruebas de hipótesis y los recursos tecnológicos

En los últimos tres años se ha venido introduciendo en la cátedra el uso de programas informáticos para el procesamiento de datos estadísticos. Con esta pregunta se buscó detectar si para los docentes auxiliares, su uso es central y si son utilizados en el aula como artefactos o como

instrumentos, comprendiendo que los artefactos se convierten en instrumentos desde el momento que se pone en juego la actividad cognitiva de quien lo usa. Salvo una de las docentes, que utilizó la expresión "*al alcance de un clic",* en las respuestas del resto de los docentes auxiliares esto no puede observarse y parecería que aún se encuentran en una etapa previa.

En el caso de los docentes de formación matemática describieron cómo hallar los parámetros en los programas que utilizan cosa que se plantea como natural en el resto.

ALGUNAS IDEAS EXTRAÍDAS DE LA ENCUESTA REALIZADA

En las respuestas que se obtuvieron a la encuesta realizada a los docentes auxiliares fue posible identificar características que reflejan la formación profesional, Lo profesional, forma parte de lo cultural, de lo social. Los docentes que provienen de Ciencias de la Salud, mostraron en sus respuestas que los ejemplos que daban y las visiones que mostraban, estaban sustentadas en su profesión.

En relación al reconocimiento de las pruebas de hipótesis como forma de validación del conocimiento científico, es adecuado que primeramente recordemos la siguiente caracterización de la comunidad científica en función de la validación del conocimiento científico: Así, una de las funciones de la comunidad científica, es cuidar las formas de validación del conocimiento, alejando de esta manera otras formas de conocimiento que no sea considerado científico. Surge así la idea de que los criterios de validación del conocimiento científico se establecen y por lo tanto son una construcción sociocultural que evoluciona y cambia no solo con el tiempo sino de un grupo a otro. (Crespo Crespo, 2007) Apareció esta idea importante en relación a la validación del conocimiento científico, que es la existencia de consensos de la comunidad científica para reconocer normativas propias relacionadas con la práctica de referencia de la validación.

Todos los docentes encuestados reconocieron el papel de las pruebas de hipótesis en la validación del conocimiento en disciplinas que obtienen información a partir de la estadística. Al referirse a ciencia, la mayoría se centró en las Ciencias de la Salud. Sin embargo, en algunos casos también surgieron como ciencias la matemática y las ciencias experimentales, como la física y la química.

Haciendo una generalización de esas ideas, podríamos referirnos a la actividad humana de hacer ciencia desarrollando actividades científicas como investigar y enseñar. Ante la práctica de referencia de la validación de resultados, en el caso particular de disciplinas que obtienen información a partir de la estadística, surgen normativas obtenidas por consensos de los científicos, que determinan cuándo son aplicables y cuándo no. En esta visión, podríamos decir que el uso de las pruebas de hipótesis pueden ser vistas como alguna de las prácticas sociales que caracterizan a esa comunidad científica.

Otras ideas que se pusieron de manifiesto en las respuestas fue el reconocimiento de la importancia en la estadística de conceptos como muestra, población, toma de decisiones a partir de una muestra y modelos matemáticos en estudios estadísticos de poblaciones.

Por una parte, la construcción de modelos matemáticos, basados en la observación y descripción de muestras y poblaciones, permite el desarrollo de hipótesis y explicaciones y la aplicación de conocimientos a la resolución de problemas similares. Por otra, es fundamental en la estadística que quienes trabajan en esta disciplina o en otras que la aplican, comprendan que a partir de la

información brindada por los datos recogidos en una muestra, se hacen inferencias sobre la población que está representada por la muestra. Este proceso debe ser comprendido cabalmente y ser consciente de los alcances que tiene el mismo.

En el caso de las pruebas de hipótesis, los encuestados fueron capaces de manifestar la importancia de las hipótesis nula y alternativa y de los niveles de significación de estas pruebas.

En relación al uso de los recursos tecnológicos, como reportamos anteriormente, consideramos que de las respuestas obtenidas puede inferirse que los docentes encuestados todavía estén en una etapa intermedia de la génesis instrumental, ya que en pocos casos fue posible detectar su uso como instrumento.

Los diferentes análisis realizados han conducido a evidenciar que las pruebas de hipótesis se estructuran en diferentes escenarios académicos y, por lo tanto, trascienden a los ámbitos profesionales con características propias a través de las prácticas de referencia que pueden evidenciarse en los diferentes aspectos estudiados en entrevistas y encuestas realizadas. Se ha podido ver que las pruebas de hipótesis para los docentes en el área de ciencias de la salud constituyen un elemento de validación muy ligado a su formación de base, aunque claramente estructurado en un sistema deductivo en la explicación y a un sistema de decisión en el uso profesional mientras que las matemáticos construyen su conceptualización a través del concepto de modelo matemático.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Batanero, C. (2002). *¿Hacia dónde va la educación estadística?* Disponible en: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/CULTURA.pdf

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Korin, C. (2008). *Concepciones erróneas de alumnos universitarios sobre el Contraste Estadístico de Hipótesis.* Tesis de maestría no publicada. Universidad de San Andrés, Argentina.

Ponteville, Ch. (2015). *El rol de las Argumentaciones Estadísticas: Pruebas de Hipótesis.* Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN, México.

Ponteville, Ch., Núñez, M. (2010). La demostración y la enseñanza de la estadística. En H. Blanco (Ed). *Acta de la VIII Conferencia Argentina de Educación Matemática,* (pp. 346-350). Buenos Aires: Sociedad Argentina de Educación Matemática

Urbisaia, H. y Brufman, J. (2008). La controversia entre Fisher y Neyman- Pearson. Sus implicancias en la investigación econométrica. En *XIV Jornadas de Epistemología de las Ciencias Económicas. Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Económicas, Buenos Aires, Argentina*. Recuperado el 02 de septiembre de 2013 de: http://www.econ.uba.ar/www/institutos/epistemologia/marco_archivos/XIV%20Jornadas%20de%20E

ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA ENSEÑAR DE PROFESORES EN FORMACIÓN

Tulio R. Amaya de Armas, Juan Barboza Rodríguez
Universidad de Sucre (Colombia)
tuama1@hotmail.com, juan.barboza@unisucre.edu.co

Palabras clave: Funciones, registros de representación, profesores en formación.

Key words: Functions, representation registers, teachers in training

RESUMEN: En este trabajo se reportan los hallazgos de un trabajo realizado con 90 estudiantes de Licenciatura en Matemáticas a los que se les pidió resolver un cuestionario sobre funciones. Los resultados evidencian ciertas debilidades formativas de los futuros profesores en el manejo de la función: en el diseño y ejecución de estrategias que permitan poner los contenidos en un lugar comprensible para los estudiantes; con su reconocimiento en el contexto donde se les presentó; con su aplicación y con el uso de recursos apropiados para hacerlo; para identificar sus elementos y relacionarlos. En general se nota en los estudiantes que hacen poco uso de los diferentes modos de expresión, tales como el verbal, el gráfico o el simbólico, así como de las transformaciones tipo conversión o tipo tratamiento entre los registros de una función; lo que denota que el nivel del lenguaje matemático que usan no es el más adecuado.

ABSTRACT: This work report the findings of an activity carried out with 90 students of Bachelor of Mathematics who had to solve a questionnaire functions. The results show some weaknesses in training teachers in the management function in the design and implementation of strategies to put the contents in an understandable place for students; with its recognition in the context in which it was presented to them; its application and use appropriate to do so; to identify and relate elements. It is observed that students make little use of the different modes of expression, such as verbal, graphic or symbolic as well as the type of treatment type conversion or transformations between registers of a function; which shows that the level of mathematical language they use is not the best.

INTRODUCCIÓN

Es deseable que el profesor en su quehacer esté preparado y dé todo de sí para ayudar a los estudiantes a conectar lo aprendido con la realidad, de tal forma que se provean condiciones óptimas para que ese aprendizaje tenga las mayores probabilidades de éxito. En particular, el trabajo escolar con funciones ha sido problemático desde su concepción hasta sus procesos de enseñanza, quizás en razón de que se acostumbra privilegiar el trabajo procesual y algorítmico sobre el conceptual, primando los procesos y tareas de tipo algebraicos sobre cualquier otros. Esto ha originado que tanto a estudiantes como a profesores les cueste hacer transformaciones tipo conversiones y por tanto sus respuestas las deriven de alguna transformación tipo tratamiento, y en las escasas ocasiones en que realizan una conversión, recurren al registro algebraico, con frecuencia privilegiado en las clases (Guzmán, 1998). En lo reportado por Guzmán se aprecia, en los profesores, una falta de coordinación al tratar de establecer conexiones entre las diferentes representaciones de cada uno de los registros puestos en juego.

Según Peirce (1974) para que una persona pueda representar un objeto matemático, con el fin de comprenderlo, debe establecer fuertes conexiones entre los signos que utiliza para hacerlo. Y las mismas experiencias de las personas ya vienen semiotizadas, es decir, cualquier proceso con intención comunicativa lleva asociado, por naturaleza su sistema de signos. Además, cualquier representación de un objeto matemático en cualquier registro es un modelo del objeto. Pero no todas las representaciones contienen la misma información, hay información entre representaciones de un objeto en diferentes registros donde algunos elementos pueden coincidir, y en otros complementarse, al respecto Duval (2004) considera importante el recurso a varios registros para facilitar la comprensión del concepto estudiado, y en ese mismo sentido D´Amore (2009) señala que en matemáticas, la adquisición conceptual de un objeto pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas

Shulman (2005), Ball, Thames y Phelps (2008) y Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006) sugieren respecto al conocimiento de un profesor que no es solo el conocimiento de los contenidos por un lado y el conocimiento de la pedagogía por el otro, sino una especie de amalgama del conocimiento de los contenidos y la pedagogía que es fundamental para su enseñanza. Ball, Thames y Phelps (2008) proponen seis dominios del conocimiento matemático para enseñar que debe dominar cualquier profesor de matemáticas:

Dominio 1. Conocimiento común del contenido: es el que poseen las personas que usan las matemáticas en cualquier ámbito científico o profesional, no solo de enseñanza. Este dominio involucra el conocimiento y la habilidad que nos permite obtener una respuesta correcta al momento de resolver problemas matemáticos. *Dominio 2. Conocimiento en el horizonte matemático*: permite establecer la manera en que los contenidos matemáticos se relacionan con otros en el currículum y los requerimientos académicos mínimos para el abordaje de un tema determinado, por lo tanto le indica al profesor cuando avanzar o retroceder, este dominio es el que permite establecer la coherencia vertical y horizontal entre los contenidos curriculares de matemáticas. *Dominio 3. Conocimiento especializado del contenido*: es el conocimiento matemático que atiende las especificidades que sólo son atinentes a la acción de enseñar, a las adecuaciones realizadas para transformar un contenido disciplinar en un contenido enseñable. *Dominio 4. Conocimiento del contenido y de los estudiantes*: es el conocimiento que combina el saber acerca

de los estudiantes y el conocer acerca de las matemáticas. Integra conocimiento sobre la cognición de los alumnos y los procesos matemáticos que devienen en ellos. *Dominio 5. Conocimiento del contenido y de la enseñanza*: es el conocimiento matemático para el diseño de tareas, cada una de las cuales requiere una interacción entre la comprensión matemática específica y de las cuestiones pedagógicas que afectan el aprendizaje de los estudiantes, es el conocimiento que permite hacer las transposiciones didácticas. *Dominio 6. Conocimiento del contenido y del currículum*: comprende los fundamentos, enfoques y organización vinculados con los programas y los materiales didácticos diseñados para la enseñanza de asignaturas y contenidos particulares en un nivel educativo determinado.

En la investigación desarrollada se tuvo como objetivo evaluar la dimensión matemática del conocimiento didáctico matemático de profesores en formación al hacer transformaciones de las representaciones de una función. Para ello, se analizan las asociaciones entre las respuestas dadas a cada ítem con el grupo de donde estas provienen, para lo que se usan tablas de contingencias con el coeficiente Chi-Cuadrado de Pearson a un nivel de significancia del 5% (α = 0,05). Aquí solo se analizan las respuestas dadas a dos de las preguntas planteadas en el cuestionario.

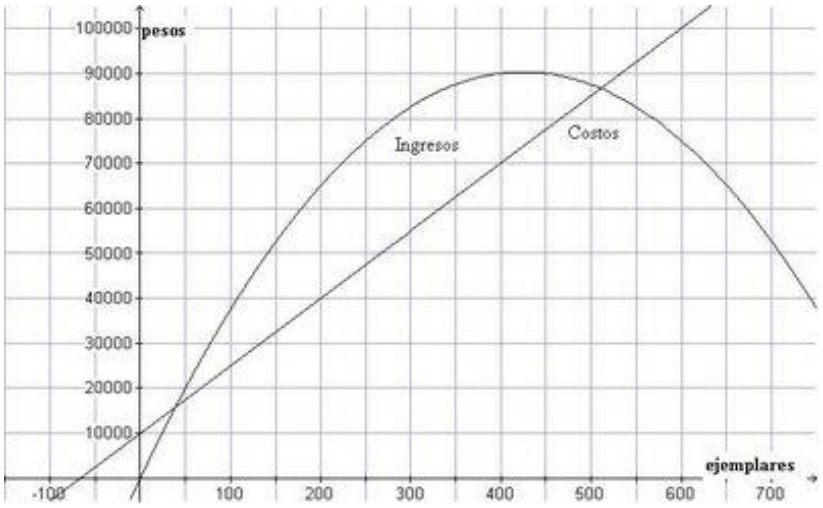
ASPECTOS METODOLÓGICOS

En este trabajo se reportan los hallazgos de un trabajo realizado a finales del segundo semestre del 2014 con 90 estudiantes de un programa de Licenciatura en Matemáticas de una Universidad pública colombiana: 28 del tercer semestre- quienes habían cursado dos cursos de didácticas de las matemáticas y tres cursos de cálculo-; 28 del quinto semestre –quienes habían cursado cuatro cursos de didáctica de las matemáticas y los mismos tres cursos de cálculo que los anteriores y ecuaciones diferenciales-, y 34 del octavo semestre -quienes habían cursado el programa en su totalidad-. Se siguió un proceso similar al de Piaget en sus investigaciones sobre el desarrollo del conocimiento. Es decir, se observó cuidadosamente la metamorfosis de los profesores en formación, mientras se interactuaba con ellos en este proceso. Se hizo un seguimiento a su progreso de estudiantes a profesores, comenzando por analizar la forma en que conciben los conocimientos disciplinares, hasta sus primeros pasos como profesores. A estos estudiantes se les pidió resolver un cuestionario que involucra funciones. Esto según (Shulman, 2005), revela e ilumina los complejos cuerpos de conocimientos y habilidades que se necesitan para que un profesor sea competente. Dicho cuestionario se muestra en la fig. 1. En este cuestionario se parte del registro gráfico como registro principal, hacia los registros aritmético analítico, aritmético algebraico y gráfico, como registros auxiliares. Se escogió esta situación porque permite relacionar las funciones con el contexto sociocultural, lo que facilita establecer congruencias entre elementos de dos o más representaciones de las funciones involucradas, comparar sus respectivos significados y encontrarles sentido al utilizarlos mientras se resuelve la situación.

Se utilizaron las calificaciones los estudiantes de cada grupo al resolver el cuestionario y se analizan las asociaciones entre las respuestas dadas a cada ítem con el grupo de donde estas provienen, esto se hizo utilizando tablas de contingencias con el coeficiente Chi-Cuadrado de Pearson a un nivel de significancia del 5% (α = 0,05). Aquí por razones de espacio solo se analizarán algunas respuestas dadas a dos de las preguntas realizadas en el cuestionario. El enunciado del cuestionario es el que se muestra a continuación.

En la gráfica se muestran los costos de edición y los ingresos por la venta de una edición facsimilar del poema dramático de Alfonso Reyes, 'Ifigenia Cruel'.

Figura 1. Cuestionario base aplicado a los profesores en formación.



Fuente: http://historiasdeactividades.blogspot.com/2007/09/ifigenia-cruel-de-alfonso-reyes.html

Las cuestiones por las que se indaga se enunciarán antes del análisis de cada uno de ellos.

RESULTADOS Y ANÁLISIS

En la presentación de los resultados, para cada ítem se presenta una tripleta (*i*, j, k) donde "*i*" (entre 0 y 28) representa la cantidad de estudiantes del tercer semestre, "j" (entre 0 y 28) la de los del sexto semestre y "k" (entre 0 y 34) la de los del octavo semestre que hicieron referencia al tópico analizado en ese ítem. Y se presenta $P_{(r)i,\ j,\ ó\ k}$ donde r = 3, 6 u 8 semestre, para referir a un profesor en formación de alguno de los tres niveles.

¿Entre qué valores se debe mantener la oferta para obtener Ganancias?

En este ítem se quiso indagar por el dominio de la función Ganancias en el contexto de la situación. Se esperaba que los profesores en formación realizaran un análisis visual, y a partir de ahí, obtuvieran sus respuestas. El 58,88% de los estudiantes presentaron respuestas acertadas a este ítem (13, 20, 20). En este aspecto se evidenció poca concordancia entre las respuestas al interior de los grupos (χ^2 = 7.450, P>0.05), es decir, sin tener en cuenta los aciertos y los errores, el grado de heterogeneidad en las respuestas intra-grupos fue alto, así las respuestas dadas a los demás ítems, al interior de cada grupo se enfocaron hacía aspectos diferentes al interior de cada uno de éstos.

En las Fig. 2 y 3 se muestran las soluciones de los profesores en formación $P_{(6)1}$ y $P_{(8)3}$, respectivamente, dados a varios ítems del cuestionario.

Figura 2. Respuestas dadas por P(6)1 al cuestionario.

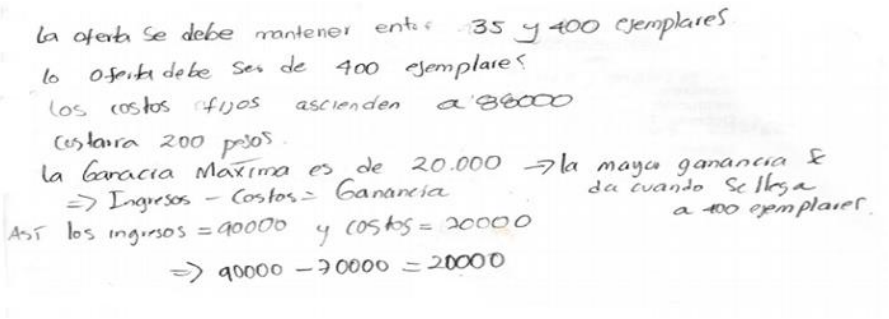
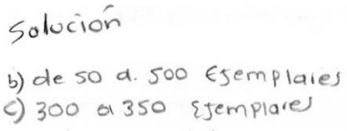


Figura 3. Respuesta dada por P(8)3 al tercer y cuarto ítems del cuestionario.



¿Cuántos ejemplares se deben producir y vender para obtener la máxima Ganancia?

Al indagar por el intervalo donde se obtiene la máxima Ganancia, se esperaba que lo confundieran con el de los máximos Ingresos. Solo el 38,88% de los estudiantes pudo determinar el intervalo donde la Ganancia es máxima (12, 13, 10). La tendencia por grupos fue a dar respuestas similares al interior de éstos (χ^2 = 14.355, P< 0.05), es decir, hubo homogeneidad tanto en aciertos como en desaciertos. En su mayoría (53,33%) los profesores en formación contemplaron como respuesta el intervalo [0, 700] ejemplares, quizás en virtud a que esos eran los extremos visibles en la gráfica, y en concordancia a lo reportado por Hitt (2003) cuando manifiesta que los estudiantes tienen una rara tendencia a dejarse llevar por lo visual, pero a pesar de ello no consideraron las representaciones geométricas como complementarias en su proceso de resolución del problema, y como se esperaba, (14, 11, 23) terminaron confundiendo la Ganancia máxima con los Ingresos máximos. En las Fig. 4 y 5 se muestran las soluciones de los profesores en formación $P_{(3)1}$ y $P_{(6)5}$, respectivamente, dados a varios ítems del cuestionario.

Figura 4. Respuesta dada por P(3)1 a los ítem correspondientes a Ingresos y Ganancias máximas.

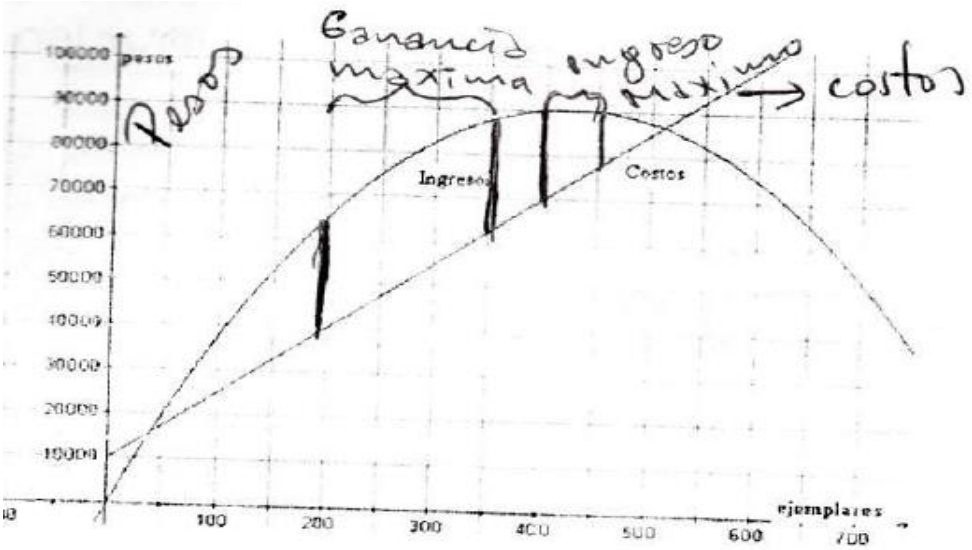
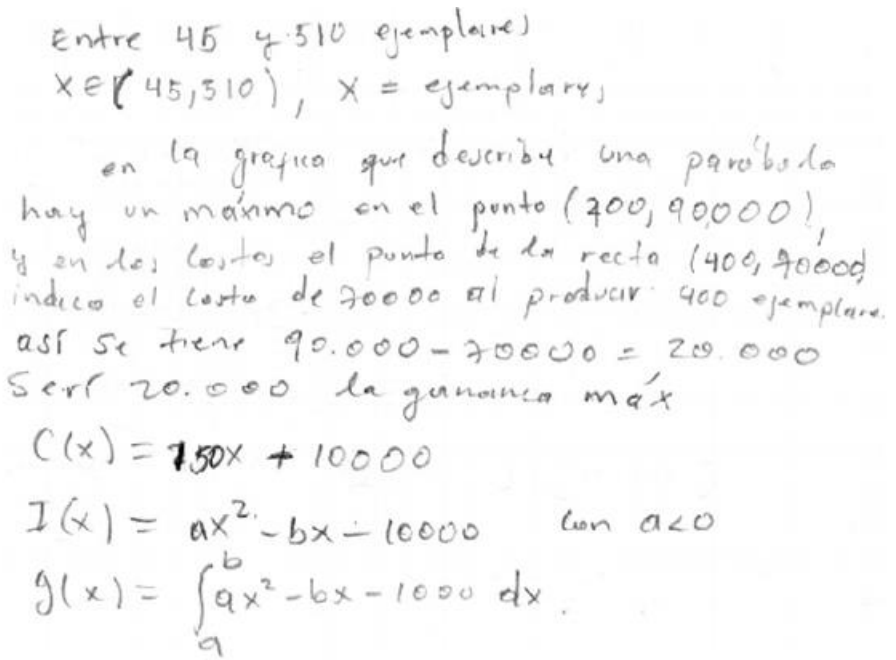


Figura 5. Respuesta dada por P(6)5 a varios ítems del cuestionario.



Los resultados evidencian ciertas debilidades formativas de los futuros profesores en el manejo de la función: en el diseño y ejecución de estrategias que permitan poner los contenidos del concepto en un lugar comprensible para los estudiantes del nivel básico; con el reconocimiento de la función en el contexto donde se les presentó; poca claridad al momento de aplicar los conceptos y de encontrar recursos apropiados para hacerlo; para identificar los elementos de la función y cómo se relacionan. En general se nota en los estudiantes hacen poco uso de los diferentes modos de expresión, tales como el verbal, el gráfico o el simbólico, así como de las transformaciones tipo

conversión o tipo tratamiento entre los registros de una función; lo que denota que el nivel del lenguaje matemático que usan no es el más adecuado. Y según Godino, Batanero y Font (2003, p.66) si una persona "sabe matemáticas ha de ser capaz de usar el lenguaje y conceptos matemáticos para resolver problemas. No es posible dar sentido pleno a los objetos matemáticos si no los relacionamos con los problemas de los que han surgido".

CONCLUSIONES

Se encontraron serias dificultades relacionadas con: la identificación y uso de los interceptos de las funciones sin ayuda gráfica; el análisis de sus valores extremos, así como sus intervalos de crecimiento; para modelarla matemáticamente o realizar su gráfica¸ e identificar la pendiente de una función lineal. La carencia en el conocimiento específico del contenido de las funciones son evidentes y manifiestas cuando los formadores en formación deben reconocer sus elementos en una situación funcional y hacer las transformaciones requeridas en planeación de las clases, en las explicaciones durante la clase o en el análisis de las producciones de los estudiantes luego de la clase. Estos aspectos son requeridos para hacer una transposición didáctica adecuada de este concepto y así, facilitar su comprensión por parte de los estudiantes del nivel que se oriente. También se evidencia la debilidad en el conocimiento matemático para enseñar (Sgreccia y Massa, 2012) esto puede deberse a la falta de oportunidades en el trabajo conceptual del objeto función y su desplazamiento por el habitual trabajo de lo algebraico.

Las dificultades encontradas en los estudiantes, desde los planteamientos de D'Amore (2009), frente a lo que se denomina la renuncia del estudiante a la devolución y a la incapacidad para implicarse en la actividad propuesta, se hallan ligadas a la incapacidad para realizar transformaciones tipo conversión y tipo tratamiento, quizás por falta de una didáctica específica dentro del proceso de formación que reciben a nivel institucional.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ball, D., Thames, M. & Phelps, G. (2008). "Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special?". *Journal of Teacher Education, 59(5), 389-407*.

D'Amore, B. (2009). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Revista Científica*, 11, 150-164.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del conocimiento*. Cali: Universidad del Valle.

Godino, J. Batanero, C. & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada: Universidad de Granada.

Godino, J. Bencomo, D. Font, V. & Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Revista Paradigma, 27(2), 1-24*.

Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 1(1), 5-21.

Hitt, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *10*(2), 213-223.

Peirce, Ch. (1974). *La ciencia de la semiótica*. Buenos Aires: Ediciones Nueva Visión.

Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Revista de currículum y formación del profesorado, 9(2), 1-30*.

Sgreccia,N. & Massa, M. (2012). Conocimiento especializado del contenido' de estudiantes para profesor y docentes noveles de matemáticas. *Revista Educación Matemática, 24(3), 33-66*.

DIFICULTADES DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICA AL INICIARSE EN LA INVESTIGACIÓN Y ESCRITURA CIENTÍFICA

Cecilia Crespo Crespo; Patricia Leston
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" (Argentina)
crccrespo@gmail.com, patricialeston@gmail.com

Palabras clave: investigación, textos científicos, profesores

Key words: research, scientific writing, teachers

RESUMEN: A pesar de la importancia de la presencia en la formación profesional de la lectura y la escritura científica y la presencia de la enseñanza de estos procesos, los docentes presentan dificultades relacionadas con ellos. Este trabajo se centra en analizar problemas y conflictos que manifiestan profesores de matemática que se encuentran estudiando postítulos frente a la investigación y escritura científica en matemática educativa y en la manera en que proponemos trabajar para lograr subsanar esta situación.

ABSTRACT: Scientific communities show consensus about the importance of the presence of scientific reading and writing in the process of professional development. No matter the reasons that are given for this need, teachers seem to find difficulties in this area. This paper focuses on the analysis of the problems and conflicts math's' teachers exhibit while going through a Postgraduate course and are faced with research and scientific writing in the field of educative mathematics; and the ways we try to remediate this.

NUESTRO PUNTO DE PARTIDA

Muchos alumnos de postgrado poseen un buen desempeño durante el período de cursada de materias, pero no finalizan sus estudios abandonando en el momento de escribir su tesis. Este hecho lleva a preguntarnos las causas por las que no terminan su tesis, en oportunidades incluso de insistencia y disponibilidad de sus directores y asesores de tesis.

En algunos casos, a pesar de terminar y defender su investigación, se observa que los egresados no realizan posteriores publicaciones sobre sus resultados o bien de otras investigaciones que realicen con posterioridad. Cabe preguntarse cómo es el proceso de investigación, cómo se inicia en la investigación un profesor y de qué manera logra plasmar en un escrito el desarrollo y resultados de una investigación.

Una de las finalidades de la publicación científica, en particular del área de la matemática educativa, es la difusión de las investigaciones, no sólo para que se constituyan en insumos para otros docentes e investigadores, sino para ponerlos a prueba frente a la comunidad científica.

La escritura de textos científicos posee características propias de la comunidad en que se produce. Muchas de esas características se basan en convenciones y acuerdos explícitos en oportunidades, tácitos en otras, que son propios de la disciplina a la que corresponden.

No sólo en la escritura sino también en la comprensión de artículos de investigación científica emergen dificultades para quien recién se acerca a cierta comunidad científica. Quienes ya hace tiempo hemos tomado contacto con publicaciones y presentaciones científicas no somos a veces conscientes de ello. Por ello consideramos que vale la pena detenernos y realizar una reflexión al respecto.

La comunidad de matemática educativa no es la excepción. Al evaluar propuestas de presentaciones en congresos y de publicación en actas o revistas especializadas es usual hallar ciertos problemas que se repiten en trabajos de diverso origen. Algunas de las dificultades que se presentan son de tipo formal, pero otras son más profundas.

Otro fenómeno digno de mencionar se refiere al análisis de publicaciones propias o de colegas que tienen ya un tiempo desde que fueron escritas. A través de ellos es posible inferir no solo una evolución del estilo propio (Crespo, 2010), sino de nuestra disciplina (Cantoral y Farfán, 2003), sus intereses, convenciones y forma de presentar las ideas. Este dinamismo se pone de manifiesto en disciplinas como la matemática educativa que son jóvenes, pero que en los últimos años han mostrado una gran productividad y el crecimiento de una comunidad a su alrededor.

En los últimos tiempos han aparecido trabajos que se orientan a analizar las dificultades y características de las publicaciones académicas y su importancia en la formación profesional (Carlino, 2005; Adelstein y Kuguel, 2011, Cadena, Narváez y Chacón, 2006).

La noción de textos es concebida como un objeto dinámico y complejo (Adelstein y Kuguel, 2011) orientado a la comunicación que es resultado de operaciones de pensamiento propias de la disciplina correspondiente. Es posible referirse a textos tanto escritos como orales. Nos centraremos en esta oportunidad en los textos escritos, restringiéndonos a los denominados textos especializados en matemática educativa. Estos son productos de la investigación o de experiencias referidas al dominio científico de nuestra disciplina.

Nos centraremos en la iniciación a la investigación en matemática educativa intentando caracterizar este proceso y la manera en la que lo realizan los profesores de matemática que se acercan formalmente a la matemática educativa como disciplina científica. La investigación que se presenta se basa en experiencias realizadas con profesores de matemática que se encuentran cursando el postítulo de Diplomatura Superior en Matemática Educativa en el Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González", de Ciudad de Buenos Aires, Argentina. En esta carrera la aprobación de las materias se basa en muchas oportunidades en la escritura de reportes de trabajos realizados o de artículos. Estos trabajos son realizados por los estudiantes-profesores de manera individual o grupal, según sean las indicaciones de los docentes correspondientes. Asimismo, la carrera finaliza con la escritura y defensa de un trabajo final, de nivel equivalente a una tesis de maestría.

ACERCANDO A LOS PROFESORES A LA MATEMÁTICA EDUCATIVA

En la Diplomatura Superior en Matemática Educativa, los alumnos, que son profesores de matemática en ejercicio de su carrera, tienen un acercamiento a esta disciplina diferente al que tuvieron en su formación de base. En esta carrera, deben reconocer a la matemática educativa como una disciplina científica que les permite comprender la dinámica de su aula y son introducidos en la investigación desde las distintas visiones de la matemática educativa. Se trata de una carrera bastante nueva, ya que se comenzó a impartir en 2011 y no posee muchos egresados aún. Este hecho originó la reflexión de las docentes a cargo de las distintas materias y en la actualidad, en todas las asignaturas se orientan en esta línea a través de actividades diversas. Algunas de esas actividades son las siguientes:

A partir de la lectura de publicaciones de matemática educativa, los alumnos deben realizar reportes de lectura y análisis y comparación entre distintos trabajos surgidos de investigaciones diversas. En algunos casos, se les propone "reproducir" investigaciones, debiendo realizar el análisis y organización de datos obtenidos y posteriormente identificación de diferencias con las investigaciones originales y las dificultades que encontraron en este proceso. También como tareas de algunas asignaturas, deben escribir artículos, tanto de manera grupal e individual. Como trabajo final de la carrera se exige la realización de una investigación y la escritura de un trabajo al estilo tesis. Tomando como base algunos trabajos realizados e incluso el trabajo final, los estudiantes realizan reportes de investigación orales que presentan en jornadas y congresos de la disciplina y escritos que envían a revistas para su publicación.

A continuación se describen algunas de las experiencias que han dado origen a estos productos.

a) Reproduciendo investigaciones, detección de diferencias en investigaciones

En la asignatura Perspectivas epistemológicas de la matemática, uno de los trabajos prácticos consiste en reproducir investigaciones que deben leer previamente y cuyos datos a analizar son aportados por la docente de esta materia.

Tras la lectura de (Crespo y Ponteville, 2002), deben organizar un conjunto de respuestas a las preguntas ¿Qué es la matemática? ¿Qué es hacer matemática? y ¿Qué es enseñar matemática?, que han sido respondidas por profesores de matemática que se encuentran cursando la diplomatura. La investigación original reporta el análisis de las respuestas a las mismas preguntas, pero a través de preguntas de selección múltiple, presentadas a estudiantes del último año de Profesorado de Matemática y a profesores de matemática. Por lo tanto, en este trabajo los

estudiantes deberán identificar que las muestras son sustancialmente diferentes, tanto por el instrumento utilizado como por las poblaciones intervinientes.

Previo a discutir conclusiones de este trabajo, los estudiantes realizan otro trabajo práctico dirigido a identificar las representaciones sociales acerca de la matemática. Para ello deben leer (Martínez Sierra, 2011), que indaga acerca de las representaciones de la matemática de estudiantes de escuela secundaria en México. Los datos sobre los que deben trabajar en este caso corresponden a la misma consigna que la investigación original: Enumerar 5 palabras o expresiones que les surgieran ante la palabra matemática. Pero en este caso, también reciben respuestas dadas por profesores de matemática que se encuentran cursando la diplomatura.

En la organización de la información buscaron primeramente copiar formas de organizarlo del artículo que leyeron, cuando no lo logran en el primer caso, buscan formas alternativas. Muestran dificultades en la extracción de conclusiones y en el análisis de la información, prefiriendo apoyarse en análisis cuantitativo. Finalmente identifican diferencias de resultados en relación a las investigaciones originales en relación a los instrumentos para obtención de datos, pero generalmente no llegan a identificar que se trata de una muestra sesgada y que esta es la causa de obtener respuestas muy distintas de los casos originales. Tienen menos dificultades en organizar la información del segundo trabajo práctico, ya que los datos fueron obtenidos a través de igual consigna y por lo tanto pueden realizar un procesamiento similar al de la investigación ya publicada.

b) Lecturas, comparación y reportes de lectura

En la asignatura Naturaleza del pensamiento geométrico, se trabaja en uno de sus trabajos prácticos a partir de la lectura del primer capítulo de (Blanco, 2009) y (Torregosa y Quesada, 2007). Los estudiantes, deben comparar las definiciones de visualización que allí se presentan. A continuación realizan un reporte de lectura individual de a lo sumo 1000 palabras de ese capítulo donde deben constar las ideas principales del trabajo y la comparación con el segundo texto, una reflexión crítica sobre lo leído y una reflexión en donde se acerque esto al aula.

Los reportes de lectura muestran el nivel de comprensión de los textos de matemática educativa y ciertas dificultades al tener que restringirse a una cantidad acotada de palabras.

c) Análisis de libros de texto

En la misma asignatura que el trabajo anterior, realizan análisis de libros de texto. Para ello se le asigna a cada grupo un capítulo de un libro de texto de uso habitual en la escuela media y deben analizar la presentación del contenido en relación a: definiciones, actividades (tipos y cantidad), lenguaje, ejemplos, nivel de dificultad, coherencia en el desarrollo, elementos gráficos, concordancia entre las explicaciones que se dan y las actividades que se proponen y coherencia con los lineamientos de contenidos del diseño curricular de Ciudad de Buenos Aires.

Este análisis debe ser volcado en un informe escrito de entre 1000 y 2000 palabras y un estudio de la propuesta sobre la base de la socioepistemología, considerando los elementos discutidos en clase y una opinión personal sobre la propuesta. En este informe, deben constar además 5 actividades o problemas que resulten interesantes o poco habituales, con la respectiva justificación de la selección.

d) Contrastación y análisis

A partir de la lectura de (Rey, 2004), en Naturaleza del pensamiento geométrico, los estudiantes deben analizar la propuesta que se hace al final del artículo que se refiere a la presencia de prototipos de representación en el aula de geometría y, diseñar una serie de actividades con representaciones que utilicen la propuesta para un objeto geométrico. Asimismo, en su aula deben pedir a sus alumnos que realicen representaciones gráficas de ese elemento que seleccionó y analizar las características de los mismos en cuanto a la presencia de prototipos de representación.

La actividad se completa buscando tres libros de texto en los que se presenten temas de geometría y analizando si lo que se da o no son imágenes prototípicas. Las conclusiones deben ser expuestas a sus compañeros a través de una presentación que incluya los gráficos correspondientes.

Las presentaciones que realizan son diversas en relación al programa que utilizan y en ellas muestran que identifican claramente la presencia de prototipos, así como su valor en los primeros momentos del proceso de visualización y las dificultades que pueden provocarse en el aula a partir de su uso reiterado.

e) Análisis de artículos

Una de las actividades que se plantea a los estudiantes en la asignatura Naturaleza del pensamiento algebraico y aleatorio, pide que a continuación de la lectura de (Arrieta y Díaz, 2015), realicen cuatro preguntas sobre este texto para guiar la discusión con sus compañeros. El trabajo se hará sobre un documento colaborativo al que ya han sido invitados. De esta manera, los alumnos no sólo deben realizar la lectura comprensiva del texto, sino además identificar cuáles son los posibles núcleos del mismo. Tras la discusión grupal, y sobre las actividades y reflexiones que surgen, se les pide una presentación utilizando diversos software adecuados a tal fin. En estas producciones ponen en juego la creatividad y se preparan para la exposición de trabajos en eventos con pares académicos.

f) Realización de una investigación

La asignatura Introducción a la investigación en el aula de matemática, se orienta a la realización de trabajo final de la carrera. Durante las primeras clases se discuten características y posibilidades de las distintas etapas que deben realizarse en la realización de una investigación en el área de matemática educativa. A continuación, se trabajan estas etapas por parte de los alumnos a través de sus propuestas que son discutidas y analizadas de manera grupal por sus compañeros y el docente de la materia a través de un proceso continuo de retroalimentación que permite a los investigadores nóveles encaminar su trabajo. Se parte de la selección de tema, identificando situación didáctica que puedan dar origen a la investigación. Se plantean preguntas de investigación e hipótesis. Se realiza la búsqueda del estado del arte del tema elegido por cada estudiante y éste debe seleccionar su marco teórico, organizar núcleos de la investigación y metodología de investigación. A partir de estos elementos hacen el diseño de herramientas recolección de datos, ponen en práctica la herramienta diseñada y organizan de datos. Durante este proceso, deben ir reportando por escrito cada uno de los avances realizados. La idea es que al terminar de cursar la asignatura, que es anual, tomando como base estos avances, puedan extraer las conclusiones correspondientes y elaborar el informe final que tiene características de tesis aunque no recibe este nombre. La aprobación de la asignatura y culminación de la carrera consiste en la exposición y defensa de la investigación realizada frente a un tribunal examinador

constituido por profesores de la carrera y generalmente con la presencia de sus compañeros, alumnos y exalumnos de la carrera.

Por el momento, los trabajos finales que han sido terminados y defendidos son:

- Daniela Veiga, 2013: *Estudio socioepistemológico del cero. El caso de la división.*
- Raquel Andreoni, 2014 : *Los puntos en el plano cartesiano. Dificultades en la graficación de puntos en el plano cartesiano en la escuela media*.
- Romina Formento, 2014: *La multiplicación de fracciones en contextos de proporcionalidad. Posibles raíces de los errores para completar tablas, en estudiantes de 1° año de la escuela secundaria*.
- Ana María Zamagni, 2015: *Dificultades de los estudiantes de Geometría en la construcción de triángulos, en hoja lisa, con regla no graduada y compás.*

En la actualidad, se encuentran en curso de manera activa las investigaciones de los seis alumnos que están terminando de cursar la carrera y dos de años anteriores.

Algunas características comunes a estos trabajos, permiten perfilar intereses de los profesores que cursan este postítulo. Se trata de investigaciones situadas en el aula, basadas en temáticas originadas en experiencias docentes propias, siendo los trabajos de campo realizados en el aula propia. En estas investigaciones se puede detectar una gran sensibilidad por lo social y su influencia en el aula. Las autoras descreyeron inicialmente de sí mismas para realizar la investigación y en algún momento de la investigación, se alejaron de ella, retomando posteriormente su trabajo tras “madurar” ideas. Afirman que sus investigaciones cambiaron de curso en relación a lo que pensaron en el inicio y reconocen que modificaron su visión del aula.

g) Escritura de un artículo para una presentación en un congreso

La presentación de artículos para su exposición en congresos y eventos de matemática educativa, es una de las actividades que si bien se les propone y favorece, resulta de gran dificultad para los estudiantes, ya que tienen temor de exponer ante pares académicos que no conocen o ante investigadores de mayor experiencia. Por ello se ha tratado de que esta sea una de las actividades que surjan como exigencia en alguna de las asignaturas que cursan.

Una de estas experiencias se realiza en Naturaleza del pensamiento algebraico y aleatorio. En base a los contenidos de la escuela secundaria, se les pide seleccionar un tema de álgebra que enseñen o hayan enseñado en algún momento de su práctica docente. A partir de este, definir el abordaje que se le va a dar al trabajo, realizando un análisis de las propuestas de uno o más libros de texto de escuela media, el relevamiento de dificultades que los alumnos enfrentan habitualmente al enfrentarse a ese contenido, la revisión histórica del tema con la intención de modificar el discurso matemático escolar y la implementación de una secuencia o actividad (propia, de un libro o investigación, nueva o ya usada) para reportar resultados y analizar las causas de esas dificultades. También realizan una búsqueda de bibliografía relacionada con el tema en Actas de Carem, Revista Premisa, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa y otras fuentes. La idea es que esos textos permitan s*aber qué se ha hecho hasta ahora en relación a ese tema, encontrar elementos teóricos conceptuales que permitan dar sustento a la investigación y detectar ideas que sirvan de punto de partida para la propuesta.* Estas actividades son pautadas en fechas, ya que se realizan con miras a alguna convocatoria a un congreso, por lo que deben cumplir con

plazos y formatos de escritura y dar como producto un artículo (extenso y resumen) que es enviado a evaluación y recibe posteriormente los comentarios y apreciaciones de los árbitros correspondientes a los que los envíen los organizadores del congreso correspondiente.

Como resultado de esta actividad, han sido expuestos por los estudiantes 2 comunicaciones breves en el X Congreso Argentino de Educación Matemática (XCAREM), llevado a cabo en Buenos Aires en octubre de 2012 y publicados en el Acta correspondiente.

En algunas oportunidades, el trabajo que realizan algunos estudiantes para aprobar alguna materia son también enviados para su exposición en alguna jornada de matemática educativa.

También los trabajos finales de la carrera han sido expuestos en congresos y eventos de matemática educativa. En este caso, la escritura de los extensos no se realiza de una manera tan escolarizada, pues se trata ya de egresados de la diplomatura. En las Cuartas Jornadas del Departamento de Matemática del Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González”, realizadas en mayo de 2014, se expusieron tres de estos trabajos y en las Quintas otros tres de ellos. En la Decimoséptima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, realizada en Buenos Aires en julio 2013, una de las conferencias consistió en la exposición de uno de los trabajos finales de la diplomatura y luego su extenso fue publicado en Alme 27.

h) Construcción de un artículo para publicar en una revista

Se les propone a los estudiantes como producción final para la materia Naturaleza del pensamiento algebraico y del pensamiento aleatorio, producir un artículo de investigación que será enviado a la revista Premisa para ser evaluado, y posteriormente, con los ajustes necesarios realizados, publicado en esta publicación de Sociedad Argentina de Educación Matemática (Soarem). Lo primero que se les propone hacer es revisar la revista en la cual se desea publicar. Con esa idea, deben recorrer la página de Premisa para poder detectar qué artículos hay de álgebra (o Pensamiento Aleatorio) y categorizarlos de acuerdo al contenido y abordaje. Deben además revisar las Normas de Publicación. En esta etapa, se les solicita hacer en resumen, identificando aquellos artículos pertinentes a esta materia, categorizarlos de acuerdo al abordaje del contenido organizado la información en una tabla o instrumento similar. Sobre la base de los contenidos de la escuela, se les pide seleccionar un tema de álgebra que enseñen o hayan enseñado en algún momento de su práctica docente, teniendo en cuenta que el tema debe estar acotado a una problemática y circunscripto a un escenario particular. En la clase siguiente, y de acuerdo a las categorías detectadas en los artículos revisados o las propuestas que se hacen en las normas de publicación, se les indica que es necesario decidir el tipo de artículo que van a escribir. A partir de la búsqueda de artículos relacionados con el tema en diversas fuentes, deben comprender la importancia de saber qué se ha hecho hasta ahora en relación a ese tema, encontrar elementos teóricos conceptuales que permitan dar sustento a la propuesta del escrito y comparar con experiencias realizadas. La escritura en este trabajo es pautada para orientar a quienes nunca han realizado escritura de publicaciones y poseen temores al respecto, pero también para que cumplan objetivos alcanzables. Se les sugiere cantidad de párrafos en los que describen cada parte del artículo (introducción, marco conceptual, planteo de problemáticas, estado del arte, desarrollo según el tema propuesto, concusiones, etc.). Se hace hincapié en la importancia de los formatos de referencias bibliográficas según las exigencias de la revista. El producto final incluye la redacción del resumen y formato de la propuesta de acuerdo con las normas de publicación.

COMENTARIOS FINALES

Los profesores que recién se están iniciando en la investigación, muestran dificultades en diferenciar marcos teóricos de marcos conceptuales, en decidir formas de organización de datos y realizar análisis de la información. Inicialmente se sienten más cómodos realizando análisis cuantitativos que cualitativos.

Tenemos necesidad de no mostrar investigaciones alejadas de los docentes. Es fundamental involucrar a los profesores en las investigaciones centradas en sus aulas, para de esta manera cambiar la mirada del aula que permita centrarse en los problemas actuales y resignificar y rediseñar el discurso matemático escolar.

A partir de esta experiencia, es indispensable reconocer la importancia del acompañamiento a quienes se inician en la investigación y favorecer el reconocimiento de convenciones y acuerdos explícitos o tácitos propios de la disciplina. Mediante este acompañamiento, es posible trabajar aspectos de análisis, reproducción y realización de investigaciones y hacer que los profesores que se inician en la investigación en matemática educativa se sientan partícipes de la comunidad de matemática educativa.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adelstein, A. y Kuguel, O. (2011). *Los textos académicos en el nivel universitario*. Buenos Aires: Universidad de General Sarmiento.

Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 18* (1), 19-48.

Blanco, H. (2009). *Representaciones gráficas de cuerpos geométricos. Un análisis de los cuerpos a través de sus representaciones.* Tesis de maestría no publicada. CICATA- IPN, México.

Cadena, S; Narváez, E y Chacón, M. (2006). Ideas para una propuesta de formación de maestros universitarios, sobre la comprensión de textos escritos académicos y las tareas escritas en asignaturas de fundamentación profesional. *Habladurías*, 4, 84-105.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 6 (1), 27-40.

Carlino, P. (2005). *Escribir, leer, y aprender en la universidad. Una introducción a la alfabetización académica*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.

Crespo, C. (2010). Una mirada sobre la evolución de una investigación acerca de argumentaciones y demostraciones en el aula de matemática. *En* G. Buendía (Ed.), *Publicación de Aniversario. A Diez Años del Posgrado en Línea en Matemática Educativa del IPN* (pp-71-96). México Instituto Politécnico Nacional. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada.

Crespo, C. y Ponteville, Ch. (2002). *Pensar en matemática para enseñar matemática publicado en* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 15 (2), 1163-1168 México: Iberoamérica.

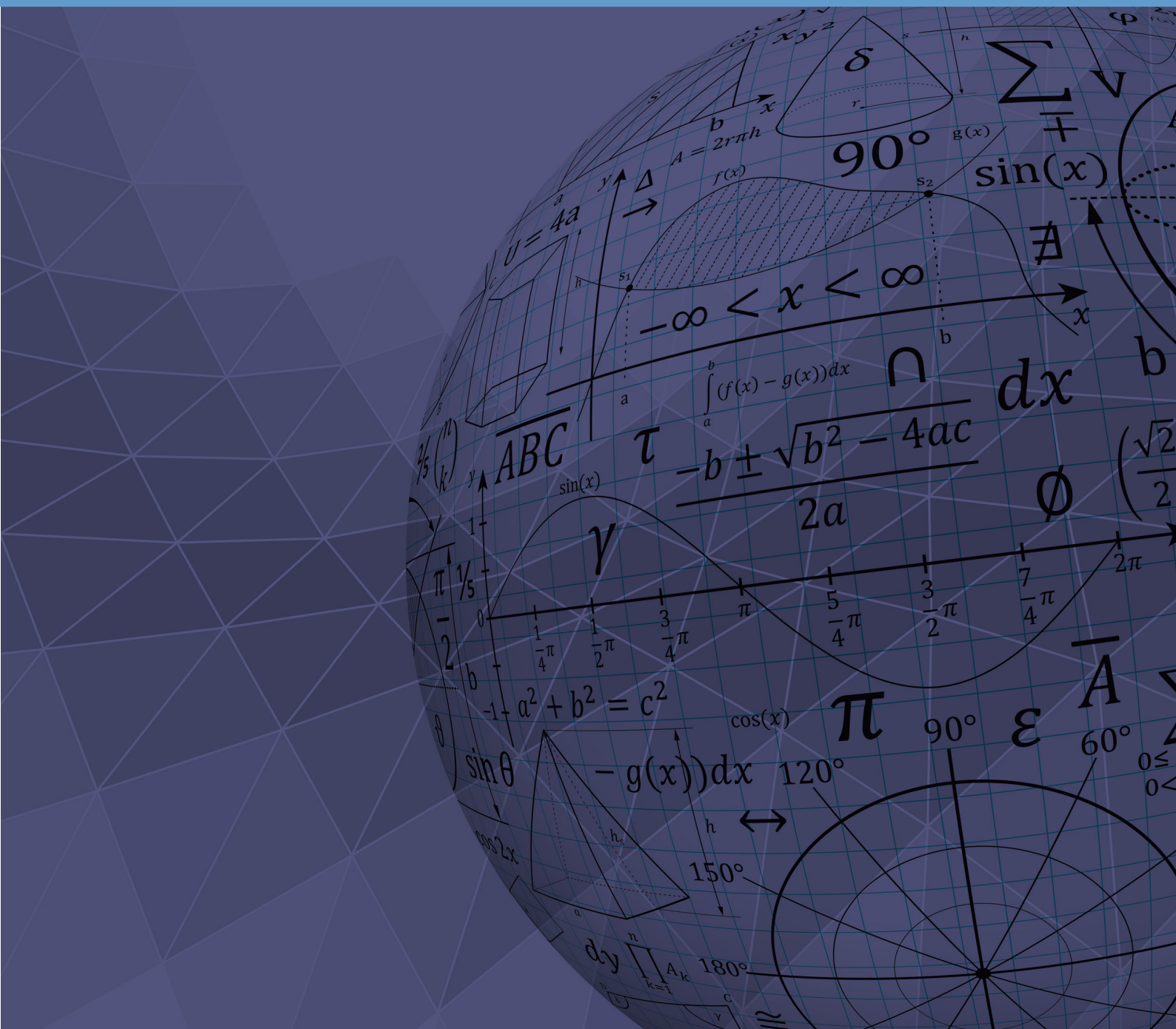
Martínez, G. (2011). Representaciones sociales que sobre las matemáticas tienen estudiantes de nivel medio superior mexicano. *Perfiles educativos XXXIII, 123, 90.109.*

Rey, J. L. (2004). Dificultades conceptuales generadas por los prototipos geométricos o cuando los modelos ayudan pero no tanto. *Premisa 6 (22),* 3-12.

Torregosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10 (02)*, 275-300.

CAPÍTULO 5

USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS



EFECTOS QUE TIENE LA INCORPORACIÓN DE GRÁFICAS EN EL TRATAMIENTO DE ALGUNOS CONCEPTOS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

María Patricia Colín Uribe, Celia Araceli Islas Salomón, Fernando Morales Téllez
Instituto Politécnico Nacional, CECyT NB.(México)
patricia_c_u@hotmail.com, pcolin@ipn.mx, arissass@hotmail.com, fernando_morales_tellez@hotmail.com

Palabras clave: gráfica, visualización, Cálculo Diferencial, dominio, límite.

Key words: graphics, visualization, differential calculus , domain limit

RESUMEN: Algunas investigaciones en el campo de la Matemática Educativa demuestran que cuando un estudiante logra incorporar elementos visuales como parte de su actividad matemática, podrá transitar entre las diversas representaciones: algebraicas, geométricas, numéricas y verbales. En el Instituto Politécnico Nacional (IPN) desarrollamos un proyecto de investigación cuyo objetivo fue la elaboración de material didáctico a base de gráficos de funciones, que sirviera de apoyo para trabajar en el Nivel Medio Superior (NMS) conceptos de funciones y límites en la materia de Cálculo Diferencial. Este trabajo fue realizado, primero, rescatando de la literatura especializada en Matemática Educativa situaciones de aprendizaje y artículos de investigación relativos a este tema. Después, elaboramos el material en base a nuestros hallazgos y experiencia profesional y al final, aplicamos a un grupo de estudiantes. Finalmente observamos los efectos que este material tuvo en su forma de pensar.

ABSTRACT: Some research in the field of Mathematics Education show that when a student manages to incorporate visual elements as part of their mathematical activity, he can move between many representations: algebraic, geometric, numerical and verbal. In the Instituto Politécnico Nacional (IPN) we have developed a research project whose objective was the development of teaching material based on graphs of functions, which serve to support teacher and student work on the high Scholl (NMS) functions and concepts of limits when we work with Differential calculus. This work was done , first , rescuing specialized in Mathematics Education learning situations and research articles on this subject literature. Then we developed the material basis of our findings and work experience and eventually apply to a group of students. Finally we look at the effects that this material had on their thinking

INTRODUCCIÓN

En el Nivel Medio Superior (NMS), la enseñanza del Cálculo tiende a sobrevalorar los procedimientos analíticos y la algoritmización, dejando de lado a los argumentos visuales por no considerarlos como puramente "matemáticos", a pesar de que la visualización es una habilidad en los seres humanos que, por naturaleza siempre será empleada para representar una parte o la aproximación de la realidad que se estudia.

Algunas investigaciones en el campo de la Educación Matemática, demuestran que cuando un estudiante logra incorporar elementos visuales como parte de su actividad matemática, podrá transitar entre las diversas representaciones: algebraicas, geométricas, numéricas y verbales y de esta forma, darle un significado mas rico al saber en cuestión.

Por esta razón, creemos que es necesario elaborar materiales didácticos o de apoyo para poder desarrollar esta habilidad.

Este trabajo tiene como objetivo, mostrar las diferencias que existen entre un grupo de estudiantes que hay llevado un curso de cálculo diferencial basado en elementos visuales, y un grupo de estudiantes que sólo recibieron instrucción meramente analítica.

Nuestro interés se centrará a conceptos como límites, dominio, rango, par, impar, intervalos de crecimiento y decrecimiento de funciones con características especiales.

MARCO TEÓRICO

La teoría de Duval plantea en lo general que las representaciones semióticas utilizadas normalmente en matemáticas, no se generan de manera aislada, sino que pertenecen a sistemas de representación que tienen su propia estructura interna, sus propias limitaciones de funcionamiento y de significado, que pueden ser caracterizadas en función de las actividades cognitivas que permiten desarrollar. Estas actividades cognitivas condicionan la estructura misma del sistema de representación.

Consideraremos el concepto de función en el marco teórico de las representaciones semióticas, en el cual se observa las diferentes representaciones que corresponden a este concepto: como: descripción en lengua natural (enunciado), tablas, graficas, fórmulas, y modelos geométricos. Cada modalidad tiene sus propiedades, reglas y significación; en algunos estudios se ha señalado que las traslaciones del sistema gráfico a las representaciones algebraicas son las que causan mayores dificultades (Duval, 1998, p.181).

Para comprender un concepto es necesaria la coordinación de los diferentes registros de representación, pues con uno solo (mono–registro) no se obtiene la comprensión integral del concepto. Sin embargo, la conversión entre registros no se realiza en forma espontánea, a menos que se trate de representaciones congruentes entre el registro de partida y el de llegada. La coordinación de los diferentes registros de representaciones aparece como una condición fundamental para el aprendizaje en aquellas disciplinas donde los datos son representaciones semióticas (Duval 1998).

Otro aspecto central de la teoría presentada por Duval, plantea que "la comprensión (integradora) de un contenido conceptual, reposa en la coordinación de al menos dos registros de

representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión" (Duval, 1998).

En palabras del propio Duval

> En los sujetos, una representación puede funcionar verdaderamente como representación, es decir, darle acceso al objeto representado, sólo cuando se cumplen dos condiciones: que dispongan de al menos dos sistemas semióticos diferentes para producir la representación de un objeto, de una representación, de un proceso... y que puedan convertir "espontáneamente" de un sistema semiótico a otro las representaciones producidas, sin siquiera notarlo

Por lo tanto, no basta con la exposición del docente para que el estudiante pueda adquirir un concepto, pues debe manipular diferentes registros de representación para poder adquirir el conocimiento, y para esto las actividades o ejercicios propuestos a los estudiantes son fundamentales. Por otra parte, no bastará con presentar y proponer actividades que apunten a aprehensión o tratamiento de registros sino que necesariamente deben implicar conversión, pues no existirá comprensión si no se maneja al menos dos registros semióticos diferentes del mismo concepto.

DESARROLLO

Para lograr nuestro objetivo, realizamos las siguientes actividades:

a) Estado del arte relacionado con la propuesta de investigación: Realizamos la lectura y el análisis de artículos y libros de Cálculo Diferencial con el objetivo de conocer secuencias o actividades didácticas que ya han desarrollado otros investigadores en el área de la Educación Matemática.

i) Los usos de las gráficas que generan las prácticas institucionales en el bachillerato; muestran que el funcionamiento y las formas de las gráficas mantienen una relación dialéctica, incluso en los libros de texto, y se van resignificando para dar lugar a otros funcionamientos y formas gráficas, lo cual expresa el desarrollo del uso de la gráfica en tres aspectos: los métodos de uso de la graficación, las comprensiones de las gráficas y su funcionalidad. (Cordero, F., Cen, C. y Suarez, L., 2010).

ii) Farfán, R.M. (2000) muestra el trabajo con varias funciones (exponencial, logarítmica, etc.) pero no encontramos ninguna secuencia que se haya aplicado respecto a gráficos relativos a limites y dominio.

iii) Cantoral, R. y Montiel, G. (2001) muestran de una forma particular, el entender a la visualización de las funciones, pero utilizando un ejemplo solamente: la construcción del polinomio de interpolación de Lagrange mediante estrategias de visualización.

iv) Font, V., Bolite, J. & Acevedo, J. I. (2010), muestran los fenómenos que observaron en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la lectura y elaboración de gráficos de funciones en el nivel secundaria. Indagó las metáforas que utiliza el profesor para explicar representaciones gráficas.

b) Seleccionar las secuencias de aprendizaje a aplicar. Una vez revisados los textos y artículos, tendríamos que seleccionar las secuencias o actividades que pudiéramos aplicar a estudiantes. Como ya lo mencionamos, lo que nos mostró nuestro Estado del Arte es que no hay material gráfico aún desarrollado para trabajar conceptos del Cálculo Diferencial con gráficos en el Nivel Medio Superior, pero si se trabajan algunos tipos de gráficas para niveles superiores. Ante este escenario, tuvimos que diseñar nuestros propios ejemplos y actividades para aplicarlas a los estudiantes. Elegimos trabajar diversas funciones, algebraicas, racionales, trigonométricas y racionales.

Elaboramos una secuencia de actividades que incluía las gráficas de las funciones que se muestran a continuación.

$$y = sen\ x \qquad f(x) = x^4 - 2x^2$$

$$j(x) = \frac{x-1}{x^2+x-2} \qquad g(x) = \sqrt{x^2-9}$$

$$h(x) = x^2 + 1 \qquad k(x) = \sqrt{25-x^2}$$

La secuencia estaba dividida en 4 actividades. Cada actividad tenía la siguiente estructura:

a) Inicialmente se les daba un breve recordatorio del tema para recordarlo

b) Después les pedía resolver algebraicamente una serie de ejercicios.

Figura 1.

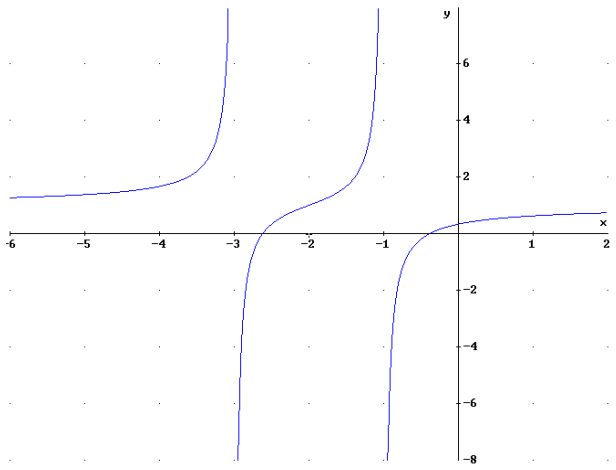


Figura 2.

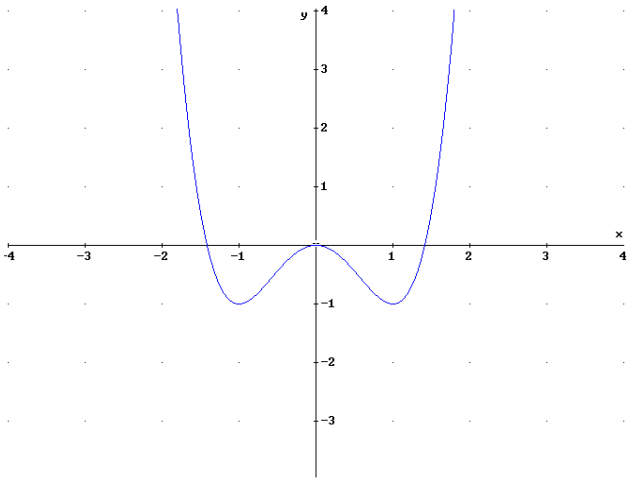


Figura 3.

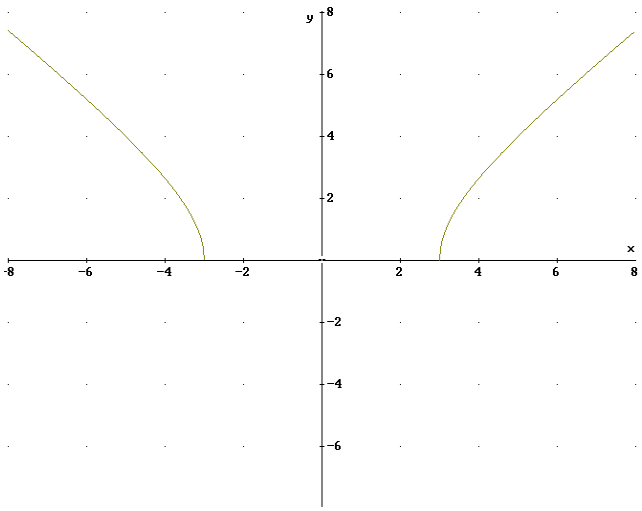
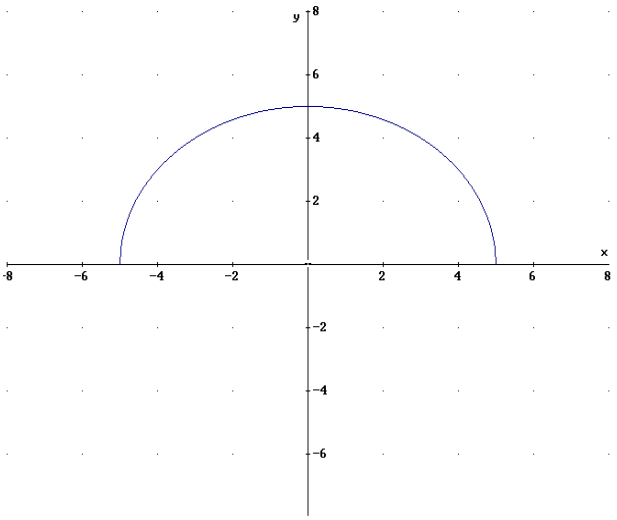


Figura 4.



d) Finalmente se les pedía resolver gráficamente.

c) Aplicación de las situaciones de aprendizaje: Se trabajó con 8 grupos de estudiantes de 5º semestre que ya habían llevado el curso de Cálculo Diferencial. Los grupos estaban divididos en 4 que llevaron instrucción tradicional (privilegiaban la algoritmizacion) y 4 que llevaron una instrucción utilizando gráficos, visualización y algoritmizacion. Los estudiantes pertenecían a las diferentes carreras técnicas que se imparten en el Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos (CECyT) "Narciso Bassols" del Instituto Politécnico Nacional: técnico en plásticos, técnico en mantenimiento industrial, técnico en computación y técnico en sistemas automotrices, todas ellas orientadas al área de las Físico Matemáticas.

A cada grupo se le dio un tiempo de 40 minutos para resolver cada una de las actividades. Los estudiantes podían interactuar entre sí para poder responder los ejercicios. Sólo dos de las actividades fueron videograbadas y, para comprender las situaciones que no estaban claras en el escrito, recurrimos a la cinta grabada.

d) Análisis de resultados Se realizó el análisis de las respuestas de los estudiantes. Los resultados que se obtuvieron se muestran en las tablas 1,2, 3 y 4. Cada tabla representa el área de los estudiantes que fueron entrevistados y están separados respecto a la forma en la que fueron instruidos.

La primera columna indica el número de estudiante que fue entrevistado y las columnas siguientes el porcentaje de aciertos que tuvo al resolver cada una de las actividades de la secuencia.

Tabla 1. Porcentaje de aciertos obtenidos por los estudiantes al realizar las 4 actividades de la secuencia. Área: Técnico en plásticos

Área de los estudiantes: Técnico en Plásticos					
Estudiante	% de aciertos de la Actividad				Forma de enseñanza
	1	2	3	4	
1	80	70	95	50	Tradicional (algoritmización)
2	100	100	100	60	
3	90	86	100	40	
4	90	100	80	75	Gráfica, algebraica y visual
5	100	60	100	90	
6	95	100	100	80	

Tabla 2. Porcentaje de aciertos obtenidos por los estudiantes al realizar las 4 actividades de la secuencia. Área: Técnico en mantenimiento industrial

Área de los estudiantes: Técnico en Mantenimiento Industrial					
Estudiante	% de aciertos de la Actividad				Forma de enseñanza
	1	2	3	4	
1	90	50	100	66	Tradicional (algoritmización)
2	100	80	100	66	
3	100	100	100	75	
4	85	70	100	70	Gráfica, algebraica y visual
5	100	95	85	86	
6	100	90	100	92	

Tabla 3. Porcentaje de aciertos obtenidos por los estudiantes al realizar las 4 actividades de la secuencia. Área: Técnico en computación

Área de los estudiantes: Técnico en Computación					
Estudiante	% de aciertos de la Actividad				Forma de enseñanza
	1	2	3	4	
1	90	70	100	30	Tradicional (algoritmización)
2	100	80	100	42	
3	95	75	100	85	
4	85	70	90	80	Gráfica, algebraica y visual
5	95	100	100	100	
6	100	100	100	66	

Tabla 4. Porcentaje de aciertos obtenidos por los estudiantes al realizar las 4 actividades de la secuencia. Área: Técnico en sistemas automotrices

Área de los estudiantes: Técnico en Sistemas Automotrices					
Estudiante	% de aciertos de la Actividad				Forma de enseñanza
	1	2	3	4	
1	85	40	90	40	Tradicional (algoritmización)
2	90	60	100	50	
3	100	75	95	80	
4	100	93	100	70	Gráfica, algebraica y visual
5	100	95	95	60	
6	100	92	95	75	

En cuanto al tiempo para responder la secuencia, se les dieron 40 minutos para cada una de las actividades. Una vez realizada la actividad, se obtuvo el promedio de tiempo que se muestra en la tabla 2 para cada actividad.

Tabla 5. Tiempo promedio por grupo en resolver la secuencia de actividades

Área	Tiempo en minutos en realizar la Actividad			
	1	2	3	4
Técnico en plásticos	10.5	11	4.75	6.75
Técnico en mantenimiento Industrial	27.5	9.75	6	19
Técnico en computación	14.5	19.5	7.25	9.75
Técnico en sistemas automotrices	17.2	12.3	5.4	12.45

RESULTADOS

Los resultados de este trabajo exploratorio nos dan pie para elaborar una nueva secuencia de actividades para, posteriormente, realizar una puesta en escena de las secuencias de actividades basadas en gráficos, así como la articulación de un curso de Cálculo Diferencial en el cual se trabaje mayormente un contexto gráfico que uno algebraico.

Este trabajo de investigación nos da pauta para aplicar a grupos mas grandes de estudiantes este tipo de secuencias de actividades, las cuales contengan mas gráficos y con el objetivo de verificar si, a través del acercamiento del estudiante a un contexto gráfico, el aprendizaje de conceptos de Cálculo Diferencial son más significativos para el.

Finalmente, contamos con los datos necesarios para el rediseño y puesta en escena de por lo menos una situación de aprendizaje, la cual servirá para introducir un contexto gráfico en la enseñanza del Cálculo Diferencial.

CONCLUSIONES

A partir de las respuestas de los estudiantes, podemos tener las siguientes conclusiones en la aplicación de esta secuencia de aprendizaje

- Los alumnos demostraron mayor facilidad para resolver las actividades gráficas que las algebraicas.
- No todos pudieron establecer una relación entre la representación gráfica y la algebraica.
- EL trabajo con gráficos resultó más significativo para los estudiantes que el trabajo algebraico.
- Los estudiantes que llevaron instrucción meramente algebraica tuvieron problemas para establecer la representación gráfica de los conceptos trabajados.
- El tiempo de realización de la secuencia fue muy grande, pues la actividad se realizó en menos tiempo del propuesto.
- La secuencia de actividades fue resuelta con mejores resultados por los estudiantes de computación y sistemas automotrices.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). Funciones: Visualización y pensamiento matemático. México: Pearson Educación

Cordero, F., Cen, C. y Suarez, L. (2010*). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 13, núm. 2, julio, 2010, pp. 187-214. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Distrito Federal, México

Duval, R. . (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.. En Investigaciones en Matemática Educativa II.(173-201). México: Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav.

Farfan, R. M. . (2000). Lenguaje algebraico y pensamiento funcional. En Desarrollo del pensamiento matemático (89-144). México : Trillas.

Font, V., Bolite, J. & Acevedo, J. I. (2010). Metaphors in mathematics classrooms: analyzing the dynamic process of teaching and learning of graph functions. Educational Studies in Mathematics, 75(2),131–152.

Secretaria Académica (2010) Programa de estudios de la Unidad de Aprendizaje de *Cálculo Diferencial*. Dirección de educación Media Superior del Instituto Politécnico Nacional

---

ACTIVIDAD 1

Nombre: _____

Hola: Tú ya cursaste la materia de Cálculo Diferencial, así que has trabajado algunos conceptos que se utilizaran en estas actividades.

En las siguientes actividades, recordaremos las definiciones necesarias para realizar los ejercicios. Gracias por participar en este proyecto y contesta con toda libertad.

Conceptos para esta actividad

Dominio: Son los valores que puede tener la variable independiente (x) de manera que la función que estoy trabajando, exista o esté determinada, en otras palabras, que cuando yo evalúe la función y haga operaciones en la calculadora, ésta no me marque un ERROR

Imagen: Son los valores que obtiene la variable dependiente (y) una vez que hemos sustituido los valores de la variable independiente (x) en la función.

Ejercicio 1: Encuentra el DOMINIO de las siguientes funciones:

1) $f(x) = x^2 + 1$

2) $y = x^4 - 2x^2$

3) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 + x - 2}$

4) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2 - 9}$

5) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

6) $y = \sqrt{25 - x^2}$

Ejercicio 2: Observa las siguientes gráficas. Determina el dominio de cada gráfica marcando con color ROJO y la imagen marcándola con AZUL.

EL PROYECTO DE INTEGRACIÓN DE LAS TIC EN LOS CURSOS DE MATEMÁTICA DE LA UNIVERSODAD DE COSTA RICA. PERIODO 2014-2016

Edgardo Arita Dubón
Universidad de Costa Rica (Costa Rica)
edgardo.arita@ucr.ac.cr

Palabras clave: TIC, Multimedial, foros

Key words: ICT, Multimedia, fórums

RESUMEN: Este escrito presenta un proyecto sobre la integración de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) en los cursos de la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica que tienen la modalidad de laboratorio computacional y también en varios cursos que no tienen laboratorio. Mediante el uso del aula virtual se mantiene una comunicación estrecha con los estudiantes y se le da seguimiento a su desempeño académico tanto dentro como fuera de la clase. Se realiza trabajo colaborativo y se han creado nuevas técnicas didácticas para lograr el aprendizaje significativo de los estudiantes.

ABSTRACT: This product consists on the Integration of the Communication and Information Technologies (ICT) in the Math School courses which category is a computer Lab as well as in other courses which have no Lab category included. The use of the virtual Lab keeps a very close communication with the students and provides a follow up academic performance not only in the class but also outside the room. Collaborative work is being developed and new didactic (educational) techniques have been created so the students may be able to achieve a significant learning.

INTRODUCCIÓN

El proyecto se presentó en la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica, en los cursos de Matemática Aplicada con el objeto de utilizar las tecnologías de la información y comunicación (TIC) como herramientas para promover una docencia interactiva, dinámica y colaborativa en el aprendizaje del estudiantado.

Las características de las TIC y su rápida implementación a escala global son ampliamente utilizadas en cualquier campo. En el ámbito educativo, Bustos y Román (2011) mencionan que la formación de los ciudadanos de hoy requiere de sistemas y escuelas que incorporen recursos tecnológicos a los procesos de enseñanza y aprendizaje, la integración de las TIC en el ámbito educativo es actualmente un tema capital desde múltiples perspectivas, y en todos los niveles educativos.

En el área de la matemática, Román, Cardemil y Carrasco (2011) expresan que la incorporación de las TIC permite la construcción de modelos matemáticos, elaboración de hipótesis, interpretación de gráficas, aprendizaje de conceptos.

Para adaptarse a las necesidades de la sociedad actual, las instituciones de educación superior deben desarrollar vías de integración de las tecnologías de la información y la comunicación en los procesos de formación. Se requieren docentes que utilicen frecuente y responsablemente las tecnologías.

Al enfrentar al estudiante a la resolución de un problema de manera digital con la ayuda del software existente y las propuestas didácticas que deseamos desarrollar, le obligará a reafirmar los conocimientos adquiridos durante la lección y le exigirá un razonamiento más detallado de los pasos en la resolución de la situación planteada, procedimientos que redundarán en un mejor rendimiento académico.

La tecnología aplicada como herramienta en la enseñanza y aprendizaje de la matemática puede ayudar a generar imágenes visuales, organizar datos y realizar cálculos. Cuando disponen de herramientas tecnológicas, los estudiantes pueden enfocar su atención en procesos de toma de decisiones, reflexión, razonamiento y resolución de problemas (Santos, 2001).

El uso de las TIC en el aula de matemática no puede plantearse como una herramienta aislada sino que cada concepto que se trabaje en clase puede encontrar una o varias herramientas tecnológicas que permitan profundizar en la exploración.

ANTECEDENTES

Desde el año 2003 la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica inició la incorporación del uso de la tecnología. Proyectos como Apoyo Multimedial para la Enseñanza de la Matemática, coordinado por la Dra. Sonia Rodríguez Soto, fueron pilares fundamentales para su planteamiento y ejecución. En el curso MA1003 Cálculo III el Prof. Juan Félix Ávila Herrera implementó en dos grupos de la cátedra el uso frecuente de las herramientas tecnológicas como apoyo a sus clases, también desarrolló el software Gen-GCF que permite a los estudiantes una rápida y fácil visualización de los objetos matemáticos de estudio. Tres años después, la cátedra de MA1002 Cálculo II realizó lo mismo. En esa época los profesores Sonia Rodríguez Soto, Minor Chacón Díaz y Edgardo Arita Dubón incursionaron en la aplicación de diversas herramientas

tecnológicas aplicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática: incorporaron material multimedia que semestre a semestre se ha mejorado y que se utiliza en la actualidad, aulas virtuales para almacenar material multimedia, utilizando la plataforma Moodle en el sitio de la Escuela de Matemática http://emoodlenew.emate.ucr.ac.cr/, y tener comunicación permanente con sus estudiantes así como otras herramientas en el campo de la graficación de funciones o programas de cálculo simbólico (CAS).

Para el año 2010, se inauguró un laboratorio con 30 computadoras, una para cada estudiante y una computadora para el profesor conectada a un proyector de vídeo lo cual permitió ampliar la gama de cursos que ofrece con ayuda directa de herramientas tecnológicas en las clases, de aquí en adelante estos cursos son denominados cursos en modalidad laboratorio. Es así como se incorporaron un grupo de la cátedra MA1001 Cálculo I, dos grupos de MA1002 Cálculo II, uno de MA1003 Cálculo III, uno de MA1004 Algebra Lineal y otro de MA2210 Ecuaciones Diferenciales Aplicadas al campo de la Salud. Dos semestres después se incorporaron dos grupos más de MA1001. En el 2012, la cátedra de MA1210 Cálculo I incorporó un grupo en modalidad laboratorio. En el 2013 se incorporaron otro grupo para MA1002 y dos grupos para MA1003. Todos los grupos mencionados anteriormente en modalidad laboratorio se conservan hasta la fecha.

METODOLOGÍA

El proyecto consiste en la incorporación de herramientas tecnológicas en las clases de los cursos del Departamento de Matemática Aplicada de la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica, siendo en los cursos con modalidad laboratorio donde se realizan diferentes actividades que permiten incorporar herramientas como la plataforma Moodle, software educativo como GeoGebra, Gen-GCF, Graphing Calculator, Marimba, Mathematica, WinPlot y Daum Equation Editor, entre otros. Enfocándose principalmente en lo siguiente:

1. Foros: Se plantea un problema o ejercicio no tradicional para que los estudiantes investiguen del tema, exploren métodos de solución con ayuda de software dinámico, formulen conjeturas, demuestren o refuten esas conjeturas, justificando y argumentando sus conclusiones y las comuniquen utilizando la plataforma Moodle.

2. Trabajo en equipo: Una vez que el estudiante escribe sus conclusiones a una tarea específica, utilizando la plataforma Moodle, sus compañeros y compañeras pueden leer y analizar el método de solución y aportar al respecto. Es importante mencionar que se usa Moodle porque permite la escritura matemática utilizando un filtro LaTeX para la correcta visualización de símbolos.

3. Métodos colaborativos: El uso de Moodle permite crear ambientes donde un estudiante puede realizar una pregunta y los demás compañeros le hacen sugerencias de cómo resolverla. Esto permite una comunicación muy fluida fuera del horario lectivo. El profesor supervisa y retroalimenta los comentarios de los estudiantes, nunca proporciona el método de solución sino que contesta con preguntas generadoras.

4. Prácticas o quices virtuales: Se programan prácticas donde el estudiante no solo tenga que bajar de internet un archivo y trabajarlo con papel y lápiz, sino que sea dinámico, es decir, se utiliza el potencial de la Web para que se formule tanto la pregunta como el método de solución en línea y quede un registro detallado. Por otra parte se realizan quices en línea donde dada una pregunta

generada por el sistema, el estudiante, utilizando sus conocimientos matemáticos y herramientas computacionales, modele el método de solución, tras esto coloque su respuesta en el sistema y sea calificada en tiempo real con la opción de obtener una retroalimentación, también en tiempo real, de cómo se resuelve la pregunta. Para lograr lo anterior se ha trabajado en la creación de una base de datos de preguntas por tema. Cada quiz o práctica se genera en forma aleatoria para cada estudiante, es decir, cada vez que se ingresa a una práctica o quiz se obtendrán preguntas diferentes.

5. Material de estudio interactivo: Varios cursos cuentan con material didáctico tanto en formato pdf o interactivo. Así, el estudiante tiene una fuente de materiales interactivos para su estudio. Dentro del aula, mediante el método de resolución de problemas los ambientes dinámicos no solo permiten a los estudiantes construir figuras con ciertas propiedades sino que también les permiten transformar esas construcciones en tiempo real, para estudiar variaciones y posiblemente proveer bases intuitivas para justificaciones formales de conjeturas y proposiciones.

Por otra parte, es importante difundir el trabajo realizado con los colegas de la Escuela de Matemática es por ello que se realizan charlas informativas durante cada semestre para dar a conocer los logros alcanzados y las dificultades por superar para la implementación de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. El propósito es incentivar a los colegas a sumar las experiencias positivas en sus propios cursos. También se realizan talleres, cursos y asesorías a profesores para que puedan incorporar las herramientas tecnológicas en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Además se colabora con los integrantes de otros proyectos que requieran incorporar el uso de las TIC en el marco de sus objetivos, para la creación de nuevos materiales o actividades didácticas.

RESULTADOS PRELIMINARES

Durante el año 2014 y el 2015, la práctica educativa se favoreció mediante conversaciones y discusiones con profesores externos al proyecto pero con inquietudes en el uso de las tecnologías digitales recientes, esto sirvió como base para expandir la visión de los integrantes del proyecto en el uso y aplicación de la tecnología. El proyecto amplió la visión en el campo pedagógico y tecnológico, un factor que permitió observar el hecho anterior fue la participación de dos miembros del proyecto en el IV Encuentro Provincial de Educación Matemática, realizado en Tambor de Puntarenas, Costa Rica, los dos temas expuestos trataron sobre el uso de herramientas tecnológicas en el aula de matemática: La herramienta foro en Matemática y el papel de las herramientas tecnológicas en la resolución de problemas.

En el trabajo realizado en los grupos de las cátedras en la modalidad laboratorio se ha logrado elaborar e implementar material multimedia, vídeos, tutoriales de software entre otros y una de las metas principales que se ha conseguido es que, gracias a las charlas de discusión e información del uso de las TIC en las clases de matemática y los talleres impartidos a los docentes de la Escuela de Matemática en el uso de software especializado en matemática, las siguientes cátedras: MA0125 Matemática Elemental, MA0230 Matemáticas para Ciencias Económicas, MA0110, matemática Básica, MA1210 Cálculo I, MA1111 Fundamentos de Trigonometría y MA0292 Algebra Lineal para Computación, se han integrado el uso de las TIC en todos sus grupos y de esta manera han innovado en técnicas didácticas.

Algunos ejemplos se ilustran a continuación:

Figura 1. Un ejemplo de asignación de ejercicios para un foro y réplicas

A continuación están dos problemas sobre la aplicación de integrales de línea:

1. Calcular la masa de la cuerda que tiene la forma de la curva C que corresponde a la intersección de las superficies $x^2+3y^2+z^2=4x$, $z=y$, donde la función de densidad está dada por $f(x,y,z)=\sqrt{1+z^2}$.
2. Calcular $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ para el segmento C de la curva que corresponde a la intersección de las superficies $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$, $12(x-1)^2-3y^2+4z(x-1)=0$, que va desde el punto $A=(0,2,0)$ hasta el punto $B=(0,0,3)$ y para el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)=(z^2+y\cos x,-4+\sin x,2+2xz)$.

El problema 1. lo resolverá Edelman Espinoza y el problema 2. lo resolverá Roberto Villegas. Ambos tienen hasta las 10 p.m. del sábado 27 de junio para que resuelvan el problema asignado. La solución de cada problema debe ser realizada utilizando la escritura de texto matemático en $\LaTeX$.

Los demás estudiantes del grupo tienen hasta las 11:00 p.m. del domingo 28 de junio para que su opinión sobre la solución de ambos problemas sea calificada.

Añadir un nuevo tema de debate

Debate	Comenzado por	Réplicas	Último mensaje
Ejercicio 2	Roberto Villegas Díaz	27	Edgardo Arita lun, 29 de jun de 2015, 21:44
Solución del problema 1	Edelman Espinoza	26	jostin fabian lopez fernandez lun, 29 de jun de 2015, 21:18

Activate Windows
Go to Settings to activate Win

En la Figura 1 se ilustra la asignación de ejercicios para resolver en el curso de MA1003 Cálculo III en el primer ciclo del 2015 y también se ilustra la cantidad de réplicas de los demás estudiantes. Los dos estudiantes tuvieron una semana para plantear lo solución y los demás estudiantes tuvieron un día para revisarla y opinar.

Figura 2. Ejemplo sobre la resolución de un ejercicio en un foro

Ejercicio 13, parte b
de Jorge Garrote Medrano - jueves, 9 de julio de 2015, 16:19

Hallar la circulación del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)=(x-z,x^3+yz,-3xy^2)$ a lo largo del camino limitado por las superficies

$z=2-\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=0$

(b) aplicando el teorema de Stokes

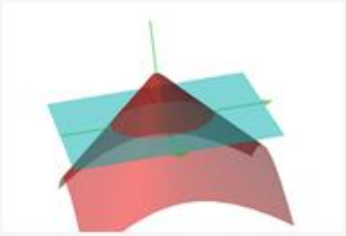
Lo primero que debemos hacer el conocer saber que superficies se están intersecando y como, para así luego aplicar el teorema de Stokes.

Primero, reorganizamos la función $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$, para saber que superficie es:

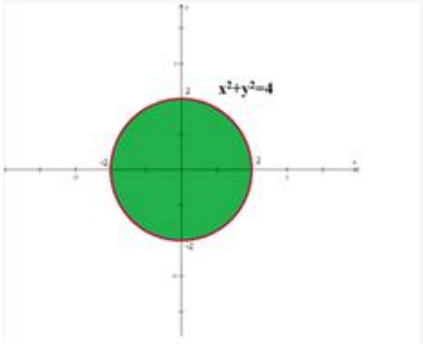
$z=2-\sqrt{x^2+y^2} \iff (z-2)^2=x^2+y^2$

Vemos que se trata de un cono circular con centro en $(0,0,3)$ y que solo se ocupará la parte de abajo del mismo, esto por el - antes de la raíz.

Lo rojo corresponde a la parte inferior del cono circular $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ y lo celeste es el plano z=0



Su intersección forma lo siguiente: $\begin{cases}(z-2)^2=x^2+y^2 \Longrightarrow x^2+y^2=4\\ z=0\end{cases}$, corresponde a un círculo de radio 2 en el plano xy, el mismo se aprecia a continuación:



Ahora si, comenzamos a aplicar el teorema de Stokes. El teorema nos dice que $\oint_C \vec{F}\cdot\overrightarrow{dr}=\iint_S rot\vec{F}\cdot\vec{n}dA$, por lo que necesitamos el $rot\vec{F}$ y un vector normal $\vec{n}$ de una de las dos superficies, en este caso se trabajará con el plano z=0.

Entonces, el rotacional es el siguiente

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x-z & x^3+yz & -3xy^2\end{vmatrix}=(-6xy-y,-(-3y^2-1),3x^2-0)=(-6xy-y,3y^2+1,3x^2)$$

El vector normal del plano este $\vec{n}=(0,0,1)$, no escogemos el (0,0,-1) porque estaría apuntando dentro de la parte de abajo del cono y ocupamos uno que apunte hacia afuera.

$\iint_S rot\vec{F}\cdot\vec{n}dA=\iint_R (-6xy-y,3y^2+1,3x^2)\cdot(0,0,1)dA$

$\Rightarrow \iint_R 3x^2dA$, viendo en la proyección vemos que el más fácil trabajar la integral en coordenadas polares. Por lo que,
$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta, \quad 0\le r\le 2, \quad 0\le\theta\le 2\pi$

$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^2 (3r^2\cos^2\theta)r \ drd\theta=\int_0^{2\pi}\left(\frac{3r^4}{4}, \ evaluado \ en \ r=2 \ - \ r=0\right)d\theta$

$\Rightarrow \int_0^{2\pi}12\cos^2\theta d\theta=\frac{12}{2}\int_0^{2\pi}1+\cos 2\theta d\theta$

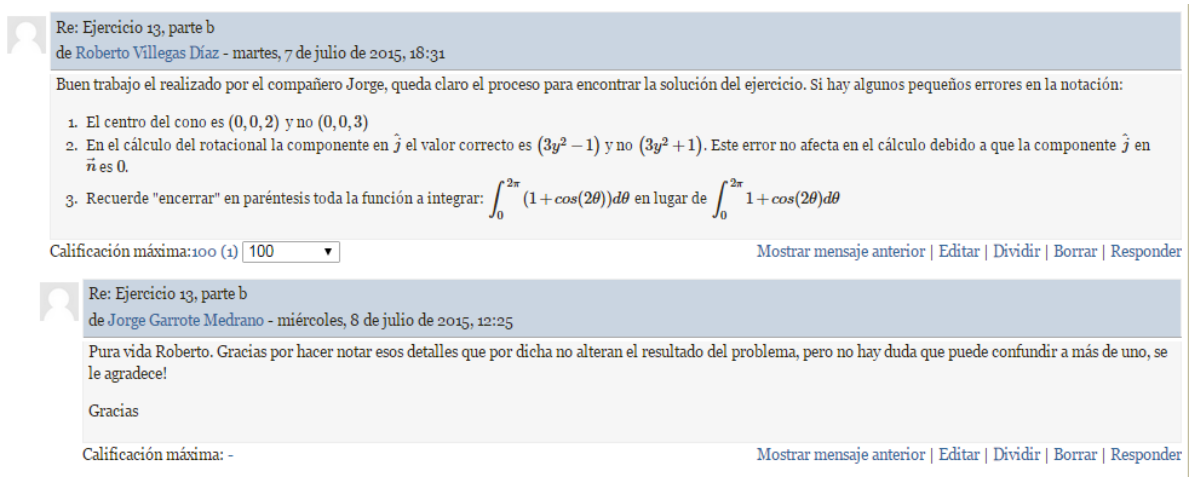
$\Rightarrow 6\left(\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}, evaluado \ en \ \theta=2\pi \ - \ \theta=0\right)= \ 12\pi$

(Editado por Edgardo Arita - envío original domingo, 5 de julio de 2015, 14:49)

Calificación máxima: 100 (1) 100 ▾ Editar | Borrar | Responder

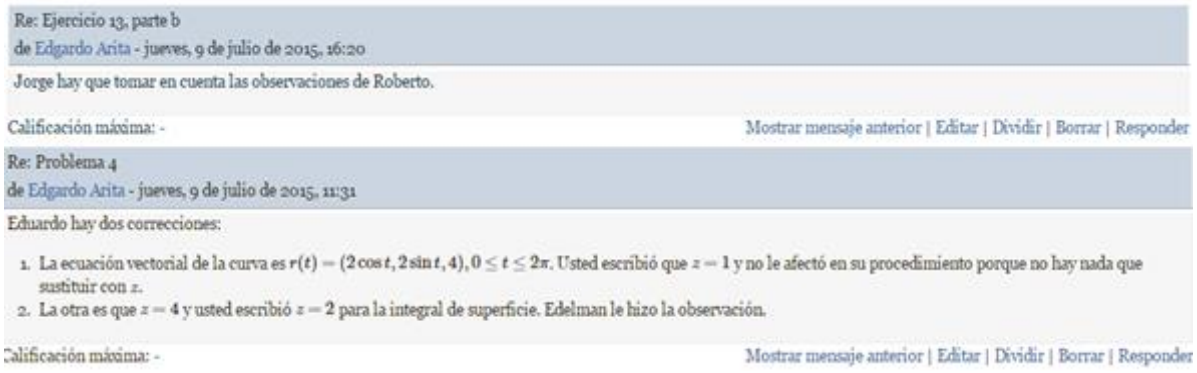
En la Figura 2 se ilustra la resolución del ejercicio asignado a un estudiante del curso de MA1003, siendo muy útil el editor Daum Equation Editor para escribir en línea el texto matemático en LaTeX y luego pasarlo al foro de Moodle.

Figura 3. Ejemplo sobre la réplica de un estudiante



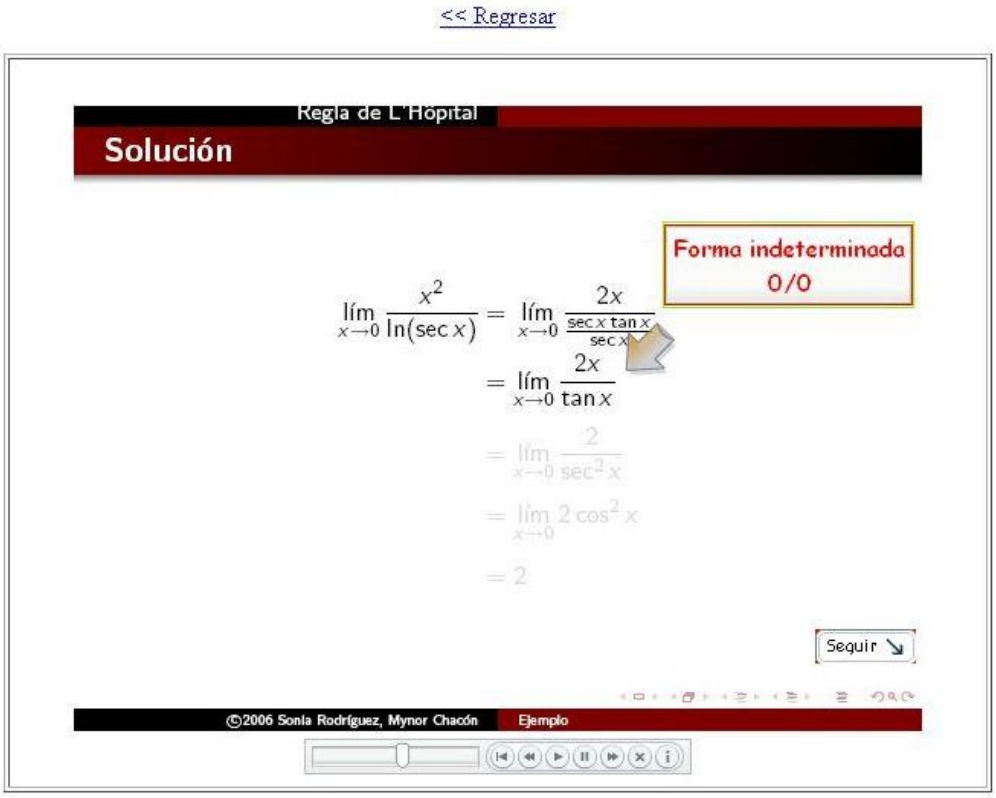
En la Figura 3 se ilustra la discusión realizada entre el estudiante que planteo la solución del ejercicio de la Figura 2 con otro compañero del grupo. La intervención del compañero es para corregir los errores cometidos en la solución planteada.

Figura 4. Ejemplos sobre la participación del profesor en los foros



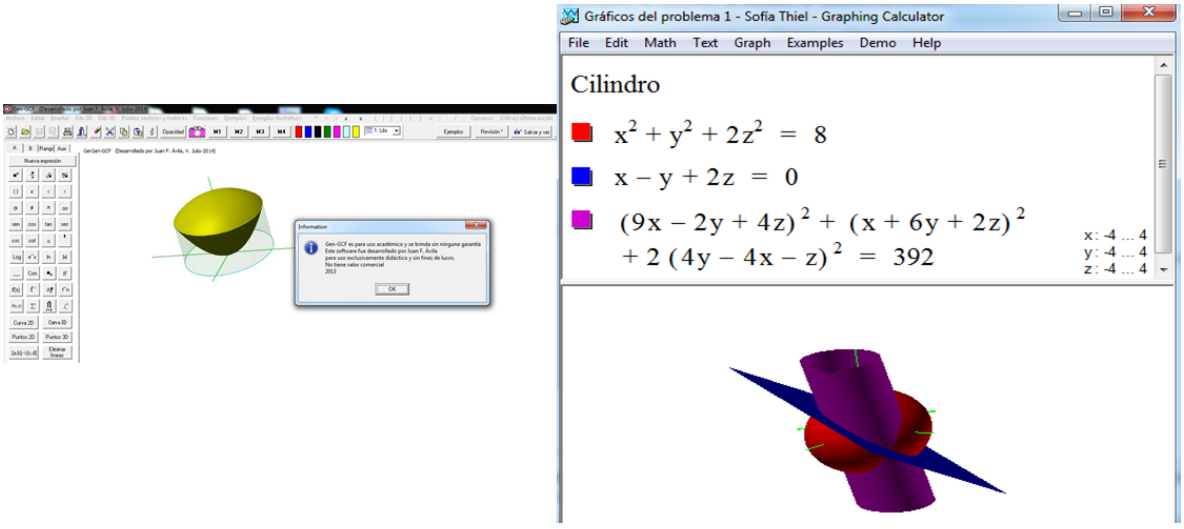
En la Figura 4 se ilustra la participación del profesor del curso después de que se concluyó la discusión entre los estudiantes, bien avalando la solución y la discusión planteada o bien corrigiendo los errores cometidos en la solución y que no fueron detectados por los demás estudiantes que opinaron.

Figura 5. Ejemplo sobre una página de un vídeo



En la Figura 5 se ilustra una página del vídeo de la solución de un ejercicio en el cual se incorpora audio y animación. El audio consiste en la explicación del procedimiento realizado por un profesor al resolver el ejercicio planteado. La calidad de los vídeos es excelente, tanto desde el punto de vista didáctico como la presentación del contenido. Los vídeos son utilizados para que los estudiantes reafirmen sus conocimientos al resolver ejercicios planteados.

Figura 6. Ejemplo sobre el uso de software Gen-GCF y Graphing Calculator



En la Figura 6 se ilustra la página inicial del software Gen-GCF, utilizado para el trazado de gráficas en 2D y 3D, y un ejemplo de las gráficas que genera en el software Graphing Calculator. Los estudiantes tienen que digitar las ecuaciones del problema para luego observar las gráficas correspondientes. En el caso de las gráficas en 3D pueden manipularlas con el cursor del mouse y así pueden tener diferentes perspectivas de las mismas, principalmente para comprobar las proyecciones sobre los planos coordenados y las intersecciones entre superficies.

CONCLUSIONES

En los foros se logra la participación activa de todos los estudiantes, ya que semanalmente se asignan diferentes estudiantes para resolver los ejercicios. Además, cada estudiante debe opinar sobre el trabajo realizado por sus compañeros y compañeras cuando no se le asigne la solución de un ejercicio.

Se fortalece la relación entre pares ya que los intercambios de opinión entre los estudiantes se realizan con el respeto que conlleva una actividad académica y se logra que el aprendizaje significativo sea evidente.

La escritura de texto matemático utilizando el filtro LaTeX en Moodle resuelve el problema que se presenta en otros foros donde no se cuenta con ese filtro.

La utilización de la plataforma Moodle en la implementación de los cursos en línea ha sido de gran utilidad por la creación materiales didácticos utilizando diferentes herramientas tecnológicas.

Las herramientas tecnológicas que se utilizan son un valioso apoyo, tanto para los estudiantes como para los docentes. Hay que tomar en cuenta las limitaciones que tienen para no cometer errores en su uso.

Para la próxima etapa del proyecto se pretende la utilización de aplicaciones matemáticas para tabletas y celulares en las clases de matemática que no involucren el uso de un laboratorio computacional.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bustos, A. y Román, M. (2011). La importancia de evaluar la incorporación y el uso de las TIC en educación. Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa, 4 No 2, 4-7.

Román, M., Cardemil, C. y Carrasco, A. (2011). Enfoque y metodología para evaluar la calidad del proceso pedagógico que incorpora TIC en el aula. Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa, 4 No 2, 9-36.

Santos, L. (2001). Potencial didáctico del software dinámico en el aprendizaje de las matemáticas. Avance y Perspectiva, 20, 247-258.

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA DEFINICIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE LUGAR GEOMÉTRICO UTILIZANDO EL GEOGEBRA

Maritza Luna Valenzuela
Pontificia Universidad del Perú, Instituto de Investigación para la Enseñanza de las Matemáticas (Perú)
luna.m@pucp.edu.pe

Palabras clave: Lugar geométrico, geometría analítica, circunferencia, parábola

Key words: geometrical location, analytic geometry, circumference, parable.

RESUMEN: En este trabajo se presenta una propuesta de enseñanza didáctica de uno de los problemas fundamentales de la geometría analítica que es definir el lugar geométrico descrito por un objeto que se mueve siguiendo una ley específica. Este trabajo tiene como objetivos: interpretar la información dada de manera textual que incluyen propiedades para realizar el planteamiento; mostrar construcciones gráficas de lugares geométricos de manera dinámica y analizar sus propiedades; realizar construcciones con el apoyo de las herramientas tecnológicas dinámicas de GeoGebra 4.0, 5.0. Las actividades presentadas son aplicadas en alumnos de pregrado del área de ciencias e ingeniería.

ABSTRACT: In this paper we present a proposal focused on didactic teaching on one of the fundamental problems of analytic geometry, corresponding to show locus described by an object whose movement is governed by a specific law. The objectives of this article focuses on: Interpretation of the information provided, this includes the properties required for this approach; Presentation of a dynamic manner the construction of loci, together with an analysis of their properties. We rely on the dynamic technological tools of GeoGebra 4.0, 5.0 for constructions. The activities presented are applicable to undergraduate students in the area of science and engineering.

INTRODUCCIÓN

Es de fundamental importancia en el funcionamiento cognitivo, la distinción entre un objeto y su representación, y la comprensión de la matemática como una actividad que moviliza una variedad de registros de representación semiótica. (Duval, 1996).

En geometría analítica resolver problemas como los que se muestran en las siguientes actividades presentan dificultades en el planteamiento de modo algebraico, para ello se realiza:

- la representación de la información de un modo gráfico, usando herramientas del GeoGebra.
- la aplicación de las propiedades geométricas para obtener la ecuación que representa el lugar geométrico,
- la verificación de los resultados obtenidos por los alumnos, hechos de manera escrita, con el apoyo de GeoGebra.

Por tanto, en cada de las actividades se presentará el planteamiento, la visualización mediante el software, y finalmente la solución esperada.

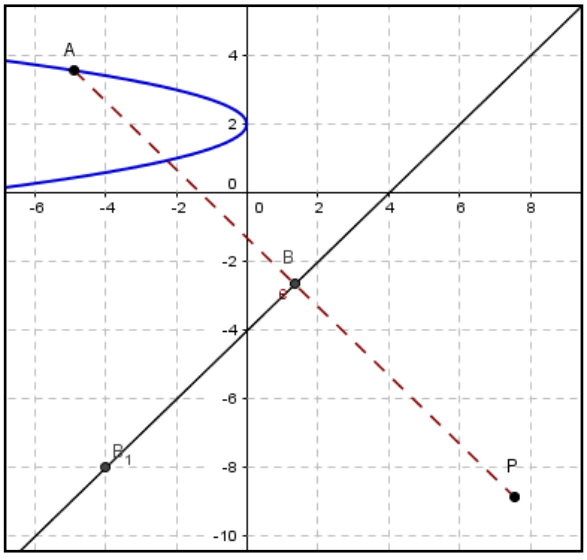
Enunciado de la actividad 1.

Sea *A* un punto que se desplaza sobre la curva C : $(y-2)^2 = -\frac{x}{2}$. Hallar la ecuación del lugar geométrico descrito por todos los puntos *P* del plano cartesiano tal que la recta $L: y = x - 4$ es mediatriz del segmento $\overline{AP}$.

Planteamiento y solución

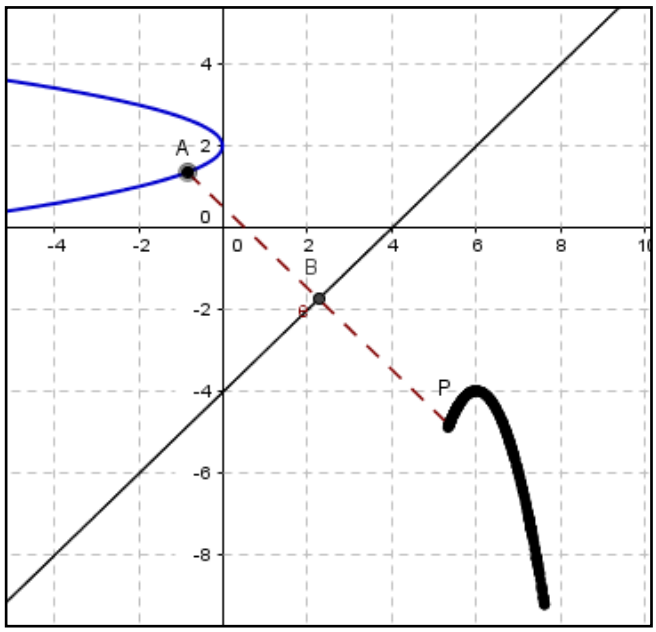
Sea $B(x_B, y_B)$ un punto de la recta L y $A(x_A, y_A)$ un punto que está en la curva C de modo que el segmento AB es perpendicular a L y con la herramienta de simetría del GeoGebra obtenemos $P(x, y)$ como se aprecia en la Fig. 1.

Figura 1. Parábola : $(y-2)^2 = -\frac{x}{2}$



Desplazando el punto A se visualiza en la Fig. 2 el lugar geométrico de la nueva parábola

Figura 2. Parábola simétrica generada por P al desplazar A.



Así, por simetría de la parábola respecto a la recta, la solución será la parábola de ecuación $(x-6)^2 = -\frac{1}{2}(y+4)$.

Enunciado de la actividad 2 (Examen Parcial de Matemática Básica 2015-0 PUCP)

Halle e identifique la ecuación del lugar geométrico descrito por el centro de una circunferencia móvil, que en el plano cartesiano se mueve de manera que simultáneamente es tangente a la recta $L: x = 0$ y es tangente exterior a la circunferencia $C:\ x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$.

Planteamiento y solución

Con las herramientas del GeoGebra representamos la información de la circunferencia con centro en (4,0) y radio 2 y la construcción de la circunferencia móvil de centro en $C(x, y)$.

Figura 2a. Circunferencias tangentes exteriores.

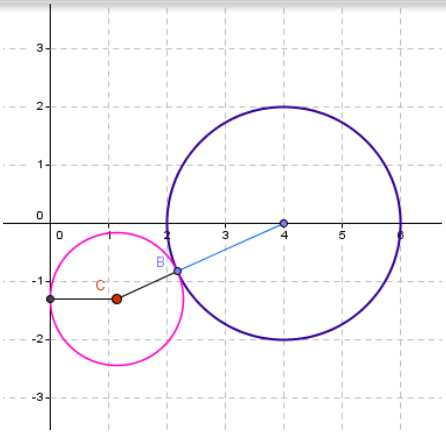


Figura 3. Inicio de lugar geométrico.

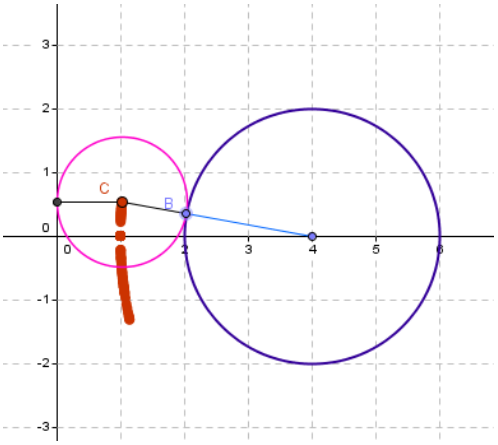
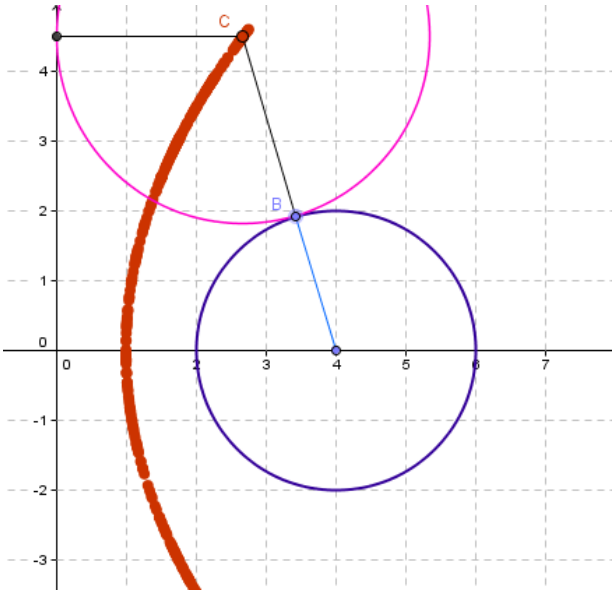


Figura 4. Lugar geométrico solicitado.



Como el centro es $C(x,y)$ móvil. De este modo, su radio correspondiente, según la figura 4 será $d(C,(4,0))-2$ e igual a x,

lo cual implica que $x=\sqrt{(x-4)^2+(y)^2}-2$,

elevando al cuadrado y simplificando se tiene

$(x+2)^2=(x-4)^2+(y)^2$.

Así, se obtiene la parábola $y^2=12(x-1)$.

En la siguiente actividad se requiere el uso del GeoGebra 5.0, debido a que es necesario realizar el planteamiento en tres dimensiones porque un gráfico en dos dimensiones no permite apreciar detalles importantes para establecer propiedades geométricas que veremos a continuación.

Enunciado de la actividad 3

Una persona de 1,60m de estatura camina sobre el plano XY describiendo la parábola de ecuación $x^2 = 4y$. Si en el punto A(0,1) hay un poste de luz de 4,80m de altura, halle la ecuación del lugar geométrico descrito por el punto extremo de la sombra de la persona.

Planteamiento y solución

En el plano XY se representa la parábola $x^2 = 4y$ y se ubica el punto A(0,1).

Figura 5. Parábola en el plano XY

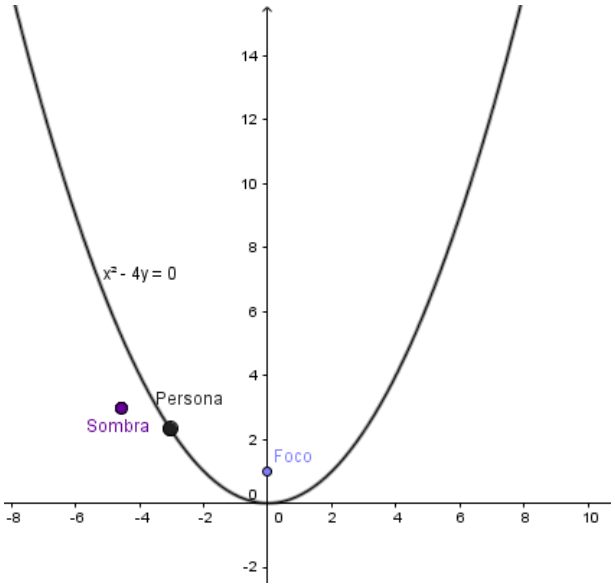
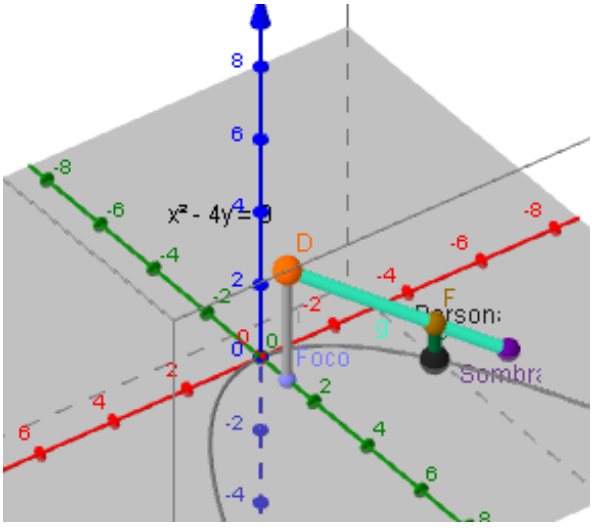


Figura 6. En el poste, la persona y la sombra en XY



El dinamismo del software permite visualizar el lugar geométrico que se genera como se puede ver en la Fig. 7 y Fig. 8.

Figura 7. Al desplazar la persona sobre la parábola, genera el lugar geométrico.

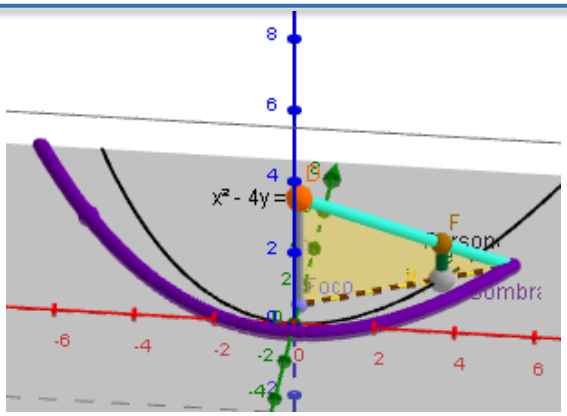
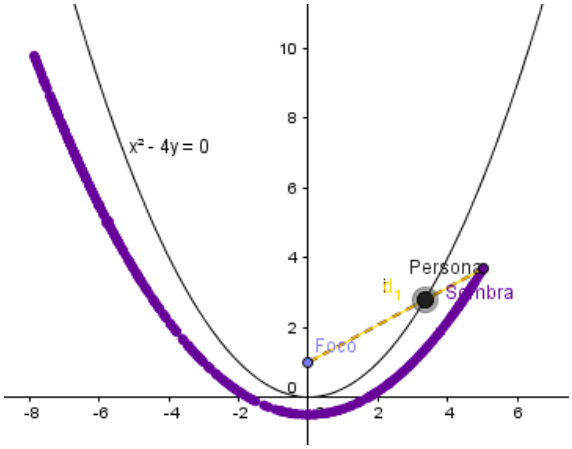


Figura 8. Vista en XY del lugar geométrico.



Este software, permite ubicar la semejanza que se genera entre los triángulos perpendiculares al plano XY y de catetos el poste de luz y la persona con sus respectivas hipotenusas que se ubican en el rayo de luz que proyecta el foco sobre la cabeza de la persona, como se puede apreciar en la fig. 9.

Figura 9. Semejanza de triángulos.

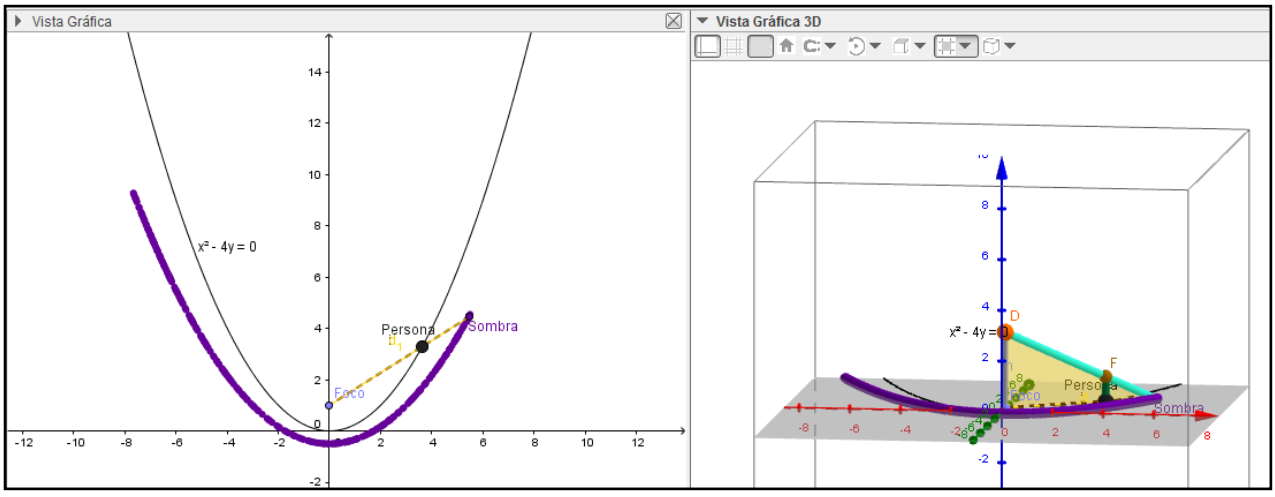
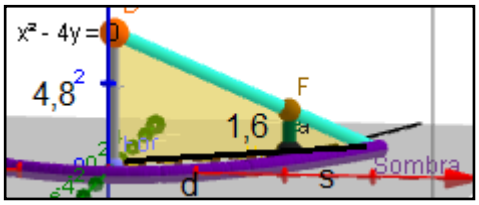


Figura 10. Vista de triángulo.

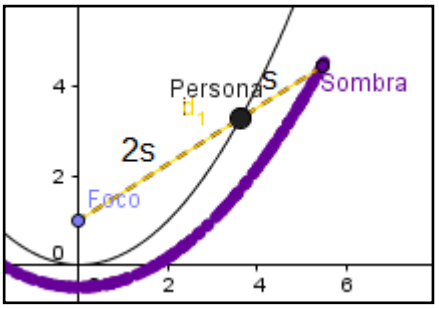


Seguidamente de la Fig. 10 se establecen las proporciones

$$\frac{4{,}8}{1{,}6}=\frac{s+d}{s}\Rightarrow d=2s$$

Como se muestra en la Fig. 11.

Figura 11. Vista en el plano XY.



Suponiendo que el punto donde se ubica la persona es (m, n) y sea P(x, y) las coordenada de la sombra de la persona, entonces se cumple la siguiente relación

$$\frac{y-n}{n-1}=2\Rightarrow n=\frac{y+2}{3}$$ y

$$\frac{x-m}{m}=2\Rightarrow m=\frac{x}{3}$$

Reemplazando en la parábola donde camina la persona tenemos $\left(\frac{x}{3}\right)^2=4\left(\frac{y+2}{3}\right)$, simplificando $x^2=12(y+2)$.

CONCLUSIONES

Se logró mejorar la visualización de los diferentes lugares geométricos mediante la herramienta dinámica de GeoGebra y dar solución a las actividades solicitadas.

El rendimiento académico fue mejor en los temas de geométria abordados con esta metodología.

El promedio de notas alcanzado por el grupo piloto en los temas de geométrica fue mayor que en el grupo de control.

Se estimuló la capacidad de análisis de los estudiantes, se logró que incrementen su visión geométrica para así dar solución al problema con mayor seguridad.

COMENTARIOS

Las nuevas herramientas tecnológicas brindan la oportunidad de proponer y dar solución a problemas que son difíciles de comprender graficando solamente en el papel.

Las herramientas que poseen el software permiten comprobar las diversas propiedades y resultados.

Finalmente este tipo de experiencia también estimula la creatividad del docente y del alumno.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Chau, J., Gaita, C., Medina, N., Sánchez y R. Villogas, E. (2010). *Matemáticas básicas.* Texto del curso. Lima: PUCP.

Duval, R. (2006).*Un tema crucial en la educación matemática*. La habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de la RSME, Vol. 9.1. 143–168.

Gonzaga, M.; Montealegre, J. Rodríguez, C. y Sánchez, R. (2011). *Matemáticas Básicas*. Lima: PUCP.

GeoGebra (2015) Recuperado el 04 de abril de 2015 de http://www.geogebra.org/cms/es/

Lehmann, C. (1980). *Geometría analítica*. México: Limusa.

PENSAMIENTO TEÓRICO-PRÁCTICO PARA LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL

Maria Guadalupe Vera Soria, Marcela Parraguez González
Universidad de Guadalajara (México), Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)
guadalupe.vera@red.cucei.udg.mx, marcela.parraguez@pucv.cl

Palabras clave: Álgebra lineal, comprensión conceptual, pensamiento teórico, estudio interpretativo, estudiantes universitarios

Key words: Linear algebra, conceptual understanding, theoretical thinking, interpretative research, undergraduate students

RESUMEN: Se presentan los primeros resultados de un proyecto doctoral destinado a estudiar el proceso de comprensión del concepto de base de un espacio vectorial de dimensión finita. En esta investigación, en la que 53 estudiantes universitarios del área de Ingeniería participaron realizando actividades de exploración del concepto en un ambiente gráfico-algebraico, seis de ellos fueron entrevistados para indagar el proceso de construcción del concepto, a través de la valoración de las distintas formas de percibir el significado de base y de otras nociones de las cuales él depende (combinación lineal, conjunto generador e independencia lineal). Se trata de un estudio cualitativo e interpretativo, y el análisis de la evidencia utiliza el modelo de la comprensión en matemáticas de Anna Sierpinska (Sierpinska, 1994) y el modelo de la distinción epistemológica del pensamiento teórico-práctico de Sierpinska y colaboradores (Sierpinska, Nnadozie y Oktaç, 2002).

ABSTRACT: We shall present the first results of a doctoral project that studies the understanding process of the concept of basis of a finite dimension vector space. In this research, which 53 undergraduate engineering students were involving in exploration activities of the concept in a graphic and algebraic environment, six of them were interviewed to quest the construction process of the concept, through the assessment of the different ways of perceiving the meaning of basis and other notions of which depends on (linear combination, spanning set and linear independence). It's a qualitative and interpretative study, and the evidence analysis is based on Sierpinska´s model of understanding in mathematics (Sierpinska, 1994) and Sierpinska and collaborators model of the epistemological distinction of theoretical and practical thinking (Sierpinska, Nnadozie and Oktac, 2002).

INTRODUCCIÓN

La comprensión de los conceptos axiomáticos del álgebra lineal resulta difícil al suponer que éstos deben abstraerse en un proceso que implica la realización de un gran número de inferencias (Dorier y Sierpinska, 2002; Oktaç y Trigueros, 2010). En particular, hasta ahora el estudio acerca de la comprensión de los estudiantes sobre el concepto de base de un espacio vectorial ha sido poco documentado (Chargoy, 2006; Da Silva y Lin, 2002; Kú, Trigueros y Oktaç, 2008), y dado que esta noción es clave para el aprendizaje de los espacios vectoriales se considera pertinente realizar una indagación desde una perspectiva aún no abordada.

El estado del conocimiento del tema, revela que la comprensión del concepto es un fenómeno multideterminado que involucra el uso de distintos lenguajes y representaciones, que se basa en el establecimiento de relaciones que deben ser identificadas y que supone la realización de un número de inferencias en torno a las ideas sintetizadas en las nociones involucradas, por lo que se advierten distintas dimensiones desde donde la aproximación a su estudio podría abordarse.

Esta investigación, asume una perspectiva cognitiva a partir de dos modelos que ubican la comprensión como la fomación mental de objetos, relacionada con un proceso de interpretación que se desarrolla conforme se validan ciertas suposiciones y en este proceso, algunas concepciones del objeto en construcción pueden actuar como obstáculos en la abstracción de las ideas.

En este sentido, el análisis se enfoca en las operaciones de comprensión que los estudiantes llevan a cabo al tratar de captar las características esenciales de conjuntos de vectores que son base un espacio vectorial, y las preguntas de investigación se dirigen a indagar las inferencias que los estudiantes realizan, a partir de los modos de pensamiento sintético y analítico, conforme advierten las relaciones que caracterizan a los conceptos, y a explorar las formas de pensamiento que activan para percibirlas, de forma tal que en su conjunto permitan documentar una visión de proceso.

MARCO TEÓRICO

La comprensión para Sierpinska (1994) es un “acto” relacionado con un proceso de interpretación que se desarrolla conforme se validan ciertas suposiciones mediante la abstracción de objetos matemáticos. De hecho, este proceso puede considerarse como un “entramado de actos de comprensión ligados por razonamientos” (p. 72).

Y para precisar lo que acto de comprensión significa, Sierpinska (1994) refiere la definición propuesta por Ajdukiewicz, para quien la comprensión es un acto mental por el que un *objeto de comprensión* se relaciona con otro objeto que funge como *base de la comprensión* del primero. La autora destaca el papel de cada una de las componentes que conforman un acto de comprensión:

> …el ‘sujeto de comprensión’ (P) – la persona que comprende,[…] lo que P intenta comprender –‘el objeto de comprensión’ […] y a lo que el pensamiento de P se dirige (o se intenta dirigir) en el acto de comprensión: ‘la base de la comprensión’. [Y además], la operación mental que conecta el objeto de comprensión con su base (Sierpinska, 1994, p. 29).

En cuanto a las operaciones mentales se puede decir que para que un concepto matemático se comprenda, éste supone ser identificado, discriminado, generalizado y sintetizado.

Por otra parte, las concepciones de un estudiante sobre los objetos matemáticos en construcción, pueden actuar como obstáculos en la comprensión de las ideas, por lo que se asume que el *pensamiento teórico* es una condición necesaria para el buen aprendizaje del álgebra lineal, ya que se basa en la reflexión consciente de los significados y de sistemas de conceptos (Sierpinska, Nnadozie y Oktaç, 2002).

Sierpinska y colaboradores (2002), a partir de la interpretación de la obra de Vygotsky, elaboran un modelo sobre el pensamiento teórico–práctico en el que, de manera similar a la conformación de los conceptos científicos y espontáneos, argumentan sobre la existencia de dos planos diferentes de construcción de los conceptos del álgebra lineal.

> La comprensión de las teorías matemáticas requiere de ambos, el pensamiento práctico y el pensamiento teórico. El pensamiento práctico es la base en contra de la cual el pensamiento teórico adquiere razón de ser y sin la cual pierde su significado epistemológico y, en este sentido, el pensamiento práctico es un *obstáculo epistemológico*. Esto es, *un fenómeno cognitivo y cultural que en cierta forma impide el desarrollo matemático pero que al mismo tiempo, es componente indispensable en la construcción del conocimiento matemático* (Sierpinska, 1990, 1992 y 1994, citada por Sierpinska et al., 2002, p. 14).

Para dar más detalle al respecto de la inclinación a pensar teóricamente, los autores explican que el pensamiento teórico es contrario al pensamiento práctico en sus objetivos, en su objeto y en sus principales intereses y resultados: el objetivo en el pensamiento práctico es realizar acciones para hacer que algo pase, pero en el pensamiento teórico el objetivo es entender una experiencia y reflexionar sus posibles consecuencias. Además, en tanto que el objeto del pensamiento práctico son fenómenos aislados, en el pensamiento teórico son sistemas de conceptos; y aunque el pensamiento práctico se interesa por dar significado a las acciones, el interés principal del pensamiento teórico es el significado de los conceptos, sus referencias, connotaciones y las posibles consecuencias de ese significado para el significado de otros conceptos relacionados (Sierpinska et al., 2002).

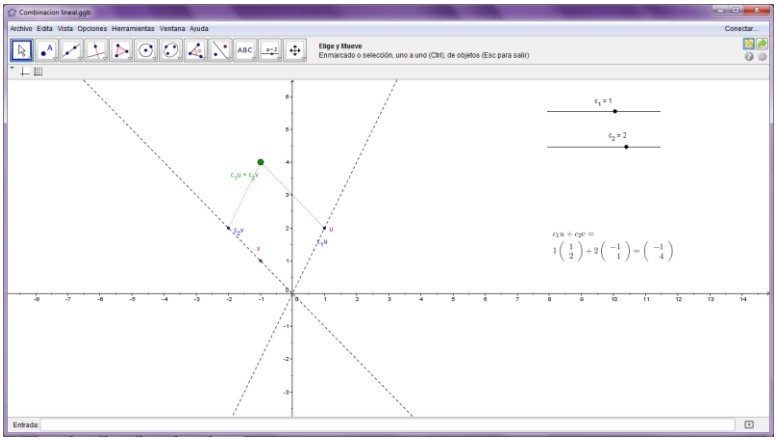
De manera más específica, Sierpinska y colaboradores describen al pensamiento teórico mediante tres categorías principales: el pensamiento teórico es reflexivo, sistémico y analítico, y desarrollan un modelo de pensamiento teórico en el que explican las características de cada una de estas categorías mencionadas.

El pensamiento *reflexivo* se refiere al razonamiento realizado de forma voluntaria con el propósito de adquirir una mejor comprensión de las ideas. Mientras que el pensamiento *sistémico* consiste en pensar acerca de sistemas de conceptos donde el significado de un concepto está basado en sus relaciones con otros conceptos. En cuanto al pensamiento *analítico*, se refiere a la actividad cognitiva realizada de forma consciente para advertir el carácter arbitrario y convencional de los signos y su relación con los objetos que representan (Sierpinska et al., 2002).

MARCO METODOLÓGICO

Desde el punto de vista metodológico, la investigación se sitúa bajo el paradigma cualitativo con la estrategia específica del método hermenéutico-interpretativo. En este sentido, de acuerdo con Merriam (2002), los estudios interpretativos procuran precisamente "comprender un fenómeno o un proceso, la perspectiva de las personas involucradas o una combinación de éstas" (p. 6). Se trata de entender el significado que las personas han construido.

Figura 1. Actividad de exploración de conceptos en Geogebra.



Tomando en cuenta la disponibilidad de tiempo y el consentimiento de los estudiantes para participar en una entrevista, previa información del anonimato y manejo ético de los datos obtenidos en el estudio, se contó con el apoyo de seis estudiantes que realizaron la actividad de exploración de los conceptos y que fueron entrevistados para obtener información sobre las características que advertían de conjuntos de vectores del espacio vectorial R^2 con los que se les propuso trabajar, y sobre la relación de dichos conjuntos con el espacio o subespacio vectorial que era posible construir con ellos.

Específicamente, se condujeron de manera individual seis entrevistas con los estudiantes A1, A2, M1, M2, B1 y B2, cuyos promedios parciales del curso se clasificaron como calificaciones altas (90-100), medias (70-90) y bajas (menos de 70), debido a la intención contar con distintas perspectivas para representar la complejidad del fenómeno en estudio.

Se verificaron los modos de pensamiento que estos estudiantes involucraron en sus respuestas y los argumentos con los que justificaron las características que interpretaban, para tratar de identificar: 1) las ideas que tenían acerca de los conceptos (sus inferencias), 2) la cadena de significados que podían llevarlos a reconocer conjuntos de vectores que son base de R^2 o de un subespacio de R^2, y 3) cómo asociaban los conceptos de combinación lineal, conjunto generador e independencia lineal para establecer las relaciones que conducían a la comprensión del concepto de base.

En lo que sigue, se describe la forma como se evaluaron las inferencias sobre las nociones en el sistema conceptual que los estudiantes realizaron, y las características del pensamiento teórico y práctico que incorporaron en dicha comprensión.

ANÁLISIS DE LA EVIDENCIA

Sierpinska (1990), puntualiza que el significado de un concepto puede advertirse si se analiza el referente y el sentido que los define, es decir, si se examina qué es los que se dice (el sentido) y sobre qué (el referente), y es por este motivo que el análisis de las inferencias sobre el significado de los conceptos por parte de los estudiantes se ha llevado a cabo desde esta lógica.

Las transcripciones de las entrevistas y los documentos de la actividad experimental de los seis estudiantes seleccionados se examinaron para identificar las inferencias sobre las características esenciales que los estudiantes relacionaron al concepto de base y a cada uno de los conceptos germinales, por lo que se asignaron diversos extractos de texto a una o varias de las clases analíticas: combinación lineal, conjunto generador, independencia lineal y base.

Con los extractos de texto obtenidos de cada uno de los estudiantes y clasificados mediante un proceso gradualmente más selectivo, se extrajeron para su reensamble en un arreglo matricial, un número de extractos de texto que se reunieron como material para analizar las inferencias sobre el significado de los conceptos.

Por ejemplo, las inferencias sobre el significado del concepto de *conjunto generador*, obtenidas de la evidencia del estudiante M1, fueron las siguientes:

- El estudiante M1 percibe que un conjunto de vectores linealmente independiente es generador del espacio vectorial, pero además, justifica que aunque los vectores forman un conjunto linealmente dependiente, éstos son vectores generadores de un espacio o subespacio vectorial.

Estas inferencias, emergen de la siguiente evidencia:

1) La entrevistadora anota en una hoja el siguiente conjunto de vectores para su análisis $\{(1,2),(-1,1)\}$ y pregunta:

> E: Bueno, aquí en particular, si te fijas hay dos vectores: el vector (1,2) y el vector (-1,1). Pensemos en este conjunto de vectores ¿sí? (mjum). ¿Hay algún vector del espacio vectorial que no pueda ser generado por ellos?, ¿hay alguno que se excluye?
>
> M1: Mmmm... no que yo lo haya podido encontrar, como son linealmente independientes, tanto el vector “u” como el vector “v”, se… teóricamente, se deberían de poder crear todos los vectores en… pertenecientes al espacio en el que ellos están…

Aquí, para M1 la “independencia lineal” parece ser una propiedad que confiere a los vectores del conjunto la facultad de “teóricamente” poder generar “al espacio en el que ellos están”, por lo que para él, un conjunto generador puede entenderse como:

Referente: un conjunto de vectores (linealmente independiente)

Sentido: cuyos vectores se combinan para formar vectores que en su conjunto conforman un espacio vectorial

2) Y dado que menciona la "independencia lineal", se le plantea el análisis del nuevo conjunto $\{(1,2),(-1,1),(1,0)\}$. Sus palabras al juzgar si el conjunto puede generar el espacio vectorial son:

> M1: Mmmm... el mismo espacio vectorial que el primero sería muy difícil que lo lográramos volver a crear porque se supone que este espacio vectorial debe de ser completamente diferente a éste, […] pero también existe una parte en Álgebra que dice que, por ejemplo R^2, el espacio vectorial R^2, donde entra éste, puede llegar a tener 3, pero no puede tener uno… solamente, solamente un vector, mínimo deben ser dos para poder generar el espacio, o sea, que este espacio no se vería alterado, no importa hacia donde yo mueva el cursor, y hacia donde yo ponga la bolita va a seguir siendo un espacio generado por el conjunto de los tres vectores.

3) Más adelante en la entrevista, el estudiante es cuestionado respecto al espacio generado a partir del conjunto $\{(-1,3),(2,-6)\}$, a lo que refiere:

> M1: Que son solamente múltiplos de ellos. Todos los vectores que se generen van a tener que ser múltiplos de 3 y de 2. Básicamente… en eso se va a fundamentar todo. Los nuevos vectores van a estar siempre sobre la misma línea, no van a salir de ese campo, entonces, mientras descubras un vector puedes ir multiplicando a ese una y otra y otra y otra y otra y otra vez, y te van a seguir dando va… vectores que se encuentran dentro de este… espacio, se podría decir

4) Y se le pide aclarar específicamente si el conjunto de vectores $\{(-1,3),(2,-6)\}$, es un conjunto generador:

> M1: Sí son generadores, pero no son generadores en sí de un espacio, hasta donde a mí llega el conocimiento de espacio, o hasta donde lo comprendo, es el decir que pueden generar fuera de ellos, o sea que, dado un lugar… cualquier punto que se asigne en ese lugar va a ser un espa... va a ser un vector que se generó por el trabajo con éstos dos, pero si aquí a mí se me ocurre marcar que la bolita verde sale acá, éstos dos jamás la habrían podido generar.. entonces, ellos son generadores solamente de su espacio, el espacio en el que habitan. Y no sé alguna manera apropiada de llamarlo

5) Además, cuando se le pregunta si el conjunto formado por el vector $\{(-1,3)\}$, sigue siendo un conjunto generador argumenta:

> M1: Es igual que en el primero que puso, o sea, va a ser que solamente sean múltiplos de éste vector, entonces solamente va a reproducir otros vectores que estén igual que él, o sea que estén justo en la misma zona que él está, no puede abarcar toda la zona por completo, por así decirlo

Por lo tanto, según se expresa en los anteriores extractos, el estudiante M1 analiza varios conjuntos de vectores y parece apreciar que, aún cuando el conjunto valorado es linealmente dependiente, se trata de conjuntos generadores del espacio vectorial o de un subespacio vectorial "al que pertenecen".

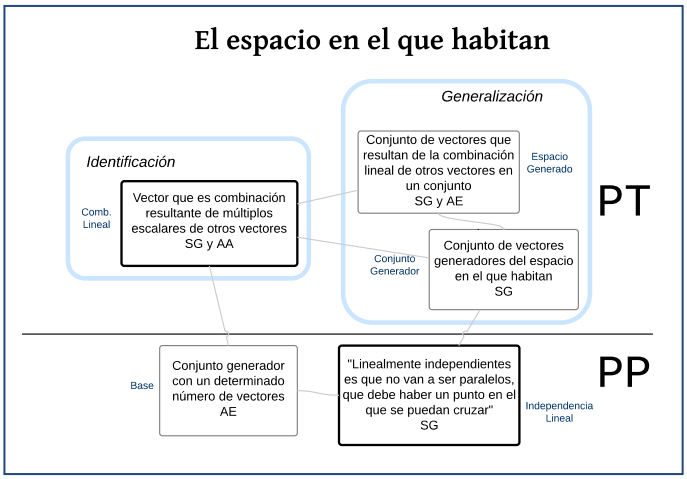
En particular en el segundo extracto, donde M1 expresa que “existe una parte en Álgebra” donde se establece un número mínimo de vectores para los conjuntos generadores, da la impresión de haber evaluado su convicción inicial para poder llegar finalmente a valorar que el conjunto $\{(1,2),(-1,1),(1,0)\}$ sí es generador del espacio vectorial.

Por otra parte, las inferencias sobre el significado de los conceptos, se reunieron en una nueva matriz, llamada matriz de correspondencias teóricas, y en este arreglo se han analizado detenidamente las componentes centrales que intervienen en la construcción del significado de los conceptos: la base de la comprensión (los modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético y/o analítico-estructural), la operación mental (identificación, discriminación, generalización o síntesis) y el tipo de pensamiento (teórico/práctico).

De esta manera, el proceso que se interpreta de la integración de todas las categorías evaluadas en la matriz de correspondencias teóricas: los significados, la base de la información, las operaciones mentales y las características del pensamiento; da pie a la descripción de la manera en que los estudiantes identifican, discriminan, generalizan o sintetizan el sistema conceptual que advierten a partir de los modos de pensamiento.

El significado de cada noción involucrada en el sistema se pondera y se relaciona con otros conceptos en una red de significados que se organiza y se presenta en términos de una “configuración de los significados” que explicita el proceso que se interpreta (ver figura 2).

Figura 2. Diagrama de la configuración de los significados del estudiante M1.



RESULTADOS

Los primeros resultados de la investigación que se obtienen de la interpretación de la evidencia, desarrollan una explicación sobre la cadena de inferencias que los estudiantes realizaron para lograr sintetizar, generalizar, discriminar o identificar los conceptos del sistema conceptual.

A continuación, por ejemplo, se describen las relaciones en la configuración de los significados de los conceptos que se reconocieron para los estudiantes A2 y M2, quienes lograron sintetizar el sistema conceptual: combinación lineal – conjunto generador – independencia lineal – base:

Primero, los estudiantes identificaron en la articulación de los modos de pensamiento sintético-geométrico y analítico-aritmético, las características de un vector que resulta de sumar “un cierto

tanto de veces" los vectores en un conjunto o que es múltiplo de un vector, es decir, han podido establecer, mediante el análisis de las representaciones en los contextos gráfico y algebraico, la relación entre un vector y la suma de múltiplos escalares de los vectores en un conjunto.

Luego de reconocer la noción de combinación lineal, los estudiantes A2 y M2 lograron advertir diferentes combinaciones lineales generadas por un vector o por varios vectores de algunos conjuntos de R^2 (espacio generado), realizando actos de discriminación principalmente en el modo sintético-geométrico.

Sin embargo, aunque la noción de conjunto generador fue intuitivamente revelada en las representaciones gráficas de combinaciones lineales (modo sintético-geométrico), es solo a partir del trabajo que realizado fundamentalmente en el modo analítico-aritmético, con conjuntos de vectores en los que se identificaron las características de independencia o dependencia lineal, que los estudiantes han podido dar cuenta precisa de cuándo un conjunto de vectores era generador de un determinado espacio o subespacio vectorial, es decir, el concepto de conjunto generador se ha sintetizado solo en el caso de antes haber analizado y reconocido en un contexto algebraico la relación entre los vectores en el conjunto.

En particular, en la tabla 1 se destacan dos inferencias, en el primer y último extractos, donde A2 y M2 señalan haber advertido cuál es la relación entre un conjunto de vectores linealmente dependiente y el espacio o subespacio que se genera con este conjunto. Especifican que si un conjunto contiene algún vector que es combinación lineal de otro, o de los otros en el conjunto, entonces ese vector ya está incluido en espacio vectorial generado por el conjunto.

Tabla 1. Conjunto generador en la síntesis del sistema conceptual.

Conjunto generador	**A2:** ...mediante determinante sacamos que son dependientes […] el primer vector que es (1,-2) puede generar al vector (-2,4), o sea que este vector es una combinación lineal de éste, y consideramos que tenemos un vector pero podemos sacar muchas combinaciones lineales.
Se considera que estos extractos contienen inferencias respecto al concepto de conjunto generador que podrían haber sido clave para la comprensión de la noción de base. Los estudiantes A2 y M2, recurren a los modos sintético-geométrico y analítico-aritmético (y analítico-estructural en el caso de M2) para establecer las características de conjuntos	**A2:** …el primer conjunto de vectores [{(1,2), (-1,1)}]…, como no son múltiplos, como ya lo vimos gráficamente, pueden generar cualquier otro vector en cualquier posición. En este caso [el conjunto {(1,2), (-1,1), (1,-3)}] sí generan a R^2 pero tienes un vector que es combinación de los otros dos vectores…
	M2: … se puede generar todo el plano porque son dos vectores totalmente independientes entre sí. Y por lo tanto, la ley nos dice que... que mientras dos vectores en R^2 sean totalmente independientes entre sí entonces se puede generar todo el plano R^2, o sea este vector puede estar en todo el plano dependiendo de la combinación lineal que se haga porque son independientes este vector de éste.
	E: ¿Qué se puede generar a partir de ese conjunto con tres vectores de R^2? **M2:** Pues se puede generar, dependiendo de los vectores que sean, se puede generar un plano, una recta, que es lo más…

de vectores que generan al espacio R^2 o a un determinado subespacio.	**M2:** ...seguimos con las leyes de Álgebra. Al tener tres vectores, y suponiendo que sean independientes, uno de los tres tiene que ser dependiente de alguno de los otros dos o de los dos, […] como estamos generando dos dimensiones… entonces … un tercero, un tercer vector dentro de esas dos dimensiones nos generaría la información que ya está dada por estos dos vectores […] al ser combinación lineal ya no aporta más información, se sigue generando el mismo espacio […] que en este caso sería el … el … todo el R^2.

Lo interesante en este caso, es que la evidencia ha revelado que si un estudiante reflexiona en la inferencia anterior y realiza un análisis de la definición axiomática del concepto de base (modo analítico-estructural), entonces puede llegar a interpretar la base como un "conjunto generador de un determinado espacio con un número mínimo de vectores" posibles, que es como M2 lo ha abstraído; o bien, como A2 lo estableció, puede pensar en un conjunto generador de un espacio en el cual "no existe un vector que sea combinación lineal de otro(s)", es decir, que contiene un número máximo de vectores linealmente independientes (ver tabla 2).

Tabla 2. Base en la síntesis del sistema conceptual.

Base	**A2:** …si en un conjunto de vectores hay un vector que es múltiplo, no van a ser base porque ese vector múltiplo es combinación lineal de alguno de los otros vectores, entonces la base viene siendo un conjunto de vectores que todos son linealmente independientes.
A partir de las citas de A2 presentadas en esta tabla, se percibe que en este estudiante prevalece la tendencia a verificar si un conjunto de vectores es base de un espacio o subespacio vectorial, al analizar si en el conjunto existe algún vector que sea combinación lineal de otro(s).	**A2:** La base es el conjunto de vectores que están linealmente independientes, o sea, que pueden generar a todo el espacio, ya sea R^2 o a R^3, dependiendo al rango que pertenezcan los vectores. En este caso seria el primer vector, el primer conjunto de vectores [{(1,2), (-1,1)}] debido a que, como no son múltiplos, como ya lo vimos gráficamente, que pueden generar cualquier… cualquier otro vector en cualquier posición.
	A2: En este caso [el conjunto {(1,2), (-1,1), (1,-3)}] sí generan a R^2 pero tienes un vector que es combinación de los otros dos vectores […] creo que, que estos 2 vendrían siendo la base [los dos primeros vectores], pero éste no porque por lo mismo, porque este viene siendo combinación de estos 2
Por otra parte, en las inferencias del estudiante M2, se aprecia que al tomar decisiones acerca de si un conjunto es base, se enfoca en verificar si se tienen los vectores mínimos necesarios	**A2:** El vector (1,-2) es una base, es la base para la recta. En éste… el vector (-2,4) es combinación lineal del (1,-2), no puedes decir que son base porque son… pertenecen… son vectores múltiplos que al graficarlos o al poder apreciarlos puedes multiplicar éste y te puede dar éste, o sea, que no son independientes, son dependientes…
	M2: A eso es a lo que conocemos como base. Una base es… es aquel vector en el que… en el que no es… son vectores independientes y pueden

para generar "la información" del espacio, y descarta de la base a los vectores que "son redundantes", que "ya no aportan información distinta". Desde luego, para que el análisis de A2 y M2 sobre los conjuntos y su relación con el espacio que generan condujeran a la significación del concepto de base, antes ya se tenía 1) Una idea intuitiva del espacio que se podía construir con ellos, y que se obtuvo al discriminar los conceptos de combinación lineal y espacio generador, en su interacción en el entorno gráfico-algebraico del *Geogebra*; 2) Y se había logrado distinguir, mediante síntesis de los conceptos combinación lineal, espacio generado y dependencia lineal, distintos casos en los que conjuntos de vectores eran generadores de un determinado espacio o subespacio vectorial.	generar toda la información, […] por ejemplo, aquí se puede observar [{(1,-2), (-2,4)}] que este segundo vector es combinación lineal del primero, ya lo comprobamos. Entonces, si yo trazo eso en un plano simplemente es una recta. Lo que me está diciendo aquí es hacia… que la recta se me haga más larga o se crezca su magnitud o se reduzca, de acuerdo a los múltiplos. […] se le llama que son vectores redundantes porque ya no aporta información distinta a la que ya se conoce sino que sigue siendo la misma durante la misma trayectoria del vector simplemente lo hace más largo o más corto.
	M2: …son 5 vectores que generan un espacio dentro de un plano. De los primeros dos vectores, que son los que están más marcados, son… los que son bases, ya los demás son combinación lineal de estos vectores.
	M2: Este seria una base en R^2 y este igual seria una base en R^2 [se refiere a los conjuntos {(2,1), (3,-3)} y {(1,-2)}]. Es igual se puede considerar que estas son unas bases, son quienes generan la información dentro del plano y ya simplemente dos de los vectores generan… cada uno de los vectores pues tienen base en R^2. E: Pero hace un momentito me decías que este no generaba a todo R^2 [me refiero al conjunto {(1,-2)}]. M2: No, una base dentro del… seria un subconjunto. E: ¿cual es el subconjunto? M2: Una recta.
	M2: …una base por sí sola genera una recta, si tenemos dos bases dependiendo del espacio, por ejemplo si estamos hablando de R^2 ya nos genera un plano, o sea, ya nos está… está generando un espacio vectorial, al decir que es plano en R^3 sería igual. Una base tendrían que ser tres bases para poder generar todo el espacio R^3.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Chargoy, R. M. (2006). *Dificultades asociadas al concepto de base de un espacio vectorial* . Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Da Silva, A. y Lins, R. (2002). An analysis of the production of meaning for the notion of basis in linear algebra. *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)*. John Wiley Publishers. Crete: Greece. Recuperado de http://www.math.uoc.gr/~ictm2/

Dorier, J. L. y Sierpinska, A. (2002). Research into the Teaching and Learning of Linear Algebra. En D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgraber, J. Hillel, M. Niss y A. Schoenfeld (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: New ICMI Study Series, 7,* 255-273. doi: 10.1007/0-306-47231-7_24

Merriam, S. and Associates, (2002). *Qualitative Research in Practice: Examples for discussion and analysis.* San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Oktaç, A y Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos del álgebra lineal?. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *13* (4-II), 373-385.

Kú, D., Trigueros, M., Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, (20) 2, 65-89.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics (10)* 3, 24-41. Canada: FLM Publishing Association.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press.

Sierpinska, A., Nnadozie, A. y Oktaç, A. (2002). *A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra.* Reporte de Investigación. Montreal, Canadá: Concordia University.

ALTERNATIVAS PARA EL CONTENIDO DE UN CURSO EN LINEA DE PRECÁLCULO

Juan Alberto Acosta Hernández, Anna Tarasenko, Arturo Curiel Anaya,Mariano Javier Pozas Cárdenas, Germán Reséndiz López

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Universidad Tecnológica de Tulancingo (México)

acostah@uaeh.edu.mx, anataras@uaeh.edu.mx, curiel@uaeh.edu.mx, mpozas@uaeh.edu.mx

Palabras clave: precálculo, MOOC, aprendizaje, didáctica, semiosis

Key words: precalculus, MOOC, learning, didactic, semiosis

RESUMEN: El presente artículo muestra algunos desarrollos iniciales del Massive Open Online Course (MOOC) que apoya al curso tradicional de Precálculo. Los aspectos teórico metodológicos que se tomaron en cuenta para su elección descansan en los entorpecimientos y las confusiones que los profesores actores del proyecto han detectado en sus propios estudiantes. Un grupo multidisciplinario de académicos, han plasmado a través del MOOC una alternativa de ayuda para los alumnos, donde se plantean, reflexionan y resuelven problemas o ejercicios, los cuales se clasificaron en: introductorios, representativos, difíciles o confusos. Cuando se tenga un resultado parcial, se efectuará una experimentación con alguno de los temas, contrastando su eficacia con respecto a estudiantes que lo emplean y los que no lo usan. El producto final se comparará con grupos de dos instituciones educativas de Nivel Superior.

ABSTRACT: This article presents some initial developments of the Massive Open Online Course (MOOC) that supports the traditional Precalculus. The theoretical and methodological aspects that were considered for election, rest in the hindrances and confusions that project stakeholders have detected teachers in their own students. A multidisciplinary group of academics has captured through the MOOC an alternative help for students, where they arise, reflect and solve problems or exercises, which were classified as introductory, representative, difficult or confusing. When a partial result is taken, an experiment with one of the topics will be carried, comparing performance against students who use it and those who do not use it. The final product will be compared with groups of two educational institutions of Higher Education.

INTRODUCCIÓN

En la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH), desde el año 2013, se ha impartido de forma escolarizada el curso de Precálculo, en cinco licenciaturas del Instituto de Ciencias Básicas e Ingenierías (ICBI), como parte de una innovación curricular. Uno de los propósitos de la reforma de los planes de estudios de dichas licenciaturas fue responder a organismos nacionales e internacionales, mediante lo cual le pudiera posibilitar a sus egresados tener acceso a los mercados laborales con mejores estándares de competitividad, según los criterios establecidos por la UNESCO, OCDE (2005) entre otros (UAEH, 2007, pp. 14-27). Los cursos de matemáticas de los planes de estudio de las carreras, antes del año citado, iniciaban con Cálculo Diferencial e Integral y/o Álgebra Lineal. Los docentes miembros de las academias, han manifestado que los estudiantes matriculados en el curso escolarizado de Precálculo, no han tenido una mejoría significativa de saberes con respecto a los niveles educativos previos y que sus actitudes de responsabilidad no han prosperado, como pudiera haberse esperado de una mejora curricular (Rondero, Reyes & Acosta, 2015). Por otro lado haciendo una autocrítica, durante el proceso de preparación para la implementación del modelo curricular, no hubo una capacitación disciplinar docente, que permitiera afrontar dicho cambio. Por dicha razón, la Academia de Matemáticas Básicas y el Grupo de Investigación en Tecnologías Avanzadas Aplicadas a la Educación del ICBI, decidió crear un MOOC (Massive Open Online Course) de Precálculo como un instrumento alternativo para apoyar los aprendizajes de los estudiantes de la UAEH, y que incluso pudiera ampliarse, para otros propósitos. El presente artículo tiene la intención de mostrar ciertos aspectos de la manera en que se seleccionaron algunos de los ejercicios que se están incluyendo en el MOOC, bajo una tipología metodológica propia del grupo de trabajo (Ortiz & García, 2000): introductorios, representativos, difíciles o confusos. Los temas del Programa de Precálculo son: Números Reales, Operaciones Aritméticas, Conjuntos, Operaciones Algebraicas, Trigonometría, Ecuaciones y Desigualdades, Concepto de Función, y Transformación de Funciones. Los temas que se han seleccionado, han sido en base a la experiencia de los profesores partícipes en el proyecto.

CONSIDERACIONES TEÓRICO METODOLÓGICAS

La Matemática Educativa enmarcada como una disciplina factual trata de explicar hechos educativos del aprendizaje de la matemática, mantiene un orden de conocimientos, los cuales los estructura y los relaciona. La relación, estructura y orden que guardan los conocimientos, constituyen su aspecto formal; es decir que todas las ciencias tienen una forma, una columna vertebral que las sostiene; esa estructura está dada por la razón. Pero, el contenido de las ciencias factuales son los hechos y a ellos se tiene acceso mediante la experiencia (Imaz, 1987). Se han considerado las dificultades detectadas durante las clases presenciales impartidas durante los últimos tres semestres por los profesores participantes en el proyecto, en el sentido como lo dice Bachelard: “es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones” (Bachelard, 2004, p. 15).

> ….De ahí que toda cultura científica deba comenzar, por una catarsis intelectual, queda luego la tarea más difícil: poner la cultura en estado de movilización permanente, reemplazar el saber cerrado y estático por un conocimiento abierto y dinámico, dialectizar todas las variables experimentales, dar a la razón motivos para evolucionar. (Bachelard, 2004, pp. 19-21).

Por otra parte la semiosis (Eco, 1979), considerada como cualquier actividad, conducta o proceso que involucre un sistema de signos, juega un papel preponderante en la Didáctica de la Matemática, ya sea que su docencia se imparta en forma presencial o en línea, vía Internet. Ubicar en escena las representaciones semióticas no sólo es indispensable para fines de comunicación, sino son necesarias para el aprendizaje de las ideas matemáticas, y es importante no confundir los objetos matemáticos con sus propias representaciones.

Se entiende por representación mental a la imagen y concepción que un individuo puede tener acerca de un objeto, sobre una situación y sobre aquel que esté asociado. Entonces, una representación semiótica es el medio a través del cual un individuo exterioriza sus ideas, esto es, las hace visibles y accesibles a otras personas, para su comunicación y/o enseñanza. Lo anterior envuelve diversos sistemas semióticos: lingüístico, numérico, algebraico y visual o gráfico, y sus respectivas transformaciones de un sistema a otro (Duval, 1999). En lo que respecta al instrumento en línea, en lo general denominado MOOC, es una forma pedagógica a distancia y abierta y generalmente usada para cursos de pregrado a través de plataformas educativas en Internet, y cuya filosofía es la liberación del conocimiento para que éste llegue a un público más amplio (Torres, 2014). Sin embargo, la intención de su construcción en la UAEH es como una herramienta alterna que auxilie a solventar las dificultades del aprendizaje de los estudiantes que estudian Precálculo. Sus características básicas, en lo general de cualquier MOOC, son: tiene una estructura encaminada al aprendizaje, con sus propias evaluaciones, que validan los saberes alcanzados; es de naturaleza masiva, lo cual permite atender a más personas que en un curso presencial; en línea, esto es a través de Internet, como principal medio de comunicación; abierto, o sea que los materiales están al alcance de forma gratuita; y se pueden usar en otros cursos (Torres, 2014).

Este MOOC de precálculo en particular se ha fundamentado en la versión presencial del mismo, tratando de reproducir los hechos didácticos cotidianos del aula, enriqueciéndolos con representaciones gráficas, numéricas, algebraicas y verbales, cuando ha sido posible, esto es, se incorporan determinadas representaciones semióticas y sus transformaciones. El MOOC propuesto respeta los estándares establecidos de aquellos cuyos fines son también los educativos; atienden a grandes matrículas, son conducidos por profesores universitarios que imparten tal curso y se basan en un modelo de evaluación muy parecido a las clases tradicionales, con pruebas estandarizadas y concretas.

Debido a lo peculiar de la problemática (Ortiz & García, 2000), los temas se seleccionaron y clasificaron en base a la experiencia de los profesores partícipes en el proyecto, quienes imparten el curso de manera escolarizada, y fundamentada en la metodología específica del grupo de investigación, bajo el criterio dado por la tipología: introductorios, representativos, difíciles y confusos.

SELECCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS

Hasta el momento se tiene un avance parcial en la construcción del MOOC. Acerca del tema de Números Reales, como tipología representativa e introductoria, se abocetó una lámina dinámica con la clasificación respectiva, y los respectivos conceptos de los números, Naturales, Enteros, Racionales e Irracionales. Dentro de los números naturales se diseñó una sucesión de láminas

representativas con audio para la explicación del concepto y cálculo del Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo, utilizando la descomposición en números primos (Tsipkin, 1985). Otro ejemplo representativo es la transformación de un número racional presentado de manera decimal periódica, aquí se grabó a un profesor resolviendo un ejemplo (Stewart, Redlin y Watson, 2001).

Por otra parte en el tema de desigualdades, se decidió resolver:

$$\frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 - x^2} \leq 0$$

Se considera, por la experiencia en el aula como un ejercicio de tipología difícil, tal es la razón de haberla grabado en vivo con un profesor. Primero se factoriza el numerador por agrupación (diferencia de cubos y diferencia de cuadrados);

$$x^3 + 3x^2 - 3 - 1$$
$$(x^3 - 1) + 3(x^2 - 1)$$
$$(x-1)(x^2 + x + 1) + 3(x+1)(x-1)$$
$$(x-1)(x^2 + x + 1 + 3x + 3)$$
$$(x-1)(x^2 + 4x + 4)$$
$$(x-1)(x+2)^2$$

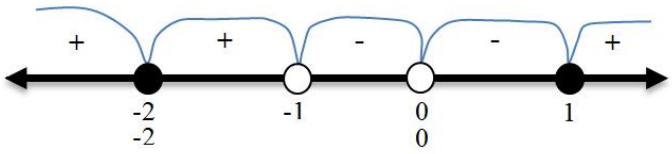
y después por factor común en el denominador,

$$x^3 + x^2 = x^2(x+1)$$

quedando la desigualdad:

$$\frac{(x-1)(x+2)^2}{x^2(x+1)} \leq 0$$

Su solución empleando el método de gráfico de intervalos es:



$$Sol: \; x \in [-2] \cup (-1, 0) \cup (0, 1]$$

Un e*ntorpecimiento* o *confusión* (Bachelard, 2004) para interpretar la solución de la desigualdad, que se ha recabado de la experiencia de los docentes que han enseñado este tipo ejercicios, se presenta cuando las "raíces" del denominador no se articulan con los puntos de discontinuidad infinita de la función asociada; además de la dificultad de entender la similitud de signo en regiones contiguas al tener raíces de multiplicidad par. Como la desigualdad incluye el igual (=) las raíces del numerador serán cerradas, esto es, en su representación pictórica (gráfica) en la recta numérica es con un círculo cerrado, y las representaciones respectivas de las raíces del denominador son mediante círculos sin llenar.

También se ha puesto énfasis en ciertos errores algebraicos (Stewart, Redlin y Watson, 2001), que algunos estudiantes aun cometen en escuelas profesionales, por una interpretación equivocada de

las propiedades de los números reales y de sus operaciones, lo cual dio pauta a la selección de ciertas láminas específicas.

i. Un error que se presenta es el que los estudiantes hacen al igualar las siguientes expresiones:

$$\sqrt{\boldsymbol{a+b}} = \sqrt{\boldsymbol{a}} + \sqrt{\boldsymbol{b}}$$

Ya que llegan a confundirse con la propiedad:

$$\sqrt{\boldsymbol{ab}} = \sqrt{\boldsymbol{a}}\sqrt{\boldsymbol{b}}$$

y donde no se aclara que sólo se cumple si $\boldsymbol{a = 0}$ *y* $\boldsymbol{b = 0}$ *ó al menos* $\boldsymbol{a = 0}$ *y* $\boldsymbol{b \neq 0}$ *o viceversa; pero cuando ambos son distintos de cero,* $\boldsymbol{a \neq 0}$ *y* $\boldsymbol{b \neq 0}$ *la igualdad no se cumple.*

La explicación videograbada trata precisamente, de que mediante un ejemplo numérico se patentiza el hecho:

Si por ejemplo $a = 16$ *y* $b = 9$*, se aprecia el error*

$$\sqrt{16+9} \stackrel{?}{=} \sqrt{16} + \sqrt{9}, \qquad \sqrt{25} \stackrel{?}{=} 4 + 3$$

¡Lo cual evidentemente es incorrecto!

$$5 \stackrel{?}{=} 7$$

ii. Un segundo equívoco algebraico, también frecuente es la cancelación de un término cuando no es factor, a veces, como ya se dijo, por mala interpretación de las propiedades de los números reales y de sus operaciones (donde lleva inmerso el empleo incorrecto de paréntesis, desconocimiento de las leyes de los signos, etc.). Donde por ejemplo en particular se llega a escribir, al cancelar x^2 del numerador y del denominador,

$$\frac{\boldsymbol{x^2 - 1}}{\boldsymbol{x^2 + x - 2}} \stackrel{?}{=} \frac{\boldsymbol{-1}}{\boldsymbol{x - 2}}$$

¡Lo cual evidentemente es incorrecto, para x≠0!

Por confundirse con la propiedad:

$$\frac{\boldsymbol{AB}}{\boldsymbol{AC}} = \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{C}}$$

iii. Otro desacierto se origina al igualar expresiones $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b+c}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} + \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}}$,

la cual se cumple cuando $\boldsymbol{a = 0}$*, sin embargo cuando* $\boldsymbol{a \neq 0}$ *, no son iguales* $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b+c}} \neq \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} + \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}}$ *; estos comentarios fueron esencia de una explicación video grabada, además de una explicación con números:*

Si, por ejemplo $\boldsymbol{a = 4, b = 2\ y\ c = 2}$*, entonces se aprecia el error*

$$\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{2+2}} \neq \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{2}} + \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{2}}$$

¡Lo cual evidentemente es incorrecto!

$$\boldsymbol{1} \neq 4$$

iv. Otro error frecuente es en el desarrollo de un binomio al cuadrado, donde algunos estudiantes generalizan

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2$$

y donde no se percatan que sólo se cumple para cuando $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ *y* $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ *ó al menos* $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ *y* $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ *o viceversa. La aclaración que se video grabó, es abordada precisamente, a través de un ejemplo numérico:*

Si, por ejemplo $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{3}$ *y* $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{2}$*, se tiene:*

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2\neq\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2, \qquad (\boldsymbol{3}+\boldsymbol{2})^2\neq\boldsymbol{3}^2+\boldsymbol{2}^2, \qquad \boldsymbol{5}^2\neq\boldsymbol{3}^2+\boldsymbol{2}^2$$

¡Lo cual evidentemente es incorrecto!

$$25\neq 13$$

v. Otro desacierto algebraico que aparece en los cursos de Precálculo es que los estudiantes igualan la expresión:

$$\boldsymbol{a}^{-1}+\boldsymbol{b}^{-1}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{-1}$$

Esto también motivó su selección de video grabación, explicándolo con un ejemplo numérico:

Si, por ejemplo $a=\boldsymbol{3}$ *y* $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{2}$*, se tiene:*

$$\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}}+\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{b}}\neq\frac{\boldsymbol{1}}{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}, \qquad \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}+\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\neq\frac{\boldsymbol{1}}{(\boldsymbol{3}+\boldsymbol{2})}, \qquad \frac{\boldsymbol{2}+\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{6}}\neq\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{5}}$$

¡Lo cual evidentemente es incorrecto!

$$\frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{6}}\neq\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{5}}$$

CONCLUSIONES

La intención de diseñar el MOOC no implica apartarse de la forma escolarizada de impartir el curso de precálculo, sino que esta herramienta pretende ser un apoyo que mejore sus propósitos. Sin embargo, hay resultados de investigación, que tratan de incorporar a la didáctica el rescate de ideas germinales (Acosta, Rondero y Tarasenko, 2013), para un mejor entendimiento de la matemática; que desde la perspectiva del origen de las nociones han dado pautas a los saberes, los cuales son elementos importantes para el diseño de las estrategias de aprendizaje en los escenarios escolares actuales.

En otro sentido, la manera específica de seleccionar los temas para el MOOC, fue en base a la experiencia de los profesores que han impartido el curso presencial, se tipificaron en: introductorios, representativos, difíciles o confusos. En específico los problemas se video grabaron o se pusieron en láminas, de forma metódica bajo dichos criterios de caracterización. La elección de los mismos fue con fundamento en los *entorpecimientos y las confusiones* (Bachelard, 2004) que tienen los estudiantes, detectados en los cursos escolarizados de los docentes actores del proyecto. Por otra parte, ya en la grabación de las láminas con explicación mediante voz, y de los videos, se están incluyendo representaciones semióticas de los objetos matemáticos y sus transformaciones de sus registros, dando una mayor riqueza conceptual a los significados que aparecen en ellos. En el momento en que el MOOC esté en línea, de manera parcial, se efectuará una experimentación con un tema, haciendo el contraste de su impacto entre un grupo de estudiantes que lo emplean, con otro que no lo usan. Posteriormente, cuando ya esté concluido en su totalidad se pondrá a prueba con estudiantes de la UAEH y de la Universidad Tecnológica de

Tulancingo, y se recabará información de ambas instituciones, en sus versiones tanto presenciales versus virtuales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acosta, J. A., Rondero, C., Tarasenko, A. (2013). Las nociones de linealidad y promediación como elementos articuladores en la didáctica. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 26 (1), 99-108. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Bachelard, G. (2004). *La formación del espíritu científico* (25ª ed.). México: Siglo XXI editores.

Calderón, J. (2014). *Economía Digital. Curso MOOC.* México: Alfaomega.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Cali: Universidad del Valle.

Eco, U. (1979). *Tratado de semiótica general.* Barcelona: Lumen.

Imaz, C. (1987) ¿Qué es la Matemática Educativa? México: CINVESTAV-IPN, Recuperado de http://www.caja-pdf.es/2014/01/29/que-es-la-matematica-educativa/preview/page/1/

OCDE. (2005). *Informe PISA 2003. Prender para el mundo de mañana.* Madrid: Santillana.

Ortiz, F., García, M. (2000). *Metodología de la Investigación. El proceso y sus Técnicas.* México: LIMUSA.

Rondero, C., Reyes, A., Acosta, J.A. (2015). Seguimiento de una Innovación Curricular: una Asignatura de Matemáticas. *European Scientific Journal, 11(6),* 95-115.

Stewart, J. Redlin, L., Watson, S. (2001) *Precálculo*. México: Thomson.

Torres, D., (2014) *MOOC Curso Online*. En Mochón, F., Gonzálvez, J. C., Calderón, J. (coordinadores) (2014) *Economía Digital. Curso MOOC.* México: Alfaomega

Tsipkin, A. (1985) *Manual de Matemáticas para la Enseñanza Media*. USSR: Editorial Mir.

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo [UAEH] (2009) *Modelo Curricular Integral.* Recuperado de http://www.uaeh.edu.mx/docencia/docs/modelo _educativo_UAEH.pdf

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA INGENIERÍA POR PROYECTOS USANDO HOJA ELECTRÓNICA

Jorge Ávila Soria
Universidad de Sonora (México)
javilas9@gmail.com

Palabras clave: métodos numéricos, enseñanza con proyectos, hoja de cálculo, enseñanza holística

Key words: numerical methods, teaching with projects, spreadsheet, holistic teaching

RESUMEN: Los métodos numéricos se empiezan a usar desde el nivel básico y los estudiantes de ingeniería continúan su aprendizaje y utilización durante toda su actividad profesional. En el nivel superior, se busca que los estudiantes de ingeniería fortalezcan su conocimiento y entendimiento de los métodos numéricos estudiados, para que sigan utilizándolos, no sólo en el resto de su que haber estudiantil, sino en su vida profesional. El uso de la hoja electrónica permite al estudiante, no sólo modelar y programar los métodos numéricos, sino interpretar el funcionamiento de estos e identificar los valores que aplicará en la resolución de problemas.

ABSTRACT: Numerical methods are beginning to be used since the elementary level and engineering students continue their learning and use during all his professional activity. At the undergraduate level, it is necessary for engineering students to strengthen their knowledge and understanding of the numerical methods, to continue using them, not only in the remaining of their studies, but in their professional life. The use of the spreadsheet allows students not only modeling and programming numerical methods, but interpret the operation of these and identify the values that apply in resolving problems

INTRODUCCIÓN

Los métodos numéricos se empiezan a usar desde el nivel básico y los estudiantes de ingeniería continúan su aprendizaje y utilización durante toda su actividad profesional. En el nivel superior, se incluyen materias como métodos numéricos o análisis numérico, buscando que los aspirantes a ingenieros fortalezcan su conocimiento y entendimiento tanto de los métodos numéricos estudiados con anterioridad, como de nuevos y útiles métodos que aún no ha estudiado, y así sigan utilizándolos en el resto de su quehacer estudiantil y en su vida profesional.

Nosotros promovemos el uso de la hoja electrónica para la enseñanza de los métodos numéricos, porque creemos firmemente que la hoja electrónica permite al estudiante, no sólo modelar y programar los métodos numéricos, sino interpretar el funcionamiento de estos e identificar o localizar los valores que necesita aplicar en la resolución de los problemas matemáticos que encuentre tanto en su vida profesional como diaria.

METODOLOGÍA DE DISEÑO Y MARCO TEÓRICO

La metodología de diseño y marco teórico que utilizamos en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de esta materia, están fundamentados en ACODESA, propuesta por Hitt (2009), con la cual se busca que con el uso de manipulables se promueva la producción de representaciones funcionales por los estudiantes, lo cual creemos es fundamental para que estos tengan una mejor retención de las construcciones matemáticas estudiadas. De acuerdo con Hitt y Cortés (2009), entre los diversos marcos teóricos que soportan ACODESA, están el de campos conceptuales de Vergnaud, el de representaciones semióticas de Duval, y el de situaciones didácticas de Brousseau, los cuales vienen a fortalecer la propuesta de diseño de situaciones didácticas de acuerdo con la metodología aquí usada.

ACODESA está acorde con el uso de una hoja electrónica, ya que sirve al estudiante para manipular lo que se programa en ella. Por otra parte, también buscamos detonar el aprendizaje colaborativo por medio del debate científico de las ideas planteadas durante los procesos de modelación, implementación y resolución del problema, además de la auto-reflexión sobre los problemas tratados y los temas estudiados. Queremos que el estudiante reflexione sobre las diferentes representaciones tratadas, así como sobre las diversas herramientas utilizadas en la implementación de los proyectos, ya sea en la forma de los Métodos Numéricos involucrados en la conformación del proyecto, como en el uso hecho de los comandos de la hoja electrónica necesarios en la programación, no sólo del proyecto, pero de los propios métodos individualmente.

CONSIDERACIONES PARA LA IMPLEMENTACIÓN

A pesar de que ACODESA busca el aprendizaje colaborativo como uno de sus elementos principales, también busca el trabajo individual, lo cual se hace difícil cuando faltan computadoras para todos los estudiantes. Sin embargo, la implementación de la metodología ACODESA puede ser modificada dependiendo de la situación que se presente, pero no es recomendable que más de dos personas trabajen en una misma computadora y el número ideal de estudiantes por computadora sigue siendo uno; por lo tanto, para grupos grandes (40 estudiantes normalmente, laboratorio computacional 20 computadoras promedio) es recomendable partir el grupo en dos, si es que las computadoras no alcanzan para todos. Para grupos poco numerosos sería preferible

permitir dos alumnos por computadora, para no tener la mitad de las horas del curso con los estudiantes, pues esto siempre afectará al curso. Para terminar con este punto, diremos que se pueden tener peores problemas, como serían un grupo grande y un laboratorio de cómputo con pocas computadoras o peor aún, no contar con laboratorio, en cuyo caso, nuestra propuesta perdería algo de sentido y su implementación tendría que ser modificada para una modalidad a distancia.

En cualquiera de las modalidades acorde a las disponibilidades del equipo de cómputo, la metodologías de diseño ACODESA debe ser modificada para que cada estudiante intervenga en un proceso que incluye el debate de las ideas con sus pares en otras estaciones de trabajo (computadoras), interaccionar entre las estaciones de trabajo y el instructor, grupal con toda la clase y finalmente auto-reflexivo (individual) después de cada sesión. Cualquiera que sea el caso, sólo recomendamos una implementación en base a nuestros parámetros, cuando se cuente con un centro de cómputo apropiado para número de estudiantes y que esté disponible por al menos el 80% de las horas de clase.

El propósito de la utilización de la hoja de cálculo en lugar de otros software disponibles para hacer métodos numéricos es su disponibilidad, pues existen múltiples versiones de hoja de cálculo gratuitas, tanto para instalación como para ser usadas en la web y la facilidad que tienen estas para mostrar el procesado de los números. En comparación, el caso de Matlab se encuentra con diversas dificultades, como el hecho de que no sea un software gratuito, que no se encuentra instalado en todos los laboratorios, cuando lo tiene el departamento hay que pedir que lo instalen a la brevedad posible, solo se puede instalar en los laboratorios de la institución legalmente, y es posible que el laboratorio tenga varias deficiencias de funcionalidad como sería el caso de computadoras obsolescentes, de infestación por virus o malware, o de configuración por deterioro que impidan su uso normal y continuo.

En el caso de cualquier otro lenguaje programable de propósito general, hemos encontrado que los estudiantes no tienen en su mayoría una formación, ni siquiera mediana en programación, lo cual dificultaría grandemente su desempaño y los alcances del curso.

PROPUESTA DE TRABAJO PARA EL CURSO

Nuestra propuesta para este curso es hacer que cada estudiante elabore un proyecto que sirva para resolver problemas matemáticos que posiblemente sepa o haya visto resolver con lápiz y papel o con algún implemento tecnológico, pero que sean suficientemente complejos como para requerir el uso combinado de múltiples métodos numéricos de los estudiados. El objetivo es mostrar a los estudiantes lo que se puede hacer cuando juntas algunos de los métodos implementados en la hoja electrónica y los pones a trabajar juntos de manera organizada para dar respuesta a alguna situación-problema compleja.

Dependiendo del número de alumnos que decidan tomar la materia hasta el final del curso, permitirá decidir el número de estudiantes que compartan un mismo proyecto, sin que esto signifique la entrega de un solo proyecto en equipo, pero si dejando la posibilidad del trabajo colaborativo, es decir en equipo, entre estudiantes con el mismo proyecto e incluso con proyectos diferentes con métodos compartidos. Consideramos que se debe de contar con tres a cinco proyectos diferentes con variaciones en cuanto al tipo de métodos utilizados para un proyecto

particular, esto con el propósito de diversificar las diferencias entre los proyectos, incluso cuando estos persiguen el mismo propósito. Si el número de estudiantes es mayor que diez podría requerirse que varios estudiantes tengan exactamente el mismo proyecto, pero es común que los estudiantes no concluyan un curso con estas características, pues por diversas razones pudieran sentirse agobiados con la cantidad de métodos que se busca implementen.

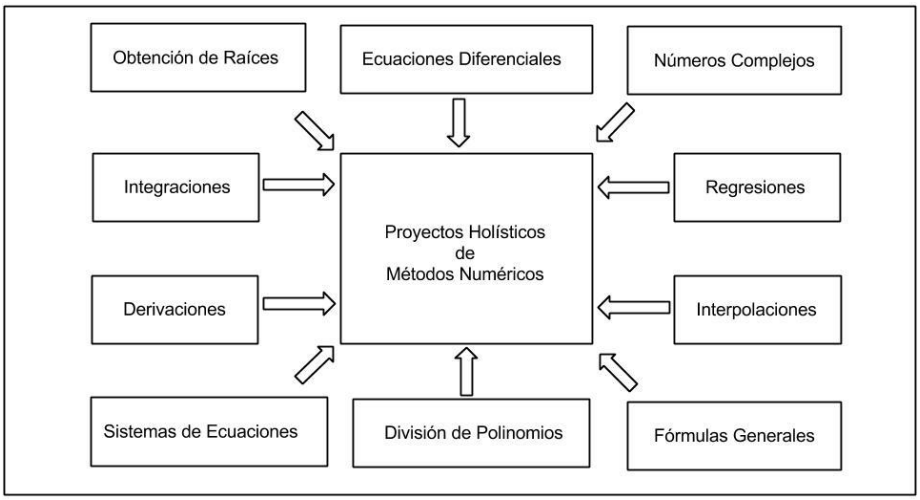
A pesar de que el curso de métodos numéricos requiere que los estudiantes hayan cursado un semestre de algún lenguaje de programación, es nuestra experiencia que llegan en su mayoría con muchas deficiencias en programación de cualquier tipo, esto aun cuando los estudiantes usan tecnología digital con familiaridad, pues la usan prácticamente desde su nacimiento.

El desarrollo de nuestra propuesta ha evolucionado durante múltiples imparticiones del curso de Métodos Numéricos para Ingenieros y hemos llegado a un punto en el que se le requiere a cada estudiante la elaboración de un proyecto que sirva para resolver problemas matemáticos que posiblemente sepa o haya visto resolver con lápiz y papel o con algún otro implemento tecnológico, pero que sean suficientemente complejos como para requerir el uso combinado de múltiples métodos numéricos de entre los estudiados. El objetivo es mostrar a los estudiantes lo que se puede hacer cuando juntas algunos de los métodos implementados en la hoja electrónica y los pones a trabajar juntos de manera organizada para dar respuesta a alguna situación-problema compleja.

Durante el curso, los estudiantes estudian los Métodos Numéricos que son requeridos en el currículo de la materia y nosotros les proponemos diversos materiales donde pueden ellos apoyarse para entender más allá de la clase, los diversos temas tratados en el curso. Chapra (2012) o cualquier versión disponible de este libro es aceptable, de la misma manera Mora (2013) les ofrece una versión accesible y digital de al menos parte del contenido del currículo.

El principal objetivo del curso es hacer que pueda resolver problemas con estos, lo cual hacen para cada uno de los métodos implementados. Los estudiantes usan, cada método implementado, para resolver problemas sencillos que les permitan tener experiencias de cuando usarlos, cómo funciona la implementación generada para dicho método, las potencialidades y deficiencias del método y la corrección de errores o mejoras en la implementación.

Figura 1. Currículo de Métodos Numéricos.



La Figura 1 presenta un diagrama que muestra a grandes rasgos los temas generales de la materia y en el centro, se relacionan los métodos que son necesarios para la implementación del proyecto asignado al estudiante. Es en esta parte del curso, que el estudiante verdaderamente comprende lo Holístico que el desarrollo de un proyecto puede ser, pues los estudiantes puedan observar directamente durante el proceso de implementación, que el todo es más que la suma de sus partes, ya que el estudiante sabe el uso particular de cada método utilizado, es responsable de la articulación del conjunto de ellos, y también conoce los alcances con los que la implementación finalizada de su proyecto debe cumplir.

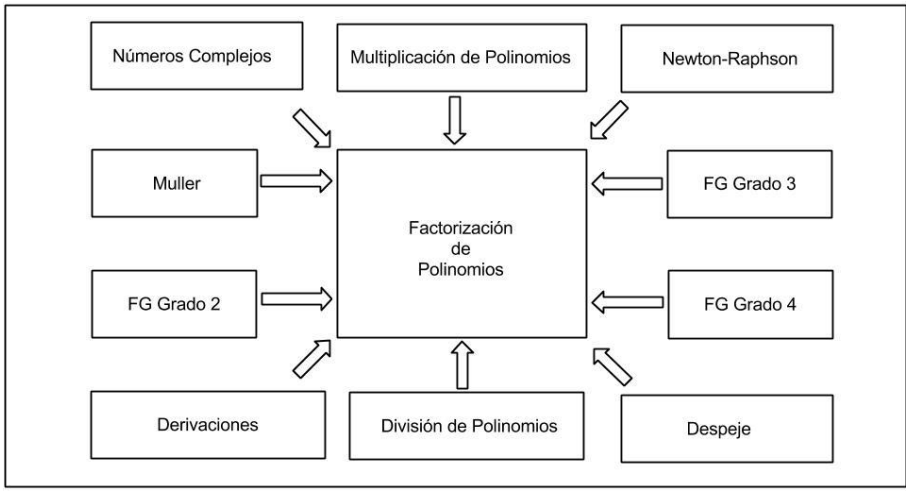
IMPLEMENTACIÓN DE PROYECTOS HOLÍSTICOS INDIVIDUALES

El proyecto final no es el único proyecto que los estudiantes tienen que implementar, pues a modo de entrenamiento, al estudiante se le va enfrentando con proyectos más pequeños donde mejora su capacidad para conectar los métodos numéricos que intervienen en tales casos, de modo que con estas articulaciones de proyectos efectuadas previamente a la asignación de lo que llamamos el proyecto final, el estudiante no sienta un salto tan abrupto entre la implementación de un solo método y la versión de método numérico holístico, en la forma del proyecto. Entre los Proyectos Holísticos que encargamos en el curso, se encuentran los siguientes:

- La resolución de ecuaciones diferenciales e integrales
- El cálculo de probabilidades usando la distribución normal
- La generación de números seudo-aleatorios de una distribución de probabilidad acumulada
- La interpolación polinomial de datos
- La regresión polinomial de datos por mínimos cuadrados
- La integración numérica para el cálculo de longitudes de curvas
- La integración numérica para el cálculo de áreas entre dos funciones
- La integración numérica para el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución
- La integración numérica para el cálculo de centroide de masa
- La factorización de polinomios y obtención de raíces reales y complejas

La Figura 2 contiene un segundo diagrama que muestra, también a grandes rasgos, los métodos que podrían ser necesarios para la implementación de un ejemplo de Proyecto Holístico que sirva para la factorización de un polinomio de grado ***n*** *(sólo se implementa para polinomios de grados 7, como máximo, pero el estudiante entiende perfectamente cómo se podría extender el proyecto hasta cualquier grado deseado)*, como se muestra al centro del diagrama, donde se relacionan todos los métodos que deben ser articulados en la implementación de este proyecto en particular. Al relacionar todos estos métodos, el estudiante que implemente este proyecto holístico, deberá ver con claridad las limitaciones de cada uno de los métodos intervinientes, en contraposición con el beneficio que se obtiene al utilizar conjuntamente varios de ellos para resolver una problemática mayor.

Figura 2. Métodos Numéricos Usados en la Factorización de Polinomios.



Al final de la implementación de cualquier proyecto holístico, la interface de debe quedar de forma que la persona que use el proyecto, sólo introduzca los datos y obtenga resultados de la implementación, a la manera de un comando de la hoja de cálculo. En el caso de la interface para la factorización de polinomios, con la introducción del grado del polinomio y sus coeficientes, el usuario deberá obtener la factorización de éste y sus raíces o soluciones reales y complejas, incluyendo las comprobaciones de que son correctas.

El propósito de cada método usado está bien definido en cada proyecto y para éste en particular, el estudiante aprende que funciona de la siguiente manera. Para describir el funcionamiento del proyecto para la factorización de polinomios usaremos como ejemplo un polinomio de grado 7, debido a que usa casi todos los elementos que mostramos en el diagrama de la Figura 2, excepto el de Despeje, el cual sólo se utiliza para polinomios de primer grado y otro método que no aparece en el diagrama de la Figura 2 es el de determinantes, pues forma parte del método de Müller para raíces múltiples. Supongamos que el polinomio de grado 7 sólo tiene una raíz real y todas las demás son complejas, lo cual quiere decir que el polinomio sólo corta en una ocasión el eje x; por lo tanto el listado de pasos a seguir es como se muestra a continuación:

1. Como debe usarse el método de Newton-Raphson para obtener la raíz real del polonio de grado 7, éste debe ser Derivado primero.
2. Una vez Derivado el polinomio de grado 7, se puede usar el método de Newton-Raphson para obtener la única raíz real del polinomio, la cual es obtenida automáticamente con una búsqueda.
3. Obtenida la primera raíz, se hace una División de Polinomios, donde se dividen los coeficientes del polinomio entre la raíz real, para obtener un polinomio de un grado menor. La primera raíz se guarda.
4. Con el polinomio de grado 6, se usa el método de Müller para obtener 2 raíces complejas, porque aun cuando el método obtiene sólo una raíz, cuando ésta es compleja, automáticamente conocemos 2, pues la otra es su conjugado. De haber sido una raíz real,

se habrían tenido que repetir los primeros pasos para un polinomio de grado 5, pero al conocer 2 de las raíces podremos obtener un polinomio de grado 4.

5. Obtenidas las 2 raíces complejas del polinomio de grado 6, se hace una Multiplicación de Polinomios con los binomios de las raíces complejas, para obtener un trinomio al cuadrado con el que se hará una nueva División de Polinomios.
6. Ahora, estamos en posición de hacer una División de Polinomios, donde se dividen los coeficientes del polinomio entre los coeficientes del polinomio de grado 2, obtenido con las 2 soluciones complejas y obtenemos un polinomio dos grados menor. Esas dos raíces también se guardan y faltan 3 y llevamos 3.
7. Como queda un polinomio de grado 4, se utiliza directamente la Fórmula General de Grado 4 y se obtienen automáticamente las cuatro raíces faltantes. En este momento, parece que los otros elementos del diagrama en la Figura 2, no fueron utilizados, pero al utilizar FG Grado 4, automáticamente se están utilizando FG Grado 3 y FG Grado 2, pues FG Grado 4 requiere de ambas para poder dar resultados. Esta implementación es un pequeño proyecto en sí mismo.
8. Finalmente, se evalúan las raíces de números reales y las de Números Complejos en el polinomio original y se forma la expresión factorizada para desplegarlas como el resultado que arroja el proyecto.

En la Figura 3 mostramos un ejemplo de la interface de un proyecto para la Factorización de Polinomios. La implementación de la interface podría verse de esa manera para el proyecto propuesto en la Figura 2, pero en realidad, es el estudiante quien toma esas decisiones, ya que el rol del docente se reduce a explicar los proyectos, especificar su implementación y dar consejos en lo referente a la programación en la hoja de cálculo. La libertad otorgada al estudiante con respecto al diseño de la interface y la organización en la articulación de los métodos programados, hacen que el resultado final sea infinitamente diverso y quizás hasta colorido.

RESULTADOS

Los resultados obtenidos han sido interesantes y satisfactorios. No todos los proyectos tienen una funcionalidad del 100%, pero el 75% de nuestros estudiantes logra al menos un 70% de avance en sus proyectos y un 30% logra un avance del 90% al finalizar el curso.

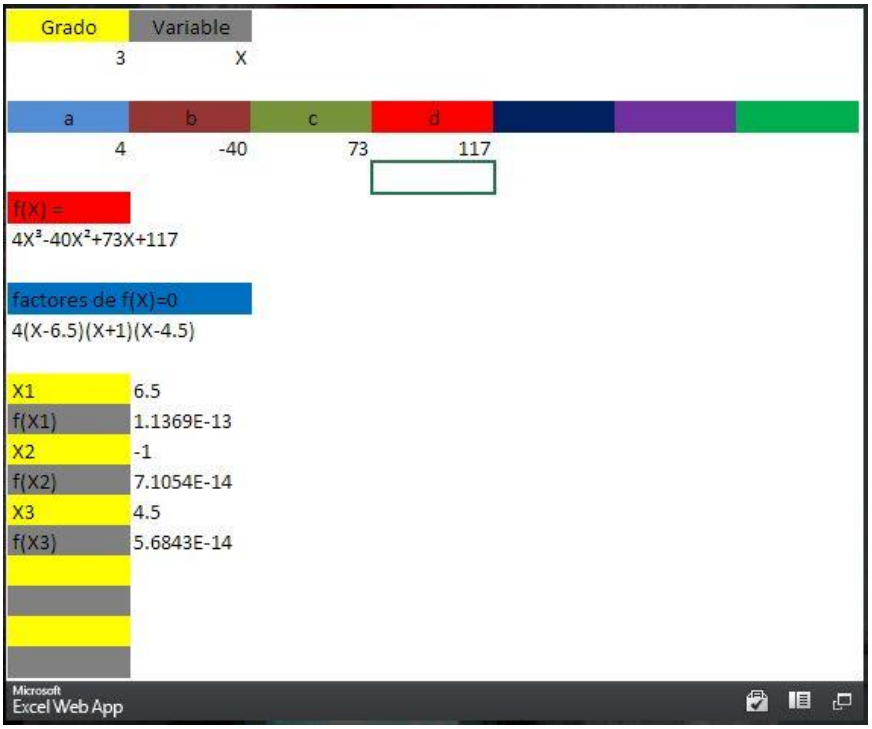
Este curso puede ser catalogado como exigente y de mucho trabajo, pues de los alumnos que se inscriben en éste, entre un 50% y 60% se dan de baja luego de no hacer las implementaciones pedidas y esto lo sabemos, porque toda la programación se efectúa en la Nube, en archivos compartidos con el docente, quien monitorea el avance en las implementaciones de cada estudiante y de esta manera puede evaluar su desempeño durante todo el curso.

CONCLUSIONES

Creemos que los estudiantes que terminan satisfactoriamente el curso, tienen la idea de haber hecho algo que puede seguir utilizando y mejorando, por las expresiones observadas cuando logran que funcione alguna parte del proyecto y puede ver que los diversos métodos utilizados

empiezan a trabajar conjuntamente de manera apropiada. También, muchos o esa tos estudiantes nos comentan la manera en algún método o proyecto les ha sido útil en otras materias o en trabajos externos de trabajos foráneos o prácticas profesionales.

Figura 3. Applet para la Factorización de Polinomios.



REFERENCIAS BIBLIGRÁFICAS

Chapra, C. S., Canale, P. R. (2012). *Métodos numéricos para ingenieros*, Quinta edición, McGraw-Hill.

Hitt, F. (2009). *Resolución de situaciones problema y desarrollo de competencias matemáticas en ambientes de aprendizaje en colaboración, debate científico y auto-reflexión* (ACODESA), Primer Seminario sobre Resolución de Problemas y el Uso de la Tecnología Computacional, pp. 9-21.

Hitt, F., Cortés, J. C. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet,* 10 (1), 1-30. Recuperado de www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/

Mora, W. (2013). Introducción a los métodos numéricos, *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*. Actualizado 02-2013 Recuperado de www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/Libros/WMora_MetodosNumericos/WMora-ITCR-MetodosNumericos.pdf

UNA PROPUESTA PARA ARTICULAR LAS FORMAS DE REPRESENTACIÓN DEL FENÓMENO A PARTIR DEL MOVIMIENTO UNIFORME ACELERADO

Fredy de la cruz Urbina, Hipólito Hernández Pérez
Universidad Autónoma de Chiapas. México
frecu@hotmail.com, polito_hernandez@hotmail.com

Palabras clave: modelación, movimiento, formas de representación, resignificación

Key words: modelling, movement, forms of representation, resignification

RESUMEN: Partimos de los aspectos teóricos-epistemológicos de la Socioepistemología para generar un marco de referencia que permita la resignificación de la Función Cuadrática y sus formas de representación (gráfico, numérico y analítico) en situación de modelación del movimiento, con la finalidad de desarrollar herramientas para intervenir en una situación a través del "uso de las formas de representación" como modelos, es decir, favorecer el tránsito entre las formas de representación de la función, de los argumentos y significados expresados por los estudiantes.

ABSTRACT: We start from the theoretical and epistemological aspects of Socioepistemology to create a framework that allows the redefinition of the quadratic function and its forms of representation (graphical, numerical and analytical) for modeling the movement situation, in order to develop tools for intervene in a situation through the "use of forms of representation" as models, that is to say promoting the transition between forms of representation of the function, arguments and meanings expressed by students.

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas proveen herramientas poderosas que nos permiten comprender e intervenir en los fenómenos de movimiento uniforme acelerado (MUA) y situaciones de nuestro entorno, por tanto, se ha consolidado como una disciplina necesaria en los contenidos de los planes y programas de estudio de los diferentes niveles educativos, sin embargo, se ha observado cierta resistencia en la mayoría de los alumnos en "querer aprender" Matemáticas porque les resulta difícil y muchas veces no tienen sentido para ellos, como dice Arrieta (2003) el alumno busca una intencionalidad; esto puede deberse a que mucha de la matemática que existe en la escuela poco o nada tiene que ver con lo que sucede fuera de ella y se supone que la enseñamos para que el alumno mejore su vida. En ese sentido, Cordero (2013) argumenta que desde un inicio se imponen los contenidos y los métodos que el alumno debe poseer, se establece un discurso centrado en el objeto matemático donde los *usos* del conocimiento han sido soslayados generando dificultades en su aprendizaje, y es en ese escenario y con esas condiciones que deben aprender los estudiantes. En la investigación de Arrieta y Díaz (2015) refieren que existe una separación entre la escuela y su entorno; Courant y Robbins (2014) mencionan que "la enseñanza de las matemáticas ha degenerado a veces en ejercicios vanos de mera resolución de problemas, que pueden desarrollar habilidad formal, pero no conducen a una comprensión real o a una mayor independencia intelectual" (Courant y Robbins, 2014, p. 14). Al respecto, Morales y Cordero (2014) comentan que la matemática escolar no tiene marcos de referencia para que la matemática se *resignifique*, es decir, se le dé significado al conocimiento matemático (CM) a través de sus usos y es allí donde la Socioepistemología ha contribuido en el desarrollo de epistemologías que favorecen la construcción social del conocimiento matemático basado en prácticas sociales.

Es desde esta perspectiva que se pretende intervenir en el sistema didáctico a través del diseño de una situación cuyo argumento es la categoría de Modelación – Graficación (M – G) retomada de Suárez (2008), considerando además aspectos de *funcionamiento* y *forma (fu* y *fo)* como referentes metodológicos que darán cuenta del uso del conocimiento matemático (Cordero y Flores, 2007; Briceño, 2013; Zaldívar, 2014; Cen, 2015).

Se pretende que el alumno construya argumentos y significados a través del uso del CM en situaciones específicas para intervenir en ella. Nuestra propuesta parte de situaciones de movimiento (SDM) para resignificar aspectos de la función cuadrática (FC) y sus formas de representación (numérico, gráfico y algebraico) en alumnos que cursan el primer semestre de bachillerato haciendo uso de la M – G como práctica social.

Creemos que el alumno puede desarrollar *herramientas* para intervenir en una situación a través del "uso de las formas de representación", que a su vez, de acuerdo con la postura de Arrieta (2003) se constituyen en modelos cuando son usados con intención. Pensamos que la *visualización* de acuerdo con Cantoral (2013), puede ayudar como punto de partida para identificar elementos, desarrollar conjeturas, estimular la intuición y la creatividad en los alumnos para introducirse por medio de ella en la situación.

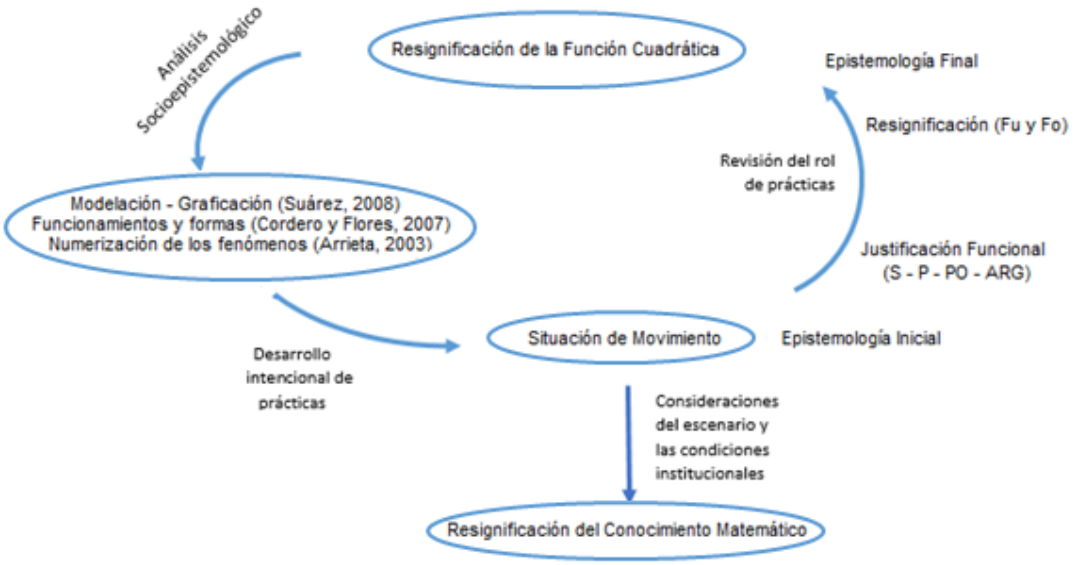
MARCO DE REFERENCIA

La investigación está sustentada con la Teoría Socioepistemológica basada en prácticas sociales, partimos de la *modelación* como "un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la

argumentación. Y por otro lado es una práctica que trasciende y se resignifica, que transforma el objeto en cuestión" (Cordero, 2013, p. 17), de esta práctica emergen otros constructos que en algunos casos se han denominado "categorías" o bien se conciben como "prácticas" de ellas retomamos dos: la *numerización de los fenómenos* que parte del análisis numérico (Arrieta, 2003) y la Modelación – Graficación que se centra en el uso de la gráfica (Suárez, 2008). Con estos referentes planteamos construir diferentes formas de representación del fenómeno de MUA, como la gráfica, la tabla numérica y la expresión algebraica; considerando además, ciertos elementos epistemológicos como las *realizaciones múltiples, la identificación de patrones, la realización de ajustes y el establecimiento de reglas*, con base a los trabajos de Oresme y Galileo (Artigas, 1989; Cantoral, 2001; Arrieta, 2003; Suárez, 2008).

A manera de hipótesis decimos que la interacción entre la situación y estas formas de representación permite la construcción de herramientas o modelos que favorecen la intervención y comprensión del fenómeno de MUA. Pensamos que la práctica de *numerización de los fenómenos* y la *categoría de la Modelación-Graficación* de MUA constituyen un medio que facilita la interrelación entre los contextos gráfico, numérico y algebraico de donde emerge el desarrollo de argumentos y significados a través del *uso del CM* en una SDM. Es así que con base al esquema metodológico de Montiel y Buendía (2012), hemos conformado la metodología que guía la presente investigación tal y como se aprecia en la figura 1; donde nuestra problemática es la resignificación del objeto matemático; nuestros referentes teóricos-epistemológicos: la M – G, la numerización de los fenómenos de MUA y los funcionamientos y formas (Fu-Fo); desarrollamos una situación donde se ponen en funcionamiento dichos aspectos y finalmente realizamos el análisis de los resultados a través de la resignificación que da cuenta del uso del CM considerando los elementos de *funcionamiento* y *forma* y la *justificación funcional* conformada por *significados*, *procedimientos*, *procesos-objetos y argumentos (S- P- PO- ARG)* (Flores y Cordero, 2007).

Figura 1. La metodología de la investigación



Fuente: Elaboración propia con base a Montiel y Buendía, 2012, p. 63

Cordero y Flores (2007) argumentan que *los usos* están conformados por *funciones* específicas que dependen de la situación y que conllevan a *formas* específicas: El *funcionamiento del uso* se expresa por las tareas que componen la situación y la *forma del uso* queda establecido por la clase de esas tareas. En ese sentido Cen (2015, p. 32) menciona:

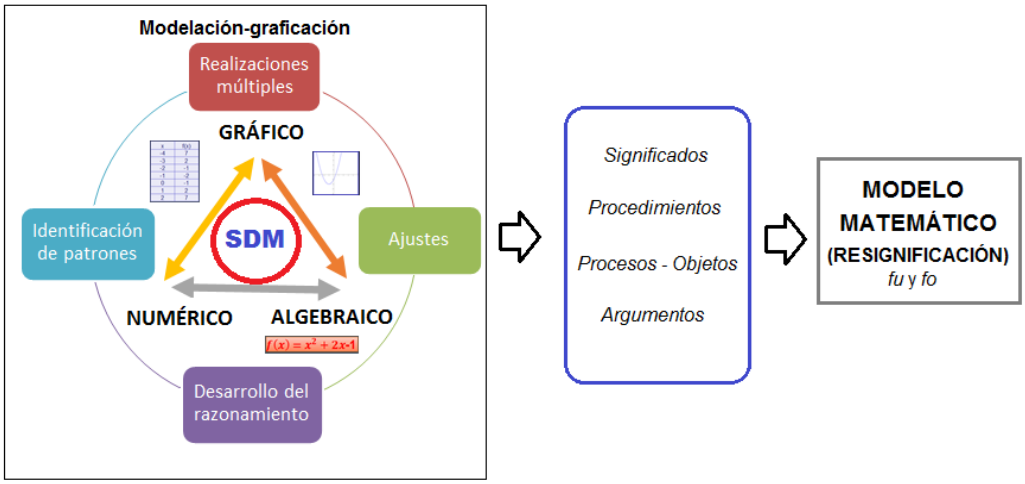
> "los funcionamientos del uso de la gráfica presentados están sujetos a las acciones que sugiere alguna situación, mientras que la forma de la gráfica no solo se refiere a la representación de la función sino a las maneras en que se presenta el funcionamiento"

Desde nuestra perspectiva decimos que los *funcionamientos* son las acciones, operaciones o bien tareas donde interviene el conocimiento, la *forma* tiene que ver con la manera en que se pone en funcionamiento o bien a trabajar el conocimiento. Los s*ignificados*, *procedimientos*, *proceso-objetos* y *argumentaciones*, comenta Suárez (2008) dependen de la situación que se plantee, los significados aluden a ideas y conceptos, los procedimientos se refieren a las operaciones que el estudiante hace al manipular los significados, los procesos-objetos implican las relaciones que los alumnos construyen con los significados y procedimientos; y la argumentación es el eje de construcción y lo que permite articular los elementos del Marco de Referencia (MR) anteriores.

ASPECTOS DEL DISEÑO DE LA SECUENCIA

Retomando los elementos del MR conformamos la metodología experimental y del análisis de datos como se aprecia en la figura 2. El alumno se involucra en un escenario de Modelación – Graficación donde se pone en funcionamiento los elementos epistemológicos (*Realizaciones múltiples, Identificación de patrones, Ajustes y Desarrollo del Razonamiento*) a partir de una situación de movimiento (SDM) y el uso de la tecnología (sensores de movimiento, emulador, proyector, computadora, calculadora). En esta propuesta se favorece el tránsito entre las formas de representación de la función cuadrática para desarrollar argumentos y significados desde la situación que servirán de herramientas para intervenir en ella, estos argumentos y significados expresarán el uso del conocimiento matemático a través de sus *funcionamientos* y *formas*. La tabla I muestra estos elementos que servirán de apoyo para el análisis de resultados.

Figura 2. Esquema metodológico experimental



La situación que trabajamos (SDM) está conformada por tres fases: en la primera se analiza un contexto numérico a partir del cual se identifican patrones y se establecen reglas, posteriormente se realiza la gráfica que representa la tabla de datos con la intención de visualizar su comportamiento gráfico. El segundo momento inicia con actividades de visualización que tienen como objetivo obtener significados previos que sirvan como punto de partida para el análisis de una SDM y el desarrollo del conocimiento, se favorece el uso de la gráfica a partir de la M-G del movimiento de una persona, se visualizan patrones y comportamientos a partir de ella, posteriormente se analiza la tabla de datos que comprende la situación y se pretende articularla con los significados que los alumnos construyen a partir de la gráfica, se proponen gráficas las cuales se espera que los alumnos establezcan la situación que produce la gráfica, esta actividad tiene como propósito que los alumnos usen la gráfica como una herramienta de argumentación. En el tercer momento se desarrollan actividades de M-G sobre la Función Cuadrática, se parte de cuatro gráficas en las cuales los alumnos construirán la situación que produce la gráfica, la actividad tiene la intención que los alumnos identifiquen la variación de patrones en términos funcionales respecto de la situación y que reconozcan las variables que intervienen para que la gráfica sea más abierta, más cerrada, esté más desplazada a la izquierda o a la derecha así como también el sentido de la concavidad. Finalmente se propone una actividad que parte de lo trabajado en los tres momentos, donde se parte de la gráfica para articular la tabla numérica, se cuestiona al alumno que identifique la regla que representa la situación y que lo exprese en una fórmula matemática. En el siguiente apartado se comentan los resultados obtenidos.

Tabla 1. Los aspectos epistemológicos y de funcionamiento y forma de la situación

				Situación de movimiento		
Modelación - Graficación				***Fase I***	***Fase II***	***Fase III***
Elementos epistemológicos	Realizaciones múltiples	Elementos de fu y fo	Significados	•Reconocer variables dependientes e independientes, variación y relaciones funcionales •Establecer parejas ordenadas	•Visualización de elementos que caracterizan una recta y curva •Reconocimiento de variables del fenómeno tales como velocidad, distancia, tiempo, aceleración •Establecer relaciones funcionales •Ubicar puntos en el plano	•Identificación de elementos de la parábola tales como: pendiente, concavidad, vértice, lado recto. •Establecer relaciones funcionales •Ubicar puntos en el plano •Identificar la variación •Establecer parejas ordenadas
	Identificación de patrones		Procedimientos	•Identificación de patrones, comportamientos o reglas •Obtener la representación algebraica a partir de la regla o patrón •Obtener la representación gráfica a partir de la tabla de valores	•Identificación de patrones •Obtener la gráfica de la situación •Relacionar la gráfica con la tabla de datos •Relacionar lo numérico y lo gráfico con lo algebraico •Construir patrones de ajuste y obtener nuevas gráficas a partir de otra •Establecer la regla que representa la situación	•Identificación de patrones •Controlar los parámetros de la gráfica •Construir la situación que representa la gráfica •Obtener nuevas gráficas a partir de otras •Realizar ajustes en la gráfica •Establecer la regla que representa la situación
	Realización de ajustes		Procesos - objetos	Instrucción que organiza comportamientos: Resignificación de la función cuadrática en situaciones de movimiento		
	Desarrollo del razonamiento		Argumentos	Uso de la gráfica como herramienta de argumentación		

RESULTADOS

La situación didáctica se realizó con alumnos de segundo semestre en la escuela Telebachillerato 06 “Vicente guerrero” en Chiapas, México; donde participaron 38 estudiantes.

El análisis se hizo con base a los *funcionamientos y formas* que ya se comentaron, y en ese sentido se vislumbró el uso de la gráfica y de la tabla de datos. Estos “objetos” sirvieron como herramientas para argumentar e intervenir en la situación. La gráfica fue usada para describir el movimiento, donde se tuvieron los siguientes funcionamientos: explicar el sentido del movimiento, argumentar sobre la rapidez, reconocer puntos claves como el de inicio y fin del movimiento, así como interpretar la situación que modela y reconocer puntos específicos; los aspectos de forma tiene que ver con: argumentar sobre la concavidad, el lado recto o amplitud de la curva, establecer la distancia del vértice al origen y a la horizontal y la altura de la curva, visualizar cambios en la gráfica y establecer parejas ordenadas.

Respecto al “uso del análisis numérico de la tabla”, los aspectos de funcionamiento consisten en: identificación de patrones de comportamiento, reconocer la variación o razón de cambio, establecer una relación funcional, ubicar puntos en el plano, obtener una representación gráfica; los aspectos de forma se refieren a comparar datos, obtener diferencias y establecer parejas ordenadas.

Estos elementos son los que pusieron en funcionamiento los alumnos y permitieron que resignificaran aspectos de la función cuadrática y sus formas de representación a través de su uso en situaciones de modelación del movimiento. Ahora, la situación ya participa en el discurso, la gráfica es interpretada en términos de la situación y los elementos que la definen (concavidad, lado recto, vértice, puntos de la curva) tienen sentido para ellos, ya no son objetos abstractos si no que son funcionales. La tabla de datos también permitió el reconocimiento de patrones y comportamientos y ayudó en el establecimiento de reglas o fórmulas, sin embargo en el caso de la situación de modelación no pudieron establecerla. Aunque existe una interrelación entre la gráfica y la tabla, una u otra puede emerger de cualquiera de ellas, sin embargo, cada una sirvió para algo, es decir, tuvieron usos distintos

A MANERA DE CONCLUSIÓN

La Modelación-Graficación a través del uso de la gráfica y la numerización de los fenómenos de MUA permitieron la construcción de argumentos y significados sobre la Función Cuadrática en su aspecto funcional. La articulación entre las formas de representación (numérico, gráfico y algebraico) dotó al alumno de más herramientas para comprender e intervenir en la situación, cabe mencionar que el aspecto algebraico se provocó a través del establecimiento de reglas, sin embargo, no se logró establecer el modelo.

Con estas actividades la gráfica tiene un significado y un uso para ellos, la tabla a través del análisis numérico también les permitió reconocer el patrón aunque en la modelación de la situación tuvieron dificultades, es probable que esto se deba a “los ruidos” que ocasionan los datos decimales. Se requiere avanzar en un siguiente nivel de argumentación donde los alumnos realicen un ajuste de los datos a un modelo matemático “sin ruidos” donde pueda explorarse el modelo algebraico.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arrieta, J. L. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios avanzados del IPN. México.

Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). Una Perspectiva de la Modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18 (1): 19-48.*

Artigas, M. (1989). *Nicolás Oresme, Gran Maestre del Colegio de Navarra, y el origen de la ciencia moderna*. Recuperado el 22 de Septiembre de 2014 de www.unav.es/cryf/nicolasoresme.html

Briceño, E. C. (2013). *El uso de la gráfica como instrumento de argumentación situacional con recursos tecnológicos.* México: Tesis de doctorado no publicada. CINVESTAV-IPN.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad.* D. F., México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la matemática educativa: Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Cen, C. (2015). *Una caracterización del uso de las gráficas con profesores de bachilllerato.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios avanzados del IPN. México.

Cordero, F. (2013). *Matemáticas y el cotidiano.* Recuperado el día 10 de junio de 2014 de http://www.proyectosmatedu.cinvestav.mx/diplomado/mi_cuenta/data/pdfcordero/vid5/MATEMATICAS&COTIDIANO,%20ENE.2013..pdf

Cordero, F. y Flores, L. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, (10)1, 7-38.*

Courant, R. y Robbins, H. (2014). ¿Qué son las Matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales. D.F., México: Fondo de Cultura Económica.

Montiel, G., & Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación Socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. En A. R. Rosas, *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones* (págs. 61-88). México: Lectorum.

Morales, A., y Cordero, F. (2014). La graficación-modelación y la serie de Taylor. Una Socioepistemología del cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(3), 319-345.

Suárez, L. (2008). *Modelación – Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio Socioepistemológico.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios avanzados del IPN. México.

Zaldívar, D. (2014). *Un estudio de la resignificación del conocimiento matemático del ciudadano en un escenario no escolar*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios avanzados del IPN. México.

LAS ACTIVIDADES EN LÍNEA, UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Elvia Rosa Ruiz Ledezma, Alejandro Miguel Rosas Mendoza
CECyT Wilfrido Massieu. IPN, CICATA-IPN (México)
ruizelvia@hotmail.com, alerosas2000@gmail.com

Palabras clave: ambientes virtuales, génesis instrumental, campos conceptuales, esquemas de acción.

Key words: virtual environments, instrumental genesis, conceptual fields, action schemas.

RESUMEN: En este trabajo se aborda la aplicación de actividades didácticas en línea para la enseñanza de las funciones trigonométricas seno y coseno a estudiantes de nivel medio superior, así como se realizó el análisis de las respuestas obtenidas por los alumnos. Las actividades fueron aplicadas a estudiantes de los primeros semestres de un Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos en la Ciudad de México. Las sesiones fueron grabadas en video. Para realizar el análisis de las respuestas se utilizó la teoría de la Génesis Instrumental en conjunción con la teoría de los Campos Conceptuales. Las respuestas obtenidas permiten darnos una idea de cómo los estudiantes van construyendo el concepto de parámetro y el papel que desempeñan los parámetros en las variaciones de la gráfica de una función.

ABSTRACT: In this paper the application of online learning activities for teaching trigonometric sine and cosine functions to senior high students is discussed, as well as analysis of the responses made by students. The activities were applied to students in the first semester of a Centre for Science and Technology Studies in Mexico City. The sessions were videotaped. The theory of instrumental genesis in conjunction with the theory of conceptual fields used for the analysis of the responses. The answers obtained allow us an idea of how students are constructing the concept of parameter and the role parameter variations in the graph of a function.

INTRODUCCIÓN

En la primer parte del escrito partimos como antecedentes del uso de la tecnología, investigaciones basadas en la teoría de la aproximación instrumental y los ambientes virtuales. En un segundo momento, presentamos los fundamentos teóricos que sustentan nuestra investigación en donde se entrelazan la teoría de la génesis instrumental y la teoría de los campos conceptuales; la primera enfatiza el uso de la herramienta como un medio para que el estudiante construya su conocimiento a través de las técnicas y esquemas mentales que desarrolla y aplica mientras usa el artefacto. La segunda teoría se aboca al estudio del uso de los esquemas mentales en donde los aspectos técnicos y conceptuales están entrelazados; pero que no pueden ser observados directamente, puesto que no podemos mirar dentro de la cabeza de nuestros estudiantes, pero si podemos centrarnos en las técnicas instrumentadas observables, las cuales se definen como una secuencia más o menos estable de interacciones entre el usuario y el artefacto con una meta particular (Drijvers, Kieran y Mariotti, 2010).

Posteriormente presentamos los esquemas de utilización que definimos en las situaciones didácticas, así como las técnicas instrumentadas.

Por último presentamos el diseño y la metodología de la experimentación de nuestro problema de investigación y algunos resultados obtenidos en las formas de concepto en acción y teorema en acción.

ANTECEDENTES

Los antecedentes los presentamos considerando los dos elementos de que se sirve nuestra propuesta. Ambientes virtuales y aproximación instrumental

Ambientes virtuales.

Como antecedentes en el uso de ambientes virtuales para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (EVEAM), investigadores como, Bokhove, Koolstra, Boon y Heck (2007), utilizando applets programados en Java (WisWeb applets), para el desarrollo de habilidades algebraicas en alumnos de educación secundaria, encontraron varios puntos a favor para la implementación de estos ambientes; como permitir a los estudiantes trabajar a su propio nivel de pensamiento, ser divertidos, motivadores, interactivos, dinámicos, etc. Recomendando que deben integrarse en la clase diaria de matemáticas. En lo que se refiere a la enseñanza de las matemáticas en dos y tres dimensiones, Kaufman (2009), usando también (EVEAM), para el aprendizaje de álgebra y geometría, presenta una serie de investigaciones desarrolladas en los últimos diez años, encontrando que es necesario el diseño de contenidos interesantes e innovadores que justifique su uso. Aunque también menciona obstáculos (Los costos del hardware, número de usuarios limitado y la complejidad técnica), para tomarse en cuenta, en la implementación de estos ambientes. En otras aplicaciones de los entornos virtuales en donde participan gran cantidad de usuarios conectados en red llamados MUD (Multi-User Dungeon/Domain/Dimension), Dieterle y Clarke (2009) presentan cómo MUVEs (multi-user virtual environments) se han utilizado en la educación y como pueden utilizarse para la enseñanza inmersos en un contexto psicosocial.

Aproximación instrumental.

Variedad de estudios sobre el uso de la tecnología en la educación matemática se refieren a la aproximación instrumental, como ejemplo mencionamos que de los nueve trabajos presentados en

el ICMI 17, no menos de siete se refieren a un enfoque instrumental como uno de los principales componentes del marco teórico.

La distinción entre artefacto e instrumento es esencial en la teoría de la instrumentación. Hablamos de un instrumento si existe una relación significativa entre el artefacto y el usuario en un determinado tipo de tarea, esto es Instrumento= Artefacto + esquemas y técnicas para un determinado tipo de tarea.

Así las investigaciones de Pierce y Stacey (2004), Camacho (2005), Drijvers y Gravemeijer (2005), Briceño y Cordero (2008), basan su sustento teórico en la aproximación instrumental, entendida como el proceso en el cual el sujeto transforma y adapta el artefacto a sus necesidades y circunstancias (Rabardel y Bourmaud, 2003), pasando por las etapas de descubrimiento, selección, personalización y transformación (Trouche, 2005). Así mismo se enfatiza la dimensión instrumental de los procesos de aprendizaje (Artigue, 2007). Lo que permite el desarrollo de esquemas de utilización, pero este proceso puede enriquecer o empobrecer la herramienta si no hay una tarea específica.

LA PROBLEMÁTICA Y EL PROPÓSITO DE INVESTIGACIÓN

La problemática se circunscribe al aprovechamiento escolar en el área de matemáticas en nuestro contexto (nivel medio superior) y las alternativas actuales existentes con el uso de la tecnología.

En Organisation for Economic Cooperation and Development [OECD], (2007), se observa que la prueba PISA (Program for International Student Assesment - Programa para la Evaluación internacional de los Alumnos) tiene como propósito evaluar el rendimiento de los alumnos de 15 años de varios países y es coordinada por la OCDE. Las asignaturas que comprende la evaluación son entre otras matemáticas, en donde México en 2009 solo alcanzó en promedio el nivel 1. En 2012, el número de estudiantes participantes fue de 33806, en 1471 escuelas. Donde el 55% de los alumnos no alcanza el nivel de competencia básica (nivel 2) en matemáticas y menos del 1% logra alcanzar los niveles 5 y 6.

Aunque en diferentes lugares del mundo se han creado actividades en línea, por ejemplo en la página del National Council of Teachers of Mathematics en Estados Unidos de América (NCTM, 2009) se pueden encontrar actividades para trabajar diversos conceptos matemáticos. Así mismo en España se tiene un proyecto con actividades en línea, el proyecto Descartes (MECD, 2001) y aún estas y otras actividades permiten experimentar con animaciones que involucran variables, posibilitando la utilización de diferentes valores que no permiten que el estudiante logre construir conceptos.

Nuestro propósito en este trabajo, se aborda a través de una propuesta de actividades didácticas, donde se usan herramientas tecnológicas para el estudio de conceptos matemáticos (funciones trigonométricas, seno y coseno) y las características de los conceptos que se construyen con el uso de estos recursos, revisando que pasa en esas construcciones y los momentos y formas en que se producen. Contribuyendo con esto al gran trabajo que se ha realizado hasta el momento, en el diseño y programación de actividades didácticas para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, mediante el uso de la computadora.

CONSIDERACIONES TEÓRICAS

Nuestro marco de referencia está conformado por la teoría de la Génesis Instrumental y la teoría de los Campos Conceptuales.

La génesis instrumental enfatiza el uso de la herramienta como un medio para que el estudiante construya su conocimiento a través de las técnicas y esquemas mentales que desarrolla y aplica mientras usa el artefacto.

Consideramos la teoría de la génesis instrumental para explicar la relación entre las actividades que se espera realice el estudiante, su implementación en ambientes virtuales y los tipos de conocimiento implicado; esto es, se espera que a través del ambiente virtual (en este caso la computadora con sus periféricos, sistema operativo y las actividades didácticas en línea), como mediadores entre los estudiantes y el concepto matemático sobre el que se trabaja, los alumnos se adapten a la herramienta y adapten la herramienta para la construcción de conocimientos (Rabardel,1995, citado por Drijvers y Gravemeijer, 2005).

Los campos conceptuales se abocan al estudio del uso de los esquemas mentales en donde los aspectos técnicos y conceptuales están entrelazados; pero que no pueden ser observados directamente, puesto que no podemos mirar la forma en que se realizan los pensamientos dentro de la cabeza de los estudiantes, pero si podemos centrarnos en las técnicas instrumentadas observables, las cuales se definen como una secuencia más o menos estable de interacciones entre el usuario y el artefacto con una meta particular (Drijvers, Kieran y Mariotti, 2010).

Un esquema mental tiene una meta y sus componentes son los invariantes operacionales (conocimiento implícito en la acción) que se presentan en la forma de conceptos y teoremas en acción.

Los esquemas utilizados en nuestra investigación los categorizamos en: esquemas de uso y esquemas de acción instrumentada.

Los esquemas de uso son básicos y están relacionados directamente con el artefacto. Los esquemas de acción instrumentada son esquemas mentales coherentes y significativos y son acumulados o aumentados a partir de los esquemas de uso por medio de la génesis instrumental. La articulación de los esquemas de uso envuelve nuevas técnicas y aspectos conceptuales, que se integran en el nuevo esquema. Aún los esquemas de acción instrumentada pueden servir de base para un esquema de orden mayor o para formar esquemas compuestos.

Esto nos permite observar a los estudiantes en el momento de resolver las actividades didácticas e identificar los conceptos y teoremas en acción, y determinar los esquemas de acción instrumentada que desarrollan en esas soluciones.

DESARROLLO

Diseño

Las actividades didácticas están programadas en el lenguaje HTML5® utilizando la teoría de las situaciones a-didácticas y forman parte del proyecto CONACYT108952. En este proyecto se generó un conjunto de 20 actividades. Para nuestra investigación se realizó un análisis de las actividades de manera que se seleccionaron aquellas que por su nivel de complejidad y secuencia de conceptos incluidos formaran una clase de situaciones que permitieran la construcción de

esquemas. Debido a esto en nivel medio superior se utilizaron las actividades ordenadas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

Tabla 1. Tabla de Actividades.

Actividades	Nombre de la actividad	Notación algebraica
A1	Variaciones de la función seno y coseno	f(x)= [ ]sen x
A2	Variaciones de la frecuencia de las funciones seno y coseno	f(x)= sen([ ]x)
A3	Variaciones de la fase de las funciones seno y coseno	f(x)=sen(x+[ ]n)
A4	Desplazamiento vertical de la función seno	f(x)= sen x+ [ ]
A5	Desplazamiento vertical de la función coseno.	f(x)= cos x+ [ ]
A6	Variaciones de altura y desplazamiento de la función seno.	f(x)= [ ]senx+[ ]
A7	Variaciones de altura en sumas de las funciones seno y coseno	f(x)=[ ]senx+[ ]cosx
A8	Variaciones de las frecuencias en sumas de las funciones seno y coseno.	f(x)=sen([ ]x)+cos([ ]x)

Aplicación

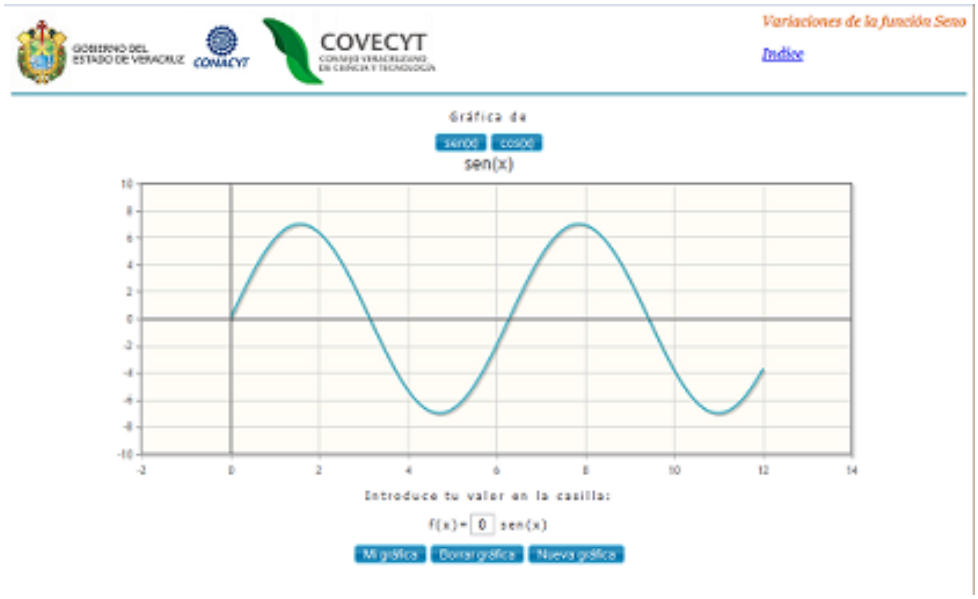
Se aplicaron en la Ciudad de México a estudiantes de primer semestre del Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos del Instituto Politécnico Nacional, en dos sesiones, de una y dos horas respectivamente. Los alumnos participantes fueron elegidos de acuerdo al conocimiento de los profesores del grupo, de esa manera se formaron tres parejas de alumnos, una de estudiantes de buenas calificaciones, otra con alumnos de calificaciones promedio y una más de alumnos con bajas calificaciones.

Los profesores que realizaron la aplicación permitieron que los estudiantes exploraran libremente las acciones que realizan cada una de las actividades. Se esperaba que de esta manera los alumnos desarrollaran conceptos y teoremas en acción. Para averiguar esto se video grabó a los alumnos y se les realizaron preguntas durante las sesiones de aplicación.

Procedimiento

Las actividades didácticas le piden al alumno que reproduzca una gráfica que el sistema le presenta mediante una pantalla semejante a la siguiente:

Figura 1. Imagen de la interfaz que el alumno utiliza en las actividades didácticas



En esta pantalla a los alumnos se les presenta una función (que depende de la actividad didáctica que están resolviendo), en la imagen es y= [ ] sen (x). Donde [ ] le permite al alumno introducir el valor (parámetro) que al graficar reproduzca la gráfica que le dio el sistema. También se tienen botones [Mi gráfica] [Borrar gráfica] [Nueva gráfica] que le permiten al alumno generar la gráfica de la función y= [ ] sen (x) con el valor que haya introducido, borrar la gráfica previa y solicitarle al sistema que dibuje una nueva gráfica, respectivamente.

Se les dio una explicación a los estudiantes de lo que tenían que hacer, esto es generar una gráfica, identificar la colocación de un valor al que llamamos parámetro en el espacio que se requiriera para que la gráfica dada por el programa (en color azul) se igualara a la generada por ellos (en color naranja). Nunca se les dijo qué valor colocar, se les dejó libremente explorar con los valores que quisieran anotar, solo se les pidió que dijeran el por qué utilizaban ese valor y que comentaran sus observaciones de acuerdo a su gráfica generada en comparación con la que se presentaba en la pantalla.

Durante las sesiones de aplicación de las actividades se cuestionó a los estudiantes sobre lo qué pensaban que haría el valor del parámetro que proporcionaron antes de que introdujeran el valor. Después de ver la gráfica resultante con el valor que dieron se les preguntó el por qué pensaban que la gráfica había o no resultado igual a la del sistema.

Además se les solicitó que se anticiparan comentando qué consideraban que haría en la gráfica el valor que habían escrito sin proceder a graficar. En ningún momento se les indujo a la respuesta correcta, pero se les pidió que generalizaran sus observaciones a través de una regla o una conclusión.

ANÁLISIS

Para el análisis se construyeron tres esquemas de acción instrumentada: 1) Mi gráfica, 2) Reproducir gráfica y 3) Repetición.

Primeramente se establecieron esquemas de acción generados por los estudiantes mediante la computadora y sus periféricos involucrados en la generación de la gráfica. Posteriormente se convirtieron esos esquemas de acción en esquemas de uso, utilizándose para generar otros esquemas de acción que le permiten al estudiante generar las gráficas que le solicita el sistema (concepto en acción). Finalmente, los anteriores esquemas nuevamente se convierten en esquemas básicos (de uso) para construir un esquema de acción que permite comprender cómo el estudiante ha construido la "regla" mediante la cual pueden predecir la forma de una gráfica dado un valor para un parámetro (teorema en acción).

Las respuestas de los estudiantes las hemos categorizado en concepto en acción y teorema en acción de acuerdo a los fundamentos teóricos considerados en esta investigación.

Estamos entendiendo concepto en acción, cuando el estudiante al observar una gráfica en la pantalla, relaciona su comportamiento con sus conocimientos previos, en este caso, el plano cartesiano, abscisas, ordenadas, origen, altura de la curva, escala de la curva, números positivos y negativos. Además de que al ir probando valores encuentre los casos particulares, que hagan cierta cada una de las curvas que se está generando, para poder construir una regla. Así mismo que relacione en la progresión de las actividades el lugar en que se encuentra cada parámetro con su comportamiento gráfico y cuando se combinan los acomodos de dichos valores pueda anticiparse a que efectos corresponden en el contexto gráfico.

Entendemos teorema en acción cuando el alumno interpreta a través de casos particulares el comportamiento de la función con la posición del parámetro y lo externa en una regla o conclusión; esto es cuando generaliza.

Concepto en acción y Teorema en acción construidos por la pareja de alumnos A1 y A2. Los momentos en que se producen las construcciones

Actividad 1. f (x)= [ ]sen x

Concepto en acción del parámetro altura

En ese momento el estudiante A1 efectivamente está viendo la función f(x)=2senx y en el lugar del parámetro escribe el valor 2. Para el alumno A2 la gráfica que se dibujó en su pantalla fue f(x)=5senx, el valor 5 es el que el estudiante escribió, al darse cuenta que la curva (azul) llega a ese valor.

El alumno A1 comenta:

A1: *Al ver que en esta gráfica el valle llega a -2 y la cresta a 2, concluyo que el parámetro es dos, el valor a donde llegan las crestas y los valles.* (4:35 min)

A2: *En esta gráfica la altura de la curva llega a 5 por tanteo coloco valores y veo que el parámetro es cinco.*

A2: *Observo que la onda llega al número 3 y desciende a -3 por lo que tres es el parámetro.*

A2: *En otra gráfica observo que llega la curva a 7 y ese es el valor por lo que lo escribo y si coincide mi gráfica*.

Teorema en acción del parámetro altura

La gráfica que genera el programa para A2 es f(x)=5senx, prueba con los valores 7,6 y comenta para concluir:

A2: *Cuando coloco valores pequeños la curva que dibuje disminuye su altura y con valores grandes aumenta* (2:33 min).

Al dibujarse en la pantalla para A1, f(x)=8senx, y darle diferentes valores al parámetro: 12, 10, 9. Observa que la altura de la curva va disminuyendo, acercándose a la curva azul, por lo que va elaborando sus conclusiones:

A1: *El parámetro nos dice que entre más grande sea el valor más altas son las crestas y el valle disminuye en la curva que dibujo por lo que el valor es la altura de las crestas y los valles.* (2:35 min)

RESULTADOS

El análisis documentado a través de la construcción de esquemas, ha permitido establecer diferentes momentos (Actividad 1) en los que cada estudiante logra generar sus esquemas de acción de manera que, creemos, se puede identificar el instante en que el alumno está experimentando un concepto en acción, y cuándo logra un teorema en acción al paso de las repeticiones e intentos para reproducir las gráficas que el sistema le proporciona.

CONCLUSIONES

Considerando los primeros análisis de las respuestas obtenidas, se muestra que los alumnos construyen el concepto de parámetro (concepto en acción), utilizando esquemas de acción, de acuerdo a lo que observan en la pantalla de la computadora.

También hemos logrado ver que los alumnos logran generar reglas (teorema en acción) para predecir el efecto que tiene el variar los valores de un parámetro, así como la posición que tiene el parámetro dentro de la expresión matemática que representa una función.

Sin embargo es necesario continuar con estos análisis para verificar si estas observaciones preliminares se presentan en todos los alumnos que resuelvan estas actividades aún sin la presencia de un profesor.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (2007). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. En E. Mancera y C. Pérez (Eds.), *Historia y Prospectiva de la Educación Matemática.* Memorias de la XII CIAEM, pp. 9-21. México: Edebé. Ediciones Internacionales S.A. de C.V.

Bokhove, C., Koolstra, G., Boon, P. y Heck, A. (2007). Towards an integrated learning environment for mathematics. En E. Milková y P. Prazák (Eds). *Electronic Proceedings of the 8th Conference on Technology in Mathematics Teaching.* Recuperado el 17 de octubre de 2012 de: http://eprints.soton.ac.uk/348450/1/ICTMT8.pdf

Briceño, E y Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas bajo una perspectiva instrumental Un estudio socioepistemológico. En M. Chaleyat-Maurel (Ed.), *Topic Study Group 16: Research and development in The Teaching and learning of calculus.* ICME 11 México. Recuperado de: http://tsg.icme11.org/document/get/656

Dieterle, E. y Clark, J. (2009). Multi-user virtual environments for teaching and learning. En M. Pagani (Ed.), *Encyclopedia of multimedia technology and networking* (2nd ed.) (pp. 1033-1054). USA: Idea Group, Inc.

Drijvers, P. y Gravemeijer, K. (2005). Computer algebra as an instrument: examples of algebraic schemes. En D. Guin, K, Ruthven y L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of Symbolic Calculators: turning a computational device into a mathematical instrument* (pp. 163-196). New York: Springer Verlag.

Drijvers, P., Kieran, C. y Mariotti, M.-A. (2010). En C. Hoyles y J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain: The 17th ICMI study* (pp. 89-132). London: Springer.

Kaufmann, H. (2009, January 1st). Virtual Environments for Mathematics and Geometry Education. *Publishing History: In Themes in Science and Technology, 2*(1-2), 131-152.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2001). Recuperado el 15 de enero de 2010, de la página web del proyecto Descartes en http://www.isftic.mepsyd.es/w3/Descartes/index.html.

National Council of Teachers of Mathematics. (2009). Página Web de *Illuminations Resources for Teaching Math.* Recuperado el 15 de enero de 2010 de http://illuminations.nctm.org/.

Organisation for Economic Co-Operation and Devopment. (2004). *Primeros resultados de Pisa 2003. Resumen Ejecutivo.* Recuperado el 24 de enero de 2009 de www.oei.es/quipu/mexico/informe_pisa2003.pdf

Organisation for Economic Co-Operation and Devopment. (2007). *El Programa PISA de la OCDE. Qué es y para qué sirve.* Recuperado el 24 de enero de 2009, de http://www.oecd.org/document/51/0,3343,en_32252351_32235731_39732595_1_1_1_1,00.html

Pierce, R., y Stacey, K. (2004). Monitoring Progress in Algebra in a CAS Active Contex: Symbol Sense, Algebraic Insight and Algebraic Expectation. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 11*(1), 3-12.

Rabardel, P., y Bourmaud, G. (2003). From computer to instrument system: a developmental perspective. *Interacting with Computers, 15* (5), 665-691.

Trouche, L. (2005). Calculators in mathematics education: a rapid evolution of tools with differential effects. En D. Guin, K. Ruthven, y L. Trouche (Eds.). *The didactical challenge of Symbolic Calculators: turning a computational device into a mathematical instrument* (pp. 9-40). New York: Springer Verlag.

EXMA: UN PROYECTO DE EVALUACIÓN DE APRENDIZAJES MATEMÁTICOS A DISTANCIA

Lorena Salazar Solórzano
Universidad de Costa Rica (Costa Rica)
lorena.salazarsolorzano@ucr.ac.cr

Palabras clave: aprendizaje autónomo, evaluación matemática, educación a distancia

Key words: self-learning, mathematics evaluation, distance learning

RESUMEN: Este trabajo presenta resultados preliminares de un proyecto de docencia de la Universidad de Costa Rica llamado EXMA, el cual ofrece una alternativa a estudiantes que no desean llevar cursos presenciales tradicionales de matemática. Estos se preparan en forma autónoma, a su propio ritmo utilizando los medios tecnológicos que ofrece virtualmente el proyecto y presentando tres exámenes en el momento en que cada uno considera que está preparado. Está a cargo de un equipo de docentes bajo la coordinación de la autora de este reporte, los cuales guían el proceso de aprendizaje a distancia. Se muestra como EXMA está resultando ser una alternativa atractiva al alumnado y cómo, por otro lado, está dando lugar a un crecimiento en el quehacer docente del equipo participante, desde la creación de material virtual apropiado a esta población, hasta la construcción adecuada de instrumentos de evaluación a distancia de aprendizajes matemáticos.

ABSTRACT: This paper presents preliminary results of a project teaching at the University of Costa Rica which is called EXMA. It offers an alternative for students who are not interested in taking traditional courses of math. They prepare themselves autonomously, at their own pace using technological virtual means offered by the project and they have to present three exams when they believe that are ready. The project is run by a team of teachers coordinated by the author of this report, which guide the distance learning process. EXMA is proving that it is an attractive alternative for students, also shows how diversifies and grows the teachers' work, from the appropriate creation of didactic virtual materials until the proper construction of remote evaluation instruments for math learning.

INTRODUCCIÓN

Exámenes de Matemática (EXMA) es un proyecto de la Vicerrectoría de Docencia de la Universidad de Costa Rica (UCR) a cargo de la Escuela de Matemática, que inició desde el 2009 para cubrir la demanda insatisfecha en la matrícula de cursos iniciales de matemática (pre-cálculo, cálculo, algebra lineal) ofreciendo una alternativa a la gran cantidad de estudiantes repitentes reincidentes (por más de dos veces) que ya no quieren volver a las aulas. Estos estudian en forma independiente y cuando consideran que están preparados, presentan tres exámenes parciales, uno a la vez, en cualquiera de las 4 aplicaciones semestrales, requiriéndose obtener mínimo un 7.0 en escala de 10 para aprobarlos. Actualmente además de estudiantes rezagados, el proyecto también admite estudiantes talentosos, o aquellos que quieren avanzar en su plan de estudios, o que quieren aprobar cursos de matemática aunque no estén incluidos en su plan de estudios, o alumnos que trabajan y que no pueden asistir a las clases presenciales, o de sedes regionales que no quieren atrasarse cuando el curso no se abre en esta zonas. En todos estos casos el proyecto facilita la posibilidad de un aprendizaje de la matemática en forma autónoma, dando al estudiantado la opción de individualizar el proceso de aprendizaje de matemática al ritmo de cada uno y utilizando los medios tecnológicos que ofrece virtualmente el proyecto. En este estudio se entiende trabajo independiente o autónomo como

> "(…) una modalidad de aprendizaje en la que el estudiante se responsabiliza de la organización de su trabajo y de la adquisición de las diferentes competencias según su propio ritmo. Implica por parte de quien aprende asumir la responsabilidad y el control del proceso personal de aprendizaje, y las decisiones sobre la planificación, realización y evaluación de la experiencia de aprendizaje". (Lobato 2006).

Aunque en los primeros 5 años de vigencia, EXMA solo fue un proyecto de docencia, *a partir del 2015*, bajo la coordinación de la autora de este reporte, se da un giro hacia un *crecimiento académico y de investigación del equipo docente participante. Así el proyecto es ahora un foco de investigación que se ha planteado el siguiente reto:*

Objetivo:

Diseñar e implementar una alternativa para aquellos estudiantes universitarios que no desean o no pueden llevar cursos de matemática en la modalidad presencial, que les permita prepararse en forma autónoma, a su propio ritmo, utilizando materiales, tutorías y guías virtuales con el fin de aprobar tres exámenes en el momento en que cada uno considera que está preparado, y de esta forma aprobar el curso.

En este reporte se dan los primeros resultados del logro de dicho objetivo en su primer año.

CONTEXTO Y PARTICIPANTES DE EXMA

El año lectivo en la UCR consta de tres ciclos lectivos, dos de 16 semanas y uno de 8 semanas (verano). EXMA nació en el 2009 y ha estado funcionando desde entonces, ofreciendo 12 aplicaciones de exámenes anualmente (4 por cada ciclo lectivo) de modo que los estudiantes que se inscriban, tienen oportunidad de presentar cada uno de los exámenes parciales en al menos tres veces en cada ciclo. Una de la condiciones es que el estudiante no debe estar matriculado en el curso ordinario presencial para inscribirse en EXMA. Actualmente el proyecto incluye siete cursos

iniciales de matemática de la UCR, a saber: MA0001 Pre cálculo, MA0125 Matemática Elemental, MA0230 Matemática para Ciencias Económicas I, MA1210 Cálculo I, MA1001 Cálculo Diferencial e Integral I, MA1002 Cálculo II y MA1004 Álgebra Lineal. El equipo de EXMA está conformado por 15 personas: un profesor a cargo de cada curso, un docente encargado de la página virtual, un coordinador general del proyecto, 5 asistentes de apoyo para cuido de los exámenes y una secretaria. El equipo docente participante en el proyecto EXMA que está encargado de los cursos virtuales también lo hace en la modalidad presencial y su selección prioriza una amplia experiencia, aptitudes investigativas e interés en educación matemática.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Dado que no existe contacto directo con los estudiantes, la evaluación se vuelve un pilar fundamental y decisivo, y no se puede dejar de lado en este fundamento teórico. Es por esto que el equipo docente participante se ha visto en la necesidad urgente y primaria de una actualización en este aspecto. Para esto, se ha iniciado una sesión de estudio de artículos relacionados a la evaluación en matemática, participación en talleres, charlas, seminarios lo que ha dado algunos principios investigativos dentro del equipo.

El tema de evaluación de aprendizajes matemáticos ha sido ampliamente estudiado e investigado, tanto así que en los diferentes encuentros de educadores matemáticos, este es un tema siempre presente e independiente, por la trascendencia en la enseñanza de la matemática e implicaciones en los individuos como personas. Mucho se ha dicho, sin embargo, sigue existiendo una gran brecha entre la teoría y la práctica en las aulas.

¿Pero qué se entiende por evaluación de aprendizajes matemáticos? Según Stufflebeam y Shinkifield (1987) " (…) la evaluación es el enjuiciamiento sistemático de la valía o del mérito de un objeto. Esta definición se centra en el término valor e implica que la evaluación siempre supone un juicio". Asignar un valor numérico a la respuesta escrita o verbal de un estudiante sobre lo que se supone son sus conocimientos, implica una gran responsabilidad. De ahí surge la necesidad de buscar alternativas a la forma de elaborar, aplicar e interpretar los instrumentos de evaluación para valorar los conocimientos de los estudiantes. Esto, según varios investigadores en educación matemática no es sencillo ya que para evaluar un estudiante, se deben tomar en cuenta su despeño en forma integral. Sin embargo, en el proyecto EXMA como se mencionó antes, no existe contacto con el estudiante y los exámenes escritos constituyen la única forma evaluativa, lo que va en contra de los que sostienen que debe haber un vínculo con el estudiante.

> "(…) Una importante característica de la evaluación del aprendizaje es la interrelación que se establece entre los sujetos de la acción: el evaluador y el evaluado. De hecho, el objeto sobre el que recae la evaluación es otra persona -individual o en grupo- que se erige como sujeto de la acción y coparticipa, en mayor o menor medida en la evaluación. Aún más, para el caso de la evaluación del aprendizaje la pretensión debe ser que el evaluado esté en capacidad de devenir su evaluador". (González, 1992, p. 88)

Es por esto que, ante la carencia de otros elementos para valorar lo que sabe el estudiante, la construcción de los instrumentos de evaluación, ha dado lugar a reflexiones conjuntas dentro del equipo de EXMA y a una concientización de que estos deben ser construidos de la mejor forma

para poder intentar en la medida posible, evaluar con solamente exámenes. Para la confección de los mismos, se ha utilizado los principios de Romberg (1989), siguientes.

Tabla 1. Principios para la evaluación en matemática según Romberg (1989),

Principio	Características
Temas a evaluar	Determinar los temas así como las conexiones entre los procedimientos y conceptos involucrados en estos temas
Diseño de tareas	Diseñar diferentes tareas que reflejen en forma variada los procedimientos y conceptos típicos de cada tema.
Aplicación de tareas	Administrar a los estudiantes algunas de estas tareas por medio de evaluaciones hechas ex-profeso.
Asignación de puntaje	Combinar lógicamente el dominio, complejidad a cada tarea para visualizar una puntuación adecuada.
Vector de dominios matemáticos	Construir para cada alumno un vector sobre los dominios matemáticos apropiados.

Siguiendo estos principios de evaluación, se exhibe a continuación un ejemplo de uno de los ítems de un examen, creado por el profesor Ordoñez (2015) quien es participante del proyecto. El tema a evaluar es el de límites de funciones reales, el cual corresponde al objetivo específico 6 de los contenidos del curso, para lo cual se diseña una tarea en la que se involucra un límite con valor absoluto y se asigna un puntaje por cada procedimiento, como se muestra en la figura 1, uno de los ítems creado por uno de los participantes del proyecto en uno de los exámenes.

Figura 1. Ejemplo de una pregunta de un examen

Parte 1. Pregunta 1*b* **Objetivo 6**

$$\lim_{x\to -4^+}\frac{|10x-4|-44}{(x+4)^2}$$

$$= \lim_{x\to -4^+}\frac{-(10x-4)-44}{(x+4)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Aplicar correctamente la definición del valor absoluto}$$

$$= \lim_{x\to -4^+}\frac{-10x-40}{(x+4)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Escribir correctamente el numerador como un binomio}$$

$$= \lim_{x\to -4^+}\frac{-10(x+4)}{(x+4)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Factorizar correctamente el numerador por factor común}$$

$$= \lim_{x\to -4^+}\frac{-10}{x+4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Simplificar correctamente la fracción del criterio}$$

$$= -\infty \quad \ldots\ldots \text{Concluir que es un límite infinito y considerar el signo del criterio}$$

Para facilitar la calificación, se construye el vector de dominios siguiente:

> Vector de dominio: (1 punto por cada entrada)
>
> (*Valor absoluto, simplificación, factorización, simplificación, cálculo del límite*)

De modo que si un estudiante no logra factorizar correctamente, solo pierde puntaje en esa entrada del vector, sin cobrarle su error en los siguientes procedimientos, aspecto que es muy común en las evaluaciones en matemática.

FILTROS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LOS EXÁMENES

Para la construcción de un examen se sigue todo un proceso incluyendo filtros de revisión de diferentes participantes.

Figura 2. Creación de los instrumentos de evaluación

En una primera instancia lo confecciona el profesor encargado del curso de EXMA, junto con la solución en la que especifica los objetivos seleccionados a evaluar y la asignación de puntajes de acuerdo a los procesos matemáticos involucrados así como el vector de dominio para la calificación y corrección. Luego se lo envía al "coordinador de cátedra" quien es el encargado del curso en la modalidad presencial. Este revisa que haya coherencia entre la modalidad presencial y la virtual sin detrimento uno del otro en cuanto al nivel de dificultad del examen, le hace observaciones y el docente hace las correcciones. El siguiente filtro consiste en que el examen se le aplica a una asistente del proyecto, la cual tiene muy buen dominio de estos temas sin ser estudiante de matemática, con el objetivo de evaluar el instrumento desde el punto de vista de comprensión, complejidad de la prueba y si este se adecúa al tiempo establecido para su solución. Finalmente el último filtro es el coordinador del proyecto EXMA, quien revisa las observaciones hechas por los revisores anteriores incluyendo los comentarios de la estudiante asistente, revisa además el lenguaje, forma y contenido del mismo para finalmente solicitar los cambios que se requieran y dar la autorización para que se imprima y aplique a los estudiantes. Se espera que en un futuro el proceso no termine ahí, sino que después de su aplicación, el docente haga un análisis estadístico de los resultados obtenidos, que revise los problemas del examen que discriminan y los que resultan positivos, se guarden en un banco de preguntas de modo que cuando este haya

crecido lo suficiente, un sistema digital pueda confeccionar un examen con preguntas tomadas al azar para que un estudiante pueda presentar la prueba en el momento que lo solicite. La incorporación del filtro de la asistente para resolver los exámenes antes de su aplicación, ha resultado de gran ayuda, dado que ella ha logrado detectar aspectos que los docentes muchas veces pasan desapercibidos, como el lenguaje utilizado, el cual es cotidiano e incluso natural para un matemático, pero que no es comprendido por los estudiantes, volviéndose un obstáculo a la hora de resolverlo. Se muestra el siguiente ejemplo donde las instrucciones no son claras a la asistente, aunque parecía muy claro a los profesores y filtros previos.

Figura 3. Instrucción que podría ser un obstáculo de comprensión

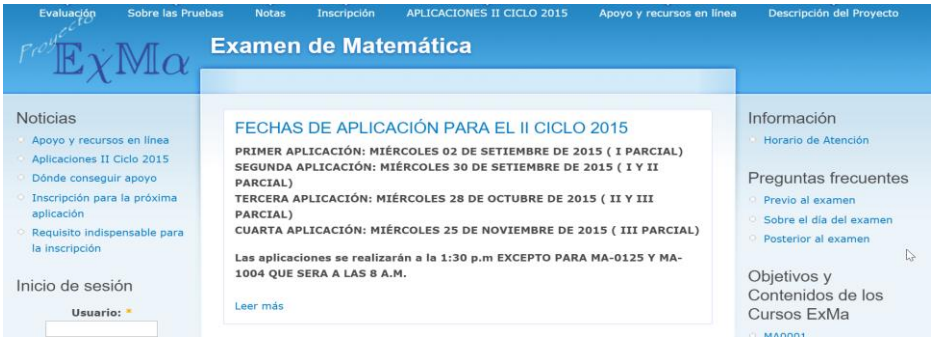
b) Encuentre el o los puntos de interección con el eje x de la gráfica de $f(x)$. (3 puntos)

Como puede observarse, las instrucciones no son claras, no se sabe efectivamente que hay que determinar algo, por otro lado puede resultar confuso el referirse al "criterio de la función", tampoco es claro lo que se debe simplificar. También hay una palabra mal escrita en la parte b, dice "interección" en lugar de intersección. Aspectos como estos pueden resultar un obstáculo didáctico en el estudiante para su desempeño en la prueba, sobre todo el usar términos, simbología o palabras que no son comunes en los diferentes libros de texto, sobre todo en estudiantes que se preparan en forma autónoma.

PÁGINA VIRTUAL DEL PROYECTO

Para apoyar el aprendizaje autónomo de los estudiantes, el equipo ha venido trabajando en la plataforma de mediación virtual Moodle, con la elaboración de materiales y prácticas a nivel automatizado. Se puede consultar en la dirección http://www.exma.emate.ucr.ac.cr/.

Figura 4. Página inicial del proyecto EXMA

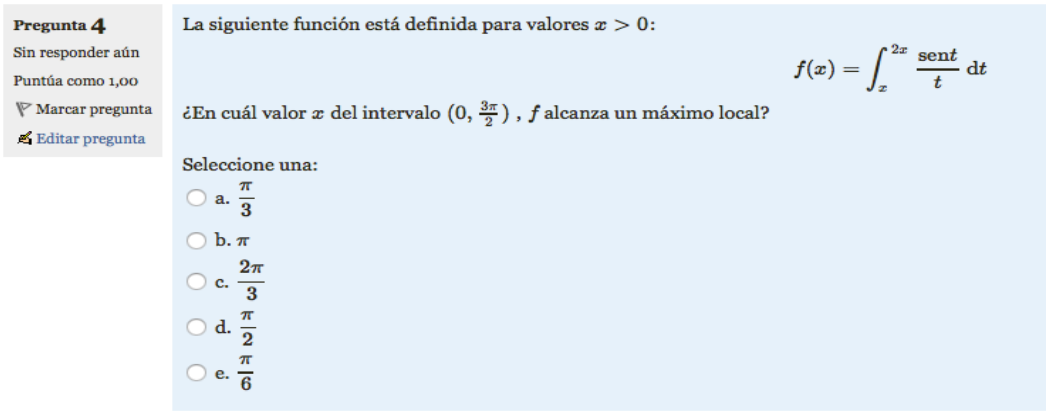


Para la creación de material para el estudio independiente, Zabalza (2002) considera que es necesario enfocar los contenidos desde la perspectiva de los estudiantes y ofrecerles apoyos complementarios que podrían serles útiles para una mejor comprensión de la materia.

Por ello se ha generado preocupación del cuerpo docente participante, en la que el preparar material adecuado y pertinente a esta población, se ha vuelto un foco de crecimiento docente. Aunque falta más trabajo al respecto, la página cuenta con material didáctico como: teoría,

ejemplos, ejercicios, videos, presentaciones, cuestionarios virtuales que contempla cada uno de los tres exámenes parciales de los siete cursos del proyecto, pruebas en línea que sean generadas aleatoriamente y que el estudiante pueda realizar en cualquier momento evitando repeticiones, cuestionarios y actividades interactivas con retroalimentación para reforzar el estudio individual de los estudiantes. También se atienden, en línea, las dudas de los estudiantes sobre el material didáctico o sobre cómo resolver preguntas específicas de los temas a evaluar.

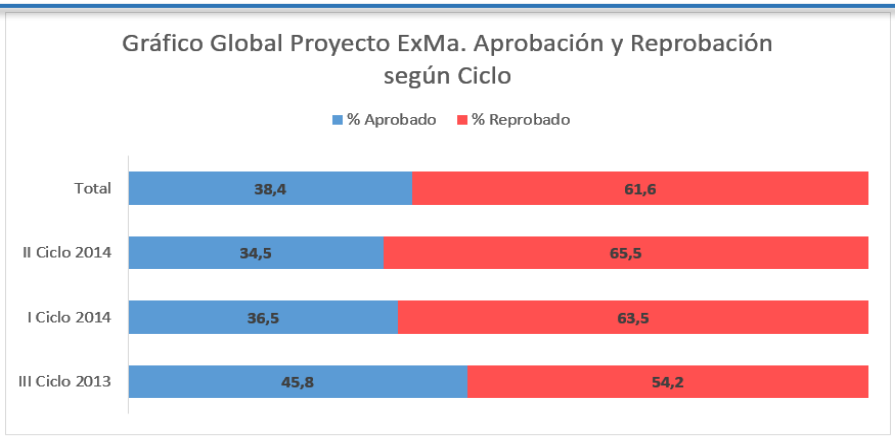
Figura 5. Ilustración de actividades interactivas virtuales creadas por EXMA



DIFICULTADES DEL PROYECTO:

Una de las dificultades que enfrenta el proyecto es que los estudiantes aunque hayan ganado un examen, no se matriculan en los siguientes exámenes, perdiendo el hilo conductor, de modo que desertan del proyecto. La poca participación de la página web de EXMA, donde se ofrecen posibilidades de buscar material para prepararse para los exámenes, así como plantear dudas en línea, es otro de los tropiezos. Se deben buscar otros mecanismos para motivar a los estudiantes a visitar dicha página, incluyendo material que los motive a consultarlos. Otra de las dificultades es que lamentablemente los estudiantes no tienen la cultura de prepararse por sí solos, el estudio independiente requiere mucha madurez y disciplina, características no muy comunes en edades tempranas. La promoción de los exámenes es otro de los problemas del proyecto, no se diferencia mucho de los cursos presenciales, con resultados nada positivos, como puede verse en la siguiente figura según las estadísticas del proyecto.

Figura 6. Comparación porcentual de aprobados y reprobados de EXMA



CONCLUSIONES

El logro del objetivo del proyecto hasta el momento podría que se ha logrado parcialmente, no con el éxito esperado, pero en sí EXMA resulta ser una alternativa a estudiantes con rezago, repitentes o en aquellos que desean avanzar en cursos de matemática. Cabe mencionar que la participación de los profesores colaboradores del proyecto ha sido amplia, con interés de superación personal e innovadora, sin embargo aún falta mucho para alcanzar el crecimiento, sobre todo en cuanto a la evaluación de aprendizajes matemáticos, confección de exámenes y diseño de material virtual atractivo al alumnado. Sin embargo, el logro más importante es sin duda, las reflexiones realizadas con los docentes sobre la necesidad de estudiar aspectos sobre evaluación en matemática y la conciencia adquirida en el equipo sobre de la necesidad de mantenerse en una constante investigación. Se ha notado un interés en la búsqueda en identificar diferentes maneras de evaluar cada tema, mediante ítems objetivos y de desarrollo, de manera novedosa y evitando que las pruebas se vuelvan predecibles. En el área del uso de las tecnologías en la confección de la prueba, el docente ha logrado un desarrollo notable en el uso del editor de texto matemático latex, y en el uso de herramientas tales como el Geogebra, que permite la elaboración de gráficas de alta calidad visual, para incorporarlas en los exámenes. La elaboración de materiales mediante tecnologías aprendidas, la optimización de sus procesos de comunicación con sus estudiantes, el uso de un lenguaje matemático correcto, claro y al alcance de sus alumnos entre otros, son factores que están potenciando su labor como docente del curso regular presencial. Quedan retos por lograr, como por ejemplo hace falta realizar estudios cualitativos sobre la causa de la deserción de los estudiantes del proyecto y sobre su baja promoción relacionada con el aprendizaje autónomo, la disciplina y perseverancia para potenciar esta habilidad en los estudiantes universitarios.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

EXMA. Proyecto Exámenes de matemática. Escuela de Matemática. Recuperado el 7 de octubre del 2015 de http://www.exma.emate.ucr.ac.cr/

González, M. (2001). La evaluación del aprendizaje: tendencias y reflexión crítica. Rev. Cubana Educación Media Superior, 15 (1), 85-96.

Lobato, C. (2006). El estudio y trabajo autónomo del estudiante. Métodos y Modalidades de enseñanza centradas en el desarrollo de competencias (pp.191- 223). Madrid: Alianza Universidad.

Ordóñez, K. (2015). Taller sobre construcción de ítems de desarrollo de matemática. Jardines Lankaster. Universidad de Costa Rica

Romberg, T. (1989). Evaluation: a coat of many colours. En Robitaille (ed). Evaluation and Assessment in Mathematics Education. París. UNESCO.

Stufflebeam, D. y Shinkifield, A. (1987). Evaluación sistemática. Guía teórica y práctica. Barcelona: Paidós-MEC.

Zabalza, M. (2002). El escenario y sus protagonistas. Madrid: Narcea.

TRANSFORMACIONES EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA NUMÉRICA EN LA CARRERA DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

Esther Ansola Hazday, Eugenio Carlos Rodríguez, Teresa Carrasco Jiménez
Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría (Cuba)
esther@ind.cujae.edu.cu, ecarlos@tesla.cujae.edu.cu, tcarrasco@cemat.cujae.edu.cu

Palabras clave: currículo de matemática, matemática numérica, tecnología.

Key words: curriculum of mathematics, numerical mathematics, technology.

RESUMEN: El presente trabajo muestra los resultados de una investigación realizada para modificar el programa analítico de la asignatura Matemática Numérica de la carrera de Ingeniería Informática en el Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, Cujae, en La Habana, Cuba. La modificación propuesta le da un mayor peso a la algoritmización y a la programación. La investigación surge a partir de los resultados docentes alcanzados por los estudiantes en la asignatura, los cuales podrían ser superiores teniendo en cuenta las potencialidades que presentan los mismos en la asimilación de las tecnologías de la informática y las comunicaciones.

ABSTRACT: The present paper shows the results of a carried out research to modify the analytic program

of the Numerical Mathematics subject in the career of Computer Engineering, in the Superior Polytechnic Institute José Antonio Echeverría, Cujae, in Havana, Cuba. The proposed modification gives a bigger weight to elaborate algorithms and the programming. The task arises starting from the educational results reached by the students, which could be superior keeping in mind the potentialities that present the same ones in the assimilation of the computer science technologies and the communications.

INTRODUCCIÓN

Las instituciones de educación superior en la actualidad desarrollan la formación de los profesionales en correspondencia con los avances científicos técnicos de la sociedad, lo que exige una eficiente preparación matemática de los actuales y futuros ingenieros (Escalona, 2011) apoyada con el desarrollo de habilidades que les posibiliten el uso de la tecnología como soporte en el proceso de aprendizaje.

El presente trabajo muestra los resultados de una tarea del proyecto de investigación "El Currículo de Matemática con tecnología en carreras de ingeniería", que se desarrolla en el Centro de Estudios de Matemáticas para Ciencias Técnicas, CEMAT, en el Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, Cujae, en La Habana, Cuba.

La tarea surge a partir de los resultados académicos alcanzados por los estudiantes de la carrera de Ingeniería Informática en la asignatura Matemática Numérica, los cuales podrían ser superiores teniendo en cuenta las potencialidades que presentan los mismos en la asimilación de las tecnologías de la informática y las comunicaciones.

El trabajo se sustenta en los referentes teóricos de la Didáctica Desarrolladora (Zilberstein, 2006 y Zilberstein y Portela, 2002) y la Teoría de la Actividad (González, 1989) utilizados como fundamentos para el perfeccionamiento del sistema de habilidades, el sistema de evaluación y el reordenamiento de la tipología de las clases y las horas dedicadas a ellas, integrado con los aportes de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje (Carlos y Ansola, 2003).

La Matemática Numérica tiene un carácter especial, por ser la rama de la Matemática que se dedica al estudio de métodos eficientes de cálculo para resolver problemas con un grado de precisión "aceptable" (Álvarez, Guerra y Lau, 2004). Estos métodos utilizan algoritmos que describen los procedimientos de cálculo, mientras más eficientes son los algoritmos utilizados, más rápido se producirá la convergencia del método en cuestión hacia la solución exacta del problema.

EXPERIENCIAS DIDÁCTICAS EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA NUMÉRICA EN CARRERAS DE INGENIERÍA.

Con ligeras modificaciones entre diferentes carreras y entre algunos planes de estudio diferentes, el programa de Matemática Numérica en carreras de ingeniería contiene los siguientes temas: teoría de errores, raíces de ecuaciones, valores y vectores propios, sistemas de ecuaciones lineales, ajuste de curvas, interpolación, integración, optimización y ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.

Muchos obstáculos se pueden encontrar en el aprendizaje de estos temas, entre ellos, dos de los más importantes son: la falta de un desarrollo adecuado del pensamiento algorítmico en los estudiantes y el conocimiento poco preciso del concepto de convergencia. El uso de la tecnología como soporte didáctico en la enseñanza de la Matemática Numérica puede contribuir a salvar estos obstáculos (Carlos y Ansola, 2003).

La enseñanza y el aprendizaje de los métodos numéricos utilizados en cada uno de estos temas han pasado, en los últimos años, desde el uso de las calculadoras electrónicas más elementales hasta el uso de modernas computadoras y potentes softwares profesionales.

En dependencia del tipo de tecnología utilizada en las clases, el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática Numérica se ha ido transformando, influyendo tanto en profesores como en estudiantes. Su utilización ha logrado en mayor o menor medida la ejercitación, profundización, algoritmización y la programación de los diferentes métodos.

La tecnología es un medio dirigido a producir en el que aprende resultados fructíferos. Si no los produce hay que evitar su utilización. El uso de la tecnología en la enseñanza de la Matemática Numérica contribuye al desarrollo del pensamiento algorítmico del estudiante mediante el conocimiento del algoritmo numérico de cada método y su programación, pero es imprescindible un diseño adecuado del proceso para utilizar la tecnología no solamente como una herramienta de cálculo, sino como un medio didáctico, que contribuya al mejor aprendizaje de los estudiantes (Carlos, 2007)

Situación actual

El tipo de clase utilizado es el de conferencia-clase práctica, esta última impartida en laboratorios de computación, con la utilización de un software elaborado con fines docentes y en algunas clases un Asistente Matemático profesional.

En la conferencia el profesor explica el método y el algoritmo en seudocódigo; luego resuelve o muestra ejemplos resueltos en la computadora. También puede hacer uso del Asistente Matemático como un recurso adicional para hacer gráficos y otros cálculos.

En el software docente utilizado la ejecución de todos los procesos iterativos se realiza paso a paso, de modo que puede apreciarse la forma en que se produce la convergencia, e incluso se puede trabajar en problemas en que no hay convergencia, contribuyendo así, notablemente, al aprendizaje de la Matemática Numérica.

En la clase práctica el estudiante modela problemas y aplica los métodos utilizando la computadora.

La asignatura consta de 7 temas distribuidos en 15 semanas con un total de 64 horas como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1. Distribución de temas de la asignatura.

Semana	Tema	Tipo de clase (horas)		Evaluación (horas)
		C	C P	
1	Introducción a la teoría de errores	2	2	
2	Raíces de ecuaciones. Métodos de Bisección y Regula Falsi	2	2	
3	Raíces de ecuaciones. Métodos de Newton Rahpson y Secantes	2	2	
4	Sistemas de Ecuaciones Lineales. Método de Gauss	2	2	
5	Sistemas de Ecuaciones Lineales. Métodos de Jacobi y Seidel	2	2	
6	Interpolación Polinomial. Método de Lagrange	2	2	2
7	Interpolación Polinomial. Método de Newton de Diferencias Divididas	2	2	
8	Ajuste de curvas	2	2	
9	Integración Numérica. Métodos de Trapecios y Simpson	2	2	
10	Optimización Unidimensional. Método de Bisección	2	2	2
11	Optimización Unidimensional. Método de Fibonacci	2		
12	Optimización Multidimensional. Métodos de Coordenadas y Gradiente	2	2	
13	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden. Métodos de Euler y RungeKutta	2	2	
14	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de orden superior.	2	2	
15	Aplicaciones de las EDO	2	2	2

La evaluación

Un elemento importante es la evaluación, algunas aplicaciones de las tecnologías en la enseñanza no van acompañadas de un adecuado diseño de la evaluación.

Actualmente la evaluación está diseñada para el uso de la computadora. El alumno tiene disponible una computadora para evaluarse y la evaluación contiene preguntas teóricas, modelación de problemas, cálculos en la computadora y elaboración de algoritmos.

Resultados académicos obtenidos

Los resultados obtenidos en los últimos cursos no han sido los esperados, teniendo en cuenta las características de esta asignatura y las potencialidades de un estudiante que domina la tecnología.

En la Tabla 2 se muestran los mismos.

Tabla 2. Resultados de promoción

Curso académico	2011-2012	2012-2013	2013-2014
Promoción	67.8%	52%	78.5%

A partir de estos resultados se justificó la necesidad de investigar la forma y los medios para lograr que estos estudiantes mejoraran la adquisición de conocimientos en esta materia, reflejados en los resultados académicos de la asignatura. Para ello se consideró que los mismos tienen potencialidades en la asignatura, por las características de la misma, que la hacen atractiva para el perfil de la informática.

La investigación

Teniendo en cuenta lo anterior se procedió a diseñar la presente investigación.

Situación problemática:

- Bajo rendimiento de los estudiantes en la asignatura que se manifiesta en los resultados docentes;
- Falta de motivación de una parte de los estudiantes por la asignatura y
- No se aprovechan las potencialidades del perfil informático en el proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura.

A partir de la situación anterior se planteó el siguiente problema de investigación:

Problema: ¿Cómo mejorar los resultados de promoción de los estudiantes a partir de una transformación metodológica de la asignatura?

Para resolver este problema se propusieron como objetivos: estudiar qué factores estaban influyendo en los bajos resultados docentes de la asignatura y proponer las transformaciones necesarias de la misma.

Del análisis realizado resultó la realización de un diagnóstico con el objetivo de identificar las causas de estos insuficientes resultados, para lo cual se elaboró una encuesta que fue aplicada a una muestra de estudiantes de tercer año de la carrera de Ingeniería Informática, que ya habían cursado la asignatura, así como entrevistas a los docentes de la asignatura y a otros especialistas de asignaturas específicas de la carrera.

La encuesta

Como en toda investigación cuantitativa, se aplicó un instrumento para medir las variables de interés, teniendo en cuenta las dimensiones de las variables y los indicadores a medir (Hernández, Fernández y Baptista, 2006).

En el diseño del instrumento aplicado se tuvo en cuenta que en el problema científico planteado la variable a estudiar era el aprovechamiento docente de los estudiantes en la asignatura, considerándose los indicadores motivación, satisfacción y habilidades informáticas de los estudiantes. La selección de estos indicadores estuvo basada en el estudio de diferentes autores,

tales como (Orozco y Díaz, 2009) que plantean entre otras cosas, que la motivación se considera un eje fundamental en el rendimiento intelectual de los estudiantes.

De una población de 120 estudiantes, se tomó una muestra de 96, asumiendo un error estándar de 0.01 y una probabilidad de ocurrencia del fenómeno de 0.95 (Hernández et al, 2006).

La encuesta estuvo dirigida a analizar la motivación y la satisfacción de los estudiantes con la impartición actual de la asignatura así como su interés por la elaboración de algoritmos y programas.

Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 3:

Tabla 3. Resultados por indicadores.

Indicadores	%
Satisfacción con la forma en que se imparte la Matemática Numérica	61
Motivación con la forma en que se imparte la Matemática Numérica	53
Motivación con los temas que se imparten en la asignatura y sus aplicaciones prácticas	52
La asignatura es más atractiva e interesante si elaboran algoritmos en las clases prácticas	90
La asignatura es más atractiva e interesante si programan los métodos en las actividades docentes	97
Comparando con la forma en que se imparte actualmente la asignatura ¿aprenderían mejor los métodos que se estudian si ustedes elaboraran sus propios programas?	79

En los resultados obtenidos se observa que existe satisfacción y motivación con la forma actual de impartición de la asignatura, aunque creemos que pudiera ser mucho mayor. Sin embargo un alto porciento coincide en que el aprendizaje sería superior si se elaboraran más algoritmos en las clases y se programaran los métodos, lo que demuestra la importancia de modificar la asignatura teniendo en cuenta las habilidades informáticas de estos estudiantes.

Entrevistas a los docentes

En las entrevistas realizadas a los docentes que imparten la asignatura, estos manifestaron que no todos los estudiantes se sienten motivados por la misma, lo que influye en el desarrollo de las clases y en los resultados docentes.

Otro criterio es que no se explotan adecuadamente las potencialidades de los estudiantes, teniendo en cuenta que son estudiantes de segundo año de la carrera que ya han recibido asignaturas de informática, por lo que la asignatura resultaría más atractiva si se utilizaran estos conocimientos.

Propuestas

Teniendo en cuenta el diseño actual de la asignatura se proponen dos variantes:

Variante 1: Modificar el programa analítico de la asignatura Matemática Numérica aumentando el número de horas de las clases prácticas y transformando el sistema de evaluación, dándole un mayor peso a la algoritmización y a la programación.

Se propone incrementar en un 10% las horas de la asignatura, teniendo en cuenta que esta modificación sólo requiere la aprobación del Jefe del Departamento, según el Reglamento para el

Trabajo Docente Metodológico (Ministerio de Educación Superior de Cuba, 2007), lo que representa seis horas de clases, que se dedicarían a tres clases prácticas donde se desarrollarían y analizarían algoritmos. También se propone modificar el sistema de evaluación realizando una tarea extra clase en la que se elaborarían algoritmos y programas de métodos numéricos para casos específicos.

La propuesta de distribución de horas de la asignatura se muestra en la Tabla 4:

Tabla 4. Distribución de horas de la asignatura según la variante 1 propuesta.

Semana	Tema	Tipo de clase (horas)			Evaluación (horas)
		C	C P	CP de algoritmos	
1	Introducción a la teoría de errores	2	2		Entrega de tareas
2	Raíces de ecuaciones. Métodos de Bisección y Regula Falsi	2	2		
3	Raíces de ecuaciones. Métodos de Newton Rahpson y Secantes	2	2		
4	Sistemas de Ecuaciones Lineales. Método de Gauss	2	2		
5	Sistemas de Ecuaciones Lineales. Métodos de Jacobi y Seidel	2	2	2	
6	Interpolación Polinomial. Método de Lagrange	2	2		
7	Interpolación Polinomial. Método de Newton de Diferencias Divididas	2	2		
8	Ajuste de curvas	2	2		2
9	Integración Numérica. Métodos de Trapecios y Simpson	2	2	2	
10	Optimización Unidimensional. Método de Bisección	2	2		
11	Optimización Unidimensional. Método de Fibonacci	2			
12	Optimización Multidimensional. Métodos de Coordenadas y Gradiente	2	2		
13	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden. Métodos de Euler y RungeKutta	2	2		Discusión de tareas
14	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de orden superior.	2	2	2	
15	Aplicaciones de las EDO	2	2		2

Variante 2: Modificación del programa analítico de las asignaturas Matemática Numérica y Fundamentos de la Informática.

Seleccionar un grupo de temas de la asignatura Matemática Numérica que puedan ser impartidos en el primer semestre de primer año de la carrera, en la asignatura Fundamentos de la Informática, con el objetivo de contribuir al desarrollo de habilidades de algoritmización y programación.

En el momento de recibir la asignatura Fundamentos de la Informática, el estudiante aún no ha recibido el cálculo diferencial pero sí el trabajo con funciones, límite y continuidad, por lo que los

temas de Matemática Numérica se abordarían fundamentalmente con un enfoque geométrico, con algunos elementos teóricos imprescindibles.

Al trasladar algunos temas de la asignatura Matemática Numérica a esta asignatura de primer año, el tiempo que se dedicaba a la impartición de los mismos podría ser utilizado para profundizar en los métodos que se imparten, introducir métodos nuevos y elaborar más algoritmos en clase.

Esta variante es objeto de otra tarea del proyecto de investigación, que implica el rediseño de la asignatura Fundamentos de la Informática incluyendo los sistemas de conocimientos, objetivos y habilidades. Esta investigación se propone medir el impacto del resultado del desarrollo de las habilidades de algoritmización y programación logradas con las modificaciones propuestas, en otras asignaturas de la carrera, lo cual no es objeto de análisis en este trabajo.

CONCLUSIONES

De acuerdo a la investigación realizada, los resultados obtenidos en los últimos cursos, no son los esperados para este tipo de estudiante.

En la encuesta aplicada se obtuvieron los resultados siguientes:

- Los estudiantes no están satisfechos ni motivados con la forma en que se imparte la asignatura
- Consideran que la asignatura es más atractiva e interesante si elaboraran algoritmos y programaran los métodos en las actividades docentes.
- Consideran que aprenderían mejor los métodos que se estudian si elaboraran sus propios programas.
- No se explotan adecuadamente las potencialidades de los estudiantes.

La propuesta que se presenta incluye una redistribución del número de horas de la asignatura, incluyendo nuevas clases prácticas para que los estudiantes adquieran mayores habilidades en la algoritmización, e incluir en el sistema de evaluación una tarea extra clase en la que los estudiantes desarrollarán algoritmos y programas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Álvarez, M., Guerra, A. y Lau, R. (2004). *Matemática Numérica*. La Habana: Editorial Félix Varela.

Carlos, E. y Ansola, E. (2003). Las nuevas tecnologías en la enseñanza de la Matemática Numérica. Experiencias didácticas. En G. Martínez (Ed). *Resúmenes de la Séptima Escuela de invierno y Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, (pp.147). Chilpancingo: EXPOS Editores.

Carlos, E. (2007). En C. Crespo Crespo (Ed*), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20*, pp. 730-735. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Escalona, M. (2011). El perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la Educación Superior. Su concreción en las carreras de ingeniería en la Universidad de Holguín. En

Revista Iberoamericana de Educación, 56, (4). España. Recuperado el 26 de marzo de 2015 de www.rieoei.org/deloslectores/4410Escalona.pdf

González, O. (1989). *Aplicación del Enfoque de la Actividad al perfeccionamiento de la Educación Superior*. La Habana: CEPES

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación.* México: Mc Graw-Hill.

Ministerio de Educación Superior de Cuba, 2007. *Reglamento para el Trabajo Docente y Metodológico. Resolución No.210/2007*. La Habana: Editorial Félix Varela.

Orozco, C. y Díaz, M. (2009). *Atribuciones de la motivación al logro y sus implicaciones en la formación del pensamiento lógico-matemático en la universidad.* Recuperado el 7 de abril de 2015 de www.scielo.org.ve/pdf/inci/v34n9/art08.pdf

Zilberstein, J. (2006). Categorías de una Didáctica Desarrolladora. Posición desde el enfoque Histórico-Cultural. En Colectivo de Autores. *Preparación Pedagógica Integral para Profesores Integrales,* pp. 33-43. La Habana: Editorial Félix Varela.

Zilberstein, J. y Portela, R. (2002). *Una Concepción Desarrolladora de la Motivación y el Aprendizaje de las Ciencias*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y LA COMUNICACIÓN (NTIC) Y LA EVALUACIÓN EN MATEMÁTICAS

Jorge Ávila Soria
Universidad de Sonora, México
javilas9@gmail.com

Palabras clave: enseñando con tecnología, software matemático, NTIC, evaluación en matemáticas

Key words: teaching with technology, mathematical software, ICT, mathematics evaluation

RESUMEN: Hace más de una década que en la Universidad de Sonora se imparte la materia de NTIC a todos los estudiantes, quienes no encuentran, en su mayoría, un beneficio inmediato con lo aprendido. Nuestro análisis se basa principalmente en entrevistas a estudiantes y profesores, sobre NTIC como: compartición de archivos o trabajo colaborativo en la nube, creación de blogs o wikis grupales, comunicación con el grupo por redes sociales y evaluación en línea, entre otras, las cuales son usadas tan poco por los profesores, que parecería necesario hacer la materia obligatoria también para los académicos, además de otras recomendaciones.

ABSTRACT: More than a decade ago, at the University of Sonora, the course of NICT has been taken by every student, who seldom finds an immediate benefit about its learning experiences. Our analysis is based primarily on interviews with students and teachers of NICT such as: file sharing or collaborative work in the cloud, blogging and group wikis, communication with the groups on social networks and online testing, among others, which are used by teachers so little, it would seem necessary to make it a mandatory subject also to academics, beside of other recommendations.

INTRODUCCIÓN

No esperamos que lo observado a partir de nuestra experiencia con el uso de las NTIC para la evaluación en Matemáticas y las dificultades que hemos encontrado, sean un espejo de lo que sucede en otros lugares de Latinoamérica o el planeta. Sin embargo; si creemos que existen algunas similitudes y esperamos que el conocimiento tanto de las dificultades como de las recomendaciones que presentamos aquí, puedan ser de utilidad para aquellos académicos que busquen mantenerse actualizados. Pero también para aquellos que quieran sacar provecho de lo que las NTIC nos ofrecen en la actualidad, de las mejoras futuras que nos traerán y de los cambios paradigmáticos que de seguro se avecinan y que probablemente dejarán en estado de obsolescencia a todos aquellos que intenten resistirse a los cambios por venir. Para clarificar este punto, bastaría preguntar en su universidad, si conocen algún profesor que no cuente con teléfono móvil, no use al menos su correo electrónico, y prohíba usar la computadora o que no tenga y preguntar la opinión a este respecto sobre esa persona.

Las tecnologías surgen todo el tiempo, pudiendo ser consideradas como nuevas por algún tiempo y no tienen que ser para uso exclusivo en Matemáticas o en la docencia en Matemáticas. Sin embargo, para poner una perspectiva histórica sobre tecnologías que si han sido usadas para las Matemáticas y la docencia en Matemáticas, aunque no exclusivamente; la siguiente lista muestra muchas de estas tecnologías, tanto previas como aun en uso: grabado o pintado en piedra, papiros, papel, tinta, imprenta, impresiones (libros, tablas), instrumentos de escritura (lápiz, pluma, gis, plumón), instrumentos de presentación (pizarrón, hojas, rota folios, acetato, proyector), instrumentos de medición (regla, escuadras, compas, transportador), instrumentos de cálculo (regla de cálculo, calculadora electrónica, computadora), etc.

Las NTIC no fueron creadas para la Matemática o para la docencia en Matemáticas y pueden ser usadas en cualquier disciplina. Sin embrago, la comunidad Matemática, y en especial la comunidad de Matemática Educativa, siempre atenta de las problemáticas de la docencia en Matemáticas en todos los niveles educativos, no puede dejar de mostrarse interesada en apropiarse las NTIC para el beneficio y desarrollo de los procesos de enseñanza con tecnología digital que vienen formando parte del aprender matemáticas desde la aparición de las calculadoras digitales y las primeras computadoras, pues estos instrumentos vinieron a cambiar la forma en que se hacían ciertas matemáticas.

Hace más de una década, en la Universidad de Sonora se creó un grupo de materias que se imparten a todos los estudiantes que ingresan a la institución y se les denomina tronco común básico. Las materias a las que nos referimos son: **Características de la Sociedad Actual, Ética y Desarrollo Profesional, Estrategias para Aprender a Aprender, y Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación.**

Con estas materias se busca que los estudiantes conozcan cómo se espera que sea vinculación a la sociedad y su comportamiento en ella, tanto como individuos y como profesionistas. Además, se quiere que los estudiantes aprendan a colaborar en equipos de trabajo y en forma interdisciplinaria y que al mismo tiempo puedan ser autosuficientes académicamente, y que conozcan los recursos con los que cuentan dentro de la universidad, como aquellos externos a los que pueda acceder y sirvan a su desarrollo. También se promueve lo referente a los valores con los que debe contar una persona y el comportamiento ético que se espera de nosotros como individuos y como profesionistas tanto en México como en el mundo.

Por último, la materia de NTIC busca, gracias a la infraestructura tecnológica y digital con se cuenta en la institución, que todo estudiante de la institución conozca y sea capaz de usar los elementos más recientes que nos ofrecen las tecnologías de la información y la comunicación.

En la materia de NTIC se usan los elementos más nuevos de la Web 2.0 a través del desarrollo de actividades prácticas de enfoque académico acorde a las áreas de estudio de los estudiantes inscritos y se espera que los estudiantes continúen usando estos elementos durante todos sus estudios y lo continúen haciendo en su vida profesional.

Sin embargo, los estudiantes encuentran aplicación a lo aprendido en pocas ocasiones y cuando lo usan es mayormente para hacer una presentación frente a grupo e incluso en esas ocasiones no es necesaria la internet. Otras ocasiones en las que quizás pueden usar las NTIC son en semestres subsiguientes con los programas computacionales enfocados a estudios más avanzados o cuando ellos mismos en ocasiones por propuesta del profesor y las más de las veces por iniciativa propia forman grupos para pasarse información, trabajos o tareas de la materia.

PROBLEMÁTICA

El análisis y sugerencias que se hacen sobre el uso de las NTIC para la evaluación en Matemáticas, no es el primero en la institución. A continuación, presentamos dos trabajos en este mismo sentido.

Primero, Arreaga y Oreste (2011) señalan que en el docente recae la responsabilidad de mostrar al estudiante las oportunidades que el paradigma informacionalista les ofrece. Sin embargo, no todos los docentes pueden asumir este rol pues, así como muchos de los alumnos que terminan el curso de NTIC, no están preparados para usar apropiadamente las herramientas de la Web 2.0, también muchos de los docentes tienen un bajo nivel o nulo nivel en el uso de tales herramientas. En el caso de los estudiantes, esto puede deberse a diversas razones: la inmadurez, la poca exposición previa al uso de la computadora y el internet, las deficiencias en la comprensión lectora, o el poco interés puesto en el tema en cuestión. Por su parte, en el caso de los docentes, la principal razón puede estar en la rapidez del cambio tecnológico que ha sobrepasado a muchos de los docentes que empezaron su carrera docente antes de la llegada de las computadoras personales.

Por otra parte, concordamos plenamente con lo sugerido por Parra (2008), quién señala la necesidad de generar foros o implementar seminarios al interior de las instituciones educativas, para el análisis y la discusión de las formas de enseñanza y la evaluación de los estudiantes mediante el uso de las NTIC para las materias de ciencias. Así como proponer criterios y técnicas que permitan determinar con cierta precisión, el avance logrado por cada estudiante.

También estamos de acuerdo con la opinión del autor sobre la importancia de aprovechar las experiencias de los investigadores educativos sobre el uso de la tecnología en el proceso de enseñanza en sus cursos. Pero agregaríamos que también las experiencias discutidas al interior de la propia institución deben ser aprovechadas. Esto debido a que son los propios docentes de la institución quienes conocen mejor las deficiencias en la infraestructura tecnológica y de espacio, y son los que tienen que buscar la manera de trabajar y maximizar el uso de los recursos tecnológicos con los que cuenta la institución.

En otros trabajos que nos muestran observaciones hechas sobre el proceso de implantación de las NTIC en Latinoamérica, encontramos información que muestra elementos que nos permiten tener una perspectiva de lo que era, lo que pasó, lo que es y lo que será o hacia donde se dirige, el uso de las NTIC en la educación de Latinoamérica y el mundo.

Velleggia (1999) decía al finalizar el milenio, que quizás eso de la introducción de las NTIC habría que tomarlo con cuidado, pues históricamente en Latinoamérica se tiene la tendencia a implantar cualquier cosa cuando se encontraba con las presiones, influencias o simplemente ocurrencias del poder o los intereses económicos tanto internos de los países como venidos del exterior y que estas influencias están presentes en la implantación de planes de desarrollo para los sistemas educativos, que muchas de las ocasiones se implementaban al vapor, sin un estudio y planeación apropiados de la problemática, ni la preparación de los entes actuantes o los recursos necesarios para una adecuada implementación.

A pesar del pesimismo expresado por Velleggia (1999), su análisis no está alejado de la realidad de Latinoamérica en general, pues a pesar de que su experiencia se basa en el caso argentino, nosotros podemos decir que en el caso mexicano las cosas han ocurrido de forma similar.

Con respecto al caso de México y la introducción de las NTIC en forma masiva, para el nivel básico, San Juan (2010) menciona el programa Enciclomedia, que surgió como muchos otros programas, quizás con una buena intensión, pero sin mucha idea de lo que resultaría de ella. Aun cuando, a lo dicho por el autor, se le podrían agregar las cosas que eran y son observables directamente en las escuelas del nivel básico en México, esto último podría quedar como un ejemplo particular o anecdótico, sin embargo, para tener una perspectiva más clara de lo acontecido con los programas de gobierno para el ámbito educativo, se pueden revisar reportajes de investigación como el de la revista Proceso de agosto del año 2005, el de octubre del año 2007, así como otras posteriores, donde se habla precisamente del programa Enciclomedia y su manejo.

Lo que si podemos afirmar es que se gastaron muchos recursos de forma nada apropiada en ese primer programa nacional para la introducción de las NTIC en el nivel básico que fue Enciclomedia. Se instalaron muchos pizarrones y hardware, pero no se invirtió lo que se necesitaría en la capacitación de los usuarios. Además, los errores del mismo tipo se siguen cometiendo, pues se entregaron mini computadoras y luego más recientemente tabletas a estudiantes y docentes, pero de nuevo sin capacitación para el docente, no sólo en el uso del equipo, pero aún más importante, en el tipo de actividades a realizarse o los sitios de interés para ser visitados o que puedan servirle de guía al docente en la enseñanza con tecnología.

Debemos reconocer que, si bien somos críticos de los problemas de conectividad en el caso mexicano, nuestro país, en los primeros 15 años del siglo, ha avanzado a buen ritmo en la conectividad en todo el territorio y ciertamente se han dado avances en la instalación de infraestructura en los centros de educación del país en todos sus niveles educativos, esto a pesar de que existen geografías demasiado accidentadas, demasiado lejanas, demasiado recluidas o demasiado ignoradas, donde siguen faltan muchas cosas.

Por otra parte, Macías (2006) y Padrón (2008) hablan sobre cambios sustantivos y suponemos que, desde sus experiencias particulares en sus respectivas ubicaciones geográficas, lo cual suponemos no es pura coincidencia; pero podría ser propuesto desde cualquier país del mundo con mayor o menor énfasis en los diversos tipos de cambios necesarios. Padrón (2008) desde su

perspectiva cubana expresa la necesidad de cambios estructurales en el proceso educativo tradicional a través de profundos cambios en el diseño curricular de todos los niveles de enseñanza, acompañado de cambios en la formación de los docentes. Queremos pensar que si en el caso cubano, donde las pruebas de desempeño matemático muestran a su sistema educativo como el de mejor desempeño en toda América, se observa la imperativa necesidad de formar a los docentes en el uso de las NTIC, esta misma necesidad debe aplicar a toda la América Latina.

Finalmente, Romero (2006) promueve el uso de los materiales creados por los docentes a nivel mundial y que están disponibles en el internet para ser aprovechados por otros docentes que les encuentren uso para sus cursos y de la misma manera exhorta a los docentes de todos los niveles a continuar el proceso de creación y desarrollo de actividades, situaciones problema, aplicaciones tecnológicas, simulaciones, animaciones o cualquier otro tipo de implementación con tecnología digital y a ponerlo a disposición de la comunidad escolar, docentes y estudiantes. A éste respecto, estamos claramente de acuerdo, por desgracia los esfuerzos son aislados en su mayoría y no existe lugar, el cual podría ser un wiki, donde los docentes puedan colocar todas sus aportaciones de forma ordenada; sólo existen esfuerzos aislados como son los casos de Geogebra Wiki, Wikipedia o Descartes que reciben aportaciones de todo el mundo.

Geogebra Wiki es un buen ejemplo de software de Matemáticas tiene aportaciones enfocadas a la Ciencia en general y más particularmente a la enseñanza de las Matemáticas, el cual crece y se desarrolla gracias a las aportaciones de la comunidad de usuarios que ayudan a marcar el rumbo hacia donde se dirige el crecimiento o las nuevas implementaciones o mejoras.

METODOLOGÍA

El análisis que nosotros hacemos de la problemática del uso de las NTIC para la evaluación en Matemáticas, se basa principalmente en entrevistas a estudiantes y profesores de la institución, sobre el uso hecho de diversas NTIC, de la Web 2.0, como son: la compartición de archivos o el trabajo colaborativo en la nube, la creación de blogs o de wikis grupales, la comunicación con el grupo por medio de las redes sociales, la aplicación de exámenes automatizados por medio de plataformas en línea o en la nube, el uso de recursos didácticos como los mapas mentales, las presentaciones o las infografías digitales y el estudio, el análisis o la resolución de problemas con software para Matemáticas.

La razón, para seleccionar precisamente estas NTIC de la Web 2.0, se debe a experiencias vividas directamente en la aplicación y uso de cada uno de estos elementos, y en los cuales encontramos elementos que consideramos valiosos y que queremos compartirles.

En ningún momento fue nuestra intensión el ser exhaustivos, ni rígidos en la aplicación de cuestionarios elaborados para el registro de los datos, en lugar de eso, nos dimos a la tarea de entrevistar usando un formato libre, más parecido a una conversación cotidiana, pero sin perder de vista el guion flexible establecido, sobre el tema de interés que es el uso de las NTIC en general y de las NTIC mencionadas en particular, con el propósito de evaluar más directamente el trabajo desarrollado y el aprovechamiento de los estudiantes durante un curso.

Entrevistamos directamente a doce docentes e indirectamente, a través de los estudiantes, se tomaron datos de otros veinte docentes. Respecto a los estudiantes, preguntamos durante un

periodo de tres años a seis grupos de la materia de Métodos Numéricos con estudiantes mayoritariamente de la carrera de Ingeniería Química y algunos de la carrera de Ingeniería Civil, contabilizando alrededor de 120 estudiantes. En cada grupo se preguntó a los estudiantes sobre lo hecho por sus profesores con respecto al uso de las NTIC.

A los docentes que fueron entrevistados directamente, se les pregunto primero sobre los elementos digitales o software que usaban en sus cursos de Matemáticas, así como el propósito con el que los usaban y en base a sus respuestas, después se empezaba a indagar sobre los elementos de interés de la Web 2.0 que el docente no hubiera mencionado. En cambio, con los estudiantes se llevaba a cabo una plática en el grupo, donde se les preguntaba sobre las materias (de Matemáticas o de Ciencias o Ingeniería que ocuparan Matemáticas) que cursaban o hubieran cursado, los profesores que las impartían y sobre el tipo de elementos digitales que los profesores usaban y el propósito de ese uso en los cursos. De esta forma, obtuvimos los cursos, los nombres de los docentes y sus hábitos de enseñanza con tecnologías digitales. A los estudiantes se les preguntaba más directamente sobre los elementos de interés de la Web 2.0 y sobre el uso que les daban fuera de la materia de NTIC, sobre la frecuencia de uso, la utilidad que ellos observaban y cuando el uso era académico o extra académico.

La metodología que empleamos para analizar los datos recogidos es mixta, pues los elementos que sirven de soporte a las aseveraciones que hacemos con respecto al uso de las NTIC para la evaluación en Matemáticas se basan en una parte cuantitativa, emergente de los porcentajes obtenidos de las entrevistas hechas a estudiantes y profesores; así como una parte cualitativa que surge de los cruzamientos de datos entre la información obtenida sobre los docentes y aquella proporcionada por sus estudiantes y por la información vertida en las respuestas dadas a preguntas abiertas que fueron contestadas tanto por estudiantes como por docentes.

Algunas de las estadísticas recogidas son aproximadamente las siguientes. El 85% de los docentes declaró o se nos dijo que usaba algún tipo de software durante sus cursos. Aquí incluimos desde los docentes que trabajan con soltura con las NTIC, hasta aquellos que sólo usan calculadora científica, que ya caería dentro de la enseñanza con tecnología. Aquí podemos pensar que, si un docente sólo usa la calculadora en su curso, ese mismo curso lo podría haber dado tres décadas atrás sin ningún problema, pues ya se disponía de esas calculadoras. En cambio, sólo el 40% de los docentes usa alguno de los elementos de las NTIC que nos interesan en cursos diferentes al de NTIC y de alguna manera evalúan lo usan en la evaluación de sus cursos. De ese 40%, nueve de cada diez pide tareas con software digital o evalúan con Maple TA, mientras que la totalidad de ese 40% de docentes, usa algún tipo de red social para comunicarse con sus estudiantes.

De la totalidad de docentes muestreados, el 55% recoge las tareas por envíos al correo electrónico, algún dispositivo de almacenamiento, o tareas impresas, lo que nos deja con un 30% de docentes que reciben alguna parte del trabajo del grupo por medio de la Nube.

Con respecto a los estudiantes entrevistados, la totalidad usa las redes sociales para comunicarse al menos con alguno de sus compañeros y un 85% forma parte de un grupo en alguna red social, promovido por ellos mismos o en algunos casos por sus profesores. En este punto de su carrera, cuarto o quinto semestre, los estudiantes declaran usar algún tipo de software en alguna materia, aun cuando algunos de esos software no están disponibles de forma gratuita en el internet, además menos del 10% aún prefiere usar la calculadora con lápiz y papel, en lugar de recurrir al uso de

software digital. Respecto a esta última estadística, nos parece que ese comportamiento puede obedecer a la natural resistencia al cambio que suele aparecer en los momentos en que se aprenden cosas nuevas, el problema sería si el comportamiento perdura, porque de seguro afectará en la aptitud con relación al cambio tecnológico. Finalmente, cabe mencionar que no estamos contando el uso de la hoja de cálculo, pues en la materia de Métodos Numéricos tienen que usarla.

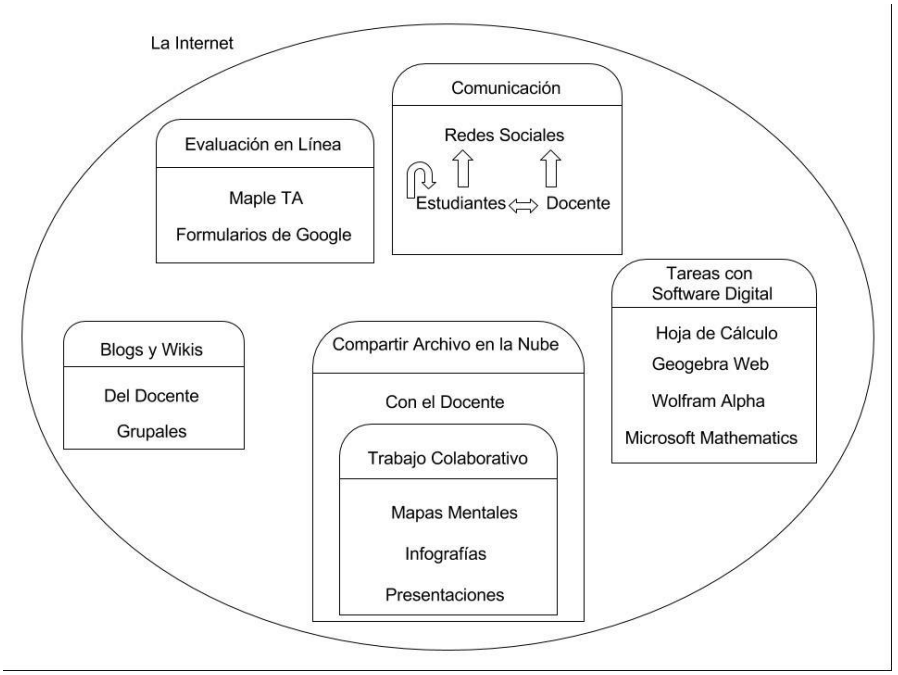
PROPUESTA

Nuestra propuesta de las NTIC de la Web 2.0 que pueden ayudar a mejorar el proceso de evaluación de los estudiantes en los cursos de Matemáticas del nivel superior, se encuentra representado en el diagrama de la Figura 1, que es de donde hablaremos de nuestra propuesta y como se puede trabajar con la compartición de archivos o el trabajo colaborativo en la nube, la creación de blogs o de wikis grupales, la comunicación con el grupo por medio de las redes sociales, la aplicación de exámenes automatizados por medio de plataformas en línea o en la nube, el uso de recursos didácticos como los mapas mentales, las presentaciones o las infografías digitales y el estudio, el análisis o la resolución de problemas con software para Matemáticas.

Anteriormente habíamos comentado que la razón, para seleccionar precisamente estas NTIC de la Web 2.0, se debe a experiencias vividas directamente en la aplicación y uso de cada uno de estos elementos, y en los cuales encontramos elementos que consideramos valiosos. Cuando nos referimos a estas experiencias vividas, nos referimos a cursos de Matemáticas donde, en ocasiones ajustando las experiencias en los cursos de NTIC, utilizamos las herramientas en los cursos de Matemáticas y otras, haciendo un uso totalmente diferente pero que al final de cuentas sentimos que dieron buenos resultados, y las cuales les compartiremos.

Pensamos que todos los elementos valiosos de las NTIC, ya se encuentran o están por migrar al uso en navegador y como consecuencia tendrán que ser utilizados en el internet, que por esta razón que todos los elementos de nuestro diagrama de la Figura 1, se encuentran dentro de la burbuja del Internet. También sabemos que aún existen muchos problemas de conectividad en nuestras instituciones de nivel superior, pero nuestras infraestructuras de conectividad siguen mejorándose con más instalaciones de ruteadores TP para WIFI y mayor ancho de banda, por lo que muchas de las cosas que aquí propondremos, realmente se podrán implementar, sin algunos problemas que pudieran existir ahora.

Figura 1. Elementos de las NTIC, en la Web 2.0 que pueden aprovecharse para ayudar en la evaluación en Matemáticas



Dentro de la burbuja del Internet, ponemos en nodos, cinco elementos que consideramos de utilidad para mejorar el desempeño de la evaluación en Matemáticas. Cada nodo será explicado a continuación, junto con la manera en que ha sido usado para la evaluación del desempeño de los estudiantes en los cursos de matemáticas por parte del docente, aunque pensamos que también el estudiante puede evaluar de forma más cercana el desempeño del profesor como docente.

El nodo de Comunicación, que como se comentó anteriormente, ya se usa con bastantes buenos resultados. La intensión de este nodo es la de mantener un canal de comunicación siempre abierto entre el docente y los estudiantes, un canal de comunicación donde los estudiantes también se puedan comunicar entre ellos y puedan publicar sus propias inquietudes o generar foros de discusión o ayuda. Respecto es este nodo, no tenemos favoritos en cuanto al uso de las redes sociales, preferimos dejarle al docente decidir cuál es la red social que más conviene a sus necesidades, que podría ser institucional o pública (Facebook, Twitter, Google+, WhatsApp, etc.). Por ejemplo, pensar en un profesor que decida incluirse en un grupo de WhatsApp, donde podría recibir mensajes a cualquier hora, lo cual podría hacerlo sentir agobiado, en cuyo caso, le serviría mejor una red social institucional o menos popular, donde pudiera tener la comunicación justa.

Otro de los nodos es el de Compartir Archivos en la Nube, el cual puede jugar un doble rol en el proceso de evaluación del desempeño académico de los estudiantes, pues permite que los estudiantes le compartan sus trabajos al docente y que de esta manera el docente pueda evaluar sus avances. El Compartir Archivos en la Nube también permite el trabajo en equipo y a distancia (trabajo colaborativo), al permitir al estudiante compartir archivos con sus compañeros de clase y con el docente, quien de esta manera podrá evaluar no sólo el avance, sino las aportaciones de cada miembro de un equipo de trabajo. Cuando al docente se le comparten los archivos con

permisos de edición, éste puede ver el historial del trabajo y saber que hizo cada estudiante y cuando lo hizo. El trabajo en equipo es lo que en el diagrama aparece como el sub nodo que llamamos Trabajo Colaborativo y es idóneo para tipo de curso en línea, además sugerimos que se asignen trabajos colaborativos donde se requiera utilizar mapas mentales, presentaciones o infografías como recursos nemotécnicos que ayuden al proceso de aprendizaje de los estudiantes.

El nodo de Evaluación en Línea presenta dos alternativas que hemos utilizado, con sus ventajas y desventajas. Maple TA tiene la desventaja de no ser gratuito y requerir el pago de licencias por cada usuario, pero tiene mucha funcionalidad, especialmente una vez que se cuenta con un banco de reactivos diseñados, pues se pueden generar grupos de ejercicios y exámenes, incluso de forma aleatoria. Aun cuando Maple TA tiene muchas ventajas y se obtienen mejoras frecuentes, aun adolece de la flexibilidad que desearías tener a la hora de diseñar reactivos para los alumnos. Por otra parte, también se pueden usar los formularios de Google, que te permiten hacer algo equivalente a Maple TA, aunque su funcionalidad es un poco más reducida, este si es gratuito y no necesitas un servidor y un administrador para instalar y programar la plataforma Moodle. Además, los formularios de Google recogen las respuestas proporcionadas por los estudiantes, en una hoja de cálculo y te da estadísticas sobre ellas. Especialmente cuando ya se cuenta con un amplio banco de reactivos para utilizar en la Evaluación en Línea, el docente se puede dar cuenta fácilmente de quienes y el ritmo con que están trabajando los estudiantes. La aplicación de exámenes se complica un poco, pero se pueden encontrar maneras de hacerlo. Podría decirse que la mayor ventaja de este nodo, es el que los docentes puedan evaluar el tiempo que el estudiante le dedica al curso, en base al trabajo hecho en la plataforma, además del tiempo que el docente se ahorra en revisarlo.

Sobre el nodo de Tareas con Software Digital, sabemos que algunos de los software digitales especializados no son gratuitos, ni están disponibles para su uso en el internet, pero los resultados o al menos sus capturas de pantalla pueden ser compartidas en el internet. Cuando el docente recibe las capturas de pantalla del trabajo que el estudiante hizo, tiene bases para poder evaluar lo mostrado con esa imagen. Los software listados en el nodo son ejemplos que hemos usado, pero cualquier software, preferentemente gratuito y en el internet, que sirva a los propósitos del curso es apropiado.

El nodo de Blogs y Wikis puede servir a dos propósitos. Creemos que es buena idea que el docente cuente con fuentes propias de publicación, donde pueda dirigir a sus estudiantes, con el propósito de orientarlos a su enfoque del curso. En el caso de los estudiantes, es nuestra experiencia que los estudiantes pueden diseñar problemas, applets o simulaciones que pueden aportar a un Blog o Wiki grupal, donde todos ellos aporten para el beneficio colectivo del grupo y a la misma vez sean evaluados en base a sus aportaciones. Entre las aportaciones de los estudiantes, pueden estar sus presentaciones, mapas mentales o infografías que puedan servir de material de apoyo o estudio para el grupo y si el docente se encarga de generar, digamos el wiki, entonces este podrá ser mantenido por el mismo para cursos posteriores y así convirtiéndose este en el producto de los estudiantes.

No es necesario que se produzca sólo un Blog o sólo un Wiki, pueden ser ambos o incluso una página web, que de la misma manera que el Blog, recomendamos que tenga un administrador único que se encargue de las publicaciones.

Para finalizar, diremos que en cada uno de los nodos que incluimos, se intenta generar una relación de trabajo y comunicación entre el docente y los estudiantes. En esta relación el docente busca darse cuenta de quien, cuando y cuanto están trabajando los estudiantes y en base a este mismo trabajo, esperamos que el estudiante vea el rol que está jugando el docente, quien le debe hacer sentir al estudiante que en todo momento se está pendiente de su desempeño. Al existir, un mejor entendimiento de lo que se está haciendo por parte del docente para darle un número justo al estudiante al finalizar el curso y de lo que el estudiante está haciendo para obtener esa calificación, entonces, quizás hasta los que reprueben estarán conformes.

El objetivo de la propuesta que acabamos de explicar, en base al diagrama de la Figura 1, no es convencer o cambiar las ideas y formas de trabajo de individuos o instituciones, pero si el de presentar nuestra propuesta para ponerla a la disposición y consideración de la comunidad de Matemática Educativa y así promover la generación de un proceso de discusión y comunicación que nos permita una retroalimentación de otras experiencias e ideas, de investigaciones relevantes al tema de la evaluación en Matemáticas y al proceso de enseñanza-aprendiza usando NTIC.

También hemos observado, lo que consideramos o vemos como posibles inconvenientes que surgen de dicho uso, cuando no existen medidas para regular y controlar debidamente éste. Un claro ejemplo es el distractor que pueden representar las redes sociales, si no se tiene el debido cuidado. Es nuestra experiencia que algunos alumnos suelen creer que pueden atender a lo que se está pidiendo trabajar en clase, o a las indicaciones, cuestionamientos o respuestas surgidas también en clase, mientras observan las nuevas publicaciones, efectúan las propias o llevan a cabo una o varias conversaciones con sus contactos. A este respecto, nuestra experiencia nos dice que los estudiantes que buscan hacer varias cosas a la vez, no tienen un desempeño satisfactorio en la materia.

En nuestra propuesta se refleja la realidad de nuestra universidad y nos atrevemos a decir que, habiendo visitado algunos campus en nuestro país, así como otras instituciones de nivel superior en países América Latina, donde las idiosincrasias de nuestras sociedades guardan similitudes en múltiples aspectos sociales, culturales y económicos, y su realidad debe de ser bastante similar a nuestra. Es esta característica la que creemos que sirve para apuntalar nuestra versión sobre cuál sería un uso apropiado de las NTIC en los cursos de nivel superior en general y en los cursos de Matemáticas en particular, esto a pesar de tratarse de nuestras experiencias particulares con el uso de las mismas y de que nuestro análisis de la situación actual con respecto al uso de las NTIC en los cursos de ingeniería, no uso un formato rígido de encuestado.

CONCLUSIONES

Para finalizar, diremos que lograr la implementación del uso correcto de las NTIC en la evaluación de las materias de Matemáticas, permitirá ampliar el espectro de las variables que entran en juego y su relevancia a la hora de evaluar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes que toman un curso. Estos estudiantes podrán ser evaluados en su desempeño como colectividad o en forma individual, de manera que pensamos que no sólo al docente; pero también a los estudiantes le parecerá que el proceso de evaluación fue llevado de forma justa y que la calificación obtenida por cada estudiante fue otorgada en base al esfuerzo, los conocimientos adquiridos y el trabajo hecho en forma colaborativa o individual, pues de alguna manera el proceso de evaluación será

observado por el docente y en cada caso particular, el estudiante. También creemos que el uso de las NTIC ayudará a incrementar la participación de los estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje por medio del trabajo colaborativo, la auto-reflexión y el autodidactismo que se pueden promover con la aplicación adecuada de las NTIC.

Como consideración final, diremos que quizás lo planteando aquí, podría parecerles a muchos un cúmulo de buenas ideas en lo general, pero considerarlas un cambio paradigmático muy fuerte. A este respecto sólo diremos que las NTIC llegaron para quedarse y como tal debemos buscar la manera de incluirlas en forma inteligente, primero conocerlas y luego buscar maneras de aprovecharlas para el beneficio común.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arreaga, G. G., y Oreste, T. S. (2011). Nuevas tecnologías de la información y la comunicación (NTIC) y la auto-formación educativa, Epistemus: Ciencia, Tecnología y Salud, 11(2), 67-72. Recuperado de www.epistemus.uson.mx/revistas/pdf/numero11.pdf

Macías, T, C. E. (2006). Internet como recurso didáctico: renovarse o morir, Revista Universitaria de la UABC, 56(4), 2-5.

Padrón, A. L. J. (2008). Nuevas Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (NTIC) su repercusión en los diferentes niveles de la educación, Revista Digital Universitaria, 9(2), 1-9. Recuperado de www.revista.unam.mx/vol.9/num2/art12/feb_art12.pdf

Parra, B. F. J. (2008). Sugerencias para el uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (NTIC) en la enseñanza de las ciencias, Epistemus: Ciencia, Tecnología y Salud, 5(2), 41-44. Recuperado de www.epistemus.uson.mx/revistas/pdf/numero5.pdf

Romero, T. R. (2006). Profesores creadores de medios (NTICs), Pixel-Bit: Revista de Medios y Educación, 27, 89-97. Recuperado de www.sav.us.es/pixelbit/pixelbit/marcoabj27.htm

San Juan, I. J. (2010). El reto de entender la importancia de las NTIC en la educación: re-pensar y re-educar, Memorias Virtual Educa 2009, Buenos Aires, Argentina. Recuperado de reposital.cuaed.unam.mx:8080/jspui/handle/123456789/1777

Velleggia, S. (1999). NTIC y educación: el conflicto entre novedad e innovación, Chasqui: Revista Latinoamericana de Comunicación, 66(06), 41-45, Recuperado de chasqui.ciespal.org/index.php/chasqui/article/view/517/517

EXPERIENCIAS PEDAGÓGICAS SIGNIFICATIVAS EN MATEMÁTICA MEDIADAS POR RECURSOS TECNOLÓGICOS

Malva Alberto, Adriana Frausin
Universidad Tecnológica Nacional. (Argentina)
mtoso@frsf.utn.edu.ar, afrausin@frsf.utn.edu.ar

Palabras clave: aprendizaje con tecnologías, estrategias de enseñanza colaborativas.

Key words: learning with technology, collaborative teaching strategies.

RESUMEN: Este trabajo describe experiencias pedagógicas innovadoras implementadas en matemática, en cursos de ingeniería. Dos experiencias fueron seleccionadas, una en el ámbito del álgebra y otra en matemática discreta. Cada una tiene características propias y actividades diferenciadas en cuanto al tipo de recursos tecnológicos utilizados y a la metodología de trabajo definida, pero ambas comparten aportes realizados a la formación experimental y a la resolución de problemas en ingeniería. Por un lado, se describen intervenciones educativas que usan aplicaciones tecnológicas disponibles para explorar conceptos de modelado y simulación numérica; por otro lado se pone énfasis en el desarrollo de aplicaciones tecnológicas requeridas a medida para validar, verificar propiedades, clasificar o realizar cálculos tediosos. Finalmente las actitudes colaborativas entre pares, brindaron a los estudiantes mejores oportunidades de aprender matemática.

ABSTRACT: This paper describes innovative educational experiences implemented in mathematics, on engineering courses. Two experiences were selected, one in the field of algebra and the other in discrete mathematics. Each has its own characteristics and different activities regarding the types of technological resources used as well as in the methodology of work defined, but both share the contributions they give to experimental training and to engineering problem-solving. On one hand, educational interventions that make use of available technological applications to explore modeling concepts and numerical simulation are described. On the other, emphasis is placed on the development of technological applications required to validate, verify properties, sort or perform tedious calculations. Finally, collaborative attitudes among peers gave students better opportunities to learn mathematics.

LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS EN LA EDUCACIÓN

En la última década, los recursos tecnológicos pasaron a constituir un medio de reconocida incidencia en las clases de matemática, en las relaciones de gestión, en las formas en que se transmiten y apropian los conceptos, en las formas en que interaccionan los procesos de enseñanza y aprendizaje y sus actores, en el desarrollo de cursos curriculares o extracurriculares (presenciales y a distancia), en la formación y perfeccionamiento docente, en la integración y trabajo en equipos, en las capacitaciones, difusiones y transferencias, en la gestión de proyectos y en los repositorios de información y acceso al conocimiento. Actualmente, el acceso a distintas aplicaciones tecnológicas (básicas o de uso corriente y específicas o de diseño a demanda) presenta escasas o prácticamente nulas barreras y tanto alumnos como docentes pueden disponerlas en su cotidianidad. El desafío ya no es cómo acceder a las nuevas tecnologías y mantener disponible el acceso, sino que es, cómo emplearlas para poder transitar por experiencias educativas significativas (Badia, 2006a; 2006b).

El equipo docente cuenta con experiencias de cátedra debidamente documentadas que dan cuenta de los avances realizados en cuanto al diseño de secuencias didácticas que implican un uso intensivo de nuevas tecnologías en educación tales como aulas virtuales, objetos de aprendizaje, herramientas web 2.0, repositorios, evaluaciones en línea, sitios juez, producción de aplicaciones tecnológicas para la enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos, entre otros.

Las tecnologías disponibles y utilizadas siguen en la escena pero han ido migrando desde las meramente transmisoras (uso del pizarrón, presentaciones multimedia, diseño de hipertextos) a las interactivas (navegación propia sobre los contenidos durante la clase, por ejemplo) y más recientemente a las de tendencias colaborativas (intercambios de recursos, ideas y materiales, trabajos en equipo en grupos que están en línea, actualización de contenidos en línea, entre otros).

Esta integración tecnológico - pedagógica implica la utilización de metodologías, herramientas y softwares educativos que deben ser cuidadosamente acordados y plasmados en el modelo curricular de clase, curso o área de conocimientos involucrada. El diseño de las planificaciones de clase y en general, de los nuevos currículos y la práctica de la enseñanza deben tener en cuenta, no sólo la disponibilidad individual e institucional de los recursos tecnológicos, sino también las características de los nuevos destinatarios. Estos nuevos adolescentes son nativos digitales, y las actuales culturas juveniles difieren sustancialmente de las prácticas educativas que apoyaron la formación de sus docentes, caracterizados como inmigrantes digitales (Marchesi, 2008). Ello no quiere decir que los objetivos y los contenidos de aprendizaje deban amoldarse a los intereses de los jóvenes, sino que en su concreción es preciso tenerlos en cuenta para incrementar la motivación de los alumnos por los estudios de ingeniería.

Para favorecer el logro de objetivos que van desde la permanencia y la inclusión, hasta la integración de contenidos y prácticas colaborativas, hemos reforzado el diseño e implementación de secuencias de actividades para el aprendizaje de matemática durante el tránsito por los primeros cursos de las carreras de ingeniería. Estas intervenciones implican, la incorporación innovadora de aplicaciones tecnológicas y la configuración de un nuevo escenario en las relaciones entre los profesores, los alumnos, los contenidos de la enseñanza y los recursos disponibles para el ejercicio de prácticas educativas que dejen huellas significativas.

Las tecnologías para la información y comunicación (TIC) proporcionan nuevos tipos de ayudas educativas basados en la búsqueda, obtención, selección, organización, acceso, tratamiento, transmisión y uso en general de la información y que además, deben integrarse a los que ya se poseen en cuanto a los recursos clásicos que dan la escritura, el cálculo, la notación matemática, los diagramas, los recursos gráficos, los visuales o la palabra.

Desde la última década ha quedado probado que las TIC impactan en la mejora de la comprensión de un contenido y en los desempeños personales o sociales frente a la resolución de una tarea o actividad. El uso de las TIC imprime a los procesos de enseñanza y aprendizaje, un carácter menos rígido y más probabilístico y exploratorio, convirtiéndolas en una valiosa alternativa para producir e innovar, para hacer y validar, para averiguar y tomar o desechar resultados. El uso adecuado de TIC promueve el desarrollo de diversas competencias en los alumnos a partir de una invitación permanente a la colaboración con otros. Los métodos y técnicas del aprendizaje colaborativo generan una interdependencia positiva, una interacción cara a cara, un ejercicio continuo de responsabilidad individual y colectiva; desarrollan algunas habilidades sociales y un procesamiento de la información y del contenido en forma grupal bastante autónomo (González y García, 2007).

Atendiendo a estas consideraciones previas, el modelo curricular compartido por el equipo docente incluye como mínimo estos factores: el conocimiento de conceptos y procedimientos y la transferencia a nuevas situaciones de aprendizaje como punto de partida y llegada para anclar el aprendizaje; la información y manejo de motores de búsqueda como fuentes de aprendizaje; las nuevas tecnologías como instrumento motivador y articulador; el aprendizaje centrado en conjunto o redes de estudiantes; la instrucción, actualización y refuerzo continuo de habilidades matemáticas y el ejercicio continuo de habilidades y destrezas que fomenten el aprendizaje colaborativo para que nuevos y más sectores educativos puedan formar parte del consorcio universitario (García, 2012).

METODOLOGÍAS IMPLEMENTADAS EN LAS PRÁCTICAS PEDAGÓGICAS

El modo en que las prácticas de enseñanza se implementan en este modelo curricular es cuidadosamente analizado y valorado.

En este sentido, docentes-investigadores de Álgebra y Geometría Analítica (AGA) y Matemática Discreta (MAD) de la Facultad Regional Santa Fe de la Universidad Tecnológica Nacional encararon el desafío de incluir y articular metodologías no tradicionales dentro del aula de primer año, basadas en el uso de TIC, tendientes a mejorar los resultados académicos y sociales que los estudiantes pueden adquirir durante su tránsito por la cátedra universitaria.

Desde el punto de vista metodológico, el camino iniciado hacia la comprensión de un nuevo concepto incorpora el uso de TIC esperando resultados que a priori mejoren las situaciones de aprendizaje, pero que se muestran como resultados inciertos, dado que los períodos de contacto con los estudiantes son relativamente breves.

La metodología compartida fue la de experimentar, comunicar, deducir, poner en juego la creatividad y el empleo de diversos instrumentos para ayudar a los alumnos a alcanzar

desempeños flexibles, con capacidad de trabajo para enfrentar nuevos problemas que les permitan construir saberes útiles y perdurables.

Se adhiere a que, una metodología para la comprensión matemática implica desempeñarse de un modo flexible en esta área de conocimiento, es poder realizar una variada gama de actividades que requieren pensamiento en cuanto a un tema, por ejemplo explicarlo, encontrar evidencia y ejemplos, generalizarlo, aplicarlo, presentar analogías y comunicarlo de una manera colaborativa. Se enfatiza que el conocimiento matemático se lleva a la práctica en multitud de contextos y maneras que invitan a la reflexión y el razonamiento. Una capacidad fundamental que implica esta noción de comprensión es la de plantear, formular y resolver problemas dentro de una variedad de áreas y situaciones. Dicha variedad de situaciones abarca desde la resolución de problemas puramente clásicos y desarrollados en una clase tradicional que incluyen la reproducción, las definiciones, algunas relaciones entre variables, la comprobación de regularidades o los cálculos, como aquellos cuya estructura matemática no es tan obvia en principio, es decir, donde el que resuelve el problema tiene que identificar primero los conceptos matemáticos que requiere para su solución, o poner en juego distintas destrezas matemáticas, tales como aquellas referidas a la argumentación, al uso de distintas representaciones, o a la interpretación de los distintos lenguajes lógico, gráfico, visual, simbólico y formal, natural, es decir, usar competencias que implican conexiones e integración, desarrollo de sus propios modelos y estrategias, incluyendo demostraciones, generalización y comprensión (OCDE/PISA, 2000).

En un momento en que los ciclos de innovación son cada vez más breves, esta comunidad se ve obligada pero a la vez dispuesta, a una mayor versatilidad y flexibilidad en cuanto a la selección de contenidos, actividades y recursos necesarios, que les permitan anticipar, prever tendencias y cambios, adaptar, incluir la incertidumbre, gestionar, hacer, aprender y dar solución a nuevos desafíos y tareas. Para alcanzar éstos y otros nuevos modelos pedagógicos surgentes, se requiere articular tempranamente, desarrollar y participar en estrategias conjuntas entre todos los actores universitarios y asegurar que el acceso al conocimiento sea genuino y significativo.

Como metodología compartida señalamos además que los docentes asistieron cuidadosamente a la secuencia didáctica mediante distintos tipos de ayudas educativas; el equipo adopta el concepto de andamiaje educativo como la forma de asistencia educativa ajustada y contingente, adaptada a las demandas y necesidades del aprendizaje y en general proporcionada por el profesor (u otros estudiantes más expertos) y que posibilita a los estudiantes ingresantes y más inexpertos progresar en sus habilidades. El equipo identifica el andamiaje educativo en su sentido más general, como la ayuda educativa proporcionada por diversos agentes o recursos, desde la selección del contenido, la organización institucional del espacio, los tiempos educativos, los materiales y recursos, el currículum integrado, el apoyo a la comprensión de la actividad de aprendizaje, la comunicación y colaboración, que tienen lugar en el marco temporal de la secuencia didáctica (Badia, 2006a, 2006b).

Se relatan dos experiencias, una en el ámbito de AGA y otra en MAD. Las experiencias comparten la metodología para la comprensión orientada a la formación matemática experimental y de resolución de problemas, en el contexto de carreras de ingeniería; cada una tiene características propias y actividades diferenciadas en cuanto al diseño y uso de recursos tecnológicos utilizados. Por un lado, se describen intervenciones educativas que usan aplicaciones tecnológicas que están disponibles y son de acceso inmediato, para explorar conceptos de modelado y simulación

numérica; por otro lado se pone énfasis en el desarrollo de aplicaciones tecnológicas requeridas a medida para validar, verificar propiedades, clasificar, generalizar o simplemente, realizar cálculos tediosos. Las experiencias comparten el grupo de alumnos destinatarios y esto facilita el anclaje de las competencias esperadas.

LAS PRÁCTICAS PEDAGÓGICAS: CONTEXTUALIZACIÓN Y RELATO

1. Experiencia en AGA

La cátedra de AGA implementa actividades de laboratorio grupales con el objetivo de introducir tempranamente al alumno ingresante tanto en el modelado matemático de problemas que aparecen en diversas áreas de las ciencias como en el uso de una aplicación o recurso tecnológico visto como ayuda educativa que complementa la acción del profesor. Se persigue incentivar el auto aprendizaje y la cooperación a través de la búsqueda, el desarrollo y la transferencia a problemas que constituyen verdaderas aplicaciones concretas de temas de álgebra lineal incluidos dentro de sus contenidos mínimos de aprendizaje.

La mediación entre el contenido y las respuestas esperadas del grupo de estudiantes es dada por el uso de recursos (campus virtual) y el software seleccionado y no se observaron brechas (por ausencia, desconocimiento, mal funcionamiento o imposibilidad de acceso) durante el desarrollo de la actividad.

Las actividades que se despliegan en el aula, comienzan con sistemas de ecuaciones lineales y matrices, donde se presentan los conceptos, operaciones, propiedades y métodos de resolución (Grossman y Flores, 2012). El desarrollo y avance del álgebra lineal crece en complejidad. La planificación de la cátedra incluye, entre otras actividades, los desempeños de los alumnos en la realización de tareas grupales bajo la denominación de trabajo de laboratorio (TL). El TL es obligatorio para todos los alumnos para regularizar la asignatura y el responsable de guiar la tarea en el aula es el jefe de trabajos prácticos. En cada período lectivo se presenta a los alumnos un nuevo desafío para resolver. Cada grupo no supera los tres integrantes. Si bien los TL implementados en los últimos cuatro años tienen consignas cerradas e idénticas para todos los estudiantes, con el fin de minimizar la duplicación de las resoluciones, en los enunciados de los problemas se incluyen datos aleatorios, que genera cada grupo a partir de las consignas dadas o por referencias a datos personales, como nombre, número de libreta universitaria o documento nacional de identidad. Por ejemplo, un primer TL incluyó la resolución de un problema basado en el Modelo Económico de Leontief, y tanto la matriz de las demandas internas como el vector de las demandas externas, debían ser generados por cada grupo de forma aleatoria, reproduciendo la sintaxis del comando correspondiente especificado en la consigna. Similarmente, en una segunda experiencia basada en el encriptado de mensajes, si bien se pidió desencriptar un mensaje utilizando la misma matriz de código, el mensaje solicitaba al grupo que encriptara en forma concatenada los nombres y apellidos de sus integrantes.

Durante el transcurso de las clases prácticas, y contando con las computadoras que los alumnos disponen, se presentan además, las funcionalidades del software. El equipo ha seleccionado como ayuda educativa en el área de las tecnologías el software Maxima. Si bien la versión instalada a los fines de la experiencia es 5.28.0-2 con la interfaz wxMaxima en versión 12.04.0, no hay restricciones de versión, dado su acceso libre. En formato digital, se dan instrucciones precisas de

la forma en que el usuario se puede comunicar para obtener una respuesta a la operación ingresada a partir de los comandos correspondientes. Estas clases son verdaderos talleres y se desarrollan alternativamente en el laboratorio o en el aula de clases. La actividad se complementa con acciones previas realizadas a través del campus virtual, sobre plataforma Moodle (Elmadani, Mathews y Mitrovic, 2012), donde los alumnos reciben las indicaciones para la instalación del software, un material escrito con ejemplos y funcionalidades disponibles y la descripción de las consignas del trabajo grupal. La interacción se completa con material didáctico, respuestas a preguntas frecuentes, tablones de novedades, foros y atención a consultas. Como apoyo a la construcción del conocimiento y comprensión del tema “La geometría de las transformaciones lineales" (Grossman y Flores, 2012) el equipo diseñó e implementó un TL grupal denominado "Las matrices actuando sobre vectores" para que los alumnos puedan traducir un problema desde la realidad planteada a la estructura matemática, trabajar el modelo matemático, dar validez, reflexionar, analizar, aportar críticas, intercambiar opiniones e información sobre los resultados. Es importante señalar que los conceptos involucrados no fueron abordados en el aula de clases al momento de la realización de la tarea.

Las matrices lejos de ser objetos estáticos, cuando pre multiplican a vectores los transforman en otros. El objetivo del TL fue descubrir el efecto que ciertas matrices producen cuando actúan sobre un conjunto de puntos (presentados matricialmente) cuya gráfica representa una figura geométrica concreta. Para ello, se solicita que se proponga una matriz P de tamaño 2xn, con $n \geq 4$ donde n representa el número de puntos; el primer renglón contiene información sobre las abscisas y el segundo renglón la información sobre las ordenadas da cada punto. Cada columna representa puntos del plano de tal manera que dichos puntos forman parte de una figura, que sugerimos sean polígonos convexos o una figura constituida por polígonos convexos. Adicionalmente se recomienda la construcción de una matriz L de líneas de tamaño 2xm donde m es el número de aristas de la figura. La información por columna indica que los dos puntos a los que hace referencia la columna de L deben conectarse por un segmento. Una vez ingresadas las matrices P y la matriz L, se dan claras indicaciones para la realización de los gráficos y se solicita aguzar las observaciones y registrar los resultados observados cuando se aplica la pre multiplicación por una matriz A, 2x2, pudiendo ser A una matriz diagonal, una matriz escalar o una matriz ortogonal, es decir una matriz con significante geométrico. Por ejemplo, se solicita que se hagan productos matriciales cuando la matriz diagonal tiene en la diagonal el primer y el último dígito del documento de identidad de cada integrante o del número de libreta universitaria. Cada grupo debe comentar los resultados obtenidos en cada caso teniendo en cuenta los efectos geométricos que se observan individualmente y responder preguntas del tipo:

¿Qué matriz efectuaría una expansión de la figura al doble de su tamaño? o bien ¿Qué matriz efectuaría una reflexión respecto del eje de ordenadas de la figura dada por los puntos de P y las líneas de L?, ¿Qué matriz efectuaría ambas operaciones simultáneamente?. El informe es único y grupal y debe contener los distintos ejemplos individuales realizados y las conclusiones grupales. Por otro lado, se valorará positivamente el registro de las dificultades o trabas encontradas en la realización del TL que ayuden a mejorar su implementación futura, así como posibles discusiones planteadas, la justificación de las afirmaciones realizadas, los comentarios y la claridad de la comunicación escrita.

2. Experiencia en MAD

En forma paralela el equipo docente propone y realiza intervenciones educativas en MAD, que conllevan los mismos objetivos de motivación, integración y permanencia en el inicio de la vida universitaria. Para el caso de los alumnos de Ingeniería en Sistemas de la Información (ISI), la articulación entre las herramientas conceptuales dadas en MAD, y en AGA cuentan además con las aportadas por Algoritmos y Estructuras de Datos (AED). En el primer nivel de la carrera permiten poner en escena secuencias didácticas centradas en el diseño y uso de aplicaciones tecnológicas construidas a la medida de los contenidos de MAD y en algunos casos, con aplicaciones en AGA. Un nuevo objetivo es trazado. Se trata del desarrollo de un recurso tecnológico propio y a medida, que permite resolver tareas específicas en temas de MAD. En esta tarea, se involucró además, la ayuda educativa dada por alumnos avanzados, que se desempeñaron como becarios de investigación y que con apoyo, diseño, desarrollo o experiencia ya adquirida, guían a los alumnos ingresantes en el hacer de una herramienta de apoyo, de cálculo y validación, registrada como MATDIS 2.0. Este software, de diseño a medida da apoyo educativo a la resolución de problemas planteados en MAD y en los casos posibles, integrados con AGA. Análogamente, en talleres extracurriculares se muestran las funcionalidades disponibles de MATDIS 2.0. Las funcionalidades permiten resolver problemas de MAD referidos a lógica proposicional clásica, teoría de números, ecuaciones diofánticas, estructuras algebraicas finitas (caso grupos, anillos y cuerpos) álgebras de Boole y grafos, dígrafos y árboles. El acceso a sitios en la web (Proyect Euler, por ejemplo) permite tener disponibles una buena cantidad de problemas de variables discretas que requieren cómputos algorítmicos y que MATDIS 2.0 permite resolver. Hay temas de AGA que facilitan la integración con MAD y el uso de la herramienta MATDIS 2.0. Por ejemplo para el caso de requerir un conjunto de soluciones enteras en un problema de programación lineal con una función objetivo a coeficientes enteros, ya que la aplicación encuentra las soluciones enteras para ecuaciones diofánticas.

CONCLUSIONES

Sintetizamos los resultados observados en los siguientes párrafos:

Los estudiantes de AGA y MAD tienen posibilidades de revisar y fortalecer lo aprendido o proponer nuevas situaciones prácticas para consolidar lo desarrollado en clases.

El carácter experimental, racional y razonado de las clases con apoyo de software matemático de libre acceso o de diseño a demanda, para resolver problemas, discutir y validar resultados, impactan en una mejor compresión de los contenidos.

La difusión de estos ejemplos de buenas prácticas que suponen las experiencias descritas pretende ilusionar a los diferentes actores educativos en la búsqueda de caminos alternativos para mejorar la enseñanza de matemática en escenarios ingenieriles.

Las intervenciones pedagógicas mostraron oportunidades ciertas, generadas desde las cátedras universitarias, para que los alumnos ingresantes puedan mejorar sus competencias académicas (de comprensión, resolución, validación) , de investigación (en el sentido de indagación, de búsqueda y averiguación) y sociales (comunicación, respeto por las opiniones diversas, responsabilidad), durante su tránsito por el primer año universitario.

Alumnos con mayor experticia brindaron el andamiaje educativo necesario para promover y estimular competencias pre profesionalizantes de los estudiantes ingresantes.

Las experiencias tienen una réplica probabilística, en el sentido que la descripción presentada puede ser útil como referencia, especialmente para profesores que quieran innovar en su docencia en alguna de las líneas de intervención educativa planteadas en matemática en situaciones ingenieriles. Lo que sucede es que la capacidad de transformación y mejora de la educación con las TIC debe entenderse más bien como un potencial que puede o no hacerse realidad, y hacerse en mayor o menor medida, en función del contexto en el que estas tecnologías son efectivamente utilizadas. Son, pues, los contextos de uso, y en el marco de estos contextos la finalidad que se persigue con la incorporación de las TIC, los que determinan su capacidad para transformar la enseñanza y mejorar el aprendizaje (Coll, 2011).

Finalmente las actitudes colaborativas entre pares, brindaron a los estudiantes mejores oportunidades para aprender matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Badia, A. (2006.a). Enseñanza y aprendizaje con TIC en la educación superior. En A. Badia (Coord). Enseñanza y aprendizaje con TIC en la educación superior. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento (RUSC).* Vol.3, Nº2. UOC. Recuperado el 01 de abril de 2015 de http://www.uoc.edu/rusc/3/2/dt/esp/monografico.pdf

Badia, A. (2006.b). Ayuda al aprendizaje con tecnología en la educación superior. En A. Badia (Coord). Enseñanza y aprendizaje con TIC en la educación superior. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento (RUSC).* Vol.3, N° 2. UOC. Recuperado el 10 de febrero de 2015 de http://www.uoc.edu/rusc/3/2/dt/esp/monografico.pdf

Coll, C. (2011). Aprender y enseñar con las TIC: expectativas, realidad y potencialidades. En R. Carneiro, J.C. Toscano, T. Díaz. (Coord). *Los desafíos de las TIC para el cambio educativo*. Colección METAS EDUCATIVAS 2021. OEI y Fundación Santillana. Recuperado el 10 de setiembre de 2015 de http://www.oei.es/metas2021/LASTIC2.pdf

Elmadani, M.; Mathews, M. ; Mitrovic, A. (2012). Concept Tagging in Moodle. En *Proceedings of the 1st Moodle Research Conference (MRC2012)*, Retalis, S. & Dougiamas, M. (Eds), 53-60. Recuperado el 10 de marzo de 2014 de http://research.moodle.net/mod/data/view.php?id=27

García, J. L. (2012). Tratamiento de la información y competencia digital. En M. Díaz Gómez, M. (Coord). *Aulas del siglo XXI: retos educativos* Recuperado el 12 de julio de 2015 de http://www.mecd.gob.es/dctm/?documentId=0901e72b8164d2c9

González, N.; García, M. (2007). El Aprendizaje Cooperativo como estrategia de Enseñanza-Aprendizaje en Psicopedagogía. *Revista Iberoamericana de Educación*, N° 42/6. Edita: OEI. Recuperado el 12 de junio de 2015 de http://www.rieoei.org/expe/1723Fernandez.pdf

Grossman, S. ; Flores, J. (2012) *Álgebra Lineal*. Séptima Edición. México: Mc Graw Hill Educación.

Marchesi, A (2008). *Metas Educativas 2021: la educación que queremos para la generación de los Bicentenarios*. Madrid, OEI. Recuperado el 10 de febrero de 2015 de http://www.oei.es/metas2021/LASTIC2.pdf

OCDE/PISA (2000). Proyecto PISA. *La medida de los conocimientos y destrezas de los alumnos: un nuevo marco de evaluación* / OCDE. — Madrid : Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Recuperado el 15 de agosto de 2015 de http://www.oecd.org/edu/school/programmeforinternationalstudentassessmentpisa/33694020.pdf

Proyect Euler. Recuperado el 15 de agosto de 2015 de https://projecteuler.net

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS CON EL MÉTODO DE POLYA MEDIANTE EL USO DE GEOGEBRA

Bellanith Aguilar Vásquez, Lorenza Illanes, Leopoldo Zúñiga
Tecnológico de Monterrey (México)
bequi1988@hotmail.com, lillanes@itesm.mx, lzs@itesm.mx

Palabras clave: Solución de problemas, Método de Polya, Análisis Cuantitativo, Geogebra, Desempeño Académico

Key words: problems solving, Polya method, Quantitative analysis, Geogebra, Academic performance

RESUMEN: En este estudio se investigó si la solución de problemas matemáticos, en la cual se utilizó el método de Polya y el software Geogebra, incrementa el rendimiento académico. Los problemas abordados implicaron las operaciones de suma y multiplicación. El estudio fue de corte cuantitativo. La muestra estuvo compuesta de 114 estudiantes distribuidos en 3 grupos. En cada uno de los grupos, para el aprendizaje en la resolución de problemas aditivos y multiplicativos, se experimentó con diferentes metodologías, un grupo con enseñanza habitual, otro con uso del método de Polya, y un tercero con uso tanto del método de Polya, como del software Geogebra. Se aplicaron pruebas pre-test y pos-test. Los resultados favorecen la hipótesis planteada.

ABSTRACT: In this study we investigated whether the solution of mathematical problems, which used the method of Pólya and software Geogebra increases the academic performance. The addressed problems involve the operations of addition and multiplication. The study is quantitative research. The sample is composed of 114 students distributed into 3 groups. In each of the groups the learning of the solution of mathematical problems was experimented with a different methodology. A pretest and posttest was applied and analyzed with analysis statistic and the hypothesis was proved.

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas matemáticos data desde la antigüedad; en algunos casos, se utilizaban símbolos matemáticos de manera empírica para representar cantidades materiales o cálculos de tiempo. Posteriormente, en la Edad Media, se habla de una matemática comercial para la labor de los mercaderes (Cruz, 2006). En la época moderna, la educación matemática, tanto en lo teórico como en lo práctico, da aportaciones a la cultura y la sociedad. Actualmente, en los planes de educación (Torres, Martínez y Aguilar, 2014) dentro del área de matemáticas, se adoptan modelos y estrategias para la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas, las cuales tienen como fin adquirir habilidades lógico-matemáticas. En los últimos años se han desarrollado Ambientes Virtuales de Aprendizaje (AVA) (Romero, 2011) como una estrategia para mejorar el proceso de resolución de problemas, los cuales están articulados a la educación y a otras instituciones de prestación de servicios para el bienestar social.

La institución educativa a la cual pertenece este estudio, es un colegio conformado por aproximadamente 1200 estudiantes de estrato socioeconómico de nivel 1 y 2, en Ibagué, Colombia. En dicha institución se tiene un modelo pedagógico que contiene una concepción humanista-critico-social (Botero, 2014). Dicha institución cuenta con equipos tecnológicos que permiten el estudio de las matemáticas a través del uso de diversas tecnologías. En este estudio se pretende dar solución a la siguiente pregunta de investigación: ¿mejora el aprovechamiento de los estudiantes al utilizar el método de Polya para la resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas de números naturales, a través de Recursos Educativos Abiertos (REA)?

Después de investigar sobre las diferentes metodologías utilizadas en la solución de problemas se optó por la siguiente hipótesis nula de investigación: el rendimiento académico mejora sí se obtiene la solución de problemas aditivos y multiplicativos con números naturales mediante la metodología de Polya y usando el software Geogebra (Hohenwarter, 2008),

Para reportar los hallazgos de esta investigación, de manera coherente y ordenada, en una primera instancia se hace referencia al marco teórico de la investigación; luego a la metodología adoptada para este estudio; se continúa con la exposición de los resultados obtenidos después de haber aplicado los instrumentos construidos para la recolección de datos. Por último, se presenta una discusión, se plantean conclusiones y una propuesta de investigación para la educación, con base en la experiencia y los resultados obtenidos.

MARCO TEÓRICO

Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas tienen diferentes causas, entre ellas: la motivación (Blanco, 2009), el estilo de aprendizaje de cada alumno (Adán, 2004), y sus concepciones de error (Engler, 2004). Estas dificultades pueden llevar al fracaso escolar (Gómez, 2005), e incluso, a la misma deserción escolar. Cuando un estudiante se ve enfrentado a resolver un problema matemático, es común que se pregunte ¿qué operación debo hacer?, sobre todo si no tiene establecido un proceso mental para dar solución a un problema. Quizá tenga claros los algoritmos matemáticos como objetos operativos o analíticos, pero éstos pueden resultar inútiles por sí solos cuando necesite aplicarlos cotidianamente para resolver situaciones en las que deba utilizar procesos que le permitan comprender los elementos involucrados. Este proceso mental para resolver problemas matemáticos lo han abordado diversos autores como Piaget (1964),

Vygotsky (1989), y Polya (1971). Este último fue elegido para este estudio porque su teoría incluye un método particular de cuatro pasos para abordar un problema: entender el problema, elaborar un plan, ejecutar el plan, y mirar hacia atrás.

Se considera la tecnología en la educación como parte de la innovación educativa, así como de la relación entre internet y educación, y los códigos de programación necesarios para la creación de software con programas que permiten aprender y poner a prueba los conocimientos en el área. Particularmente, en este estudio se utilizó el software Geogebra (2008), ya que es de fácil acceso y presenta características adecuadas para la resolución de problemas, tales como: accesibilidad, durabilidad, adaptabilidad, portabilidad y usabilidad. Estas características brindan la oportunidad de trabajar colaborativamente ya que permite adaptar, modificar, mejorar y difundir con toda libertad (Abánades, Botana, Tabera, 2009). Este software ha ofrecido a la matemática educativa diversas herramientas para poder resolver problemas de manera dinámica, abriendo campos de comunicación y trabajo en equipo.

Entre las investigaciones relacionadas a este estudio destacan la de Calvo (2008), con la enseñanza eficaz de la resolución de problemas enfatizando la importancia de aumentar el interés de los alumnos por medio de la motivación; Trabucco, Fridson, Benhayón y Weisleder, (2006), al diseñar y desarrollar un sistema tutorial inteligente en Ambientes Multimedios unida con la técnica de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP); Rechimont, Ferreyra, Parodi, Scarímbolo, y Pedro, (2007) hacen alusión específicamente de Geogebra para la resolución de un problema; y la de Nieto, (2005), sobre relaciones matemáticas, resolución de problemas y computación, determinando la importancia de los concursos para estimular el interés y la motivación. Entre las investigaciones que hacen referencia a los Recursos Educativos Abiertos, están la de Bobadilla, Domínguez y Cuéllar (2010) que establecieron un impacto positivo de su uso en ciertas situaciones escolares; Iranzo y Fortuny, (2009) hacen una comparación entre el uso de Geogebra, y el lápiz y papel; Álvarez, Brunel, Díaz y Hernández (2012) estudian la utilidad de los recursos educativos abiertos para el fomento de las competencias. En los estudios referentes a la resolución de problemas, tenemos investigaciones de Sánchez, (2001); Rodriguez, (2005); Masachs, Camprubí y Naudi (2007); y Hernández, (1997); en las cuales se promueve la reflexión del cómo resolver problemas e ir más allá de los algoritmos matemáticos.

Después de la descripción del marco teórico, en el cual se trató dar cabida a los autores más representativos del tema, procedemos a explicar la metodología que se siguió en el estudio.

METODOLOGÍA

En la presente investigación se utilizó un enfoque cuantitativo mediante un modelo de diseño experimental y de control (Valenzuela y Flores, 2012), por lo cual se aplicaron instrumentos que arrojaron resultados numéricos. En este caso se evaluó el desempeño académico con base 1 a 5 porque se utilizó la escala Likert Briones (1995). La investigación se desarrolló en cuatro fases: la primera consistió en la aplicación de una prueba diagnóstica, para analizar el estado inicial de los estudiantes frente a la interpretación de situaciones problemas (Figura1). Esta prueba fue la misma para todos los participantes del estudio; la segunda, consistió en la aplicación del siguiente tratamiento: el grupo de sexto A tuvo una metodología tradicional, el grupo de sexto B, utilizó el método de Polya, y el grupo de sexto C, además de utilizar este método, también usó Geogebra,

para resolver problemas contextuales (Figura1); la tercera fase es la correspondiente a la evaluación, en la cual se resolvieron los mismos cinco problemas (Figura1) para todos los participantes, pero en la solución se utilizó el tratamiento aplicado en cada grupo; y finalmente, la cuarta fase fue la de análisis, donde se utilizaron los métodos estadísticos para la comprobación de hipótesis.

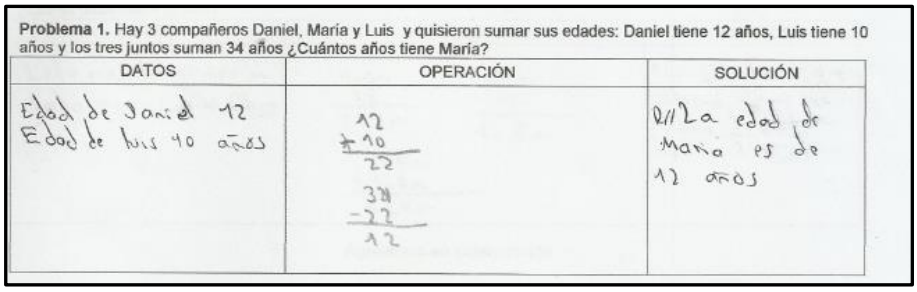
La muestra consta de 114 estudiantes que voluntariamente aceptaron participar activamente en el estudio. Los estudiantes estaban entre los 10 y 12 años de edad; cursaban el primer grado de secundaria; 40 estudiantes del curso 6º A, 38 estudiantes del curso 6º B y 36 estudiantes del curso 6º C.

Esta investigación experimental y de control, utilizó un pretest y postest. Los instrumentos se diseñaron de la siguiente manera: el pre-test consistió en una prueba de cinco problemas para identificar la habilidad de interpretación de una situación problema. Esta prueba que fue la misma para los tres grupos, y sirvió para identificar los saberes previos. El postest constó también de cinco problemas contextuales (Díaz y Poblete, 2001), los mismos para los tres grupos, pero con distinto proceso de solución, de acuerdo al tratamiento aplicado en cada grupo. Para el grupo A se aplicó la prueba solo pidiendo como mínimo datos, operación y resultado, que es como se trabajó de manera tradicional. Al grupo B se le pidió que utilizara los cuatro pasos del método de Polya: comprensión del problema, elaboración de un plan, ejecución del plan, y mirar hacia atrás. Y finalmente, al grupo C se le pidió que mostrara la respuesta utilizando el software Geogebra, y empleando el método de Polya, donde plasmaron cada uno de los cuatro pasos. Los resultados de estas pruebas fueron revisados de manera digital.

El pretest fue aplicado para indagar los saberes previos y se estableció un tiempo de respuesta de una hora. En éste se evaluaron las competencias siguientes: suma y multiplicación, y sus propiedades; reconocer la suma y la multiplicación en una situación problema; y, saber interpretar la información en una situación problema. Para el postest, se otorgó un tiempo de dos horas y se aplicó después de desarrollar los diferentes tratamientos a cada uno de los tres grupos, dentro de la fase de evaluación.

Se presenta el problema siguiente (Figura 1) para ilustrar el tipo de situaciones planteadas a los alumnos.

Figura 1. Ejemplo del tipo de problemas que se aplicó



Como estrategia de análisis de resultados se utilizaron cálculos estadísticos como la media aritmética, la varianza y la desviación estándar. Se realizaron diagramas estadísticos que

representan la información obtenida de las evaluaciones de cada pregunta, para cada uno de los tres grupos y un análisis comparativo para todos los cálculos de las medidas de tendencia central, en un mismo análisis gráfico.

ANALISIS DE RESULTADOS

Se hicieron tres evaluaciones: en el pre-test, en el pos-test y para el método de Polya, con y sin el uso del software Geogebra.

Pre-test. Se observó que para el problema 1 en el grupo A, con respecto al grupo B se tuvo una disminución de la media de un 2.24%; y el grupo B con respecto al grupo C también tuvo una disminución de la media del 0.85%; es decir, que en el grupo C se presentó menor evaluación en el problema 1 con 1.39%, con respecto al grupo A. Para el problema 2, se presentó la misma disminución de la media en el grupo B y en el grupo C con respecto al grupo A, que en el problema 1. En el problema 3, el grupo A, siguió teniendo la mayor media, pues el grupo B disminuyó su media en un 2.56% con respecto a la media del grupo A; y el grupo C disminuyo la media en un 1.89% también con respecto a la media del grupo A. En el problema 4, el grupo A tuvo una media mayor que el grupo B, el cual tuvo una media menor en un 3.33%; y el grupo C una media menor que la del grupo A en un 3.33%. Finalmente, en el Problema 5 la mayor media también se presentó en el grupo A; una media menor en un 4.91% en el grupo B; y una media menor en un 0.74% en el grupo C.

Las pruebas de hipótesis de igualdad de medias y de varianzas rechazaron la hipótesis alternativa, lo que permitió evidenciar que los grupos son comparables, es decir, que los estudiantes estuvieron en igualdad de circunstancias, lo que nos permitió seguir adelante sin un sesgo en las características de los grupos.

Pos-test. Para el problema 1, en el grupo A con respecto al grupo B, tuvo un incremento en la media de 3.45% a 3.85%, con una diferencia de 0.4%, por lo que hubo una mayor aprobación de este problema en el grupo B en un 8.05%; y con respecto al grupo C, también se incrementó la media, es decir, en el grupo C se presentó mayor asertividad en el problema 1 en un 14.11% con respecto al grupo A. Para el problema 2, también se presentó un incremento en la media porcentual del grupo B con respecto al grupo A en un 11.21%; y también hubo un incremento en la media porcentual del grupo C con respecto al grupo A de un 17.78%. En el problema 4 el grupo C, siguió teniendo una mayor media, pues el grupo B la media disminuyó en un 7.44% con respecto a la media del grupo C y en el grupo A la media disminuyó en un 8.94% igualmente con respecto al grupo C. En el problema 4 también el grupo C tuvo la mayor media, la cual disminuyó en un 10.11% en el grupo B y en un 17.28% para el grupo A. Finalmente, en el problema 5, se obtuvo una mayor media que en el grupo C; y disminuyó en un 7.2% en el grupo B; y en un 14.06% en el grupo A.

Las pruebas de hipótesis de igualdad de medias y de varianzas permitieron evidenciar que los grupos no presentaron diferencia de varianzas, pero si en las medias. Al comparar el grupo A con el grupo B, el que mejor rendimiento académico tuvo fue el B; al comparar el A con el C, el que mejor rendimiento tuvo fue el C; y al comparar el B con el C, el que tuvo mejor rendimiento académico fue el grupo C; por lo tanto, es el grupo C quien tuvo el más alto rendimiento académico de los tres grupos.

Método de Polya. En el grupo C se usó el software Geogebra, para resolver las preguntas asociadas a los pasos del método de Polya, y el grupo B sólo uso el método de Polya. La media en el problema 1 del grupo C se incrementó en un 10.91% con respecto al Grupo B; en el problema 2, el grupo C aumentó la media en un 8.78%; en el problema 3, la media se incrementó en un 9.51%; en el problema 5, el incremento de la media fue de un 13.9%; y finalmente, en el problema 5, el aumento en la media fue de 9.5%. En cuanto a las varianzas, tanto en el grupo B con el grupo C, oscilaron entre 0.05 y 0.08, es decir los grupos son estadísticamente comparables.

El grupo C obtuvo mejores resultados con el uso del software en comparación al grupo B, acentuándose más en los aspectos de la ejecución del plan, y en la revisión de la solución.

DISCUSIÓN

La implementación del método de Polya, en integración con el uso del software Geogebra, aumentó el rendimiento académico en resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas de los estudiantes de primero de secundaria.

Con esta implementación se agregó un factor innovador porque constituyó un modelo de gestión de aprendizaje (Ramírez, 2012) en el área de matemáticas, lo cual permitió el poder cambiar concepciones y rutinas en las que no solo mejoraran el ambiente de aprendizaje, si no que se consiguiera un mayor rendimiento académico. Con este modelo los estudiantes cambiaron su conducta, se observó una mayor motivación, y prestaron mucho más atención hacia las actividades de resolución de problemas. Además, el uso del software favoreció la realización de operaciones de una manera más efectiva.

CONCLUSIONES

De acuerdo al análisis de resultados se obtuvo como hallazgo que el trabajo en equipo y el aprendizaje entre pares fue favorable para la resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, especialmente con el uso del método de Polya, y el software Geogebra.

Particularmente, el uso del método de Polya les facilitó a los alumnos iniciar con éxito la resolución de los problemas, pues en el primero de los cuatro pasos debían entender el problema, y las preguntas asociadas al mismo resultaron sencillas de responder. En el paso dos tenían más alternativas que solo hacer una suma o una resta, de manera que ellos decidían hacer dibujos, tablas, rectas, entre otras estrategias de solución, mismas que se reflejarían en el paso 3. Finalmente, en el paso 4 se sentían bien al poder revisar si la respuesta que habían dado era la correcta y comparar con otras situaciones que ya habían experimentado.

Otro de los aspectos que fueron alcanzados y resultaron muy importantes, fue el uso del software Geogebra como apoyo en la realización de operaciones.

Para la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos, se propone el uso del método de Polya, el cual, como ya se ha comentado, consiste en entender el problema, configurar un plan, ejecutar el plan, y mirar hacia atrás. Este método lleva poco a poco al estudiante, en forma sistemática, a realizar una lectura adecuada de la situación problema que debe resolver, e incluso le permite traer a la memoria otras situaciones más sencillas que haya resuelto con anterioridad, o posibles situaciones que tenga que resolver a futuro. La intención es contribuir a la mejora de la

calidad del aprendizaje mediante el uso de recursos didácticos accesibles y que ofrecen los elementos necesarios para tratar con éxito situaciones de aprendizaje como la resolución de problemas en contextos de aplicación.

Para futuras investigaciones se propone partir de los resultados presentados en este estudio para realizar análisis cualitativos considerando los aspectos siguientes: presentar los resultados agrupados con base en las categorías que resulten relevantes; presentar evidencia del trabajo de campo; utilizar métodos comparativos de forma constante; y, mostrar incidencias de respuesta en cada una de las preguntas de cada paso del método de Polya.

Una pregunta general que puede formularse a partir de esta investigación es: ¿cómo implementar un modelo didáctico -como el propuesto en este trabajo- en la enseñanza de resolución de problemas matemáticos, involucrando el uso de las nuevas tecnologías de información y de comunicación de manera contextual?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abánades, M. Botana, F. Tabera, L. (2009). Software matemático libre. *La Gaceta de la RSME.* España: La Columna de Matemática Computacional, 12(2), 325-346

Adán, I. (2004). *Estilos de aprendizaje y rendimiento académico en las modalidades de bachillerat.* Tesis de Doctorado. UNED, España. Recuperado de: http://www.estilosdeaprendizaje.es/Iadan.pdf

Álvarez, A. Brunel, N. Díaz, A. Hernández, F. (2012). Uso de recursos educativos abiertos para fomentar el razonamiento matemático en alumnos del nivel medio superior. México: *Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*. 8.

Blanco, M. (2009). Dificultades específicas del aprendizaje de las matemáticas en los primeros años de escolaridad: detección precoz y características evolutivas. España*: Ministerio de Educación de España*. 188. Recuperado de: http://redined.mecd.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/66225/00820112013529.pdf?sequence=1

Bobadilla, M., Domínguez, M. y Cuéllar, M. (2010). El uso de un recurso educativo abierto como facilitador en la construcción de aprendizajes significativos. México: *Revista Digital Sociedad de la Información*, 20, 1-9.

Botero, F. (2014). Manual de procesos y procedimientos *Institución Educativa Raíces del Futuro*. Ibagué: Tolima

Briones, G. (1995). *Métodos y Técnicas de Investigación para las Ciencias Sociales*. 2ª Edición. México: Trillas.

Calvo, M. 2008. Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas. Universidad de costa Rica. San José, Costa Rica: *Revista Educación*, 32(1),123-138

Cruz, M. (2006): *La enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas*. Tomo 1. La Habana: Educación Cubana.

Diaz, M. V. y Poblete, A. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. España: *Revista de didáctica de las matemáticas*. 45, 33-41.

Engler, A., Gregorini, M. et. al. (2004). *Los errores en el aprendizaje de matemática*. Facultad de Ciencias Agrarias. Argentina: Universidad Nacional del Litoral. Recuperado de: http://soarem.org.ar/Documentos/23%20Engler.pdf

Gómez, B. (2005). Aprendizaje basado en problemas (ABP): una innovación didáctica para la enseñanza universitaria. *Educación y Educadores*. Colombia: Universidad de La Sabana. 8. 9-19

Hernández, J (1997). *Ciencias y tecnologías*. México: Universidad la laguna. Recuperado de: ftp://tesis.bbtk.ull.es/ccppytec/cp19.pdf

Hohenwarter, M. (2008). *Introduction to GeoGebra*. International GeoGebra Institute, Creative Commons Attribution-Noncommercial-Share Alike.

Iranzo, N. y Fortuny, J. (2009). *La influencia conjunta del uso de Geogebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado*. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona.

Masachs, A. Camprubí, Naudi M. (2007). Los entornos de validación en la resolución de problemas matemáticos CPU-e, *Revista de Investigación Educativa*. México : Instituto de Investigaciones en Educación. 4, 1-11.

Nieto, J. (2005). Resolución de problemas, Matemática y Computación. *Revista Venezolana de Información, tecnología y conocimiento*. Venezuela: Universidad del Zulia. 2, 37-45.

Piaget, J. (1991). *Seis estudios de psicología*. España: LABOR, S.A. Edición original: editions Gonthier. 1964.

Polya, G. (1971). *How to solve it. A New Aspect Of Mathematical Method*. México: Universidad de Stanford. Trillas.

Ramírez M. (2012) *Modelos y estrategias de enseñanza para ambientes innovadores*. México: Instituto tecnológico y de estudios superiores de monterrey. 288 páginas.

Rechimont, E. Ferreyra, N. Parodi, C. Scarímbolo, M. y Pedro, I. (2007). GEOGEBRA en la resolución de un problema. *ITCR.* Costa Rica. *V Congreso sobre Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora*. 5, 6, 7. Argentina: Universidad Nacional de La Pampa.

Romero A. (2011). *Diseño de Ambientes Virtuales de Aprendizaje (AVA), con metodología de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP): un modelo para el abordaje de contenidos y construcción de conocimiento en AVA*. Colombia: Fundación Universitaria del Área Andina.

Rodríguez, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas: Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico.* Facultad de educación. Colombia: Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación.

Sánchez, L. M. (2001). *Dificultades de los alumnos de sexto grado de educación primaria para la resolución de problemas matemáticos. Análisis retrospectivo.* Tesis de Maestría. Universidad de Colima. México. Recuperado de: http://www.digeset.ucol.mx/tesis_posgrado/indic1.php

Torres, F. Martínez, J. Aguilar, B. (2014). *Plan de área de matemáticas de la Institución Educativa Raíces del Futuro*. Ibagué, Colombia.

Trabucco, J. Fridson, D. Benhayón, M. Weisleder, J. (2006). *Entorno virtual de aprendizaje apoyado en elementos de resolución de problemas.* San José, Costa Rica: Facultad de Ciencias y Artes – Escuela de Matemáticas.

Valenzuela, J. y Flores, M. (2012). *Fundamentos de Investigación Educativa*. 1 y 2 México: Editorial Digital Tecnológico de Monterrey.

Vygotsky, L. S. (1989). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Barcelona: Crítica.

USOS DEL PROGRAMA R EN LA ENSEÑANZA DE LA ESTADISTICA

Albeiro Enrique López Cervantes
Institución Educativa Normal Superior de Sincelejo (Colombia)
albeirolopezcervantes@gmail.com

Palabras clave: Tecnología, Programa R, Estadística Descriptiva y Situación Problema

Key words: Technology, R program, Descriptive Statistics and Problem Situation

RESUMEN: Es sabido por todos la trascendencia que tiene el aprendizaje de la estadística en estudiantes de bachillerato, en especial los estudiantes del nivel medio superior, en su proceso de formación preparatorio para el ingreso a la universidad. El programa estadístico R-Project se ha constituido en una herramienta básica y fundamental que posibilita enseñar temas de la estadística descriptiva y de la teoría de probabilidades de manera coherente con la estructura conceptual..

ABSTRACT: It is known to all the importance that the learning of statistics on high school students, especially students from high school, in the process of preparatory training for college entrance. The statistical program R -Project has become a basic and fundamental tool that enables teaching subjects descriptive statistics and probability theory consistent with the conceptual framework.

INTRODUCCIÓN

Hoy por hoy la enseñanza de la estadística se ha vuelto fundamental en los procesos formativos de los jóvenes que cursan los últimos años de bachillerato o lo que se conocen como preparatoria para los estudios universitarios. La enseñanza de esta disciplina generalmente ha sido abordada en este nivel de forma tradicional recurriendo a extensos cálculos manuales y dependiendo de la pericia de los profesores, recurriendo al uso de herramientas electrónicas como la calculadora científica y la hoja de cálculo Excel. Sin embargo, los procesos de conceptualización, comprensión y aplicación siguen siendo muy débiles.

En el campo de la estadística descriptiva es fundamental que los estudiantes reconozcan las técnicas de análisis adecuadas para la sistematización de información, el establecimiento de conclusiones y la toma de decisiones. Esto sólo se logra si son capaces de caracterizar los diferentes tipos de variables que existen, si organizan la información en tablas de distribución de frecuencias, si construyen gráficos apropiadas para presentar la información, si logran hacer los análisis de la información dada a partir de los cálculos numéricos de corte descriptivo (medidas de tendencia central, medidas de variabilidad y medidas de posición) y fundamentalmente si tiene la capacidad de redactar un informe coherente de la situación problema, con la información encontrada.

R es un software o un lenguaje de comandos de manipulación y análisis estadístico basado en el lenguaje estadístico S, además es un programa de código abierto y gratis, razón por la que debería usarse en diferentes ámbitos académicos. Atendiendo a sus características, R tiene un gran potencial para ser usado en el aula de clase, es una herramienta útil por su capacidad para hacer cálculos estadísticos, crear gráficos y sobre todo, por la posibilidad de trabajar desde la estadística elemental hasta las estadísticas más avanzadas. Una de esas temáticas que pueden enseñarse usando R como ayuda didáctica es la relativa a la estadística descriptiva, asunto que se abordará a interior de este taller.

MARCO TEÓRICO

Las variables estadísticas suelen clasificarse en cualitativas (nominales y ordinales) y cuantitativas (discretas y continuas), cada una de ellas permite la construcción de tablas de distribución de frecuencias, la construcción de gráficas y, en el caso de las variables cuantitativas, el cálculo de medidas de tendencia central (media aritmética, mediana y moda), mediadas de dispersión (desviación media, varianza, desviación estándar) y medidas de posición (percentiles, deciles y cuartiles). A partir de estos conocimientos es posible hacer análisis de la información relativa a una situación problema de interés y tomar decisiones adecuadas que apunten a encontrar alternativas de solución a las mismas. Una forma particular de elaborar informes de corte descriptivo de un conjunto de datos es a través de los intervalos de confianza calculados a través de la regla empírica para distribuciones con comportamiento normal o aproximadamente normal o que tengan forma de campana.

El marco ideal para trabajar la estadística descriptiva en el campo medio–superior escolar lo constituye el trabajo con situaciones problemas. En este taller debemos entenderla así:

> Una situación problema la podemos interpretar como un contexto de participación colectiva para el aprendizaje, en el que los estudiantes, al interactuar entre ellos mismos, y con el profesor, a través del objeto de conocimiento, dinamizan su actividad matemática, generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimientos. Así, ella debe permitir la acción, la exploración, la sistematización, la confrontación, el debate, la evaluación, la autoevaluación y la heteroevaluación. (Obando y Muñera, 2003, p.185)

En las últimas dos décadas se ha recomendado por diversos medios la aplicación de herramientas informáticas en la enseñanza de la estadística, en el ámbito educativo, "... Con respecto a la enseñanza de la probabilidad, la estadística y el análisis de datos, por su naturaleza disciplinar es indispensable usar tecnología computacional como coadyuvante en la formación académica". (Hernández y Cuevas, 2013, p.170).

Es necesario resaltar la diversidad de programas de cómputo que se usan como herramienta para enseñar estadística, algunos de ellos son programas de uso específico bajo licencia (Fathom, StatGraphics, SPSS, Minitab, Statistica, EViews, SAS y NCSS), otros que son de distribución gratuita (OpenStat, CAEST, StatDisk y PSPP) y los que conforman entornos de programación robustos como R.

El tipo de interacción que se propone en este taller es a través de herramientas computacionales, en particular con el programa R, como apoyo didáctico para la enseñanza y aprendizaje de conceptos básicos de la estadística descriptiva, buscando que "la interacción con el lenguaje estadístico pueda mejorar la comprensión y proporcionar un conocimiento más detallado y en profundidad de los métodos" (Ledesma, Valero-Mora y Molina, 2010, p.53).

El programa R-Project brinda mayores ventajas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la estadística en el nivel medio superior en comparación con los otros programas de uso libre, pues permite la construcción de conceptos (R puede utilizarse como un lenguaje de programación) y dispone de un conjunto de funciones matemáticas que complementan la exploración de los conceptos estadísticos. Por otra parte contiene funciones propias y subprogramas especializados que permiten verificar los resultados de manera automatizada como los otros programas.

El programa R dispone de un conjunto de funciones para calcular medidas de tendencia central [*mean(),* para la media y *median(),* para la mediana], para calcular las medidas de dispersión [*var(),*para la varianza y *sd(),* para la desviación estándar] y para calcular las medidas de posición [*quantile(),* para los cuartiles], pero no tendría ningún sentido didáctico usarlos sin tener claridad conceptual sobre los temas que involucran las situaciones problemas.

El propósito principal del taller llevado a cabo fue que los participantes usen el programa R para explorar los conceptos relativos a la estadística descriptiva en el nivel medio superior, utilizando funciones matemáticas básicas que les permitan la construcción de los conceptos. De igual manera, que esta experiencia contribuya al diseño de nuevas propuestas de intervención en el aula donde el programa R sirva como herramienta y como instrumento de enseñanza y de aprendizaje de la estadística.

PROPUESTA DE ACTIVIDAD

A continuación se detallan las etapas desarrolladas a partir de la siguiente situación problema:

El coordinador académico de la I.E. Normal Superior de Sincelejo desea evaluar los resultados obtenidos por los estudiantes de undécimo grado en las pruebas SABER 11 del año 2014, específicamente en el área de matemáticas. Para ello decide tomar una muestra significativa de los resultados obtenidos en esta área, estos son: 45, 45, 48, 51, 51, 48, 55, 51, 48, 48, 48, 51, 45, 45, 51, 48, 51, 51, 51, 55, 51, 55, 51, 51

El coordinador solicita a los estudiantes de grado undécimo que realicen un análisis de corte descriptivo con los puntajes dados, presenten un informe que incluya tablas de distribución de frecuencias (absolutas, relativas y porcentuales), gráficos estadísticos apropiados (diagrama de barras o diagrama circular) y medidas descriptivas numéricas (media, mediana, moda, desviación media, varianza, desviación estándar, cuartiles). Además la estimación de un intervalo de confianza para el verdadero valor de la media poblacional del puntaje obtenido por los estudiantes en la prueba de matemáticas, usando la regla empírica.

Realizando el análisis de corte descriptivo

1. Abre el programa R-Project y simultáneamente un script para escribir los comandos básicos para construir una base de datos con la información dada y procede a realizar los cálculos de las frecuencias absolutas, relativas y porcentuales.

2. Dispón nuevamente del script para construir diagramas de barras y diagramas circulares para presentar la información dada en la base de datos.

3. ¿Has trabajado estas situaciones sin apoyo de herramientas electrónicas? ¿Qué ventajas o desventajas tiene trabajar estos conceptos utilizando este programa estadístico? ¿Te arriesgarías a usarlo en tus clases?

4. Escribe sobre el script las rutinas para calcular las medidas de tendencia central, las medidas de dispersión y las medidas de posición asociadas a los cuartiles.

5. Sobre el script escribe directamente los comandos median(), mean(),var(), sd() y quantile() para obtener directamente los resultados pedidos.

6. Comente como ha sido tu experiencia de trabajo con estos conceptos en el aula. ¿Qué ventajas o desventajas tiene explorar estos conceptos usando las rutinas de cálculo descritas anteriormente? ¿Te animarías a usar este programa en tus clases?

Pasando a la preparación del informe solicitado

1. Tome uno de los gráficos elaborados y analícelo a luz de la situación problema.

2. Estime los intervalos de confianza usando la media o promedio y la desviación estándar de los datos. Haz conjeturas sobre los resultados encontrados.

Buscando una extensión:

1. ¿Qué opinas sobre el desarrollo de esta actividad?

2. Propón una situación problema que nos permita, como docentes, poner en práctica las actividades desarrolladas.

3. ¿Qué situaciones problemas propondrías a tus alumnos para el proceso de enseñanza y aprendizaje de la estadística descriptiva?

Ensaya la construcción de algunas situaciones problemas que posibiliten la enseñanza y el aprendizaje de la estadística descriptiva, usando el programa R.

MÉTODO

A partir de la base de datos *Puntaje* construida en el programa R se obtienen las frecuencias absolutas usando la función *table().* Como este programa permite la construcción de nuevas funciones a partir de las que ya tiene establecidas, se le llámela *fa* y se determínela así: *fa= table(puntaje)*. Se establece el tamaño de la muestra usando la función *length()* de la siguiente manera: *n=length(puntaje).* A partir de estos resultados se calculan las frecuencias relativas *fr=fa/n*. Si las frecuencias relativas resultan con muchas cifras decimales, se aproxima el resultado a un número determinado de cifras decimales usando la función *round(),* así *fra=round(fr,3)*, en este caso a tres cifras decimales. Con los resultados obtenidos para las frecuencias relativas se calculan las frecuencias porcentuales *P* usando la expresión *P=fra*100%.*

Para construir los diagramas de barras y los diagramas circulares se utilizan las funciones *barplot() y pie()* de la siguiente forma: para los diagramas de barras se usan *barplot(fa, ylab="Frecuencias absolutas", main="Diagrama de barras") o barplot(P, ylab="Porcentajes", main="Diagrama de barras")* y para los diagramas circulares se usan *pie(fa, main=c("Diagrama circular")) o pie(P, main=c("Diagrama circular")).*

Para el cálculo de las medidas de tendencia central se utilizan las funciones *sort()* para ordenar los datos en forma ascendente, *sum()* para sumarlos y las siguientes expresiones funcionales para determinar la media y la mediana:

$Me=sum(puntaje)/n$ y $Md=(D_{(n/2)}+D_{(n/2+1)})/2$,donde $D_{(n/2)}$ y $D_{(n/2+1)}$) corresponden respectivamente a los datos centrales de la distribución ordenada, cuando el número de datos es par, si es impar $Md=D_{(n/2)}$.

Con relación al cálculo de las medidas de dispersión se utilizan las funciones *abs()* para determinar valores absolutos de diferencias, *sqrt()* para extraer raíz cuadrada, *round()* para aproximar el resultado a un número de cifras decimales determinado y las siguientes expresiones funcionales para determinar la desviación media *(dm)*, la varianza *(va)* y desviación estándar *(de),* teniendo en cuenta que $X_1, X_2,..., X_k$ son los valores que asume la variable en la tabla de distribución de frecuencias absolutas y $f_1, f_2,..., f_k$ son las frecuencias absolutas correspondientes a cada valor:

*dm= (abs(X1-Me)*f1 + abs(X2-Me)*f2 + … + abs(Xk-Me)*fk)/n*

*va=((X1-Me)^2*f1 + (X2-Me)^2*f2 + ... + (Xk-Me)^2*fk)/(n-1)*

de= sqrt(va) y si requiere aproximación *de=round(de, 2).*

Para calcular algunas medidas de posición de interés utilizamos las funciones *sort(), round()* y las expresiones funcionales siguientes:

$Q_1=(n+1)/4$ para calcular la posición del primer cuartil, $Q_{1a}=round(Q_1,0)$ para identificar la posición aproximada al entero más cercano y X_{Q1a} para determinar el valor del primer cuartil.

$Q_3=3*(n+1)/4$ para calcular la posición del tercer cuartil, $Q_{3a}=round(Q_3,0)$ para identificar la posición aproximada al entero más cercano y X_{Q3a} para determinar el valor del tercer cuartil.

Finalmente se usan las siguientes expresiones funcionales para la estimación de intervalos de confianza para distribuciones de datos normales o aproximadamente normales, usando la regla empírica, así:

Para aproximadamente el 68% de las mediciones:

Li=Me-de; Ls=Me+de; IC=round(c(Li,Ls),1)

Para aproximadamente el 95% de las mediciones:

*Li=Me-2*de; Ls=Me+2*de; IC=round(c(Li,Ls),1)*

Para aproximadamente el 100% de las mediciones:

*Li=Me-3*de; Ls=Me+3*de; IC=round(c(Li,Ls),1)*

Se solicita a los participantes que elaboren sus informes a partir de la información obtenida y se discute con ellos las ventajas que tiene el uso del programa R para explorar conceptos asociados con la estadística descriptiva, en comparación con los métodos tradicionales donde se emplean calculadoras científicas y la hoja de cálculo Excel.

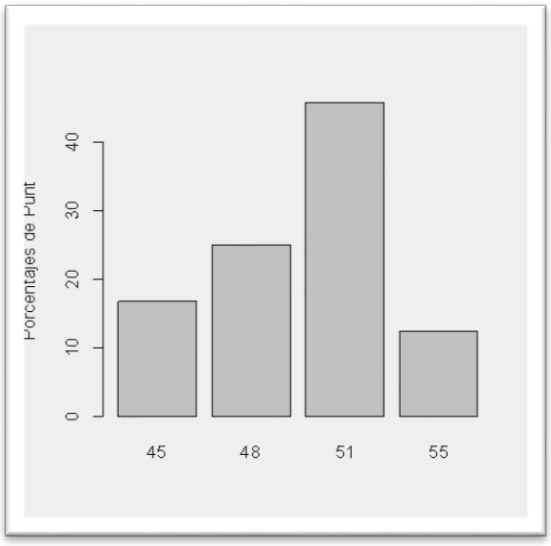
RESULTADOS DE LA IMPLEMENTACIÓN DEL PROGRAMA R

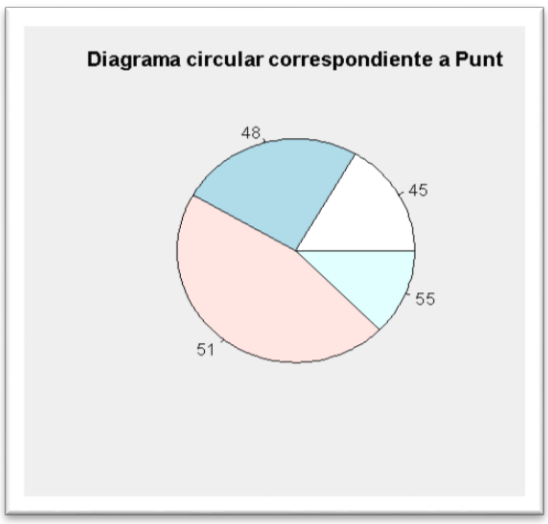
A continuación se comparten las principales apreciaciones, en relación al impacto de la propuesta, sobre la implementación de ésta con un grupo de educadores matemáticos latinoamericanos que asistieron al taller, en el marco de la XXIX Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.

Se hicieron las construcciones de las tablas de distribuciones de frecuencia absolutas y de gráficos apropiados para presentar la información dada, los cuales pueden apreciarse en la Figura 1.

Figura 1. Tabla de frecuencias absolutas, diagrama de barra y diagrama circular.

```
> fa=table(puntaje)
> fa
  puntaje
45  48  51  55
 4   6  11   3
```





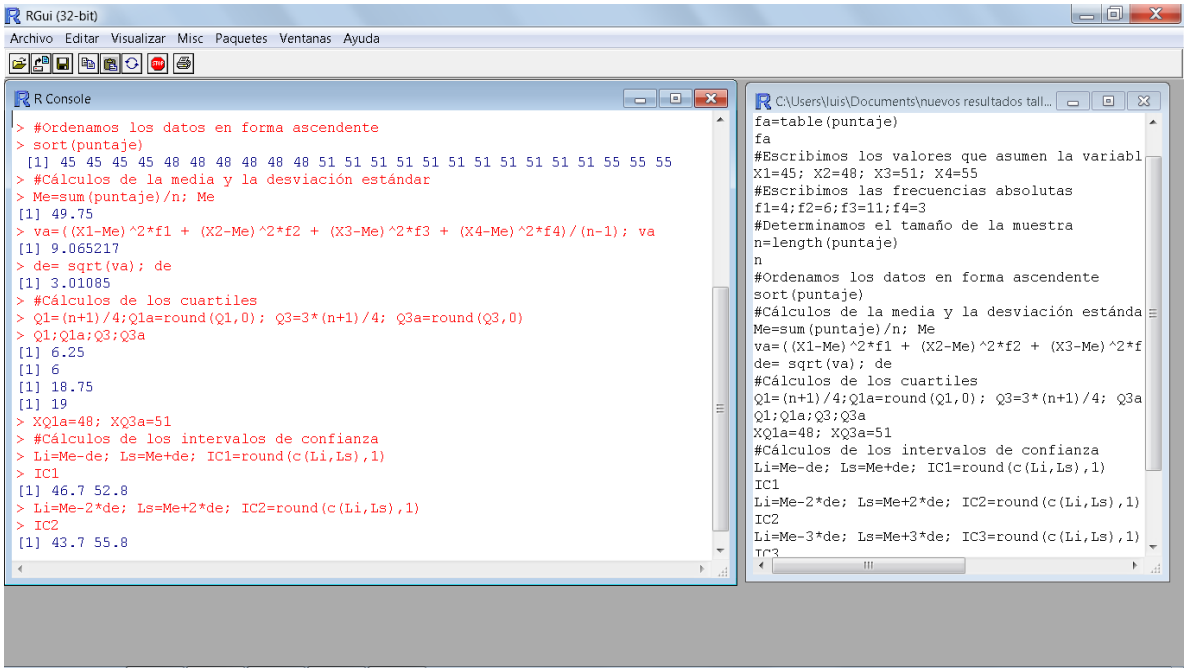
Se discutió con los participantes la explicación estadística de las construcciones, comparando las formas tradicionales de trabajar estas temáticas con la implementada en la propuesta.

Otros resultados obtenidos en el programa se muestran en la figura 2.

Las rutinas de cálculo en R se discutieron con los participantes, al igual que los informes que cada uno construyo a partir de las medidas descriptivas encontradas en el proceso.

En relación a la implementación del taller, consideramos necesario el uso de herramientas informáticas como apoyo al trabajo de aula en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la estadística en estudiantes del nivel medio superior.

Figura 2. Salidas de resultados en el programa R-Project.



Los participantes del taller manifestaron tener poco contacto con programas estadísticos que sirvieran de apoyo para el trabajo en el aula con estas características. Sin embargo, consideraron y discutieron aspectos centrados en la incidencia de esta propuesta en los procesos y resultados del aprendizaje de los temas relacionados con la estadística descriptiva.

Resaltaron la fortaleza del programa R al facilitar a los estudiantes una aproximación a los conceptos con relativa facilidad, además de permitir realizar estimaciones con cualquier tipo de datos numéricos, con alto nivel de confiabilidad. Se mencionaron las bondades del programa, al permitir visualizar los resultados que obtienen al manipular formulas y funciones propias del programa R.

Todos los participantes en el taller reconocieron en el programa su utilidad como herramienta y, cuando fueron llevados a utilizarlo, como instrumento (Moreno y Santos, 2002) y realizaron comentarios muy favorables sobre sus potencialidades didácticas. Esto pone en evidencia que su escaso uso en el aula se debe más bien a la falta de interacción con este tipo de programas, más

que por apatía o temor a usarlos. Hicieron los siguientes comentarios, con relación al uso del programa como instrumento: brinda posibilidades para interactuar el docente, los estudiantes y el objeto de conocimiento, ya que la construcción de gráficos personalizados y la programación de los cálculos de estadísticos da lugar a una nueva metodología de enseñanza de la estadística descriptiva; y el uso del programa R permite alcanzar los mismos resultados que se obtienen usando métodos convencionales de enseñanza de los temas relativos a la estadística descriptiva, pero con mayor rapidez, y permite utilizar todas las rutinas para resolver nuevas situaciones problemas modificando solo la base datos.

COMENTARIOS FINALES

De Oliveira, Da silva, Rodríguez y Ribeiro (2014) afirman que en los días de hoy la Estadística es una herramienta indispensable para el ejercicio de la ciudadanía, puesto que ella permite analizar informaciones y subsidiar la toma de decisiones, ya sea de la vida personal o laboral. De allí la necesidad de incluirlas en las estructuras curriculares de la educación básica y de crear escenarios que posibiliten el uso de herramientas tecnológicas en su enseñanza, "…se sabe que para el profesor es un reto cambiar la forma de dar clases, pero la tecnología está cambiando todo en el entorno y los docentes también deben actualizarse por el bienestar de sus educandos" (Sánchez, 2014, p.9).

El programa R-Project al igual que otros programas de distribución libre, sirven de base para diseñar actividades en el aula que guíen el proceso de enseñanza y aprendizaje de la estadística descriptiva, pero requieren de la orientación del docente para lograr los resultados esperados, precisamente al tener que utilizarlos como herramienta de enseñanza. Por ello debemos tener presente que las herramientas tecnológicas producirán un efecto en el aprendizaje de los estudiantes siempre que el docente adapte las mismas a las necesidades educativas.

Por último, actividades como las desarrolladas en este taller, que involucran el uso de programas estadísticos, van más allá de la acción técnica de aprender a usar una herramienta electrónica, puesto que involucra otro conjunto de habilidades ampliamente relacionadas con el desarrollo del pensamiento crítico. En este sentido

> "Es interesante animar a los chicos a escribir un informe sobre su análisis, ya que la habilidad para producir informes comprensivos y estructurados donde la información estadística se incorpore y presente adecuadamente para apoyar la argumentación será sin duda útil en su futura vida profesional, sea cual fuere y es un medio también para el aprendizaje de los procesadores de texto". (Batanero, Díaz, Contreras y Arteaga, 2010, p.29).

Se trata de familiarizar a los docentes en el uso de programas estadísticos de distribución libre y de dar elementos para, a futuro, potenciar los aprendizajes estadísticos de los estudiantes en el nivel medio superior, presentando una actividad concreta a realizar bajo el programa R.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, M. y Arteaga, P. (2010). Enseñanza de la estadística con proyectos. C. Batanero y C. Díaz (Editoras). Estadística con proyectos (pp.29-46). Universidad de Granada. España.

http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Libroproyectos.pdf.

De Oliveira, A., Da silva, B, Rodríguez, O. y Ribeiro, Vanderleia. La historia de la estadística en el caso de la enseñanza y el aprendizaje de la estadística en la escuela secundaria. Memorias del IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos. Costa Rica 2014

Hernández, S. y Cuevas, J. (2013). *Programas informáticos de uso libre y su aplicación en la enseñanza de la estadística.* Revista investigación operacional. Universidad Veracruzana, México.

Ledesma, R., Valero-Mora, P. y Molina, J.. (2010). *Un Software para la Enseñanza de la Estadística y la Psicometría*. Revista Argentina de Ciencias del Comportamiento. Volumen II No 2.

Moreno, L. y Santos, M. (2002). El proceso de transformación del uso de la tecnología en una herramienta para la solución de problemas de matemáticas por parte de los estudiantes. Memorias del Seminario Nacional de formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de Matemáticas (pp.263-268). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Obando, Gilberto y Muñera, Jairo. *Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática*. Revista educación y pedagogía. Volumen XV No 35. Colombia 2003.

Sánchez, S. “Principios básicos para la creación de animaciones interactivas con el

Software Geogebra”. II Encuentro Centroamericano de Matemática Educativa (2014).

UNA MIRADA SOCIOEPISTEMOLÓGICA DE LOS USOS DE LA PLATAFORMA ADAPTATIVA DE MATEMÁTICA: EL CASO DE LAS GRÁFICAS

Yacir Testa y Liliana Suárez Téllez
Plan Ceibal, ANEP (Uruguay), CICATA-IPN, CGFIE–IPN (México)l
prof.yacirtesta@gmail.com, lsuarez@ipn.mx

Palabras clave: Actividades de aprendizaje en web, uso de las TIC, gráficos, transversalidad

Key words: web learning activities, ICT use, graphics, transversality

RESUMEN: Con un marco de uso del conocimiento matemático presentamos los avances de una investigación que tiene como propósito dar cuenta de las prácticas y usos que profesores y estudiantes de matemáticas hacen de la Plataforma Adaptativa de Matemáticas, plataforma web con una base de 100.000 actividades para la educación básica y media de Uruguay. Nuestro objeto de investigación se centra en las trayectorias de usos y prácticas con gráficos que realizan estudiantes de los diferentes niveles de Educación Media Básica (de primer, segundo y tercer años, respectivamente) en una única serie de actividades diseñada para el trabajo transversal de las matemáticas de este nivel. También esbozamos las próximas etapas de la investigación.

ABSTRACT: In a framework of use of mathematical knowledge we present the advances of a research that aims to explain for practices and customs that teachers and math students make the Adaptive Platform for Mathematics, a web platform with a base of 100,000 activities for the education Basic and Middle Education of Uruguay. Our purpose of investigation is centered on the trajectories of practices and uses that perform with Graphics students of the different levels (first, second and third years of basic education school, respectively) in a single series of activities designed for transverse work of this level mathematics. Also we outline the next stages of the research.

INTRODUCCIÓN

Nuestra investigación tiene por objetivo caracterizar y analizar los distintos usos desde una mirada socioepistemológica que los estudiantes realizan del objeto tecnológico Plataforma Adaptativa de Matemáticas, PAM, analizar las prácticas sociales que se generan al realizar la Serie que les proponemos ya que "son la base y orientación en los procesos de construcción del conocimiento" (Cantoral, 2013, p.155). El ingreso de la tecnología al aula de matemática genera una dualidad. Por un lado estudios como el de Drijvers, Kieran y Mariotti (2010) dan muestras de que, en muchos casos, a pesar de trabajar en un ambiente tecnológico, los docentes continúan tomando decisiones en función de sus hábitos regulares y sus puntos de vista sobre la enseñanza de la matemática, lo que lleva a no variar ciertas prácticas docentes. Por otro lado encontramos que las herramientas tecnológicas desafían la estabilidad de las prácticas docentes (Lagrange y Monaghan, 2009), ya que ciertas formas de planificación y prácticas presentes en las aulas tradicionales no son aplicables o transferibles directamente a aulas de matemática con tecnologías. En este sentido también consideraremos investigaciones como (Drijvers, Doorman, Boon, Reed y Gravemeijer, 2010) que estudian la integración de la tecnología en el aula. Es por ello que consideramos que los resultados de nuestra investigación permitirán conocer "prácticas" y "usos socioepistemológicos" de los estudiantes en determinada Serie de Actividades y en todos los grados de educación básica.

Desde hace más de 25 años es foco de interés a nivel mundial el cómo afecta en la educación de la matemática la inclusión de la tecnología. Artigue (2007) hace referencia a este interés en la investigación en Matemática Educativa a nivel mundial, el tema del primer estudio propuesto por la ICMI fue la influencia de los ordenadores en la matemática y su enseñanza. Se consideró la influencia sobre las prácticas matemáticas, sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sobre los planes de estudio y la formación de profesores. A pesar de los numerosos casos de éxito presentados se destaca:

… todas estas sugerencias permanecían fundamentalmente especulativas en lo que se refiere a su puesta en escena a gran escala, es decir en su conversión en un plan de estudio bien desarrollado y probado, y concebido para profesores y alumnos ordinarios. Los autores agregan que, para superar este estado, era necesario desarrollar la investigación y las experimentaciones, particularmente en contextos realistas. (Artigue, 2007, p. 9).

En la ICMI XVII se presentó un segundo estudio en el que se da cuenta de los avances en éxitos de proyectos a gran escala pero se plantea que estos aún no han evolucionado lo suficiente.

PLATAFORMA ADAPTATIVA DE MATEMÁTICAS.

Nuestra investigación se inscribe en la línea de la educación de la matemática en un ambiente tecnológico con herramientas que ya forman parte del aula de matemática, pero sobre las cuales hay pocas investigaciones, en particular con la Plataforma Adaptativa de Matemáticas (PAM) y en un marco único a nivel mundial, ya que no existe otro país en el cual todos los estudiantes y docentes de educación pública disponen de una laptop, conexión a internet y acceso a la PAM.

Los avances en tecnologías y comunicación en estos últimos 15 años han sido de niveles exponenciales como plantea Chambers (2010). En particular Uruguay, donde se realiza este estudio, tiene una situación única a nivel mundial. El Plan Ceibal ha entregado (desde 2006) a cada docente y estudiante de educación pública una laptop o tablet de uso personal, y todos los Centros

Educativos, así como varios Centros Sociales y áreas públicas, cuentan con conexión gratis a Internet para estos equipos. Además estas máquinas vienen equipadas con diversos software de matemática, nosotros trabajaremos con uno de ellos: PAM. Esta plataforma está disponible desde finales del 2013, ingresó a las aulas uruguayas y los números a nivel nacional, así como varios indicadores, muestran que ha venido a quedarse, o ser antecedente de nuevas plataformas, por ejemplo en el 2015 se realizaron 32 millones de actividades.

Las tecnologías y las comunicaciones sí avanzan a un ritmo imparable, pero la Educación no ha capitalizado suficientemente estos cambios, en nuestra investigación analizamos antecedentes que tratan de explicar dicha situación, así como indicadores Uruguayos de uso de Tecnología en el Aula.

Hoy día el uso de las TIC en la educación matemática es una realidad, ya que es un recurso que se encuentra a la mano del estudiante y con el que interactúa diariamente. Es por ello que el docente debe crear, planear y aplicar actividades con el uso de las TIC, que propicien un aprendizaje significativo en los alumnos, y que no solo queden en la cuestión técnica del recurso. (Perera, Herrera, Recio y Fernández, 2013, p. 1907).

En este marco es que planteamos nuestra investigación, confiando que sus resultados, de corte cualitativos, pueden ser insumos para estos cambios que nos permitan, como plantea (Chambers, 2010, p.ii) “innovar y desarrollar nuevas modalidades de aprendizaje, tanto formales como informales, que satisfagan las demandas de las sociedades del conocimiento en la era de la información”. Entre nuestros antecedentes consideramos estudios como los de Drivers et al. (2010) que consideran la importancia de contar con mayor información sobre las nuevas técnicas de enseñanza que surgen en un ambiente tecnológico, lo que, entre otros aspectos, permitirá que los profesores enriquezcan su labor docente, y como los de Goos (2005) y de Da Ponte, Olivera y Varadas (2002) que presentan un trabajo realizado en un curso de comunicación y tecnología de la información, en un programa de pre-servicio para matemáticas de la escuela secundaria los profesores, cuyo objetivo fue ayudar a desarrollar una actitud positiva con respecto a las TIC y usarlas con confianza. Con el propósito de generar información de nuestro contexto de estudio, aplicamos una encuesta a docentes uruguayos, en su diseño adaptamos algunas preguntas de la encuesta del cuestionario usado por Chrysostomou y Mousoulides (2009) para estudiar las preocupaciones de los profesores de matemática elemental de Chipre al incorporar a su currículo la enseñanza de la matemática basada en tecnología.

GRÁFICOS Y FUNCIONES.

Decidimos considerar como contexto el trabajo en gráficos y funciones, dada su relevancia (tanto en el desarrollo de la propia matemática y en los programas educativos) y el gran caudal de investigaciones que dan muestras de las dificultades que ellas presentan, por ejemplo, su desarrollo histórico no está relacionado con su desarrollo curricular, las características de los sistemas semióticos de representación, estudios sobre funcionamiento, formas y uso de las gráficas (Cordero, 2005, 2006a, 2006b), entre otros. Nuestra mirada sobre la tecnología está alineada con lo que expresan Lugo, López y Tozanos (2014, p. 45): “la llegada de las TIC a la escuela interpela a la totalidad de sus agentes porque logra conmover aspectos característicos del

dispositivo escolar, proponiendo formatos y modos de organizar las tareas escolares que, por nuevos y diferentes, se perciben como extraños".

En nuestro análisis a priori caracterizaremos distintos usos desde una mirada socioespistemológica, y posibles prácticas, que se transformarán a la luz de los resultados del análisis a posteriori. Estos usos (desde una mirada socioespistemológica), de la Serie de actividades generadas en PAM los analizaremos a la luz del trabajo con gráficos. Para ello realizamos una revisión bibliográfica, observamos pasivamente 30 clases (de Educación Primaria y Media) para observar casos de usos en el aula de PAM y realizamos una encuesta escrita a docentes. Todo esto nos permitió considerar un estado de situación. Una siguiente fase consistió en diseñar una Serie con 7 actividades las cuales propusimos a equipos de tres estudiantes de Media Básica (primer, segundo y tercer año). Cada equipo trabaja la Serie en una sola computadora, esto busca que deben llegar a un acuerdo para enviar la respuesta, esto nos permitirá analizar el tipo de interacciones que realizan tanto en el grupo como con la PAM, esta mirada será de corte socioepistemológico. Además, al proponer que estudiantes de primero, segundo, y tercero de media básica, trabajen la secuencia, analizaremos estas relaciones tanto en casos en los que los estudiantes no conocen (desde el sistema educativo) el tema, por ejemplo no han revisado curricularmente el tema de sistemas de ejes cartesianos, hasta casos donde el concepto función ya ha sido abordado. En las siguientes fases realizaremos un análisis y fundamentación de la serie de actividades en general, y luego tres análisis y fundamentaciones distintas de ella en función de cada uno de los tres niveles en la que será aplicada.

En nuestro estudio es central el papel de las prácticas sociales en la construcción del conocimiento matemático, ya que no lo aceptamos como una obra ya construida y que solo debe ser llevada al aula, en este sentido nuestra investigación hará énfasis en las prácticas reales.

… la Socioepistemología tiene un aporte fundamental: modela la construcción social del conocimiento matemático conjuntamente con su difusión institucional, esto es, modeliza las dinámicas del saber o conocimiento puesto en uso. Para lograr lo anterior, fue necesario introducir la noción de uso, en contraste con la noción sicológica de adquisición por aprendizaje; se pasó del conocimiento estático al estudio del conocimiento en uso, es decir, el estudio del saber. (Cantoral, 2013, p. 97).

MIRADA SOCIOEPISTEMOLÓGICA DEL USO DE LA PLATAFORMA ADAPTATIVA DE MATEMÁTICAS.

Nuestro estudio toma esta noción de "uso", de estudio del saber en el caso concreto del trabajo PAM en el contexto de los gráficos para aportar elementos para reconstruir y resignificar conocimientos escolarizados.

Dentro del marco socioepistemológico, esta investigación no centrará su mirada en el objeto matemático escolar "gráfico", sino en el potencial de éste en la construcción del conocimiento matemático, ahí es donde el uso que se realice del "gráfico" nos podrá brindar información sobre estos aspectos. Al igual que en (Buendía, 2011, p. 49), "el argumento gráfico que aquí discutimos pretende evidenciar cómo las gráficas también dotan de significados a aquel saber matemático que intentamos desarrollar a través de usos particulares que la situación pone en juego". Esta es la intencionalidad que pusimos en juego al crear la Serie.

En primer año de Educación Media Básica (estudiantes de 12 y 13 años de edad) no se aborda el concepto de "función" ni el de "gráficos". En segundo año (13 y 14 años) el programa indica 5 semanas para abordar el tema "funciones" (5 horas semanales de 45 minutos) haciendo énfasis en las funciones de dominio y codominio numéricos, interpretación de gráficas, funciones polinómicas de primer grado. En tercer año (14 y 15 años) se indica aborda los gráficos de funciones polinómicas de segundo grado, también aparece implícitamente el trabajo con gráficos en la resolución de inecuaciones del tipo ax+by+c>0. Como se puede observar el aspecto "gráficos" no está presente en forma relevante en los programas de Educación Media Básica, y al igual que lo observado observado en otras investigaciones:

En el marco de referencia que el sistema educativo brinda a las gráficas cartesianas, las tareas que el profesor de matemáticas tiene que desarrollar se refieren a lograr la correcta articulación de los elementos semióticos que la componen, favorecer el tránsito desde un registro gráfico hacia el analítico, lograr la adecuada interpretación. (Buendía, 2012, p. 5)

Lo gráfico no existe fuera de su subordinación a la representación gráfica de funciones polinómicas de primer y segundo grado.

El uso de las gráficas tiene un desarrollo en el sistema didáctico pues los funcionamientos y formas identificados en una situación se reorganizan para dar lugar a otros en nuevas situaciones. Hay, entonces, una relación dialéctica entre el uso de las gráficas y las situaciones escolares pues éstas se pueden desarrollar gracias a cómo se usan las gráficas y a su vez, la situación favorece que se desarrollen los diferentes funcionamientos y formas de las gráficas. De ahí que Cordero, Cen y Suárez (2010) perciban a las gráficas como un continuo al transformarse y transformar al sistema educativo. (Buendía, 2011, p. 43).

Cordero, Cen y Suárez (2010) determinan seis usos de las gráficas: distribución de puntos, comportamiento geométrico, análisis de la curva, cálculo de área, cálculo de volumen y análisis de información. Nosotros consideramos estos usos en el caso de la PAM y luego daremos una mirada a los usos socioespistemológicos que los estudiantes realizan de la PAM en este contexto. También, al igual que estos investigadores, nosotros realizamos y presentamos una detallada revisión de la forma en que se introducen y desarrollan de "los gráficos" en los libros de textos sugeridos por las autoridades de la enseñanza en Uruguay y en los programas curriculares vigentes.

Las gráficas tienen diferentes usos en la matemática escolar. Cordero (2008) propone entender esos usos a través del análisis del funcionamiento y forma de las gráficas. El funcionamiento se refiere al rol de la gráfica en una tarea; la forma alude tanto a la apariencia perceptible de las gráficas como a la manera en la que el individuo actúa sobre ella, cuando por ejemplo, lee información. Ambos aspectos ocurren de manera entrelazada y dependen de la situación particular en la que actúa el individuo. Así, el papel de la gráfica cambia de ser la representación de una función a jugar un rol dinámico en un espacio de interacciones estudiante-docente-matemáticas. Carrasco (2010) caracteriza este cambio como un desplazamiento de nuestra mirada sobre la gráfica del objeto matemático fijo y preestablecido hacia un objeto temporal y evolutivo. (Buendía, 2011, p.43).

Por otro lado nuestra investigación está íntimamente relacionada con varias investigaciones del colectivo científico que la componen (Cordero y Flores, 2007; Buendía, 2012, entre otros), al

focalizarse en el uso de las gráficas, concepto fundamental en la educación matemática que también forma parte de la vida cotidiana, y posee características diferentes al realizarse dentro del marco de la PAM. Además su corte socioepistemológico, como plantean Cantoral y Montiel (2001) nos permitirá analizar las producciones no desde "el deber ser" sino desde la realidad, a la luz del conocimiento social, histórico, culturalmente situado, teniendo en cuenta las circunstancias de su construcción y difusión, la realidad en el aula.

Las gráficas cartesianas forman parte de los contenidos curriculares desde el último año de educación primaria. A través del currículo y libros de texto, el discurso matemático escolar suele asignarles el papel de representar e interpretar un conjunto de datos, papel que posteriormente se orientará hacia el trabajo con funciones a través de tareas escolares del tipo "graficar o interpretar la gráfica de una función." (Buendía, 2012, p. 5).

También, en la revisión preliminar de distintas investigaciones, encontramos aspectos como los propuestos por Campanario, Moya y Otero (2011) quienes plantean que uno de los aspectos básicos de la enseñanza de las ciencias es que los estudiantes sean capaces de analizar datos e interpretar su representación gráfica. Nuevamente encontramos que en distintos contextos el rol del trabajo con las gráficas se basa en una interpretación directa de ellas.

En base a una revisión preliminar de textos escolares, y a mi experiencia de más de 12 años de observar clases de matemática, con una frecuencia superior a 50 visitas anuales, considero que la situación antes planteada es similar en Uruguay. Además también coincide la realidad uruguaya con la reportada en (Buendía, 2012) sobre el objetivo final en el currículo de las gráficas: graficar o interpretar el gráfico de una función. Una situación similar la reportan Arteaga, Ortiz y Batanero (2013). En cambio nosotros compartimos la idea de que

Las gráficas son un objeto matemático que es necesario conocer para lograr su construcción, utilización como modelo, o interpretación, así que el papel del profesor de matemáticas es enseñar lo anterior. Importa, entonces, la correcta articulación de los elementos semióticos que componen la gráfica, o interpretar lo que se está viendo en la misma, de manera acorde con el problema contextualizado que dicha gráfica ilustra, o proponer tareas que promuevan lo que Duval (1988) señala como conversiones directas entre registros de representación. (Buendía, 2012, p. 7).

A MODO DE CIERRE

Queremos destacar los aportes de nuestra investigación para la Matemática Educativa, ya que se aborda un problema que no ha sido estudiado, que generará nuevas líneas de investigación al promover nuevas preguntas, que a la luz de sus resultados generará clasificaciones de usos, desde una mirada epistemológica, con su descripción y brindará elementos para reorganizar la obra matemática en función de la observación y análisis del humano haciendo matemáticas, así como de las interacciones entre ellos, con el concepto matemático en juego y con el artefacto tecnológico. Confiamos que al finalizar el estudio podremos también realizar sugerencias didácticas en base a la aproximación sistémica que adoptamos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arteaga, P, Ortiz, J. y Batanero, C. (2013). Un estudio de la presentación de los gráficos estadísticos en libros de texto españoles de educación primaria. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18,* 41-50.

Artigue, M. (2007). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. En E. Mancera y C. Pérez (Eds), C. *Historia y Prospectiva de la Educación Matemática*. *Memorias de la XII CIAEM,* 9-21. México: Edebé Ediciones Internacionales S.A. de C.V.

Buendía, G. (2011). El uso de las gráficas en la matemática escolar: Una mirada desde la socioepistemología. *Premisa, Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática 13(48),* 42-50.

Buendía, G. (2012). El uso de las gráficas cartesianas. Un estudio con profesores. *Educación Matemática*. *24(2)*, 5-31.

Campanario, J. M., Moya, A. y Otero, J. C. (2001). Invocaciones y usos inadecuados de la ciencia en la publicidad. *Enseñanza de las Ciencias*. *19*(1), 45-56.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la matemática Educativa. Estudios de construcción social del conocimiento.* Barcelona: Editorial Gedisa S.A.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático.* México: Pearson Educación.

Chambers, J. (2010). *La sociedad del aprendizaje*. CISCO. Recuperado el 1 de octubre de 2013 de http://www.cisco.com/web/about/citizenship/socio-economic/docs/TLS_Spanish.pdf

Chrysostomou, M. y Mousoulides, N. (2009). Teachers' beliefs about the adoption of new technologies in the mathematics curriculum.CERME 6.Working Group 7.*Technologies and Resources in mathematical Education*. 1270-1279 Recuperado el 1 de octubre de 2013 de http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg7.pdf

Cordero, F. (2006a). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama & A. Romo (Ed.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano* (pp. 265–286). D.F., México: Díaz de Santos–Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Cordero, F. (2006b). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento apprendimento della matematica. *La Matematica e la sua Didattica, 20(1),* 59-79.

Cordero, F. (2005). La institucionalización del conocimiento matemático y el rediseño del discurso matemático escolar [Resumen]. Resúmenes de la Decimonovena Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Uruguay. p. 30.

Cordero, F., Cen, C. y Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el Bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(2), 187-214.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 10(1),* 7-38.

Da Ponte, J., Olivera, H. y Varadas, J. (2002). Development of pre-service mathematics teachers professional knowledge and identity in working with information and communication technology. *Journal of Mathematics Teacher Education 5,* 93–115.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H. y Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, An International Journal* (*75)2*, 213-234.

Drijvers, P., Kieran, C., y Mariotti, M. A. (2010).Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives.En C. Hoyles y J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology—rethinking the terrain.* pp. 89–132. New York: Springer.

Goos, M. (2005).A Sociocultural annalysis of the development of pre-service and beginning theachers pedagogical identities as users of technology. *Journal Mathematics Teacher Education 8*, 35-59

Lagrange, J. y Monaghan, J. (2009).On the adoption of a model to interpret teachers' use of technology in mathematics lessons. *CERME 6* Conference.Recuperado el 1 de octubre de 2013 de http://fractus.uson.mx/Papers/CERME6/wg9.pdf#page=79.

Perera, J., Herrera, S. Recio, C. y Fernandéz, M. (2013). Herramienta interactiva en la comprensión del límite de una función. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 26*,* 1899-1907.

GEOGEBRA: DE ARTEFACTO A INSTRUMENTO PROCESO DE TRANSFORMACIÓN

Francisco Javier Córdoba Gómez, Pablo Felipe Ardila Rojo
Instituto Tecnológico Metropolitano (Colombia)
ficordob@yahoo.es, franciscocordoba@itm.edu.co, pabloardila@itm.edu.co

Palabras clave: GeoGebra, génesis instrumental, artefacto, instrumento

Key words: GeoGebra, instrumental genesis, artifact, instrument

RESUMEN: En la actualidad, todavía hay dificultades para integrar y articular la tecnología (en este caso el software libre de matemáticas dinámicas GeoGebra) sea posible. Una de ellas tiene que ver con resistencias y falta de voluntad del profesorado debido, en general, a la dificultad de superar la visión de esa tecnología como un simple artefacto y transformarla en un instrumento que posibilite otras aproximaciones al conocimiento matemático. En este taller se pretende mostrar cómo GeoGebra puede ser transformado de artefacto a instrumento, siguiendo principios de la génesis instrumental y mediante algunos ejemplos prácticos en los que se muestra el proceso.

ABSTRACT: At present, there are still difficulties in integrating and articulating technology (in this case free dynamic mathematics software GeoGebra) to be possible. One has to do with teachers' resistance and unwillingness because, in general, the difficulty of overcoming the vision of this technology as a simple device and transform it into an instrument that enables other approaches to mathematical knowledge. This workshop is intended to show how GeoGebra can be transformed from artifact to instrument, following principles of instrumental genesis and through some practical examples in which the process is shown.

INTRODUCCIÓN

La tecnología y las matemáticas escolares

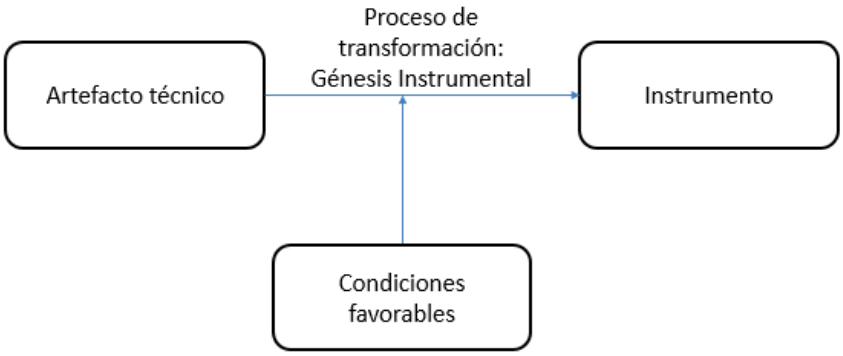
La incorporación de las TIC en la enseñanza de las matemáticas constituye uno de los temas más importantes en la educación matemática actual, y por tanto, es necesario que la discusión siga abierta (Leung, 2006). Con la llegada de la tecnología al ámbito educativo se han sentado diversas posturas en cuanto a su incorporación e integración y a las ventajas o desventajas que podrían tener en el desempeño académico de los estudiantes. Sin embargo, y de manera simple, lo que se le pide a la tecnología en muchos casos, es permitir aprender más rápido y mejor, más o menos, las mismas matemáticas. Para que la tecnología sea legítima y matemáticamente útil en lo educativo, debe suponer modos de integración que permiten un equilibrio entre el valor epistémico y el pragmático de las técnicas instrumentadas asociadas, es decir, es necesario que las tareas propuestas en los planes de estudio, no sean simples adaptaciones de lo que se hace con lápiz y papel (Artigue, 2011).

Es en este sentido, que no puede considerarse GeoGebra como un simple artefacto que hace con mayor rapidez y precisión una tarea que a un estudiante le tomaría tiempo y esfuerzo hacer con lápiz y papel. El objetivo central de este trabajo es identificar el proceso de transformación de artefacto a instrumento del software GeoGebra con un ejemplo práctico.

Algunos elementos de la génesis instrumental

Si bien, no se trata de profundizar en el tema de la génesis instrumental, sí se presentan algunos aspectos centrales de este enfoque. En este enfoque, los conceptos de sujeto, esquemas de uso, artefacto e instrumento (Flores y Chumpitaz, 2013) son centrales en el desarrollo de la teoría. En la imagen 1se presentan algunos de ellos.

Imagen 1. Paso de artefacto a instrumento



Artefacto

Es un objeto material o abstracto, que soporta la actividad humana en la realización de un tipo de tarea (una calculadora, un algoritmo para resolver ecuaciones de segundo grado, etc.), en otras palabras, los artefactos se pueden considerar como mediadores de la actividad humana.

Génesis instrumental

Proceso de construcción, por parte del sujeto, de un instrumento a partir de un artefacto. Es un proceso complejo, vinculado a las características del artefacto (sus potencialidades y limitaciones) y

a la actividad del sujeto, su conocimiento y métodos de trabajo iniciales. Tiene dos componentes estrechamente relacionados entre sí:

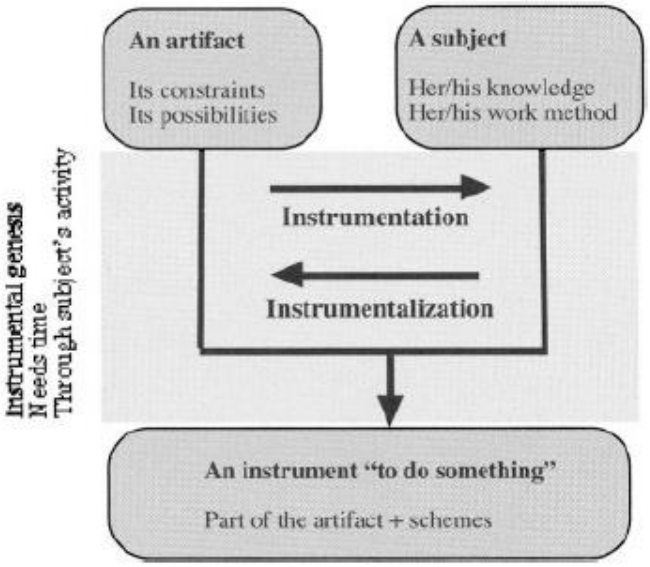
Proceso de instrumentalización: dirigido hacia el artefacto por el sujeto. Implica varias etapas (para el caso de un software): una etapa de descubrimiento, una etapa de personalización y una etapa de transformación de la herramienta, a veces en direcciones no planificadas y nuevas.

Proceso de instrumentación: dirigida hacia el sujeto. Es un proceso a través del cual las limitaciones y potencialidades de un artefacto forman el sujeto. En este proceso se da la emergencia y evolución de esquemas mientras se realizan tareas de un determinado tipo.

Instrumento

El instrumento es construido de una parte del artefacto inicial (modificado a través del proceso de instrumentalización) y a través de esquemas construidos con el fin de desempeñar un tipo de tarea. La actividad mediada por los instrumentos siempre está situada y el contexto tiene una influencia determinante en la actividad. Vergnaud (1996, citado en Trouche, 2005) se refiere a los esquemas como organizaciones invariantes de actividad para una determinada clase de situaciones, y por lo tanto tiene una intencionalidad y un objetivo específicos. En la imagen 2, se muestra todo el esquema de la génesis instrumental.

Imagen 2. De artefacto a instrumento (Tomado de Trouche, 2005, p. 144)

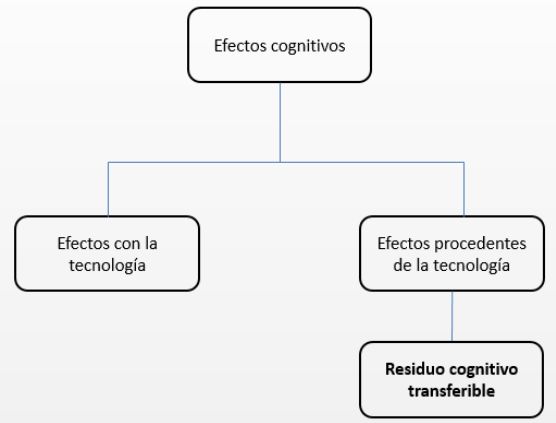


Los computadores que ofrecen una asociación o colaboración intelectual se pueden llamar "instrumentos cognitivos", potencialmente permiten al estudiante funcionar a un nivel que trasciende las limitaciones de su sistema cognitivo. La colaboración con la tecnología es parecida al trabajo con un colega mejor dotado; permite a los estudiantes tomar parte en procesos cognitivos que superan a los que ellos podrían conseguir sin dicha colaboración,pero en condiciones que le permiten estirar sus músculos cognitivos al máximo (Salomon, Perkins y Globerson, 1992).

GeoGebra: más que un artefacto un instrumento

Para Pierce, Stacey & Barkatsas (2007), la tecnología ofrece nuevos enfoques para la enseñanza y por lo tanto para el aprendizaje de los estudiantes. La investigación en este campo sugiere que los nuevos mediadores didácticos pueden mejorar el aprendizaje a través de canales cognitivos, metacognitivos y afectivos, nuevos y diferentes a los ya tradicionales. Por su parte Lim (2007), afirma que la principal motivación para la integración de las TIC en la educación es que promueve en los estudiantes su pensamiento constructivo y les permite al mismo tiempo trascender sus limitaciones cognitivas involucrándolos en ciertas operaciones (cognitivas) que por otros medios tal vez no hubieran podido lograr. Se favorece de esta manera el desarrollo de habilidades de orden superior tales como el diseño, la toma de decisiones y la resolución de problemas que requieren análisis, evaluación, relación entre las partes, imaginación y síntesis en un todo integrado (Lim, 2007). Utilizar un computador supone una simbiosis de nuestra inteligencia con una herramienta externa sin la cual la mente contaría sólo con sus propios medios y no funcionaría igual. Algunos de los procedimientos de uso del computador pasan de hecho a interiorizarse, a incorporarse autónomamente a la mente (Salomon, Perkins & Globerson, 1991). Estos autores se refieren a dos efectos cognitivos del uso de la tecnología, tal como se muestra en la imagen 3.

Imagen 3. Efectos del uso de la tecnología (adaptado de Salomon, Perkins & Globerson, 1991).



El efecto con la tecnología se refiere a lo que el estudiante puede hacer con ella en el mismo momento de usarla. El efecto procedente de la tecnología se refiere a aquello que el estudiante es capaz de transferir y usar en otra situación sin el uso necesariamente de la tecnología. La pregunta que se debe hacer entonces al integrar GeoGebra en el desarrollo de la clase de matemáticas es ¿Cómo puede conseguirse que la asociación estudiante-computador pueda dar lugar a residuos cognitivos transferibles? Tratar de dar respuesta a esta pregunta es lo que puede marcar la diferencia entre considerar a GeoGebra como un artefacto o como instrumento que puede ser construido por el estudiante en su proceso de aprendizaje matemático. Ahora bien, y siguiendo la línea de estos autores, no se puede esperar impacto importante alguno cuando se practica la misma vieja actividad con una tecnología que hace que se realice esta misma actividad más rápidamente o con mayor facilidad. Es preciso cambiar la actividad, y esto demanda mayor participación y compromiso de los profesores.

METODOLOGÍA

En consecuencia con el marco teórico, se muestra una de las actividades del taller, rectas paralelas, para comprender la diferencia entre usar GeoGebra como un mero artefacto o como un instrumento. Se plantea la situación de usar GeoGebra para trazar rectas paralelas a una recta dada con ayuda de un deslizador, como se muestra en la imagen 4 y 5:

Imagen 4. Recta dada

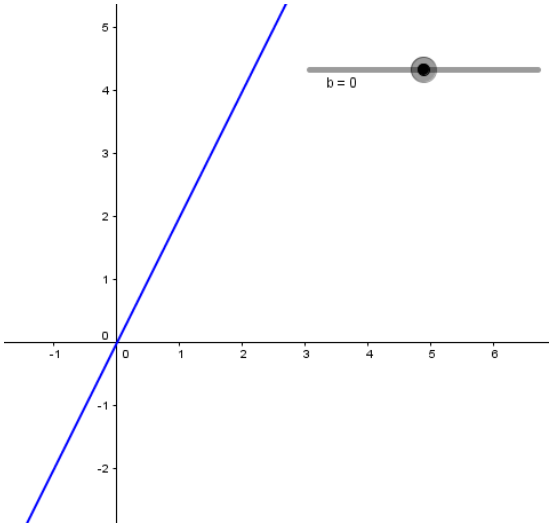
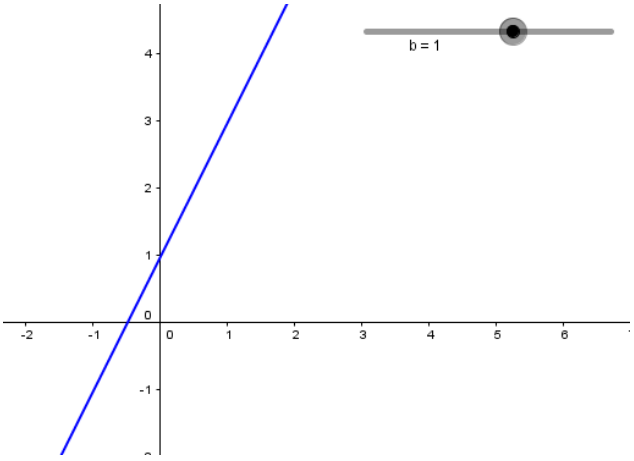
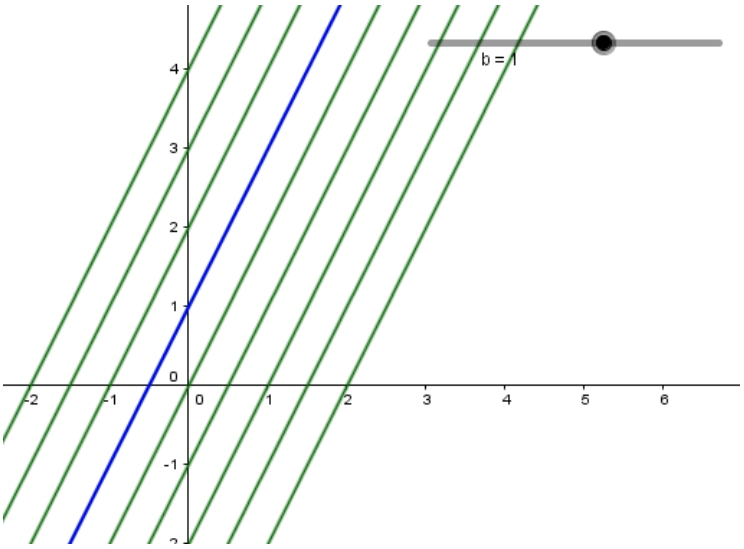


Imagen 5. Recta paralela a la recta dada



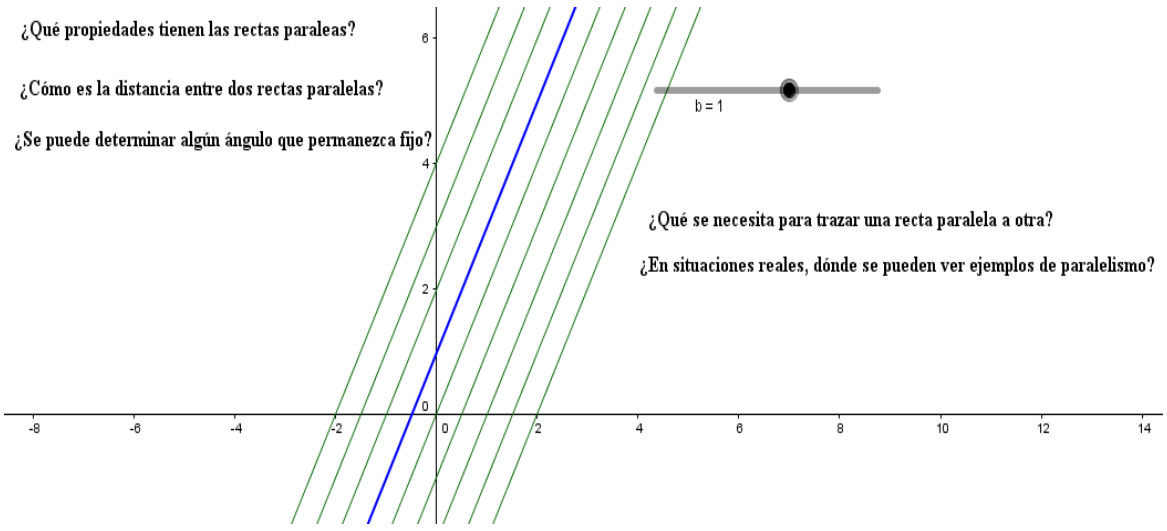
Una vez se han trazado diferentes rectas paralelas a la recta dada, como se aprecia en la imagen 6, mediante la opción secuencia para visualizar una familia de rectas paralelas a la recta dada. A partir de esta situación, que muestra el aspecto de artefacto del software, ¿qué tipo de preguntas deberían hacerse ahora para determinar si va quedando algún residuo cognitivo transferible en los estudiantes una vez realizad esta actividad?

Imagen 6. Familia de rectas paralelas a una recta dada



En la imagen 7, se muestran algunas preguntas que se podrían formular para ir encaminando la actividad hacia un proceso de génesis instrumental que los estudiantes pueden ir desarrollando gradualmente. Si bien se trata de una actividad muy sencilla, se puede ver que si se usa GeoGebra para representar rectas paralelas simplemente, hay un enfoque de artefacto pues el software lo único que permitió fue facilitar el trabajo.

Imagen 7. Algunas preguntas orientadoras para superar la visión de artefacto



ALGUNOS COMENTARIOS FINALES

Al inicio de la actividad, algunos profesores solo se preocuparon por la forma de construir las rectas paralelas con el software sin ninguna consideración adicional, ya que GeoGebra solo les facilitó ese procedimiento. Esta visión inicial es la de artefacto. Si bien el acercamiento inicial a GeoGebra puede ser en la forma de artefacto en cuanto a su reconocimiento y descubrimiento, el trabajo

posterior no puede limitarse sólo a un artefacto que les permita a los estudiantes y al profesor, ahorrar tiempo y facilitar la graficación o los cálculos numéricos.

Para que GeoGebra permita llegar a otros niveles de comprensión y desarrollo cognitivo, las actividades orientadoras de trabajo deben ser significativas y conducir a estructurar un residuo cognitivo que sea transferible a otras situaciones y contextos mediante la comprensión y uso, ya no del artefacto sino de un instrumento.

Los profesores que participaron de la actividad del taller, pudieron construir otras preguntas y formular otros problemas a partir de una situación común de clase, que fue más allá de la mera representación gráfica al pasar de una concepción de GeoGebra como un artefacto a una concepción de instrumento de aprendizaje.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *6*(8), 13-33.

Flores, J. y Chumpitaz, D. (2013). Génesis instrumental: un estudio del proceso de instrumentalización de la función definida por tramos. En *Actas del VII CIBEM*, pp. 6863-6870

Leung, F. (2006). The Impact of Information and Communication Technology on Our Understanding of theNature of Mathematics. *For the Learning of Mathematics. 26 (1)*, 29-35

Lim, C. (2007). Effective integration of ICT in Singapore schools: pedagogical and policy implications. *Education Tech Research Dev*., *55*, 83–116.

Pierce, R., Stacey, K. & Barkatsas, A. (2007). A scale for monitoring students' attitudes to learning mathematics with technology. *Computers & Education, 48*, 285–300.

Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. In *The didactical challenge of symbolic calculators* (pp. 137-162). Springer US.

Salomon, G., Perkins, D. N., & Globerson, T. (1991). Partners in cognition: Extending human intelligence with intelligent technologies. *Educational researcher, 20*(3), 2-9.

EL CINE EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Marger da Conceição Ventura Viana, Roseana Moreira de Figueiredo Coelho
Universidade Federal de Ouro Preto (Brasil)
conceicao@cead.ufop.br, roseanana@yahoo.com.br

Palabras clave: Cine en Educación, Enseñanza/aprendizaje de las Matemáticas, Películas en la clase de Matemáticas

Key words: Cinema and Education, Teaching of Mathematics, films in the Mathematics classroom.

RESUMEN: Este estudio se refiere al área de investigación en enseñanza, aprendizaje y tecnologías en la Educación Matemática. Requiere la construcción del marco teórico sobre el uso de herramientas de enseñanza de contenidos matemáticos, el papel del cine en dicho marco y el desarrollo de actividades relacionadas a esta teoría con el fin de examinar su práctica. Se justifica porque ya se encuentran artículos y tesis sobre el uso de películas en aulas de diversas disciplinas presentando resultados satisfactorios, pero en clases de matemáticas son escasos y en Brasil no se ha hallado tesis alguna sobre el tema. Sin embargo, la literatura respecto al cine en la educación ha cobrado fuerza. Se cree que las películas constituyen importante ayuda como mediadores en el proceso de aprendizaje, motivan la realización de investigaciones, desarrollan el sentido crítico y el razonamiento lógico. La pregunta es cómo hacerlo en el proceso de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas.

ABSTRACT: This study presents information in the research area of teaching, learning and technologies in relation to mathematics education. This work required the construction of a theoretical framework regarding to the use of teaching tools and mathematical content, the role of cinema in this theoretical framework, and the development of relevant activities of this theory in order to examine this practice. This work is justified because numerous articles and theses on the implementation of film in classrooms from various disciplines present satisfactory results. Traditionally, the use of film in mathematics classes in Brazil is scarce and there are no theses found on the subject. However, the literature on film in education has gained momentum. It is believed that movies are an important support as mediators in the learning process, motivate the conduction of research, and develop critical and logical reasoning. The question is how to do it in the teaching / learning of mathematics.

INTRODUCCIÓN

En Brasil, el cine en la educación no es novedad pues ya antes de la reforma de Francisco de Azevedo (1928) la película educativa se incluyó en la reorganización de la educación, ya que se consideró como una ayuda en el proceso de enseñanza-aprendizaje. En 1930 Jonathan Serrano y Francisco Venancio Filho, publicaron el libro Cine y Educación. En 1933 el Estado de São Paulo estableció el Servicio de Radio y Cine de la Educación a través del Código de Educación, artículo 133, con la instalación de los dispositivos cinematográficos en las escuelas. El Instituto Nacional de Cine Educativo (INCE) fue creado en 1937 y puso fin a sus actividades en el año 1966 (Viana, 2011).

Sin embargo, el proyecto del INCE se desarrolló sólo en la ciudad de Río de Janeiro y las películas se utilizaron únicamente para cumplir con la legislación hasta que la moda pasó, con lo que el proyecto no pudo influir en la transformación de la estructura educativa de Brasil y no obtuvo continuidad (Machado, 2002).

Sin embargo, desde los albores del cine, las películas han incorporado cuestiones que involucran situaciones de la vida que se pueden conectar a varios campos de la ciencia, incluyendo las matemáticas, tanto si se trata de una biografía, como una historia o incluso un contenido matemático (Viana, 2010). En este contexto, parece casi un desperdicio dejar de usar las películas en la educación de los alumnos, sobre todo en la clase de matemáticas, porque son parte del mundo de los niños, adolescentes jóvenes y adultos.

Teniendo en cuenta una investigación acerca de tesis y disertaciones sobre el uso del cine en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y de la hipótesis de trabajo en torno a la importancia de los recursos materiales para el aprendizaje de contenidos matemáticos, se formuló el problema de la investigación presentada en este artículo: "Cómo el cine, como una herramienta educativa, puede ayudar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas", siendo su objeto de estudio el uso de las películas en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Por lo anterior, esta investigación se encuentra en el área dela investigación en Educación Matemática, más específicamente en la de las tecnologías en educación matemática y en la de enseñanza-aprendizaje. La revisión de la literatura que se realizó en disertaciones y tesis buscadas en el Banco de tesis de la Coordinación de Perfeccionamiento del Personal de Nivel Superior (CAPES) con el propósito de obtener información sobre las metodologías y los resultados utilizados en la disertación y evitar incurrir en el riesgo de duplicar la investigación, concluyó que no había ninguna investigación sobre el uso de películas en el aprendizaje de las matemáticas.

ANTECEDENTES

En 2010, para responder a la pregunta central de su tesis de graduación: "¿Cómo se han utilizado las películas como medio de enseñanza en la educación superior?" la segunda autora seleccionó una universidad pública y eligió una de sus unidades académicas para investigar. Concluyó que, aunque la película fue aceptada por los encuestados como un material educativo importante había resistencia con respecto a su uso como una herramienta alternativa en el proceso de enseñanza por falta de conocimiento de cómo hacerlo (Coelho y Viana, 2010).

Por otra parte, el discurso de los encuestados demostró que las películas pueden servir como un enlace entre los aspectos prácticos y teóricos de ciertos temas con objetivos que van más allá del arte o el entretenimiento. La pregunta es descubrir cómo las clases de matemáticas pueden ser favorecidas por este recurso, ya que el proceso de enseñanza con soporte de película puede ser beneficiado. Según Viana (2010, s.p.) “la película parte de lo concreto, visible e inmediato que actúa en todos los sentidos. La película nos permite experimentar sentimientos de los demás, del mundo y de nosotros mismos”.

Con eso siendo las matemáticas un campo de conocimiento que requiere la abstracción y el razonamiento, a veces avanzadas, para su comprensión, es el cine un medio de enseñanza que puede apoyar el aprendizaje. Para Viana (2010) el cine puede ser útil para la ilustración de objetos solamente imaginables y comúnmente citados en el aula. Así, sugiere la utilización de películas, que además de los softwares matemáticos que permiten el movimiento a los objetos gráficos contienen historias que tocan a los estudiantes. La película también puede ayudar a los estudiantes a conocer la diversidad cultural de los matemáticos creadores de las teorías relevantes en la evolución de las matemáticas, para ello el profesor que quiere usar este recurso debe tratar de ser creativo, para disfrutar mejor de este medio, relacionándolo con un contenido de la enseñanza (Viana y Teixeira, 2009).

Vale la pena señalar que la película, que es un arte visual permite al espectador abstenerse temporalmente del lenguaje escrito, hecho favorecedor a los que no lo dominan. Con la alta tasa de analfabetismo en el país, Alencar (2007) afirma que el uso del cine es una forma de instrucción porque la imagen despierta la curiosidad, genera interés y facilita el aprendizaje, ya que mantiene mejor aquello que se ve. Alencar (2007) considera que la película puede estimular el aprendizaje estimulando el razonamiento en la medida que, “para comprender el contenido de una película, es necesario concatenar todos los recursos del lenguaje cinematográfico utilizados en la evolución del espectáculo y que se desarrollan rápidamente” (Alencar, 2007, p.137). Es así porque la información que debe ser extraída de la película no siempre es explícita en las escenas, y puede estar implícita en un discurso, en un escenario de una manera de actuar de los personajes, etc. (Viana y Pinto, 2013; Cipolini, 2008).

Además, Oliveira (2006, s.p.) señala que la película puede ser considerada un instrumento científico pues "posibilitó diversos tipos de experimentos y el registro de acontecimientos históricos en condiciones inhóspitas o no, discernibles a los ojos desnudos, permitiendo observaciones repetidas y análisis detallados con la separación de los momentos" .Con esto, se presenta a continuación, una breve introducción a la invención del cine, es necesario entenderlo como el séptimo arte, la industria, la ciencia y su lugar en la sociedad y en última instancia en la educación matemática.

EL CINE

Establecer puntos de referencia para la invención del cine es una tarea peligrosa y al mismo tiempo requiere de atención como la afirmación de ciertas patentes, porque la película es una evolución del arte que surge desde la fotografía a las tecnologías más avanzadas utilizadas hoy en día, por lo que es incierto decir que el cine fue inventado por alguien en algún momento.

Los intentos de reproducir el movimiento comenzaron en 1829 con Joseph Plateau. Su investigación dio como resultado la construcción del Fenaquistiscopio, reproduciendo el movimiento a través de un disco de cartón dentado (perforado por aberturas) con una serie de imágenes que reproducía un movimiento (Sadoul, 1963).

Las primeras "tomas" se hicieron en 1872 en San Francisco California, EE.UU., por el fotógrafo inglés Muybridge que experimentó el zoopraxinoscopio (desarrollo de Zoetrópio de Horner) para demostrar a un millonario americano (ganar una apuesta que había hecho) que, si bien el caballo galopa, hay un momento en que sus cuatro patas están en el aire. Como se ha explicado en Sadoul (1963).

A lo largo de la pista donde corrían los caballos, estaban alineados veinticuatro escritorios, cámaras oscuras, en las que veinticuatro operadores preparaban, a la señal de una campanilla, veinticuatro placas de coloide húmedo, pues en el caso de las placas, secando después de unos pocos minutos, ya no eran sensibles. Cargados los veinticuatro aparatos se lanzaban los caballos en la pista, que se fotografiaban por sí mismos rompiendo los hilos dispuestos en la trayectoria (Sadoul, 1963, p.11).

También de acuerdo con Sadoul (1963), después de la experiencia de las carreras de caballos en 1876 Janssen inventó el revólver fotográfico. En 1882 fue perfeccionado por Marey que le renombró como rifle fotográfico. En octubre de 1882 Marey usando el Cronofotógrafo (un nuevo invento) presentó a la Academia de Ciencias las primeras filmaciones en película. Con esto inventó (prácticamente) la cámara y la filmación moderna (Sadoul, 1963).

Continuando, el estadounidense Thomas Alva Edison, conocido por la invención, en 1878, de la bombilla incandescente, desarrollaba con la ayuda del escocés William Kennedy Dickson, la película de celuloide y un aparato para visión individual de la película llamada Quinetoscopio, que consistía en una caja impulsada por electricidad que contenía la película la que Dickson inventó, pero con funciones limitadas, pues no la proyectaba la película. Edison reanudó su investigación sobre el dispositivo de Marey, y creó y puso a la venta en 1894, los quinetoscopios que, según Sadoul (1963, p.13), eran los dispositivos constituidos en “grandes cajas que contenían películas perforadas, de 50 pies, vistos con telescopios”. Inmediatamente en todos los países decenas de inventores del mundo han tratado de proyectar estas películas en las pantallas. Desde el quinetoscopio desarrollado por Edison, hubo varios intentos de reproducir películas en el mundo, pero los hermanos Auguste y Louis Lumière destacaron en esta tarea, como dice Sadoul:

> Multiplicaram-se as primeiras representações do cinema. Os seus realizadores quase sempre eram desconhecidos entre si, fato que provocou intermináveis controvérsias sobre a Invenção do cinema. (...) Todavia, nenhum desses espetáculos obteve o enorme êxito do Cinematógrafo Lumiére, a partir de dezembro de 1895, no “Grand Café” do “Boulevard de Capucines”, em Paris (Sadoul, 1963, p. 13).

El cinematógrafo inventado por los hermanos Lumière era un dispositivo que consistía en una cámara de filmar, revelar y proyectar, un "aparato muy superior a todos sus dispositivos competidores. Su perfección técnica y la sensacional novedad de los temas de las películas le aseguraron un triunfo universal" (Sadoul, 1963, p. 14). El éxito de las películas de Lumière fue cayendo ya que los espectadores se cansaron de ver sólo las situaciones del día a día. Luego surgió el francés George Méliès (mago y director de teatro) que desde el principio tuvo éxito porque

su “traço genial foi o emprego sistemático no cinema da maioria dos recursos do teatro: argumento, atores, trajes, maquiagem, cenografia, maquinaria, divisão em cenas ou atos, etc. todas essas aquisições foram conservadas até hoje pelo cinema, sob formas diversas” (Sadoul, 1963, p. 30) Todas estas adquisiciones se han conservado hasta hoy por el cine en diversas formas. O estilo de filmagem de Méliès cuja carreira no cinema foi de 1900 a 1912, “permitiu-lhe criar um mundo fantástico, poético e encantador, imaginoso e ingênuo” (Sadoul, 1963, p. 31-32).

Con el tiempo surgieron otros cineastas con producciones independientes que duraron o no de acuerdo a la tendencia cultural del momento. Guerras Históricas sirvieron como telón de fondo para las pantallas, como la Segunda Guerra Mundial y la Revolución Rusa. Entonces, en las películas fueron retratados una especie de sentimientos que estaban destinados a exaltar al espectador al momento político, como afirmó Bergan (2010, p28), que desde la Revolución Rusa en 1917 dijo que había una explosión de creatividad sin precedentes”.

Luego, continuando con nuestro estudio, se presenta la película como un medio para promover el aprendizaje.

El cine como medio de enseñanza

La educación está pasando por una fase en la que el profesor debe desplegar la atención y los esfuerzos para lograr su objetivo, teniendo en cuenta la variedad de ambientes de aprendizaje que se ofrecen a los estudiantes porque aprender hoy ocurre no sólo en la escuela sino también fuera de ella, principalmente a través de los medios de comunicación masiva, incluyendo el cine. “Nada mejor entonces, que aprovechar para educar y formar a los jóvenes con imágenes, sonidos y el lenguaje cinematográfico como una fuente adicional de conocimiento” (Alencar, 2007, p.15).

Por lo tanto, para tener éxito en el proceso de enseñanza-aprendizaje el profesor tiene que recurrir a diferentes métodos que requieren la inclusión de los medios de enseñanza también diferenciados. Para discutir los métodos y medios de enseñanza, es necesario presentar las definiciones que permean el trabajo: "Los métodos de enseñanza son las formas en que los profesores trabajan los distintos contenidos con el fin de alcanzar los objetivos propuestos" (Machado, 2002, p.12). Y este autor completó explicando que el método de enseñanza comprende dos dimensiones: como el plan ideal de la acción a realizar por los profesores y estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje, y cómo se han desarrollado con eficacia sus propias actividades. Estas dos dimensiones por lo general no son coincidentes en una evaluación del proceso, pero se revelan como etapas inseparables del mismo sistema (Machado, 2002, p. 12).

Mediante el desarrollo de un método apropiado para la enseñanza de contenidos específicos (y para determinados alumnos), el profesor puede sentir la necesidad de utilizar herramientas apropiadas para lograr su objetivo. Estas herramientas son los medios de enseñanza. Machado (2002) define a los medios de enseñanza como los recursos materiales portadores de información que utilizados por los profesores y los estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje por ciertas condiciones previamente planificadas, facilitan la comunicación docente y el aprendizaje, ya sea mediante la presentación o representación de aspectos de la realidad concernientes al plan de estudios, ya sea por mediación de los sistemas simbólicos que permiten una relación crítica-activa de los estudiantes con su entorno - el ambiente físico y el espacio socio-cultural. (Machado, 2002, p. 16).

Por lo tanto, considerando la película como un medio de enseñanza, el educador puede desarrollar un método de enseñanza apoyado en este medio, descubriendo en las películas el proceso de escolarización extrayendo de él reflexiones que animan a los estudiantes a pensar más profundamente, pues ahí se encuentra la clave del uso de la película en el salón de clases. El cine puede cumplir un papel saludable y enriquecedor en el proceso de escolarización. “No hay manera de entender la comunicación de imágenes sin pensamiento, sin esfuerzo intelectual. El fácil acceso a las imágenes no significa una fácil comprensión de sus formas" (Carmo, 2003, s.p.). Para ello, es importante que el profesor actúe como mediador "entre el mundo del cine y el delos estudiantes, que actúe como mediador de aprender que revisa constantemente sus prácticas pedagógicas, que no impone verdades y quien es una autoridad absoluta en esta propuesta pedagógica (Viana, Rosa, Orey, 2011, p. 5). Por otro lado, tanto el cine como cualquier otra herramienta que ayuda o proporciona el aprendizaje deben ser planeados de antemano y con adecuación al público objetivo. El cine, en particular, requiere más atención en cuanto a su uso, como se explica Viana:

> (...) las películas deben ser elegidas por la articulación de los contenidos y conceptos trabajados (o a ser trabajados) teniendo en cuenta el conjunto de metas a alcanzar en la disciplina. Así que sin duda, no habrá películas propias para todo contenido, pues debe haber conexión del contenido de la película que se trabaje con la disciplina enseñada (Viana, 2010, p.12).

Tampoco es necesario recordar que al profesor le gusta el cine. Sólo entonces se puede elegir entre muchas películas, una que le sirve. Los colegas también pueden sugerir los títulos. Y como dice Viana et al (2010), no siempre para determinados contenidos hay una película que les sirva como herramienta educativa adecuada.

Investigaciones sobre el cine en la educación

La revisión de la literatura realizada en disertaciones y tesis buscadas en el Banco de tesis de la CAPES con el objetivo de obtener información sobre las metodologías y los resultados utilizados en la disertación y no correr el riesgo de duplicar la investigación, concluyó que no había ninguna investigación sobre el uso de películas en el aprendizaje de matemáticas. En cuanto a las investigaciones que contenían los temas cine y educación al mismo tiempo, las seis que fueron encontradas, leídas y analizadas mostraron el potencial del cine como una herramienta educativa. Los autores, partiendo de sus estudios y análisis de las consecuencias del uso de las películas en el aula compartían la idea de que la película tiene una fuerte influencia sobre el proceso de enseñanza, según lo declarado "son capaces de producir cambios en las representaciones de los estudiantes y que podemos tomar en cuenta este fenómeno cuando estructuramos actividades educativas" (Melo, 2010, página 215). La película insertada en el aula, en cualquier disciplina, tiene el poder de revelar a los estudiantes que no sólo los espacios escolares contienen los conocimientos, pero también existen fuera de la escuela. El cine puede mostrar que el conocimiento puede ser adquirido, apropiadamente, en el hogar de cada estudiante, conforme Stefani (2010). Esta autora constató que el cine como recurso didáctico motivó el desarrollo de la investigación extracurricular, favoreciendo riqueza a los debates en el aula. Alentados por el profesor-investigador, los estudiantes recolectaban informaciones sobre sus investigaciones individuales y las compartían con los demás colegas en el salón de clase en interacciones significativas en el idioma destinado. La realización de las encuestas y el uso del idioma fuera del aula actuaron como una de las razones para el desarrollo de la autonomía del alumno como

aprendiz de LE [Lengua Extranjera]. Algunos participantes señalaron que consiguieron ver en la película una posibilidad de aprender otros idiomas, destacando la capacidad de empoderamiento que la película promueve (Stefani, 2010, p. 174).

Se dio cuenta de todo lo que ya se ha producido (en el rango de tiempo en que la búsqueda en la base de datos de Tesis ocurrió) que no existen producciones que discurran sobre el cine como un medio para la enseñanza de conceptos matemáticos. Por otra parte, cabe destacar que los trabajos encontrados con el tema cine y educación han demostrado que el cine es una herramienta útil para tener éxito en el ámbito de la escuela y que fue utilizado con éxito en la enseñanza de la Historia, la Biología, la Literatura y en otros campos del conocimiento.

CONSIDERACIONES FINALES

La investigación que aquí se presenta, cuyo principal objetivo es la búsqueda de respuestas a la pregunta de investigación requiere tareas como levantar marcos teóricos sobre el uso de herramientas de enseñanza de contenidos matemáticos, del papel del cine en este marco teórico y el desarrollo de actividades relevantes a esta teoría con el fin de examinar esta práctica. En las actividades de enseñanza en general es siempre bienvenido todo lo posible para mejorarla, es decir, hacer que el alumno aprenda. Pero la teoría y la práctica deben ir de la mano, de modo que una complementa a la otra. Dijo Pimenta (1997):

> La práctica se basa y se perfecciona a partir de las interpretaciones de las situaciones particulares, tomadas en su totalidad. La teoría tiene un papel importante en la mejora de la comprensión de la situación. La relevancia y el uso de las ideas teóricas son, desde una perspectiva hermenéutica, condicionadas por la experiencia de un problema en acomodar ciertos aspectos de la situación. La práctica se entiende, entonces, como la relación entre la comprensión y la acción (Pimenta, 1997, p. 53).

Por lo tanto, es necesario promover la actividad de los estudiantes, que no pueden recibir pasivamente una lección. Las películas, además de aumentar el interés de los estudiantes para las clases, pueden hacer de ellos personas más críticas, establecer relaciones entre lo que ven y cómo viven (Machado, 2002). Por lo tanto, es posible ver qué películas en el salón de clases pueden servir como fuente de análisis y de discusión de temas relacionados también con las matemáticas.

Por otra parte, también puede servir como un enlace entre los aspectos prácticos y teóricos de cierto tema. Por lo tanto se puede utilizar en la sala de clase películas que ponen de relieve diferentes aspectos y temas con objetivos que van más allá del arte o del entretenimiento (Viana, 2010). La pregunta es desentrañar cómo las clases de matemáticas pueden ser favorecidas por este recurso.

Uno se da cuenta de lo que se ha producido y leído hasta ahora (disertaciones y tesis doctorales, artículos publicados en Anales de eventos, libros y revistas) que la película ya se acepta como una herramienta útil para tener éxito en el ámbito escolar. Su uso ya se ha hecho con éxito en la enseñanza de materias como Historia, Biología, Literatura, Medio Ambiente y otras (Coelho, 2010). Como no se encontraron disertaciones y tesis que tienen el cine como una herramienta de enseñanza para el aprendizaje de contenidos matemáticos como objeto de estudio, el tema de nuestra obra es inédito, lo que confirma la necesidad de llevar a cabo nuestra investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alencar, S. E. P. (2007). *O cinema na sala de aula: uma aprendizagem dialógica da disciplina história*. Tesis de maestria no publicada. Faculdade de Educação. Universidade Federal do Ceará. Fortaleza. CE. Brasil

Bergan, R. (2010) *Ismos: para entender o cinema*. São Paulo: Editora Globo.

Carmo, L. (2003). O cinema do feitiço contra o feiticeiro. *OEI – Revista Iberoamericana de Educación* (32). Recuperado de http://www.rieoei.org/rie32a04.htm.en 09/06/2010.

Cipolini, A.(2008). *Não é fita, é fato: tensões entre instrumento e objeto. Um estudo sobre a utilização do cinema na educação.* Tesis de maestria no publicada. Faculdade de Educação da USP. São Paulo.

Coelho, R. F. M.(2010). *Utilização de filmes em sala de aula:* um breve estudo sobre a utilização dessa ferramenta no Instituto de Ciências Exatas Biológicas da UFOP. Monografia de Graduação. Departamento de Matemática. UFOP. Ouro Preto, Brasil.

Coelho, R. M. F., Viana, M. C. V. (2010). A utilização de filmes em sala de aula: um breve estudo no Instituto de Ciências Exatas e Biológicas da UFOP. *Revista da Educação Matemática da UFOP*. v.1, p.89 – 97.

Machado, A. V. (2002). *La utilización de películas históricas comerciales para el desarrollo de la crítica en la enseñanza de la Historia en el nivel medio*. Tesis doctoral no publicada. Instituto Central de Ciencias Pedagógicas. La Habana, Cuba.

Melo, A. C. de M. (2010). *Imagens televisivas e ensino de história: representações sociais e conhecimento histórico*. Tesis doctoral no publicada. Universidade de São Paulo. Brasil.

Oliveira, B. J. (2006). Cinema e imaginário científico. *História, Ciências, Saúde-Manguinhos*, (13).

Pimenta, S. G., (org.) (1997). D*idática e Formação de Professores: percursos e perspectivas no Brasil e em Portugal*. São Paulo: Cortez.

Sadoul, G. (1963). *História do cinema mundial: das origens a nossos dias*. Trad.: Sônia Sales Gomes. São Paulo: Livraria Martins.

Stefani, V. G. de. (2010). O *cinema no processo de ensino e aprendizagem de espanhol como língua estrangeira: uma proposta didático-pedagógica*. Tesis de maestria no publicada. Universidade Federal de São Carlos. Brasil.

Viana, M. C. V., (2010). *O Cinema na Sala de Aula e a Formação de Professores de Matemática*. Mini-curso oferecido aos alunos do Curso de Matemática na UFRRJ. Seropédica- RJ.

Viana, M. C. V.(2011). *A formação de professores vai ao cinema: 51 roteiros de filmes para serem usados na sala de aula*. Ouro Preto: UFOP.

Viana, M. C. V.; Rosa, M; Orey, D. C. (2014). O cinema como uma ferramenta pedagógica na sala de aula: um resgate à diversidade cultural. *Ensino em Revista (UFU. Impresso)*. (21), p.137 -144.

Viana, M. C. V. Teixeira, A., F. (2009). *A História da Matemática vai ao cinema*. En: Actas del VIII Seminário Nacional de História da Matemática. Belém-PA.

Viana**,** M. C. V**.**, Pinto, R. A. (2013). A corrente do bem: um filme pode motivar a aprendizagem de progressões geométricas En Actas del XI Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM, Curitiba, PR. v.1. p.1 – 15.

EXPLORAÇÃO DE LUGARES GEOMÉTRICOS PLANOS COM O SOFTWARE GEOGEBRA

Elisabete Teresinha Guerato, Vera Helena Giusti de Souza
Instituto Federal de São Paulo, Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil)
equerato@globo.com, verahgsouza@gmail.com

Palavras chave: Geometria, GeoGebra, demonstração, ensino e aprendizagem

Key words: GeoGebra, proof, teaching and learning

RESUMO: Projeto de Tese de Doutorado em Educação Matemática, com o objetivo de desenvolver abordagens que favoreçam a elaboração de conjecturas sobre propriedades de alguns Lugares Geométricos Planos e de alavancar a necessidade da elaboração de demonstrações. Questão de pesquisa: “Construções geométricas, exploradas com a geometria dinâmica, favorecem a elaboração de conjecturas sobre propriedades de alguns lugares geométricos planos e a demonstração dessas conjecturas?” Metodologia: aplicar algumas atividades a um grupo de alunos do curso de Licenciatura em Matemática, com o uso do software GeoGebra, para posterior discussão sobre a necessidade de demonstração dessas conjecturas, com papel e lápis. Os protocolos serão analisados com base nas ideias sobre demonstração de De Villiers, Parsysz e Balacheff.

ABSTRACT: PhD Thesis Project in Mathematics Education whose goals are develop approaches that favor the development of conjectures about properties of some two dimensional Locus and leverage the need to do proofs in Mathematics. Research question: "Geometric constructions, explored by Dynamic Geometry, favor the development of conjectures about properties of some two dimensional locus and the need for proofs of these geometric places?". Methodology: apply some activities to a group of Degree Course students of Mathematics using software GeoGebra and later use of paper and pensil to discuss the need for proofs. The protocols will be analyzed based on the ideas about demonstration of De Villiers, Parsysz and Balacheff.

INTRODUÇÃO

Após a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática, em 2012, com o trabalho "Tratamento Vetorial da Geometria Analítica Plana", desenvolvida com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 1993, 1995, 2000, 2003, 2006, 2011), surgiu a possibilidade de um trabalho com as disciplinas Geometria Euclidiana Plana e Desenho Geométrico, com alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Na primeira disciplina, num ambiente papel e lápis, com régua e compasso, demonstraram-se as propriedades que podiam ser ¨vistas¨ na disciplina Desenho Geométrico, com o *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra. Notou-se, por parte dos alunos, uma grande dificuldade na elaboração de demonstrações em geral, principalmente em Geometria. Estas dificuldades geraram questionamentos que deram origem a este projeto de pesquisa que, para ser iniciado, foi alimentado pelas ideias de pesquisadores que têm tratado do tema demonstração em matemática.

De Villiers (2001), nos seus estudos, verificou que construções realizadas com um *software* de Geometria Dinâmica poderiam alavancar a demonstração de propriedades geométricas, a partir de experiências realizadas com a dinamicidade do *software*. Analisando-se as pesquisas de De Villiers, e também as de Balacheff (1987) e de Parzcysz (2006), que têm foco na aprendizagem da Geometria, delimitou-se o tema desta pesquisa, que tem por objetivo verificar se a exploração de alguns Lugares Geométricos Planos com o auxílio do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra pode auxiliar na aprendizagem das demonstrações em Geometria, num curso de formação de professores de Matemática e pretende responder às questões: 1. Construções geométricas, exploradas com um *software* de geometria dinâmica, favorecem a elaboração de conjecturas sobre as propriedades de alguns Lugares Geométricos Planos? 2. Tais conjecturas, exploradas com um *software* de geometria dinâmica, provocam a necessidade das demonstrações? 3. Essas explorações, com o uso de um *software* de Geometria Dinâmica, favorecem as demonstrações?

Ao se delimitar o tema, optou-se pelo estudo de alguns Lugares Geométricos Planos, em duas situações complementares: primeiro, pelo uso das construções com o software de Geometria Dinâmica GeoGebra, para a emergência de conjecturas; em segundo lugar, pela discussão teórica, para se evidenciar a necessidade de demonstração em Matemática, principalmente em estudantes que serão futuros professores de Matemática da Educação Básica.

As etapas desta pesquisa serão: verificar nos documentos oficiais quais as propostas indicadas para o estudo da Geometria e das demonstrações; estudar as teorias dos pesquisadores De Villiers, Balacheff e Parzysz, bem como analisar trabalhos da área de Educação Matemática que tratam do assunto demonstração com as teorias elencadas; analisar as ementas das disciplinas Geometria Plana e Desenho Geométrico da instituição de ensino onde a pesquisa será realizada, bem como os livros didáticos indicados nestas ementas, para verificar como o assunto demonstrações é abordado nestes livros e a ocorrência ou não do tema Lugares Geométricos Planos; verificar quais são as possibilidades de utilizar o *software* GeoGebra como instrumento para a integração entre essas duas disciplinas; elaborar uma trajetória didática para o ensino de alguns Lugares Geométricos Planos, a partir do uso de construções geométricas com o *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra; desenvolver a trajetória didática com um grupo de estudantes do curso de Licenciatura em Matemática e analisar os resultados obtidos.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Michael de Villers, No seu livro "Repensando a prova com Sketchpad", De Villiers trata da importância da demonstração no conhecimento matemático e é sobre esse aspecto da sua obra que trataremos a seguir.

Segundo De Villiers, um dos maiores problemas enfrentados pelo professor é que seus alunos, em geral, costumam questionar por que demonstrar nas aulas de matemática, principalmente quando estão estudando geometria e o resultado do teorema a ser demonstrado parece ao aluno óbvio ou facilmente percebido empiricamente.

Em razão disso, De Villiers se propõe a responder à seguinte pergunta, em seu texto: “Que funções tem a demonstração na própria Matemática que podem ser utilizadas na sala de aula para tornar a demonstração mais significativa para os alunos?”. Para responder a essa pergunta, analisa as diversas funções da demonstração em Matemática e propõe que, segundo ele, não pode ser encarada apenas como uma forma de convencer os céticos de que algum teorema é verdadeiro. O rigor dedutivo, segundo outros autores que também estudam a demonstração em Matemática, pode sofrer mudanças e tornar-se mais sofisticado com a passagem do tempo. Eles dizem que para que haja progresso no rigor, deve-se duvidar do que foi utilizado no momento em que foi realizada a demonstração.

Uma forma de se verificar e se convencer de que uma conjectura é verdadeira, sem demonstrá-la, é por meio do uso de *softwares* de geometria dinâmica, tais como o *Sketchpad*, o *Cabri Geométré*, o *Mathematica* ou ainda o *GeoGebra*. Estes *softwares* servem para o convencimento sobre a validade da proposição e muitas vezes mostra o caminho a ser seguido para chegar à demonstração formal das conjecturas propostas. De Villiers propõe outras funções para a demonstração que são: verificação, explicação, sistematização, descoberta, comunicação e desafio intelectual.

A demonstração como processo de verificação/convencimento

Em geral, os professores de matemática acreditam que a demonstração é a única maneira de convencer que uma conjectura é verdadeira, porém se alguém não estivesse convicto de que um teorema é válido que motivos o levariam a tentar demonstrá-lo? Na maior parte das vezes, a tentativa da demonstração é iniciada apenas após se ter convicção de que o resultado é verdadeiro. Uma maneira de se ter esta convicção é verificando a validade do teorema em vários casos particulares.

Existem casos em que existe uma convicção tão grande da validade de uma conjectura que ela é aceita como verdadeira mesmo sem que ninguém tenha conseguido demonstrá-la, como é o caso da famosa Hipótese de Riemann, Davis e Hersh sobre os números primos que se tem certeza da sua validade embora ninguém ainda tenha conseguido prová-la formalmente.

Dessa forma, De Villiers recomenda que se façam testes empíricos antes de se começar uma demonstração formal, pois esses podem auxiliar na demonstração e diminuir a chance de erros e inconsistências.

Ao se aplicar esta recomendação nas aulas de Geometria da Educação Básica os testes podem e devem ser feitos usando-se o computador por meio de *softwares* de Geometria Dinâmica, pois eles possibilitam a verificação da propriedade em muitos casos particulares o que faz com que o aluno

perceba que existe grande possibilidade que a propriedade seja válida sempre e que sua validade possa ser demonstrada.

A demonstração como processo de explicação

Embora muitas vezes possamos explorar, por meio de métodos empíricos, experimentais ou numéricos determinada conjectura, apenas a demonstração poderá explicar porque ela é verdadeira. Nesse caso, a demonstração não apenas verificará a validade da propriedade elencada, mas explicará porque isso acontece.

Na Educação Básica esta função é muito utilizada pelo professor ao apresentar uma teoria para seus alunos. Para o estudante a teoria ganha mais credibilidade quando ele vê o professor demonstrando a sua validade, mesmo que esta demonstração não seja cobrada do estudante. Quando, mais adiante o aluno tiver a necessidade de efetuar uma demonstração sozinho, esta demonstração realizada pelo seu professor servirá de exemplo e motivação para tanto.

A demonstração como processo de descoberta

A maioria das descobertas em Geometria parte de métodos intuitivos ou quase empíricos; no entanto, não são poucos os resultados que nunca apareceriam de forma intuitiva ou empírica, pois resultam de processos puramente dedutivos. É improvável que, por exemplo, as geometrias não euclidianas pudessem surgir de maneira empírica ou intuitiva.

O matemático profissional diz que a demonstração não é um processo para se mostrar que resultados descobertos intuitivamente são verdadeiros, mas também uma forma de explorar, analisar, descobrir e inventar novos resultados.

Ao tentar verificar que um resultado é verdadeiro, muitos matemáticos, ao usar suas tentativas, chegam a outros resultados inesperados ou ainda a generalizações não intuídas anteriormente, que mostram que a demonstração também pode ter a função da descoberta.

Na Educação Básica esta função da demonstração pode ser explorada ao se jogar um problema para que o aluno explore usando o *software* de Geometria Dinâmica e elabore conjecturas. Assim ele vai descobrir propriedades dos objetos estudados e perceber caminhos que levem à demonstração.

A demonstração como processo de sistematização

Por mais experimentos empíricos ou intuitivos que façamos, não conseguiremos nunca checar todas as possibilidades para podermos afirmar que uma conjectura é verdadeira. Apenas a demonstração nos permitirá concluir que ela é verdadeira sem sombra de dúvida e essa conclusão surge a partir da sistematização.

De Villiers apresenta algumas das funções mais importantes de uma sistematização dedutiva. São elas:

Ajuda a identificar inconsistências, argumentos circulares, e hipóteses escondidas ou não explicitamente declaradas;

Unifica e simplifica as teorias matemáticas ao integrar e ligar entre si afirmações, teoremas e conceitos não relacionados, conduzindo assim a uma apresentação econômica de resultados;

Fornece uma perspectiva global ou vista de conjunto de um tópico, ao mostrar a estrutura axiomática subjacente do tópico a partir da qual todas as outras propriedades podem ser derivadas;

Constitui uma ajuda para as aplicações tanto dentro como fora da matemática, pois torna possível verificar a possibilidade de aplicação de toda uma estrutura complexa ou teoria através de uma avaliação de aplicabilidade dos seus axiomas e definições;

Conduz muitas vezes a sistemas dedutivos alternativos que fornecem novas perspectivas e/ou são mais econômicos, elegantes e poderosos do que os existentes.

Embora notemos elementos de verificação nessa proposta, o principal objetivo nesse caso não é o de verificação, mas sim de organizar as afirmações que estão isoladas numa ordem coerente e unificada. A explicação também está presente nesse contexto, mas nesse caso o objetivo não é uma explicação local, mas sim uma explicação geral do fenômeno.

Na Educação Básica esta função está presente quando o aluno organiza uma demonstração. Ele tem que organizar os passos da demonstração tomando o cuidado para utilizar apenas dados que estão na hipótese do teorema a ser demonstrado além de organizar o passo a passo da demonstração de modo que esta fique coerente e provem sem sombra de dúvidas que a tese é válida.

A demonstração como meio de comunicação

A interação entre matemáticos se faz por meio das suas descobertas em Matemática e essas descobertas são organizadas na forma de demonstrações de teoremas. Ao se comunicar entre si, os matemáticos observam, julgam, identificam falhas e inconsistências nos teoremas demonstrados e isso é uma forma de comunicação. Ao comunicar suas descobertas, por meio de demonstrações aos seus pares, os matemáticos têm como julgar seu trabalho, verificar se há inconsistências em suas conclusões ou até ter acesso a contraexemplos que os levem a pensar mais no assunto e chegar a novas conclusões a respeito de suas descobertas.

Esta função da demonstração é observada na Educação Básica quando o aluno analisa uma demonstração realizada por um matemático e tenta entendê-la mesmo que seja mais complexa do que ele seria capaz de fazer. Ao observar e analisar estas demonstrações o aluno poderá ser capaz de mais adiante realizar estas ou outras demonstrações com a mesma complexidade.

A demonstração como desafio intelectual

Para os matemáticos, a demonstração é um desafio onde ele mostra a sua competência em fazer matemática. Demonstrar um teorema para um matemático equivale a montar um quebra cabeças para um leigo ou ainda a escalar uma montanha ou completar uma maratona para um atleta. Por mais que essa montanha já tenha sido escalada por outros, o desafio de completar essa jornada traz uma satisfação pessoal ao atleta, semelhante à satisfação que um matemático tem ao demonstrar um teorema, mesmo que este já tenha sido demonstrado por outros matemáticos anteriormente.

Para o aluno da Educação Básica esta função está presente quando ele começa a realizar demonstrações. Cada demonstração que realiza é um desafio que ele vence, por mais simples que seja a demonstração realizada e é ainda um incentivo a continuar demonstrando outros teoremas propostos.

Essa lista de funções da demonstração não deve ser julgada como completa e elas não são únicas em cada situação, pois podemos encontrar uma função prevalecendo em detrimento das outras ou até verificar que uma ou mais funções não podem ser consideradas. O que temos é que existem diversas funções da demonstração, não só a de verificação de resultados.

Ensino da demonstração com o GeoGebra

De Villiers usou, em suas experiências, o *software* de geometria dinâmica Sketchpad, para ensinar demonstração aos alunos. Para tanto, colocou-os para investigar com cuidado uma conjectura geométrica com o *software,* para que tivessem convicção quanto à validade da mesma. Uma vez convictos da validade, os alunos passaram a ter curiosidade de saber por que o resultado é verdadeiro. Nessa hora, o professor desafia o aluno a tentar explicar o porquê da veracidade do resultado e é aí que o interesse em demonstrar o teorema se manifesta. Nesse momento, a função da explicação está sendo usada na demonstração.

Outro aspecto que ele explorou foi a função da descoberta, seguida da função da comunicação. A função da verificação ficou reservada para as situações onde o aluno de alguma forma tenha dúvida quanto aos resultados encontrados. Alguns alunos não sentirão a demonstração como desafio intelectual, mas será interessante que percebam que para outros alunos esse desafio existe. A função da sistematização deve ser deixada para o momento em que o aluno já tem alguma experiência com demonstrações, devendo ser evitada num curso introdutório.

Enfim, De Villiers sugere uma ordem para que se explore as funções da demonstração que pode ser retomada em espiral. É ela: explicação → descoberta → verificação → desafio intelectual → sistematização.

Inspirados nessas experiências de De Villiers, colocamos como objetivo de nossa pesquisa verificar se a exploração de alguns Lugares Geométricos Planos com o auxílio do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra pode auxiliar na aprendizagem das demonstrações em Geometria, num curso de formação de professores de Matemática. Para atingir este objetivo vamos realizar uma experiência com os alunos, com o *software* de geometria dinâmica GeoGebra, de modo que esses alunos elaborem conjecturas a partir de observações feitas nas construções com o software e que estas conjecturas propiciem a elaboração de demonstrações formais. A escolha do *software* GeoGebra se deve ao fato dele ser semelhante ao Sketchpad, usado por De Villiers, porém é um *software* livre, muito usado nas escolas brasileiras e que professores dominam o seu uso cada vez mais, devido, principalmente, à facilidade que há ao seu acesso.

Nicolas Balacheff

Nicolas Balacheff (Balacheff, 1987) diferencia explicação, prova e demonstração. Para ele, **explicação** é um discurso que torna inteligível um tipo de verdade, exposto por um locutor, de uma proposição ou de um resultado. Os argumentos podem ser discutidos, refutados ou aceitos.

Um exemplo de explicação é quando o professor, na Educação Básica, apresenta um novo conteúdo aos alunos e demonstra a validade das propriedades e das fórmulas usadas no desenrolar deste conteúdo. Na Educação Básica, o rigor na demonstração pode não ser entendido pelo aluno e isso acaba levando o professor a usar explicações no lugar de demonstrações formais.

Um exemplo de explicação é quando o professor, na Educação Básica, apresenta um novo conteúdo a seus alunos e demonstra a validade das propriedades e as fórmulas usadas no desenrolar deste conteúdo. Na Educação Básica, o rigor na demonstração pode não ser entendido pelo aluno e isso acaba levando o professor a usar explicações no lugar de demonstrações formais.

A **prova**, para Balacheff, é uma explicação aceita por uma dada comunidade, em um dado momento. Esta decisão pode ser objeto de um debate, no qual a exigência é determinar um sistema de validação comum aos interlocutores. No interior da comunidade matemática, só podem ser aceitas por prova explicações que adotam uma forma particular.

Balacheff (1987) define como **demonstração** provas que são formadas por uma série de enunciados organizados, segundo regras determinadas: um enunciado é conhecido como sendo verdadeiro, ou é deduzido de outros que o precedem com a ajuda de uma regra de dedução, tomada num conjunto de regras bem definidas.

A demonstração, com esta formalidade, dificilmente é utilizada na Educação Básica, pois o aluno poderá não entender a prova ou a demonstração e apenas decorar as demonstrações, ao invés de entendê-las e, eventualmente, desenvolvê-las.

Balacheff (1987) reserva a palavra **raciocínio** para designar a atividade intelectual, a maior parte do tempo não explícita, de organização de informações para, a partir de dados, produzir novas informações. Estas distinções de vocabulário evidenciam as dimensões sociais da demonstração, que resultam de um processo particular de prova.

Ele se propõe a mostrar que o estudo dos processos de prova são importantes tanto para os que realizam as demonstrações como para os que as estudam. Desta forma, a proposta é encarar a demonstração numa perspectiva de aprendizagem.

Bernard Parzysz

Outro teórico que estuda as demonstrações é Bernard Parzysz, cujas ideias surgiram a partir dos estudos de Van Hiele. Ele diferencia a “geometria de observação” da “geometria de demonstração” e diz que o objetivo dos professores no ensino da Geometria é fazer com que os alunos passem da “geometria de observação” para a “geometria de demonstração”. Segundo ele, para resolver um exercício de geometria se usa um ir e vir, muitas vezes conflituoso e implícito, entre estes dois “tipos” de geometria.

A partir desses dois tipos de geometria, Parzysz propõe quatro enfoques diferentes para a abordagem da geometria, que nomeia de G0 (concreta), G1 (espaço-gráfico), G2 (proto-axiomática) e G3 (axiomática).

Os níveis G0 e G1 são dedicados à “geometria concreta”, nos quais os objetos estudados são concretos e os níveis G2 e G3, à “geometria teórica”, nos quais os objetos estudados são conceituais.

No **nível G0**, a geometria é concreta e não pode ser considerada ainda uma geometria, pois é apoiada pela realidade e pelo concreto. Neste nível, o aluno tira conclusões a partir do que observa nos objetos concretos que se assemelham aos objetos geométricos.

Este nível é atingido pela criança no início da alfabetização, quando ainda não domina integralmente a escrita e suas observações ainda são focadas no concreto. Consideramos que o aluno está neste nível na primeira etapa do Ensino Fundamental.

No **nível G1,** a geometria é *espaço-gráfica* e é não-axiomática, apoiada em situações concretas para construir os objetos geométricos. Neste nível, os objetos não são mais concretos, mas são representações, em papel ou na tela do computador, dos objetos que observa no concreto.

Consideramos que o aluno atinge este nível no final da primeira etapa e no início da segunda etapa do Ensino Fundamental, quando começa a conhecer mais elementos da Matemática, tais como algumas operações que passa a realizar com a álgebra e algumas propriedades geométricas que consegue identificar visualmente como, por exemplo, classificar um triângulo pelas medidas de seus lados ou pelas medidas de seus ângulos.

Parzysz classifica o **nível G2** como sendo o nível chave, pois nele encontramos elementos do concreto e elementos do teórico. Neste nível, o aluno já reconhece propriedades dos objetos geométricos e é capaz de justificar teoricamente a sua validade sem, no entanto, apoiar-se num sistema dedutivo e axiomático.

A nosso ver, o aluno atinge o nível G2 ao final do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, quando começa a ter mais conhecimentos matemáticos, como, por exemplo, relações entre dois triângulos usando a congruência ou a semelhança, ou ainda quando consegue relacionar as medidas dos lados com as medidas dos ângulos de um triângulo, usando para isso conceitos da trigonometria.

No **nível G3**, a Geometria é Axiomática e é o nível no qual os alunos estudam a geometria utilizando os diversos axiomas, inclusive comparando-os. Sem o uso de um sistema axiomático, não podemos considerar que estamos neste nível.

Podemos considerar que o nível G3 somente é atingido quando o aluno tiver conhecimentos suficientes para fazer um tratamento axiomático da geometria e isso só ocorre, a nosso ver, quando estiver num curso superior da área de exatas e for estudar disciplinas relacionadas à Geometria.

DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

Esta pesquisa encontra-se em andamento e, das etapas da pesquisa que elencamos ao final da introdução, já desenvolvemos: os documentos oficiais e as ementas do curso foram analisados; os livros didáticos que estão nestas ementas encontram-se em processo de análise, para verificar como as demonstrações em Geometria encontram-se nestes livros.

Algumas atividades foram elaboradas e aplicadas a um grupo de alunos. Estas atividades geraram um materialfq escrito e gravado que está sendo analisado à luz das teorias indicadas. Alguns alunos que se encontram no final da Licenciatura em Matemática participaram da atividade como observadores e um deles foi entrevistado, a fim de se delimitar quais rumos serão seguidos de agora em diante.

Como esta pesquisa faz parte de um curso de doutoramento em Educação Matemática, o exame de qualificação foi marcado e pretende-se, a partir das sugestões dadas pelos membros da banca, delimitar os rumos que a pesquisa deverá seguir para chegar à sua conclusão em mais um ano

aproximadamente. A experiência de levar este trabalho ao congresso do RELME foi enriquecedora, uma vez que as pessoas presentes no dia e local da apresentação puderam dar suas contribuições, que serão muito úteis para a finalização desta tese.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Balacheff, N. (1987) Processus de Preuve et Situations de Validation. Educational Studies in Mathematics 18, 147-176. DOI: 10.1007/BF00314724

De Villiers, M.D. (2001) Papel e Funções da Demonstração com o Sketchpad. *Educação e Matemática* 62, 31-36.

De Villiers, M.D. (2002) Para uma Compreensão dos Diferentes Papéis da Demonstração em Geometria Dinâmica. *Em atas do Prof MAT*. Viseu: Associação Portuguesa de Matemática.

De Villiers, M.D. (2002) *Algumas Biografias de Participantes do ProfMat*. Recuperado em 15/09/2015 de http://www.apm.pt/profmat2002/biografias.html.

Guerato, E.T. (2012) *Tratamento vetorial da Geometria Analítica Plana*. Dissertação não publicada de Mestrado Universidade Bandeirante de São Paulo. São Paulo. Brasil.

Parzcysz, B. (2006) La Géométrie dans l'Enseignement Secondaire et em Formation de Professeurs des Écoles: de Quois s'Agit-il? *Quaderni di Ricerca in Didattica.* 17, 128-151.

ACTIVIDADES DIDÁCTICAS PARA PROFESORES DE MATEMÁTICAS, USANDO TECNOLOGÍA

José Luis Soto Munguía, Ana Guadalupe del Castillo Bojórquez
Universidad de Sonora, México
jlsoto@mat.uson.mx, acastillo@mat.uson.mx

Palabras clave: GeoGebra, espacios de trabajo geométrico, geometría dinámica

Key words: GeoGebra, geometrical working spaces, dynamic geometry

RESUMEN: Se reporta aquí el diseño de una secuencia de actividades didácticas sobre la noción de proporcionalidad, dirigida a profesores de matemáticas de secundaria en servicio. Para el diseño se ha usado la metodología ACODESA y algunos principios de la Educación Matemática Realista, pero teóricamente está enmarcado en la Teoría de Espacios de Trabajo Geométrico. La secuencia es compatible con la reforma educativa en curso en nuestro país y utiliza GeoGebra para aproximar áreas y distancias reales sobre mapas tomados de https://maps.google.com. Se reportan algunos resultados preliminares de la aplicación de la secuencia a un grupo de futuros profesores de matemáticas.

ABSTRACT: It is reported here the design of a didactic sequence for the study of the notion of proportionality, aimed to secondary mathematics teachers in service. For the sequence design it has been used ACODESA methodology and some principles from Realistic Mathematics Education, but it is mainly theoretically framed on Geometrical Working Spaces. The sequence is consistent with the current educational reform in our country and uses GeoGebra to approximate actual areas and distances on maps taken from https://maps.google.com. Some preliminary results of sequence application in a group of future mathematics teachers are reported.

INTRODUCCIÓN

En México, la educación básica está integrada por tres niveles educativos: el preescolar (3 a 5 años), la escuela primaria (6 a 11 años) y la secundaria (12 a 15 años). Entre los años 2004 y 2011 se promovió la reforma de la educación básica, que en el caso de las matemáticas de la escuela secundaria, en donde se enmarca el presente trabajo, ha culminado con un nuevo plan de estudios, nuevos programas para los cursos y nuevos enfoques de enseñanza (SEP, 2011).

Como en otras experiencias, el gran reto de la reforma es la modificación de las prácticas docentes, que en este caso pareciera mayor si se toma en cuenta la escasa o nula participación que los profesores han tenido en su formulación y en sus orientaciones. A cuatro años de la aprobación formal de los cambios curriculares, no se observan modificaciones sustanciales en estas prácticas. Las causas que llevan a la resistencia del profesor para cambiar sus prácticas, son muy diversas y hacer un análisis de ellas no está entre los propósitos del presente trabajo, que está centrado solamente en el diseño de actividades didácticas, tarea que el profesor desarrollará "diseñando situaciones de aprendizaje centradas en el estudiante; generando situaciones motivantes y significativas para los alumnos" (SEP, 2011, p. 64).

Una de nuestras preocupaciones es el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) como recursos didácticos, que son ampliamente recomendadas en el documento que institucionaliza la reforma para la matemática de secundaria (SEP, 2011), pero se elude lo que significa el uso concreto de las TIC en la clase de matemáticas. En la Guía para el Maestro, por ejemplo, hay un capítulo dedicado al *desarrollo de habilidades digitales* y se ofrecen cinco ejemplos de situaciones de aprendizaje, pero en ninguno de ellos están incorporadas las TIC. A lo más que se llega es a recomendar en uno de ellos "incluir actividades con los materiales educativos digitales que ofrece HDT, para ello se sugiere identificarlos en los portales federal y de aula Explora" (SEP, 2011, p. 104). HDT son las siglas del programa federal llamado Habilidades Digitales para Todos, cuya aplicación ha enfrentado dificultades de diversos tipos; los mismos responsables del programa admitían en el año 2012, que: "Se pudo constatar una configuración de interpretaciones las cuales se han basado en la desconfianza y la incredulidad hacia el Programa HDT y, también, hacia las instancias y personas que lo impulsan." (SEP, 2012, p. 108).

Podemos decir en síntesis que, a pesar de la insistencia institucional sobre la incorporación de nuevas tecnologías al salón de clases; el pizarrón, el lápiz y papel siguen siendo las herramientas más usadas en el trabajo cotidiano de las aulas de matemáticas. Mientras los profesores no cuenten con propuestas de tecnologías concretas, para usar en temáticas específicas, la tecnología seguirá posponiendo su arribo a las aulas mexicanas.

PROPÓSITOS Y REFERENCIAS TEÓRICAS

En el presente trabajo reportamos una secuencia de actividades didácticas acorde con los lineamientos de la RIEB, o por lo menos con algunas de sus recomendaciones importantes, a saber:

a) La enseñanza debe centrarse en el estudiante, lo cual obliga a la inclusión en el diseño de formas específicas de gestión en el aula, que den cuenta de lo que significa en la práctica este enfoque. (véase SEP, 2011, p. 64).

b) La reforma plantea que los alumnos debieran ser "capaces de resolver situaciones problemáticas que les plantea su vida y su entorno" (SEP, 2011, p. 62). Esto exige que los contextos de las actividades resulten convincentes para los estudiantes, si queremos que se despierte en ellos el interés por resolver la situación problemática.

c) El diseño de actividades debe aprovechar la potencia de las TIC, no solamente para enriquecer los contextos, sino además porque resulta una herramienta valiosa para resolver los problemas y reflexionar sobre los conceptos matemáticos (véase SEP, 2011, p. 67)

Para el diseño se ha considerado como referencia teórica, la noción de Espacio de Trabajo Geométrico (ETG), definida por Kuzniak (2013) como "[un espacio] organizado para asegurar el trabajo de personas resolviendo problemas geométricos". La actividad a desarrollar en estos espacios, puede concebirse en dos dimensiones: la epistemológica y la cognitiva. En la primera, se contemplan tres características de la actividad geométrica, a saber:

a) Un espacio real y local, integrado por objetos concretos.

b) Un conjunto de artefactos tales como instrumentos de dibujo o software.

c) Un marco teórico de referencia basado en definiciones y propiedades.

En la segunda se incluyen tres procesos cognitivos relacionados con la actividad geométrica:

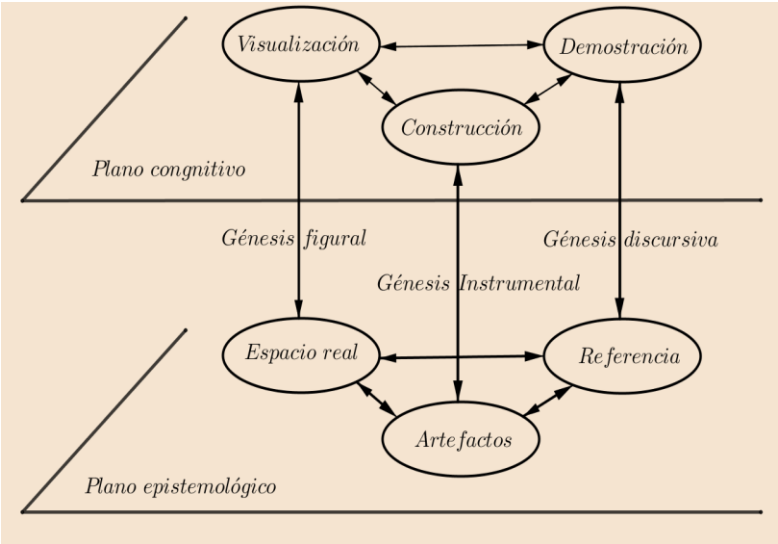
a) El proceso de visualización, conectado a la representación de los objetos del espacio real, mediante la génesis figural.

b) El proceso de construcción, que involucra el uso de artefactos (regla, compás, software, etc.) a través de la génesis instrumental.

c) El proceso deductivo que conduce a la demostración y que está basado en el marco teórico de referencia.

En la Figura 1, se representan con planos las dimensiones cognitiva y epistemológica y los elementos que integran cada uno de ellos, así como las relaciones que guardan entre sí.

Figura 1.



Para entender, clarificar y organizar los resultados de la actividad geométrica, Kuzniak toma de Kuhn (1971) la noción de *paradigma*, entendida como el conjunto de creencias, concepciones, reglas, etc., que una comunidad científica comparte.

Aunque Kuzniak se refiere a tres paradigmas geométricos, describiremos aquí solamente el primero de ellos, porque es el de mayor interés en este trabajo.

El paradigma de la Geometría Natural (Geometría I)

En este paradigma predominan los objetos reales y sus características, que pudieran no distinguirse bien de los objetos geométricos. Sus fuentes de validación son estos objetos reales y los argumentos usados para apoyar una proposición podrían ser experimentales, aunque esto no excluye los argumentos deductivos. Aquí lo más importante es presentar argumentos convincentes, aunque no estén basados en sistema axiomático alguno. Es válido entonces usar las mediciones con instrumentos como reglas graduadas o transportadores, las características observadas en los trazos con regla y compás, los resultados obtenidos cortando o doblando dibujos sobre papel. Se trata en síntesis de una geometría cuya naturaleza es empírica y tiene su origen histórico en la resolución de problemas prácticos y en los métodos desarrollados para resolverlos.

Si bien es cierto que la actividad matemática misma no forma parte del ETG, también es cierto que el diseño de estas actividades determinan las características del ETG, porque el diseño tiene que hacer referencia a los objetos geométricos, los artefactos, las referencias teóricas, las maneras como se usarán todos estos elementos y el establecimiento “a priori” de cómo se producirán las diferentes génesis. Si un ETG se concibe como un espacio de interacción social en el que los participantes trabajan individualmente o en grupo, estas interacciones deberán sistematizarse en el diseño, pero la teoría de los ETG no es tan específica, de aquí la necesidad de contar con una metodología para el diseño. En el presente trabajo, hemos tomado la metodología ACODESA (Hitt, 2007) como base para el diseño y la hemos complementado con algunos de los principios generales de la Matemática Realista (RME por sus siglas en Inglés), específicamente los tres siguientes:

El *Principio de Realidad*, que se refiere tanto al desarrollo de las habilidades para aplicar la matemática en la resolución de problemas de la vida real, como al uso de situaciones problema como punto de partida en la enseñanza de la matemática. (véase Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, 2014, p. 523).

El *Principio de Interactividad*, que identifica el aprendizaje de la matemática como una actividad social, en la que deben favorecerse las discusiones grupales y en pequeños grupos, para que los estudiantes tengan oportunidades de compartir sus estrategias e invenciones con sus compañeros (véase Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, 2014, p. 523).

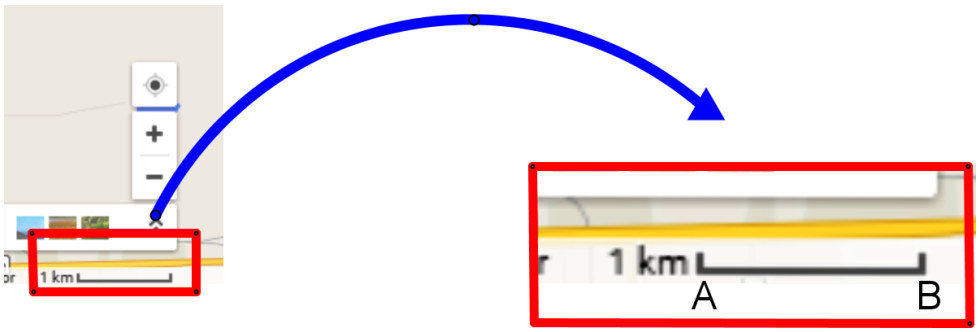
El *Principio de Reinvención Guiada*. De acuerdo con este principio, si los estudiantes pueden matematizar su propia actividad, entonces pueden reinventar sus resultados matemáticos bajo la guía del profesor o del material instruccional diseñado para ello. Por lo tanto, los estudiantes deben experimentar el aprendizaje de la matemática como un proceso similar al proceso que permitió a los matemáticos inventar sus resultados (Bakker, 2004, pp. 6-7).

SECUENCIA DE ACTIVIDADES DESARROLLADA

Se describe aquí una secuencia de actividades dirigidas a profesores de secundaria en servicio, que ha sido diseñada conforme las consideraciones teóricas y metodológicas mencionadas en el apartado anterior. El propósito es el estudio de la noción de proporcionalidad en este nivel escolar. En lo que se refiere al uso de las TIC, el diseño combina Internet con el software GeoGebra. Las situaciones problema usadas como punto de partida, están dadas en el contexto de la aproximación de distancias y áreas sobre los mapas interactivos en línea proporcionados por el sitio https://maps.google.com. La secuencia está pensada para que los profesores jueguen el rol de aprendices durante su desarrollo, para posteriormente entrar al análisis didáctico cambiando su rol al de profesores. Las actividades dedicadas al análisis didáctico no están reportadas aquí. Se ofrece a continuación una breve descripción de las actividades que integran la secuencia.

Actividad 1. Esta es una actividad de familiarización con el contexto, se trata de que los profesores discutan por equipo, lo que significa la referencia que muestran los mapas de Google en la esquina inferior derecha. Esta referencia es un segmento denominado en las actividades como el segmento AB (ver Figura 2).

Figura 2.



La actividad se realiza con lápiz, papel y regla graduada. Se trata de medir en centímetros el segmento AB y calcular el número por el que debe multiplicarse la medida de AB, para obtener la medida real, representada por este segmento.

Actividad 2. Se proponen aquí las tareas de estimar el área y el perímetro de una isla (Isla del Tiburón) usando el mapa impreso de la isla, un cordel de algodón y una cuadrícula trazada sobre una mica transparente. La actividad también se desarrolla por equipos y al final se comparan los diferentes métodos usados, los resultados obtenidos y se somete a la discusión de todo el grupo por qué unos métodos conducen a mejores estimaciones que otros.

Actividad 3. Se aprovecha aquí la capacidad de GeoGebra para "insertar" imágenes en la vista gráfica, construyendo luego figuras en esta vista, que puedan ser medidas directamente con el software. Se trata de "montar" las figuras apropiadas usando las herramientas directas de GeoGebra, para aproximar áreas de superficies y longitudes de trayectorias. La actividad se realiza por equipos y luego se comparan los resultados y la eficiencia de los métodos usados.

Actividad 4. Con esta actividad se cierra la secuencia; el propósito aquí es institucionalizar un método general que permita calcular en un mapa las distancias reales e identificar los conceptos matemáticos presentes en él. Se pide a los profesores que describan la manera como aproximarían una distancia *b* sobre la superficie geográfica, si el segmento AB tiene una medida *a* sobre el plano. Las descripciones serán contrastadas y refinadas en el equipo, para comparar finalmente las producciones de cada equipo, en una discusión grupal.

CONCLUSIONES

La noción de proporcionalidad está presente en toda la currícula matemática de la escuela secundaria en México y la secuencia de actividades presentada aquí no pretende agotar los diversos ángulos con los que se aborda su estudio. Desde el punto de vista de la teoría de los ETG, es claro las actividades están planteadas todas en el Paradigma de la Geometría 1, lo cual es una limitación con respecto a la profundidad con la que la noción se está abordando. A pesar de que el diseño podría incorporar el uso de las TIC desde la primera actividad, hemos atendido la recomendación de ACODESA para incluir el uso de materiales manipulables en las primeras actividades, principalmente por el tipo de representaciones que pueden generarse en este ambiente y por el contraste que puede hacerse posteriormente con el uso de las TIC.

La metodología ACODESA ha respondido bien a las características que hemos propuesto para las actividades diseñadas, principalmente en lo que se refiere a la sistematización de las interacciones en el aula y a los propósitos que establece para estas interacciones, mientras que los principios que hemos tomado de la RME han resultado un buen complemento metodológico para mantener las actividades dentro de los márgenes establecidos en la reforma que está en curso en nuestro país. En general la combinación de estas herramientas metodológicas nos han permitido avanzar en la construcción de un ETG, cuya teoría no prescribe el uso de metodologías específicas de diseño de actividades.

Aunque la secuencia completa de actividades no ha sido experimentada, las primeras tres han sido propuestas a un grupo de futuros profesores de matemáticas y los resultados han resultado alentadores. Al respecto del contexto en el que está planteada la situación problema, tomada como base para el diseño, les ha parecido de interés y suficientemente convincente para introducir el estudio de proporcionalidad. Las actividades 2 y 3 han generado diferentes métodos de aproximación y la comparación de estos métodos ha resultado enriquecedora. Las aproximaciones logradas con ayuda de GeoGebra han sido bastante aceptables; en el caso específico del área de la Isla del Tiburón, en la que ha sido posible comparar la aproximación al área con el dato oficial, el error cometido no rebasa el 2%.

Diremos por último que el ETG propuesto está ubicado en las génesis figural e instrumental, dentro del esquema de la Figura 1 y aunque tenemos elementos sobre cómo se desarrollan estas génesis al aplicar la secuencia de actividades, esta es una parte del estudio que requiere un análisis más cuidadoso, tanto con respecto a las diversas representaciones que se generan, como con respecto a las manifestaciones concretas en las que se manifiesta la génesis instrumental.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools*. Utrecht: Freudenthal Institute.

Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. En M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éditeurs), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Éditorial Hermes.

Kuhn, T. (1971). *La estructura de las revoluciones científicas*. México: FCE.

Kuzniak, A. y Vivier, L. (2009). A french look on the greek Geometrical Working Space at secundary school level. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.) *Proceeding of CERME 6* (pp. 686-695), Lyon, France: Institut National de Recherche Pédagogique.

Kuzniak, A. (2013). Teaching and learning Geometry and beyond. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. Mariotti (Eds). *Proceeding of CERME 8* (pp. 33-49). Ankara, Turkey: Middle East Technical University.

SEP. (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria*. Matemáticas. México: SEP.

SEP. (2012). Programa: Habilidades Digitales para Todos, *Libro Blanco 2009 -2012*. México: Sep. Disponible en web: http://sep.gob.mx/work/models/sep1/Resource/2959/5/images/LB%20HDT.pdf (Acceso 13-08-2015).

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 521-525). Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer.

USO DE TÉCNICAS DE MINERÍA DE DATOS EN LA ENSEÑANZA DEL ALGEBRA LINEAL

Lenniet Coello Blanco, Olga Lidia Perez Gonzalez, Ángela Mercedes Martín Sánchez
Universidad de Camagüey (Cuba), Universidad Autónoma de Santo Domingo (República Dominicana)
lenniet.coello@reduc.edu.cu

Palabras clave: algebra lineal, minería de datos, sistema tutorial inteligente

Key words: lineal algebra, data mining, intelligent tutorial system

RESUMEN: La presente investigación surge de la necesidad de dar solución a la baja promoción de los estudiantes de primer año de las carreras de ciencias técnicas de la Universidad de Camagüey, en la asignatura de Algebra Lineal. En esta materia el estudiante requiere de altos niveles de abstracción y un buen razonamiento lógico-matemático. Se decidió, entonces desarrollar un Sistema Tutorial Inteligente (STI) usando técnicas de Minería de datos que apoye al educando durante su estudio independiente, interviniendo como un tutor particular que actúe de acuerdo a las necesidades del alumno. Como resultado se pretende obtener un sistema para ser utilizado por estudiantes y profesores cuyo objetivo principal es proporcionar al educando la ayuda pedagógica adecuada en apoyo al proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura del Algebra Lineal.

ABSTRACT: The present investigation arises of the necessity of giving solution to the drop promotion of the students of first year of the careers of technical sciences of the University of Camagüey, in the subject of Lineal Algebra. In this matter the student requires of high levels of abstraction and a good logical-mathematical reasoning. Was decided develop a Intelligent Tutorial System (ITS) using technical of Data Mining that supports to the educating during their independent study, intervening as a particular tutor that acts according to the student's necessities. As a result it is sought to obtain a system to be used by students and professors whose main objective is to provide to the educating the pedagogic help adapted in support to the process of teaching learning of the subject of the Lineal Algebra.

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) aumenta infinitamente las capacidades para procesar, almacenar y transmitir información y con el avance de las mismas, germina una nueva sociedad en la que el manejo de la misma es sinónimo de progreso. Además, la utilización las TIC tiene grandes ventajas: interés, motivación, interacción, continua actividad intelectual, desarrollo de la iniciativa, mayor comunicación entre profesores y alumnos.

La Educación Superior, por ser la última etapa de la formación profesional del pregrado complejiza el rigor de sus materias y el sistema de evaluación, además, el dinamismo de la vida universitaria acorta los plazos de tiempo para el estudio. Como parte de esta tendencia mundial, Cuba ha incrementado la utilización de las tecnologías en este sector, lo que posibilita que en el país pueda considerarse una sociedad de la información en desarrollo.

En el campo de las Ciencias de la Computación, la Inteligencia Artificial (IA) surge como una de las ramas de estudio más recientes y promisorias, cuyo objetivo es el de entender la naturaleza de la inteligencia a través del diseño de sistemas computacionales que la exhiban (Salgueiro, 2005).

Una de las críticas que se oyen más a menudo respecto a la Inteligencia Artificial (IA), es que las máquinas no se pueden considerar inteligentes hasta que no sean capaces de aprender a hacer cosas nuevas y a adaptarse a las nuevas situaciones, en lugar de limitarse a hacer aquellas actividades para las que fueron programadas. En vez de preguntarse si una computadora es capaz de "aprender", resulta mucho más clarificador intentar describir a qué actividades se refiere exactamente cuándo se dice "aprender" y cuáles mecanismos se pueden utilizar para llevar a cabo dichas actividades.

> (Simon, 1983) (Simón, 1983) se refiere al aprendizaje como cambios en el sistema para desarrollar tareas a partir de las mismas condiciones de un modo más eficiente y eficaz cada vez.

El Aprendizaje Automático es el área de la Inteligencia Artificial que se ocupa de desarrollar técnicas capaces de aprender, es decir, extraer de forma automática conocimiento subyacente en la información (Mitchell, 1997). Constituye junto con la estadística el corazón del análisis inteligente de los datos (Ruiz, 2006). Los principios seguidos en el aprendizaje automático y en la minería de datos son los mismos: la máquina genera un modelo a partir de ejemplos y lo usa para resolver el problema.

En el desarrollo de la presente investigación se realizó un seguimiento de los alumnos de la Facultad de Informática de la Universidad de Camagüey a través del análisis de los reportes semestrales con el fin de conocer el motivo de la baja promoción en la asignatura de Algebra Lineal, se evidenció que en los estudiantes existen muchas dificultades en cuanto a la comprensión y asimilación de los tópicos de Diagonalización, por lo que en la actualidad los profesores se encuentran en la búsqueda y elaboración de estrategias destinadas a la atenuación del problema.

La influencia y dependencia que tiene en varias áreas dentro y fuera del álgebra lineal constituye una de las principales razones para crear un sistema que respalde la enseñanza-aprendizaje de la Diagonalización. Los temas de Diagonalización son una vía de simplificar las extensas soluciones algebraicas a través de sus conceptos y métodos. Los valores y vectores propios son esenciales para plantear y resolver problemas de física e ingeniería relacionados con sistemas dinámicos, oscilatorios, teoría general de la estabilidad mecánica cuántica entre otros.(Coello, Casas, Pérez, & Caballero, 2015)

La Diagonalización es un proceso que involucra todos los temas anteriores en el plan de estudio de la asignatura: sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes, espacios vectoriales, sub-espacios, transformaciones lineales, núcleo, imagen, entre otros. Diremos que una matriz es diagonalizable si todos sus valores propios son distintos. Además cuando se da esta situación diremos que esta matriz y su matriz diagonal son semejantes (Coello et al., 2015)

El Álgebra, dado lo abstracto de su contenido, necesita de una herramienta que permita la total apropiación del conocimiento y la creación de habilidades. El álgebra enlaza los contextos gráficos, geométricos y tabulares, haciendo del lápiz y papel una actividad estática y no como se haría con el uso de las TIC que lo hace más dinámico. (Coello et al., 2015). Por este motivo se pensó en el desarrollo de un Sistema Tutorial Inteligente (STI), una técnica de IA capaz de adaptarse a los conocimientos previos del estudiante y a partir de esto enseñar adaptándose continuamente a su evolución particular.

Este sistema cumpliría la tarea de entrenar adaptando diferentes estrategias o modalidades de enseñanza, enfatizando en el tópico de Diagonalización del Algebra Lineal. Un tutor inteligente es un sistema de software que utiliza técnicas de inteligencia artificial para representar el conocimiento e interactúa con los estudiantes para enseñárselo(VanLehn, 1988).

Tomando en cuenta los argumentos anteriormente expuestos, el objetivo es un sistema que, aprovechando los recursos disponibles en la actualidad permita disminuir las tareas del profesor. Para ello desarrollaremos un sistema tutorial inteligente que se nutre de las técnicas del aprendizaje automático o Minería de dato para mejorar la experiencia de aprendizaje desde la perspectiva del estudiante

■ DESARROLLO

Minería de Datos

Desde hace más de dos décadas se vienen desarrollando y utilizando complejos algoritmos para la extracción de patrones útiles en grandes conjuntos de datos. Gran parte de esta información representa transacciones o situaciones que se han producido, siendo útil no sólo para explicar el pasado, sino para entender el presente y predecir la información futura. En muchas ocasiones, el método tradicional de convertir los datos en conocimiento consiste en un análisis e interpretación realizada de forma manual por especialistas en la materia estudiada. Esta forma de actuar es lenta, cara y altamente subjetiva. De hecho, la enorme cantidad de datos desborda la capacidad humana de comprenderlos y el análisis manual hace que las decisiones se tomen según la intuición de los especialistas.

A finales de la década de los 80, la creciente necesidad de automatizar todo este proceso inductivo abre una línea de investigación para el análisis inteligente de datos. Al conjunto de métodos matemáticos y técnicas software para análisis inteligente de datos y búsqueda de regularidades y tendencias en los mismos, aplicados de forma iterativa e interactiva, se denominaron técnicas de Minería de Datos o Data Mining (DM). Su nombre proviene de las similitudes encontradas entre buscar valiosa información de negocio en grandes bases de datos y minar una montaña para encontrar una veta de metales valiosos. Su tarea fundamental es la de encontrar modelos inteligibles a partir de los datos, y para que el proceso sea efectivo debe ser automático, generando patrones que ayuden en la toma de decisiones beneficiosas para la organización.

Para obtener conclusiones válidas y útiles al aplicar minería de datos, es necesario complementar este proceso con una adecuada preparación de los datos previa al proceso de minería y un análisis posterior de los resultados obtenidos. Así, podemos afirmar que el proceso de minería de datos pertenece a un esquema más amplio, denominado extracción o descubrimiento de conocimiento en bases de datos (KDD, Knowledge Discovery in Databases). Se puede intuir que el KDD es un campo multidisciplinar, donde las principales áreas contribuyentes son el Aprendizaje Automático, las Bases de datos y la Estadística.

El Aprendizaje Automático es el área de la Inteligencia Artificial que se ocupa de desarrollar técnicas capaces de aprender, es decir, extraer de forma automática conocimiento subyacente en la información. Constituye junto con la estadística el corazón del análisis inteligente de los datos. Los principios seguidos en el aprendizaje automático y en la minería de datos son los mismos: la máquina genera un modelo a partir de ejemplos y lo usa para resolver el problema. (Ruiz, 2006).

Dentro de la Minería de Datos se incluyen las actividades siguientes Clasificación, Estimación, Predicción, Determinar grupos afines o reglas de asociación, Clustering (agrupamiento), Descripción y visualización. Las tres primeras, es decir la Clasificación, Estimación y Predicción se agrupan bajo del nombre de MD Directa. Por su parte, las tres últimas reciben el nombre de MD Indirecta. En la Minería de Datos Directa (MDD) se tiene claro el objetivo, mientras que en la Minería de Datos Indirecta (MDI) no se sabe aún a ciencia cierta qué resultados se quieren obtener.(Linoff, 2000).

En este trabajo se muestran las ideas puestas en prácticas de crear un STI con técnicas de Minería de Datos: Algoritmo de agrupamiento y Algoritmo de clasificación para emular al tutor humano y además que proveer al estudiante de cierta flexibilidad para la elección del tipo de tutorizado más adecuado.

Sistema Tutor Inteligente con técnicas de Minería de datos para la asignatura de Algebra Lineal (STIAL).

En la actualidad, los tutores inteligentes permiten brindar un seguimiento eficaz del proceso enseñanza–aprendizaje, puesto que brindan una alternativa de tutoría personalizada para el alumno a través de técnicas de enseñanza, tales como: aprendizaje por reforzamiento y ejercitación, búsqueda interactiva de conocimiento, aprendizaje por descubrimiento y proceso de construcción de conocimiento.

Los profesores humanos no responden a las preguntas o dan ayuda de acuerdo a un guión. En lugar de eso, disponen de conocimiento sobre el área que enseñan, tiene una intuición sobre lo que sabe (o debería saber) el alumno, y tiene conocimientos sobre estrategias para enseñar. Esas tres fuentes de conocimiento se utilizan de manera conjunta para determinar en cada momento como interactuar con el alumno para conseguir que aprenda (Martin, 2007).

Por tanto un STI es un tipo de agente inteligente caracterizado por su habilidad para tomar decisiones y la ejecución de acciones sin la intervención de ninguna persona que monitoriza el funcionamiento del sistema. Así pues, un STI tendría que, en primer lugar, evaluar el conocimiento que el aprendiz tiene sobre la materia. A continuación, ha de presentar información acorde a ese nivel (por ejemplo, definiciones, material gráfico o auditivo). Y posteriormente ha de evaluar si la persona ha asimilado el conocimiento nuevo que se pretendía que el usuario hubiese adquirido (Puga & García, 2008).

Entre sus ventajas se encuentra: Constituyen una fuente de materiales de enseñanza, proporcionan problemas para el estudiante pueda alcanzar un determinado nivel de conocimiento, controlan el nivel

de dificultad de los problemas de manera que el estudiante se enfrente a ejercicios adecuados a sus necesidades, contribuyen a planificar la instrucción y, a la vez, ayuda a los estudiantes a aprender a aprender. (Durán & Costaguta, 2007)

Módulo Pedagógico o Tutor

Este módulo es el responsable de aplicar una estrategia pedagógica y seleccionar el material de aprendizaje acorde al estudiante. Integra el conocimiento acerca del método de enseñanza, las técnicas didácticas y del dominio a ser enseñado. El modulo tutor se puede descomponer en dos sub-módulos: Analizador de Perfil y Protocolos Pedagógico.

El analizador de perfil permite determinar, a partir de los datos almacenados en el módulo estudiante y a través de las herramientas que proporciona la Minería de Datos, tales como los algoritmos de agrupamiento, obtener la relación de los estilos de aprendizaje dominantes en los estudiantes. Para obtener el diagnóstico de los estilos de aprendizaje predominantes en los estudiantes de Ingeniería Informática el trabajo se sustentó en las investigaciones presentadas por (Durán y Costaguta, 2007) y por (Rivero et.al, 2013). El instrumento utilizado para recolectar los datos de los estudiantes de informática fue el Test de Estilos de Aprendizaje propuesto por Felder y Silverman en1988 (Felder & Silverman, 1988). Para realizar este diagnóstico, se optó por el algoritmo de agrupamiento FarthestFirst por tratarse de un problema de k centros donde se pretende que la máxima distancia entre una tupla y su centroide sea mínima. El Algoritmo FarthestFirst se clasifica como un algoritmo de agrupamiento no jerárquico. Comienza seleccionando aleatoriamente una instancia que pasa a ser el centro del clúster. Se calcula la distancia entre cada una de las instancias y el centro. La distancia que se encuentre más alejada del centro más cercano es seleccionada como el nuevo centro del clúster. Este proceso se repite hasta alcanzar el número de clusters o grupos buscado. Los objetos que componen cada subgrupo deben ser bastante similares entre ellos y lo suficientemente disimilares con respectos a los ejemplos del otro subgrupo. Cada centroide o prototipo devuelto por el algoritmo de agrupamiento representan a la mayoría de los estudiantes de informática encuestados, con lo que quedaron identificaron dos grupos con sus correspondientes estilos de aprendizaje. Grupo 1: Visual, Intuitivo, Activo y Secuencial y Grupo 2: Visual, Sensitivo, Activo y Global.

Cuando el estudiante accede al sistema, luego de realizar el test lo primero que hace es recibir su categorización. Aquí implementamos un algoritmo de clasificación que devuelve al estudiante su perfil de aprendizaje, que no es más que una de las dos clases o grupos que vimos anteriormente. La clasificación supervisada consiste en el proceso de asignar a una entrada concreta, el nombre de una clase a la que pertenece. Las clases entre las que puede elegir el procedimiento de clasificación supervisada se pueden describir de gran cantidad de formas. La clasificación supervisada constituye una parte importante de muchas de las tareas de resolución de problemas y en su forma más simple se presenta como una tarea de reconocimiento (Caballero, 2007) .Para el STIAL se decidió implementar el Naive Bayes que es un algoritmo sencillo, fácil de implementar, sin parámetros que ajustar y que a pesar de su simplicidad es sin duda fuerte y uno de los clasificadores más utilizados. Además, diversos estudios demuestran que sus resultados son competitivos con otras técnicas (redes neuronales y árboles de decisión entre otras) en muchos problemas y que incluso las superan en algunos otros. El fundamento principal del clasificador Naive Bayes es la suposición de que todos los atributos son independientes conocido el valor de la variable clase. Su denominación proviene de la hipótesis de que las variables predictivas son condicionalmente independientes dada la variable a

clasificar y con esto ya queda definida una estructura, por lo que sólo se tienen que aprender las probabilidades de los valores de los atributos dada la clase (Chávez, 2008).

Módulo del Estudiante

Este módulo tiene por objetivo realizar el diagnóstico cognitivo del alumno y es identificada como la tarea más compleja en el desarrollo de STI. Puede afirmarse que el modelo del estudiante es un problema de investigación que debe enfocarse desde todas sus aristas con el fin de obtener una representación de las características del estudiante completa y precisa. Algunos autores, toman en consideración características tales como: el estilo de aprendizaje, el nivel de conocimiento, la información personal o la combinación de algunas de ellas (Rodríguez & Fernández, 2000). Cuanto aprenda un estudiante en una clase dependerá de la habilidad innata y de su preparación previa, pero además de la compatibilidad entre su estilo de aprendizaje y el estilo de enseñanza de su instructor.

Por otra parte el determinar las características del perfil de aprendizaje de nuestros estudiantes para, en función de ellas, adecuar las estrategias de enseñanza y detectar el estilo de aprendizaje dominante en nuestro grupo de estudiantes puede favorecer al utilizar el método de enseñanza más adecuado, con el objeto de lograr un resultado óptimo (Rodríguez & Fernández, 2000).

Para realizar este diagnóstico en el STIAL el estudiante apenas se autentica deberá llenar un cuestionario. Se utilizarán las planillas de estilos de aprendizaje recreadas de Felder y Silverman (Felder & Silverman, 1988) que son herramientas para la toma de datos de alta validez y confiabilidad que han demostrado su aptitud a la hora de clasificación de los estilos por su autor y otros investigadores que las utilizaron.

Módulo del Dominio

El módulo del dominio, denominado también por muchos autores como módulo experto, proporciona los conocimientos del dominio. En el caso del STIAL decidimos en esta primera versión tutoriar el tema de la Diagonalización quedando el sistema abierto a la inserción de otros temas del Algebra Lineal.

El módulo del Dominio satisface dos propósitos diferentes. En primer lugar, presentar la materia de la forma adecuada para que el alumno adquiera las habilidades. En segundo lugar, debe ser capaz de evaluar las respuestas del estudiante y en dependencia de esta brindarle al estudiante o bien una ayuda o bien una estimulación o reto.

Los materiales didácticos con las estrategias pedagógicas adecuadas para adaptarse a los modelos de estudiantes. Como las dos clases de estudiante son visuales las formas de mostrarle el conocimiento debía poseer diagramas y gráficos. Luego si el estudiante es sensitivo se decidió además que el medio de enseñanza a utilizar debía ser un video, donde se mostraran gráficos para estimular la vista y que además de estimulará el oído. Si el estudiante por el contrario es intuitivo se le presentara un ppt que es la misma presentación en la que se apoya el video pero que incluirá más conceptos y argumentos para estimular a través de ideas y lecturas como lo prefieren este estilo de aprendizaje.

Como las dos clases de estudiante son activos la forma de procesar la información es a través de ejercicios a los que les ven conexiones inmediatas con el mundo real. Luego si el estudiante es global los ejercicios requieren de un procesamiento con una visión integral si por el contrario el estudiante es secuencial los ejercicios mostrados necesitan una progresión lógica de pasos incrementales pequeños.

El propósito del STIAL es adaptarse a la forma en que el estudiante percibe la información y las formas en la que las procesa. Además debe brindarle ayuda cuando cometa errores, proveerle el conocimiento que necesita para solucionar los ejercicios con explicaciones.

CONCLUSIONES

El Sistema Tutor Inteligente para el Algebra Lineal puede ser usado en la educación y el entrenamiento del estudiante como apoyo al proceso de enseñanza-aprendizaje en el tema de Diagonalización.

Con el objetivo del trabajo cumplido, se provee al campo de los Sistemas Tutores Inteligentes de una nueva herramienta redundando esto en una ganancia, no solo para el desempeño del STI en sí mismo, sino en el estudiante, que es el componente humano fundamental que hace útil al sistema y le brinda identidad. Así se pretende realizar un aporte al sugerir técnicas de agrupamiento como el FarthestFirst y de clasificación como el Naive Bayes para facilitar la selección del protocolo pedagógico adecuado. Con su implementación se pronostica un uso de los recursos materiales y humanos con más eficiencia, además de la búsqueda de métodos y soluciones para una mayor comprensión de la asignatura.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Caballero, Y. (2007). Acerca del Aprendizaje Automatizado, la Selección de Características y la Edición de conjuntos de Entrenamient. (Tesis de Doctorado), Universidad de Camagüey, Camagüey.

Coello, L., Casas, L., Pérez, O. L., & Caballero, Y. (2015). Redes neuronales artificiales en la producción de tecnología educativa para la enseñanza de la diagonalización. Revista Academia y Virtualidad, 8(1), 12-20.

Chávez, M. (2008). Modelo de redes bayesianas en el estudio de secuencias genómicas y otros problemas biomédicas. (Tesis de Doctorado), Universidad Central "Marta Abreu" de las Villas, Villa Clara.

Durán, E., & Costaguta, R. (2007). Minería de datos para descubrir estilos de aprendizaje. Revista Iberoamericana de Educación, 2(42).

Felder, R. M., & Silverman, L. K. (1988). Learning Styles and Teaching Styles in Engineering Education. Engr. Ed, 78(7), 674-681.

Linoff, B. (2000). Mastering Data Mining Wiley (Ed.)

Martin, P. P. G. (2007). Modelo de enseñanza basada en casos: de los tutores inteligentes a los videojuegos. (Tesis de Grado de Doctor), Universidad Complutense de Madrid, Madrid.

Mitchell, T. (1997). Machine Learning: McGraw-Hill Science.

Puga, J. L., & García, J. G. (2008). Sistemas de Tutorización Inteligente Basados en Redes Bayesianas. Revista Electrónica de Metodología Aplicada, 13(1), 13-25.

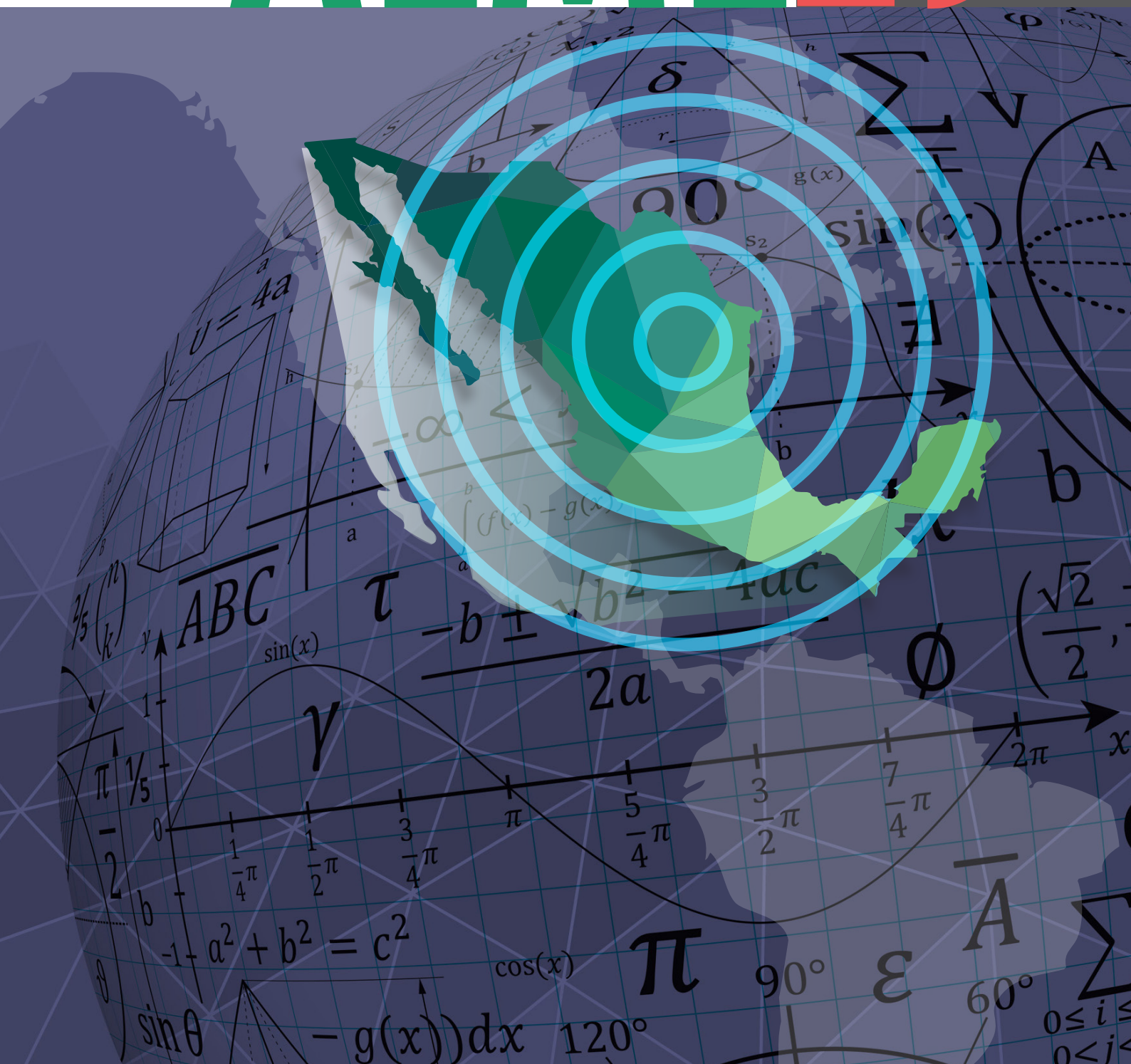
Rodríguez, L. I. M., & Fernández, Y. d. A. (2000). Sistema Tutorial Inteligente de apoyo al proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Sistemas Operativos. (Tesis de Grado), Universidad de las Ciencias Informáticas, Habana.

Ruiz, R. (2006). Heurísticas de selección de atributos para datos de gran dimensionalidad. (Tesis Doctoral para optar al grado de Doctor en Informática), Universidad de Sevilla, Sevilla.

Salgueiro, F. (2005). Sistemas Inteligentes para el Modelado del Tutor (Tesis de Grado en Ingenieria Informática), Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires.

Simon, H. A. (1983). Why should machines learn? In R. S. Michalski, J. G. Carbonell & T. M. Mitchel (Eds.), Machine Learning, An Artificial Intelligence approach. Palo Alto, CA.

VanLehn, K. (1988). Student Modelling. . In H. N. J. L. E. Associates (Ed.), Foundations of Intelligent Tutoring systems (pp. 55-78).

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

ALME29