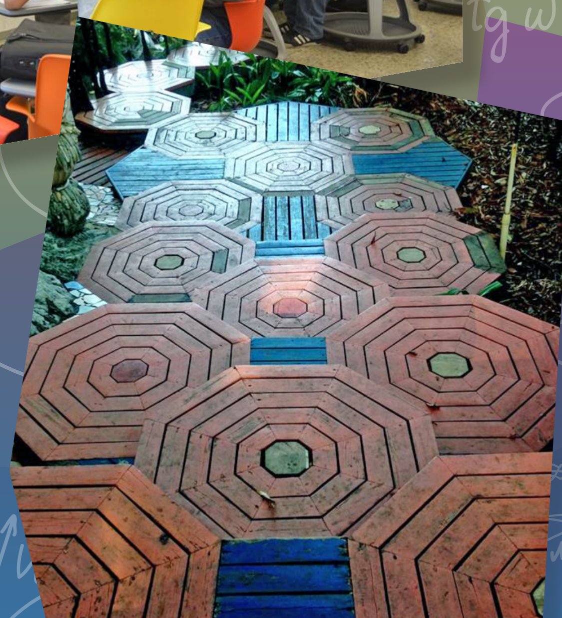
Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

VOLUMEN 30 » AÑO 2017 » ISSN 2448-6469

ALME 30



Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, CLAME, A.C.
www. clame.org.mx

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA, Volumen 30, agosto de 2017, es una publicación anual editada por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Av. Universidad 1900, Oxtopulco Universidad, Delegación Coyoacán, C. P. 04460, Ciudad de México, www.clame.org.mx. Editor responsable Luis Arturo Serna Martínez. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2017-071712431200-203, ISSN: 2448-6469, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor.

Consejo Directivo

Olga Lidia Pérez González - Presidente
Daniela Reyes Gasperini - Tesorera
Hugo Parra Sandoval - Secretaria
Juan Antonio Manzueta C. - Vocal Caribe
Luis Roberto Moreno C.- Vocal Centroamérica
Rebeca Flores García - Vocal Norteamérica
Marcela Parraguez González - Vocal Sudamérica

Consejo consultivo

Egbert Agard
Ricardo Cantoral
Fernando Cajas
Guadalupe de Castillo
Evarista Matías
Rosa María Farfán
Teresita Peralta
Gustavo Martínez Sierra

Comisión de admisión

Marger da Conceição Ventura Viana
Rebeca Flores García
Mayra Murillo

Comisión de promoción académica

Edison de Faria
Yolanda Serres
Leonora Díaz Moreno

Comité internacional de RELME

Analida Ardila (Panamá)
Blanca Peralta (Colombia)
Blanca Rosa Ruiz Hernández (México)
Claudia María Lara Galo (Guatemala)
Claudia Rodríguez Muñoz (México)
Luis Roberto Moreno (Panamá)
Ruth Rodríguez Gallegos (México)
Claudia Rodríguez Muñoz (México)
Luis Roberto Moreno (Panamá)
Ruth Rodríguez Gallegos (México)

Comité Científico de Evaluación

Ademir Basso	Brasil
Adlai Ralph Detoni	Brasil
Adriana Atenea de la Cruz Ramos	México
Adriana Engler	Argentina
Adriana Estela Frausin	Argentina
Adriana Gómez Reyes	México
Agustín Grijalva Monteverde	México
Alejandro Lois	Argentina
Alexandra Fregueiro	Uruguay
Ana Rosa Corica	Argentina
Analida Ardila	Panamá
Andrea Cárcamo Bahamonde	España
Angélica Dueñas Cruz	México
Astrid Marlene Morales Soto	Chile
Blanca Ruiz	México
Carmen López Esteban	España
Cariño Ruiz	México
Carolina Carrillo García	México
Catalina Navarro Sandoval	México
Cecilia Ester Elguero	Argentina
Christiane Cynthia Ponteville	Argentina

Claudia Flores Estrada	México
Claudia Lisete Oliveira Groenwald	Brasil
Claudia Margarita Acuña Soto	México
Claudio Eduardo Fuentealba Aguilera	España
Cristina Ochoviet	Uruguay
Cuauhtémoc Emmanuel Rodríguez Velázquez	México
Daniela Pagés Rostán	Uruguay
Daniela Reyes Gasperini	Argentina
Darly Alina Kú Euán	México
Diana Patricia Sureda Figueroa	Argentina
Domingo Yojcom	Guatemala
Eduardo Carlos Briceño Solis	México
Eduardo Carrasco Henríquez	Chile
Elena Nesterova	México
Elisa Silvia Oliva	Argentina
Enrique Javier Gómez Otero	México
Erika García Torres	México
Esteban Mendoza Sandoval	México
Francisco Cordero Osorio	México
Francisco Javier Lezama Andalón	México
Gabriela Buendía Avalos	México
Germán Muñoz Ortega	México
Gisela Montiel Espinosa	México
Gloria Angélica Moreno Durazo	México
Haydeé Blanco Cerchiara	Argentina
Hipólito Hernández Pérez	México
Ingrith Álvarez Alfonso	Colombia
Irma Nancy Larios Rodríguez	México
Irene Carolina Pérez Oxté	México
Isabel Tuyub Sánchez	México
Jaime Mena Lorca	Chile
Javier García García	México
Jesús Enrique Hernández Zavaleta	México
Jesús Enrique Pinto Sosa	México
José David Zaldívar Rojas	México
José Marcos López Mojica	México

José Rafael Couoh	México
Juan de Dios Viramontes Miranda	México
Juliana Silva De Andrade	Brasil
Julio Moisés Sánchez Barrera	México
Karla Gómez Osalde	México
Leonardo David Glasserman Morales	México
Lidia Beatriz Esper	Argentina
Lilia López Vera	México
Lilia Patricia Aké Tec	México
Lorena Jiménez Sandoval	México
Lorenzo Contreras Garduño	México
Luis Alberto López Acosta	México
Luis Arturo Serna	México
Luis Manuel Aguayo Rendón	México
Luis Manuel Cabrera Chim	México
Magdalena Rivera Abrajan	México
Marcela Evangelina Götte Salin	Argentina
Marcela Ferrari Escolá	México
Marcela Parraguez Gonzalez	Chile
Marco Aurélio Kistemann	Brasil
Marger da Conceição Ventura Viana	Brasil
María Angélica Pérez de del Negro	Argentina
María Belén Giacomone	Italia
Maria de los Angeles Fanaro	Argentina
María del Carmen Fajardo Araujo	México
María del Mar López Martín	España
Mariangela Borello	Italia
María del Socorro García González	México
María Esther Magali Méndez Guevara	México
María Guadalupe Amado Moreno	México
María Guadalupe Cabañas Sánchez	México
María Guadalupe Lomelí Plascencia	México
María Guadalupe Ordaz Arjona	México
María Inés Ciancio	Argentina
María Julia Améndola	Argentina
María Rita Otero	Argentina

María Susana Dal Maso	Argentina
María Teresa Martinez Acosta	México
Maricela Armenta Castro	México
Mario Adrián Caballero Pérez	México
Mario Dalcín	Uruguay
Mario Rafael Estrada Doallo	Angola
Mayra Báez Melendres	México
Milton Rosa	Brasil
Miriam Martínez Vázquez	México
Mónica Olave Baggi	Uruguay
Nielce Meneguelo Lobo da Costa	Brasil
Ofelia Montelongo Aguilar	México
Olga Lidia Pérez González	Cuba
Olivia Alexandra Scholz Marbán	México
Patricia Lestón	Argentina
Patricia Marisel Konic	Argentina
Rebeca Flores García	México
Reyna Arcelia Brito Páez	México
Ricardo Cantoral Uriza	México
Ricardo Sánchez Casanova	Cuba
Rita Guadalupe Angulo Villanueva	México
Rodolfo David Fallas Soto	Costa Rica
Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre	Perú
Rosa María Farfán	México
Sandra Liliana Castillo Vallejo	Venezuela
Sergio Damián Chalé Can	México
Seydel Bueno García	Cuba
Silvia Elena Ibarra Olmos	México
Teresa Claudia Braicovich	Argentina
Ulises Alfonso Salinas Hernández	México
Verónica Molfino	Uruguay
Verónica Parra	Argentina
Víctor Larios Osorio	México
Virginia Rivera Lara	México
Viviana Carolina Llanos	Argentina
Yaneth Josefina Ríos García	Venezuela

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

PRESENTACIÓN

El Acta Latinoamericana de Matemática Educativa – ALME, es uno de los proyectos académicos del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa – CLAME, en el que se conjuga el respeto a la pluralidad de formaciones, tradiciones y acercamientos educativos, concebida y desarrollada con la función de difundir la Matemática Educativa en un marco en el que pueden relacionarse autores que comparten este interés común, además de nuclear investigadores y profesores de Latinoamérica, y a partir de su divulgación, promover acciones que fomenten la investigación, la actualización, el perfeccionamiento y la profesionalización para el desarrollo científico y social de la región.

Para el cumplimiento de esta función, la gestión de ALME se ha ido perfeccionado, el análisis de sus sucesivos volúmenes da cuenta de la manera en que evoluciona y crece, a través de un riguroso proceso de evaluación y la excelencia del trabajo realizado por sus editores, quienes han desarrollado un notable esfuerzo para lograr un producto con la mayor seriedad y exigencia académica.

El volumen que hoy presentamos, ALME 30, incluye los trabajos presentados en la XXX Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, organizada y desarrollada por el Departamento de Matemática, de la Escuela de Ingeniería y Tecnologías de Información, del Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey, México, en el año 2016, y que fueron sometidos a un riguroso y excelente proceso de evaluación con la participación de árbitros de diversos países.

Estos trabajos fueron organizados en los siguientes capítulos con la presentación de prestigiosos profesionales invitados.

Capítulo 1: Análisis del discurso matemático escolar, presentada por Daniela Soto Soto

Capítulo 2: Propuestas para la enseñanza de las matemáticas, presentada por Domingo Yojcom Rocché

Capítulo 3: Aspectos Socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar, presentada por Daniela Reyes Gasperini

Capítulo 4: El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional, presentada por Eduardo Carrasco Henríquez

Capítulo 5: Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, presentada por Ruth Rodríguez Gallegos

Desde las anteriores categorías ALME 30 ofrece a docentes y/o investigadores novedosas alternativas de solución a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática a partir de las propuestas que docentes de Matemática y/o investigadores en Matemática Educativa, de Latinoamérica, hacen en relación a sus prácticas docentes, a su experiencia y/o a su actividad investigativa.

Esperamos que ALME 30 cubra las necesidades de información especializada de la comunidad académica en Matemática Educativa, sea utilizada como una bibliografía global y actualizada y que contribuya a la profesionalización del CLAME.

Un reconocimiento especial a los editores y a los árbitros por el riguroso trabajo realizado, por su constancia y responsabilidad para que ALME sea un producto de calidad, a los autores por compartir sus experiencias y/o investigaciones y permitirnos difundir su obra en un escenario de pluralidad de formaciones, tradiciones y acercamientos educativos.

Olga Lidia Pérez González

Presidenta del Consejo Directivo

CLAME (2016-2020)

CAPÍTULO 1

ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Daniela Soto Soto
daniela.soto.s@usach.cl

La Matemática Educativa, como disciplina científica, se ha desarrollado promoviendo la conformación de diferentes perspectivas teóricas y metodológicas, que han buscado dar explicación a los diferentes fenómenos que se producen cuándo el sujeto construye conocimiento matemático en comunidad. Asimismo, se ha preocupado de diseñar propuestas innovadoras que permitan una democratización del conocimiento en juego.

En particular, mirar desde la Construcción Social del Conocimiento Matemático (CSCM) ha hecho reconocer que un factor asociado a los fenómenos en la matemática escolar es lo que se denomina *discurso Matemático Escolar* (dME) (Cantoral, 2013). Ferrari (2015), quien abre esta sección en el *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* hace dos años, señala que la noción de dME ha evolucionado y se ha sistematizando de mejor manera, a partir de las diferentes investigaciones de la comunidad. Si bien en un principio se podía entender al dME cómo lo discursivo en la clase de matemáticas, las investigaciones fueron clarificando que la idea de discurso es más cercana a los paradigmas que subyacen en las estructuras comunicativas (Van Dick, 2003; Foucault, 1983). En Cordero y Flores (2007) se caracteriza al dME cómo la manifestación del conocimiento matemático normado por creencias de los actores del sistema didáctico de lo que es la enseñanza y lo que es la matemática, hoy se entiende al dME como un *sistema de razón*, que norma las prácticas y representaciones sociales de los actores del sistema educativo (Soto, 2010; Soto y Cantoral, 2014).

Popkewitz y Lindblad (2005) señalan que un sistema de razón (SR) es un conocimiento que organiza los enfoques de resolución de problemas en la política y en la práctica educativa. Lo interesante es observar cómo estos SR incluyen un *continuum* de valores que dividen, así como también incluyen/excluyen. Estos sistemas se pueden explorar mediante la analogía de un *mapa* de carretera, los cuales informan distancias y caminos por recorrer, y lo que queda dentro y fuera de los territorios. Por su parte un SR habla simbólicamente de cómo ordenar y dividir los objetos sobre los que se debe reflexionar, señala lo que hay dentro de la *razón*, y al mismo tiempo inscribe lo que está afuera de la misma, con lo cual excluye por medio de los instrumentos de ordenación y diferenciación de la razón aplicada a la solución de las problemáticas. Es decir, un SR se caracteriza por crear *mapas* en los cuales se delinean las formas de actuar, razonar, dar significados y/o argumentar de los individuos, entre otras. Por tanto, un modo alternativo quedará fuera de los límites, considerándose extraño, anormal o inadecuado.

El dME se ha caracterizado por la hegemonía de argumentaciones, el utilitarismo de las nociones matemáticas, el foco en los objetos matemáticos soslayando las prácticas que han permitido su construcción, la carencia de marcos de referencia, promover la presentación del conocimiento matemático de manera acabada y organizar la matemática escolar con una estructura lineal. Esto ha generado una forma de excluir al sujeto de la construcción social del conocimiento matemático muy sutil, esto es también queda expresado en lo que Boourdieu y Passeron (2005) denominaron como *violencia simbólica*. En la matemática escolar se manifiesta a través de la imposición de significaciones, procedimientos y argumentaciones centradas en los objetos matemáticos (Ilustración 1). A su vez, este fenómeno ha causado la producción de autoexclusión en el sujeto; la cual se revela en los excluidos cuándo se convencen que son sus capacidades las que no le permiten alcanzar esa cultura, en este caso, ese conocimiento, invisibilizando que son las propias características del sistema las que los excluye.

El dME ha producido al menos tres fenómenos: la exclusión, la adherencia y la opacidad (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015). Se considera que existen dos epistemologías del conocimiento matemático, uno que obedece al objeto matemático: el dME. Y otra, que pone el foco en las prácticas socialmente compartidas que permiten la construcción del conocimiento matemático: la CSCM. La exclusión, como se ha señalado, se produce al imponer significaciones, argumentaciones y procedimientos centrados en los objetos matemáticos. La adherencia se manifiesta en la aprobación del dME como la única estructura o sistema que permite la construcción del conocimiento matemático en el aula. Y por último, la opacidad se genera al no reconocer o soslayar la matemática del cotidiano, lo que no permite la apertura hacia una pluralidad epistemológica.

Al ser explicitas las características del dME y los fenómenos que produce, la comunidad de matemáticos educativos puede buscar alternativas conciliadoras con él. Es el análisis del dME y las propuestas de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas que buscan desarrollar una dialéctica, es decir, confrontar las características del dME con categorías de la CSCM (tabla 1), las que permitirán el fortalecimiento de la matemática escolar actual (Soto, 2014).

dME	*CSCM*
Hegemonía	Pluralidad epistemológica
Utilitario	Funcionalidad
Foco en los objetos Matemáticos	Foco en las prácticas socialmente compartidas
Sin marcos de referencia	Multidisciplinariedad y transversalidad
Continuidad y linealidad del conocimiento matemático	Desarrollo de usos del conocimiento matemático

Tabla 1. Categorías contrarias del dME y la CSCM

En esta sección encontrará diferentes propuestas que buscan confrontar al dME, a partir de ideas innovadoras e incluyentes, que involucran la apertura hacia la pluralidad epistemológica, la funcionalidad del conocimiento matemático, la centración en las prácticas socialmente compartidas, la multidisciplinariedad y transversalidad del saber, y por último, el desarrollo de los usos del conocimiento matemático. Esto sin duda generará una identidad disciplinar en el matemático educativo (Silva-Crocci, 2017), una socialización del conocimiento (Gómez, 2015) y un empoderamiento en el profesor de matemáticas latinoamericano (Reyes-Gasperini y Cantoral, 2016).

Referencias

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: estudios sobre construcción social del conocimiento*. D. F., México: Gedisa.

Cordero, F. Gómez, K. Silva- Crocci, H. y Soto, D. (2015). *Discurso matemático escolar. Adherencia, exclusión y opacidad*. Barcelona: Gedisa.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de la gráfica en el discurso matemático escolar. Un estudio sociepistemológico en el nivel básico a través de los libros de textos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(1), pp. 7-38.

Foucault, M. (1983). El orden del discurso. *Cuadernos marginales*, 36.México: Representaciones Editoriales S. A

Popkewitz, T. y Lindblad, S. (2005). Gobernación educativa e inclusión y exclusión social: dificultades conceptuales y problemáticas en la política y en la investigación. En Julian J. Luengo (Comp.). *Paradigmas de gobernación y de exclusión social en la educación* (116-165). Barcelona, España: Pomaires.

Reyes-Gasperini, D. y Cantoral, R (2016). Empoderamiento docente: la práctica docente más allá de la didáctica… ¿qué papel juega el saber en una transformación educativa? *Revista de la escuela de ciencias de la educación*, 2(11), 155-176.

Silva-Crocci, H. (2017). Matemática Educativa y la identidad disciplinar en programas de formación inicial de profesores de matemáticas chilenos. En L. Pino-Fan, A. Poblete y V. Díaz (Eds.), *Perspectivas de la investigación sobre la formación de profesores de matemáticas en Chile* (pp. 23-44). Osorno, Chile: Cuadernos de Sofía.

Soto, D, (2014). La dialéctica exclusión-inclusión entre el discurso matemático escolar y la construcción social del conocimiento. Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav-IPN, D.F, México.

Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una Visión Socioepistemológica*. Tesis de (maestría) no publicada. Cinvestav-IPN, D.F, México.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). El discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una visión Socioepistemologica. *Bolema- Boletim de Educação matemática*. 28 (50), 1525-1544.

Van Dijk, T. (2003). La multidisciplinaridad del análisis crítico del discurso: un alegato en favor de la diversidad. *Métodos de análisis crítico del discurso* (143-177). Barcelona: Gedisa.

EXPERIENCIAS EMOCIONALES DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIO: UN ESTUDIO A TRAVÉS DE INFORMES DIARIOS. EL CASO DE CANDICE

Yuridia Arellano García, Gustavo Martínez Sierra
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
yaregar@gmail.com, gmartinezsierra@gmail.com

RESUMEN: Muy poco se ha investigado acerca de las emociones que los estudiantes experimentan día a día en el aula de matemáticas. Para empezar a llenar este hueco esta investigación tiene por objetivos: identificar las experiencias emocionales de un grupo de estudiantes universitarios a lo largo de siete días-clase y los antecedentes de tales experiencias, para lograrlo utilizamos la teoría cognitiva de las emociones. En este reporte presentamos en detalle el caso de Candice. Mediante el análisis de datos recolectados por informes diarios logramos determinar la estructura de valoración individual que soportan las experiencias emocionales de la participante. Nuestro principal hallazgo es que las emociones experimentadas son producto de la valoración de situaciones que posibilitan u obstaculizan el logro de metas como: ‘aprender en cada clase’, ‘resolver ejercicios en cada clase’, y normas de comportamiento atribuidas a sí misma y a la profesora de clase.

Palabras clave: Educación matemática, formación, competencias profesionales, análisis didáctico

ABSTRACT: Very little has been researched on day-to-day students´ emotions in mathematics education. As an attempt to fill this gap, this research is aimed at identifying the emotional feelings of a group of university students in a seven-day class period, as well as the antecedents of such feelings, by using the emotion cognitive theory. In this paper, we present the case of Candise, in details. Through the analysis of collected data from daily reports, it was possible to determine the structure of individual assessment that back up the emotional feelings of the participant. Our main finding is that the emotions she felt are the result of the assessment of the situations which make possible or hinder the attainment of goals such as:·to learn in each class·, ·to solve problems in each class, and the behavior rules attributable to the student herself and to the teacher.

Key words: emotions, mathematics education, daily reports.

Introducción

Las emociones son omnipresentes en el ámbito académico y son una parte integral de la vida humana. Al lado de la cognición y la motivación, las emociones son considerados uno de los tres sistemas psicológicos fundamentales que son interdependientes e inseparables en la definición de los seres humanos y su relación con el medio ambiente y los componentes esenciales del funcionamiento y desarrollo intelectual (Dai & Sternberg, 2004).

En investigaciones sobre las emociones en el aprendizaje y el rendimiento se encontró que las emociones influyen (recíprocamente) en: 1) los procesos y estrategias cognitivas, 2) la toma de decisiones y 3) la motivación. Por ejemplo, las emociones influyen en el procesamiento de la información ya que se puede iniciar, acelerar, alterar o interrumpir por las emociones, las emociones pueden alterar cómo se almacena la información y como es recuperada, así como la memoria se puede organizar de manera diferente dependiendo de las emociones experimentadas (Kim & Pekrun, 2014).

La revisión de literatura nos indicó que es poco lo que se sabe acerca de las emociones en el día a día de los estudiantes en el aula de matemáticas y sobre los antecedentes de dichas emociones. El estudio de la variabilidad dentro de los estudiantes en cuanto a sus experiencias emocionales es importante porque proporciona información útil en la predicción de la conducta y porque el aumento de la variabilidad puede informarnos a investigadores y profesores acerca de la capacidad de adaptación de los estudiantes a las cambiantes demandas del aula (Ahmed, Werf, Minnaert& Kuyper, 2010; Eid y Diener, 1999; Meyer, 2014). Por lo tanto, es imperativo que se examine la variabilidad de las experiencias emocionales de los estudiantes; lo que requiere la captura de experiencias diarias individuales en el aula (Ahmed et al., 2010).

Es por ello que en esta investigación perseguimos los siguientes objetivos:

(1) Identificar las experiencias emocionales individuales de estudiantes a lo largo de varios días clases de matemáticas de su primer año en la universidad

(2) Identificar los antecedentes individuales de sus experiencias emocionales.

Con fines de comunicación este reporte presenta el caso de Candice, atendiendo estos dos objetivos generales.

Teoría de la estructura cognitiva de las emociones

Un principio fundamental de las teorías de la valoración es que un individuo responderá emocionalmente sólo a percepciones personalmente significativas y que las emociones son provocadas y se diferencian por la interpretación cognitiva de las personas sobre la importancia de los acontecimientos para su bienestar (Ellsworth y Scherer, 2009).

La teoría de la estructura cognitiva de las emociones es una teoría de la valoración que se estructura como una tipología de tres ramas, que corresponden a tres tipos de estímulos: consecuencias de eventos, acciones de los agentes, y aspectos de los objetos. Cada tipo de estímulo se aprecia con respecto a una variable central de valoración. Un individuo juzga lo siguiente: (1) la conveniencia de un evento, es decir, la congruencia de sus consecuencias con las metas del individuo, (2) la aprobación de una acción, es decir, su conformidad con las normas y estándares validados por el individuo, y (3) la atracción de un objeto, es decir, la correspondencia de sus aspectos con los gustos de la persona.

La teoría cognitiva de las emociones describe una jerarquía que clasifica en 22 tipos de emoción (Tabla 1) y proporciona especificaciones para cada tipo de emoción. Las palabras emocionales propuestas en la tabla son representativos independientes de las variables de intensidad.

Tabla 1. Las especificaciones del tipo de la emoción de la Teoría Cognitiva de las Emociones

Grupo de emociones	Tipos de emociones
Vicisitudes de los otros	Contento por un acontecimiento deseable para alguna otra persona (*feliz-por*) Contento por un acontecimiento indeseable para alguna otra persona (*alegre por el mal ajeno*) Descontento por un acontecimiento deseable para alguna otra persona (*resentido-por*) Descontento por un acontecimiento indeseable para alguna otra persona (*compasión*)
Basadas en previsiones	Contento por la previsión de un acontecimiento deseable (*esperanza*) Contento por la confirmación de la previsión de un acontecimiento deseable (*satisfacción, alegría*) Contento por la refutación de la previsión de un acontecimiento indeseable (*alivio*) Descontento por la refutación de la previsión de un acontecimiento deseable (*decepción, frustración*) Descontento por la previsión de un acontecimiento indeseable (*miedo, preocupación*) Descontento por la confirmación de la previsión de un acontecimiento indeseable (*temores confirmados*)
Bienestar	Contento por un acontecimiento deseable (*jubilo*) Descontento por un acontecimiento indeseable (*congoja*)

Atribución	Aprobación de una acción plausible de uno mismo (*orgullo*) Aprobación de una acción plausible de otro (*aprecio, admiración*) Desaprobación de una acción censurable de uno mismo (*auto reproche, vergüenza*) Desaprobación de una acción censurable de otro (*reproche, rechazo*)
Atracción	Agrado por un objeto atractivo (*agrado*) Desagrado por objeto repulsivo (*desagrado*)
Bienestar/ Atribución	Aprobación de la acción plausible de otra persona y contento por el acontecimiento deseable relacionado (gratitud=admiración + jubilo) Desaprobación de la acción censurable de otra persona y descontento por el acontecimiento deseable relacionado (ira = reproche + congoja) Aprobación de la acción plausible de uno mismo y contento por el acontecimiento deseable relacionado (complacencia=orgullo+ jubilo) Desaprobación de una acción censurable de uno mismo y descontento por el acontecimiento indeseable relacionado (remordimiento = vergüenza + congoja)

La teoría cognitiva de las emociones conceptualiza tres estructuras de valoración de apoyo ante los cambios en el mundo: (1) la estructura de metas de apoyo a las valoraciones de la conveniencia de eventos, (2) la estructura de las normas para apoyar las valoraciones de la plausibilidad de las acciones de un agente, y (3) la estructura de las actitudes para apoyar las valoraciones de la apelación de los objetos.

La teoría cognitiva de las emociones define metas como lo que se quiere lograr, las normas representan las creencias en términos de los cuales se realizan las evaluaciones para la toma de alguna decisión y las actitudes serán las reacciones momentáneas de agrado o desagrado del individuo ante un objeto atractivo o repulsivo.

Una meta o una norma será *suficiente* para alcanzar una meta de nivel superior cuando su cumplimiento baste para alcanzarla: *necesaria* cuando su cumplimiento sea obligado, pero no suficiente; *facilitadora* cuando no garantiza pero incrementa la posibilidad de conseguir la meta de nivel superior; e *inhibidora* en caso de que reduzca la probabilidad de alcanzar la meta de nivel superior Ortony, Clore, & Collins, 1988).

Metodología

Participantes y Contexto

En este reporte presentamos los resultados del análisis de una estudiante mujer de 19 años que cursaba el primer cuatrimestre de la Licenciatura de Negocios Internacionales en una Universidad Politécnica en un estado al norte de México. Candice estaba tomando su primer curso de matemáticas en la universidad, el curso consistió en cuatro "unidades de aprendizaje": (1) Álgebra elemental: suma, resta, multiplicación y división de monomios y polinomios, (2) Ecuaciones de una variable de primer y segundo grado, (3) Trigonometría, y (4) Geometría analítica elemental, los datos fueron recolectados durante la segunda y tercera unidad de aprendizaje. Los datos fueron recolectados durante la segunda y tercera unidad de aprendizaje. De acuerdo con los datos obtenidos en entrevista con la profesora del curso, Candice es una estudiante colaborativa y sus resultados académicos son destacados en el grupo.

La profesora que impartía el curso, es mujer con 11 años de experiencia en la docencia de las matemáticas en la Universidad Politécnica, con un posgrado en matemática educativa. Según declara la profesora cada clase transcurre repitiendo la siguiente estructura por cada 'tema nuevo': (1) El profesor expone el tema (nuevo), (2) los estudiantes hacen preguntas sobre el tema y el profesor responde, (3) los estudiantes realizan ejercicios en torno al tema, ya sea en forma individual o en quipos y (5) se revisan los ejercicios y se identifican errores de los estudiantes de manera plenaria.

Recolección de los datos

El objetivo de nuestra recolección de datos fue recabar narrativas acerca de experiencias emocionales. Para ello utilizamos dos instrumentos: un cuestionario con preguntas abiertas y el *método de auto-reportes diarios*.

El cuestionario contenía además de preguntas sobre los datos generales de los participantes la pregunta si les gustan (o disgustan) las matemáticas cuya respuesta nos arrojó principalmente experiencias emocionales de agrado y desagrado.

El método de auto-informes diarios "implican, auto-informes intensivos repetidos que tienen como objetivo capturar eventos, reflexiones, estados de ánimo, dolores, o interacciones cerca el momento en que se producen" (Iida, Shrout, Laurenceau, y Bolger, 2012, p. 277), optamos por usar un *protocolo basado en eventos* (Iida et al., 2012). La maestra entrego un cuadernillo con las siguientes preguntas y hojas para contestar, cada clase diez o quince minutos antes de terminar cada clase el profesor del curso les llenara el diario, los estudiantes se quedaron con sus respuestas hasta el último informe.

1. ¿De qué temas de matemáticas trató la clase de hoy?
2. ¿Qué aprendiste hoy en la clase de matemáticas?
3. Cuéntanos las experiencias positivas que has vivido hoy en la clase de matemáticas ¿Por qué fueron experiencias positivas?

4. Cuéntanos las experiencias negativas que hayas vivido hoy en la clase de matemáticas ¿Por qué fueron experiencias negativas?
5. ¿Te sentiste motivado o desmotivado hoy en la clase de matemáticas? ¿Por qué te sentiste así?

En total recopilamos informes durante siete días-clase llevadas a cabo los días 19, 21, 24, 25, 26, 28 de noviembre y 2 de diciembre de 2014.

Análisis de los datos

De los datos recolectados consideramos solo las narrativas que expresaran una experiencia emocional. Siguiendo la teoría en nuestro análisis consideramos dos aspectos para identificar un tipo de emoción: 1) ***Frases concisas que expresan las situaciones desencadenantes*** de las experiencias emocionales, destacamos estas frases en ***negrita cursiva***. 2) *Frases y palabras emocionales* que expresan la experiencia emocional desde el lenguaje emocional de los participantes, destacamos estas frases en *cursiva*.

Resultados

Presentaremos los resultados de esta investigación según los objetivos que se planteó: identificar las experiencias emocionales individuales de Candice a lo largo de varios días clases e identificar los antecedentes de sus experiencias emocionales, es decir la estructura de valoración.

Sobre las experiencias emocionales de Candice

Identificamos 24 experiencias emocionales: 23 durante los informes diarios (Tabla 2 y tabla 3) y otra más en el cuestionario en donde Candice reporta agrado por las matemáticas:

Candice-C: *Si [me gustan las matemáticas] porque se me facilitan mucho y son divertidas* {Agrado}.

Tabla 2. Tipo de experiencias emocionales de los participantes en todos los días

Participante	Satisfacción	Decepción	Gratitud	Agrado	Orgullo	Miedo	Auto reproche	Total
Candice	13	2	2	1	4	1	1	24

Tabla 3. Informes diarios de Candice

R	Extracto de las narrativas del reporte	Situación desencadenante
1	*[Mi experiencia positiva* es que] ***Aprendí algo nuevo*** {satisfacción} ***y las dudas que surgían la maestra siempre nos las resuelve*** {Gratitud} *[Mi experiencia negativa* es que] Al principio ***no comprendía bien la forma en hacer el método de Gauss-Jordan*** {Decepción} *[Me sentí] motivada* porque como dije anteriormente ***tuve la oportunidad de aprender algo nuevo*** {Satisfacción}.	Aprender algo nuevo La maestra resuelve las dudas No comprender como resolver Aprender algo nuevo
2	*[Me sentí] motivada*, porque ***al aplicar más ejemplos*** {Satisfacción} ***comprendí mejor la forma de hacerlo*** {Satisfacción}. [*Mi experiencia positiva* fue mi] participación en clase, ***para comprender mejor las ecuaciones.***{Satisfacción}	Resolver ejercicios Comprender como resolver Comprender como resolver
3	*[Me sentí] motivada* ***porque al fin había entendido completamente todo lo visto en la unidad*** {Satisfacción} [*Mi experiencia positiva* fue que] ***Ayude a otros compañeros a resolver los ejemplos*** {Orgullo}	Entender el tema Ayudar a compañeros
4	[*Mi experiencia positiva* fue que] me di cuenta que ***si aprendí muy bien todos los métodos*** {Satisfacción}. [*Mi experiencia negativa* fue que] mi calculadora no funcionaba muy bien y me ***hizo batallar para sacar algunos resultados con fracción*** {Decepción}. *[Me sentí] motivada*, porque ***todo lo que vimos en la clase lo aprendí muy bien*** {Satisfacción}.	Aprender los métodos No obtener resultados correctos Aprender el tema
5	[*Mi experiencia positiva* fue que] ***entendí muy bien lo explicado por la maestra*** {Satisfacción}. *[Me sentí] motivada*, ya que tenía mucho tiempo sin ver este tema y al volver a repasar lo volví a recordar. Además de que ***tuve la oportunidad de aprender algo nuevo*** {Satisfacción}.	Entender el tema Aprender algo nuevo
6	[*Mi experiencia positiva* fue que] ***pude entender rápidamente*** {Orgullo} los temas que la maestra había puesto, además ***de que algunos compañeros nos ayudaron*** {Gratitud}.	Entender rápido Recibir ayuda de un compañero

	[*Mi experiencia negativa* fue que] No sabía que nos habían adelantado la clase y estaba preguntando sobre otro trabajo a otro maestro, ***por lo que llegue tarde a clase*** {Auto reproche}. *[Me sentí] motivada*, porque aunque llegue tarde a la clase en un poco rato ***pude entender lo que la maestra ya había explicado*** {Orgullo}.	Llegar tarde Entender a pesar de llegar tarde
7	*[Hoy sentí] Confianza* ***al entender lo del tema*** {Satisfacción}. Al principio ***dudas en algunos procedimientos*** {Miedo}, pero *seguridad* ***al saber que si los pude resolver*** {Satisfacción}. [*Mi experiencia positiva* fue que ***la maestra] nos puso a resolver un ejercicio, solos,*** de los que apenas habían explicado y ***lo pude hacer correctamente*** {Orgullo}. *[Me sentí] motivada*, ***porque aunque fueron muchos temas lo pude comprender muy bien*** {Satisfacción}.	Entender el tema Previsión de resolver incorrectamente los ejercicios Resolver ejercicios Resolver ejercicios Comprender los temas

Sobre la estructura de valoración de Candice

A partir de la Tabla 3 identificamos las situaciones desencadenantes según la meta, norma o actitud a la que está relacionada, a partir de ello, inferimos una estructura de valoración que soporta las experiencias emocionales de Candice (Figura 1).

Agrupamos en la meta 'aprender matemáticas en cada clase' todas aquellas situaciones desencadenantes que se refieran a elementos cognitivos cuyo fin último es el aprendizaje de las matemáticas. En el mismo sentido todas aquellas situaciones que se refieren a 'resolver ejercicios' las organizamos con la meta 'resolver ejercicios en clase' que incluye todas las situaciones desencadenantes que se refieren a los ejercicios en clase. Las normas que logramos identificar en la estructura de valoración de Candice son tres; dos normas de comportamiento de los estudiantes, encontramos que para Candice 'los estudiantes no deben faltar a clase' ni 'llegar tarde a clase' y que 'los compañeros de clase deben ayudarse' —norma que inferimos de las situaciones en donde Candice considera positivo tanto recibir como dar ayuda a los compañeros explicando algún tema o resolviendo ejercicios—. En cuanto al maestro para Candice 'el maestro debe resolver las dudas de los estudiantes' (R1) que es una norma global de su estructura de valoración. Las actitudes de Candice, expresadas en el cuestionario, ante las matemáticas son de atracción por dos razones 'las matemáticas son fáciles' y 'las matemáticas son divertidas'.

Para Candice 'aprender matemáticas en cada clase' es la meta de mayor importancia en la clase de matemáticas; la meta de 'resolver ejercicios en clase' (R2) y la norma de que 'los estudiantes no deben faltar a clase' (R7) son necesarios para lograrla. Alcanzar la meta de 'resolver ejercicios en clase' es facilitada por el cumplimiento de las normas: 'el maestro debe resolver las dudas de los estudiantes'

(R1) y que para resolver correctamente y corregir los ejercicios en clase ‘los compañeros de clase deben ayudarse’ (R3).

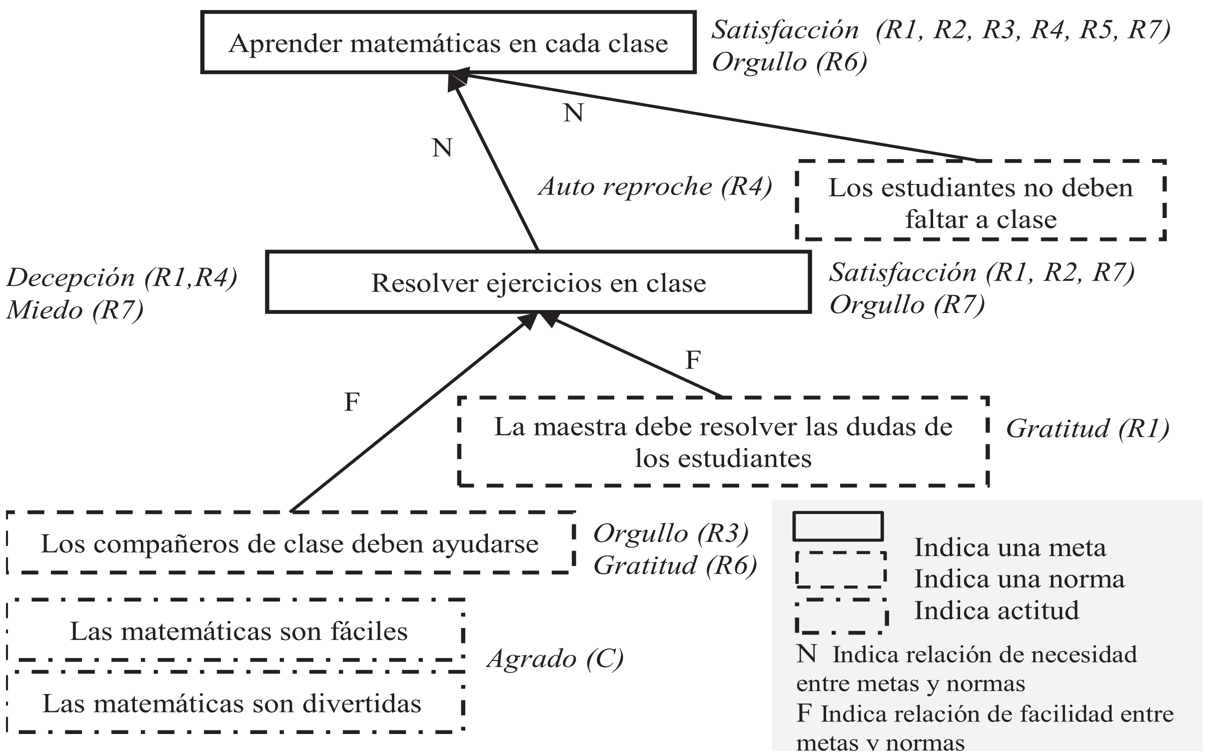


Figura 1. Estructura de valoración de Candice

Discusión

Encontramos que las emociones experimentadas por Candice son producto de la valoración de situaciones que posibilitan u obstaculizan el logro de dos metas centrales — ‘aprender matemáticas en cada clase’, ‘resolver ejercicios correctamente en cada clase’— aunque de manera implícita podemos reconocer ‘aprobar exámenes’ y ‘aprobar el curso’. Estos resultados señalan que las experiencias emocionales individuales de los estudiantes están soportadas por una estructura de valoración en correspondencia con las metas y objetivos establecidos por la maestra participante en el aula de matemáticas y por el plan curricular del curso. Ya que podemos notar una correspondencia entre la disposición de la clase presentada por la profesora y las valoraciones de los estudiantes. La investigación en educación matemática ya ha puesto de relieve el papel fundamental de las metas en la experiencia emocional. Hannula (2006) conecta los conceptos de emoción y metas para definir la motivación en matemáticas como "metas reflejadas en las emociones", ya que es posible dirigir la conducta a través de los mecanismos que controlan las emociones.

Estos resultados son consistentes con las tendencias actuales en la investigación del afecto en educación matemática, ya que pone de relieve que el afecto y sus componentes forman un "sistema dinámico". Así, debido a las fuertes relaciones entre los componentes de estos sistemas, un fallo en uno o más componentes pueden dar lugar a fallos en cascada, lo que puede tener consecuencias catastróficas sobre el funcionamiento del sistema. Nuestros resultados apuntan el sentido contextual de este sistema.

Las consideraciones anteriores derivan en una conclusión: las estructuras que soportan las experiencias emocionales de los estudiantes están ligadas estrechamente al contexto. Si bien el sistema emocional de las personas es parte de nuestra herencia genética como especie y las experiencias emocionales pueden considerarse como un fenómeno individual, nuestros resultados (junto con los principios y hallazgos de las teorías de la valoración) señalan que las estructuras de valoración de las experiencias emocionales de los participantes son contextuales.

Referencias bibliograficas

Ahmed, W., Werf, G., Minnaert, A., & Kuyper, H. (2010). Students' daily emotions in the classroom: Intra-individual variability and appraisal correlates. *British Journal of Educational Psychology*, *80*(4), 583–597. http://doi.org/10.1348/000709910X498544

Dai, D. Y., & Sternberg, R. J. (2004). *Motivation, emotion, and cognition; Integrative perspectives on intellectual functioning and development*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Eid, M., & Diener, E. (1999). Intraindividual variability in affect: Reliability, validity, and personality correlates. *Journal of Personality and Social Psychology*, *76*(4), 662–676. http://doi.org/10.1037/0022-3514.76.4.662

Ellsworth, P. C., & Scherer, K. R. (2009). Appraisal processes in emotion. In R. J. Davidson, K. R. Scherer, & H. H. Goldsmith (Eds.), *Handbook of affective sciences* (pp. 572–595). New York, NY: Oxford University Press.

Hannula, M. S. (2006). Motivation in Mathematics: Goals Reflected in Emotions. *Educational Studies in Mathematics*, *63*(2), 165–178. http://doi.org/10.1007/s10649-005-9019-8

Iida, M., Shrout, P., Laurenceau, J., & Bolger, N. (2012). Using Diary Methods in Psychological Research. *APA Handbook of Research Methods in Psychology: Vol. 1. Foundations, Planning, Measures and Psychometrics*, *1*, 277–305. http://doi.org/10.1037/13619-016

Kim, C., & Pekrun, R. (2014). Emotions and Motivation in Learning and Performance. In J. M. Spector, M. D. Merrill, J. Elen, & M. J. Bishop (Eds.), *Handbook of Research on Educational Communications and Technology,* (pp. 65–75). New York, NY: Springer. http://doi.org/10.1007/978-

1-4614-3185-5

Meyer, D. K. (2014). Situating Emotions in Classroom Practices. In R. Pekrun & L. Linnenbrink-Garcia (Eds.), *International Handbook of Emotions in Education* (pp. 458–472). Taylor & Francis. http://doi.org/10.4324/9780203148211.ch23

Ortony, A., Clore, G. L., & Collins, A. (1988). *The cognitive structure of emotions*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

A NOÇÃO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA NA TRANSIÇÃO ENSINO MÉDIO E SUPERIOR

Marlene A. Dias, Valdir Bezerra S. Júnior, Miriam R. Guadagnini, Renato S. Ignácio
Universidade Anhanguera de São Paulo. (Brasil)
maralvesdias@gmail.com, valdir.bezerra@gmail.com, miriamguadagnini@hotmail.com, renatoignacio@gmail.com

RESUMO: Apresentamos aqui parte de nossa pesquisa sobre a transição entre os Ensinos Médio e Superior para a noção de função quadrática, considerada um subsídio importante para o início do Ensino Superior. Nosso objetivo é identificar os conhecimentos disponíveis sobre esta noção quando se inicia o Ensino Superior. O referencial teórico central é a Teoria Antropológica do Didático e os referenciais de apoio são as noções de quadro, pontos de vista e níveis de conhecimento esperados. Trata-se de uma pesquisa documental, cujos resultados podem auxiliar estudantes e professores a articular os conhecimentos desenvolvidos no Ensino Médio com os introduzidos no Ensino Superior.

Palavras chave: função uadrática, praxeologias, níveis de conhecimento

ABSTRACT: This article shows a part of a study related to the transition of the quadratic-function notion from secondary education to higher education. Such notion is considered an important premise for the students to start higher education. This work attempts to identify the knowledge students have about this notion when they enter higher education. The main theoretical points of reference are the anthropologic theory of didactics and the reference related to quadratic functions, points of view and expected levels of knowledge. It's a well-informed investigation whose results can help students and teachers to link the knowledge already acquired at the secondary education with the one introduced at higher education

Key words: quadratic function, praxeology, knowledge levels

Introdução

Este trabalho se insere num cenário maior de pesquisa, que trata das questões de transição entre as diferentes etapas escolares, quando se considera o ensino de Matemática e seus diversos domínios, a saber: Geometria, Álgebra, Matemática Financeira etc. Logo, o que teremos aqui é um recorte de uma pesquisa mais global, para o qual destacamos o estudo sobre a noção de função quadrática.

Neste mesmo caminho, cabe destacar que estamos tratando da transição segundo o olhar centrado na instituição, conforme Gueudet (2008), que considera quatro formas diferentes de olhar para a transição, que auxiliam a diagnosticar e interpretar as dificuldades apresentadas pelos estudantes, em particular, na passagem do Ensino Médio para o Ensino Superior.

Gueudet (2008) explicita ainda que as ações didáticas a serem propostas dependem da forma como olhamos para a transição, ou seja, se consideramos o olhar sobre o modo de pensar, que corresponde aos saberes intrinsecamente mais complexos, os quais necessitam de novos modos de pensar, ou o olhar sobre a organização dos conhecimentos, que corresponde à nova organização em rede dos conhecimentos, ou o olhar sobre a linguagem e os modos de comunicação, que corresponde a empregar uma linguagem matemática diferente, que exige novos símbolos e um novo tipo de discurso. Além disso, significa utilizar novas regras de comunicação, isto é, as demonstrações e as exigências de rigor são necessárias. Finalmente, destacamos o olhar centrado na instituição, para o qual a pesquisadora observa que a Matemática praticada no Ensino Médio é diferente daquela que será trabalhada no Ensino Superior. Isto deve ocorrer, ultrapassando a simples consideração dos conteúdos em jogo, uma vez que o mesmo conteúdo será tratado de forma diferente, a mesma tarefa será efetuada com outra técnica e as técnicas ensinadas são explicadas de outra forma.

A opção por analisar e interpretar a transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior, considerando o olhar sobre a instituição se deve ao fato de que no Brasil, atualmente, as macroavaliações têm mostrado que apesar de ser uma noção que é introduzida no Ensino Fundamental anos finais (estudantes entre 11 e 14 anos), revisitada para a introdução de novos conhecimentos no Ensino Médio (estudantes entre 15 e 17 anos) e considerada como disponível no início do Ensino Superior, os estudantes não dominam esta noção, suas propriedades e representações.

É importante observar ainda que, atualmente, no Brasil, a noção de função quadrática, suas propriedades e representações algébrica e gráfica, em função das propostas institucionais, são consideradas como conhecimentos prévios disponíveis para os estudantes que iniciam o Ensino Superior brasileiro, o que corresponde apenas à expectativas que não estão em conformidade com as macroavaliações.

Dessa forma, cabe refletir que a Matemática desenvolvida nos dois níveis de ensino ainda gera pontos de insatisfação, como: os numerosos fracassos dos alunos, a falta de curiosidade, as perdas de sentido, as dificuldades de entrar no pensamento científico, a gestão de classes que, nos primeiros anos da universidade, têm se tornado cada vez mais heterogêneas. Dando ênfase ao ponto de insatisfação da perda de sentindo, gostaríamos de refletir sobre algumas ideias de Chevallard (2007), que destaca esta perda de sentido como uma situação em que os conteúdos a serem estudados na escola se sustentam neles mesmos para continuarem sendo estudados. Por exemplo, não há uma justificativa para a seguinte pergunta: Por que estudarmos as noções associadas à função quadrática na escola?

Em Chevallard (2007, p. 22), este mesmo foco de pergunta é direcionado ao estudo dos triângulos: “Mas, qual questão *matemática* (grifo do autor) gera o interesse dos matemáticos pelo triângulo? E por que continuamos a estudar os triângulos na escola?” Estes questionamentos nos levam à reflexão de que realmente perdemos o sentido para algumas noções do porquê ainda as estudamos.

Sabemos que este problema da perda de sentindo é algo mais amplo e nos estimula a refletir sobre mudanças na instituição escola. Neste sentindo, acreditamos que as mudanças necessitam do apoio de pesquisas, na medida em que precisamos identificar quais as condições e restrições que os saberes sofrem nas instituições em que vivem, ou seja, qual a ecologia desses saberes. Diante disto, nosso objetivo neste trabalho é identificar as praxeologias prescritas para serem desenvolvidas no Ensino Médio, quando se considera o processo de ensino e aprendizagem da noção de função quadrática e qual a possibilidade de considerá-las como conhecimentos prévios disponíveis no Ensino Superior.

Para dar suporte teórico a este trabalho, recorremos às teorias desenvolvidas no âmbito da Didática da Matemática, isto é, utilizamos como aporte teórico principal a teoria antropológica do didático (TAD) (Chevallard, 1994, 2001) e ainda como teorias suplementares a noção de quadro (Douady, 1992), pontos de vista (Rogalski, 2001) e níveis de conhecimento (Robert, 1998), que iremos explanar no tópico que segue.

Referencial teórico

Como destacado anteriormente, temos uma edificação teórica fundamentada principalmente na TAD, mas com a sustentação de outras teorias. Da TAD nos baseamos, em especial, nas noções de praxeologia e ostensivos e não ostensivos, que permitem compreender os diferentes tipos de tarefas, as técnicas a elas associadas e os discursos tecnológicos e teóricos que as justificam. Além disso, consideramos os objetos de manipulação e evocação dessas técnicas, quando se considera a noção de função quadrática, a saber: os ostensivos e não ostensivos.

Segundo Chevallard (2001), a noção de praxeologia pode ser descrita por um bloco prático, isto é, a praxeologia é a composição de um *tipo de tarefa* - T, pois para o autor, toda atividade humana pode ser decomposta em tipo de tarefas, que comportam pelo menos uma *técnica* - τ para resolver determinados tipos de tarefas, de uma tecnologia – θ, que é uma explicação racional para a técnica utilizada quando da realização do tipo de tarefa e, por fim, de uma teoria – Θ, que justifica a tecnologia, ou seja, a praxeologia é expressa simbolicamente por $[T/\tau/\theta/\Theta]$.

Como afirmado anteriormente, toda atividade humana pode ser decomposta em tipos de tarefas e as mesmas têm pelo menos uma técnica associada. As técnicas são compostas por dois "ingredientes" que Chevallard (1994) denomina objetos ostensivos e não ostensivos. Os objetos ostensivos refletem os objetos materiais e sensíveis, ou seja, aqueles objetos que podem de alguma forma ser manipulados. Os objetos ostensivos podem ser gestuais, discursivos, gráficos e escriturais, isto é, o gesto que realizamos para dizer que está tudo bem, ou um discurso que preparamos para desenvolver uma palestra, ou desenhos para explicar como podemos dividir igualmente um alimento entre várias pessoas etc.

Numa dialética, podemos considerar que os objetos ostensivos estão diretamente associados aos objetos não ostensivos, ou seja, ao campo das ideias, dos conceitos, das noções etc. Logo, os objetos não ostensivos diferentemente dos ostensivos não podem ser manipulados, mas sim evocados. Por exemplo, podemos evocar a noção de função quadrática que só poderá ser manipulada por meio de um de seus ostensivos, em geral, o ostensivo gráfico ou o ostensivo algébrico.

Além das noções da TAD, também recorremos à noção de quadros de Douady (1992), a qual afirma:

> [...] constituído de objetos de um ramo das matemáticas, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais associadas a esses objetos e essas relações. Essas imagens têm um papel essencial e funcionam como ferramentas dos objetos do quadro. Dois quadros podem conter os mesmos objetos e diferir pelas imagens mentais e problemáticas desenvolvidas (Douady, 1992, p. 135).

Podemos fazer uma relação direta, quando falamos dos objetos de Douady (1984), com os objetos ostensivos e não ostensivos, que tratamos anteriormente. Podemos inferir que os objetos pertencentes a um quadro da Matemática, desde que manipuláveis, podem ser um ostensivo, quando nos referimos à TAD. Cabe destacar que a ideia de quadros nos dá subsídio para compreender como e em qual quadro a noção de função quadrática está inserida nas duas instituições que analisamos, isto é, o Ensino Médio e Superior.

Outra noção que nos dá suporte na análise das atividades que tivemos como alvo é a o que Rogalski (2001) chama de ponto de vista, ou seja, para o autor, trata-se de uma noção menos precisa que as de quadro e ostensivo. Considerando a distinção feita pelo pesquisador, mudar de quadro ou encontrar o ostensivo adequado para estudar um objeto matemático corresponde a uma mudança de ponto de vista. Mas podemos também mudar de ponto de vista, permanecendo no mesmo quadro ou utilizando o mesmo ostensivo.

Por exemplo, utilizar a função quadrática para resolver tarefas de Física corresponde a uma mudança de quadro e também a uma mudança de ponto de vista. Podemos exemplificar a permanência no mesmo quadro com mudança do ponto de vista, quando resolvemos uma equação quadrática por meio da fatoração ou da fórmula de Bháskara, permanecemos assim, no quadro algébrico, portanto efetuamos uma mudança de pontos de vista, utilizando os ostensivos algébricos e numéricos cujos não ostensivos são distintos.

Como última ideia de suporte para análise deste trabalho, destacamos o que Robert (1998) intitula níveis de conhecimento esperados dos estudantes. Os níveis nos proporcionam uma nova ferramenta de análise, que nos auxilia a classificar os tipos de tarefas em relação ao trabalho esperado dos estudantes, a saber: os níveis técnico, mobilizável ou disponível. Observamos que esses níveis são relativos a um determinado nível de conceituação, o que corresponde a considerar diferentes formas de tratamento das noções e conceitos matemáticos relativos a um determinado campo conceitual, ou seja, segundo a pesquisadora, metaforicamente, esses níveis de conceituação correspondem a prateleiras desse mesmo campo.

O que é definido como tipos de tarefas de *nível técnico* são aquelas que funcionam de maneira mais isolada, local e concreta, isto é, tarefas que são explícitas em sua composição, ou seja, é direta a identificação de qual noção deve ser utilizada na busca da resolução. No que se refere ao *nível mobilizável*, este é mais amplo que o anterior, pois existe um início de relação entre diversos saberes de um determinado campo da Matemática, vários métodos podem ser mobilizados, os caracteres, ferramenta e objeto são considerados, além disso, a noção a utilizar está explícita na tarefa. Se um saber é identificado, ele é dito mobilizável se é acessível, se o estudante o utiliza corretamente. Por fim, temos o *nível disponível* que corresponde, a saber resolver o que é proposto sem indicações, de poder, por exemplo, dar contraexemplos (encontrar ou inventar), mudar de quadros (relacionar), aplicar métodos não previstos.

Após esta rápida exposição da teoria que fundamenta nosso trabalho e daquelas que também dão apoio a nossa análise, passaremos ao próximo tópico, que tem como objetivo expor o percurso metodológico deste trabalho.

Percurso Metodológico

Nossa pesquisa tem em sua essência a natureza qualitativa, ou seja, estamos preocupados em analisar as praxeologias propostas no Ensino Médio e como estas podem servir de conhecimentos prévios para o Ensino Superior, ou seja, nosso foco não é uma análise quantificadora das atividades que analisamos, mas sim uma análise de como estas atividades estão organizadas e de como elas podem auxiliar a introdução de novas noções e conceitos no Ensino Superior.

A metodologia consiste na análise das praxeologias prescritas para o ensino da noção de função quadrática, tanto no Ensino Médio como no Ensino Superior brasileiro, via livros didáticos indicados para essas etapas escolares. Para tal, nela é utilizado o método da pesquisa documental, que, segundo Lüdke et André (1986), está associado à pesquisa qualitativa, pois permite complementar informações obtidas por outras técnicas e/ou desvendar aspectos de um tema ou problema.

Analisamos os livros didáticos avaliados e indicados pelo Ministério da Educação do Brasil, mas neste trabalho, apresentamos apenas os resultados da obra de Dante (2012), por se tratar da obra mais utilizada na rede pública de ensino do Brasil. Além disso, nos apoiamos na ideia de Lima et al. (2000), que afirma que as coleções de livros de Matemática no Brasil têm abordagens muito semelhantes, logo, acreditamos que se trazemos os dados do livro mais utilizado, podemos estar expondo grande parte daquilo que é difundido no Ensino Médio do Brasil referente à noção de função quadrática.

Analisamos ainda as atividades sobre função quadrática dos últimos cinco anos do Exame Nacional do Ensino Médio –(ENEM) e dos exames vestibulares também dos últimos cinco anos da Universidade Estadual de Campinas –(UNICAMP).

Como suporte para estas análises, construímos uma grade, cuja função é identificar os tipos de tarefas, as técnicas associadas, as tecnologias que as tornam compreensíveis e justificáveis, as noções matemáticas empregadas nos diferentes momentos, assim como os ostensivos e não ostensivos utilizados no Ensino Médio e revisitados no Ensino Superior.

Grade de análise

Este tópico é destinado à exposição da grade de análise. Como antes já afirmado, nela detalhamos os elementos que compõem a praxeologia das atividades analisadas, tanto para o livro didático considerado, como para as macroavaliações ENEM e vestibular UNICAMP.

Vejamos na Figura 1, a aplicação da grade de análise para uma tarefa que é tratada em todos os livros analisados e nas macroavalições, com a diferença de que a quantidade de material dada é numérica e não algébrica, por exemplo, 40 m.

Tipo de tarefas: Dada uma quantidade de material, cercar uma quadra de vôlei de forma que sua área seja máxima.

Técnica1: Desenhar um retângulo e dividir a quantidade de material (2n), que corresponde ao perímetro desse retângulo, indicando algebricamente seus lados.

x

n – x

- ✓ Escrever a função que representa a área do terreno: $f(x) = -x^2 + nx$.
- ✓ Determinar o valor da abscissa x por meio da noção de vértice de uma parábola. (Ensino Médio – Brasil)

Técnica 2: Da mesma forma que na técnica 1 escrever a função que representa a área do terreno.

- ✓ Determinar a primeira derivada da função dada e igualar a zero. Determinando assim o valor de x.
- ✓ Determinar a segunda derivada para mostrar que se trata de um ponto de máximo. (Ensino Superior – Brasil

Tecnologia da técnica 1: Reconhecer que se trata de um terreno retangular e representar algebricamente seu perímetro. Reconhecer que a área será representada por uma função quadrática. Associar representação algébrica e gráfica de uma função quadrática e determinar a abscissa do vértice da parábola, que será o ponto de máximo uma vez que o coeficiente a de x^2 é negativo, ou seja, a parábola tem concavidade para baixo.

Tecnologia da técnica 2: Reconhecer que se trata de um terreno retangular e representar algebricamente seu perímetro. Reconhecer que a área será representada por uma função quadrática. Utilizar a noção de derivada de uma função e suas propriedades, determinar o valor da abscissa x, usando a primeira derivada e concluir que se trata da abscissa do ponto de máximo por meio da segunda derivada.

Teoria: Elementos sobre o conceito de grandezas e medidas. Elementos de álgebra elementar sobre equação quadrática e função quadrática e suas representações e propriedades para a *técnica 1*.

Elementos sobre o conceito de grandezas e medidas. Elementos de álgebra elementar sobre equação quadrática e função quadrática e suas propriedades e noção de derivada de uma função real a valores reais e suas propriedades para *a técnica 2*.

Objetos Ostensivos: ostensivos discursivos, ostensivo gráfico, ostensivos escriturais algébricos e ostensivos gestuais em ambas as técnicas.

Objetos não ostensivos: Noção de retângulo, perímetro e área de um retângulo e noção de função quadrática e suas propriedades (associação ostensivo algébrico e gráfico e noção de vértice) para a *técnica 1*.

Noção de retângulo, perímetro e área de um retângulo, noção de função quadrática e noção de derivada de uma função real a valores reais e suas propriedades para a *técnica 2*.

Figura 1. Aplicação da grade de análise

Fonte: Os autores

Algunos Resultados

Os resultados da análise dos livros didáticos dos Ensinos Médio e Superior nos permitiram caracterizar as relações institucionais existentes, por meio do conjunto de praxeologias indicadas para serem desenvolvidas com os estudantes dos Ensinos Médio e Superior.

Os resultados da análise das macroavaliações ENEM e UNICAMP nos possibilitam determinar as relações pessoais esperadas dos estudantes na transição entre os Ensinos Médio e Superior.

Cruzando estes dois resultados, foi possível verificar se existe coerência entre o que se espera dos estudantes e o que é trabalhado no Ensino Médio e quais os conhecimentos que podemos supor disponíveis para utilizá-los como conhecimentos prévios para a introdução de novas noções no Ensino Superior.

Observamos que a noção de função quadrática, em geral, é trabalhada no Ensino Médio no quadro algébrico, com ênfase em seus ostensivos algébricos e gráficos, sendo suas propriedades visualizadas por meio do ostensivo gráfico.

As tarefas prescritas para esta etapa escolar são clássicas, o que pode dificultar sua aplicação em situações que diferem daquelas trabalhadas em sala de aula, ou seja, os níveis de conhecimento esperado dos estudantes, em geral, são o técnico e o mobilizável. O nível disponível é pouco considerado e quando aparece, em geral, está associado a tarefas, cujos contextos não representam situações reais.

Considerando os livros analisados, apresentamos aqui apenas os resultados da obra para o Ensino Médio de Dante (2012), por se tratar do livro didático mais utilizado nas escolas brasileiras, como já anunciamos acima.

Apesar de Dante (2012), para o Ensino Médio, propor tarefas em outros contextos, estas são apresentadas por meio de questões específicas, o que corresponde a uma dificuldade, quando é necessária a organização destas tarefas específicas em uma única tarefa, o que corresponde ao tipo de atividade proposta no vestibular da UNICAMP.

Já, em relação ao ENEM, consideramos que as tarefas prescritas nos livros didáticos são mais compatíveis e a dificuldade pode estar associada ao enunciado das mesmas, que muitas vezes traz um texto desnecessário, pois se espera apenas que o estudante seja capaz, por exemplo, de determinar o valor numérico da função quadrática dada num determinado ponto.

Conclusão

Concluímos que, em função da relação institucional existente, os estudantes que terminam o Ensino Médio têm conhecimentos que podem auxiliá-los a utilizar técnicas algébricas específicas, como determinar o zero da função quadrática, seu valor numérico, seus pontos de máximo ou mínimo via determinação do vértice, os intervalos em que a função é crescente e decrescente, o que pode ser considerado um conhecimento prévio a ser articulado quando, por exemplo, da introdução da noção de derivada de função polinomial e suas propriedades, pois com estes conhecimentos, é possível estender o universo cognitivo dos estudantes, ou seja, ampliar o conjunto das relações pessoais deles para o caso das funções polinomiais de grau maior que 2.

Referências Bibliográficas

Chevallard, Y. (1994). *Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique*. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/.

Chevallard, Y. (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/.

Chevallard, Y. (2001). *Organiser l'étude.1. Structures & Fonctions.* Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser_I_etude_1.pdf.

Dante, L. R. (2012). *Matemática contexto e aplicações*. São Paulo: Ática.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques*. Paris : IREM de l'Université de Paris VII.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM*, 6, 132-158.

Gueudet, G. (2008). *La transition secondaire-supérieur: différents regards, différentes vues: Intervention au Centre de Didactique Supérieur*. Liège : Université de Liège.

Lima, E. L. et al. (2000). *A Matemática do Ensino Médio*. Brasil: Sociedade Brasileira de Matemática.

Lüdke, M., & André, M.E.D.A. (1986). *Pesquisa em educação:* abordagens qualitativas. São Paulo: EPU.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée à l'université. *Recherches en didactique des Mathématiques* 18(2), p. 139-190.

Rogalski, M. (2001). Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady. In *Actes de la journée en hommage à Régine Douady*, 13-30. Paris: Didirem.

COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE TRIÁNGULO DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS, EN EL MARCO TEÓRICO DE LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

Eliécer Aldana Bermúdez, Graciela Wagner Osorio, Manuela Arango Marín
Universidad del Quindío. (Colombia)
eliecerab@uniquindio.edu.co, gwagner@uniquindio.edu.co, arango1112810@hotmail.com

RESUMEN: Este artículo hace parte de una investigación que tiene como objetivo la comprensión del concepto de triángulo en estudiantes universitarios desde los registros de representación semióticos y secuencias de enseñanza, mediadas por material físico y entornos informáticos. El marco teórico son los sistemas de representación semiótica, la metodología es de tipo cualitativa, apoyada en una ingeniería didáctica. Los resultados muestran cómo los estudiantes usan situaciones problema, representaciones, conceptos, argumentos, procedimientos y propiedades que configuran el concepto de triángulo. Esto ha permitido concluir que los estudiantes muestran diferencias en las formas de argumentar, demostrar y establecer relaciones entre los elementos matemáticos.

Palabras clave: pensamiento geométrico, didáctica, secuencias, triángulo

ABSTRACT: This article is part of a research aimed at the university students' understanding of triangle concept from the registers of semiotic representation and teaching sequences by using teaching aids and computing settings. The semiotic representation systems constitute the theoretical framework. A qualitative methodology, based on a didactic engineering is applied. The outcomes show how students use problem solving activities, representations, concepts, procedures and properties that make up triangle concept. It has led to the conclusion that the students show differences in the ways of arguing, demonstrating, and establishing the relationship between mathematics elements.

Key words: geometric thinking, didactics, sequences, triangle

Introducción

Los fundamentos geométricos que debe tener un estudiante para profesor de matemáticas tienen importancia en el contexto de los saberes matemáticos, y su aprendizaje significativo está relacionado con una comprensión real de las propiedades presentes en el objeto geométrico que se estudie, para ello es necesario que el docente se apropie y utilice instrumentos que faciliten su construcción, las relaciones, sus propiedades y características; además su estudio comprende contextos más generalizados que involucra a los polígonos, razón por la cual se considera vital el trabajo en geometría plana y es fundamento teórico para continuar el estudio de la geometría analítica.

Esta investigación se desarrolló en el campo del pensamiento matemático, en concreto en el desarrollo del pensamiento espacial y sistemas geométricos y tuvo como propósito analizar la comprensión del concepto de triángulo de estudiantes universitarios desde los registros de representación semiótica (Duval, 1993), apoyada en el sustento teórico de la ingeniería didáctica que proviene de la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1997) y la teoría de la transposición didáctica (Chevallard, 1991); centra su atención en la construcción del concepto de polígono, en concreto el estudio del concepto de triángulo en estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de una Universidad Colombiana.

Marco teórico

Las investigaciones en pensamiento matemático avanzado requieren de una representación interna de los objetos matemáticos en abstracto, de forma que la mente tenga la posibilidad de operar con tales representaciones. Para comunicar estas ideas es preciso representarlas externamente para que sea posible lograr la comunicación (Castro y Castro, 1997, p. 101).

> Las representaciones, según la tradición racionalista, constituyen una entidad intermedia entre el objeto de conocimiento y el sujeto. Todas las disciplinas que tienen como objeto el estudio del conocimiento humano, manejan las nociones de representación y comprensión (Rico, 2009, p. 2). Dentro del paradigma cognitivo, es reconocido el interés por las representaciones mentales por parte de investigadores en didáctica de la matemática, ya que:
>
> Para pensar sobre ideas matemáticas y comunicarlas necesitamos representarlas de algún modo. La comunicación requiere que las representaciones sean externas, tomando la forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos. … Para pensar sobre ideas matemáticas necesitamos representarlas internamente, de manera que permita a la mente operar sobre ellas. (Hiebert y Carpenter, 1992, p. 66, citado en Rico, 2009, p. 7).

En este sentido, para lograr la comprensión/construcción del concepto matemático de triángulo, desde sus características, propiedades y aplicaciones, adoptamos la teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval (1993). Asimismo, Duval, (2004) afirma que no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación, porque no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación, y que para estudiar la complejidad del aprendizaje matemático hay que tener en cuenta también a los estudiantes y no solamente la complejidad epistemológica de los conceptos.

Las actividades de representación inherentes a la semiosis son la formación, que se utiliza para “expresar” una representación mental o para “evocar” un objeto real, por ejemplo, la lengua materna, un código icónico de representación gráfica, una lengua formal, como frases, imágenes, esquemas, tablas; el tratamiento, que corresponde a las transformaciones que producen una representación en el mismo registro, por ejemplo, el cálculo es un tratamiento interno al registro de una escritura simbólica de cifras o de letras; y la conversión, que son las actividades que convierten el registro inicial en un nuevo registro cuyo sistema de representación es diferente del inicial, por ejemplo operaciones como “traducción”, “ilustración”, “transposición”, “interpretación”, “codificación” (Duval, 2004, p. 43-46).

Además de la comprensión matemática y de los sistemas semióticos de representación, este estudio se apoya en el sustento teórico de la ingeniería didáctica que proviene de la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1997) y la teoría de la transposición didáctica (Chevallard, 1991), que tienen una visión sistémica al considerar a la didáctica de las matemáticas como el estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos, con objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto (Brousseau, 1997).

En el aspecto informático, las investigaciones en Didáctica que hacen uso de los entornos informáticos también tienen sus propios marcos teóricos, los dos principales son el instrumental, basado en la teoría antropológica de Chevallard (Artigue, 1997) y el constructivista (basado en los principios de Piaget) que se diferencian por la forma de uso del trabajo técnico. En el enfoque instrumental el trabajo técnico es la forma de interactuar con los objetos matemáticos lo que permite avanzar en el conocimiento, en tanto el enfoque constructivista busca entender los aspectos cognitivos asociados al uso de los entornos informáticos como la intuición, interiorización y abstracción, a este último corresponde el enfoque desde el cual se va a realizar el estudio de campo en el contexto de la investigación.

Metodología

La metodología que se utilizó en esta investigación es de tipo cualitativa, explicativa y descriptiva (Bisquerra, 2009). La población objeto de la investigación, fue los estudiantes universitarios que cursan el espacio académico de Geometría Euclidiana y que estudian de manera formal este concepto matemático por primera vez. El desarrollo metodológico para el estudio de este concepto matemático, se apoya en la implementación de las fases de una ingeniería didáctica basada los sistemas semióticos de representación de Duval; para ello se utilizaron las secuencias de enseñanza orientadas al desarrollo y comprensión del pensamiento geométrico y en concreto la comprensión/construcción del concepto de triángulo en estudiantes universitarios. A partir del diseño anterior se elaboraron las secuencias de enseñanza orientadas al desarrollo de cada una de las variables didácticas (elementos matemáticos constitutivos del concepto matemático). Luego se hizo el análisis de la secuencia de enseñanza mediante la triangulación de la información, utilizando para ellos cuestionarios, entrevistas y videograbaciones.

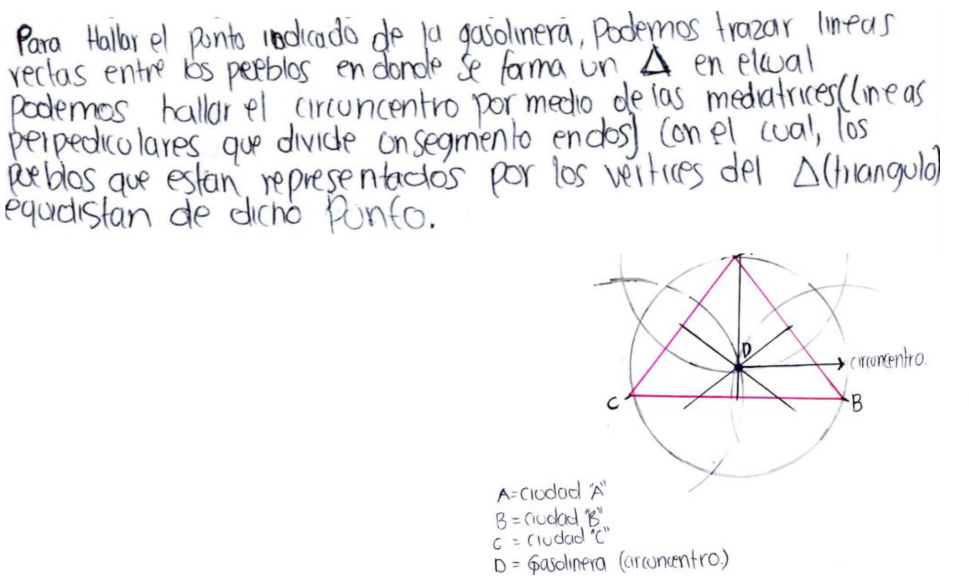
Análisis de resultados

A cada estudiante se le asignaron diferentes tareas, en el siguiente cuadro se muestra una de ellas, y a continuación la forma en que uno de los estudiantes dio la solución, así mismo el análisis respectivo.

Tabla 1. Tarea propuesta

Objetivo	Tarea	Descriptores
Identificar que tanto conocen los sujetos sobre las líneas y puntos notables, como elemento geométrico en la aplicación de un problema en contexto.	Se desea construir una gasolinera cerca de tres ciudades no alineadas, establezca el lugar más apropiado para realizar el proyecto considerando que existe la condición que la distancia entre la gasolinera y cada ciudad debe ser igual. a. Mediante una construcción geométrica resuelva la tarea planteada. b. Represente gráficamente el lugar. c. Nombre el lugar geométrico. d. Justifique su respuesta.	a. Se presenta un enunciado verbal de una situación en contexto. b. No hay una representación gráfica. c. Los participantes deben hacer traducción del lenguaje verbal al gráfico. d. No se dan datos numéricos. e. Los sujetos identifican los elementos geométricos necesarios para resolver la situación

Tabla 2. Respuesta de un estudiante



***Análisis*:** Obsérvese que los estudiantes responden en forma correcta, porque reconocen la construcción geométrica que les permite resolver la situación en contexto Los estudiantes por la forma como resuelven la tarea, ponen de manifiesto que utilizan la formación del concepto de mediatriz y logran la transformación a nivel de tratamiento (Duval, 1994), porque logran pasar del lenguaje natural al lenguaje matemático, lo que les permite contextualizar el problema para dar significado al sentido matemático del objeto geométrico.

Además, en este marco teórico se aprecia cómo alcanzan la conversión cuando establecen una correspondencia de un registro del lenguaje formal geométrico con otro tipo de representación gráfica respectiva, porque relacionan el concepto de mediatriz con el punto notable correspondiente (circuncentro), y logran articularlos a situaciones de la vida real.

Conclusiones

El uso de ambientes y estilos adecuados de enseñanza generan mejores desempeños de los estudiantes así mismo el diseño e instrucción en la planificación de la clase produce un mayor nivel de motivación y de aprendizaje en los estudiantes. Aunque el proceso de aprendizaje de la geometría comienza desde niveles intuitivos se debe llegar a la estructura formal de los conceptos objeto del aprendizaje.

El desarrollo del pensamiento espacial se genera desde los primeros años de vida del escolar y se formaliza en las aulas universitarias, el aprendizaje de la geometría está apoyado por la visualización y la representación como procesos asociados y que están presentes para que se logre el verdadero aprendizaje de cualquier concepto geométrico.

Durante las secciones de la fase de experimentación y del análisis a posteriori se notó en los estudiantes el incremento en relación con la fase a priori de un mayor desarrollo para la comprensión en solución de situaciones problema desde: uso de signos lingüísticos, matemáticos, conceptos, procesos, propiedades, argumentaciones y demostraciones.

Referencias bibliográficas

Barreto, J. (2009). Otras deducciones o extensiones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico. *Revista Números (70)* 35-51. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/70/Articulos_01.pdf.

Bisquerra, R. y Sabariego, M. (2009). *El Proceso de Investigación (Parte 1)*. *En R. Bisquerra (Coord.). Metodología de la Investigación Educativa* (2ª ed.). (89- 125). Madrid: La Muralla.

Brousseau, G. (1997). La théorie des situations didactiques. Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal., Montréal. Recuperado de http://guy-brousseau.com/1694/la-theorie-des-situations-didactiques-le-cours-de-montreal-1997/.

Castro E. y Castro E. (1997). Representaciones y modelización. En R. Luis (Coord), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra, M. Socas (Eds.). *La educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado*. AIQUE, Argentina.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5* 37-65.recuperado de https://mathinfo.unistra.fr/fileadmin/upload/IREM/Publications/Annales_didactique/vol_05/adsc5_1993-003.pdf

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle: Instituto de educación y pedagogía.

Fonseca J., (2002), ¿cómo contribuir al desarrollo del pensamiento geométrico del alumno del nivel medio básico? tercer congreso virtual. "Integración sin Barreras en el Siglo XXI" recuperado de https//www.quadernsdigitals.net/index.php?accionMenu=hemeroteca

Hershkowitz, R. (1990). Psychological Aspects of Learning Geometry, en Nesher, P. y Kilpatrick, J. (eds.). Mathematics and Cognition. Cambridge: Cambridge University Press.

Hiebert, J. & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 65-97). New York: MacMillan Publishing Company.

Orton, A. (1990). Didáctica de las matemáticas. Madrid: Ediciones Morata/MEC.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Sierpinska, A., Dreyfus, T. & Hillel, J. (1999). Evaluation of a teaching design in linear algebra: the case of linear transformations. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19, 7-40. recuperado de http://www.scielo.org.mx/scieloOrg/php/reflinks.php?refpid=S1665-24362006000300007000010&lng=es&pid=S1665-24362006000300007

Uicab, R. y Asuman O. (2006), Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica. *Facultad de Matemáticas Universidad Autónoma de Yucatán México.*

Van Hiele, P.M. (1999). Developing Geometric Thinking through ActivitiesThat Begin with Play. Teaching Children Mathematics, pp. 310-316.

Vinner, S. (1981). The Role of Definitions in Teaching and Learning of Mathematicas, en Tall, D. (ed.). Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Zambrano, M. (2010), Modelo de apercepción geométrica como elemento integrador de los procesos de visualización, construcción y discursivos del pensamiento geométrico. Universidad interamericana de educación a distancia de Panamá.

UNA CARACTERIZACIÓN DE ACTITUDES HACIA LO PROPORCIONAL

María del Socorro García González, Rosa María Farfán Márquez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico, México.
mgargonza@gmail.com, rfarfan@cinvestav.mx

RESUMEN: La investigación reportada es el resultado de una investigación doctoral enfocada en el estudio de las actitudes desde la perspectiva socioepistemológica. Se ha considerado como objeto de actitud un saber matemático funcional: la proporcionalidad. Para la toma de datos y su análisis se adoptó el método de la Teoría Fundamentada. Los resultados muestran que la actitud manifestada depende del tipo de tarea en el que la proporcionalidad esté involucrada.

Palabras clave: actitud, socioepistemología, proporcionalidad

ABSTRACT: This report shows the outcomes of a PhD research focused on the study of attitudes from a socio-epistemological perspective. The attitude of functional mathematical knowledge: *proportionality* has been considered the object of study. For data capture and their analysis, the method of Supported Theory was used. The outcomes show that the evidenced attitude depends on the type task in which proportionality be involved.

Key words: attitude, socio-epistemology, proportionality

Introducción

Para que una actitud se desencadene, debe haber algo que la provoque, este algo se denomina objeto de actitud. En Matemática Educativa el objeto de actitud ha sido la matemática escolar, es decir, cuando se indaga la actitud de los estudiantes se hace en referencia a las predisposiciones que tienen sobre sus cursos de matemáticas o cuando resuelven problemas en el salón de clases (García & Farfán, 2016). El aporte de este estudio a la investigación sobre actitud proviene de la perspectiva teórica desde la cual hacemos el estudio, la teoría socioepistemológica (Cantoral, 2013), esto nos llevó a cuestionarnos el papel que juega el saber matemático cuando se considera objeto de actitud. Decidimos centrarnos en la proporcionalidad y responder la siguiente pregunta de investigación ¿qué actitudes se manifiestan cuando los estudiantes se enfrentan a la proporcionalidad?

Marco Teórico

La teoría socioepistemológica tiene como objetivo estudiar la construcción de conocimiento matemático situado, es decir, aquel que atiende a las circunstancias y a escenarios socioculturales particulares. Por lo que el conocimiento matemático se asume como el fruto de las interacciones entre epistemología y factores sociales. Además de acuerdo con Cantoral (2013) factores como la motivación, la afectividad, la imaginación, la comunicación, los aspectos lingüísticos o culturales desempeñan un papel fundamental en la conformación de las matemáticas entre los estudiantes. El reconocimiento de la componente social del saber matemático desde esta perspectiva nos permitió estudiar un fenómeno social, las actitudes centradas en un saber matemático, la proporcionalidad. Si bien hemos considerado el saber proporcionalidad como objeto de actitud, reconocemos en él aspectos culturales, históricos, institucionales y afectivos por ello nos referimos a él como lo proporcional.

Un estudio socioepistemológico exige de saberes funcionales y transversales y su problematización. La proporcionalidad cumple la funcionalidad en el sentido que es cercana a la experiencia humana y muy utilizada en actividades diarias como la preparación de recetas, la creación de mapas, etc. La transversalidad la cumple debido a que se encuentra presente en todos los niveles básicos de educación mexicana. La problematización de la proporcionalidad la retomamos de Reyes (2011) y nos sirvió para diseñar situaciones de aprendizaje por medio de las cuales provocamos las actitudes de los estudiantes para poder estudiarlas.

Para aproximarnos al estudio de la actitud, adoptamos el modelo tridimensional de actitud (TMA, Di Martino & Zan, 2010) que contempla como objeto de actitud la matemática escolar. Desde este modelo se considera la actitud como la relación del estudiante con la matemática caracterizada por tres dimensiones, emociones, visión de la matemática y competencia del estudiante. Reformulamos este modelo desde la Socioepistemología, tomando como objeto de actitud la proporcionalidad. Definimos a priori la actitud como la relación del estudiante con el saber matemático caracterizada por tres dimensiones: emociones, competencia del estudiante y visión de la situación de aprendizaje (Figura 1).

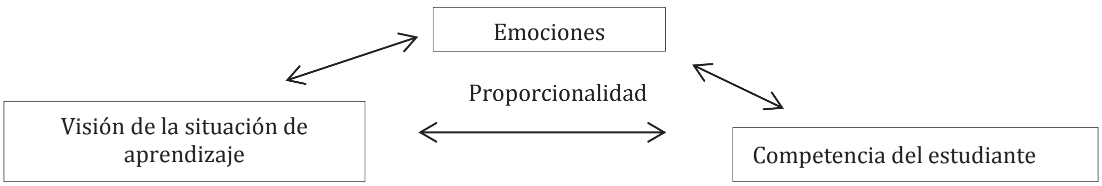


Figura 1. Caracterización a priori de la actitud hacia la proporcionalidad

Para dar cuenta de las emociones nos apoyamos en la Teoría de la Estructura Cognitiva de las Emociones, misma que las define como reacciones con valencia ante sucesos, objetos o personas. La visión de la situación de aprendizaje la entendimos desde la Socioepistemología en dos vertientes, funcional y utilitaria, con ésta última nos referimos a cuando el estudiante resolviera de manera mecánica la situación de aprendizaje basándose en conocimientos memorizados o sin argumentos sólidos, y por funcional nos referimos a que su solución se basara en la comprensión y uso de conocimientos apropiados. La competencia percibida la concebimos cuando el estudiante resolviera o no la situación de aprendizaje.

Metodología y análisis

Las situaciones de aprendizaje (SA) fueron las herramientas que nos permitieron desencadenar las actitudes de los estudiantes hacia lo proporcional, y se resolvieron en un taller denominado: *Trabajando con situaciones de aprendizaje*, que se desarrolló en sesiones semanales por 4 meses, en cada una de las sesiones se resolvieron las SA diseñadas y se recabaron otros datos de interés para el trabajo. Las sesiones tuvieron lugar en el Departamento de Matemática Educativa en las instalaciones del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, del Instituto Politécnico Nacional, unidad Zacatenco. Asistieron al taller 20 estudiantes (10 de hombres y 10 mujeres) que se encontraban cursando el último grado de educación secundaria en una escuela pública de la ciudad de México. Tenían entre 14 y 15 años de edad en el momento en que se desarrolló la investigación.

Cada una de las sesiones fue videograbada, cuando los estudiantes terminaban de resolver las SA se les entrevistó para tener mayor información de su resolución. Cuando se trató de una situación resuelta de manera grupal se realizaron preguntas directas a los participantes para profundizar en sus argumentaciones. Todos los participantes fueron entrevistados con la finalidad de tener información de su relación con las matemáticas escolares.

El análisis se realizó de dos formas: 1) por cada estudiante analizamos por tipo de tarea (mezcla, escala y razón y proporción) las actitudes que manifestaron (análisis horizontal), y 2) por tipo de tarea analizamos las actitudes que se manifestaron, independientemente del estudiante, ya que son analizadas en conjunto (análisis vertical).

Con la adaptación del modelo TMA, los preceptos de la Teoría Fundamentada (TF, Glaser & Strauss, 1967) guiaron el análisis de datos con el fin de encontrar las propiedades que dieran cuenta de las dimensiones que de antemano consideramos. De acuerdo a los preceptos de la TF se llevaron a cabo tres etapas: 1) *codificación abierta*, en ella se realizó la búsqueda de conceptos; 2) *codificación axial*, consistió en identificar relaciones entre los conceptos hallados en la fase anterior y se definieron categorías, y 3) *codificación selectiva*, en ésta se realizó la integración y el refinamiento de las categorías encontradas. Las primeras dos etapas las realizamos tanto en la fase horizontal como en la vertical, después las confrontamos, los resultados obtenidos de esta confrontación nos arrojaron elementos suficientes para realizar la tercera etapa.

Resultados y discusión

El análisis de datos arrojó una redefinición de las categorías propuestas del TMA. La actitud que manifestaron los estudiantes hacia lo proporcional depende de tres factores: la convicción del estudiante para hacer frente a la SA (autoeficacia), las emociones desencadenadas por el trabajo con la SA y la valoración que hacen de dicho trabajo (visión de la SA). Se encontró que las actitudes manifestadas por los estudiantes son graduales y cambiantes a través del tipo de tarea resuelto. Acerca del objeto de actitud, se concluye que las actitudes hacia lo proporcional dependen del tipo de tarea en el que sea presentada la proporcionalidad y del diseño de la SA.

La caracterización de actitudes hacia la matemática escolar, modelo TMA, parece conservarse cuando el objeto de actitud es un saber matemático, evidencia de ello son las dimensiones que hemos encontrado (Figura 2). Con este resultado aportamos al estudio del afecto en Matemática Educativa evidencia de las características de las actitudes cuando el objeto de actitud es un saber matemático específico, este aporte lo hacemos desde la teoría socioepistemológica, la que nos permitió tener una mirada diferente del objeto de actitud, al centrar la atención en un saber matemático particular en lugar de la matemática escolar.

Para crear un ambiente de interacción aprendiz-proporcionalidad y estudiar las actitudes, la noción de aprendizaje como práctica social normada nos permitió realizar la recolección de datos en un aula extendida, el taller diseñado (Figura 2). Considerando como protagonistas del sistema didáctico el aprendiz, el saber y los entornos socioculturales mediados por las situaciones de aprendizaje. Encontramos evidencia de una actitud proactiva hacia lo proporcional que se manifiesta y se caracteriza por tres componentes, la visión de la situación de aprendizaje, las emociones que se desencadenan en la resolución de ésta y la autoeficacia del aprendiz.

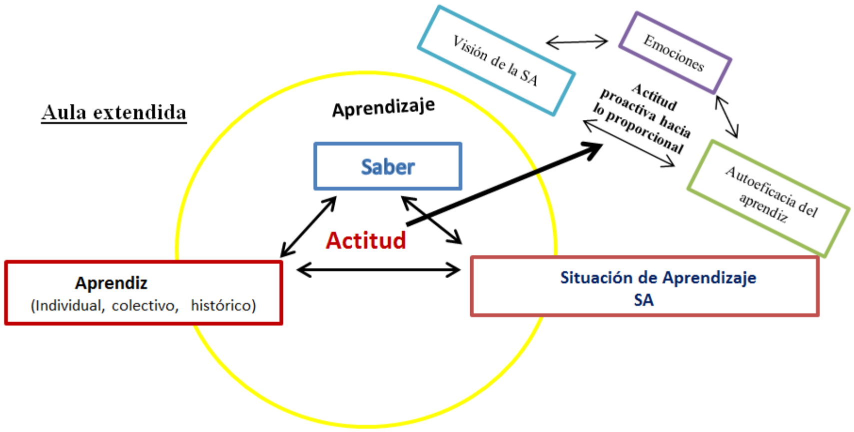


Figura 2. Triángulo Didáctico en la Socioepistemología y la consideración de actitudes.

De acuerdo a los resultados del análisis de datos, las tres componentes de la actitud se relacionan entre sí, sin embargo, no podemos decir qué componente se desencadena primero, o es la principal. Encontramos por ejemplo una relación entre la autoeficacia y las emociones, esto es, si el aprendiz tiene confianza y la creencia de que es capaz de resolver la situación de aprendizaje a la que se enfrenta y lo logra, se desencadena una emoción de júbilo, por el contrario, si no lo logra, se desencadena una emoción de congoja.

Otra relación identificada es entre la visión de la situación de aprendizaje y la autoeficacia, cuando para el aprendiz la SA a la que se enfrenta le es familiar, entonces da solución mediante su racionalidad contextualizada movilizando así su autoeficacia. Enseguida discutimos cada una de las dimensiones de la actitud proactiva identificada. H y M corresponden al sexo del estudiante, y el número obedece al orden considerado en la lista de asistencia. SA_n se refiere al número de situación de aprendizaje resuelta. En cursivas se resalta la emoción, y con subrayado las razones de los argumentos emitidos o la situación desencadenante de la emoción. Entre paréntesis se incluyen explicaciones para el lector.

Visión de la Situación de Aprendizaje

La visión de la situación de aprendizaje influye en las emociones y en la autoeficacia, por ejemplo si se es capaz de comprender la SA a la que se enfrenta, se reconoce qué problemática se está resolviendo y se encuentra una estrategia óptima para hacerlo confiado en lo que se sabe (autoeficacia), se desencadenará una emoción de júbilo. Los siguientes extractos de M5 y H1 pretenden dar evidencia de estas relaciones.

M5: *Me gustó* [la SA_7] porque le entendí, hasta le expliqué a M9, *me gusta sentir* que entiendo y ayudar a alguien a que le entienda, *me siento muy feliz*, creo que casi no me salen bien las cosas y ahora sí lo hicimos bien, bueno creo que estamos bien, porque sí nos salió el rompecabezas.

H1: Fue *muy emocionante* [la SA_9] porque yo tenía la razón y tuve que convencer a H4 de la respuesta correcta. El ejercicio es parecido a los de la escuela, pero al ser pintura me pareció *muy fácil* porque yo mezclo muchos colores, ya que *me gusta* dibujar y pintar. [Contexto familiar/visión funcional].

Emociones

Las emociones que identificamos se presentan de manera dicotómica: júbilo y congoja, y gusto y disgusto. Cada par aparece cuando las situaciones desencadenantes ocurren de manera opuesta, por ejemplo cuando se tiene la respuesta a la SA aparece el júbilo, de lo contrario aparece la congoja; el gusto y el disgusto se desencadenan por características específicas de la tarea proporcional y el diseño de la SA. Por ejemplo, en las tareas de escala la toma de decisiones desencadenó en algunos estudiantes disgusto por trabajar con una constante de proporcionalidad no entera. Y el gusto, por trabajar con una constante de proporcionalidad entera.

Acerca de las emociones durante la solución de problemas, la literatura reporta que los estudiantes experimentan diferentes emociones mientras resuelven un problema, por ejemplo el aburrimiento, la frustración, el enfado, el alivio, la felicidad o los nervios (Goldin, 2014). Nuestros resultados aportan más evidencia que la desencadenada por la resolución de problemas, se evidencia cómo las emociones son desencadenadas por la naturaleza de los problemas de proporcionalidad, como el uso de la constante de proporcionalidad con números no enteros, ya que les representa dificultad. Este resultado coincide con lo encontrado por Lamon (1993) quien encontró que los estudiantes llegan a frustrarse más fácilmente en este tipo de problemas, pero el afecto no era el objetivo de su investigación. Otro de los aportes es que se ha encontrado que el diseño de la SA influye en las valoraciones de los estudiantes, por ejemplo en las tareas de mezcla se notó una inclinación de gusto en las SA en donde tuvieron que preparar las mezclas. Este resultado concuerda con lo que Pepin (2011) señala, ella dice que la forma en la que la matemática esté hecha y se presente es un factor que influye las actitudes hacia las matemáticas.

Visión de la situación de aprendizaje

La visión de la SA se conservó del modelo TMA, pero sus propiedades cambiaron, encontramos una visión funcional asociada a diversos factores, como la comprensión de la SA, la familiaridad del contexto de ésta y la manipulación de las variables en la relación de proporcionalidad. Estos factores favorecieron en los estudiantes su visión funcional que se asoció a dar respuesta a la SA a través de la argumentación, por el contrario la visión utilitaria se desencadenó cuando los estudiantes sólo dieron una respuesta sin argumentarla. Encontramos también que la racionalidad contextualizada y el relativismo epistemológico guiaron en todo momento las respuestas de los estudiantes. La siguiente evidencia de H1 en la SA1, es un ejemplo de su racionalidad contextualizada al llevar la respuesta a una comparación con la práctica de referencia, preparar agua de sabor.

> [63] M: ¿De qué depende la elección de la receta para hacer una buena agua de naranja?
>
> [64] H1: De cómo se prepare. Yo hago agua de limón y me queda bien.
>
> [68] H1: Lleno una jarra de 2 litros de agua natural, después le echo dos cucharadas de cocinar de azúcar, la revuelvo para que se disuelva, después le echo el jugo de 8 limones. Pero no sé en mililitros cuánto jugo es. Pero sabe bien, me dicen que el agua está buena.

En su comentario H1 señala que la elección de una mezcla es la manera en cómo se prepare ésta, pero el cómo se prepare en realidad es la relación adecuada (razón) entre el agua natural y la naranja, dicha relación se valida con el sabor de la mezcla. El sabor de la mezcla fue el argumento más utilizado para validar las elecciones de la mezcla, sobre todo en SA_1 y SA_7, en dónde los participantes pudieron probar las mezclas. Estos argumentos tienen una característica subjetiva, debido a que el sabor de la mezcla es personal, depende de las preferencias de las personas, por tanto las validaciones de las respuestas fueron distintas para cada estudiante.

Creemos que las actividades realizadas con materiales manipulables en el caso de las tareas de mezcla, favorecieron la visión funcional de la SA y su aceptación, por la familiaridad con el contexto de referencia, y por la forma en que ésta fue presentada, el hecho de preparar físicamente la mezcla permitió en la realidad determinar un mayor sabor a naranja en SA_1, y la preparación de aguas de jamaica, horchata y café en SA_7. Esta familiaridad que los estudiantes refieren en las tareas de mezcla ha sido señalada como una de las variables que influyen en las tareas de mezcla (Noelting, 1980, Lamon, 1993).

Autoeficacia

Las propiedades que nosotros identificamos de la autoeficacia (Usher & Pajares, 2009) tienen como fuente de evidencia las experiencias de rendimiento, la experiencia vicaria y la percepción verbal. Los estados fisiológicos y afectivos se encuentran en la componente emoción, sin embargo encontramos una relación entre la autoeficacia y la emoción. Pondremos un ejemplo que nos han parecido muy ilustrativo para referirnos a la autoeficacia, el caso de H1. Hemos resaltado en los datos las fuentes de evidencia de la autoeficacia, usando el subrayado dentro de corchetes.

La autoeficacia de H1 podemos describirla como alta, él creía en sus habilidades para resolver las situaciones {experiencias de rendimiento}, esta creencia se mantuvo durante todas las sesiones, para él era importante mejorar su desempeño en matemáticas {objetivo, la autoeficacia se forma en referencia a un tipo de objetivo}, este motivo lo impulsaba a mantener su autoeficacia. En la valoración de la SA1, H1 comentó:

> H1: Fue un juego en el que puse a prueba mis conocimientos matemáticos {autoeficacia} no creía que estuviera haciendo matemáticas… en la escuela sólo resuelvo el libro o cuaderno no hago experimentos como éste {experiencias de rendimiento}, debería hacerlos la maestra.

En SA9, cuando logra convencer a H4 de la respuesta correcta encontramos evidencia de su autoeficacia.

> [12] H1 {a H4}: La uno es la mejor, porque hay más amarillo, si le pones poco amarillo será un verde limón y no queremos eso.
>
> [13]: Es casi igual la cantidad de amarillo.
>
> [14] H1: ¡Claro que no! {Autoeficacia} [*Sube tono de voz enfadado*] ¡Mira!, en la uno por cada 100 de azul hay 233 de amarilla y en la 4 por cada 100 de azul hay 400 de amarillo.

El tener la razón en sus argumentos lo hizo sentirse bien.

> H1: Fue muy emocionante porque yo tenía la razón y tuve que convencer a H4 de la respuesta correcta {experiencia vicaria}. El ejercicio es parecido a los de la escuela, pero al ser pintura me pareció muy fácil {autoeficacia} porque yo mezclo muchos colores porque me gusta dibujar y pintar.

Conclusiones

Este estudio fue motivado por la tendencia en Matemática Educativa de considerar a la actitud como una medida de agrado y desagrado. Con base en los fundamentos de la teoría socioepistemológica nos propusimos realizar una investigación, con una mirada diferente, esto supuso adoptar un saber matemático como objeto de actitud, lo proporcional. Para nosotros la centración en el saber matemático representaba una profundización en las actitudes que pudieran ser manifestadas por los estudiantes. Consideramos que el modelo de actitud que encontramos robustece la caracterización reportada en la literatura, al explicar las propiedades de las categorías y la actitud misma, como producto de la interacción del estudiante y el saber.

Creemos que la actitud proactiva está relacionada al contexto del taller desarrollado y la característica misma de éste, en él las normas del salón de clase quedaron opacadas, por ejemplo el profesor y la obtención de calificaciones, y sólo contó la interacción aprendiz-saber, sin embargo en este contexto había algo del estudiante que se conservó, el deseo de aprender matemáticas, estas metas de los estudiantes fueron las que sirvieron como motivación para el trabajo con las SA, debido a que asistieron al taller para mejorar sus habilidades en matemáticas, este objetivo era compartido por los estudiantes asistentes y por sus madres quienes estuvieron al pendiente de ellos llevándolos a cada una de las sesiones del taller. Este objetivo fue la motivación que sostuvo la actitud proactiva de los estudiantes. Este resultado coincide con los encontrados por Gómez-Chacón (2013) quién sugiere que el afecto está relacionado con la motivación mediante metas y el auto-concepto.

Un resultado que creemos que es diferente al reportado en los estudios que nos preceden es que ha quedado demostrado que la forma en que el saber se presenta, influye las valoraciones de los estudiantes, por ejemplo encontramos que algunos diseños de las SA provocaron en los estudiantes una atracción que favoreció la actitud proactiva. Fue el caso de las SA dónde se contemplaron actividades prácticas como la preparación de recetas y el armado del rompecabezas, debido a que representaron para los estudiantes un instrumento tangible que les permitió validar el trabajo realizado.

Centrarnos en lo proporcional y trabajar con diferentes tipos de tarea nos permitió ver que hay ciertos aspectos de un saber matemático que pueden desencadenar valoraciones diferentes, encontramos que las tareas de mezclas fueron más interesantes para los estudiantes por dos razones, la toma de decisión y la manipulación de las variables presentes en la relación proporcional, mediante la mezcla de líquidos o la preparación de agua de sabor. Por el contrario, las tareas de escalas fueron valoradas menos favorablemente, en algunos casos, debido al factor de proporcionalidad usado, para ellos fue difícil manipular un k=0.75 y reducir con él las medidas de un rompecabezas, pero no ocurrió lo mismo con k=0.5, éste se les facilitó.

Si bien nuestro objeto de actitud fue un saber matemático, la mirada desde la que se hizo fue el sujeto, un aprendiz, por ello su identidad jugó un papel importante en la actitud proactiva que encontramos, por ejemplo sus creencias personales de la matemática y sus juicios de autoeficacia respecto al trabajo con lo proporcional, también intervinieron las relaciones que los estudiantes fueron estableciendo a lo largo del taller con sus pares, en algunos casos estas relaciones fueron determinantes para resolver la situación de aprendizaje solicitada.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la matemática educativa*. *Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. España: Gedisa.

Di Martino, P. & Zan, R. (2010). 'Me and maths': towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal Mathematics Teacher Education* 13, 27–48.

García, M. S. & Farfán. R. M. (2016). Attitudes of secondary school students towards work in learning situations. In K. Konrad & V. Naďa (Eds.), *Proceedings of Ninth Congress of European Research in –Mathematics Education* (CERME 9), 1311-1312.

Glaser, B. y Strauss, A.L. (1967). The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research. Chicago: Aldine De Gruyter.

Goldin, G. (2014). Perspectives on emotion in mathematical engagement, learning, and problem solving. In R. Pekrun & L. Linnenbrink-Garcia (Eds.), *International Handbook of Emotions in Education* (pp. 391–414). New York: Routledge.

Gómez-Chacón, I. (2013). Prospective Teachers' Interactive Visualization and Affect in Mathematical Problem-Solving. *The Mathematics Enthusiast 10* (1&2), 61-86.

Lamon, S. (1993). Ratio and Proportion: Connecting Content and Children´s Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(1), 41–61.

Noelting, G. (1980). 'The development of proportional reasoning and the ratio concept: part I – Differentiation of stages', *Educational Studies in Mathematics* 11, 217–253.

Pepin, B. (2011). Pupils' attitude towards mathematics: A comparative study of Norwegian and English secondary students. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education* 43(4), 535–546. doi 10.1007/s11858-011-0314-9

Reyes, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica*: *Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav, DF, México.

Usher, E. L., & Pajares, F. (2009). Sources of self-efficacy in mathematics: A validation study. *U*, *34*(1), 89–101.

INCIDENCIAS EN LATINOAMÉRICA DE UN MARCO TEÓRICO INCLUSIVO EN LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Vicenç Font[1], Luis R. Pino-Fan[2], Adriana Breda[2]
[1]Universitat de Barcelona (España). [2]Universidad de Los Lagos (Chile).
vfont@ub.edu, luis.pino@ulagos.cl, adriana.breda@ulagos.cl

RESUMEN: Este reporte tiene por objetivo resumir el trabajo realizado en el grupo de discusión GD003 de la RELME30 “Incidencias en Latinoamérica de un marco teórico inclusivo en la investigación en educación matemática”. El objetivo de este grupo de discusión fue reflexionar sobre las implicaciones de un modelo teórico inclusivo, conocido internacionalmente como *Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática* (EOS), en las investigaciones sobre Educación Matemática realizadas en Latinoamérica.

Palabras clave: enfoque ontosemiótico, competencias y conocimientos del profesor

ABSTRACT: This report is aimed at summarizing the work carried out by GD003 discussion group of the 30th RELME “Effects of an inclusive theoretical framework in Mathematics education research in Latin America.” The objective of this discussion group was to reflect on the implications of an inclusive theoretical model, known all over the world as Onto-semiotic Approach of Mathematics Teaching and Cognition (OSA), in Mathematics Teaching researches already fulfilled in Latin America.

Key words: onto-semiotic approach, teacher competences and knowledge

Introducción

Este reporte tiene por objetivo resumir el trabajo realizado en el grupo de discusión GD003 de la RELME30 sobre *incidencias en Latinoamérica de un marco teórico inclusivo en la investigación en educación matemática.*

El objetivo de este grupo de discusión fue reflexionar sobre las implicaciones de un modelo teórico inclusivo, conocido internacionalmente como *Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática* (EOS), en las investigaciones sobre Educación Matemática realizadas en Latinoamérica. Dicho modelo teórico fue propuesto por el grupo de investigación Teoría de la Educación Matemática de la Universidad de Granada a principios de los años 90, y actualmente sigue su desarrollo y aplicación por otros grupos de investigación iberoamericanos. El grupo de discusión se convirtió en un espacio para profesores e investigadores interesados por el uso de dicho modelo, tanto en investigaciones como en la práctica docente.

Durante las dos sesiones del grupo, los organizadores realizaron primero una introducción para dar paso a la presentación de los trabajos seleccionados para su discusión en el grupo, con la finalidad de proponer mejoras y refinamientos que contribuyan a su enriquecimiento.

En la primera presentación (Font, 2016) se realizó una revisión del desarrollo actual del EOS. Se focalizó en tres aspectos: a) la emergencia de los objetos a partir de las prácticas, b) sobre el papel de los criterios de idoneidad didáctica en el diseño instruccional y c) sobre la articulación de los conocimientos y las competencias del profesor de matemáticas.

Primero se explicó que el problema central que dio origen al EOS, al considerar que no había una respuesta suficientemente clara, satisfactoria y compartida en las teorías de la llamada Didáctica Fundamental al siguiente problema (problema epistemológico): ¿Qué es un objeto matemático?; o de manera equivalente, ¿Cuál es el significado de un objeto matemático (número, derivada, media, etc.) en un contexto o marco institucional determinado? Este problema epistemológico, esto es, referido al objeto matemático como entidad cultural o institucional, se complementa dialécticamente con el problema cognitivo asociado, o sea, el objeto como entidad personal o psicológica (problema cognitivo): ¿Qué significa el objeto *O* para un sujeto en un momento y circunstancias dadas?

Después de casi 30 años de trabajo, en el EOS se tiene una respuesta a estos dos problemas que se considera relativamente satisfactoria y que se ha elaborado integrando elementos de otras teoría. Se trata de una respuesta en la que la noción de complejidad del objeto matemático y la de articulación de los componentes de dicha complejidad juegan un papel esencial. La complejidad del objeto matemático lleva a pensar no en un objeto unitario sino en un sistema complejo formado por partes o componentes, los cuales se articulan (conectan) entre sí, posibilitando la mirada unitaria del objeto matemático. Dicha articulación de la complejidad asociada al objeto matemático es un paso previo y necesario para pasar a una visión unitaria del objeto matemático mediante diferentes niveles de emergencia a partir de las prácticas (primer y segundo nivel de emergencia).

A continuación se explicó cómo aborda el EOS el problema instruccional de diseñar e implementar procesos de enseñanza de calidad, en concreto se explicaron los criterios de idoneidad didáctica (epistémico, emocional, cognitivo, interaccional, mediacional y ecológico) y su uso en la formación de profesores; primero en el diseño a priori de secuencias de tareas y, segundo, a posteriori para la valoración y rediseño de dichas secuencias. Por último, se explicó el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico–Matemáticas (modelo CCDM). Dicho modelo, que incluye tanto los conocimientos como las competencias del profesor de matemáticas, está basado en el EOS. Para explicarlo se usó como hilo conductor inicial la noción de competencia.

En esta primera presentación se profundizó en el hecho que el EOS ofrece herramientas teóricas para realizar el análisis de la actividad matemática, tanto institucional como personal, mediante el análisis de prácticas, procesos y configuraciones de objetos matemáticos primarios. Con relación a este tipo de análisis se presentaron tres contribuciones (Larios, 2016; Mayén, 2016 y Vera, 2016).

■ Análisis epistémicos y cognitivos de la actividad matemática

En la segunda presentación (Mayén, 2016) se expuso el análisis de respuestas de una muestra de estudiantes a un problema de mediana en términos de prácticas, configuración cognitiva de objetos primarios y procesos de significación; identificándose conflictos semióticos que pudieran dar origen a diversas dificultades. Se mostraron varios ejemplos de cómo dichos *conflictos semióticos* se producen, no por una falta de conocimientos, sino por no relacionar adecuadamente los dos términos de una función semiótica.

En la tercera presentación (Vera, 2016) se presentó una investigación cuyo objetivo era identificar y analizar los conflictos semióticos encontrados en las respuestas de los alumnos a dos tareas abiertas en las que interviene el objeto hipótesis estadísticas para el análisis de varianza, y otros respecto al contraste de hipótesis. Las tareas están relacionadas con el análisis de la varianza a nivel elemental, una de ellos se refiere a sus pre-requisitos (contraste de hipótesis) y la otra este contenido estadístico (para ambos se debe definir las hipótesis estadísticas). En las respuestas de una muestra de 224 estudiantes de Psicología de la Universidad de Huelva, España se han identificado y analizado diversos conflictos semióticos, como los que se infieren (por ejemplo) de la respuesta de un estudiante tanto para P1 como para P2 (ver Tabla 1).

Tabla 1. Análisis semiótico de un ejemplo de respuesta para P1 y P2

Expresión	Contenido
P1 $H_1: \bar{X}_1 \neq \bar{X}_2$ $H_0 \cdot \bar{X}_1 = \bar{X}_2$ **P2** $H_0 : \bar{x}_A = \bar{x}_B = \bar{x}_C$ $H_1 : \bar{x}_A \neq \bar{x}_B \neq \bar{x}_C$	– El alumno realiza una interpretación incorrecta del enunciado (P1), asumiendo que existen dos poblaciones, mientras q lo hace correctamente para P2 (conceptos). Escribe sus hipótesis utilizando una notación adecuada (representación). – *Conflicto* al plantear un contraste de diferencia entre dos poblaciones (P1) (confusión del campo de problemas). – Discrimina la hipótesis nula como puntual y la hipótesis alternativa como aquella que quiere probar (propiedades). – Genera *conflicto* al plantear las hipótesis en término de un estadístico y no de un parámetro (concepto). Un posible *conflicto* es la confusión entre población y muestra (conceptos). – Relacionado con el último anterior, presenta el *conflicto* consistente en confundir la media de la muestra que es un estadístico con un parámetro (conceptos).

A modo de conclusión, los estudiantes confunden niveles de análisis que se corresponden con media poblacional y muestral.

En la cuarta presentación (Larios, 2016) se resaltó el problema de que en las Matemáticas existe la necesidad epistemológica de validar el conocimiento desarrollado y en la escuela se requiere que los alumnos aprendan el carácter científico de ese conocimiento, por lo que se requiere que se enseñen procesos de validación del conocimiento matemático. Tales procesos deben tener ciertas características y no pueden tratarse de manera aislada de los demás procesos durante la construcción del conocimiento. En otras palabras, la validación del alumno de su saber matemático es una parte de su proceso de aprendizaje matemático y no un proceso independiente del mismo.

El grupo de trabajo de la Universidad Autónoma de Querétaro (México) ha tenido interés en indagar sobre este aspecto desde hace unos quince años utilizando herramientas propuestas en el EOS, como son las *configuraciones epistémicas* y las *configuraciones didácticas*, las cuales se han complementado con otras herramientas orientadas específicamente al proceso mismo de la validación o de la justificación por parte de los alumnos, como es el *modelo de Toulmin* para el análisis de los argumentos. En estas investigaciones la demostración se considera un macroproceso que involucra a otros procesos que pueden y deberían ser evaluados. Es por ello que se ha decidido trabajar en la selección de algunos de los procesos que propone el EOS para identificar descriptores para evaluar su desarrollo durante la construcción de demostraciones en el contexto escolar. Esta idea se orienta en buena medida a la propuesta de instrumentos de evaluación para el docente que permitan dar un seguimiento a los alumnos y promover el aprendizaje de la demostración como validación del conocimiento matemático que es construido de manera continua.

Formación de profesores y Currículo

Las presentaciones anteriores sobre análisis de la actividad matemática sugieren que los profesores deben tener competencias y conocimientos que les permita el análisis de la actividad matemática. Dicho tipo análisis es importante en la formación de los profesores y es un tipo de análisis que presenta dificultades para los profesores y futuros profesores ya que tienen dificultades para analizar las tareas matemáticas (y su potencial educativo) que proponen a sus alumnos. Tal como se explicó en la primera presentación (Font, 2016) la competencia de análisis de la actividad matemática es una de las competencias que deben desarrollar los profesores. Estas reflexiones permitieron conectar las presentaciones del bloque sobre análisis epistémicos y cognitivos con las presentaciones sobre competencias y conocimientos del profesor.

La quinta presentación (Silva y Pietroapolo, 2016) expuso una investigación que es parte de una tesis doctoral que está en curso. El objetivo principal es hacer explícito los conocimientos y las competencias desarrolladas por un grupo de futuros profesores de matemáticas y sus formadores que participaron en el *“Programa de Consolidação das Licenciaturas – Prodocência”* en los años 2014 y 2015 en el *Instituto Federal de Educação, Ciencia e Tecnologia de Minas Gerais – Campus São João Evangelista*. Cinco futuros profesores de matemáticas y tres de sus formadores son los participantes. El marco teórico tienen como referente para los conocimientos del profesor los estudios de Shulman sobre los conocimientos necesarios para el profesor, los de Ball y colaboradores sobre los conocimientos necesarios para la formación de profesores en matemáticas y la perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático (CDM) propuesto en el marco del EOS (Pino-Fan y Godino, 2015). Como referente teórico para la noción de competencia se tiene los trabajos de Font y colaboradores.

La sexta presentación (Parra y Pino-Fan, 2016) se explicó una investigación cuyo objetivo es realizar un estudio que permita avanzar en la caracterización de los conocimientos requeridos por los profesores de matemática para gestionar idóneamente los aprendizajes sobre la noción de función. Para ello, se ha identificado la representatividad de los significados pretendidos por el currículo chileno respecto del significado holístico de referencia del objeto función. Las preguntas de investigación son las siguientes: ¿cuáles son los significados de la noción de función que el profesor pretende gestionar en el desarrollo de sus clases? y ¿Qué es lo que debería conocer un profesor de matemáticas para que su enseñanza sobre funciones sea lo más idónea posible? Para responder esta última pregunta, se diseñará un instrumento que permitirá explorar aspectos relevantes asociados al conocimiento didáctico-matemático de los profesores cuando abordan la noción de función. Para la elaboración de dicho instrumento se usará la caracterización del significado holístico de referencia y la representatividad de los significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función. A partir de los resultados de este estudio se promoverá la reflexión de los profesores acerca de sus propias concepciones y su didáctica, además de establecer acciones formativas y/o metodologías didácticas que favorezcan y potencien el conocimiento didáctico-matemático de los profesores.

En la séptima presentación (Angulo, 2016) se formuló la siguiente pregunta ¿Qué papel otorga la teoría de la matemática educativa a la dimensión curricular y cómo –dentro de dicho papel– son seleccionados y organizados los contenidos u objetos matemáticos (ostensivos) para ser ubicados en un currículo específico? En su respuesta, mostró la necesidad de que el EOS desarrolle su dimensión ecológica para poder responderla, en particular cuando se trata de currículo para la formación de profesores.

Impacto del EOS en programas de formación

En la octava presentación (Trujillo y Arana, 2016) se realizó un análisis de las tesis de maestría realizadas en la Universidad de Sonora desde el 2009 al 2012 y en el Instituto Tecnológico de Sonora de 2012 a la fecha. Se analizaron la problemática de investigación, el objetivo de la tesis, los participantes, los instrumentos utilizados y sobre todo el alcance en la utilización del Enfoque Ontosemiótico (EOS). Las preguntas de investigación que se plantearon fueron: ¿en qué nivel educativo inciden mayormente las investigaciones relacionadas con el EOS?, ¿cuáles son los temas matemáticos que se analizan con mayor frecuencia?, ¿qué problemáticas se atienden?, ¿cuáles son los retos para el futuro o el principal campo de acción que se vislumbra a través de las tesis realizadas en el estado de Sonora?

Reflexiones finales

Debido al carácter integrativo del modelo teórico conocido como Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemática, los organizadores de este grupo pudieron detectar un creciente interés por el uso del EOS tanto en los trabajos científicos –sobre diversos aspectos de la Didáctica de las Matemáticas– de investigadores iberoamericanos, como en los reportes e iniciativas de profesores que están interesados en la mejora de su práctica docente. Así, el Grupo de Discusión GD003, *Incidencias en Latinoamérica de un Marco Teórico Inclusivo en la Investigación en Educación Matemática,* surge con la finalidad de generar un espacio de trabajo, discusión y reflexión, dentro de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME), que permita, por un lado, que los investigadores e investigadores en formación compartan sus objetivos y formen redes de investigación y colaboración que contribuyan a maximizar la calidad de sus trabajos de investigación. Y por otro lado, que los profesores interesados en la mejora de su práctica profesional encuentren un espacio que les brinde apoyo, entre otras cosas, para la reflexión de su propia práctica, mediante las herramientas teórico-metodológicas propuestas por el EOS.

Referencias bibliográficas

Angulo, R. (2016, Julio). *Una reflexión acerca de algunas categorías analíticas entre EOS y Teoría curricular*. Comunicación presentada al grupo de discusión GD003 “Incidencias en Latinoamérica de un marco teórico inclusivo en la investigación en educación matemática” de la 30 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Monterrey, México.

Font, V. (2016, Julio). *Desarrollo actual del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS)*. Comunicación presentada al grupo de discusión GD003 “Incidencias en Latinoamérica de un marco teórico inclusivo en la investigación en educación matemática” de la 30 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Monterrey, México.

Larios, V. (2016, Julio). *Herramientas metodológicas para el estudio de la validación matemática*. Comunicación presentada al grupo de discusión GD003 “Incidencias en Latinoamérica de un marco teórico inclusivo en la investigación en educación matemática” de la 30 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Monterrey, México.

Mayén, S. (2016, Julio). *Análisis de conflictos semióticos en problemas de promedios*. Comunicación presentada al grupo de discusión GD003 “Incidencias en Latinoamérica de un marco teórico inclusivo en la investigación en educación matemática” de la 30 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Monterrey, México.

Parra, Y., y Pino-Fan, L. (2016, Julio). *Conocimiento didáctico-matemático de los profesores chilenos cuando abordan la noción de función*. Comunicación presentada al grupo de discusión GD003 “Incidencias en Latinoamérica de un marco teórico inclusivo en la investigación en educación matemática” de la 30 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Monterrey, México.

Pino-Fan, L., y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA, 36*(1), 87-109.

Silva, J., y Pietropaolo, R. (2016, Julio). *Estudio del Programa de Consolidacão das Licenciaturas en Brasil: conocimientos y competencias en la formación inicial de profesores de matemáticas*. Comunicación presentada al grupo de discusión GD003 “Incidencias en Latinoamérica de un marco teórico inclusivo en la investigación en educación matemática” de la 30 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Monterrey, México.

Trujillo, E., y Arana, R. (2016, Julio). *Impacto de las investigaciones realizadas desde el Enfoque Ontosemiótico: El caso de Sonora, México.* Comunicación presentada al grupo de discusión GD003

"Incidencias en Latinoamérica de un marco teórico inclusivo en la investigación en educación matemática" de la 30 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Monterrey, México.

Vera, O. (2016, Julio). *Identificación y análisis de conflictos semióticos: hipótesis estadísticas en análisis de varianza elemental*. Comunicación presentada al grupo de discusión GD003 "Incidencias en Latinoamérica de un marco teórico inclusivo en la investigación en educación matemática" de la 30 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Monterrey, México.

MODELACIÓN Y USO DE CONOCIMIENTO TRIGONOMÉTRICO EN INGENIERÍA. UN PRIMER ACERCAMIENTO A SU ESTUDIO

Diana del Carmen Torres Corrales, Gisela Montiel Espinosa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)
diana.torres@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx

RESUMEN: Se presenta el primer acercamiento al estudio de un proyecto doctoral relacionado con el uso del conocimiento trigonométrico en la Ingeniería y la modelación. Primero identificamos contenidos de Trigonometría en programas de Ingeniería en una universidad mexicana, eligiendo a Ingeniería en Mecatrónica por su fuerte presencia en estos contenidos (en Matemáticas y en su área de especialidad) y con ello un contexto donde se da un escenario ideal para estudiar sus prácticas de modelación, la Robótica. Por ello, y como un momento fundamental de nuestra investigación, presentamos un análisis y discusión de los planteamientos teóricos sobre la modelación que más se acercan al estudio que proponemos, es decir, a la modelación en Ingeniería. Nuestro objetivo no es sólo presentar antecedentes de investigación, sino discutirlos para una posible elección de un planteamiento que se integre a nuestro marco teórico.

Palabras clave: matemáticas para ingeniería, modelación, pensamiento geométrico, conocimiento trigonométrico

ABSTRACT: This paper explores a first approach to the study of a PhD project related to the use of trigonometry knowledge in engineering and modeling. First, we identify trigonometry contents in engineering syllabuses in a Mexican university. We adopted mechatronics engineering because of its strong presence in such contents (in mathematics and its branch), which constitutes a perfect setting to study its modeling practices, Robotics. As a main point of our research work, we show an analysis and discussion on the theoretical assumptions on modeling which are closed to the proposed study; i.e. to engineering modeling. We attempt not only to put forward research antecedents, but also to discuss them for the possible choice of a suggestion that could be incorporated to the theoretical framework.

Key words: mathematics for engineering, modeling, geometric thinking, trigonometric knowledge

Introducción

En la Ingeniería, el diseño curricular generalmente presenta las asignaturas de Matemáticas y posteriormente aquellas propias de su área de especialidad, con el fin de aplicar los contenidos de las primeras en las segundas. Sin embargo, la experiencia nos ha mostrado que los estudiantes tienen dificultades para transitar de la Matemática a la Ingeniería. En este contexto, donde se asume a la Matemática al servicio de la Ingeniería, se percibe necesario un rediseño del discurso Matemático Escolar (dME) para que éste verdaderamente satisfaga la demanda de la propia Ingeniería: *poner el conocimiento matemático en uso*. Este tránsito, proponemos, puede replantearse como escenario para resignificar la Matemática.

En particular, la matemática que nos interesa es la Trigonometría, a lo cual llamamos conocimiento trigonométrico, haciendo alusión a un conocimiento específico de la matemática. Al mirar los planes y programas de estudio de las Ingenierías, es posible observar al conocimiento trigonométrico en las distintas asignaturas de Matemática, pero en las áreas de especialidad, en la Ingeniería aplicada, ¿qué población de ingenieros es representativa para estudiar el uso de dicho conocimiento, en sus procesos de enseñanza y de aprendizaje?, ¿cuáles son los contextos donde se pone en uso?

Nuestra intención en este artículo, es presentar el primer acercamiento al estudio de un proyecto doctoral relacionado con el uso del conocimiento trigonométrico en la Ingeniería y la modelación. Por ello, se identifica que el conocimiento trigonométrico se encuentra presente en algunas áreas de especialidad de la Ingeniería, y dada la naturaleza de estos programas donde es necesario poner el conocimiento matemático en uso, recurrimos a estudiar algunas posturas de modelación que se han considerado pertinentes para nuestra investigación por su cercanía con el escenario.

El escenario de investigación

Se ha realizado una revisión de algunos programas educativos de Ingeniería (Civil, Electrónica, Electromecánica, Industrial y de Sistemas, Mecatrónica, y Software) del Instituto Tecnológico de Sonora (universidad pública descentralizada, de enseñanza tecnológica, con personalidad jurídica y patrimonio propios, ubicada en el estado de Sonora, México). Con ella identificamos que Ingeniería en Mecatrónica tiene una fuerte presencia en contenidos de Trigonometría en las asignaturas de Matemáticas y las de Ingeniería aplicada (ver Tabla 1).

Tabla 1. Contenidos de Trigonometría en Programas de Ingeniería

Ingeniería	Contenido y aplicaciones de Trigonometría	Herramienta trigonométrica
Civil	En Matemáticas (Fundamentos de Matemáticas, Cálculo I, II, III, Ecuaciones diferenciales).	Razón trigonométrica

	En asignaturas de análisis estructural.	
Electrónica, y Electromecánica	En Matemáticas (Fundamentos de Matemáticas, Cálculo I, II, III, Ecuaciones diferenciales). Asignaturas de análisis de señales y sistemas eléctricos.	Razón, función y serie trigonométrica
Industrial y de Sistemas	En Matemáticas (Fundamentos de Matemáticas, Cálculo I, II, III, Ecuaciones diferenciales). En asignaturas de diseño CAD/CAM.	Razón trigonométrica
Mecatrónica	En Matemáticas (Fundamentos de Matemáticas, Cálculo I, II, III, Ecuaciones diferenciales). Asignaturas de análisis de señales y sistemas eléctricos. Asignaturas de análisis y diseño de estructuras en reposo CAD/CAM, en cinemática y con métodos numéricos para robots.	Razón, función y serie trigonométrica. Métodos numéricos con Trigonometría
Software	En Matemáticas (Fundamentos de Matemáticas, Cálculo I y II)	Razón trigonométrica

Fuente: Elaboración propia, 2016; Nota: CAD/CAM es Diseño Asistido por Computadora/Manufactura Asistida por Computadora por sus siglas en inglés.

En Ingeniería en Mecatrónica, se incluye la enseñanza de la razón trigonométrica en asignaturas de Matemáticas que se espera sea aplicada en asignaturas que requieren el análisis y diseño de estructuras estáticas (en reposo) en CAD/CAM; así como la función trigonométrica para ser aplicada en estructuras en cinemática (en movimiento); además, de manera significativa, utiliza Trigonometría para la rotación (ángulos) y traslación (desplazamiento) de robots (manipuladores) utilizando métodos numéricos, ya que en el análisis y diseño de éstos, se tiene la necesidad de utilizar una computadora que controle el movimiento del robot, y el lenguaje de ambos es distinto.

Véase por ejemplo el modelo de la figura 1. En ella se muestra un ejemplo clásico de Robótica que presenta un libro de bibliografía básica (recomendada por el programa de estudios analizado), *Diseño de maquinaria* de Norton (2013). Con esta ilustración podemos ver que, efectivamente, son necesarias las herramientas trigonométricas en la elaboración del modelo, para la construcción y funcionamiento de la estructura representada. Sin embargo, más que verlo como un contexto de aplicación de lo ya aprendido (de manera descontextualizada) en las asignaturas de Matemáticas, proponemos, es posible trabajarlo como un escenario en el que emerjan las herramientas trigonométricas, a partir de *poner en funcionamiento aquello que les es propio*; lo que en la Socioepistemología suele reconocerse como “la naturaleza social de la Trigonometría”. Este planteamiento se basa en el reconocimiento de *lo trigonométrico*, reportado en las investigaciones de Montiel (2011), Montiel y Jácome (2014), Torres-

Corrales (2014) y Scholz (2014); y que en un análisis inicial de este ejemplo reconocemos en la construcción de figuras geométricas (composiciones circulares y triangulares), para trabajar con distancias y rotaciones (ángulos y movilidad), y en elementos que se integran al modelo de lo representado, como por ejemplo los apoyos de articulación que unen piezas en los robots y permiten el movimiento relativo de los vínculos adyacentes.

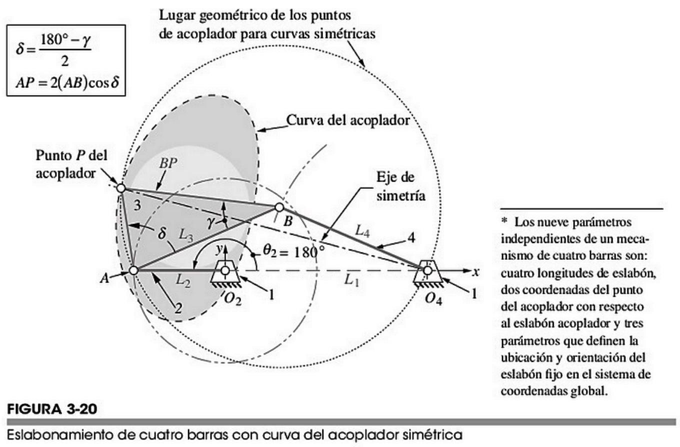


Figura 1. Herramientas trigonométricas en el modelo de un acoplador. Norton, 2013, p. 90

Cuando se trabaja con robots, se hace necesario modelar su funcionamiento. Los estudiantes de Ingeniería en Mecatrónica modelan para analizar y diseñar robots (y sus componentes), con el fin de evitar los costos de probar un diseño físico terminado. Es decir, dan solución a una situación problema o brindan una intervención de mejora, sin la necesidad de intervenir en la realidad, sino primero crean un modelo, lo prueban y se aseguran de no incurrir en desperdicios, costos y peligro para el sistema o el usuario. La modelación que se ha descrito está en términos de Ingeniería, que si bien puede guardar una relación cercana a la modelación que se trabaja en la investigación en Matemática Educativa, la llamaremos *trabajo de laboratorio*, tradicional en la formación del ingeniero y escenario natural de nuestra investigación para estudiar los usos del conocimiento matemático.

Planteamiento inicial de investigación

Planteamos este estudio desde la Teoría socioepistemológica, en particular el estudio del conocimiento trigonométrico puesto en uso en el proceso formativo de Ingenieros en Mecatrónica. En particular, nos situamos en la asignatura de Robótica, porque constituye una integración de conocimientos de Matemática, Física y otras asignaturas propias de la Mecatrónica que, desde nuestra perspectiva, constituye un escenario ideal para estudiar sus prácticas de modelación.

La perspectiva social de la Teoría socioepistemológica, se orienta al conocimiento matemático mismo y no sólo a su socialización, y establece en la base de sus objetos de estudio al conocimiento matemático en uso. Para estudiar los usos del conocimiento matemático ante situaciones que provienen de prácticas situadas y compartidas por una comunidad, problematiza el saber, en sus cuatro dimensiones: social (el valor de uso), epistemológica (la forma en que conocemos), didáctica (los modos de transmisión vía la herencia cultural), y cognitiva (las funciones adaptativas) (Cantoral, 2013).

Se vislumbra la necesidad de llevar a cabo, inicialmente, un análisis documental, sobre la Mecatrónica, la Robótica y el currículo que se propone, para situar y contextualizar el quehacer del ingeniero y su proceso formativo. Con esta base, se propone un análisis de tipo etnográfico, para el estudio del proceso formativo en sí, en dos momentos: el aula teórica y el trabajo de laboratorio; de forma que se reconozcan argumentaciones (qué significa, cuándo emerge y para qué se utiliza) y usos (prácticas) de la Trigonometría puesta en juego.

Con el objetivo de situar nuestra investigación en la disciplina, se realizó una revisión bibliográfica sobre diversas perspectivas de modelación para estudiar fenómenos relativos a la enseñanza y al aprendizaje de la Matemática; algunas de las cuales, por su cercanía a la modelación matemática, son muy utilizadas para estudiar la matemática al servicio de la Ingeniería. Por ello, y como un momento fundamental de nuestra investigación, presentamos un análisis y discusión de los planteamientos teóricos sobre la modelación que más se acercan al estudio que proponemos, es decir, a la modelación en Ingeniería. Nuestro objetivo no es sólo presentar antecedentes de investigación, sino discutirlos para una posible elección de un planteamiento que se integre a nuestro marco teórico.

Indagación bibliográfica

A continuación, presentamos dos posturas teóricas referentes a la modelación en la educación matemática (ver Tabla 2), una centrada en lo cognitivo (Blum, *et al.,* 2002) y otra relacionada con lo social (Arrieta y Díaz, 2015). Las investigaciones del primer grupo, están situadas principalmente en el continente europeo, con alrededor de 30 años de experiencia, y el segundo grupo está situado en el continente americano, con alrededor de 20 años de experiencia. Hasta el momento han sido analizadas cincuenta referencias sobre modelación matemática, donde la mayoría de éstas están en los grupos de investigación mencionados. Por las limitaciones de extensión del presente documento, exponemos aquellas más representativas para fines de nuestro estudio.

Tabla 2. Perspectivas de modelación matemática

Modelación matemática	Perspectiva cognitiva	Perspectiva social
¿Qué es?	Significa llevar un problema del mundo real a un modelo matemático y no solo implica tomar un ejemplo y presentarlo como un modelo, sino que representa un esquema donde intervienen dominios (nociones de aplicación y de modelos matemáticos, el aula de clases, el sistema donde se lleva a cabo) y actores (Blum, *et al.,* 2002).	Se constituye como una práctica que establece puentes entre la escuela y el entorno, es la articulación de dos entes, uno llamado el modelo y el otro lo modelado; donde un ente se convierte en el modelo cuando el actor lo usa para intervenir en el otro, por lo que deviene en herramienta, los entes matemáticos al modelar, son herramientas (Arrieta y Díaz, 2015).
¿Por qué es importante?	Se refleja en una mejor comprensión del mundo y en contribuir al desarrollo de competencias y actitudes adecuadas hacia la Matemática. Sin embargo, enseñarla y aprenderla representa un reto: la brecha entre teoría y práctica, y las dificultades para profesores y estudiantes (Blum y Borromeo, 2009).	Su naturaleza radica en la potencia que imprime la articulación y la intencionalidad de intervenir. Esto implica la necesidad de interactuar con la entidad que se desea intervenir, es decir, la necesidad de la experimentación en sentido amplio (Arrieta y Díaz, 2015).

Fuente: Elaboración propia, 2016.

De forma sintetizada se han presentado las posturas cognitiva y social de la modelación matemática, podemos ver como en ambas se habla de *articular la realidad y la escuela*, la forma de concebir que hay *actores* (persona que modela) y la *intencionalidad* de contribuir al desarrollo de competencias matemáticas. Otro aspecto importante de mencionar, es que las investigaciones de ambas perspectivas, argumentan que en la modelación matemática se restringe la realidad a aquellas condiciones que son útiles de modelar, por ello es algo que apoya en la articulación de la realidad y la escuela, y no es estrictamente una representación completa de la realidad. Por ejemplo, podemos encontrar en Arrieta y Díaz (2015) “No es posible reproducir las intencionalidades de comunidades en el aula, las entidades con las que interactúan los profesionistas en sus prácticas son diferentes con aquellas de la escuela, lo que sí “trasportamos” al aula es el acto de modelar” (p. 36).

Además, la postura cognitiva contempla el desarrollo de actitudes adecuadas a la Matemática, porque sus investigaciones se dan principalmente en el nivel básico (primaria y secundaria) y medio superior, y se tiene la intención que los estudiantes den sentido a la Matemática, esto lo podemos ver en Blum y

Borromeo (2009), donde se presentan cuatro casos de modelación matemática con situaciones problema “artificiales” (en el sentido de no ser una necesidad habitual de los actores que modelan). La postura social ha generado investigación en situaciones profesionales, como comunidades de ingenieros donde los contextos son por sí mismos situaciones de la vida profesional y no requieren de ser ajustados de manera forzada (aunque si se restringe a ciertas variables, es decir, no se consideran todos los aspectos que pueden influir en una situación profesional real), esto lo podemos ver en los estudios de Arrieta (2003) con ingenieros en Bioquímica.

Otro aspecto relevante de las posturas cognitiva y social son sus esquemas para describir la modelación. En lo cognitivo (ver figura 2) observamos un ciclo de modelación como un algoritmo que nos dice los pasos a seguir para modelar, en éste nos es importante la flexibilidad para repetir el ciclo las veces necesarias y también contempla una etapa de validación, actividad fundamental en la Ingeniería, que es probar un modelo. En lo social, observamos un esquema descriptivo que identifica y relaciona lo modelado, cómo uno de ellos se convierte en un ente cuando pasa de ser el modelo a aquello que se modela, dando como resultado una herramienta de decisión para el actor.

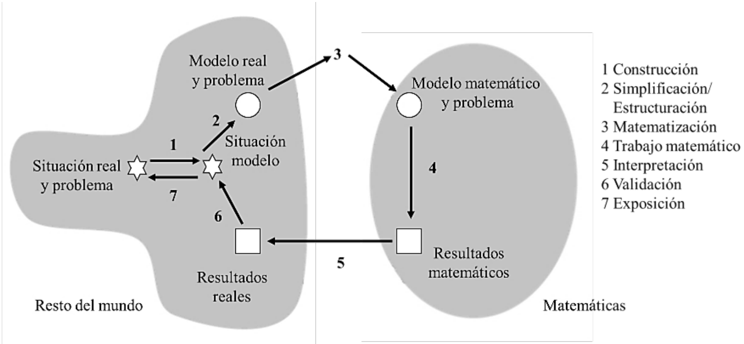


Figura 2. Ciclo de modelación. Adaptado de Blum y Borromeo, 2009, p. 46

Blum y Borromeo (2009) nos indican que el ciclo de modelación inicia con un problema a resolver, el cual tiene que ser primeramente comprendido (a lo que llaman los autores, construcción de una situación de modelación) por el actor. Luego la situación debe ser simplificada, estructurada y detallada para hacer un modelo real de la situación. Posteriormente se debe hacer la matematización en la elaboración de un modelo matemático (conjunto de ecuaciones), seguidamente se efectúa el trabajo matemático (calcular y resolver ecuaciones) para obtener resultados matemáticos que deben interpretarse en el mundo real como resultados reales. Por último, se validan los resultados del ciclo, para comparar los resultados obtenidos del ciclo de modelación con los factores involucrados en el modelo real.

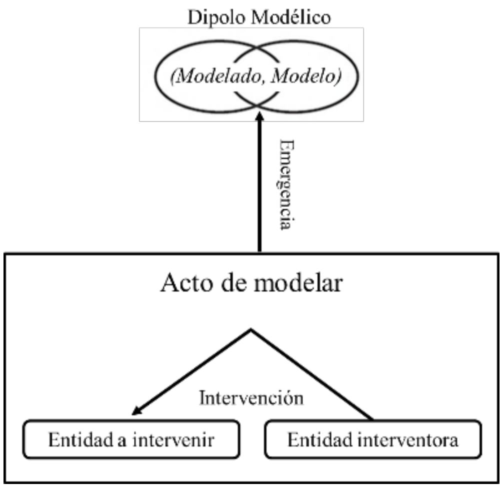


Figura 3. La modelación: El acto de modelar, el modelo, lo modelado y el dipolo modélico. Adaptado de Arrieta y Díaz, 2015, p. 36

Bajo la perspectiva social de modelación, se puede asociar el ejemplo de la figura 1 del esquema de eslabonamiento de cuatro barras, el cual se convierte en modelo cuando el Ingeniero en Mecatrónica (en formación) lo utiliza para intervenir en una toma de decisión del robot, o parte de él, que esté analizando o diseñando, el modelo (esquema) se convierte en el ente modelado (eslabonamiento de cuatro barras). En cambio, no hay acto de modelar si el mismo esquema lo utiliza un estudiante en asignaturas iniciales, como Física por ejemplo, el estudiante aunque tiene conocimientos de apoyos de acoplador (conocidos como apoyos de perno liso, que significa que es una pieza que evita el movimiento vertical y horizontal y se utiliza en vigas), sus conocimientos no le permiten concebir que un eslabonamiento de cuatro barras trae consigo curvas de acoplador, lo que no tiene un significado útil en la Robótica para la toma de decisiones.

Reflexiones

Las perspectivas cognitiva y social presentadas nos han permitido identificar aspectos importantes en la modelación en Ingeniería, tales como: dar una forma sistematizada de poder observar un ciclo de modelación (la cognitiva) y dar una explicación sistémica, es decir, todo aquello que interviene en la modelación, y cómo se relacionan sus entes (la social). Desde nuestro marco teórico nos es posible integrar ambas perspectivas de modelación porque contempla las dimensiones cognitiva y social, pero es necesario analizar a detalle los principios filosóficos de ambas perspectivas para ver que sean compatibles entre ellos, y así poder utilizarlas de forma articulada en nuestro estudio del uso del conocimiento trigonométrico y la modelación en la Robótica de los ingenieros en mecatrónica.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *La modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Distrito Federal, México.

Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde La Socioepistemología. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa 18*(1), 19-48.

Blum, W. y Borromeo, R. (2009). Mathematical modelling: can it betaught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application 1*(1), 45-58.

Blum, W., Alsina, C., Biembengut, M., Bouleau, N., Confrey, J., Galbraith, P., Ikeda, T., Lingefjärd, T., Muller, E., Niss, M., Verschaffel, L., Wang, S., Hodgson, B. y Henn, H. (2002). ICMI Study 14: Applications and Modeling in Mathematics Education- Discussion Document. *Educational Studies in Mathematics 51*(1-2), 149-171.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico.* México: Diaz de Santos.

Montiel, G. y Jácome, G. (2014). Significado trigonométrico en el profesor. *Boletim de Educação Matemática 28*(50), 1193-1216.

Norton, R. (2013). *Diseño de Maquinaria: síntesis y análisis de máquinas y mecanismos.* Quinta Edición. México: McGraw-Hill.

Scholz, O. (2014). *Construcción de significados para lo trigonométrico en el contexto geométrico del círculo.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, Distrito Federal México.

Torres-Corrales, D. (2014). *Un entorno geométrico para la resignificación de las razones trigonométricas en estudiantes de Ingeniería*. Tesis de maestría no publicada. Instituto Tecnológico de Sonora, México.

ECOLOGIA DO ENSINO DO CONCEITO DE POLINÔMIOS ENTRE AS DÉCADAS DE 1960 A 2010 NO BRASIL

Marlene A. Dias, Miriam do Rocio Guadagnini, Valdir Bezerra dos Santos Júnior
UNIAN, UFPE. (Brasil)
maralvesdias@gmail.com, miriamguadagnini@hotmail.com, valdir.bezerra@gmail.com

RESUMO: Apresentamos aqui parte de pesquisa sobre o ensino e aprendizagem da álgebra, especificamente, o estudo da ecologia do ensino de polinômios entre as décadas de 1960 a 2010. No referencial teórico da pesquisa, optamos pelas noções de praxeologia e ecologia, conforme definição de Chevallard, que conduziram à metodologia da pesquisa documental, por meio da qual analisamos livros didáticos das décadas consideradas. Os resultados mostram uma ecologia bastante estável, se desconsiderarmos a década de 1960 e as praxeologias privilegiadas nas décadas de 2000 e 2010, que estão centradas na articulação dos polinômios com as noções de área e perímetro de figuras planas.
Palavras-chave: polinômios, ecologia, praxeologia, álgebra

ABSTRACT: This article shows a part of a research on Algebra teaching learning process, particularly about the polynomials learning ecology, according to Chevallard´s definition, from 1960 to 2010. The research theoretical points of reference were based on the notions of praxeology and ecology, according to Chevallard's definition; which led to the methodology of the theoretical research, by means of which we studied didactic books published during such decades. The obtained results show a sufficiently stable ecology, if we take into consideration the sixties and the praxeologies that were mainly used during the 2000 and 2010 decades, all of which are centered on the interrelation of polynomials with area and perimeter notions for plane figures.
Key words: polynomials, ecology, praxeology, algebra

Introdução

Este estudo tem o objetivo de compreender quais noções associadas ao conceito de polinômios desaparecem ou sobrevivem nas propostas institucionais de ensino deste conceito no Ensino Fundamental, anos finais (alunos entre 11 e 14 anos) no Brasil, ou seja, estudamos a ecologia associada ao ensino da noção de polinômio na escola básica brasileira a partir da análise dos livros didáticos das décadas de 1960 a 2010.

Para isso, escolhemos como referencial teórico central da pesquisa a Teoria Antropológica do Didático (TAD), em particular, as noções de ecologia dos saberes e praxeologia, sendo a primeira definida por Chevallard (2002) e a segunda, como a quádrupla composta por tipo de tarefa (T), técnica (τ), tecnologia (θ) e teoria (Θ) que, segundo Chevallard (1998), corresponde à premissa básica da TAD, pois, para o pesquisador, toda atividade regular humana pode ser entendida por meio deste modelo único.

A metodologia adotada é a da pesquisa documental à luz dos ensinamentos de Lüdcke e André (1986). Para o desenvolvimento metodológico da pesquisa, optamos pela análise de um livro didático utilizado nas décadas de 1960, 1970, 1980, 1990, 2000 e 2010. Justificamos a utilização de um único livro para cada década por meio da afirmação de Lages Lima, Carvalho, Wagner, Morgado (2006), os quais, em seu livro dedicado aos professores, indicam que a obra foi construída visando a um maior apoio bibliográfico ao professor que, em geral, dispõe apenas do livro didático adotado, uma vez que os outros existentes no mercado diferem muito pouco entre si. Assim, analisamos os livros da sexta série/sétimo ano (estudantes de 12 anos) e da sétima série/oitavo ano (estudantes de 13 anos) de cada uma das coleções indicadas para o Ensino Fundamental anos finais (estudantes de 11 a 14 anos) nas décadas consideradas.

Os resultados mostram um ensino que sofre pequenas modificações durante as seis décadas consideradas.

Na sequência, apresentamos brevemente o referencial teórico que sustenta nossas análises.

Referencial teórico

Para atingir nosso objetivo, escolhemos como referencial teórico central da pesquisa a Teoria Antropológica do Didático, em particular, as noções de ecologia dos saberes e praxeologia.
Antes de definir as noções acima, nos parece importante explicitar as noções fundamentais na perspectiva antropológica. Assim, conforme Chevallard (1998), a primeira noção fundamental é a de *objeto*, que corresponde a toda entidade, material ou imaterial, que existe para pelo menos um indivíduo. Assim, a noção de *objeto o* é a mais geral, pois tudo é objeto, inclusive as pessoas. O autor

cita como exemplos de objetos o número sete, o algarismo 7 (sete), a noção de pai e também a de pai que passeia com seu filho, a ideia de perseverança, ou de coragem ou de virtude, entre outras, a noção de derivada, o símbolo ¶, etc.

O pesquisador considera ainda que toda *obra O* é um *objeto*, explicitando que uma obra corresponde a qualquer parte de um complexo de organizações praxeológicas ou praxeologias e, mais especificamente, pode ser somente um componente material como um livro, uma mesa, um data-show.

Após definir objeto, Chevallard (1998) introduz a segunda noção fundamental, que é a de *relação pessoal* de um indivíduo *x* com um objeto *o*, que, segundo o autor, corresponde à expressão pela qual designamos o sistema, representado por $R(x, o)$, de todas as interações, sem exceção, que *x* pode ter com o objeto *o*, isto é, *x* pode manipulá-lo, utilizá-lo, falar sobre ele, sonhar com ele etc. Assim, dizemos que *o* existe para *x* se ele tem uma relação pessoal com *o*, ou ainda se sua relação pessoal com este objeto é não vazia, o que se indica por $R(x, o) \neq \phi$.

A terceira noção fundamental é a de *pessoa*, que é definida pelo par formado por um indivíduo *x* e o sistema de relações pessoais $R(x, o)$ num dado momento da história de *x*. O autor observa ainda que todo indivíduo é uma pessoa, compreendendo os bebês que ainda não falam. Assim, no decorrer do tempo, o sistema de relações pessoais de *x* evolui, objetos que não existiam para ele passam a existir, outros deixam de existir, ou seja, a relação pessoal de *x* muda. Nessa evolução, o invariante é o indivíduo e o que muda é a pessoa.

Dessa forma, quando um objeto o existe para uma pessoa x, ou seja, quando $R(x,o) \neq \phi$, dizemos que x conhece o e que a relação $R(x,o)$ indica a maneira que x conhece o.

A definição de relação pessoal de um indivíduo *x* com um objeto conduz Chevallard (1998) a definir universo cognitivo como sendo o conjunto $U(x) = \{(o, R(x, o) / R(x,o) \neq \phi\}$. Neste caso, o autor explicita que o adjetivo cognitivo não é adotado em sua acepção intelectualista corrente, pois de acordo com Chevallard, temos uma relação pessoal com a nossa escova de dentes, com a máquina de fazer café etc, ou seja, com todos os objetos que fazem parte do nosso universo cognitivo, da mesma maneira que pode fazer parte, por exemplo, a noção de equação do segundo grau ou a de derivada.

Deste modo, segundo o autor, para explicar a formação e evolução do universo cognitivo de uma pessoa *x*, é conveniente introduzir uma quarta noção fundamental, a de instituição. Ainda conforme o autor, as instituições são obras de um tipo particular, ou seja, uma instituição é um dispositivo social "total", que pode ter somente uma extensão reduzida no espaço social (existem microinstituições), mas que permite e impõe a seus sujeitos, isto é, às pessoas que vêm a ocupar diferentes posições oferecidas na instituição *I,* envolvendo maneiras próprias de fazer, e mais amplamente, adotando praxeologias determinadas.

Assim, por exemplo, um livro didático é uma obra e a classe que possibilita a utilização desse livro é uma instituição, em que as duas posições essenciais são as do professor e de estudante, da mesma forma que o estabelecimento, onde aparecem outras posições também é uma instituição englobante e que fusiona diversas posições, que constituem o sistema educativo.

Chevallard (1998) responde ainda à questão da constituição e mudança do universo cognitivo *U(x)* de um indivíduo *x*. O autor esclarece que a relação pessoal de *x* com o objeto *o* é criada ou muda por meio da entrada de *x* em certas obras *O*, cujo objeto o a compõe, e essas mesmas obras vivem em determinadas instituições em que *x* poderá ocupar a posição *p*. Assim, desde o nascimento, todo individuo se sujeita a múltiplas instituições, isto é, ele é ao mesmo tempo submetido e sustentado pelas instituições, tal como sua família, na qual ele se torna um sujeito. Em particular, os bebês se submetem de imediato à instituição linguagem, e mais precisamente à língua, mesmo que ele ainda não fale. Ele não é capaz de escapar dessa instituição e é ela que lhe permitirá falar, que lhe dará sua potência linguística. De forma geral, é devido a essas submissões, advindas do fato de que o indivíduo é sujeito de diversas instituições, que o mesmo se constitui em uma pessoa.

Assim, a “teoria do conhecimento” esboçada para os indivíduos é transferida para as instituições, ou seja, dado um *objeto* o, uma *instituição I* e uma posição *p* em *I*, denominamos *relação institucional* a o em posição *p*, e indicamos $R_I(p, o)$, a relação com o objeto *o* que deveria ser, idealmente, aquela dos sujeitos de *I* em posição *p*. Dizer que *x* é um bom sujeito de *I* em posição *p*, é o mesmo que afirmar que a relação pessoal do indivíduo *x* está em conformidade ou é adequada à relação institucional em posição *p*, que indicamos $R(x, o) \cong R_I(p, o)$.

De tal modo, ao se tornar sujeito de *I* em posição *p*, um indivíduo *x*, que é sempre uma pessoa, dotado de um universo cognitivo *U(x)* submete-se às relações institucionais *RI(p,o)*, que irão (re)modelar, (re)formar suas relações pessoais, ou seja, se o existe para os sujeitos que estão na posição *p*, a relação pessoal de *x* a *o*, *R(x, o)* tende a ser semelhante à relação institucional $R_I(p,o)$, a menos que x se revele ser um mau sujeito de *I*. De forma geral, nossas relações pessoais são fruto de nossa história de sujeições institucionais passadas e presentes.

Após esta breve descrição das noções de relação pessoal e institucional, consideramos a noção de organização praxeológica ou praxeologia que, segundo Chevallard (1998), corresponde aos tipos de tarefas (*T*) que, para serem executadas, necessitam de uma maneira de fazer que o autor denomina técnica (τ). A associação tarefa-técnica é definida como um saber fazer que não sobrevive isoladamente, solicitando um ambiente tecnológico-teórico, que corresponde a um saber formado por uma tecnologia (θ), ou seja, um discurso racional que justifica e torna a técnica compreensível, e de uma teoria (Θ) que justifica e esclarece a tecnologia utilizada. O sistema composto por tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria [T, τ, θ, Θ] constitui o que Chevallard denomina praxeologia, sendo ela que articula uma parte prático-técnica, que corresponde ao saber fazer, a uma parte tecnológica teórica, que corresponde ao saber. A base de toda praxeologia é constituída por um sistema de tarefas em torno das quais se desenvolvem e se organizam técnicas, tecnologias e teorias.

Antes de considerar a noção de ecologia introduzida por Chevallard (2002), observamos aqui que o pesquisador pondera que a relação pessoal com um determinado objeto do saber depende da relação institucional ou relações institucionais a que uma pessoa se submete. Dessa forma, segundo Chevallard (2002), a aprendizagem é considerada como o acesso a essa relação pessoal, ou seja, a diversidade de relações institucionais a que o sujeito se submete. Assim, as diferentes relações institucionais permitem considerar o estudo como uma modificação das relações pessoais e o ensinar como uma ajuda ao estudo, ou seja, ajuda dada ao estudante no sentido de que ele possa estabelecer uma relação com o saber, modificando-o de modo a torná-lo adequado às expectativas apresentadas em uma determinada relação institucional.

Após esta breve introdução sobre as noções fundamentais da TAD, consideramos a noção de ecologia dos saberes que é definida por Chevallard (2002) como a pesquisa da vida dos saberes nas instituições, pois esses dependem de adaptações às restrições que, muitas vezes, estão associadas à economia destes saberes.

Deste modo, Chevallard (2002) ao considerar a noção de ecologia, define *habitat* como o lugar onde vivem os objetos matemáticos considerados, *nicho* correspondendo à função que esses objetos ocupam em cada um de seus habitats e "*meio"* como o conjunto dos objetos para os quais a relação institucional é estável e não problemática.

Assim, uma instituição *I* e as diferentes obras *O* para a qual ela serve de *habitat*, que corresponde ao lugar onde vivem os objetos *o*, não poderiam existir sem sujeitos. Esses são os atores da instituição *I* e as obras *O* que vivem em *I* fazem com que as instituições continuem a viver. Existe assim uma dialética entre instituições, obras e pessoas.

A seguir apresentamos os resultados encontrados nas análises das obras consideradas.

Resultados

Os primeiros resultados mostram que o livro de Sangiorgi (1966), da década de 1960, época da Matemática Moderna, é o que mais se diferencia dos outros, pois já na quinta série/sexto ano (estudantes de 11 anos), introduzia-se a noção intuitiva de conjuntos e elementos de lógica, como, por exemplo, o uso do símbolo de equivalência articulado com exemplos relacionados às operações com números naturais e inteiros relativos.

Na sexta série/sétimo anos, eram introduzidos ainda os números racionais, suas operações e propriedades, que eram tratados por meio do conceito de estrutura algébrica, como já se havia feito para os números naturais e inteiros relativos.

O conceito de polinômio era introduzido na sétima série/oitavo ano, após o estudo dos números reais, de suas operações e propriedades por meio de sua estrutura algébrica, ou seja, a estrutura de corpo. Esse estudo centrado nas estruturas algébricas compara os diferentes conjuntos, em particular, o conjunto dos polinômios de coeficientes reais que, como o conjunto dos números inteiros relativos, tem uma estrutura de grupo comutativo para a adição e de anel comutativo para as operações de adição e multiplicação como o conjunto dos números reais.

Apesar desta introdução teórica, as praxeologias privilegiadas são associadas aos tipos de tarefas que correspondem à T1: Representar área e perímetro de uma figura geométrica plana regular por meio de uma expressão literal ou de um polinômio; T2: Identificar uma propriedade estrutural dos números reais; T3: Operações com expressões literais; T4: Reduzir os termos semelhantes; T5: Reconhecer polinômios; T6: Determinar o grau de um polinômio; T7: Efetuar operações com polinômios; T8: Determinar o valor numérico de um polinômio”.

Já na obra de Di Pierro Neto (1971), da década de 1970, as estruturas algébricas desaparecem e o cálculo literal é introduzido na sexta série/sétimo ano após o estudo dos números inteiros relativos, suas operações e propriedades, privilegiando a praxeologia T8. Ainda neste ano, são introduzidos os monômios e, como aplicação, consideram-se os produtos notáveis. Na sétima série/oitavo ano, são introduzidos: o conjunto dos números reais, suas operações e propriedades e os polinômios de coeficientes reais, suas operações e propriedades, mas não se comparam suas estruturas.

Nesta obra, o polinômio é definido como uma expressão algébrica inteira de dois ou mais termos. São introduzidas ainda as noções de valor numérico de uma expressão algébrica e de um polinômio, redução de termos semelhantes e operações com polinômios. Após considerar a operação de multiplicação de polinômios, o autor produz as identidades remarcáveis ou produtos notáveis e a fatoração é introduzida após o estudo da operação de divisão, sendo aplicada na simplificação de frações algébricas.

As praxeologias privilegiadas nesta obra correspondem aos tipos de tarefa T3 a T8 indicadas acima.
Na obra de Averbuch, Gottlieb, Sanches, Liberman (1985), que na nossa pesquisa representa a década de 1980, observamos que o conjunto dos números reais, suas operações e propriedades, assim como as expressões algébricas e os polinômios são introduzidos da mesma forma que na obra

de Di Pierro Neto (1971). Na sequência, as autoras introduzem as expressões algébricas, polinômios, valor numérico das expressões algébricas e de polinômios, grau de um polinômio, operações com polinômios ainda de forma análoga à de Di Pierro Neto. Em relação aos produtos notáveis e a fatoração, foi possível identificar uma diferença, pois estas noções são introduzidas após o estudo dos polinômios. As autoras também utilizam produtos notáveis e fatoração como aplicação para o estudo das frações algébricas.

Em relação aos tipos de tarefas propostas aos estudantes, identificamos os mesmos tipos de tarefas apresentadas em Di Pierro Neto (1971).

Na obra de Bianchini (1991), o conjunto dos números reais, suas operações e propriedades é introduzido da mesma maneira que na obra anterior, assim como as expressões algébricas e os polinômios. Os tipos de tarefa não variam e tanto os produtos notáveis como a fatoração são propostos para serem trabalhados após o estudo dos polinômios. Essas noções são aplicadas no estudo das frações algébricas, ou seja, tanto os tipos de tarefa propostas pelo autor como a aplicação dos produtos notáveis e da fatoração não diferem das obras anteriores.

Na obra de Dante (2008), observamos que o autor introduz os números reais, suas operações e propriedades, utilizando situações contextualizadas que servem de motivação para o estudo dessas noções.

No estudo das expressões algébricas e dos polinômios, encontramos tarefas do tipo T1 apresentada por Sangiorgi (1966), mas que diferem em função do tratamento intra e extramatemático, ou seja, em Sangiorgi (1966), eram tarefas que articulavam álgebra e geometria e em Dante (2008), trata-se deste mesmo tipo de tarefas, sendo que a articulação entre álgebra e geometria é descrita por meio de um determinado contexto extramatemático.

O estudo dos polinômios, suas operações e propriedades, segue a mesma estrutura de Di Pierro Neto (1971) e, sempre que possível, o autor articula álgebra e geometria, ou seja, utiliza a noção de área de figuras geométricas planas enquanto aplicação das noções introduzidas.

Na obra de Dante (2013), o estudo dos polinômios não difere do proposto em sua obra de 2008, apenas alguns exemplos correspondem a contextos diferenciados.

Assim, identificamos que as obras das décadas de 1980 e 1990 seguem a mesma estrutura da obra de 1970, mas as praxeologias privilegiadas passam a ser: “Reconhecer polinômios”, “Efetuar operações com polinômios” e “Determinar o grau de um polinômio”. Da mesma forma, observamos que, mais uma vez, as estruturas das obras das décadas de 2000 e 2010 continuam sendo muito próximas, mudando apenas as praxeologias privilegiadas, que ficam centradas na articulação da noção de polinômios com os cálculos de perímetros e áreas de figuras planas, o que já se fazia como tipos de tarefas propostas aos estudantes na década de 1960.

Neste estudo, sobre a introdução e desenvolvimento da noção de polinômios no Ensino Fundamental anos finais no Brasil, entre as décadas de 1960 a 2010, foi possível observar que a ecologia dos objetos que lhe são associados sobrevive continuamente em um *habitat* que corresponde ao quadro da álgebra elementar, cujo *nicho*, ou seja, a função desses objetos está associada à introdução de um início de formalismo algébrico para o desenvolvimento das equações do primeiro e segundo grau e a introdução da fatoração e das identidades remarcáveis (produtos notáveis), sendo seu *meio* a distinção dos polinômios segundo seu grau e as operações com estes novos objetos matemáticos.

Observamos finalmente que é em relação às tecnologias e teorias que se encontra a distinção entre a obra de Sangiorgi (1966) e as outras obras analisadas neste estudo.

Considerações Finais

Este primeiro estudo, considerando apenas o conceito de polinômios, parece mostrar que existe pouca diferença entre as propostas de estudo, ao analisarmos as décadas de 1970 a 1990, sendo a grande diferença encontrada na década de 1960, ou seja, época da Matemática Moderna.

É importante observar que mesmo as praxeologias privilegiadas têm poucas diferenças entre elas, destacando-se apenas as das décadas de 2008 e 2010, centradas nas fórmulas para cálculo de perímetros e áreas, que parecem deixar pouco espaço para outras aplicações, como por exemplo, a aplicação dos produtos notáveis de fatoração para o estudo das frações algébricas, que não são consideradas nestas duas décadas.

Referências Bibliográficas

Averbuch, A., Gottlieb, F. C., Sanches, L. B., Liberman, M. P. (1985). *Matemática: saber e fazer.* São Paulo: Editora Saraiva.

Chevallard, Y. (1998). *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique*. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=27

Chevallard, Y. (2002). *Organiser l'étude 3 : Ecologie e Régulation.* Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=53

Bianchini, E. (1991). *Matemática.* São Paulo: Editora Moderna.

Dante, L. R. (2008). *Tudo é matemática.* São Paulo: Editora Ática.

Dante, L. R. (2013). *Matemática: Projeto Teláris.* São Paulo: Editora Ática.

Di Pierro Neto, S. (1971). *Matemática na escola renovada.* São Paulo: Edição Saraiva
Lages Lima, E., Carvalho, P.C.P., Wagner, E. Morgado, A.C. (2006). *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: IMPA.
Lüdke, M., André, M.E.D.A. (1986). *Pesquisa em educação:* abordagens qualitativas. São Paulo: EPU.
Sangiorgi, O. (1966). *Matemática curso moderno.* São Paulo: Companhia Editora Nacional.

CONSIDERACIONES PARA EL DISEÑO DE UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL DESARROLLO DE IDEAS FUNDAMENTALES ESTADÍSTICAS

Irma Nancy Larios Rodríguez., Eleazar Silvestre Castro, Enrique Hugues Galindo
Universidad de Sonora. (México)
nancy@mat.uson.mx, eleazar.silvestre@gmail.com, ehugues@mat.uson.mx

RESUMEN: En el trabajo se presentan las consideraciones para el diseño de una propuesta didáctica cuyo propósito es el desarrollo de ideas fundamentales de la estadística, que permitan promover una cultura estadística para estudiantes de los cursos de estadística de las áreas de Económico Administrativo y Ciencias Sociales de la Universidad de Sonora. Se presenta a manera de ejemplo de la propuesta, la descripción general de una actividad didáctica la cual está pensada para ser implementada de forma complementaria e integradora al trabajo que realizan los estudiantes en los cursos de Estadística I, del área de Económico Administrativo, de tal forma que los estudiantes puedan hacer uso de todos aquellos elementos estudiados en el curso para la resolución de la misma.

Palabras clave: ideas fundamentales estadísticas, cultura estadística, propuesta didáctica

ABSTRACT: This research work includes the considerations for a didactic proposal design with the aim of developing the main ideas of Statistics that allow fostering a statistic culture in the students who take courses on statistics in social sciences and economic management areas at the University of Sonora. As an example of the proposal, the report provides the general description of a didactic activity. It is conceived to be implemented in a complementary and integrating way in the students' tasks in the courses of Statistics I of Economic Management, in such a way that the students be able to use all those elements already studied during the course to solve their tasks.

Key words: main statistic ideas, statistic culture, didactic proposal

Introducción

En la actualidad la estadística tiene aplicaciones en campos como el político, científico, social, cultural, tecnológico, etc. Los ciudadanos continuamente reciben información por los diferentes medios de comunicación que son resultados de tratamientos estadísticos, razón por lo cual es imperante formar ciudadanos con una cultura estadística capaces de trabajar, leer e interpretar datos, esto debe ser uno de los objetivos centrales de la enseñanza de esta disciplina en cualquier nivel educativo. Actualmente la enseñanza de la estadística en México está presente desde el nivel educativo básico. Sin embargo esto no garantiza que se esté incidiendo en el desarrollo de una cultura estadística.

El presente trabajo se centra en el nivel superior, particularmente en la enseñanza de la estadística en la Universidad de Sonora, México, donde en casi todos los programas educativos se incluye al menos un curso de estadística, los cuales son impartidos por profesores adscritos al Departamento de Matemáticas.

Algunos elementos de justificación para el diseño de la propuesta, son los siguientes:

a) al realizar una revisión de los programas de materia de dichos cursos se encuentra que en ellos se contempla una lista de temas disciplinares, existiendo mínimas orientaciones didácticas para su desarrollo, en algunos de dichos programas se recomienda el uso tecnología computacional (software estadísticos o Excel), pareciendo opcional su uso.

b) Los textos recomendados en la bibliografía de los programas de materia atienden los temas de manera muy tradicional, esto es, inicialmente describen técnicas o teoría, posteriormente ilustran ejemplos y posteriormente aparecen ejercicios similares a los descritos para que los estudiantes los repliquen. Así por ejemplo, en los ejercicios del tema *presentación de la información*, se proporcionan conjuntos de datos y se solicita la construcción de tablas o gráficas, no se encuentran actividades donde los estudiantes puedan utilizar diferentes registros de representación semiótica, tampoco se propicia la interpretación de los conceptos estadísticos y mucho menos planteamientos de hipótesis o conclusiones.

Arteaga et al. (2011), describen errores y dificultades en la comprensión de conceptos estadísticos elementales, como son uso de representaciones gráficas y tablas de frecuencia, la media aritmética, medidas de dispersión, asociación en tablas de contingencia, muestreo, contraste de hipótesis entre otros. Los cuales en nuestra experiencia como docentes consideramos prevalecen en la mayoría de nuestros estudiantes.

Tauber (2010), señala dificultades relacionadas con la enseñanza de estadística como los siguientes:

a) Los conceptos que se enseñan, en muchos casos, están desactualizados o erróneos; b) La enseñanza de estadística está en manos de matemáticos no especializados en estadística por lo que, en muchos casos, ésta se hace desde un enfoque puramente axiomático y se pierde la riqueza del razonamiento inductivo, aleatorio y probabilístico, por lo cual todo se reduce a la aplicación de fórmulas y se deja de lado el fundamento de la estadística que es el análisis de los datos, su variabilidad y la diversidad de posibilidades de análisis. (p.56).

En consideración a los aspectos antes señalados un grupo de docentes, nos encontramos diseñando propuestas didácticas para la enseñanza de la estadística para los cursos del área de Económico Administrativo y Ciencias Sociales de nuestra institución, que permita el desarrollo de una cultura estadística en los estudiantes.

Marco conceptual

Para el diseño de la propuesta didáctica se consideran los siguientes elementos:

El objetivo central del diseño es, el desarrollo de una cultura estadística en los estudiantes, dicha cultura de acuerdo a Gal (2002), incluye las dos siguientes competencias que están relacionadas:

a) Capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos que las personas puedan encontrar en diversos contextos incluyendo los medios de comunicación pero no delimitándose a ellos y b) capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sean relevantes (Gal 2002 pp. 2-3).

Se considera como eje integrador para el diseño las ideas fundamentales de la estadística señalada por Burrill y Biehler (2011) y retomadas por Batanero,C.,Diaz, C.,Contreras, J. y Roa, R. (2013), estas son el resultado de un estudio de diversos marcos teóricos educativos y del currículo estadístico en varios países. Se parte que son estas ideas fundamentales las que los estudiantes esencialmente necesitan para la resolución de problemas estadísticos. Como ya se señaló anteriormente en los programas de los cursos de estadística de la Universidad de Sonora, se señalan los contenidos disciplinares a enseñar, en este momento no se propone la sustitución de dichos contenidos disciplinares, sino más bien una serie de actividades didácticas complementarias diseñadas en base a ideas fundamentales estadísticas, siendo estas las que a continuación se enlistan:

1. Datos. La importancia de los datos es que el objeto de estudio de la estadística es el razonamiento a partir de datos empíricos.
2. Variabilidad aleatoria. El estudio de la variabilidad es inherente de la estadística, esta permite buscar explicaciones y causas de la misma y así poder hacer predicciones.
3. Representación. La presentación de los datos por medio de tablas, graficas u otro tipo de representación es esencial para la organización, descripción y análisis de los datos. Las tablas y graficas son importantes para la comprensión que surge al cambiar la representación de los datos.
4. Distribución. Otra característica esencial del análisis estadístico es describir o predecir propiedades de conglomerado de datos en su conjunto no de cada dato en forma aislada. El razonamiento de distribuciones implica el conectar los datos (distribuciones de datos), la

población de donde se tomaron (distribución de probabilidad) y las posibles muestras de la misma (distribución muestral).

5. Las relaciones de asociación y de modelización entre dos variables. Esto es conocer las relaciones entre las variables estadísticas tanto para datos categóricos como numéricos es importante en el análisis estadístico, incluyendo la regresión estadística para modelar asociaciones.
6. Probabilidad. Siendo la característica principal de la estadística hacer uso de modelos aleatorios, el concepto de probabilidad es esencial para los procesos de inferencia estadística.
7. Muestreo e inferencia. Es la muestra aleatoria la que permite relacionar las características de esta con la de la población de donde es seleccionada y obtener conclusiones con algún grado de probabilidad.

Descripción de la propuesta

La propuesta consiste en el diseño un conjunto de actividades didácticas que puedan ser aplicadas en forma complementaria en los cursos de estadística. Es decir, las actividades pueden ser aplicadas a los estudiantes como cierre al finalizar las unidades de aprendizaje establecidas en los programas de materia. Para el diseño e implementación de la propuesta se considera que el proceso educativo está centrado en el trabajo que realiza el estudiante y que el profesor funge como un promotor del proceso de aprendizaje, así mismo considera el uso de la tecnología un componente esencial para el logro de los propósitos declarados en las actividades didácticas.

A manera de ejemplo se describe una de actividades didácticas de la propuesta, la cual está dirigida para estudiantes de Estadística I (Estadística descriptiva) del área Económico Administrativo. El curso de Estadística I, consta de las siguientes unidades de aprendizaje: I. Introducción, II. Formas de presentación de la Información, III. Medidas de dispersión y de Centralización, IV. Regresión y Correlación Lineal y V. Elementos básicos de probabilidad. La estructura del curso es de la forma tradicional tal y como se encuentra en muchos de los libros de texto.

El curso esta seriado con el curso de Estadística II (Estadística Inferencial), de tal forma que la actividad que se describe, en conjunto con otras de la propuesta, tiene como intensión adicional ser un puente hacia ideas de la estadística inferencial utilizando los elementos estudiados hasta la Unidad de aprendizaje III.

La actividad de aprendizaje tiene como propósitos, que el estudiante:

- Reconozca la variabilidad presente en la situación problema.
- Describa y analice regularidades de un conjunto de datos a partir de sus representaciones.
- Seleccione muestras aleatorias para la solución de la situación problema.
- Colabore y participe en forma colaborativa.
- Plantee conjeturas y argumentaciones en base a la información estadística.

Los recursos y materiales para la realización de la actividad son: Hoja de trabajo, urnas físicas con frijoles y software Fathom. La implementación consta de dos momentos, el primero se realiza en el salón de clases, en donde se plantea la situación problema, se utiliza un simulador físico que consiste en una urna que contiene frijoles de dos colores. El segundo momento se realiza en un centro de cómputo, donde se simulan muestras aleatorias de diferentes tamaños mediante el uso del software Fathom. En la hoja de trabajo los estudiantes dan respuesta a los cuestionamientos solicitados y realizan los procedimientos, esta es una de las evidencias de aprendizaje que permite valorar la pertinencia de la actividad didáctica.

Primer momento

Situación problema: Se tiene una urna física que contiene 7000 frijoles de dos diferentes colores (frijoles negros y pintos), la cual se muestra en la Figura 1, con ella se simula una población de jóvenes donde los frijoles negros representan a los jóvenes que estudian y los frijoles pintos representan los jóvenes que no estudian. Se desea saber ¿Cuál es porcentaje de jóvenes de la población que estudia?

Figura 1. Urna física

El profesor solicita a un estudiante que selecciones 10 frijoles de la urna la cual fue previamente agitada y cuestiona al grupo sobre lo siguiente:

¿Se puede concluir cuál es el porcentaje de jóvenes que estudian de la población, con el resultado obtenido en la selección? y ¿Por qué?

Se realizan dos extracciones más y se encuentra resultados como los que se muestra en la Figura 2.

Primera extracción (muestra 1):	Segunda extracción (muestra 2):	Tercera extracción (muestra 3):
7 frijoles negros,	3 frijoles negros,	5 Frijoles negros,
70% de los jóvenes	30% de los jóvenes	50% de los jóvenes
Estudia.	Estudia.	Estudia.

Figura 2. Resultados de tres extracciones

Dado lo diferente de los resultados de las extracciones, se espera que los estudiantes emitan argumentaciones variadas entre los que se encuentran que es necesario repetir el procedimiento, o que el tamaño de la muestra es muy pequeño para poder establecer el porcentaje de jóvenes de la población que estudia.

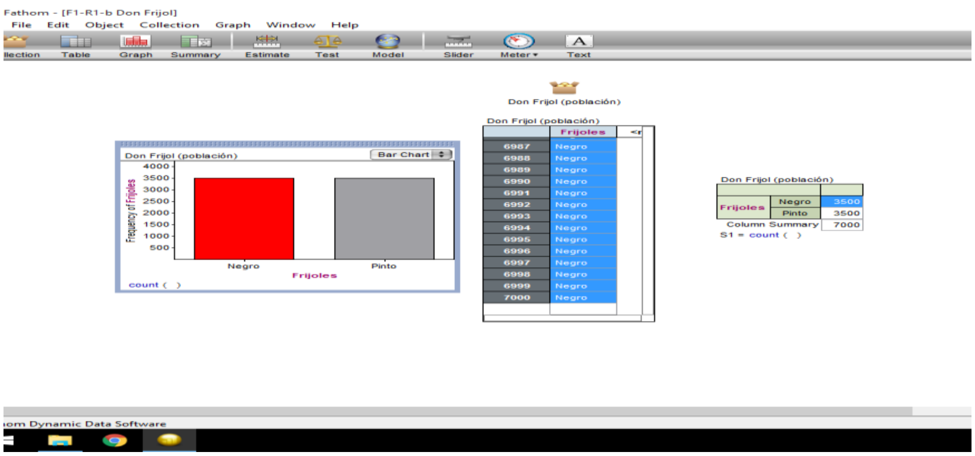
Posteriormente se forman equipos de tres integrantes, se les entrega una urna y se solicita que seleccionen 50 muestras de 10 frijoles y que contesten los siguientes cuestionamientos ¿Qué pueden decir de los valores obtenidos? ¿A crees que debe la variabilidad de los valores obtenidos en las muestras? A partir de estos valores ¿Cuál consideran es el porcentaje de jóvenes que estudian de la población? Argumenten su respuesta.

Repita la selección de 50 muestra más pero aumentando el tamaño, ¿Qué puede decir de la variación de porcentaje de jóvenes que estudian en la muestra?, ¿Cambia la estimación de jóvenes que estudian en la población? ¿Por qué?

Se retoma en forma grupal los resultados obtenidos en los equipos, para dar respuesta al cuestionamiento planteado en la situación problema, solicitándoles que organicen la información obtenida en las diferentes extracciones en tablas o gráficas.

El primer momento de la actividad cierra con la presentación por parte del profesor de la proporción real de jóvenes que estudian de la población, mediante el uso de Fathom, tal y como se muestra en la Figura 3, donde se puede observar que el número total de jóvenes que estudian es el mismo que los que no estudian.

Con este resultado se vuelve a reflexionar sobre las respuestas que se propusieron por los equipos sobre la estimación del parámetro solicitado, analizando las regularidades de las muestras, así como la variación entre los porcentajes muestrales.



50% de los jóvenes de la población estudia.

Figura 3. Pantalla de Fathom donde se muestra la proporción de jóvenes que estudian de la población

Segundo momento

El trabajo que realizan los estudiantes en el segundo momento es en un centro de cómputo, donde se les proporciona un archivo en Fathom, donde pueden simular rápidamente muestra aleatorias de diferentes tamaños y ver de manera gráfica el comportamiento de la distribución de las muestras.

A los estudiantes se les solicita que generen 300 muestra de diferentes tamaños: n=10, n=20, n=30, n=100 y que comparen los resultados obtenidos. Con esto se pretende que los estudiantes puedan percibir el efecto que tiene el tamaño de la muestra tanto en la variabilidad de los resultados como en la forma a la cual tienden dichos valores cuando los valores de la muestra aumentan. Esto es se les pide a los estudiantes que respondan a los siguientes cuestionamientos:

¿Qué pasa con la variabilidad de los porcentajes de las muestras al aumentar el tamaño de las muestras? Y ¿Qué pasa con la forma de las gráficas al aumentar el tamaño de las muestras? ¿Cuál es la tendencia del porcentaje de estudiantes de la población que estudia?

En las Figuras 4 y 5 se muestran a manera de ejemplo dos ejemplos de las pantallas generadas por Fathom para dos situaciones diferentes.

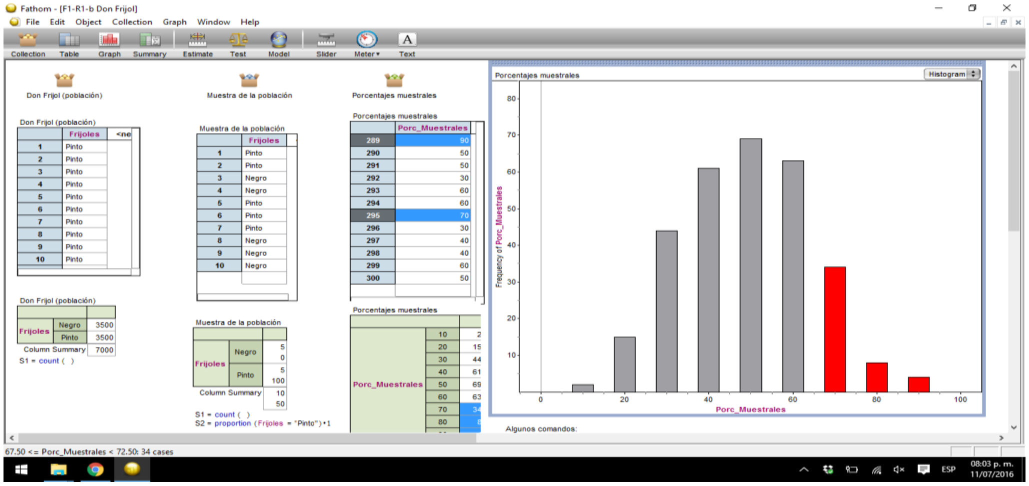


Figura 4. Pantalla de Fathom, para 300 muestras de tamaño 10 y P=0.5

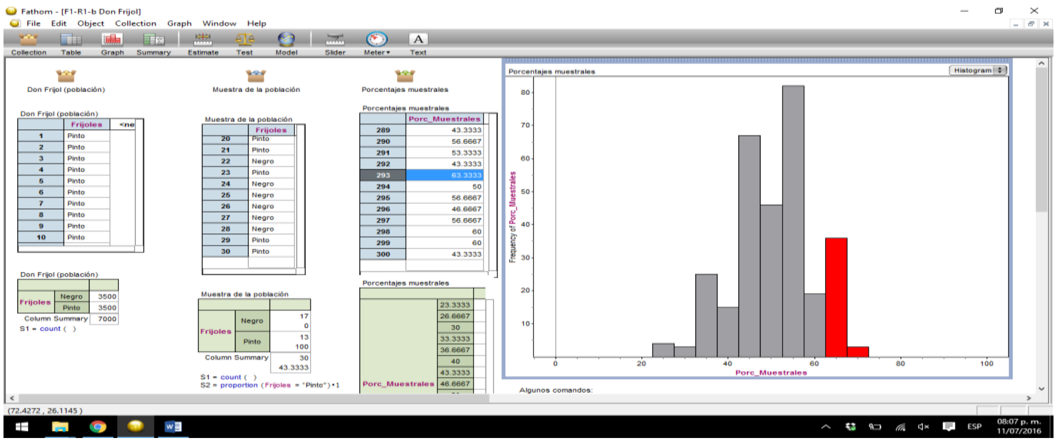


Figura 5. Pantalla de Fathom, para 300 muestras de tamaño 30 y P=0.5

El segundo momento cierra con un trabajo grupal donde se dan respuesta a los cuestionamientos anteriores mediante el consenso las respuestas de los diferentes equipos, el Profesor acompaña a los jóvenes de manera activa instruyéndolos, observándolos y reajustando preguntas sólo en casos muy necesarios momentos para permitir que las respuestas surjan del razonamiento y discusión de los estudiantes de la actividad. En la siguiente actividad didáctica se retoma la misma idea pero se integran cálculos de medias y desviaciones estándar de las distribuciones de muestras generadas, con la intensión de promover un acercamiento al complicado concepto de distribución muestral.

Comentarios finales

En este momento no contamos con resultados avalados metodológicamente con un referente teórico, ya que nos encontramos en el diseño del total de las actividades didácticas de la propuesta para el curso de Estadística I, las cuales se pretenden pilotear durante el semestre 2016-2, para valorar la pertinencia de la propuesta en términos de los propósitos declarados y realizar los cambios que se requieran para poder implementarlas experimentalmente durante el semestre 2017-1, por este motivo es que el trabajo fue presentado en el evento en la categoría de comunicación breve.

Referencias bibliográficas

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. & Conteras, M. (2011*).* Las Tablas y Gráficos estadísticos como objetos culturales*. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas 76,* 55-67.

Batanero,C.,Diaz, C.,Contreras, J. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números. Revista de didáctica de las Matemáticas 83, 9-11.*

Burrill, G. & Biehler R. (2011). Fundamental Statistical Ideas in the School. Curriculum and in Training Theachers. En Batanero, Gal & Reading (ED).*Teaching Statistics – Challenges for Teaching Education* (p.p. 57-69). Berlin: Springer.

Gal, I. (2002). Cultura estadística de los adultos. Significados, componentes, responsabilidades *Internacional Statistical Rewiew, 70, 151.*

Tauber, L. (2010). Análisis de elementos básicos de alfabetización estadística en tareas de interpretación de gráficos y tablas descriptivas. *Ciencias Económicas. Revista de la Facultad de Ciencias Económicas de la UNL*. 8 (1), 53 - 74.

ESTÁGIO E CONSTRUÇÃO DA IDENTIDADE DOCENTE DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Vera Cristina de Quadros
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso – IFMT (Brasil).
vera.quadros@cnp.ifmt.edu.br

RESUMO: Este trabalho visa socializar algumas reflexões sobre o processo de construção da identidade docente de alunos do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso-IFMT durante a realização do estágio supervisionado, no ano de 2015. Esta pesquisa é de cunho qualitativo, com análise interpretativa dos dados coletados através dos registros dos alunos no decorrer do estágio. Foram utilizados os registros dos relatórios finais dos alunos. Para a análise dos registros, buscou-se trabalhar a partir da Análise de Discurso de linha francesa. A análise investigou o processo de construção da identidade docente através de como a prática significou para estes alunos. Os alunos demonstraram refletir sobre o seu papel dentro do processo educacional, podendo-se inferir que estão em processo de significação sobre a profissão. A análise contribuiu para a compreensão das reflexões dos alunos acerca da prática docente, prática esta que é elemento constitutivo do processo de construção da identidade docente.

Palavras chave: ensino de matemática, formação inicial de professores, identidade docente

ABSTRACT: This work attempts to socialize some reflections on the development of the teaching identity of the students majoring in Math at “Mato Grosso” Federal College for Education, Science and Technology during the school-year 2015. This research is of qualitative nature, so it analyzes qualitatively the collected data by using the students’ records made during the school- year. The results of the students’ final proofs were used. The records were studied from the discourse analysis of the French line. The study investigated the teaching identity building up process focused on what the teaching practice means for students. The students could show their role in the education process, and they could notice that they were in a process of getting used to their profession. The study contributed to understand the students’ thoughts about their teaching practice, which is an essential element of the teaching identity formative process.

Key words: mathematics teaching, initial teachers’ training, teaching identity

Introdução

Há quatro anos, na condição de professora da disciplina de Estágio de Prática Pedagógica 2 (EPP 2) do curso noturno de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso, Campus Campo Novo do Parecis (IFMT/CNP), tenho observado e refletido acerca das contribuições do estágio ao processo de construção dos saberes docentes dos alunos.

No decorrer do estágio, os alunos devem fazer registros diários para, no final, redigirem o relatório final de estágio. Então, decidi pesquisar sobre as reais contribuições do estágio ao processo de construção da identidade docente destes alunos.

Por isso, neste texto, apresenta-se um recorte quanto aos dados analisados, com algumas reflexões sobre os sentidos da prática docente revelados nos relatórios dos cinco alunos que realizaram o EPP 2 em turmas dos anos finais do Ensino Fundamental, no decorrer do segundo semestre letivo de 2015.

Esta pesquisa é de cunho qualitativo, com análise interpretativa dos dados coletados através dos registros dos alunos. Para a análise dos registros, buscou-se trabalhar a partir da Análise de Discurso de linha francesa, pêcheutiana, desenvolvida no Brasil por Orlandi (2013). Nesta análise, investigou-se o processo de construção da identidade docente através de como a prática significou para os cinco alunos de EPP 2.

O contexto da disciplina de EPP 2

O curso de Licenciatura em Matemática do IFMT/CNP foi criado em 2008. Conforme o Projeto Pedagógico do Curso (IFMT, 2008), o perfil profissional desejado para caracterizar o egresso, visa contemplar uma ampla formação técnico-científica, cultural e humanística, preparando o futuro profissional para que o mesmo tenha:

- autonomia intelectual que o capacite a desenvolver uma visão histórico-social, necessária ao exercício de sua profissão, como um profissional crítico, criativo e ético, capaz de compreender e intervir na realidade e transformá-la;
- possibilidade de produzir, sistematizar e socializar conhecimentos e tecnologias e capacidade para compreender as necessidades dos grupos sociais e comunidades;
- constante desenvolvimento profissional, exercendo uma prática de formação continuada e que possa empreender inovações na sua área de atuação.

Para formar este profissional, o contributo do estágio curricular supervisionado está em proporcionar ao aluno a oportunidade de aplicar seus conhecimentos acadêmicos em situações de prática profissional efetiva, criando a possibilidade de exercitar suas habilidades, de integrar-se ao campo profissional, ampliar sua formação teórica na prática e possibilitar sua atuação e reflexão profissional, em experiência significativa.

De acordo com o Projeto Pedagógico do Curso (IFMT, 2008), o estágio curricular supervisionado, de natureza obrigatória, está articulado, na matriz curricular, através de quatro disciplinas de 108 horas cada: Estágio de Prática Pedagógica 1 (EPP 1), Estágio de Prática Pedagógica 2 (EPP 2), Estágio de Prática Pedagógica 3 (EPP 3) e Estágio de Prática Pedagógica 4 (EPP 4).

Em EPP 2, são cumpridas 36 horas para os encontros semanais de orientação e supervisão de estágio e 72 horas de atividades de estágio, com realização de observação e docência em turmas dos anos finais do Ensino Fundamental.

A formação inicial no processo de construção da identidade docente

No Brasil, a formação inicial do professor ocorre nos cursos de licenciatura. A licenciatura, segundo Pimenta (2009), deve colaborar para a formação do professor, para a sua atividade docente, tornando-o capaz de mobilizar os conhecimentos da teoria da educação e da didática e também capaz de investigar sua própria atividade, possibilitando a permanente construção de seus saberes.

Tardif, Lessard e Lahaye (1991), conceituam o saber docente como o saber produzido pelo professor, enquanto sujeito individual, mas com múltiplas influências: sua história de vida, sua família, as experiências realizadas nas licenciaturas, seu processo de escolarização, cultura e valores que vivencia. Por isso, propõem uma formação inicial baseada na epistemologia da prática, ou seja, uma formação inicial que propicie o estudo do conjunto dos saberes realmente utilizados pelos professores no desempenho de suas tarefas no contexto do cotidiano escolar.

Nesse sentido, Tardif (2002) argumenta que a formação de professores, continuada e inicial, deve estar pautada na concepção de que professores e futuros professores são sujeitos do conhecimento:

(...) e não simplesmente como espíritos virgens aos quais nos limitamos a fornecer conhecimentos disciplinares e informações procedimentais, sem realizar um trabalho profundo relativo às crenças e expectativas cognitivas, sociais e afetivas através das quais os futuros professores recebem e processam esses conhecimentos e informações (Tardif, 2002, p. 242).

Assim, uma formação inicial que reconheça os alunos como sujeitos do conhecimento e lhes propicie a prática reflexiva leva à construção gradual de uma identidade profissional, a partir da tomada de consciência dos diferentes elementos que fundamentam a profissão.

Para Nóvoa (1992), no exercício da profissão cada professor vai construindo sua maneira de ser e estar na profissão, isto é, sua identidade docente. Ainda, segundo Pimenta (2009), a identidade docente se constrói pelo significado que cada professor, enquanto ator e autor, confere a atividade docente em seu cotidiano a partir de seus valores, de seu modo de situar-se no mundo, de sua história de vida, de suas representações, de seus saberes, de suas angústias e anseios, do sentido que tem em sua vida o ser professor (Pimenta, 2009, p.19).

Considerando que os saberes docentes são construídos no decorrer da formação profissional de todo professor, compreende-se que na formação do professor de matemática não é diferente, isto é, também cabe à formação inicial do professor de matemática desencadear o processo de desenvolvimento profissional, construindo e mobilizando saberes.

No Brasil, em 2003, a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), elaborou o documento “Subsídios para a discussão de propostas para o curso de licenciatura em matemática: uma contribuição da Sociedade Brasileira de Educação Matemática”, onde há o destaque ao estágio curricular supervisionado neste processo de formação inicial, compreendido como integrante do corpo de conhecimentos do curso e que deve ter por objetivo:

> (...) proporcionar a imersão do futuro professor no contexto profissional, por meio de atividades que focalizem os principais aspectos da gestão escolar, com a elaboração de proposta pedagógica, de regimento escolar, a gestão de recursos, escolha dos materiais didáticos, o processo de avaliação e organização dos ambientes de ensino, em especial no que se refere às classes de Matemática. (SBEM, 2003, p. 23)

Diante do exposto, compreende-se que o estágio supervisionado, nos cursos de Licenciatura em Matemática, é um tempo de aprendizagem num espaço propício para a produção de conhecimentos da atividade docente, para a mobilização dos saberes docentes dos futuros professores.

Na perspectiva da construção da identidade profissional, conforme Pimenta (2009), as disciplinas pedagógicas dos cursos de licenciatura devem propiciar a mobilização dos saberes da docência, isto é, os saberes da experiência, do conhecimento e os saberes pedagógicos. Também Tardif (2002) considera a prática como caminho fundamental para a formação profissional. É na licenciatura, enquanto formação inicial, que começam a ser construídos os saberes, os valores e os comportamentos que forma o profissional professor e os períodos de estágio, em especial, são momentos em que esses conhecimentos são ressignificados pelos alunos, a partir de suas vivências no contexto real da escola e da sala de aula.

É diante da escola, dos alunos reais, num dado contexto, que são mobilizados e desenvolvidos os saberes docentes e que, por conseguinte, são constitutivos da identidade profissional. Afinal, os estágios, ao abrirem espaço para a realidade e para a vida e trabalho do professor, mediante as reflexões e críticas, ajudam a consolidar as opções e intenções da profissão, contribuindo à construção da identidade docente.

Metodologia

Esta pesquisa qualitativa traz a análise discursiva dos dados coletados por meio dos registros dos cinco alunos que realizaram EPP 2 em 2015.

Para a coleta de dados, utilizou-se os registros dos relatórios finais dos alunos, e para a análise dos registros, trabalhou-se com a Análise de Discurso de linha francesa, pêcheutiana, através de Orlandi (2013). Com este referencial teórico e metodológico, inicialmente, analisou-se os textos, agrupando-os por semelhança de sentidos de sentimentos quanto à prática docente.

Na análise, investigou-se o processo de construção da identidade docente procurando compreender o modo como a prática (no Estágio Supervisionado) significou para os cinco alunos de EPP 2. Os sujeitos foram denominados de A, seguidos de um numeral, de 1 a 5.

Um ensaio de análise de discurso

Todo registro narrativo sempre é único, singular, resultante da forma particular de cada sujeito escrevê-lo. Nos registros dos alunos, estas singularidades foram percebidas; todavia, alguns dizeres sobre a prática docente se repetiram. E foram essas semelhanças que se analisou, por entender que elas podem contribuir na compreensão do processo de construção da identidade docente.

Os destaques nos textos são intencionais, para evidenciar as marcas linguísticas selecionadas para a análise do sentido de sentimentos em relação à prática docente.

As expectativas referentes à prática docente, mediante o contato com a realidade escolar, podem ser reforçadas positivamente ou desconstruídas. Nas formulações que seguem, os alunos manifestam estes sentidos: “No nono ano a experiência do estágio foi mais prazerosa, pois o diálogo com a turma era melhor, prestavam atenção, eram participativos.” (A4); “Percebi que havia conquistado a confiança deles, que me veem como alguém que pode ajudá-los a esclarecer suas dúvidas. Gostei disso.” (A2); “Acho que o objetivo não foi atingido, pois mesmo após a retomada do conteúdo, os alunos demonstraram dificuldades durante as atividades propostas” (A5); “A turma estava muito desinteressada na aula. Foi difícil prender a atenção deles nas atividades” (A3).

Nas marcas linguísticas “mais prazerosa” e “gostei disso” há o sentido de satisfação dos alunos estagiários pelo retorno dos seus alunos às suas ações e às atividades propostas. Assim como em “acho que o objetivo não foi atingido” e “foi difícil” denotam o sentido de insatisfação.

O sentido de satisfação pelo reconhecimento do outro aparece nos relatos de A1 e A3. Eles narram acontecimentos concernentes ao interesse em ver-se e sentir-se professor a partir do reconhecimento dos outros: A3, pelo reconhecimento por parte dos alunos e A1, também pelo reconhecimento do professor regente.

Percebo que contribuí para o aprendizado dos alunos. Uma prova disto foram as boas notas conquistadas por eles, tendo vários 8, 9 e até 10. Mas a maior prova penso que foi a marca que eu consegui deixar na vida de muitos deles. Ser reconhecido por um aluno fora da escola ou ouvir um aluno dizer “eu aprendi com o senhor, professor”, com certeza é a maior motivação que um futuro professor pode ter (A3).

A turma do 8° ano C fez uma confraternização em despedida do estágio, fiquei muito feliz pelos alunos se dedicarem e organizarem esse momento que se tornou especial. Fiquei muito emocionada com as palavras dos alunos e com as do professor regente que me elogiou e incentivou a ir o mais alto que eu puder e continuar estudando para ser uma excelente profissional (A1).

As marcas linguísticas “contribuí”, “a marca que consegui deixar”, “ser reconhecido”, “fiquei muito feliz”, “fiquei muito emocionada”, “me elogiou e incentivou”, sinalizam para um sentido de satisfação atrelado à realização profissional que vem do reconhecimento e da perspectiva de tornar-se um bom professor. Estes enunciados denotam a polissemia, pois a satisfação não está somente no trabalho em si (planejar, executar e avaliar a aula), mas sim na valorização e na identificação a partir dos outros.

Nos relatórios, perpassa também a necessidade de se afirmarem como bons professores, relatando aquilo que aparentemente deu certo, como nos trechos que seguem: “Para intervir nas turmas, precisei me preparar mais, estudar mais, pois me deparei com minha própria dificuldade em conseguir ensinar, em alguns momentos” (A5); “A vontade de ensinar e de querer ser professora me provocam a rever a forma de pensar e agir no ensino da matemática” (A1). “Terminei meu estágio com uma sensação de que podia ser melhor. Mas aprendi muito” (A3). “O estágio propiciou-me muitos aprendizados, para meu amadurecimento pessoal e, sobretudo, profissional” (A4).

O sentido da aprendizagem sobre o fazer pedagógico está imbricado em formulações como “precisei me preparar mais”, “me provocam”, “podia ser melhor”, “mas” e “propiciou-me muitos aprendizados”. Ainda, é possível perceber que ao apresentarem suas reflexões e tentarem convencer os leitores quanto à qualidade do trabalho realizado, há a ocorrência da antecipação, que, conforme Orlandi (2013), é quando o sujeito se coloca no lugar do outro, do interlocutor, tentando prever o efeito que sua escrita terá; e, por isso, regula seu processo de argumentação para causar os efeitos desejados no leitor.

Considerações Finais

A experiência aqui relatada permite considerar que a disciplina de EPP 2 atingiu o objetivo de proporcionar aos alunos a oportunidade de aplicarem seus conhecimentos acadêmicos em situações de prática profissional efetiva, ampliando sua formação teórica e possibilitando sua atuação e reflexão profissional.

Considerando o contexto social, histórico e cultural onde estavam inscritos, os alunos estagiários praticaram determinados discursos, registrando, nos relatórios, as questões que lhes eram mais pertinentes, externando valores e representações sobre a prática docente.

O estágio supervisionado exerce um papel formador, tendo em vista que possibilita a construção dos saberes pedagógicos e a identificação com a profissão (ver-se e sentir-se professor) e segundo a análise dos relatórios, percebe-se que os alunos demonstraram refletir sobre o seu papel dentro do processo educacional, podendo-se inferir que estão em processo de significação da profissão.

Destarte, a análise contribuiu para a compreensão das reflexões dos alunos acerca da prática docente, que é elemento constitutivo do processo de construção da identidade docente.

Referências Bibliográficas

IFMT/CNP-Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso – Campus Campo Novo do Parecis. (2008). *Projeto pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática. Campo Novo do Parecis.* Recuperado em 20 de junho, 2016,dehttp://cnp.antigoportal.ifmt.edu.br/post/1000125/

Nóvoa, A. (1992).*Vida de professores.* Porto: Porto Editora.

Orlandi, E. P. (2013). *Análise de discurso: princípios e procedimentos*. Campinas: Pontes.

Pimenta, S. G. (Org.). (2009).*Saberes pedagógicos e atividade docente*. São Paulo: Cortez.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática. (2003). *Subsídios para a Discussão de Propostas para os Cursos de Licenciatura em Matemática: Uma contribuição da Sociedade Brasileira de Educação Matemática*. Recuperado em 3 de junho, 2016,de http://www.academia.edu/4256113/SUBS%C3%8DDIOS_PARA_A_DISCUSS%C3%83O_DE_PROPOSTAS_PARA_OS_CURSOS_DE_LICENCIATURA

Tardif, M. (2002).*Saberes docentes e formação profissional.* Petrópolis: Vozes.

Tardif, M.,Lessard, C.&Lahaye, L. (1991) Esboço de uma problemática do saber docente. *Teoria e Educação*, 1(4), 215-233.

LOS INTERVALOS DE CONFIANZA EN LAS PRUEBAS DE SELECTIVIDAD ANDALUZAS

Mª del Mar López-Martín, Pedro Arteaga, María M. Gea, J. Miguel Contreras
Universidad de Granada. (España)
mariadelmarlopez@ugr.es, parteaga@ugr.es, mmgea@ugr.es, jmcontreras@ugr.es

RESUMEN: En este trabajo se analizan 144 pruebas de acceso a la universidad en Andalucía durante los últimos 12 años. De los tres bloques de contenidos que contiene la prueba, se han caracterizado los problemas sobre intervalos de confianza. Se observa un balance entre la construcción e interpretación de intervalos y la determinación del tamaño de muestra para una precisión o una amplitud de intervalo dados. Las poblaciones suelen ser binomiales o normales y el parámetro a estimar la media o la proporción. Se encuentra una proporción importante de ejercicios descontextualizados. Los resultados pueden ser tenidos en cuenta por los profesores a la hora determinar los temas en los que deben hacer énfasis con el fin de propiciar una mejor preparación de los estudiantes para asegurar el éxito en la prueba, que determina que el alumno pueda cursar la carrera deseada.

Palabras clave: pruebas PAU, bachillerato, intervalos confianza

ABSTRACT: This work deals with a study of 144 entrance examinations applied at the University of Andalucía during the last twelve years. From the three blocks of contents included in the proof, the problems about confidence intervals were characterized. As a result of this study, a balance was detected between the intervals' construction and interpretation, and the definition of the sample size, for the accuracy or amplitude of given intervals. The populations are usually binomial or normal, while the estimating parameter is the average or the proportion. There were a lot of non-contextualized exercises. The results can be taken into account by the teachers to define which topics they should focus on, in order to improve the students' training and to achieve the success in the entrance examination which determines the students' possibility to study the major they wish.

Key words: university entrance examination, high school, confidence intervals

Itroducción

La importancia que dentro del aula se da a cada uno de los temas recogidos en las orientaciones curriculares viene indirectamente determinada por las pruebas de evaluación. Hoy en día la enseñanza de las matemáticas se ha visto fuertemente condicionada por los resultados que tienen los estudiantes en las pruebas durante las distintas etapas educativas. Ejemplo de ello es el impacto mediático que tienen las pruebas PISA (Program for International Student Assessment, OCDE, 2015), la evaluación TIMSS (Third International Mathematics and Science Study; Mullis, Martín, Foy y Arora, 2012) y las pruebas de diagnóstico y las Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU).

Centrando el foco en la etapa de bachillerato (1º y 2º curso), es evidente la repercusión que tiene la calificación de las PAU, examen imprescindible para todos los estudiantes que desean continuar sus estudios en centros universitarios. El resultado de las pruebas PAU, junto con la calificación obtenida en bachillerato, determina la nota de admisión de acceso a la universidad y como consecuencia a los estudios deseados. Con el fin de asegurar el éxito de los futuros universitarios es necesario garantizar una adecuada correspondencia entre el contenido pretendido en las orientaciones curriculares para un tema y el evaluado en las mencionadas pruebas.

En el presente trabajo se fija como principal objetivo analizar el contenido de los ejercicios sobre intervalos de confianza (IC) que han sido recogidos en las pruebas PAU de la Comunidad de Andalucía en el periodo comprendido desde 2003 hasta 2014. Concretamente, se han analizado los problemas (consideramos el término problema en sentido muy amplio, como cualquier ejercicio o tarea que el alumno ha de resolver) correspondientes a IC que son incluidos en las pruebas que evalúan los contenidos tratados en la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II.

Fundamentos

En la actual sección se presentan los fundamentos teóricos sobre los que se sustenta el presente documento. En primer lugar, se analiza cómo tratan las normativas curriculares los contenidos relacionados con IC y las características principales de las pruebas PAU y, se finaliza mostrando un breve resumen del marco teórico que ha sido empleado.

Los intervalos de confianza en el currículo de Bachillerato y las pruebas PAU

A pesar de la importancia que tiene hoy en día el estudio de la inferencia estadística, solamente es posible encontrarla en el Bloque de Estadística y Probabilidad de la rama de conocimiento de Ciencias Sociales (MEC, 2007; MECD, 2015). La inclusión de la inferencia estadística en segundo curso de bachillerato tiene como objetivo forjar la base de algunos de los contenidos que una gran parte de los estudiantes seguirán tratando en la etapa universitaria e incluso en los ciclos formativos de la Formación Profesional.

El análisis de la normativa curricular vigente hasta el curso 2015/2016 revela que de los cinco puntos relacionados con inferencia estadística sólo uno está enfocado al estudio de los IC, donde se trata concretamente "Intervalos de confianza para el parámetro p de una distribución binomial y para la media de una distribución normal de desviación típica conocida" (MEC, 2007, p.45476). Sin embargo, la introducción de la Ley Orgánica para la Mejora de la Ley Educativa asigna un mayor protagonismo a los IC ya que la mitad de los contenidos fijados tratan sobre ellos (MECD, 2015, p.389).

Las actuales Pruebas de Acceso a la Universidad están regidas por el Real Decreto 1892/2008, por el que se regulan las condiciones para el acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado y los procedimientos de admisión a las universidades públicas españolas (MP, 2008). A su vez, en el artículo 38 de la Ley Orgánica de Educación (LOE), se pone de manifiesto que las pruebas PAU son pruebas de madurez que evalúan los conocimientos y capacidades adquiridas por los futuros universitarios durante su etapa de Bachillerato. La prueba correspondiente a Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II consta de dos opciones (opción A y opción B), cada una de ellas formada por cuatro ejercicios y donde el estudiante, bajo su parecer, elige una de ellas. Ambas opciones están divididas en tres tipologías de ejercicios, un ejercicio correspondiente al Bloque Números y Álgebra, otro del Bloque de Análisis, y dos ejercicios del Bloque de Estadística y Probabilidad, concretamente, a Probabilidad e Inferencia Estadística. En la actualidad cada ejercicio tienen asignada una puntuación máxima de 2,5, por lo que el 50% de la nota total corresponde al Bloque de Estadística y Probabilidad.

Marco teórico

Nos apoyamos en algunos elementos del enfoque onto-semiótico (Godino, Batanero y Font, 2007), que diferencia entre el significado institucional de un objeto matemático (compartido dentro de una institución) y el significado personal del mismo (que adquiere una persona). Se centra la atención en la institución de enseñanza, donde se diferencia el significado global (en nuestro caso, el significado del intervalo de confianza), el significado pretendido dentro de un nivel educativo (en nuestro caso, el marcado por las orientaciones curriculares) y el evaluado (contenido en las pruebas de evaluación). El presente estudio se orienta a comparar los significados pretendido y evaluado del intervalo de confianza en las PAU de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II. La importancia de este punto se fundamenta en que las respuestas a las pruebas de evaluación dan acceso a la comprensión del tema por parte del estudiante.

Puesto que la comprensión de un determinado objeto matemático es un constructo psicológico inobservable, Godino (1996) estableció que el análisis de las respuestas de los estudiantes a los ítems, tareas o pruebas de evaluación, puede permitir obtener cierta información sobre la comprensión que tiene el estudiante en el tema de estudio. Por tanto, dado el vínculo existente entre el significado institucional pretendido y el evaluado para un contenido, es fundamental que esa correspondencia sea idónea. Para tal fin, será primordial garantizar que las pruebas de evaluación sean coherentes con los contenidos fijados institucionalmente; así pues, en esta investigación se trata de evaluar la adecuación de esa correspondencia para el contenido pretendido de los IC en las orientaciones curriculares de Bachillerato.

Asimismo, en la elaboración del presente trabajo se han considerado investigaciones llevadas en las que se analizan las PAU desde otros puntos de vista. Por ejemplo, Ruiz, Dávila, Etxeberria y Sarasua (2013) analizan los resultados de los estudiantes y la opinión del profesorado, mientras que Belia, Fidler y Cumming (2005) y Olivo (2008) se centran más en describir la compresión que tienen tanto los estudiantes como investigadores sobre IC. Estos últimos trabajos han sido empleados con el fin de elegir las variables del estudio que aquí se presenta.

Metodología

Mediante un análisis de contenido, cuyo foco de atención se centra en el análisis del significado del concepto a través de la descripción de los significados y la correcta aplicación del contenido, se han clasificado los ejercicios de inferencia estadística propuestos de acuerdo a los siguientes campos de problemas:

- Composición de muestras y cálculo de estadísticos de las distribuciones muestrales en poblaciones finitas.
- Distribución muestral en poblaciones infinitas y cálculo de probabilidades.
- Cálculo y/o interpretación de un Intervalo de Confianza.
- Relación entre confianza, error de estimación y tamaño muestral.
- Contraste de hipótesis.

Del conjunto total de ejercicios de inferencia estadística, se ha centrado la atención en los que tratan los contenidos de IC. Igualmente, de las actividades seleccionadas se ha realizado un estudio de la distribución de las siguientes variables:

- El modelo de distribución de la población de partida en el ejercicio.
- El parámetro que se pide estimar.
- El contexto en el que se presenta la tarea, dentro de los considerados en las pruebas PISA (OCDE. 2009).

Puesto que la metodología empleada pretende dar respuesta a problemas concretos, la selección de la muestra se ha realizado de forma intencionada. Así pues, es importante señalar que el objetivo de esta investigación no es extrapolar los resultados a otras pruebas diferentes a las analizadas. No obstante, con el presente estudio se pretende aportar algunas ideas que pueden servir para conocer el contenido de inferencia estadística de las PAU. Asimismo, los resultados obtenidos pueden servir para conjeturar hipótesis provisionales sobre el contenido de inferencia en las pruebas realizadas en otros años o en otras comunidades autónomas, aportando resultados que serían útiles para los especialistas universitarios que forman parte de las Comisiones Coordinadoras de las PAU.

Muestra de problemas

Cada año la Comunidad Autónoma de Andalucía convoca en los meses de junio y septiembre las pruebas PAU. Junto a las pruebas realizadas en las convocatorias oficiales se proponen cuatro exámenes de reserva, por lo que hay un total seis modelos disponibles por año. Dado que cada modelo contiene dos ejercicios de inferencia estadística (uno por cada opción), se analizaron 144 problemas. Del total de problemas seleccionados, se comprobó que algunos de ellos abarcaban más de un campo de problema, por lo que el número total de aparatados analizados fueron 285, de los que más de la mitad correspondían a IC (175). Este hecho permite deducir la gran importancia que tienen los IC en las pruebas PAU.

Campos de problemas

Los ítems relacionados con IC se han clasificado en dos campos de problemas que se presentan con similar frecuencia y que se detallan a continuación.

P1. *Cálculo o interpretación de un intervalo de confianza.* Dentro de este bloque se han considerado tanto los problemas en los que se pide explícitamente la construcción de un intervalo de confianza para un cierto parámetro (generalmente la media o la proporción poblacional), así como los relacionados con la interpretación de la información aportada por el intervalo, siendo este último punto más difícil, según Belia, Fidler y Cumming (2005) y Olivo (2008).

Recordemos que la construcción de un intervalo de confianza depende de:

- Las características de la población, es decir, si el modelo probabilístico es binomial, normal, etc.
- Los parámetros poblacionales desconocidos, como pueden ser por ejemplo la media, varianza y proporción.
- Los valores de los estadísticos muestrales conocidos.
- Tamaño muestral.

Aunque a la hora de determinar un intervalo hay que tener en cuenta diversos factores, si bien es cierto, la forma de actuar en su construcción permanece invariable. No obstante, aunque la construcción del intervalo no presenta grandes dificultades para los estudiantes es necesario señalar que la interpretación no es algo tan obvio (Cumming y Fidler, 2005; Harradine, Batanero y Rossman, 2011). Una vez determinado el intervalo, no es correcto interpretar que el nivel de confianza es la probabilidad de que el verdadero valor del parámetro esté contenido en el intervalo, ya que, una vez definidos los valores de los extremos, se pierde el carácter de aleatoriedad y por tanto, la probabilidad será 1 si el intervalo es uno de los que contienen al parámetro, o 0 si es uno de los restantes intervalos que no lo contienen. Por esta razón, cuando se tiene un valor concreto del intervalo de confianza se habla de confianza y no de probabilidad, es decir, confiamos en que el intervalo calculado sea el que contiene el verdadero valor (Cumming, Williams y Fidler, 2004).

P2. *Relación entre confianza, error de estimación y tamaño muestral*. En la práctica, cuando se pretende obtener un intervalo de confianza para un parámetro poblacional siempre se intenta describir aquel intervalo que conduce al menor error de estimación posible. Puesto que, en general, la expresión del intervalo de confianza depende de la estimación del parámetro, del tamaño muestral y del nivel de confianza seleccionado, será necesario determinar la relación existente entre ellos con el fin de obtener una estimación lo más precisa posible. A partir de conexión existente entre los tres elementos se pueden establecer las siguientes propiedades (Behar, 2001):

1) A medida que aumenta el tamaño de la muestra (manteniendo constante el nivel de confianza) el error de estimación disminuirá.
2) Manteniendo constante el tamaño de la muestra, el error aumentará conforme aumente el nivel de significación.

No obstante, es necesario señalar que si el objetivo es conseguir una mayor precisión en las estimaciones realizadas por medio de los IC, lo ideal es aumentar el tamaño muestral, ya que habitualmente no es recomendable utilizar un nivel de confianza inferior al 90%.

En este bloque se han analizado aquellos ítems en los que se solicita calcular el nivel de confianza, error de estimación o tamaño muestral después de haber fijado dos de ellos. Como datos recogidos en el enunciado se suele encontrar la población y el estadístico considerado o bien el intervalo de confianza.

Resultados

A partir de la identificación de los distintos campos de problemas se han encontrado que de los 285 apartados, 86 corresponden a problemas de tipo P1 y el resto (89) a P2. El estudio longitudinal en el periodo seleccionado muestra una distribución similar entre ambos campos de problemas (véase Figura 1).

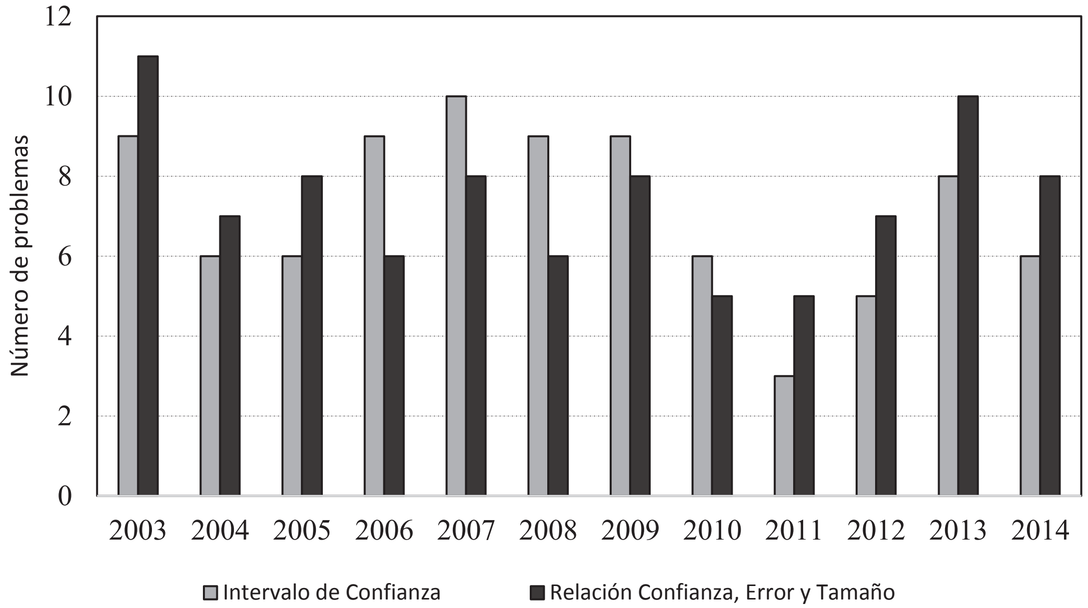


Figura 1. Clasificación por años según los campos de problemas

A consecuencia de que el proceso de construcción de un intervalo de confianza parte del hecho de que la población de partida se distribuye según un modelo teórico determinado, se identificó el modelo probabilístico y el parámetro objeto de estudio (véase Tabla 1).

Del análisis se determina que las distribuciones de probabilidad empleadas son: la distribución binomial (36%) y la distribución normal con desviación típica conocida (dato facilitado en el enunciado del problema) (64%). Puesto que la construcción del intervalo de confianza depende del estadístico muestral y de la distribución que siga éste, y teniendo en cuenta que la proporción muestral se distribuye según una binomial y que la media muestral sigue una distribución normal, los resultados obtenidos en el análisis del parámetro a estimar coinciden con los del modelo probabilístico de la población de partida.

Tabla 1. Modelo probabilístico y parámetro a estimar

	Parámetro a estimar	
Modelo probabilístico	**Proporción**	**Media**
Distribución Binomial	36%	
Distribución Normal		64%

Se destaca que, aunque el uso de la distribución binomial es menor que el de la distribución normal, el empleo de ella incrementa la dificultad en cuanto que requiere utilizar la aproximación a la distribución normal para la construcción del intervalo.

Síntesis del análisis

El análisis de los problemas sobre IC incluidos en las pruebas PAU pone de manifiesto la necesidad de dominar una gran variedad de conceptos y procedimientos. En ambos problemas se han observado conocimientos comunes evaluados, en particular los de: Población y muestra; Distribución muestral; Relación entre los estadísticos de la población y de la distribución muestral; Modelo teórico de distribución; Distribución Normal tipificada. Ello fuerza al estudiante a diferenciar los tres planos de distribución señalados por Schuyten (1991):

- La distribución de los datos en la muestra.
- La distribución de la variable de interés en la población.
- La distribución muestral del estadístico en todas las posibles muestras obtenidas de la población.

Otros conceptos y propiedades evaluadas en ambos problemas han sido: Estimador de un parámetro; Intervalo de confianza; Coeficiente de confianza o nivel de confianza; Probabilidad condicional. Como diferencia se señala que los conceptos de relación entre amplitud de intervalo, precisión y tamaño muestral solamente se evalúan únicamente con los problemas P2.

En cuanto a los procedimientos que se llevan a cabo en la realización de los distintos problemas, se destaca la importancia que tiene el cálculo de los estadísticos en las muestras con el fin de obtener las medidas de centralización y proporción muestral para posteriormente describir la distribución tanto de la media muestral como de la proporción muestral. Otro punto importante a tener en cuenta es una lectura correcta.

Puesto que las pruebas PAU tienen como objetivo evaluar los conocimientos y capacidades adquiridas por los estudiantes en la etapa de bachillerato, es necesario asegurar que existe una adecuada correspondencia entre los contenidos incluidos en el currículo de bachillerato y los evaluados en las pruebas. El análisis de los contenidos fijados en las directrices curriculares ha permitido comprobar que la mitad de los criterios de evaluación sobre inferencia son evaluados con los problemas de IC.

Los resultados obtenidos del análisis pueden servir para la elaboración de pruebas futuras y preparar a los estudiantes que tienen que enfrentarse a las mismas. Además, permiten efectuar recomendaciones para mejorar la enseñanza, introduciendo aproximaciones informales que permitan a los estudiantes adquirir el sentido del intervalo de confianza.

Agradecimientos: Proyectos EDU2013-41141-P y EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía)

Referencias Bibliográficas

Behar, R. (2001). *Aportaciones para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística*. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Cataluña.

Belia, S., Fidler, F. y Cumming, G. (2005). Researchers misunderstand confidence intervals and standar error bars. *Psychological Methods, 4,* 389-396.

Cumming, G. y Fidler, F. (2005).Interval estimates for statistical communication: problems and possible solutions, IASE/ISISatellite. Disponible en: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/14/cumming.pdf

Cumming, G., Williams, J. y Fidler, F. (2004). Replication and researchers' understanding of confidence intervals and standard error bars. *Understanding statistics, 3*(4), 299-311.

Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meanings and understanding. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference* (v.2, p. 417-424). Universidad de Valencia.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 27-135.

Harradine, A., Batanero, C. y Rossman, A. (2011). Students and teachers' knowledge of sampling and inference. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp. 235-246). Springer Netherlands.

MEC, Ministerio de Educación y Ciencia. (2007). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.* Madrid: Autor.

MECD, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Madrid: Autor.

MP, Ministerio de la Presidencia (2008). *Real Decreto 1892/2008, de 14 de noviembre, por el que se regula las condiciones para el acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado y los procedimientos de admisión a las universidades públicas españolas.* Madrid: Autor.

Mullis, I. V., Martin, M. O., Foy, P. y Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 international results in mathematics*. Amsterdam: International Association for the Evaluation of Educational Achievement.

OCDE. (2009). *PISA 2009 assessment framework - key competencies in reading, mathematics and science.* Paris: OCDE.

Olivo, E. (2008). *Significados del intervalo de confianza en la enseñanza de la ingeniería en México.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Ruiz, J. G., Dávila, P., Etxeberria, J. y Sarasua, J. (2013). Pruebas de selectividad en Matemáticas en la UPV-EHU. Resultados y opiniones de los profesores. *Revista de educación*, *362,* 217-246.

Schuyten, G. (1991). Statistical thinking inpsychology and education. En D. VereJones (Ed.), *Proceeding of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 486-490). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

ESTUDIO DE LA REPRESENTATIVIDAD DE LA NOCIÓN FUNCIÓN EN EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS CHILENO: EL CASO DE OCTAVO BÁSICO

Yocelyn Parra Urrea, Luis R. Pino-Fan
Universidad San Sebastián (Chile). Universidad de Los Lagos (Chile).
yocelyn.parra@uss.cl, luis.pino@ulagos.cl

RESUMEN: Esta investigación analiza la representatividad de los significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función respecto del significado holístico de referencia. Para lograr nuestro propósito reconstruimos mediante una revisión histórico-epistemológica el significado holístico de referencia y determinamos el significado pretendido por el currículo chileno <programas de estudio, libros de texto>. Para el análisis utilizamos las herramientas teóricas del Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática. Este estudio permitió evaluar la riqueza matemática de los significados pretendidos por el currículo chileno, además de proporcionar información que permitirá gestionar idóneamente los aprendizajes sobre funciones.

Palabras clave: función, enfoque onto-semiótico, currículo chileno

ABSTRACT: This research work analyzes the presence of the meanings related to the notion of function with respect to the reference holistic meaning stated in the Chilean mathematics curriculum. To accomplish such purpose, the authors rethink the reference holistic meaning through a historical and epistemological review and determine the meaning stated by the Chilean curriculum (syllabuses, text books). The theoretical tools they used in this analysis were the Onto-Semiotic Approach (OSA) of mathematics knowledge and mathematics teaching. This study allowed evaluating the mathematics richness of the meanings stated in the Chilean curriculum. It also provided information that will make possible to properly manage the students' learning about functions.

Key words: function, onto-semiotic, chilean curriculum

Introducción

La noción de función, como objeto matemático básico y unificador, es considerada uno de los conceptos más importantes de la matemática. Su presencia y estatus dentro del currículo chileno conduce la atención hacia el análisis de sus procesos de enseñanza aprendizaje. Diversos estudios (Duval, 1995; Vinner, 1992; Ramos, 2005; entre otros) han reportado una variedad de dificultades en su aprendizaje, impidiendo que los estudiantes logren apropiarse, comprender y dar significado a la noción de función. En Chile, el trabajo con funciones es tratado desde un punto de vista estrictamente formal, generando una serie de obstáculos en la aprehensión de los conceptos y procesos matemáticos (Aravena, 2001). La comprensión de la noción de función es fundamental, dado que opera sobre otros objetos matemáticos y presenta una utilidad práctica en la resolución de problemas y en la modelación de fenómenos.

La función, ha sido objeto de especial atención en distintas aproximaciones teóricas, particularmente las cuestiones de índole cognitivas relacionadas a las dificultades que poseen los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones que involucran el objeto matemático. En este sentido, Artigue (1995) establece que una de las principales dificultades cognitivas presentes en los estudiantes cuando abordan la noción de función son producto de los hábitos de enseñanza tradicional, pues el gran predominio que en ella se otorga al registro algebraico (simbólico-formal) impiden al estudiante lograr flexibilidad en el pasaje de un registro a otro, siendo la articulación de registros de representación fundamental en la conceptualización de la noción de función y crucial para desarrollar una comprensión profunda de los objetos matemáticos (Amaya, Pino-Fan y Medina, 2016). Otro tipo de cuestiones son las relacionadas con los procesos instruccionales que manifiestan dificultades asociadas a la enseñanza-aprendizaje de la función. Ruiz (1998) en su estudio explicita que los procesos de enseñanza no promueven el estudio y análisis de la variabilidad de fenómenos sujetos al cambio, donde la noción de función encontraría una especial significación estrechamente ligada a sus orígenes epistemológicos. Además, la naturaleza arbitraria de las funciones está ausente y muy pocos pueden explicar la importancia y origen del requerimiento de la univalencia. Esta concepción limitada de la función influencia el pensamiento y comprensión de los estudiantes.

En virtud de lo descrito anteriormente, el interés de esta investigación es identificar la representatividad de los significados pretendidos por el currículo chileno respecto del significado holístico de referencia. Esto con el propósito de avanzar en la caracterización de los conocimientos que requieren los profesores de matemática para la enseñanza idónea de la noción de función

Marco Teórico y Metodología

El marco teórico que hemos adoptado para llevar a cabo nuestro estudio es el Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la Cognición e Instrucción Matemática, desarrollado desde 1994 por Godino y colaboradores (Godino, Batanero y Font, 2007). El EOS permite a través de sus herramientas teóricas realizar un análisis detallado de los significados de la noción de función pretendidos en el currículo nacional chileno. Para ello, hemos utilizado la noción de *configuración ontosemiótica* (Figura 1), la cual nos permite analizar y describir los objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, situaciones-problemas, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos) que intervienen en prácticas matemáticas cuando se aborda la noción de función (Pino-Fan, Godino y Font, 2015).

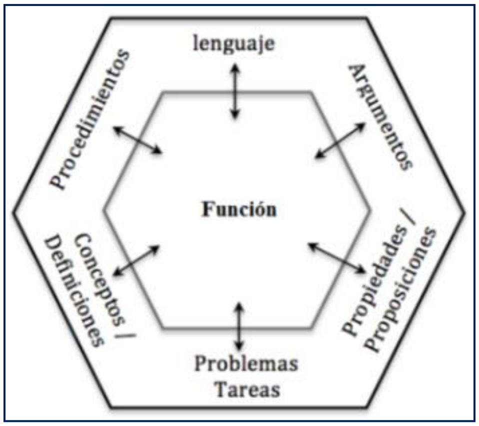


Figura 1. Configuración ontosemiótica de la función.

Cabe destacar que para el análisis de las prácticas matemáticas propuestas en el currículo chileno sobre la función (y los significados de la función que estas conllevan) consideramos tanto los programas de estudio como los libros de texto desde octavo año básico hasta cuarto año medio.

En el EOS el significado de un objeto matemático se define como el “sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona (o una institución) realiza para resolver una cierta clase de situaciones–problemas en las que dicho objeto interviene*”* (Pino-Fan, 2014, p. 45). Entenderemos por sistema de práctica a *“*toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas*”* (Godino y Batanero, 1994, p. 334). El significado de un objeto matemático puede ser visto desde dos perspectivas, institucional y personal, lo cual da origen a los *significados institucionales* y *significados personales* respectivamente. “La interpretación semiótica de las prácticas lleva a hablar de tipologías de significados personales (globales, declarados y logrados) y de significados institucionales (implementados, evaluados, pretendidos, referenciales)” (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011, p. 4). De acuerdo con Godino y Batanero (1994):

> los significados logrados por los estudiantes dependen fundamentalmente de los significados institucionales, concretamente, de los significados pretendidos asociados a los sistemas de prácticas planificados para un proceso particular de instrucción, así como de los significados efectivamente implementados en dicha instrucción y de los evaluados. Además, el profesor, como parte de la institución escolar, debe recurrir, para la elección de los significados pretendidos, a los significados de referencia (Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013, p.147).

Para el estudio de la representatividad de los significados pretendidos por el currículo chileno respecto del significado holístico de referencia de la función, utilizamos la noción de idoneidad epistémica que proporciona el EOS. Esta noción se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales pretendidos respecto de un significado de referencia.

La noción de idoneidad didáctica, sus dimensiones, criterios, y descomposición operativa, han sido introducidos en el EOS (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006) como herramientas que permiten el paso de una didáctica descriptiva–explicativa a una didáctica normativa, esto es, una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula (Pino-Fan, Castro, Godino, Font, 2013, p.126-127).

Esta investigación trata de un estudio cualitativo puesto que estamos interesados en caracterizar las *configuraciones ontosemióticas* asociadas a las prácticas matemáticas propuestas tanto en los programas de estudio como en los libros de texto. Para lograr los objetivos de esta investigación nos hemos propuesto las siguientes tres fases: 1) *Determinación del significado holístico de referencia de la noción de función*. A partir del estudio histórico-epistemológico se han identificado seis significados parciales que constituyen el significado holístico de referencia. Estos son: La función como correspondencia, como relación entre variables, como expresión gráfica, como expresión analítica, como correspondencia arbitraria y desde la teoría de conjuntos. 2) *La determinación del significado pretendido por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función*. Para ello, adoptamos la metodología propuesta por Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013), la cual establece cuatro criterios para la caracterización de los significados curriculares: Representatividad de los campos de problemas propuestos; Tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas; Representatividad de los elementos regulativos y argumentativos y *Representatividad de los significados institucionales pretendidos respecto del significado global de referencia.* Este último criterio se corresponde con la última fase de nuestro estudio.

■ Análisis de las propuestas curriculares chilenas

A continuación presentamos el análisis del currículo de matemáticas chileno para determinar los significados pretendidos sobre la función. Para ello analizamos los programas de estudio y libros de texto desde octavo año básico hasta cuarto año medio. No obstante por motivos de espacio, sólo presentaremos el análisis detallado de la propuesta curricular de octavo básico.

Análisis del programa de estudio para octavo básico

El Programa de Estudios (PE) para octavo básico propuesto por el Ministerio de Educación de Chile presenta en su cuarta unidad de álgebra, la noción de función. El propósito de esta unidad es:

> […] los alumnos comienzan el reconocimiento de funciones y su distinción con las relaciones en contextos diversos. Por una parte, la idea es desarrollar el concepto de función asociado a algunas metáforas que facilitan su comprensión y vincularlo a conceptos matemáticos ya trabajados en años anteriores. Por otra parte, en el trabajo propuesto los estudiantes deben reconocer conceptos claves, como dominio y recorrido, lo que introduce algunos elementos de lenguaje conjuntista (Mineduc, 2011a, p. 73).

Con base en lo anterior, podría decirse que el PE para octavo básico pretende introducir la noción de función como *relación entre variables* para posteriormente definir la noción de función desde un punto de vista conjuntista. Esta reflexión cobra fuerza cuando el Mineduc (2011a) señala:

> Interesa que los alumnos analicen las funciones desde la relación entre dos variables y, en particular, distingan entre variables dependientes e independientes. Se abandona la clásica progresión que se iniciaba con una rigurosa definición de producto cartesiano, para luego definir el concepto de relación y terminar presentando las funciones como un caso particular de las relaciones. Es importante que los estudiantes sean capaces de reconocer el dominio y recorrido de una función. Aunque el currículo no propone como tema el uso del lenguaje conjuntista, si el docente lo estima conveniente puede utilizar aquellos términos y conceptos relacionados con teoría de conjuntos que sean necesarios y faciliten el aprendizaje. (p. 76)

Con respecto a los *conceptos/definiciones* se mencionan algunos como relaciones, variables (independientes y dependientes), dominio, recorrido, entre otros. En cuanto a los *elementos lingüísticos*, aunque se señala que se estudiarán diferentes representaciones de la función, no se explicita el tipo concreto de representaciones. Sin embargo, en los ejemplos de actividades sólo se ilustra el uso de representaciones verbal y simbólica. Es importante mencionar que en el (PE) no se encuentra evidencia explicita de los otros elementos de la configuración ontosemiótica (tipos de problemas, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos).

Análisis del texto escolar de octavo año básico

El primer elemento de la configuración ontosemiótica refiere al tipo de *situaciones/problemas* propuestos en el libro de texto. Al respecto, identificamos tres tipos de problemas: 1) problemas para ejemplificar definiciones introducidas; 2) problemas no contextualizados, para reforzar las definiciones introducidas; y 3) problemas contextualizados para reforzar los conocimientos 'adquiridos'. Los *elementos lingüísticos* identificados son de tipo verbal, tabular, simbólico y, en menor medida, el gráfico. Los *conceptos/definiciones* que se introducen en el texto escolar son: función, valor de entrada y salida, dominio, recorrido, variable (dependiente, independiente), tabla y par ordenado. La noción de función es introducida por primera vez mediante la siguiente definición: "Una función es una relación que asigna a cada valor de la variable independiente x un solo valor de la variable y. Opera según una regla para producir exactamente un valor de salida por un valor de entrada" (Bennett, Burger, Chard, Hall, Kennedy, *et al*., 2014, p. 206).

Dicha definición se establece sobre la base de la clásica metáfora de la "máquina", la cual es presentada de manera muy sucinta previa a dicha definición. Posteriormente, se presenta un primer problema (del tipo 1 descrito anteriormente), que permite ejemplificar la definición introducida. Otras definiciones, que llevan implícitas concepciones conjuntistas para la noción de función, son las de dominio y recorrido. Las *propiedades/proposiciones* que identificamos podemos describirlas con el ejemplo de la Figura 2. Dichas proposiciones se establecen en el sentido de describir la regla de correspondencia. Del mismo modo, hacen referencia a *procedimientos* que tienen que ver con las operaciones que los estudiantes deben de realizar para encontrar los valores de *y* dado *x*. Otro tipo de proposiciones hacen referencia a explicaciones adicionales a la definición dada, o bien a *justificaciones/argumentos* de los procedimientos realizados; por ejemplo, "La variable de entrada admite cualquier número real, por lo tanto, el dominio de la función $y = 4x-2$ es el conjunto $\mathbb{R}$".

EJEMPLO 1 **Completar una tabla de funciones**

Halla el valor de salida para cada valor de entrada.

A $y = 4x - 2$

Valor de entrada	Regla	Valor de salida	
x	$4x-2$	y	
-1	$4(-1) - 2$	-6	*Sustituye x por –1 y luego desarrolla.*
0	$4(0) - 2$	-2	*Sustituye x por 0 y luego desarrolla.*
3	$4(3) - 2$	10	*Sustituye x por 3 y luego desarrolla.*

La variable de entrada admite cualquier número real, por lo tanto, el dominio de la función $y = 4x - 2$ es el conjunto *IR*. Los valores de salida también son números reales, por lo tanto el recorrido de la función es el conjunto *IR*.

Figura 2. Ejemplo de problema tipo 2 (Bennett, *et al*., 2014, p. 206).

En cuanto al tipo de representaciones que se activan tanto en el planteamiento de los problemas como en las soluciones y explicaciones que se proponen para éstos, encontramos cuatro clases de problemas. El primero, refiere a problemas para los cuales se proporcionan datos verbales de la función, y se espera una respuesta en que la función se represente simbólicamente. La segunda clase refiere a problemas en los que se proporcionan datos verbales de la función y se pide una respuesta tabular. Para ello, los estudiantes deberán transitar de lo verbal a lo simbólico y de lo simbólico a lo tabular. La tercera clase refiere a tareas que proporcionan en su planteamiento datos simbólicos de la función y se pide que el estudiante proporcione una respuesta que active una representación gráfica. Para ello el estudiante debe transitar de lo simbólico a lo tabular y de lo tabular a la gráfica de la función. La última clase de tareas, refieren a aquellas que proporcionan una representación simbólica de la función y se espera que los estudiantes proporcionen una representación tabular de la misma. La siguiente tabla resume las cuatro clases de problemas identificados en el texto escolar de octavo básico

Tabla 1. Representaciones previas y emergentes en los problemas de 8° básico

Representaciones para *f(x)*						
Emergentes / Previos		$f(x)$				
		Verbal	Gráfica	Simbólica	Tabular	Icónica
$f(x)$	Verbal			•	S•	
	Gráfica					
	Simbólica		T•		•	
	Tabular					
	Icónica					

Conclusiones

A partir del análisis realizado hemos constatado que los significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función no son representativos del significado holístico de referencia, esto pues el enfoque actual que se da a este objeto matemático se basa fundamentalmente en su acepción de *relación entre variables* y en un significado de función que progresivamente se acerca a la definición de *función a partir de la teoría conjuntista*. Del mismo modo, hemos verificado que a lo largo del currículo chileno se presentan funciones tanto algebraicas como trascendentales, sin embargo, no se explicita la diferencia entre estos tipos de funciones, impidiendo movilizar la noción de *función como expresión analítica*. Otro aspecto importante es que la definición de *función* es introducida por primera vez en octavo año básico, sobre la base de la clásica metáfora de la “máquina” que produce un ‘único’ valor de salida para cada valor de entrada. De acuerdo con Mesa (2004), los profesores tienden a privilegiar la metáfora de la máquina para ilustrar un proceso de transformación, esto por sobre definiciones esenciales que utilicen términos como el de relación y correspondencia. Es así que hemos constatado que el currículo no promueve el estudio de relaciones funcionales definidas en conjuntos distintos a los numéricos usuales. Es decir, no moviliza la noción de *función como correspondencia arbitraria*. Este hecho provoca que una de las concepciones que los estudiantes posean respecto a la noción de función sea que la correspondencia que constituye la función debe ser establecida por una regla con sus propias regularidades (Vinner, 1992), lo cual implica que una correspondencia arbitraria no sea considerada por los estudiantes como una función. Los ejemplos, ejercicios y problemas propuestos en los textos escolares, mayoritariamente requieren de la activación de representaciones simbólicas, verbales y gráficas. Usualmente se presenta la problemática desde expresiones simbólicas o verbales de la función para posteriormente dar respuestas bajo representaciones simbólicas o gráficas. Orton (1983) ya señalaba que una aproximación inicial “informal” a los conceptos del cálculo, debe involucrar exploraciones numéricas y gráficas. Esto no se evidencia en la exploración realizada en los libros de texto, pues en la aproximación inicial a la noción de función (octavo básico), predominan fuertemente representaciones de tipo simbólicas y no se evidencian tareas donde la función sea planteada desde su *representación gráfica*.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del proyecto de investigación FONDECYT de iniciación N°11150014, financiado por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) de Chile.

Referencias bibliográficas

Amaya, T., Pino-Fan, L., y Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Educación Matemática, 28*(3), 111-144.

Aravena, M. (2001). *Evaluación de proyectos para un curso de álgebra universitaria. Un estudio basado en la modelización polinómica*. Tesis de doctorado no publicada, Departament de Didáctica de la Matemática i de les Ciències Experimentals, Universitat de Barcelona. España.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97 - 140). México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Bennett, J., Burger, E., Chard, D., Hall, E., Kennedy, P., Renfro, F., Roby, T., Scheer, J., y Waits, B. (2014). *Texto para el estudiante. Matemática 8°.* Chile: Galilieo Libros Ltda.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V., y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, 27*(2), 221-252.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1)*,* 127-135.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M., y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2), 247-265.

Mesa, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: An empirical approach. *Educational Studies in Mathematics, 56*(2)*,* 255-286.

Mineduc. (2011a). *Programa de Estudio para Octavo Año Básico Unidad de Curriculum y Evaluación*. Santiago de Chile. doi :978-956-292-342-2.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics, 14*(3)*,* 235-250.

Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D., y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *PARADIGMA, 34*(2), 123-150.

Pino-Fan, L. (2014). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada*. Granada: Universidad de Granada.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *BOLEMA, 29*(51), 60-89.

Ramos, A. B. (2005). *Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambios institucionales. El caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Barcelona. España.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Tesis doctoral publicada, Universidad de Jaén: España.

Vinner, S. (1992). The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. En E. Dubinsky, G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 195-214). United States: Mathematical Association of America.

ÁREA E PERÍMETRO: UMA ANÁLISE DAS RELAÇÕES INSTITUCIONAIS NO CURRÍCULO DO ESTADO DE SÃO PAULO

José Valério Gomes da Silva
UNIAN – SP. (Brasil)
valerio.gomes@yahoo.com.br

RESUMO: Este trabalho objetiva identificar e analisar as relações institucionais existentes nos documentos oficiais do estado de São Paulo sobre os conceitos de área e perímetro. Nos fundamentamos nas pesquisas de Douady & Perrin-Glorian, Baltar e na Teoria Antropológica do Didático de Chevallard e seus colaboradores. O percurso metodológico para análise dos documentos transcorreu por meio da identificação das relações institucionais através da análise das organizações praxeológicas; os ostensivos e não ostensivos; e o "topos" dos alunos. Como resultados identificamos um número reduzido de praxeologias para os estudantes construírem os conceitos de área e perímetro enquanto grandeza e verificamos ainda que o foco está voltado para situações de medida. Concluímos também que alguns materiais apresentam as tarefas a principio como ferramentas implícitas, que ao serem articuladas com outros conhecimentos assumem seu caráter de ferramenta explicita para sua formalização enquanto objeto matemático que será institucionalizado como tal.

Palavras chave: área, perímetro, relações institucionais, currículo de matemática

ABSTRACT: This work attempts to identify and analyze the institutional relations that appear in the official documents of Sao Paulo State concerning the concepts of area and perimeter . We base this work on Douady and Perrin-Glorian and Baltar researches, as well as on the anthropology theory of didactics by Chevallard et.al. The methodological study to analyze the documents was carried out by identifying institutional relationships through the analysis of the evident and non-evident praxis organizations, and the students' "topology". As a result we identified a reduced quantity of praxeologies for the students to construct the concepts of area and perimeter with respect to their magnitude. We also verify that the problem is focused on measurement situations. Besides, we can conclude that some materials present the tasks at the beginning, as implicit tools, which are also linked to other knowledge by assuming their nature of explicit tools for their conceptualization as mathematical objects.

Key words: area, perimeter, institutional relationships, math curriculum

Introdução

Este estudo é uma parte da pesquisa de doutoramento no qual identificamos por meio dos documentos oficiais as novas propostas curriculares para o processo de ensino e aprendizagem de matemática em torno das noções de área e perímetro. Para tal, utilizamos para as análises os documentos que vem sendo introduzidos pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, pois os mesmos correspondem às novas expectativas institucionais e respondem à proposta nacional que prevê a construção, por cada estado da federação, de materiais próprios que contemplem as necessidades regionais e locais.

Observamos que a opção por estudar as propostas do estado de São Paulo - Brasil se deve ao fato que desde 2008 vem sendo introduzidas as novas propostas curriculares, por meio de uma parceria entre os especialistas e professores. Isso resultou no Programa Ler e Escrever para os anos iniciais do ensino fundamental (6 – 10 anos) e o currículo do estado de São Paulo para os anos finais do ensino fundamental (11 – 14 anos) e o ensino médio (15 – 17 anos). Assim, os documentos analisados neste artigo são: O Projeto Educação Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental – EMAI (2013), que correspondem a uma nova proposta para o desenvolvimento da Matemática do Programa Ler e Escrever, e os Cadernos dos Alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental (2009), que compõem o currículo do estado de São Paulo.

Buscamos analisar as abordagens dos conceitos de área e perímetro ao longo dos anos do ensino fundamental – EF por estarmos convencidos da importância desses dois documentos para os estudantes da rede pública do estado de São Paulo. O foco das análises tentará responder as questões: Será que as atividades envolvendo as noções de área e de perímetro contribuem na construção dessas noções enquanto grandeza? Nesses documentos oficiais são propostas situações de área e perímetro que possibilitem ao aluno distinguir e relacionar os quadros geométrico, numérico e das grandezas segundo definição de Douady & Perrin-Glorian (1989)?

Com intenção de responder a essas questões, esse artigo tem o objetivo de identificar e analisar as relações institucionais existentes nos documentos oficiais do estado de São Paulo, o Projeto EMAI dos anos iniciais do EF e os cadernos dos alunos dos anos finais do EF, em torno das noções de área e perímetro. Para responder as questões acima e atingirmos o nosso objetivo iremos listar a fundamentação teórica escolhida para o encaminhamento da pesquisa.

Para tal, o texto desse estudo está organizado em três partes. A primeira é a fundamentação teórica. A segunda parte refere-se à explicitação e justificativa dos procedimentos metodológicos empregados na pesquisa. E a terceira são as análises dos resultados fazendo o diálogo com a fundamentação teórica; seguidos das considerações finais e por fim, as referências.

Consideraremos nesse estudo a noção de área a partir das hipóteses que norteiam a pesquisa desenvolvida por Douady e Perrin-Glorian (1989). As pesquisadoras propõem uma abordagem da noção de área de figuras planas como uma grandeza, o que corresponde à distinção e articulação de três quadros: o geométrico, o das grandezas e o numérico. A partir da análise de erros, Douady e

Perrin-Glorian (1989) caracterizaram dois tipos de concepção de área: as concepções geométricas e as concepções numéricas.

Utilizamos as pesquisas de Baltar (1996), mais particularmente, à classificação das situações que dão sentido ao conceito de área e perímetro, a saber: situações de comparação, situações medida e situações de produção.

Consideramos ainda como referencial teórico para a análise dos documentos a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard, em particular, as noções de relações institucionais, de organizações praxeológicas ou praxeologias, de “topos” professor e do aluno e de ostensivos e não ostensivos segundo Chevallard (1991, 1992, 1994, 1997, 1999), Chevallard e Grenier (1997) e Boch & Chevallard (1999).

Ressaltamos que para Chevallard (1992), tudo é objeto, e quando um objeto é reconhecido por uma instituição, podemos definir uma relação institucional com esse objeto estudado. Nessa pesquisa, consideramos como instituições os documentos: EMAI dos anos iniciais do ensino fundamental - EF (São Paulo, 2013) e os Cadernos do aluno dos anos finais do EF (São Paulo, 2009); os objetos em estudo são os conceitos de área e perímetro, para esses conceitos identificamos e analisamos as relações institucionais existentes por meio desses documentos, que são atualmente referência para ao desenvolvimento da Matemática nas escolas de ensino fundamental do estado de São Paulo - Brasil.

Trata-se de uma pesquisa qualitativa fundamentada em Lüdke e André (1986) uma vez que tem como sua fonte direta de dados o ambiente natural e o pesquisador como seu principal instrumento, os dados são predominantemente descritivos, existe preocupação maior com o processo que com o produto, em particular, com a abordagem que os autores dos documentos dão aos objetos matemáticos área e perímetro e a análise de dados segue um processo indutivo. As análises seguem as técnicas de uma pesquisa documental que segundo Lüdke e André (1986) é uma técnica da pesquisa qualitativa que permite complementar informações obtidas por outras técnicas e/ou desvendar aspectos de um tema ou problema.

Os documentos analisados são compostos por: seis unidades (UD) em cada ano do 1º ao 5º totalizando trinta unidades (EMAI) e quatro volumes (V) em cada ano do 6º ao 9º totalizando dezesseis volumes (os cadernos dos alunos).

Para atingirmos o objetivo desta pesquisa organizamos uma grade de análise na qual consideramos inicialmente as noções de área e perímetro em função de seu caráter ferramenta e objeto do trabalho matemático a ser realizado. Em seguida, identificamos as situações de comparação, de produção e de medida entre as atividades de área e perímetro enquanto formas de tratamento desses objetos de estudo, ou seja, de suas características a partir das possíveis tarefas que lhe são associadas. Na sequência, identificamos as organizações praxeológicas dentre as atividades propostas nos documentos em análise, ou seja, os tipos de tarefa, as técnicas e os elementos tecnológico-teóricos. Também identificamos os ostensivos e não ostensivos envolvidos nas atividades e finalmente, os “*topos*” dos alunos.

Com os dados coletados, a partir das categorias de análise citadas anteriormente pudemos identificar as expectativas institucionais que se espera sejam desenvolvidas em cada unidade ou volume para os anos em que as noções de área e perímetro são indicadas para ser desenvolvida no EF. A partir da identificação das tarefas indicadas para os dois níveis de escolaridade, EF anos iniciais e EF anos finais, aplicamos a grade de análise. Observamos que essa grade além de permitir a identificação dos diferentes tipos de tarefa que são propostos na introdução das noções de área e de perímetro nos documentos em análise, serve também como instrumento que permite analisar as diferentes relações institucionais existentes.

Para esse trabalho consideramos apenas os três tipos de tarefa predominantes nos documentos analisados em torno da noção de área e três para a noção de perímetro, sendo um tipo de tarefa para cada situação (Baltar, 1996), a saber:

T_1: Ordenar as figuras planas dadas de acordo com sua área (situações de comparação);

T_2: Construa uma figura plana a partir de uma ou várias figuras planas dadas levando em consideração sua área (situações de produção);

T_3: Calcular a área de uma figura plana (situações de medida).

Figura 1. Tipos de Tarefas predominantes em torno da noção de área para os documentos analisados.

T_1: Ordenar as figuras planas dadas de acordo com seu perímetro (situações de comparação);

T_2: Construa uma figura plana a partir de uma ou várias figuras planas dadas levando em consideração seu perímetro (situações de produção);

T_3: Calcular o perímetro de uma figura plana (situações de medida).

Figura 2. Tipos de Tarefa predominantes em torno da noção de perímetro para os documentos analisados.

Na Figura 3 que segue apresentamos um exemplo de aplicação da grade de análise para os tipos de tarefa T_1 e T_3 do 4º ano em torno do conceito de perímetro:

Situação: Situações de comparação e de medida.
Tipos de Tarefa (T_1 e T_3): *Figura1*(atividade 23.2/unidade 6 - 4º ano/Projeto EMAI)
Técnicas:
Técnica 1: Contar as unidades de comprimento (lado do quadradinho) nas duas partes da atividade.
Técnica 2: Para a segunda parte da atividade é preciso dispor ainda da técnica da multiplicação de dois números, pois é preciso determinar o contorno por meio da multiplicação do número de unidades de comprimento pela medida de cada uma delas.
Tecnologias: operações com os números racionais; propriedades das figuras planas; os desenhos das figuras planas; o conceito de perímetro que foi construído.
Teoria: Geometria das figuras planas e Grandezas e Medidas.
Ostensivos dados no enunciado: Representação escrita na língua materna e a representação figural sobre um quadriculado.
Ostensivos utilizados na solução: Representação escrita de número racional.
Não Ostensivos utilizados na solução: As operações de adição e multiplicação.
“Topos” do aluno: Ser capaz de reconhecer nas atividades situações já vivenciadas, buscar e selecionar os dados importantes e tomar decisões que dependem de seus conhecimentos retrospectivos, por exemplo, contar a quantidade de unidades de medida.

Figura 3. Exemplo de uma aplicação da grade de análise.

Os documentos EMAI e os cadernos dos alunos são iniciados com uma apresentação cujo objetivo é ampliar a discussão das questões sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática no estado de São Paulo, em particular, aquelas que tratam da introdução e desenvolvimento dos conceitos de área e perímetro. O foco do documento está centrado tanto na aprendizagem do aluno como na possibilidade de reflexão por parte dos professores e coordenadores do sistema escolar relativo a uma determinada região sobre novas estratégias de desenvolvimento dos conteúdos visados.

Sendo assim, esses documentos também têm a função de auxiliar na orientação da formação inicial e continuada do professor, isto é, estabelecer o “topos” esperado do professor dando-lhes subsídios para as atividades em sala de aula. De forma implícita os documentos indicam a necessidade de estudo das teorias de aprendizagem e das pesquisas em Educação Matemática, pois são elementos dessas teorias que são utilizados no desenvolvimento das sequências de ensino.

Considerando a noção de “*topos*” proposta por Chevallard e Grenier (1997) podemos considerar que o esperado, institucionalmente, do professor em relação ao saber matemático sobre as noções de área e perímetro, é trabalhar com os objetos ostensivos que permitem manipulá-los, reconhecendo os não ostensivos que lhes são associados de forma a ser capaz de justificar as diferentes passagens no desenvolvimento de uma técnica por meio de um discurso tecnológico, ou seja, evocar os não ostensivos de forma a justificar os ostensivos utilizados na introdução e desenvolvimento das atividades envolvendo as noções de área e perímetro. Isso mostra a importância de dispor de diferentes ostensivos para representar um mesmo conceito ou noção matemática e saber associá-los aos respectivos não ostensivos para ser capaz de produzir um discurso tecnológico que justifique e controle os resultados encontrados. Assim, tanto o professor como o alunos devem dispor destes ingredientes de manipulação e evocação do trabalho matemático que se realiza ao desenvolver uma técnica para que os primeiros possam auxiliar seus alunos a ultrapassar as dificuldades encontradas na solução das tarefas que lhes são propostas e os segundos para que possam produzir respostas a essas tarefas de forma planejada, com uma execução consciente e que eles próprios seja capazes de controlá-las.

As Tabelas 1 e 2 mostram a distribuição do quantitativo das atividades analisadas em torno das noções de perímetro e área enquanto objeto de estudo ao longo dos anos do ensino fundamental nos documentos EMAI e cadernos dos alunos:

Tabela 1. Distribuição das tarefas em torno da noção Perímetro ao longo do EF.

Situações	Tipos de tarefa predominantes (PERÍMETRO)	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano	Total
Situações de comparação	T_1	__	__	__	2	2	2	__	1	__	7
Situações de produção	T_2	__	__	__	__	__	__	__	__	__	__
Situações de medida	T_3	__	__	__	2	1	1	1	2	1	8
Total		--	--	--	4	3	3	1	3	1	15

Tabela 2. Distribuição das tarefas em torno da noção Área ao longo do EF.

Situações	Tipos de tarefa predominantes (ÁREA)	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano	Total
Situações de comparação	T_1	__	__	__	1	3	3	__	1	__	8
Situações de produção	T_2	__	__	__	__	__	6	__	1	__	7
Situações de medida	T_3	__	__	__	5	1	1	4	2	8	21
Total		--	--	--	6	4	10	4	4	8	36

Ao observarmos as tabelas percebemos um quantitativo bem maior de atividades envolvendo área em relação às atividades de perímetro. Ao observar a tabela 1 verificamos que nenhuma situação de produção em relação à noção de perímetro é considerada no desenvolvimento dessa noção no ensino fundamental. Trata-se de um caso que precisa ser repensado uma vez que esse tipo de situação irá ajudar na construção da noção de perímetro enquanto grandeza como observaram Douady e Perrin-Glorian (1989) e Baltar (1996). Verificamos ainda que existe uma grande concentração de atividades envolvendo situações de medida em torno da noção de área, esse fato pode reforçar uma ideia errônea de que "área é um número" conforme indicações encontradas no trabalho de Douady e Perrin-Glorian (1989) que mostram a necessidade de distinguir as noções de área das noções de superfície e de número.

Em relação aos anos iniciais, não identificamos atividades envolvendo as noções de área e perímetro no 1º, 2º e 3º anos. Parece-nos interessante que já no 3º ano sejam introduzidas algumas atividades simples de comparação e de produção envolvendo as noções de perímetro (ideia de contorno) e área (ideia de tamanho da superfície) sem tratar da questão das medidas.

As atividades de área e perímetro encontradas no material destinado ao 4º ano são introduzidas na última unidade (UD 6), sendo as situações de medida privilegiadas em relação às situações de comparação. Aqui, consideramos que essa proposta poderia se diluir ao longo das seis unidades, o que permitiria ao professor realizar um trabalho no qual se articula novos conhecimentos com conhecimentos retrospectivos disponíveis. Uma forma de desenvolver essa prática, por exemplo, seria a utilização de atividades de produção e comparação de quadrados e de retângulos em malhas quadriculadas.

Assim como no 4º ano, as atividades envolvendo área e perímetro do 5º ano também só foram apresentadas na última unidade analisada (UD 6), da mesma forma as situações de comparação, de produção e de medida podiam ser apresentadas nas unidades anteriores por meio de atividades que articulem conhecimento retrospectivos disponíveis com os novos conhecimentos que se deseja introduzir.

Nas nossas análises observamos que no 6º ano as noções de área e perímetro estão sendo construídas por meio de situações de comparação e de produção, sem propor nenhuma atividade de medida, por exemplo, com contagem de unidades de área e de perímetro em malhas, o que supostamente é considerado como um conhecimento retrospectivo disponível. As atividades propostas se concentram no 3º bimestre do 6º ano, e novamente, nos questionamos: porque também não propor atividades envolvendo as noções de área e perímetro nos outros bimestres de forma articulada com os outros conteúdos que são desenvolvidos nesse ano?

Por outro lado, no 7º ano para a introdução dos conteúdos: grandezas direta/inversamente proporcional, razão e proporção, equações e fórmulas, etc., é esperado que o aluno dispusesse de conhecimentos associados às situações de medida com as respectivas formalizações. Nesse momento, são apresentadas as fórmulas para o cálculo da área dos retângulos, triângulos e outros polígonos, sem o cuidado de construí-las em seções específicas e de forma articulada com as noções de área e perímetro, o que pode gerar dificuldades de compreensão dos conceitos e noções necessárias para o desenvolvimento dessas atividades por parte dos alunos.

No 8º ano, especificamente, nos volumes 2 e 3, as noções de área e perímetro são tratados como ferramenta explicita de estudo dos conteúdos de álgebra por meio de situações de medida. Em seguida, no volume 4 com o título de “área de figuras planas” a abordagem da noção de área é revisitada como objeto de estudo por meio de situações de produção, comparação e medida.

Assim, com o objetivo de minimizar as dificuldades dos estudantes que poderão surgir nos volumes 2 e 3 já citados, nos parece importante que o professor tenha claro as necessidades apresentadas acima e seja capaz de inverter a sequência de atividades antecipando a proposta de trabalho indicada no volume 4 em relação aos volumes 2 e 3.

O mesmo acorre nos cadernos do 9º ano, onde nos parece necessária uma discussão e/ou atividades envolvendo as fórmulas para o cálculo da área dos principais polígonos (retângulos, quadrados, triângulos, paralelogramos, trapézios) antes de usar tais fórmulas como ferramenta explicita de estudo para a introdução de outros conteúdos como a resolução de equações do 2º grau, ou na representação gráfica de grandezas proporcionais ou ainda em semelhanças de figuras planas, como é o caso encontrado, por exemplo, nos volumes 2 e 3 dos cadernos do 9º ano analisados.

É importante ressaltar ainda que não existem atividades que relacionem as noções de área e perímetro com situações de comparação e produção que auxiliem a reforçar a independência das duas grandezas, ou seja, não se trabalha explicitamente com a questão de verificar se o aumento ou diminuição da área de figuras planas iria ou não implicar no aumento ou diminuição do perímetro dessas mesmas figuras. Situações desse tipo foram desenvolvidas por Douady e Perrin-Glorian (1989) e Baltar (1996).

Quando analisamos o projeto EMAI e os cadernos do estado de São Paulo de forma panorâmica do 1º ao 9º ano do Ensino Fundamental – EF percebemos que a relação institucional desses documentos em torno da noção de área está baseada, principalmente, com situações de medida, em particular, na utilização da substituição da medida dos lados dos polígonos nas fórmulas como uma técnica predominante. Trata-se de uma abordagem, que como já anunciamos na apresentação dos resultados, que poderá acentuar uma ideia errônea de que a noção de área se resume a apenas um número. Por outro lado, em relação à noção de perímetro a técnica mais explorada nos documentos analisados é a adição das medidas dos lados das figuras geométricas planas, explorando apenas a ideia do perímetro enquanto soma dos lados de uma figura e não como contorno da figura, o que pode representar uma dificuldade no momento de trabalhar com o perímetro de uma circunferência.

De um modo geral, observamos que o quantitativo de atividades onde as noções de área e perímetro são ferramentas para o estudo de outros conteúdos matemáticos é maior que as atividades onde essas noções são objeto de estudo. Esses quantitativos deveriam ser mais equilibrados, pois se o estudante não tiver construído as noções de área e perímetro de forma satisfatória irá ter dificuldade na compreensão de atividades intramatemáticas e extramatemáticas para as quais é preciso aplicar essas noções enquanto conhecimentos retrospectivos disponíveis.

Assim, as expectativas institucionais segundo os documentos analisados é que os alunos sejam capazes de reconhecer os ostensivos e os não ostensivos das atividades em torno das noções de área e perímetro, como também de construir essas noções enquanto grandezas e explicitá-las de forma coerente na solução de tarefas de sua vida escolar e cotidiana.

Pensando nas questões apresentadas inicialmente e em função das análises efetuadas nos documentos que representam, em parte, as relações institucionais que sobrevivem e se reconstroem atualmente no processo de ensino e aprendizagem do ensino fundamental do estado de São Paulo quando se introduz e se desenvolve as noções de área e perímetro, ressaltamos que as atividades contribuem para a construção das noções enquanto grandeza, mas parece necessário um trabalho mais intenso e uma maior articulação entre essas noções e outros conhecimentos intramatemáticos e extramatemáticos desenvolvidos nessas etapas escolares.

Em relação à segunda questão observamos que as atividades propostas não parecem ser suficientes para que os alunos sejam capazes de distinguir e relacionar os quadros numérico, geométrico e das grandezas conforme a proposta da pesquisa de Douady e Perrin-Glorian (1989), uma vez que existe pouca articulação entre as noções de área e perímetro e as outras noções introduzidas no ensino fundamental anos iniciais e finais.

Referências bibliográficas

Baltar, P. M. (1996). *Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surface planes:* une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège. Tese de Doutorado, Université Joseph Fourier. França.

Bosch, M., Chevallard Y. (1999). La sensibilité de l´activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques 19(1),* 77-124.

Chevallard,Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques 12(1),* 73-112.

Chevallard, Y. (1994). *Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique.* Recuperado em 17 de setembro de 2015 de http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard Y., Grenier, D. (1997). *Le topos de l' éleve***,** Actes de la IX école d' été de didactique des mathématiques, Houlgate, França.

Chevallard, Y. (1999). *La recherche en didactique et la formation des professeurs* : problématiques, concepts, problèmes. Recuperado em 17 de setembro de 2015 de http://yves.chevallard.free.fr/

Douady, R.; Perrin-Glorian, M.-J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics* 20(4), 387-424.

Lüdke, M., André, M.E.D.A. (1986). *Pesquisa em educação:* abordagens qualitativas. São Paulo: EPU.

São Paulo. (2009). *Caderno do Aluno*: Matemática, 6º - 9º anos (4 volumes). Ensino Fundamental. São Paulo: Secretaria de Educação.

São Paulo. (2013). *Projeto Educação Matemática nos Anos Iniciais* – EMAI: Matemática, 1º - 5º anos (6 unidades). Ensino Fundamental. São Paulo: Secretaria de Educação.

COMPLEJIDAD EN EL ACTO DE CONOCER: SEGUNDA SESIÓN

Eduardo Carrasco, Vicente Carrión, Enrique Hernández, Paulino Preciado, Jaime Arrieta, Leonora Díaz.
UMCE, UPN, CINVESTAV, UAGRO, U. CALGARY, U. VALPARAÍSO, (Chile)
ecarrasc@gmail.com, vcarrion@upn.mx, jesus.hernandez@cinvestav.mx, apprecia@ucalgary.ca, jaime.arrieta@gmail.com, leonora.diaz@uv.cl.

RESUMEN: Ante las aproximaciones al estudio de sistemas complejos, en Relme XXX surge este GT para integrar miradas complejas al fenómeno educativo, el cual se entiende desde la dimensión social del sujeto que conoce y de aquello que quiere conocer. Se estableció la triada Configuración-Interacción- Emergencia como punto inicial. Esta segunda sesión buscó reflexionar sobre la incorporación de herramientas de análisis de dinámicas complejas, tanto como objetivo de enseñanza, como para abordar el fenómeno educativo, esperando precisar aquellas preguntas indagativas que, desde marcos teóricos actuales, se mantienen, modifican o emergen. Se discutieron metáforas con ejemplos concretos de modelación de fenómenos con dinámicas complejas.

Palabras clave: complejidad, educación, interacciones, en acción

ABSTRACT: In the face of the approach towards complex systems, in the 30th RELME, this work arises to integrate complex views of the educational phenomenon, which is understood from a social dimension of the individual who already knows, and of what he wants to know, as well. The emergency-interaction-structure triad was established as a starting point. The second part attempted to reflect on the use of tools for the analysis of complex dynamics, both as a teaching objective and as a way to tackle the educational phenomenon. It's expected to specify those search questions that, from today's theoretical frameworks, are kept up, are modified or emerge. Some metaphors with concrete examples of phenomenon modeling with complex dynamics were discussed.

Key words: complexity, education, interactions, in action

Antecedentes

Este reporte es un nuevo avance de la discusión, en torno a la incorporación de elementos de complejidad al estudio del fenómeno Matemático Educativo, iniciada en el marco del seminario sobre *Complejidad, Identidad y Perspectivas Centradas en Prácticas*, del año 2014 en el posgrado en Matemática Educativa de la UAGRO, que ha continuado en diversos espacios presenciales y virtuales. En particular en Relme, en sus versiones 29 y 30 se ha conformado un grupo abierto a la comunidad. Se parte de constatar que el fenómeno educativo ha sido abordado desde muchas disciplinas como la psicología, la matemática, la sociología, la epistemología, entre otras. Las cuales han ido develando facetas relevantes del proceso de construir aprendizajes. Sin embargo, consideramos que la complejidad del desafío educativo, que en su aspecto más nuclear considera tres aspectos (estudiante, saber, profesor) que interaccionan conformando el triángulo didáctico, ha hecho necesario el desarrollo de herramientas sistémicas específicas del estudio de la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Hoy surgen marcos y modos para abordar el fenómeno educativo desde la visión de los sistemas complejos (Morin, 1999; Koopmans, Stamovlasis, 2016; Davis y Simmt, 2003). Marcos que dejan la ilusión de leyes generales, que se cumplen siempre y en todo lugar, que permitirían una predicción factible y segura, a la vez que asumen la vieja idea del progreso lineal y simple que marchan de la parte al todo o de lo simple a lo más evolucionado y complejo. Se busca, en cambio, construir saber sistémico que permita diseñar dinámicas de actividad, a las que se debe incorporar el estudiante para que construya su saber, en la medida que ejerce actividad intencionada por el educador. Por tanto, el GT se plantea el propósito de distinguir y enriquecer marcos teóricos que posibiliten desentrañar elementos que concurren en lo matemático educativo.

En Relme 29 (Arrieta, Carrasco, Carrión, Díaz, Hernández, 2016), se distinguió lo complejo de lo complicado; lo inter de lo trans y de lo multidisciplinar. En el currículum educacional se distinguió que lo transdisciplinario establece un ámbito de acción superior al de cada una de las disciplinas del currículum, un espacio de interacción abarcadora de saberes para una formación requerida por una nueva ciudadanía. Así emergen como un primer elemento los procesos de interacción que, desde “reglas simples” se van construyendo en “comportamientos complejos”. Del mismo modo, lo evaluativo ha de buscar establecer mediciones aproximadamente razonables, en función de la escala y de la dimensión en la que nos movemos para la reproducción intelectual de los fenómenos que estamos investigando, según los objetivos que en cada caso perseguimos, romper con la precisión absoluta.

La discusión mostró que una mirada compleja va develando diversas configuraciones, tanto en el nivel micro, meso y macroscópico, así como en el trabajo de docentes. Son niveles diferentes que pueden ser explicados desde la triada configuración-interacción-emergencia. Otro aspecto que se releva en la discusión es la configuración de los elementos que interactúan y de cómo interactúan: ¿Es la disposición de las partes una dimensión relevante a la incorporación de nuevas prácticas? ¿Otras disposiciones y modos de interrelación traerán consigo otras formas y otras propiedades? En este sentido se entiende que al incorporar prácticas intencionadas de modelación matemática en el aula, a modo de afectar positivamente los aprendizajes matemáticos, hay cambios que no concurrirían con las acciones intencionadas. Luego en el aula, como espacio de actividad humana, emergen configuraciones particulares de sujetos, quienes enactan (ponen en acción) aquello que han construido en su historia de vida, donde surgirán aspectos nuevos y persistirán otros. Por tanto, y a modo de síntesis de la discusión del grupo en Relme 29 se establece como punto de encuentro e inicio la tríada Configuración-Interacción-Emergencia, como una tríada que permite una mirada compleja a los procesos educativos, entendidos éstos desde la dimensión social del sujeto que conoce y desde aquello que se quiere conocer.

La reunión del GT en Relme 30 y el propósito de este reporte es avanzar aspectos del estudio de la tríada configuración-interacción-emergencia, desde diferentes propósitos indagativos: Mirada compleja a proceso interactivos que levantan comportamientos emergentes, mirada al aula como un colectivo en el cual emergen propiedades. Estos aspectos se discuten en las siguientes secciones.

Estudio de colectivos como un fenómeno complejo

Un colectivo de personas es mucho más que la suma de sus integrantes. Desde el punto de vista de sistemas complejos, un sistema, en este caso el colectivo, no se puede reducir a sus partes. Por ejemplo, una manada de lobos se comporta de forma distinta a muchos lobos actuando de forma individual (Maturana y Varela, 1987). Para el caso de educación en la escuela o la universidad, se ha hecho evidente desde hace mucho tiempo la ventaja del aprendizaje colaborativo. De forma similar, se ha estudiado el aprendizaje profesional de profesores de forma colaborativa. Un ejemplo es el estudio de clases, o Jugyō Kenkyū, un modelo de formación docente originado en Japón y extendido a varias partes del mundo (World Association of Lesson Studies, 2016). Otros colectivos relevantes para educación son organizaciones educativas como escuelas o sistemas escolares, así como los sistemas nacionales o regionales de educación. Davis (2008) argumentó la pertinencia del pensamiento complejo en el estudio de sistemas anidados para la educación y la investigación. Por ejemplo, un equipo de profesores puede considerarse como un subsistema de una escuela, que a su vez pertenece a un sistema educativo en una cultura y tiempo específicos. El aprendizaje de colectivos se puede ver a distintas escalas, incluyendo sociedades, culturas, e inclusive especies que cambian (evolucionan) en una escala de tiempo de cientos, miles o millones de años. La discusión que este grupo de trabajo entabló se centró, sin embargo, en colectivos de estudiantes, profesores, e instituciones educativas.

En el caso de educación en matemáticas varios académicos se han interesado en el aprendizaje colaborativo de estudiantes, incluyendo creatividad y resolución de problemas (por ejemplo: Liljedahl, 2016; Towers y Martin, 2015). Una forma de estudiar a los colectivos es despersonalizando las contribuciones de cada individuo. En este sentido Towers y Martin, tomando una postura enactivista, han usado la improvisación en el jazz como metáfora para estudiar colectivos de estudiantes, considerando conversaciones entre estudiantes sin referencias a quién hace las contribuciones: tratando de estudiar cómo se desarrollan las ideas en el colectivo, independientemente de quién participa.

La literatura sobre colectivos de profesores es abundante, incluyendo comunidades de aprendizaje y otras formas de aprendizaje colaborativo. Sin embargo, estudios considerando a estos colectivos como fenómenos complejos son más escasos. Dos ejemplos particulares en los que se estudia la interdependencia de individuos en colectivos de profesores son los trabajos presentados en Preciado (2011) y Preciado, Metz y Marcotte (2015). En el primero se analizan los papeles y posiciones que distintos miembros en equipos de profesores asumen durante periodos de trabajo colaborativo. Estos papeles y estas posiciones son dinámicos, emergentes y evolucionan durante la interacción. En el segundo estudio, Preciado, Metz y Marcotte usan los conceptos enactivistas de *co-evolución* e *influencia mutua* para describir cómo tanto profesores como educadores (investigadores) influencian y son influenciados unos con otros durante el trabajo conjunto.

En otro nivel, las organizaciones educativas pueden ser consideradas como sistemas autónomos con capacidad cognitiva (Thompson y Stapleton, 2009). Preciado, Metz y Marcotte (2015) usaron los niveles de conciencia descritos por Mason (1998) para identificar aprendizaje de una escuela y una organización que ofrece formación profesional para profesores, basándose en la forma en que distintos individuos (o instituciones) justifican sus acciones a posteriori. Para el caso de las instituciones, dichas justificaciones pueden ser evidentes en documentos oficiales, así como en las justificaciones que individuos (maestros y administrativos) ofrecen a nombre de las organizaciones a las que pertenecen.

Un tema que surgió dentro del grupo de trabajo fue la dificultad de evaluar el aprendizaje de colectivos. ¿Cómo evaluar un colectivo en el salón de clases en donde la expectativa de aprendizaje de cada estudiante está determinada por un programa de estudios en común? En el caso de profesores en las escuelas, se puede considerar el conocimiento distribuido, como sugirió Boaler (2002), en lugar de considerarlo como un atributo individual. Por ejemplo, en un estudio de 90 escuelas primarias, Askew, Brown, Rhodes, William y Johnson (1997) identificaron una escuela donde los estudiantes mostraron mejor desempeño en evaluaciones en habilidades numéricas. Los profesores en esta escuela no mostraron un conocimiento disciplinar especialmente avanzado, como pudiera esperarse. En su lugar, hubo dos profesores que auxiliaban a los demás maestros. Uno de ellos tenía una especialización en matemáticas y el otro en pedagogía. Esta concepción de colectivos contrasta con el aprendizaje en el aula en donde se espera que cada estudiante desarrolle los mismos conocimientos, tal y como se describen en los programas de estudio. Finalmente, la evaluación del aprendizaje de instituciones educativas también representa retos importantes. Si bien la contribución de Preciado, Metz y Marcotte (2015) sugiere enfocarse en documentos, prácticas y entrevistas que expliquen cómo organizaciones educativas justifican sus acciones pedagógicas, no queda claro cómo aplicar la evaluación en organizaciones a grande escala.

Complejidad y su enseñanza: Un ejemplo en Netlogo

El estudio de sistemas biológicos ha requerido la interacción entre la biología y otras áreas de ciencia como la matemática, la física y las ciencias de la computación, convirtiéndolos en ejemplos privilegiados de sistemas complejos (Holland, 1996; Wilenski y Reisman, 2006). Se destacan entre estos ejemplos, los fenómenos descentralizados. Estos refieren a sistemas que presentan un comportamiento, visiblemente regular, el cual carece de alguna forma de liderazgo que lo oriente (Bonabeau, Dorigo y Theraulaz, 1999).

Investigaciones muestran que los y las estudiantes encuentran un reto en la comprensión de sistemas que presentan comportamientos emergentes e indagan sobre los elementos que conforman una forma de pensar descentralizada. Por otro lado, la incorporación de la Modelación Basada en Agentes (MBA) se ha mostrado pertinente para ayudar a comprender las dinámicas presentes en sistemas complejos (Dickes, Sengupta, Farris y Basu, 2016). La MBA tiene como principal objetivo la descripción y predicción del comportamiento de un sistema dinámico complejo simulando la interacción entre sus partes (llamadas agentes), a partir de reglas básicas que le permiten evolucionar en el tiempo, mostrando un comportamiento macroscópico auto-organizado y descentralizado (Castiglione, 2006).

En Hernández, Carrión y Carreón (2016), se documenta un largo trabajo en torno a un taller con maestros de matemáticas, para discutir nociones como complejidad, emergencia y estabilidad. La discusión se dio utilizando el ejemplo de agregación de amebas conocidas como acraciomicetes (slime mold) y el estudio de la variación de parámetros en la simulación de su comportamiento con *Netlogo* (Wilensky y Stroup,1999). El análisis de la variación de parámetros en la evolución del comportamiento de los acrasiomicetes, ayudó a desarrollar una comprensión intuitiva de conceptos e ideas de emergencia, es decir, el surgimiento de patrones con estructuras complejas que se da a partir de una serie de reglas simples. El análisis de los argumentos de los profesores participantes mostró que la construcción de los conceptos y razonamientos se dio al interactuar con la simulación y reconocer ciertos tipos de patrones contrastándolos con la dinámica biológica (realidad). De esta manera, por ejemplo, es posible que los profesores reconozcan estados invariantes y estacionarios, patrones que deambulan por toda la pantalla, estados estables y patrones de desplazamiento dejando residuos de feromonas. Cuando se entienden estos conceptos, el desorden en la pantalla se vuelve más comprensible.

Algunas reflexiones sobre esta experiencia han guiado a la creación de instrumentos para la intervención y recolección de datos relacionados con fenómenos colectivos, tal como la propagación de epidemias. La importancia del estudio de estos fenómenos incide en el desarrollo de nociones y habilidades que permitan la configuración de estrategias para la exploración de la naturaleza. Para esto, es crucial comenzar a entender el desarrollo de una forma integrada de pensar en el campo de las ciencias y la vida cotidiana, con el fin de proponer formas de pensar en la complejidad que nos rodea.

Preguntas que Emergen

Se van configurando preguntas nuevas desde un paradigma que se orienta desde una mirada compleja: ¿qué preguntas cobran sentido desde los paradigmas existentes? ¿Qué preguntas de las teorías cognitivas o sociales que miran a la educación matemática, tendrán sentido en el paradigma de los sistemas complejos? o ¿Qué preguntas nuevas podrían formularse sobre proceso educativo, con el paradigma de los sistemas complejos? Según Morin (1999), hoy más que nunca los procesos educativos están demandados hacia el desarrollo en el estudiantado de capacidades de innovación, de creación, de construcción de un pensamiento que ha de tener condición de falibilidad, que no sea racionalizante. Luego una pregunta basal sería qué entendemos por pensamiento. Una forma de abordarla es seguir el juego de ficción científica y responder la pregunta ¿es posible que una máquina piense? La respuesta inicial desde el ejemplo de la habitación china (Penrose, 1989), en que una persona encerrada requiere entender preguntas en chino solo con diccionarios y manuales de ese idioma, fue que bastaría comprender las reglas de formación del lenguaje para dar la impresión de hablar chino. Esto implica reducir el pensamiento al manejo de reglas y símbolos de un lenguaje. Sin embargo, la comprensión del acto cognitivo ha cambiado, ampliando su concepción hacia una mente encarnada que conoce en la medida que emerge en ella, desde la interacción con los otros y con lo otro, una nueva estructura -nueva idea- que no se explica solo en el manejo de reglas conocidas. Sin embargo, en la escuela muchas veces las evaluaciones de aprendizaje se limitan a respuestas adecuadas desde las reglas del juego sintáctico de la matemática.

Entonces, avanzar a aprendizajes matemáticos implica ofrecer situaciones de actividad a los estudiantes que promuevan la emergencia de ideas nuevas. Esto, desde la mirada descrita, nos lleva a la pregunta de ¿Cómo descubrir las reglas de juego del aprendizaje en un aula? ¿Cómo buscar estas reglas? En una mirada preliminar en el entorno de clase podemos centrarnos en cuatro componentes: el estudiante, el conocimiento, la evaluación y el colectivo, cada una de estas componentes sugiere un enfoque diferente, pero al mismo tiempo relacionados entre sí. Además, el equilibrio entre ellas ayuda a determinar la efectividad de los procesos de enseñanza que promueven entendimientos.

Un aula centrada en el colectivo se basa en gran medida en la discusión como elemento privilegiado para una interacción que puede facilitar el aprendizaje, en la medida que se conforman espacios horizontales de colaboración. En las acciones y retroacciones que la interacción entre los estudiantes genera, los estudiantes desarrollan una disposición hacia el intercambio productivo con los otros. Éstos permiten que en el pensamiento de los estudiantes emerjan las ideas de aquello que quieren conocer, un resultado que es central para el aula centrada en el alumno. Suma a lo anterior que, desde la discusión, los maestros pueden dialogar con las ideas de los estudiantes y promover el aprendizaje, observando cómo argumentan y levantando acciones tendientes al logro de aprendizajes. Además, dado que el profesor requiere anticipar la gama de concepciones que traen los estudiantes, los puntos en que se puedan tropezar, direccionar al estudiante eficazmente, entre otros aspectos, es necesario por parte del profesor una gran cantidad de información y bastante experiencia. De este modo, aproximarnos al aula desde una mirada compleja consiste en entender al aula como un colectivo de aprendizaje que responde a las necesidades de aprendizaje de: los alumnos, de los conocimientos que dominan, de la variación de un maestro a otro, como de un aula a otra, de una escuela a otra y de un país a otro.

Reflexiones finales

La discusión sobre la complejidad en el acto de conocer ha originado nuevas preguntas sobre el fenómeno educativo, en particular el determinar cómo diversas reglas en el aula promueven dinámicas complejas de aprendizaje, el cómo buscar estas reglas, y el cómo y el qué aprende un colectivo. Desde esta perspectiva la tríada Configuración-Interacción-Emergencia se posiciona como una forma de mirar todas las dimensiones imbricadas en este fenómeno. La configuración da cuenta de las dinámicas intrínsecas a un individuo parte del sistema, fijándose en las acciones que realiza para intervenir su entorno o al entenderlo y explicarlo. La interacción fomenta la estructura social y da pie a la conformación de colectivos que tienen una respuesta emergente ante situaciones que uno solo no podría resolver. En otras palabras, se contemplan diversos niveles de interacción propios del fenómeno educativo, tomando en cuenta la conformación del nivel cognitivo hasta la emergencia de colectivos sociales. En este momento las discusiones e intereses del GT se orientan a la explicación y entendimiento de colectivos tomando al conocimiento como un emergente de la interacción local de sus partes.

Es una mirada que aborda en términos organizacionales en que la relación y la inclusión de un estudiante en aquello que vive. Mirada que no puede separar al aprendiz y/o a quien enseña de aquello a lo que pertenecen. Los bucles cerebro/mente/cultura, razón/afecto/impulso; individuo/sociedad/especie no solo están a la base del fenómeno de aprendizaje y enseñanza, sino que deben incorporarse al proceso de enseñanza con el propósito de evitar que futuras generaciones construyan miradas racionalizantes de la realidad que les toca vivir. Así el acto cognitivo a la base de nuestra acción educativa se entiende, no como re-presentación de un mundo dado, sino que desde un mundo que emerge en la mente de quien se imbrica en la acción, en la vida (Varela, 2000). Se construye saber desde una mente encarnada, que adapta su estructura en todo momento para poder estar. Así, se conoce con otros, con lo otro y desde lo otro.

Por otro lado, al estudiar elementos destacados de la complejidad con ejemplos concretos se ha logrado modelar y comprender cómo un grupo de agentes bajo sus interacciones producen patrones de comportamiento emergentes. La intención de estudiar este tipo de ejemplos se debe al interés del grupo por lograr el desarrollo de una forma de pensar nuestro entorno mediante la complejidad y se conecta con la necesidad de la escuela por buscar situaciones que integren diversas disciplinas y desarrollen habilidades y conocimientos para enfrentar las realidades del ser humano en siglo XXI. De esta forma el GT se posiciona como un grupo que integra dos propósitos en el estudio de la complejidad: una para entender y explicar los fenómenos inmersos en los procesos educativos y por otro como una forma de desarrollar, en la escuela, formas de entender y explicar el entorno desde un punto de vista científico interdisciplinario. Así que el trabajo futuro apunta a la planeación de estrategias que funcionen para investigar e interpretar los datos empíricos provenientes del fenómeno educativo.

Referencias bibliográficas

Askew, M., Brown, M., Rhodes, V., William, D., y Johnson, D. (1997). The contribution of professional development to effectiveness in the teaching of numeracy. *Teacher Development, 1*(3), 335-355.

Bonabeau, E., Dorigo, M. y Theraulaz, G. (1999). *Swarm Intelligence: From natural to artificial systems*. Oxford University Press, Nueva York.

Boaler, J. (2002). The development of disciplinary relationships: Knowledge, practice and identity in mathematics classrooms. *For the Learning of Mathematics, 22* (1), 42-47.

Carrasco, E., Hernandez, J., Carrión, V., Arrieta, J., Díaz-Moreno, L. (2016) Complejidad y Construcción de Conocimiento. En E. Mariscal Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 29,* 808-816, México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Castiglione, F. (2006). *Agent based modeling*. Scholarpedia, 1.

Davis, B. (2008). Complexity and education: Vital simultaneities. *Educational Philosophy and Theory, 40*(1), 50-65, DOI: 10.1111/j.1469-5812.2007.00402.x

Davis, B., y Simmt, E. (2003). Understanding learning systems: Mathematics education and complexity science. *Journal for research in mathematics education*, 137-167.

Dickes, A., Sengupta, P., Farris, A.V., y Basu, S. (2016). Development of Mechanistic Reasoning and Multi-level Explanations in 3rdGrade Biology Using Multi-Agent Based Models. *Science Education*. *100* (4), 734-776.

Hernández, J.E., Carrión, V. y Carreón, G. (2016, May). Decentralized Simulation Phenomena to Foster Mathematical Thinking Development in the Classroom. In M. Takeuchi, A.P. Preciado Babb, y J. Lock. IDEAS 2016: Designing for Innovation Selected Proceedings. Paper presented at IDEAS 2016: *Designing for Innovation, Calgary, Canada* (pg 171-181). Calgary, Canada: Werklund School of Education, University of Calgary.

Holland, J.H. (1996) *Hidden Order: How Adaptation Builds Complexity*. Perseus Books

Koopmans, M. y Stamovlasis, D. (2016). Introduction to Education as a Complex Dynamical System. In M. Koopmans y D. Stamovlasis (Eds.), *Complex Dynamical Systems in Education* (pp. 1-7). Springer International Publishing.

Liljedahl, P. (2016). Building Thinking Classrooms: Conditions for Problem-Solving. In P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds), *Posing and Solving Mathematical Problems* (pp. 361-386). Springer International Publishing.

Mason, J. (1998). Enabling teachers to be real teachers: Necessary levels of awareness and structure of attention. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*(3), 243–267.

Maturana, H. R., y Varela, F. J. (1987). *The tree of knowledge: The biological roots of human understanding*. Boston: New Science Library/Shambhala Publications.

Morin, E. (1999). Los siete saberes necesarios para la educación del futuro. Paidós Barcelona.

Penrose R. (1989). *The emperor's new mind: concerning computers, minds, and the laws of physics*. Oxford: Oxford University Press.

Preciado-Babb, A. P. (2011). *Conversations held and roles played during mathematics teachers' collaborative design: Two dimensions of interaction* (Doctoral dissertation, Education: Faculty of Education). Recuperado desde http://summit.sfu.ca/item/12072, el 11 de Julio de 2016.

Preciado-Babb, A. P., Metz, M. y Marcotte, C. (2015). Awareness as an enactivist framework for the mathematical learning of teachers, mentors and institutions. *ZDM*, *47*(2), 257-268.

Thompson, E. y Stapleton, M. (2009). Making sense of sense-making: Reflections on enactive and extended mind theories. *Topoi, 28*, 23–30.

Towers, J. y Martin, L. C. (2015). Enactivism and the study of collectivity. *ZDM*, *47*(2), 247-256.

World Association of Lesson Studies (2016). *World Association of Lesson Studies*. http://www.walsnet.org/

Varela, F. (2000). *El fenómeno de la vida*. Santiago de Chile: Dolmen.

Wilensky, U., y Stroup, W. (1999). Learning through participatory simulations: Network-based design for systems learning in classrooms. In *Proceedings of the 1999 conference on Computer support for collaborative learning*. International Society of the Learning Sciences.

Wilensky, U., y Reisman, K. (2006). Thinking like a wolf, a sheep, or a firefly: Learning biology through constructing and testing computational theories—An embodied modeling approach. *Cognition and Instruction*, 24(2), 171 – 209.

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN LOS PROGRAMAS DE ESTUDIO DE MATEMÁTICAS DE COSTA RICA PARA TERCER CICLO DE EDUCACIÓN GENERAL BÁSICA EN LAS ÁREAS DE NÚMEROS Y GEOMETRÍA

Eric Mata-Delgado, Milena Granados-Montero
Liceo Unesco. CTP San Isidro. (Costa Rica)
ericmatad@gmail.com, milenagram@gmail.com

RESUMEN: Durante muchos años, la resolución de problemas ha sido uno de los temas de interés en la investigación en didáctica de las Matemáticas, incluso para algunas propuestas curriculares es considerada como estrategia metodológica principal. En esta investigación se analiza en qué medida las sugerencias que dicta el currículo de Costa Rica son coherentes con las características de los problemas que este ofrece para tercer ciclo de Educación General Básica en las áreas de Números y Geometría. Mediante un análisis de contenido de los programas de estudio, nos permitieron concluir que existe una incoherencia entre lo que el currículo anhela y lo que brinda.

Palabras clave: matemáticas, resolución de problemas, números, geometría

ABSTRACT: For many years, problem- solving has been a topic of concerned of mathematics didactics research; in fact, for some curricular proposals, it is considered as the main methodological strategy. This study analyzes how much the suggestions given by the curriculum of Costa Rica are coherent with the characteristics of the problems that it provides for the third cycle of basic General Education with regards to numbers and geometry. The analysis of the content allowed us to conclude that there is incoherence between the curriculum expectations and what it really promotes.

Key words: mathematics, problem solving, numbers, geometry

Introducción

El Ministerio de Educación Pública (MEP) creó una reforma a los programas de estudio de Matemáticas en el año 2012, con el deseo de que se considerara la Resolución de Problemas (RP) como eje principal de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Nuestra investigación surge de la preocupación por la coherencia entre las sugerencias que dicta el currículo y los tipos de problemas que el mismo ofrece.

Fundamentación teórica

Para abordar lo que es un problema matemático partimos de la posición de Kantowski (1980), mencionado por Carrillo (1996), quien considera que un problema puede ser aquella situación a la que se enfrenta el individuo, considerando algún algoritmo para su solución y determinando, de acuerdo con sus conocimientos, una nueva forma de resolverlo.

También se puede considerar que un problema es aquella aplicación significativa que debe enfrentar un resolutor, donde aplica su conocimiento en matemáticas, ante una situación no familiar, ni mecánica, que presente alguna dificultad y que pueda ser resuelta, como lo expresa Carrillo (1996).

En cuanto al currículo de Costa Rica, MEP (2012, p. 29), un problema se define como:

un planteamiento o una tarea que busca generar la interrogación y la acción estudiantil utilizando conceptos o métodos matemáticos, implicando al menos tres cosas: que se piense sobre ideas matemáticas sin que ellas tengan que haber sido detalladamente explicadas con anterioridad, que se enfrenten a los problemas sin que se hayan mostrado soluciones similares, que los conceptos o procedimientos matemáticos a enseñar estén íntimamente asociados a ese contexto.

Tomando en cuenta que no existe una única definición y estimando la posición variada de diferentes autores anteriormente citados sobre lo que es un problema, nosotros consideramos un problema matemático como aquella situación que contenga alguna incertidumbre para ser resuelta, despertando el interés del resolutor, que el nivel de dificultad esté a su alcance y pueda deliberar sobre las estrategias para llegar a resolverlo.

En cuanto a la RP, en este trabajo consideramos la posición de Carrillo (1996, p. 107),

La resolución de problemas como tarea compleja que es, ofrece una posibilidad para organizar la diversidad de niveles existentes en el aula, es un marco ideal para la construcción de aprendizaje significativo y fomenta el gusto por la matemática (incardinada en la realidad) y el desarrollo de una actitud abierta y crítica.

Lo anterior concuerda con uno de los ejes principales del currículo, donde se considera la resolución de problemas como un eje fundamental y no como algo añadido al trabajo de clase, en MEP (2012, p. 477):

Conjunto de estrategias pedagógicas cuyo sustrato es el planteamiento y resolución de problemas. Se identifican al menos las siguientes dimensiones:

Colocada ya en contexto educativo, la resolución de problemas debe integrar al menos dos propósitos: aprendizaje de los métodos o estrategias para plantear y resolver problemas, aprendizaje de los contenidos matemáticos (conceptos y procedimientos) a través de la resolución de problemas.

Por medio de la resolución de problemas, se busca adquirir, fortalecer y construir conocimientos matemáticos basados en problemas contextualizados, de manera que sea familiar para el resolutor.

Metodología

Al iniciar esta investigación nos formulamos la siguiente pregunta, ¿en qué medida las sugerencias que dicta el currículo de Costa Rica son coherentes con las características de los problemas que el mismo ofrece?

Para contestar esa pregunta propusimos los siguientes objetivos:

Objetivo general: Analizar la coherencia entre la visión del currículo de Matemáticas de Costa Rica y el problema propuesto para tercer ciclo de Educación General Básica en las áreas de Números y Geometría.

Objetivos específicos:

- Caracterizar los problemas del currículo en las áreas de Números y Geometría atendiendo al contexto, formulación, solución y nivel de complejidad.
- Establecer las semejanzas y diferencias que presentan las indicaciones del currículo oficial sobre el tipo de problema a utilizar en el aula y los problemas que el mismo brinda en la parte de las indicaciones puntuales.

Caracterización de la investigación

Considerando las características de nuestra investigación y de acuerdo con la clasificación propuesta por Colás y Buendía (1998), se sitúa en el paradigma interpretativo, ya que la información que necesitamos la brinda el Programa de Estudios, la recogeremos de una forma ordenada y organizada para después según las intenciones de nuestro estudio brindarle una interpretación.

También es importante indicar que estamos ante una investigación de corte cualitativo, dada la naturaleza de la investigación, sin embargo, para interpretación de los datos en cuanto a los problemas propuestos por el currículo se realizará un análisis cuantitativo.

Realizamos un análisis de contenido del currículo propuesto por el MEP, tanto en forma general para mostrar el tipo de problema que este anhela, como en el apartado de indicaciones puntuales en el área de Números y Geometría, consideramos los problemas para caracterizarlos con el fin de establecer la coherencia o no entre el tipo de problema declarado con el tipo de problema propuesto en el currículo.

Esta comunicación forma parte de una investigación más amplia, por conveniencia en el envío de los datos por parte de otros informantes decidimos tomar los temas de Números y Geometría porque con alguna de ellas se inicia el curso lectivo en los respectivos niveles de tercer ciclo, como lo establece el MEP (2012, p.465).

Instrumento y proceso de análisis de la información

El instrumento de análisis de la información obtenida para caracterizar los problemas del currículo está compuesto por parte de la categorización hecha por López y Contreras (2014, p. 4), que se basa en el trabajo de Herdeiro (2010), donde consideramos las categorías de Contexto (esta categoría brinda el contexto del problema), formulación (como se presenta el problema) y solución (el tipo de soluciones que tiene el problema). Agregamos la categoría nivel de complejidad sugerida por el MEP (2012, p.32). Ruiz (2015, p.217), destaca nivel de complejidad, con el fin de privilegiar las acciones a desarrollar en la acción de aula; y no como propósito de evaluación del sistema educativo, como pretenden PISA y la OCDE.

A) Contexto, esta categoría incluye las subcategorías:

A1. Contextualización en la realidad: CVRP: contexto de la vida real personal, CVRL: laboral, CVRE: educativo, CVRS: social, CVRC: científico o CPM: Contexto puramente matemático.

A2. Datos proporcionados: CDV: contexto de datos verdaderos (si los datos sobre los que se basa son genuinos, aparece la fuente de donde fueron tomados) o CDF: datos falsos (si los datos en que se basa no son genuinos, es decir, se fabrican).

A3. Conexión: CCRM: contexto con conexión con otras ramas de las matemáticas, CCOAD: con conexión con otras áreas disciplinares, CCHM: con conexión con la historia de las matemáticas o CSC: contexto sin conexión.

B) Formulación, esta categoría incluye las subcategorías:

B1. Ilustración: FSI: sin ilustración, FID: ilustración decorativa (sin ninguna finalidad relacionada claramente con el problema), FIM: motivadora (posible ayuda para el alumno pero que no aporta datos numéricos ni claramente significativos), FIR: representativa (aparecen datos numéricos que se dan en el enunciado) o FII: informativa (aparecen datos numéricos que no se aportan en el enunciado).

B2. Número de cuestiones que presenta el problema desde el punto de vista sintáctico

FS: formulación simple (una sola cuestión) o FA: formulación agrupada (más de una cuestión en la misma actividad).

B3. Número de cuestiones que presenta el problema desde el punto de vista semántico

FSen: formulación sencilla (una sola estrategia cognitiva) o FC: formulación compleja (más de una estrategia cognitiva).

B4. Información proporcionada: FIPS: suficiente, FIPI: insuficiente, FIPE: excesiva.

B5. Representaciones empleadas: FREV: formulación exclusivamente verbal, FRVI: verbal utilizando una ilustración, FRT: utilizando una tabla, FREA: una expresión algebraica, FRG: una gráfica o FRD: un diagrama.

B6. Recursos empleados: FRNE: ningún recurso extra, FRMM: materiales manipulativos, FRNT: nuevas tecnologías.

C) Solución, las subcategorías consideradas son:

C1. Respuesta cerrada o abierta: Respuesta cerrada (SRCC: corta (respuesta única, una frase, un breve algoritmo o procedimiento), SRCD: de desarrollo (La respuesta / resolución es único y presenta en la forma de aplicación de un algoritmo o procedimiento), SRCCC: de completitud (completar una frase), SRCVF: de tipo verdadero/falso, SRCA: de asociación o correspondencia o SRCEM: de elección múltiple), o respuesta abierta (SRAC: corta (La respuesta no es única y dado una pequeña frase palabra y / o breve algoritmo.), SRAD: de desarrollo o SRACD: cualquier tipo de respuesta cerrada con respuesta abierta de desarrollo).

C2. Representaciones pedidas: SRNV: representación exclusivamente numérica o verbal, SRI: utilizando una ilustración, SRT: una tabla, SRD: un diagrama, SRG: una gráfica o SREA: una expresión algebraica.

C3. Unicidad y exactitud: SUE: solución única y exacta (se puede optar por un valor aproximado o redondeado), SNUE: solución no única ni exacta (el valor debe redondear o aproximar necesariamente).

C4. Toma de decisión: STCD: resolución con toma de decisión o STSD: sin toma de decisión en cuanto a las soluciones.

D) Nivel de complejidad, esta categoría considera tres subcategorías:

D1. Reproducción: en esencia se refiere a ejercicios relativamente familiares que demandan la reproducción de conocimientos ya practicados.

D2. Conexión: Remite a la resolución de problemas que no son rutinarios pero se desarrollan en ambientes familiares al estudiante y algo que lo define: la conexión entre los diversos elementos, en particular, entre distintas representaciones de la situación.

D3. Reflexión: Se plantea aquí la formulación y resolución de problemas complejos, la necesidad de argumentación y justificación, la generalización, el chequeo de si los resultados corresponden a las condiciones iniciales del problema y la comunicación de esos resultados.

Para esta fase confeccionamos una tabla con categorías para ubicar cada uno de los problemas con su respectiva codificación, como lo ilustra la tabla 1.

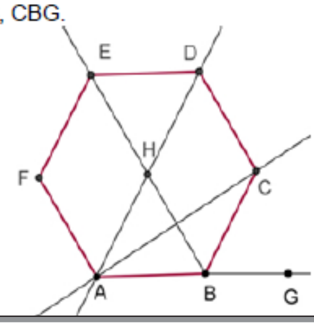
Tabla 1. Instrumento de análisis de la información

Caracterización de los problemas en las Áreas de Números y Geometría

#	Nivel	Pági-na	Conocimientos	Contexto			Formulación						Solución				Nivel de Comple-jidad
				A1	A2	A3	B1	B2	B3	B4	B5	B6	C1	C2	C3	C4	
1	7º	276	Operaciones con números naturales	CVRP	CDV	CSC	FII	FA	FSen	FIPS	FREV	FRNE	SRCC	SRNV	SUE	STSD	D1
2	7º	277	Teoría de Números: Algoritmo de la División, Divisibilidad, Factor, Múltiplo, Números primos,	CVRP	CDF	CCRM	FIM	FA	FC	FIPS	FRVI	FRNE	SRCC	SRNV	SUE	STCD	D3
3	7º	278		CPM	CDF	CCRM	FSI	FA	FC	FIPS	FREV	FRNE	SRCD	SRNV	SNUE	STCD	D3
4	7º	278		CPM	CDF	CSC	FSI	FS	FC	FIPS	FREV	FRNE	SRCC	SRNV	SUE	STSD	D3
5	7º	279		CPM	CDF	CSC	FSI	FS	FC	FIPS	FREV	FRNE	SRCC	SRNV	SUE	STCD	D3

A modo de ejemplo mostramos el primer problema de Geometría para tercer ciclo que aparece en el currículo.

Si el hexágono que se le presenta a continuación es regular, entonces determine las medidas de los ángulos: EHB, EHD, DAB, ABC, CBG.



Problema 1. para el nivel de sétimo, (MEP, 2012, p. 303)

Este problema tiene un contexto puramente matemático (CPM), con datos proporcionados falsos (CDF), sin conexión con otras ramas de las matemáticas (CSC). En cuanto a su formulación presenta una ilustración informativa (FII), el número de cuestiones que presenta el problema desde el punto de vista sintáctico es agrupada (FA), desde el punto de vista semántico es sencilla (FSen), la información proporcionada es excesiva (FIPE), la representación empleada es verbal utilizando una ilustración (FRVI), no requiere de recursos extra (FRNE). El tipo de solución solicitada es respuesta cerrada corta (SRCC), su representación es exclusivamente numérica o verbal (SRNV), con solución única y exacta (SUE), sin toma de decisiones (STSD). El nivel de complejidad solicitado es de conexión (D2).

Resultados

A continuación, se presentan los resultados obtenidos después de la aplicación del instrumento anteriormente descrito. Los resultados del análisis mostrarán el mayor porcentaje de cada subcategoría del instrumento utilizado, de un modo conjunto con los problemas de Números y Geometría de los tres niveles de tercer ciclo.

El currículo propone 47 problemas para tercer ciclo, de ellos 15 son de Números y 32 de Geometría, están distribuidos de la siguiente manera: 25 en sétimo, 12 en octavo y 10 en noveno nivel. El símbolo

que aparece en la columna de indicaciones puntuales del programa de cada ciclo educativo se refiere a que el ejemplo o sugerencia corresponde a un problema, MEP (2012, p. 75).

Contexto: veintidós de los problemas presentan un contexto de la vida real personal (48,89%), cuarenta proporcionan datos falsos (88,89%), un total de veintinueve problemas no tienen conexión con otras ramas de la matemática (64,44%).

Formulación: Veintinueve de los problemas tienen una formulación sin ilustración (64,44%), veintiséis problemas presentan una formulación simple en cuanto a las cuestiones desde el punto de vista sintáctico (57,78%), treinta y un problemas tienen una formulación sencilla sobre el número de cuestiones desde el punto de vista semántico (68,89%), cuarenta y un problemas muestran información proporcionada suficiente (91,11%), treinta de los problemas tienen una formulación exclusivamente verbal (66,67%) y treinta y dos problemas no requieren de algún recurso extra (71,11%).

Solución: Treinta y ocho problemas tienen una solución con respuesta cerrada corta (84,44%), la misma cantidad de problemas requieren de una solución única y exacta, cuarenta problemas requieren de una representación exclusivamente numérica o verbal en su solución (88,89%) y veintiocho no requieren de toma de decisión en cuanto a las soluciones (62,22%).

Nivel de complejidad: hay diecisiete problemas que son del nivel de conexión (37,78%), catorce son de reproducción (31,11%), misma cantidad son de reflexión.

Solo hay un problema que cumple simultáneamente todas estas características.

Discusión y conclusiones

Una de las habilidades a desarrollar de acuerdo con el currículo en los alumnos, es que “se buscará que la mayoría de las actividades desarrollen el proceso Plantear y resolver problemas” MEP (2012, p. 26), también “uno de los aspectos que se desea subrayar en esta visión es la importancia de descubrir, plantear y diseñar problemas (y no sólo resolverlos)” MEP (2012, p. 29); pero solo uno de los problemas (p. 289) pone en práctica esta habilidad.

Uno de los cinco ejes disciplinares que atraviesan de forma transversal el plan de estudios es justamente “el uso inteligente y visionario de tecnologías digitales”, MEP (2012, p. 29), el currículo considera que “el uso de tecnologías debe asumirse como un componente muy importante para un enfoque curricular basado en la resolución de problemas” MEP (2012, p. 32) pero solo el 22,22% de los problemas analizados en su formulación requieren del uso de nuevas tecnologías (B6-FRNT).

Para el currículo “un problema debe poseer suficiente complejidad para provocar una acción cognitiva no simple” MEP (2012, p. 29), pero la mayoría de los problemas analizados (68,89%) muestran una formulación sencilla (una sola estrategia cognitiva), según el número de cuestiones que presenta el problema desde el punto de vista semántico (B3-FSen).

Podemos indicar con respecto a los niveles de complejidad, que encontramos una contradicción con lo expuesto en MEP (2012, p. 33) sobre los problemas de conexión y reflexión “no se trata de proponer la mayoría de problemas en estos dos niveles, sino que éstos se introduzcan de acuerdo a las características de la clase, el momento en la secuencia de lecciones o el tópico”, sin embargo, el 68,89% (la mayoría) de los problemas analizados corresponden al nivel de complejidad de conexión o de reflexión (D2 y D3).

En el marco de la contextualización activa, para despertar el interés y por tanto la participación de los estudiantes en la clase se recomienda "diseñar problemas sacados de las informaciones de prensa, de la escuela, de la comunidad, de la clase, de Internet" MEP (2012, p. 36), pero solo cinco de los problemas (11,11%) tienen un contexto de datos verdaderos es decir, si los datos sobre los que se basa son genuinos, aparece la fuente de donde fueron tomados (A2-CDV).

Uno de los procesos matemáticos que el currículo espera activar es el de conectar, "dentro de cada área matemática (como cuando se aplican los procedimientos y operaciones de los números naturales en los racionales o reales). Pero también entre las distintas áreas matemáticas y de manera general con otras materias", pero el 64,44% de los problemas tienen un contexto sin conexión (A3-CSC). Otros procesos ligados son comunicar y representar, el primero "sugiere la comunicación en distintos niveles y formas, desde las más simples como verbales o escritas, hasta gráficas, simbólicas y formales" MEP (2012, p. 57), se pueden realizar representaciones matemáticas por medio de símbolos, expresiones algebraicas, diagramas, ilustraciones, gráficos; pero las representaciones pedidas en las soluciones de los problemas son casi en su totalidad (88,89%) exclusivamente numérica o verbal (C2-SRNV). Además los problemas tienen en su mayoría en su formulación una representación empleada exclusivamente verbal (B5-FREV).

Otra de las características de los problemas que el currículo resalta es la respuesta abierta, "resulta conveniente subrayar la importancia de problemas de final abierto, es decir aquellos que admiten varias soluciones y aproximaciones, y que pueden ofrecer oportunidades muy valiosas para introducir conceptos y procedimientos" MEP (2012, p. 29); pero el 84,44% de los problemas tienen en su solución una respuesta cerrada (C1-SCR) y el mismo porcentaje de problemas con solución única y exacta (C3-SUE).

Dentro de las semejanzas entre lo que se anhela y lo que se brinda, consideramos en la categoría de contexto lo expuesto en MEP (2012, p. 14) "si bien se promueve el uso de problemas en contextos reales, los abstractos se consideran muy importantes", esto se confirma ya que el 60% de los problemas son del contexto de la vida real y el restante son puramente matemático (A1).

Para finalizar, consideramos que hemos dado respuesta a nuestra pregunta de investigación, pues se evidencia en gran medida la incoherencia entre las sugerencias que dicta el currículo de Costa Rica con las características de los problemas que este ofrece en tercer ciclo de Educación General Básica en las áreas de Números y Geometría, esto nos lleva a pensar en la importancia de que el profesor investigue y pueda confeccionar sus propios problemas o modificar los que el Ministerio de Educación Pública sugiere en las indicaciones puntuales.

Referencias biliográficas

Carrillo, J. (1996). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de* *la investigación y estudio de posibles relaciones*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Sevilla. España.

Colás, M. P. y Buendía, L. (1998). *Investigación educativa. Sevilla:* Ediciones Alfar.

Herdeiro, C. (2010). *La resolución de problemas en los libros de texto de matemáticas de noveno año de escolaridad*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Huelva. España.

López, E. M. y Contreras, L.C. (2014). Análisis de los problemas matemáticos de un libro de texto de 3º ESO en relación con los contenidos de geometría plana. En M.T. González, M. Codes, D. Arnau, T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de trabajo. XVIII Simposio de la SEIEM*, (pp. 425-434). Salamanca: SEIEM.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, (2012). *Programas de estudio de matemáticas. I, II y III ciclos de Educación General Básica y ciclo diversificado*. San José, Costa Rica. MEP.

Ruiz, A. (2015). Perspectiva de la praxis en educación matemática para una reforma del currículo. En N. Planas (coord.), *Avances y realidades de la Educación Matemática* (pp. 209-226). Barcelona: Graó.

HERMENÊUTICA: ANÁLISE DE UM LIVRO DIDÁTICO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Karly Barbosa Alvarenga, Aline da Paixão
Universidade Federal de Goiás. Universidade Federal de Sergipe (Brasil)
karlyba@yahoo.com.br, niny.ufs@gmail.com

RESUMO: Este trabalho tem por objetivo apresentar uma análise de um livro de Cálculo Diferencial e Integral à luz dos conteúdos de Inequações, Números Reais e Lógica Matemática. Utiliza-se da ciência da interpretação, Hermenêutica, para desvelar os sentidos, em especial, o movimento proposto por Thompson (1995), o formal. A pesquisa é do tipo bibliográfica e teve como propulsão outras já realizadas com livros didáticos da educação básica. As dificuldades de ensino e de aprendizagem do Cálculo são conhecidas e, assim, optou-se por investigar como o livro didático Flemming e Gonçalves (2006) aborda tais conteúdos. Os resultados apontam para uma abordagem superficial, sem exploração matemática adequada dos temas.

Palavras chave: hermenêutica, livros didáticos, inequações, ensino superior

ABSTRACT: This work is aimed at showing an analysis of a book of Differential and Integral Calculus with respect to the contents of inequations, real numbers, and mathematical logic. It uses the science of interpretation and the hermeneutics to unveil the senses, specially the formal movement proposed by Thompson (1995). This is a bibliographic research and had other issues already published in didactic books for basic education as a reference source. The shortcomings in the teaching and learning process of calculus are well known; therefore we decided to investigate how the didactic book by Flemming y Gonzalvez (2006) addresses such contents. The outcomes point out a general view, without a proper mathematics analysis of the topics.

Key words: hermeneutics, didactic books, inequations, higher education

Introdução

Baseamo-nos no que defende a Hermenêutica da Profundidade, referencial metodológico que indica uma possibilidade de interpretação de formas simbólicas, para analisar um livro didático de Cálculo Diferencial e Integral, Flemming e Gonçalves (2006), à luz dos conteúdos de inequações, lógica matemática e números reais. Entendemos que eles estão inter-relacionados e queremos observar, segundo categorias elencadas *à priori*, como estão postos nesta obra.

A Hermenêutica, isto é, a ciência da interpretação, como prática sistemática de desvelamento de sentidos, tem origem na exegese bíblica, no desenvolvimento de um enquadre teórico e de um método que dirige essa prática, realizada em séculos de leituras e discussões dos textos sagrados. Silva e Otero-Garcia (2011) apoderam-se de Oliveira (2008) para indicar a Hermenêutica da Profundidade como um procedimento que auxilia na análise de livros didáticos. Esses autores os concebem como formas simbólicas e sugerem atentarmos, na interpretação desse tipo de material, para os três movimentos propostos por Thompson (1995): o sócio-histórico, o formal e a interpretação/reinterpretação); ou seja, defendem que, para realizar um estudo abrangente do livro didático, deve-se focar a sua problemática sobre diferentes ópticas, dentre elas: a interna, a política, a econômica, a psicopedagógica etc.

Quando nos referimos à apreciação de um livro didático, durante a análise formal, podemos considerar, além da sequência e do modo com que os conteúdos são apresentados, a metodologia utilizada pelo autor, o nível de ensino para o qual o livro foi produzido e, sempre que possível, os elementos adicionais, ou seja, os paratextos que compõem a obra. Aqui nos fixamos na análise formal, que para Silva y Garnica (2011) constitui-se pela análise dos elementos internos das formas simbólicas, o que comporta uma descrição das obras. É o momento da análise no qual são investigados os aspectos “internos” da obra que comporá nossa pesquisa. Ela é realizada a partir da elaboração de descrições do material analisado, e procurará considerar, além da sequência e o modo com que os conteúdos são apresentados, a metodologia utilizada pelo autor, o nível de ensino para o qual o livro foi produzido e, sempre que possível, elementos adicionais, como prefácios, notas de tradução, capa, ilustrações etc. Dados biográficos de autores, editores, prefaciadores etc. podem, também, nos auxiliar na compreensão de aspectos internos (e externos) das obras.

O método qualitativo, utilizado por nós, se assenta nos princípios da Análise de Conteúdo proposta por Bardin (2009). Apresentamos aqui apenas um recorte de uma investigação mais abrangente que teve o intuito de observar como tais conteúdos são apresentados em alguns livros universitários. Estamos interessadas em conhecer como esses conteúdos estão enredados, tendo em vista que é impossível estudar inequações, adequadamente, sem nos colocarmos mediante lógica matemática e números reais. Santos e Alvarenga (2014a, 2014b) realizaram uma investigação cujo escopo foi conhecer como esses tópicos matemáticos são apresentados em alguns livros de educação básica e em documentos curriculares estaduais brasileiros. As autoras observaram que eles não tratam adequadamente tais temas, isto é, não são estudados de forma interligada e, em muitas situações, as inequações são tratadas mecanicamente, como, aliás, indicam também pesquisas estrangeiras (por exemplo, Bazzini & Tsamir, 2001; Fernández & Delgadillo, 2015).

Com o pensamento matemático avançado, que perpassa os livros universitários, resolvemos analisar alguns, acreditando que o nível superior de estudo pudesse colaborar para melhorar o entendimento e a maneira de tratar tais tópicos. As categorias analisadas foram: A Obra; Números Reais; Funções; Limites; Derivadas; Integral; Lógica Matemática e Resolução de Inequações. Elas foram selecionadas por compreendermos que as definições de limite, continuidade, derivadas e integral estão fundamentadas em desigualdades e inequações e na ideia de aproximação. Da mesma forma, os números reais e as representações matemáticas que indicam ideias lógicas como: se e somente se; se... então, para todo, existe, são a base para tais entendimentos. Neste artigo, apresentamos cinco características: A obra, Números Reais; Funções, Lógica Matemática e Resolução de Inequações.

O foco desta investigação envolve algumas noções que devem ser concatenadas e aplicadas coerentemente, tais como: a interpretação do sinal de desigualdade, a ordenação dos números reais, o significado da variável, da incógnita e parâmetros, a compreensão do conjunto-solução, as propriedades algébricas dos reais, a fatoração, a radiciação, as relações de equivalência e implicações, as funções, as análises gráficas, dentre outros. Neste trabalho, consideramos as desigualdades como sendo uma expressão que engloba números e um sinal <; >; ≤ ou ≥, porém, uma inequação envolve uma ou mais variáveis, números e um desses sinais. Consideramos que uma inequação é uma desigualdade, mas nem toda desigualdade é uma inequação.

A obra

O livro está dividido em oito capítulos e não difere muito dos encontrados à venda (Números Reais, Funções, Limite e Continuidade, Derivada, Aplicações da Derivada, Introdução à Integração, Métodos de Integração e Aplicações da Integral Definida). Ele possui exercícios resolvidos, denominados exemplos, e propostos, cujas resoluções se assemelham as dos resolvidos. Consideramos o livro como técnico e se assenta no ensino e na aprendizagem tradicional, seguindo a tríade: definição, exemplos e exercícios.

As autoras possuem formação na área de Matemática Aplicada. Diva Marília Flemming é graduada em Matemática, mestre em Matemática Aplicada e doutora em Engenharia de Produção. Mirian Buss Gonçalves se graduou em Licenciatura em Matemática, fez mestrado em Matemática e Computação Científica e doutorou-se em Engenharia de Produção. Ambas têm experiência na área de Educação Matemática, com ênfase na utilização de novas tecnologias no ensino de Cálculo. Pelo perfil interdisciplinar das autoras e por sua afinidade com a Educação Matemática, esperávamos que elas apresentassem uma abordagem metodológica de ensino e de aprendizagem mais sintonizada com esse aspecto, com foco em modelagem, um diálogo com outras ciências e com os diversos fundamentos epistemológicos de Cálculo Diferencial e Integral.

A primeira edição é de 1987 e é intitulada *Cálculo A*. Trata-se de uma obra de referência nos cursos brasileiros de Cálculo Diferencial e Integral. Na última edição (figura1), traz aplicações de funções em diversas áreas, especialmente a de economia, a inclusão do conteúdo de integrais impróprias, e novas abordagens para conteúdos que contemplam o advento do uso de novas tecnologias. Para complementar, foram incluídos exercícios para serem resolvidos com recursos computacionais. Ela foi escrita para ser usada como livro texto de Cálculo tanto nos cursos de matemática, física, química e engenharias, quanto nos das áreas socioeconômicas e biológicas.

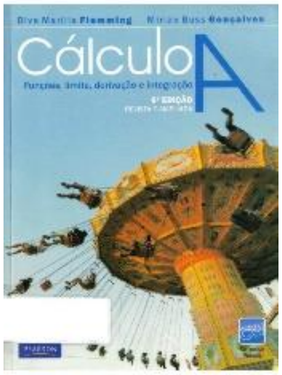


Figura 1. Capa do livro, 6ª edição

Fonte: http://www.bibliotecadaengenharia.com/2015/04/calculo-a-diva-flemming-6-edicao.html

Números Reais

Os números reais formam a base das resoluções e interpretações das inequações, sejam elas simples ou mais complexas. Suas propriedades balizam as resoluções. No capítulo 1, a obra trata deles como: *"*Da união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais resulta o conjunto dos números reais, que denotamos por: $\mathrm{R} = \mathrm{Q} \cup \mathrm{Q}'$*"*. (Flemming & Gonçalves, 2006, p. 02). Em seguida, fala sobre as operações que são realizadas em tal conjunto:

1. Se $a, b \in R$, existe um e somente um número real denotado por $a + b$, chamado soma e existe um e somente um número real, denotado por ab (ou a x b, ou $a.b$) chamado produto.

2. Comutativa: Se $a, b \in R$ então $a + b = b + a$ e $a.b = b.a$;

3. Associatividade: Se $a, b\ e\ c \in R$ então $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a.(b.c) = (a.b).c$;
4. Distributividade: Se $a, b\ e\ c \in R$ então $a.(b + c) = ab + ac$;
5. Elemento Neutro: existem 0 e 1 $\in R$ tais que $a + 0 = a\ e\ a.1 = a$;
6. Simétricos: todo $a \in R$ tem um simétrico, denotado por $-a$, tal que $a + (-a) = 0$;
7. Inverso: todo $a \in R$, $a \neq 0$ tem um inverso, denotado por $\frac{1}{a}$, tal que $a.\frac{1}{a} = 1$;

8. Subtração: Se $a, b\ e\ c \in R$, a diferença entre $a\ e\ b$, denotada por $a - b$, é definida por $a - b = a + (-b)$;
9. Divisão: Se $a, b\ e\ c \in R\ b \neq 0$, o quociente de $a\ e\ b$ é definido por $1 = a.\frac{1}{a}$. (Flemming & Gonçalves, 2006, pp. 02 e 03).

Ainda neste capítulo, há um tópico sobre módulo de um número real, do qual apresenta sete propriedades, todas demonstradas.

Propriedades:
(i) $|x| < a \leftrightarrow -a < x < a$, onde $a > 0$.
(ii) $|x| > a \leftrightarrow x > a$ ou $x < -a$, onde $a > 0$.
(iii) Se a, b, $\in R$, então $|a.b| = |a|.|b|$.
(iv) Se a, b, $\in R$ e $\mathrm{b} \neq 0$, então $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.
(v) (Desigualdade Triangular) Se a, b, $\in R$, então $|a + b| \leq |a| + |b|$.
(vi) Se a, b, $\in R$, então $|a - b| \leq |a| + |b|$.
(vii) Se a, b, $\in R$, então $|a| - |b| \leq |a - b|$. (Flemming & Gonçalves, 2006, p. 05).

Foram propostos no texto três exercícios resolvidos, e para suas resoluções, foram usadas propriedades do valor absoluto. Um dos exemplos é o número 3, exposto a seguir.
3. Encontre os números reais que satisfaçam as seguintes desigualdades: (i) $|7\mathrm{x} - 2| < 4$.
Solução: aplicando a propriedade (i) de valor absoluto, temos:

$$-4 < 7x - 2 < 4$$
$$-4 + 2 < 7x - 2 + 2 < 4 + 2$$
[...]

Portanto, $\mathrm{x} \in (-\frac{2}{7}, \frac{6}{7})$. (Flemming & Goncalves, 2006, p. 12).

Por um lado, as autoras não fazem referência às equivalências entre as inequações, o que supomos ser essencial nesse contexto; por outro, apresentam as propriedades dos números reais de forma direta e, mais à frente, as utilizam em alguns exercícios resolvidos. Em geral, tais propriedades são essenciais para as manipulações algébricas e são aplicadas de forma mecânica, desvinculadas de sua gênese e de sua essencialidade.

Funções

A obra apresenta diversos tipos de funções, com ou sem seus respectivos gráficos, mas não faz uso de ideias de inequações (desigualdades, segundo as autoras). Sob o ponto de vista de interpretação da relação de ordem (por exemplo, $f(x) \leq f(a)$), as inequações são abarcadas no capítulo Aplicações da Derivada. De forma geral, as inequações podem ser retomadas no estudo das funções, desde encontrar o domínio, por meio de restrições, até a análise da variação de seus sinais, recorrendo aos esboços e análises gráficas ou a manipulações algébricas, mas isso não é apresentado nesse livro.

Lógica Matemática

Na página 2, temos algumas propriedades de relação de ordem (desigualdades, segundo as autoras) e a demonstração de uma delas. Aqui apresentamos a da propriedade (ii), em um contexto, por meio de implicações e conectivos lógicos (*Se... então*...):

Propriedade ii). (Se $a > b$ e $c > 0$, então $ac > bc$).

Se $a > b \overset{def}{\Longrightarrow} (a - b) > 0$. Usando iii) do Axioma de Ordem, temos $(a - b).c > 0$ ou $(ac - bc) > 0$ e finalmente, pela definição, $ac > bc$. (Flemming & Gonçalves, 2006, p. 5).

No restante da publicação, tanto a lógica matemática aparece em alguns enunciados de questões, exemplos, teoremas e definições, quanto os quantificadores existenciais, universais e os conectivos lógicos ("*e*" e o "*ou*", na maioria das vezes, na forma da língua materna).

O livro não apresenta um item específico para comentários a respeito de conceitos relacionados à lógica, o que nos leva a interpretar que as autoras consideram que os estudantes já estejam familiarizados com essa linguagem. É possível notar implicitamente sua presença, isto é, sem expor a terminologia L*ógica Matemática*, mas não há um tratamento específico, como é feito no capítulo inicial, dedicado aos Números Reais*.* Apesar de aparecer nessas propriedades e respectivas demonstrações, bem como no enunciado de alguns exercícios, esses conteúdos matemáticos, referentes à relação de implicação ou equivalência, infelizmente não estão presentes ao tratarem das inequações.

Resolução de Inequações

Consideramos que resolver uma inequação significa encontrar a forma mais simples de seu conjunto solução. O que envolve o emprego das propriedades do corpo ordenado dos números reais e a análise de equivalências entre as expressões encontradas, como fruto da aplicação de tais propriedades, isto é, abarca o emprego interligado dos conceitos de números reais e de lógica matemática.

A resolução de inequações aparece com mais frequência nos primeiros capítulos, como mostram os exemplos ii) e iii) que seguem. Notamos que não aparecem os sinais de equivalência em nenhum deles, o que aparenta pouco cuidado em relação às transformações que vão ocorrendo ao longo da resolução. Também não foi percebido a explicitação das propriedades dos números reais, exceto no contexto de módulo.

No segundo tópico, do capítulo de Números Reais, intitulado *"Desigualdades"*, as autoras definem o que é um número real maior ou menor que outro usando o Axioma de Ordem:

No conjunto dos números reais existe um subconjunto denominado de números positivos, tal que: (i) se $\mathbf{a} \in \mathbf{R}$, exatamente uma das três afirmações ocorre: $\mathbf{a} = \mathbf{0}$; $\mathbf{a}$ é positivo: $-\mathbf{a}$ é positivo; (ii) a soma de dois números positivos é positiva; (iii) o produto de dois números positivos é positivo. (Flemming & Gonçalves, 2006, p. 03).

Como aplicação do Axioma de Ordem as autoras enumeram várias propriedades que norteiam o estudo das expressões envolvendo os símbolos de maior que (>), ou menor que (<), demonstrando duas delas:

Sejam $\boldsymbol{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \boldsymbol{R}$.

(i) Se $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{b} > \boldsymbol{c}$, então $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{c}$.

(ii) Se $a > b$ e $\mathrm{c} > 0$, então $ac > b\mathrm{c}$.

(iii) Se $a > b$ e $\mathrm{c} > 0$, então $ac < b\mathrm{c}$.

(iv) Se $a > b$, então $a + c > b + c$ para todo real c.

(v) Se $a > b$ e $c > d$, então $a + c > b + d$.

(vi) Se $a > b > 0$ e $c > d > 0$, então $ac > bd$. (Flemming & Gonçalves, 2006, p. 04)

Com relação a essas propriedades, expomos um dos três exemplos que elas explanam o item (ii). Em sua resolução, não observamos a análise de equivalências, isto é, a lógica matemática, e nem a aplicação das propriedades dos números reais:

(ii) $7 < 5x + 3 \leq 9$

$7 - 3 < 5x + 3 - 3 \leq 9 - 3$

$4 < 5x \leq 6$

$\frac{4}{5} < x \leq \frac{6}{5}$

Portanto, $\left\{x \middle| \frac{4}{5} < x \leq 6/5\right\} = (\frac{4}{5}, \frac{6}{5}]$ é a solução, e graficamente (...).

(Flemming & Gonçalves, 2006, p. 10)

Segue mais um exemplo contendo a resolução de inequações, envolvendo módulo:

iii) $\left|\frac{3-2x}{2+x}\right| \leq 4, x \neq -2.$

$|3-2x| \leq 4|2+x|$

$9-12x+4x^2 \leq 16(4+4x+x^2)$

$9-12x+4x^2 \leq 64+64x+16x^2$

$-12x^2-76x-55 \leq 0$

[...] (Flemming & Gonçalves, 2006, p. 13).

Encontrando as raízes da equação

$$-12x^2-76x-55=0$$

temos a decomposição em fatores lineares para a inequação posta:

$$(x+\frac{5}{6})(x+\frac{11}{2}) \leq 0$$

Assim, podemos analisar as variações de sinais de acordo com as possibilidades de uma multiplicação, de dois fatores, ao final ser não positiva, isto é, neste caso:

$(x+\frac{5}{6}) \leq 0$ e $(x+\frac{11}{2}) \geq 0$ ou e $(x+\frac{5}{6}) \geq 0$ e $(x+\frac{11}{2}) \leq 0.$

Logo, temos como conjunto-solução: $\{x \epsilon R| -\frac{11}{2} \leq x \leq -\frac{5}{6}\}$.

Nesse exemplo observamos, na terceira linha, que ambos os termos foram elevados ao quadrado, o que pode ser feito, pois os dois lados são positivos, isso nos garante a equivalência entre as inequações. Caso não fossem ambos positivos, teríamos que impor restrições as quais devem ser levadas em consideração para encontrar o conjunto-solução. Assim, por causa dessa caracterização e por envolver a necessidade da combinação, na verdade a multiplicação de sinais, nós o selecionamos para ser apresentado.

Reflexões finais

Segundo Alvarenga (2012), uma reflexão sobre o ensino e a aprendizagem desses tópicos proporciona uma oportunidade para observar como os autores compreendem e trabalham com o conceito e as resoluções de inequações. Consequentemente, podemos, por meio dessas observações, propor um enfoque metodológico de ensino que vise maximizar a aprendizagem não somente de inequações, mas também dos conteúdos inter-relacionados.

Vale ressaltar que a obra evoluiu, da primeira edição para a sexta, em termos metodológicos, indicando *softwares* para o ensino e a aprendizagem, enfatizando a interdisciplinaridade do Cálculo com outras áreas de formação, além da matemática, como as diversas engenharias e até mesmo na área biológica. Porém, no capítulo que trata de inequações (desigualdades, segundo as autoras) nada foi alterado desde a primeira edição.

Nesse sentido, o livro é tradicional. Mesmo destacando esse tema, não o abarca com o conjunto total de conceitos e ferramentas matemáticas específicas e necessárias para a total compreensão de inequações. Concluímos que essa publicação, por ser endereçada ao ensino superior e apresentar um item específico para esse conteúdo matemático, trata o tema de forma superficial e não inter-relaciona os conteúdos. Assim, as autoras perdem a oportunidade de fornecer aos leitores maior desenvolvimento procedimental e interdisciplinar dentro da própria matemática.

Referências bibliográficas

Alvarenga, K. B. (2012). O Ensino e Aprendizagem Concatenado de Inequações, o corpo dos reais e lógica matemática: um panorama*. Anais do VI EDUCON*. São Cristóvão: Sergipe.

Bardin, L. (2009). *Análise de Conteúdo*. Lisboa, Portugal: Edições 70.

Bazzini, L., & Tsamir, P. (2001) Connections between theory and research findings: the case of inequalities. Em *Anais of CERME 3*. European Society for Research in Mathematics Education, Bellaria, Italia. Acessado em: 05 de abril de 2010, em: http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG6/TG6_bazzini_cerme3.pdf

Fernández, S. L., & Delgadillo, E. M. (2015). Las Inecuaciones: Una Mirada Desde El Espacio De Trabajo Matemático. Em R. Flores, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 28. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, México.

Flemming, D. M., & Gonçalves, M. B. (2006). *Cálculo A- Funções, Limite, Derivação, Integração.* Vol. 1. 6ª edição. São Paulo: Makron.

Silva, T.T. P., & Otero-Garcia, S. C. (2011). A Hermenêutica de Profundidade e suas Possibilidades Para a Educação Matemática. Em *Anais do V SIPEM - Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.* Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM, Petrópolis, Rio de Janeiro.

Santos, M. L., & Alvarenga, K. B. (2014a) Minas Gerais e Paraná: Uma Reflexão Curricular Sobre a Abordagem Matemática. Em *III Seminário Nacional de Alfabetização e Letramento.* Itabaiana. CD do III SENAL. Universidade Federal de Sergipe, Aracaju: SE.

Santos, M. L., & Alvarenga, K. B. (2014b). Uma Análise de Livros Didáticos: alguns conteúdos matemáticos. Em *Anais do VIII EDUCON*. Universidade Federal de Sergipe, Aracaju, SE.

Silva, T. T. P., & Garnica, A. V. M. A. (2011). Hermenêutica da Profundidade: possibilidades metodológicas. Em *Anais EBRAPEM* – Vol. 1, n. 1, UEPB, Campina Grande, PB. Acessado em: 05 de abril de 2015, em:

http://www.editorarealize.com.br/revistas/ebrapem/trabalhos/7c830ed9bbcd49dfe212893134e7bee2(1).pdf

Thompson, J. B. (1995). *Ideologia e Cultura Moderna: Teoria social crítica na era dos meios de comunicação de massa.* Petrópolis: Vozes.

Oliveira, F. D. (2008). *Análise de Textos Didáticos: Três Estudos*. Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Rio Claro SP.

A IMPLEMENTAÇÃO DA MATEMÁTICA MODERNA NAS SÉRIES INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL DAS ESCOLAS PÚBLICAS DE BRASÍLIA

Rosália Policarpo Fagundes de Carvalho, Aparecida Rodrigues Silva Duarte
Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil)
rosaliapolicarpo@yahoo.com.br, aparecida.duarte6@gmail.com

RESUMO: O trabalho analisa como propostas do Movimento da Matemática Moderna foram implementadas nas séries iniciais das escolas públicas de Brasília-Distrito Federal-Brasil. Especificamente, procura-se identificar vestígios da Matemática Moderna na Aritmética das séries iniciais de Brasília-Distrito Federal. O aporte teórico-metodológico é construído na perspectiva da História Cultural. As informações foram coletadas a partir do Currículo de Matemática publicado em 1970 e a entrevista da professora Olinda Lôbo, uma das professoras pioneiras de Brasília. Os documentos analisados apontam que houve apropriação das ideias difundidas pelo Movimento da Matemática Moderna, cujo conteúdo, decorrente de uma matemática tradicional, passa a apresentar uma nova linguagem com ênfase na teoria de conjuntos.

Palavras chave: matemática moderna, história cultural, aritmética

ABSTRACT: This paper analyzes how proposals of the Modern Mathematics Movement were implemented in the initial series of the public schools of Brasília Federal District, Brazil. Specifically, we attempt to identify remains of Modern Mathematics in Arithmetic of the initial series of Brasilia Federal District. The theoretical-methodological contribution is built from the perspective of Cultural History. The data were collected from the Mathematics Curriculum published in 1970 and the interview to Professor Olinda Lôbo, one of the pioneer teachers of Brasília. The documents analyzed focus on the appropriation of the ideas spread by the Modern Mathematics Movement, whose content, derived from a traditional mathematics, presents a new language, with emphasis in the theory of sets.

Key words: modern mathematics, cultural history, arithmetic

Introdução

A construção de Brasília iniciou-se em meados de 1956 e em 21 de abril de 1960, data de sua inauguração, passou a ser a Capital Federal do Brasil. Brasília estava se constituindo, na visão dos gestores e da população, como uma capital "moderna" e esse sentimento reverberava na educação. Devido ao processo de transferência da capital do Brasil, da cidade do Rio de Janeiro para Brasília, houve necessidade de receber professores de todo o país. Dentre eles, a professora Olinda da Rocha Lôbo, proveniente da cidade de Formosa, estado de Goiás, que desempenhou, no Distrito Federal, funções fundamentais nas séries iniciais do ensino elementar, denominadas naquela época como ensino primário.

Em 1965, a necessidade de inserção da nova matemática de base estruturalista nas escolas primárias de Brasília acarretou a realização de encontros, reuniões e eventos na tentativa de compreender a nova proposta educacional e romper com práticas tradicionais nesse nível de ensino. A professora Olinda Lôbo teve relevante papel na divulgação do Movimento da Matemática Moderna (MMM) na capital do Brasil. Seu primeiro contato com a Matemática Moderna para crianças ocorreu quando a professora participou de um encontro promovido pelo professor de matemática Osvaldo Sangiorgi, principal interlocutor brasileiro do MMM no Brasil (Lôbo, 2009).

Assim, este artigo tem como objetivo analisar como os conteúdos de Matemática Moderna foram inseridos no ensino de aritmética nas séries iniciais das escolas públicas de Brasília-Distrito Federal-Brasil, no período compreendido entre 1965 e 1970.

Para alcançar nosso objetivo, visitamos o Grupo de Pesquisas em Educação Matemática do Distrito Federal (COMPASSODF), o qual detém o arquivo pessoal da professora Olinda Lôbo. Desse acervo discorremos sobre entrevistas da professora Olinda Lôbo e dos professores Roberto de Araújo Lima e Kleber Farias Pinto concedidas ao Grupo COMPASSODF. Descrevemos também sobre o Currículo de 1970, intitulado “Desenvolvendo o Programa de Matemática na Escola Primária – 2ª Fase (3ª, 4ª e 5ª séries)”. Esse documento foi elaborado sob a supervisão da professora Olinda Lôbo.

O aporte teórico-metodológico é construído na perspectiva da História Cultural, mais especificamente, com base no conceito de *apropriação* definido por Chartier como aquele que “tem por objetivo uma história social das interpretações, remetidas para as suas determinações fundamentais (que são sociais, institucionais, culturais) e inscritas nas práticas específicas que produzem” (2002, p. 26); e *cultura escolar*, de Julia, que a descreve como “um conjunto de normas que definem conhecimentos a ensinar e condutas a inculcar, e um conjunto de práticas que permitem a transmissão desses conhecimentos e a incorporação desses comportamentos” (2001, p.10).

A implementação da Matemática Moderna nas séries iniciais das escolas públicas de Brasília

No Brasil, o MMM surgiu com ideias modernizadoras advindas dos países da Europa e dos Estados Unidos. Essas ideias foram difundidas nos congressos de ensino da matemática no Brasil nas décadas de 1950 e 1960. No II Congresso realizado em Porto Alegre em 1959, assim como no III Congresso realizado no Rio de Janeiro em 1959, as referências ao Movimento foram caracterizadas como pontuais para alteração de programas e metodologias de ensino de conteúdos tradicionais. No IV Congresso, em Belém-PA em 1962, ocorreram muitos debates e a incorporação de conceitos de Matemática Moderna no ensino secundário foi tema central das discussões (Valente, 2008).

O MMM buscava rever os conteúdos matemáticos e sua organização enfatizando o currículo; abordava a Teoria dos Conjuntos e a lógica matemática; valorizava a linguagem e o rigor matemático. O uso dos diagramas de Venn foi recorrente para a ilustração de relações e operações de conjuntos. Foi dada ênfase à introdução de contagem em diferentes bases. Procurava, igualmente, mudar os métodos de ensino então praticados e a unificação da Matemática, por meio de conceitos unificadores como as estruturas matemáticas (Guimarães, 2007). O auge da disseminação do MMM no Brasil ocorreu em 1970, quando o discurso dos reformadores valorizava a estrutura matemática e sua adequação às necessidades sociais, o que acarretou significativas modificações do ensino das séries iniciais (Búrigo, 1989).

Em entrevista concedida ao COMPASSODF, os professores Roberto de Araújo Lima e Kleber Farias Pinto, pioneiros da educação do Distrito Federal, afirmaram que a instituição da Matemática Moderna no ensino médio em Brasília teve início em 1964, após o IV Congresso, no qual foi divulgada a ideia de lançar livros de Matemática Moderna. Não houve participação de professores de Brasília-DF naquele Congresso, no entanto, Osvaldo Sangiorgi foi a Brasília fazer propaganda dos seus livros.

O grupo de professores do Distrito Federal que trabalhava com matemática começou a estudar e aplicar os livros de Sangiorgi, tanto no ensino secundário quanto no primário. (COMPASSODF, 2009). De acordo com os documentos analisados, a implementação da Matemática Moderna também foi discutida internamente pela Coordenação de Educação Primária de Brasília, cuja direção estava a cargo da professora Olinda Lôbo. Em 1965, houve debates internos e estudos acerca do tema em pauta e foram realizados encontros com professores para discutir sobre a Matemática Moderna. Em um dos seus artigos publicados na revista Coordenação do Ensino Primário – CEP, Olinda Lôbo afirmou que “Em 1965, houve uma atualização dos conteúdos, sendo incluída a introdução da Teoria de Conjuntos” (Lôbo, 1970, p. 37). Em 1966, os professores participaram de um seminário de quinze dias, em regime de tempo integral, sobre Matemática Moderna. Para este trabalho de preparação, a Coordenação de Educação Primária também contou com a colaboração dos professores Roberto de Araújo Lima e Kleber Farias Pinto. (Governo do Distrito Federal, 1970).

A Matemática Moderna prescrita no Currículo de 1970

As discussões sobre a implementação do MMM em voga em vários países também reverberaram no Brasil, inclusive no interior do país. Desse modo, em 1965, foi criada uma comissão especial para a reestruturação do currículo de matemática do ensino primário do Distrito Federal. Seus integrantes foram Antonietta Apparecida Vaiano Braga, Dulce Guimarães, Eunice Nogueira Veloso, Geysa de Freitas Mendonça, Inês Maria de Sampaio, Ingesorg Strake, Ilma Teixeira, Lenã Caetano Ribas, Maria Auxiliadora Passos do Carmo, Olinda da Rocha Lôbo e Rita Maria de Sampaio Carvalho. A professora Olinda Lôbo supervisionou o trabalho da Comissão. Esse currículo foi publicado em 1970 sob a denominação “Desenvolvendo o programa de matemática na escola primária” e encontra-se dividido em duas fases. Embora registrada a existência da elaboração de uma primeira fase desse Currículo de 1970, em nossas buscas em arquivos e bibliotecas não encontramos esse documento. Assim, neste artigo, somente tratamos do Currículo referente à 2ª fase, que se encontra organizado em tópicos assim denominados: *Introdução*, *Objetivos gerais no ensino da matemática*, *Conteúdos a serem desenvolvidos*, *Carta de apresentação aos professores*, *Sugestões de atividades* e *Bibliografia consultada*.

- Na *Introdução*, os autores justificam a reestruturação do Currículo de 1962 informando que o texto é resultado de vários anos de estudos, experimentação e debates com os professores. Consideram como pontos básicos: a necessidade de uma dosagem de conteúdos, os conhecimentos psicológicos – principalmente no que se refere ao crescimento da criança, às suas necessidades básicas; os objetivos matemáticos e sociais; descoberta pela criança durante as aprendizagens matemáticas; conhecimento de seus objetivos, pelo professor; prontidão do aluno não só para o ensino em geral, mas para cada processo a ser ensinado; a graduação dos conteúdos e a integração do ensino da matemática com outras disciplinas (Governo do Distrito Federal, 1970).

Em seguida, o documento em questão aponta como *Objetivos gerais no ensino da Matemática* os seguintes itens:

- Promover uma variedade de experiências quantitativas que assegurem ao aluno o desenvolvimento do raciocínio e a aplicação efetiva dos processos matemáticos, dentro e fora da escola;
- Desenvolver no aluno atitudes, conhecimentos e habilidades que o levarão a efetuar, com compreensão, os processos manipulativos;
- Levar o aluno a apreciar a matemática pelo seu valor prático e por sua contribuição ao desenvolvimento das ciências (Governo do Distrito Federal, 1970, s/p).

Logo após, são descritos os conteúdos a serem trabalhados nas 3ª, 4ª e 5ª séries do ensino primário. Essa descrição, intitulada *Conteúdo a ser desenvolvido – 2ª fase*, ocupa seis páginas do Currículo de 1970 e está disposta em três colunas, uma para cada série. O documento também indica o número da página destinada para cada assunto tratado igualmente em cada série, a saber: conjunto e sistema de numeração decimal; operações fundamentais; frações; números decimais; sistema legal de unidade de medida e geometria.

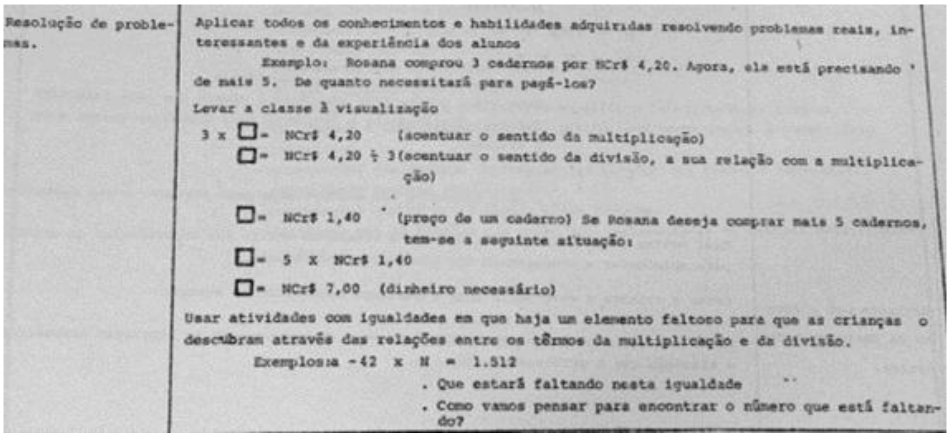
O que pudemos observar é que, para todas as séries, o primeiro assunto a ser tratado, como a própria designação do assunto indica, qual seja, *Conjunto e sistema de numeração decimal*, é justamente a introdução da teoria dos conjuntos que, sendo apresentada na terceira série, é retomada nas demais, com um grau de aprofundamento cada vez maior. Assim, para a 3ª série, a recomendação é primeiramente descrever e representar conjuntos; já a 4ª série trata da nomeação, tipos de conjuntos e o símbolo de pertinência e, para a 5ª série, a correspondência, que acreditamos ser a correspondência biunívoca, a simbologia utilizada para conjuntos e subconjuntos e intersecção de conjuntos. Quando se trata do assunto *Operações fundamentais,* o documento propõe trabalhar as propriedades da adição e subtração na 3ª série e as quatro operações na quarta série. Há uma consolidação dos conhecimentos adquiridos sobre as quatro operações na quinta série, incluindo revisão das propriedades.

A modernidade que se pode notar no tópico em que os autores arrolam os conteúdos a serem desenvolvidos é a introdução da teoria dos conjuntos no primário; a diferenciação entre numeral e número; o uso de outros sistemas de numeração, além da base 10 e a necessidade do estudo das propriedades fundamentais das operações.

Antes de apresentar sugestões de atividades para os docentes, dirigindo-se aos professores da rede pública do Distrito Federal, a professora Anna Bernardes da Silveira Rocha asseverou que aquele Currículo era um texto orientador, com a pretensão de esclarecer possíveis dúvidas dos professores em relação ao ensino de Matemática, ou seja, um guia, uma fonte de consulta e de sugestões enriquecedoras para suas práticas escolares. Mais ainda, enfatizou que a Supervisão de Matemática, embora procurasse registrar o que havia de melhor e de mais atualizado para o ensino primário, cabia aos professores fazer as adaptações necessárias, dando-lhes flexibilidade para alterá-lo de forma a promover para o aluno uma aprendizagem cada vez mais eficiente (Governo do Distrito Federal, 1970).

O tópico denominado *Sugestões de Atividades* contém atividades descritas, objetivos a serem alcançados para cada conteúdo apresentado e lembretes ao professor. Por exemplo, nas sugestões de Atividades para a 3ª série é proposto identificar e representar conjuntos de várias maneiras: pela observação dos elementos que constituem o conjunto; pela nomeação dos elementos que constituem o conjunto e pela indicação de uma propriedade comum a seus elementos. Também é recomendado o uso da simbologia na relação entre conjuntos, tais como: igual =, maior >, menor <, diferente ≠.

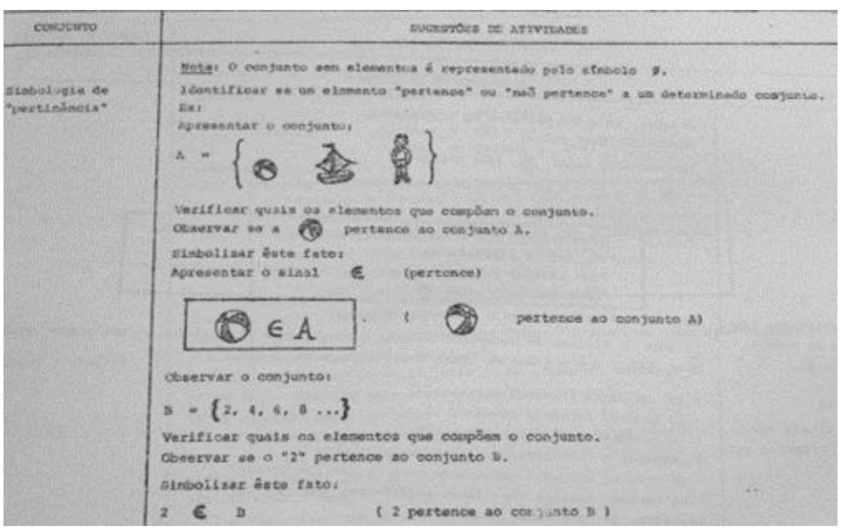
Para iniciar o trabalho das Operações Fundamentais na terceira série, é recomendado trabalhar com o aluno as propriedades comutativa, associativa e dissociativa, sempre promovendo situações em que o aluno possa verbalizar os conceitos adquiridos. Por meio da resolução de problemas é proposto que o aluno resolva problemas do cotidiano, fazendo uso de "quadradinhos", para destacar o elemento desconhecido na equação:



Resolução de proble- mas.	Aplicar todos os conhecimentos e habilidades adquiridas resolvendo problemas reais, in- teressantes e da experiência dos alunos Exemplo: Rosana comprou 3 cadernos por NCr$ 4,20. Agora, ela está precisando de mais 5. De quanto necessitará para pagá-los? Levar a classe à visualização 3 x ☐ = NCr$ 4,20 (acentuar o sentido da multiplicação) ☐ = NCr$ 4,20 ÷ 3 (acentuar o sentido da divisão, a sua relação com a multiplica- ção) ☐ = NCr$ 1,40 (preço de um caderno) Se Rosana deseja comprar mais 5 cadernos, tem-se a seguinte situação: ☐ = 5 x NCr$ 1,40 ☐ = NCr$ 7,00 (dinheiro necessário) Usar atividades com igualdades em que haja um elemento faltoso para que as crianças o descubram através das relações entre os têrmos da multiplicação e da divisão. Exemplos: a -42 x N = 1.512 . Que estará faltando nesta igualdade . Como vamos pensar para encontrar o número que está faltan- do?

Figura 1. Resolução de Problemas. Fonte: Governo do Distrito Federal (1970, p.37).

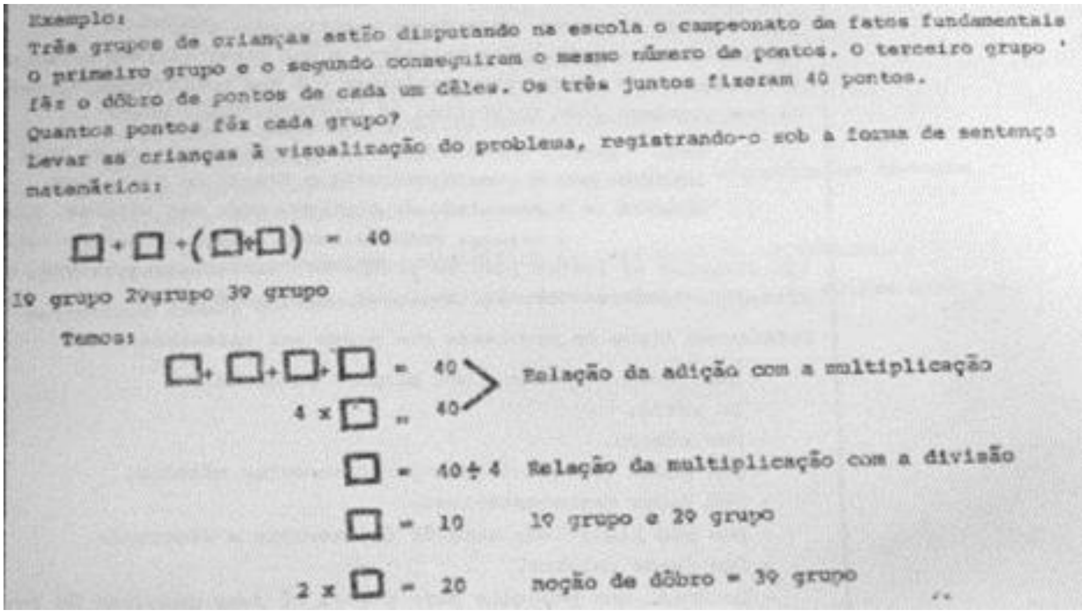
No tópico As *Sugestões de Atividades*, para a quarta série do ensino primário, para se trabalhar Conjuntos e Sistema de Numeração Decimal, são apresentadas várias atividades explorando a nomeação de conjuntos, os tipos de conjuntos e além das simbologias já estudadas anteriormente: igual =, diferente ≠, maior que >, menor que <, são introduzidos os sinais de União ∪ de "pertinência ∈", como nos mostra a figura 02:



CONJUNTO	SUGESTÕES DE ATIVIDADES
Simbologia de "pertinência"	Nota: O conjunto sem elementos é representado pelo símbolo ∅. Identificar se um elemento "pertence" ou "não pertence" a um determinado conjunto. Ex: Apresentar o conjunto: A = { } Verificar quais os elementos que compõem o conjunto. Observar se a pertence ao conjunto A. Simbolizar êste fato: Apresentar o sinal ∈ (pertence) ∈ A (pertence ao conjunto A) Observar o conjunto: B = {2, 4, 6, 8 ...} Verificar quais os elementos que compõem o conjunto. Observar se o "2" pertence ao conjunto B. Simbolizar êste fato: 2 ∈ B (2 pertence ao conjunto B)

Figura 2. Simbologia e Pertinência. Fonte: Governo do Distrito Federal (1970, p.04)

O documento também traz atividades para se trabalhar "Número e numeral" levando o aluno a perceber as leis, os princípios e convenções que regem o Sistema de Numeração Decimal. Em relação às operações fundamentais é recomendado rever as propriedades da adição e subtração já estudadas na 3ª série e ampliar os conhecimentos das propriedades introduzindo a propriedade de fechamento. Ao se propor atividades com a resolução de problemas é recomendado resolver problemas reais e usar muitas atividades da sala de aula e situações dentro das experiências para aprofundar a compreensão dos processos fundamentais. Para registrar a situação que o problema descreve é sugerido que use a linguagem matemática representada pela sentença matemática como nos mostra a figura 03:



Exemplo:
Três grupos de crianças estão disputando na escola o campeonato de fatos fundamentais o primeiro grupo e o segundo conseguiram o mesmo número de pontos. O terceiro grupo fêz o dôbro de pontos de cada um dêles. Os três juntos fizeram 40 pontos.
Quantos pontos fêz cada grupo?
Levar as crianças à visualização do problema, registrando-o sob a forma de sentença matemática:

$\square + \square + (\square + \square) = 40$

1º grupo 2º grupo 3º grupo

Temos:

$\square + \square + \square + \square = 40$ Relação da adição com a multiplicação
$4 \times \square = 40$

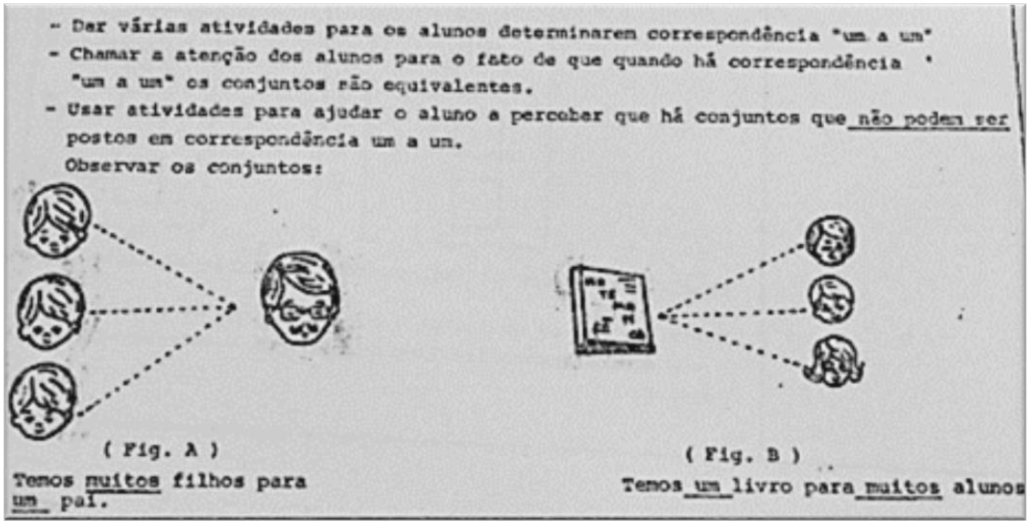
$\square = 40 \div 4$ Relação da multiplicação com a divisão

$\square = 10$ 1º grupo e 2º grupo

$2 \times \square = 20$ noção de dôbro = 3º grupo

Figura 3. Sentença Matemática. Fonte: Governo do Distrito Federal (1970, p.34)

Para a quinta série, em relação a Conjuntos, foram sugeridas atividades para a compreensão de conjuntos equivalentes, inclusive trazendo contraexemplos:



- Dar várias atividades para os alunos determinarem correspondência "um a um"
- Chamar a atenção dos alunos para o fato de que quando há correspondência "um a um" os conjuntos são equivalentes.
- Usar atividades para ajudar o aluno a perceber que há conjuntos que não podem ser postos em correspondência um a um.

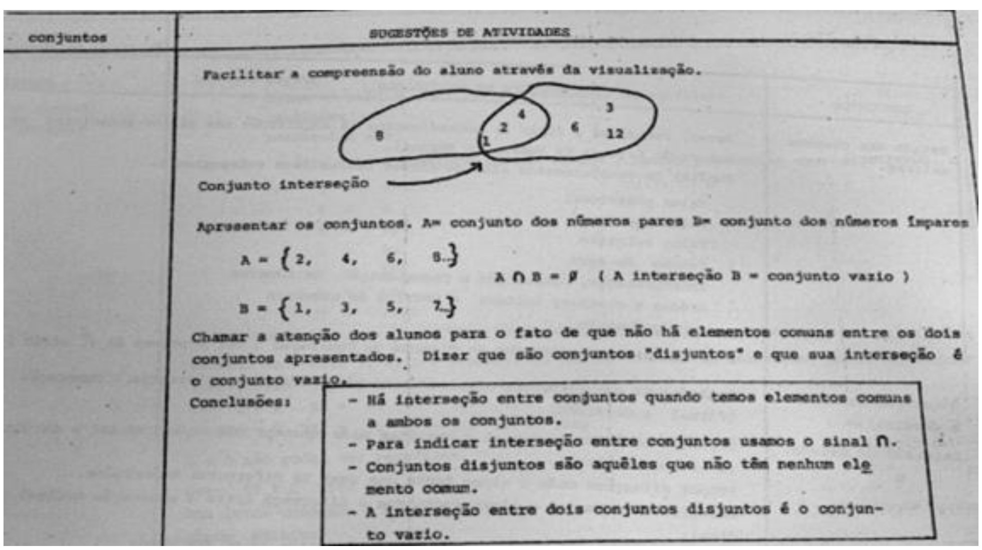
Observar os conjuntos:

(Fig. A)
Temos muitos filhos para um pai.

(Fig. B)
Temos um livro para muitos alunos

Figura 4. Sentença Matemática. Fonte: Governo do Distrito Federal (1970, p.02)

Além das simbologias já estudadas anteriormente, nas sugestões de atividades para essa série são introduzidos os símbolos Contém ⊃, está contido ⊂ e Interseção ∩.



conjuntos	SUGESTÕES DE ATIVIDADES
	Facilitar a compreensão do aluno através da visualização. Conjunto interseção Apresentar os conjuntos. A= conjunto dos números pares B= conjunto dos números ímpares A = {2, 4, 6, 8..} B = {1, 3, 5, 7..} A ∩ B = ∅ (A interseção B = conjunto vazio) Chamar a atenção dos alunos para o fato de que não há elementos comuns entre os dois conjuntos apresentados. Dizer que são conjuntos "disjuntos" e que sua interseção é o conjunto vazio. Conclusões: - Há interseção entre conjuntos quando temos elementos comuns a ambos os conjuntos. - Para indicar interseção entre conjuntos usamos o sinal ∩. - Conjuntos disjuntos são aquêles que não têm nenhum elemento comum. - A interseção entre dois conjuntos disjuntos é o conjunto vazio.

Figura 5. Sentença Matemática. Fonte: Governo do Distrito Federal (1970, p.07)

Em relação ao conteúdo do Sistema de Numeração Decimal são sugeridas atividades que trabalhem a base 60, assim como rever os conhecimentos que o aluno possui sobre a base 10, para depois introduzir o Sistema de Numeração binária (base 2), ressaltando a importância desse sistema nas máquinas eletrônicas. É sugerido, também, um aprofundamento nos estudos das quatro operações usando números maiores, pesquisando e discutindo sobre o uso das operações na vida diária, revisando as propriedades das operações e aplicando os conhecimentos na verificação das operações, em expressões aritméticas e em sentenças matemáticas.

Ao finalizar o Currículo de 1970, os autores arrolam a *Bibliografia consultada* para a sua elaboração. Foram citadas obras de diversos autores reconhecidamente defensores da inclusão de métodos e conceitos relativos à Matemática Moderna, tais como, Lucienne Felix, Scipione di Piero Neto, Norma Cunha Ozorio, Rizza de A. Porto e Osvaldo Sangiorgi.

Considerações finais

A discussão acerca da implementação de conteúdos da Matemática Moderna na capital do Brasil é relevante no sentido de compreender como uma cidade que acabara de ser inaugurada se apropriou de discussões que estavam em evidência mundialmente na década de 50, sendo que no Brasil, essa proposta chegou primeiramente aos grandes centros nos anos 60 e lentamente foi difundida nas escolas mais longínquas (Pinto, 2005). Os documentos analisados apontam que houve apropriação das ideias difundidas pelo Movimento da Matemática Moderna para o ensino de aritmética nas escolas primárias de Brasília, o qual passou a apresentar uma nova linguagem com ênfase na teoria de conjuntos.

Referências bibliográficas

Búrigo. E. Z. (1989). *Movimento da matemática moderna no Brasil*: *estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60.* Dissertação de Mestrado não publicada. Porto Alegre, RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Chartier, R. (2002). *A história cultural: entre práticas e representações*. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil.

Governo do Distrito Federal. (1970). *Desenvolvendo o programa de matemática na escola primária – 2ª Fase.* Fundação Educacional do Distrito Federal. Brasília, DF: Departamento de Ensino Elementar Brasil.

Guimarães, H.M. (2007). Por uma matemática nova nas escolas secundárias: perspectivas e orientações curriculares da matemática moderna. In: Matos, J. M., Valente, W. R. (Org.). *A Matemática moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: primeiros Estudos* (pp. 21-45), São Paulo: Da Vinci/CAPES.

Julia, D. (2001). A cultura escolar como objeto histórico. *Revista Brasileira de História da Educação 1(1)*, 9-43.

Lima, R. A. (2014). A. *Entrevista concedida às pesquisadoras do Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática* – COMPASSODF.

Lobo, O. R. (1970). Brasília: seus 10 anos e o ensino da Matemática na Escola Primária. In: Brasília 10 anos de Educação. GDF. Órgão de divulgação do Núcleo de Pesquisa da Coordenação de Educação Primária. Coordenação de Educação Primária. *Revista CEP* Número Especial, 35-38.

Lobo, O. R. (2009). *Entrevista concedida às pesquisadoras do Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática* – COMPASSODF.

Pinto, N. B. (2005). Marcas históricas moderna no Brasil. *Revista Diálogo Educacional*, *5(16)*, 25-38.

PINTO, K. F. (2012). *Entrevista concedida às pesquisadoras do Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática* – COMPASSODF.

Valente, W. R. (2008). Osvaldo Sangiorgi e o movimento da matemática moderna no Brasil. *Revista Diálogo Educacional*, 8*(25),* 583-613.

LA ESPECIFICIDAD DE LA ANSIEDAD MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES MEXICANOS DE BACHILERATO

Román Serrano Clemente, José Gabriel Sánchez Ruíz
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Universidad Nacional Autónoma de México. (México)
rosec1008@hotmail.com, josegsr@unam.mx

RESUMEN: En el ámbito de la educación matemática, desde los años cincuenta, toma relevancia el afecto en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas. Varios autores ponen de manifiesto que la ansiedad es un factor que está presente en la dimensión afectiva. En diversos estudios se ha examinado la relación entre ansiedad matemática y rendimiento en matemáticas concluyendo que un alto nivel de ansiedad matemática está relacionada con el bajo rendimiento en dicha asignatura. En este trabajo se proporciona evidencia acerca de que estudiantes mexicanos de Bachillerato pueden padecer ansiedad hacia las matemáticas sin tener ansiedad social. Se empleó la MARS-a de Suinn, que mide los niveles de ansiedad matemática, así como el LSAS de Liewobitz, que mide el nivel de fobia social.

Palabras clave: ansiedad social, ansiedad matemática, rendimiento académico

ABSTRACT: From the fifties, in the mathematical education environment, the affection has been a relevant feeling in the mathematics teaching and learning process. Several authors state that anxiety is a factor that takes part of the affective dimension. The relationship between mathematical anxiety and students' performance in mathematics has been study for years, getting to the conclusion that a high level of mathematical anxiety is closely related to the students' low performance in mathematics. This paper provides evidence about Mexican senior high students who can suffer from anxiety towards mathematics without suffering from social anxiety. The "MARS-a" matrix (according to Suinn) was used to measure mathematics anxiety levels, and the "LSAS "(according to Liewobitz) was used to measure the level of social phobia, as well.

Key words: social anxiety, mathematical anxiety, academic performance

En el marco de la deserción escolar a causa del bajo rendimiento frecuentemente prevalecen preguntas como ¿qué estudiantes son más susceptibles a tener bajo rendimiento académico? ¿Quiénes tienen mayores posibilidades de mostrar bajo rendimiento en el área de Matemáticas? y si ¿la ansiedad social que presentan incide de manera significativa en la ansiedad hacia las Matemáticas? Entre las causas posibles se tienen los perfiles cognitivos del estudiante, el papel del docente y los perfiles emocionales, entre otros. Entre los perfiles emocionales asociados al aprovechamiento de los estudiantes se encuentran la ansiedad, el agrado y la utilidad. En PISA 2012, se menciona que la ansiedad está íntimamente relacionada con el rendimiento en Matemáticas y que influye de forma desfavorable en el concepto negativo que el estudiante tiene sobre sí mismo (baja autoestima), baja confianza en las propias posibilidades y un alto grado de ansiedad.

Este trabajo se centra en uno de los principales factores afectivos que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas: la ansiedad y, en particular, analizándolo como constructo específico e independiente de otros factores sociales.

Un estado ansioso intenso provoca que un estudiante se altere fácilmente por situaciones que pasa en su vida diaria y de manera significante en la vida escolar. Algunos estudiantes sufren fobia social, referente a un miedo exagerado y constante a actuar de modo humillante o desconcertante en situaciones o actividades sociales. Un importante número de alumnos a quienes se les diagnostica fobia social cumplen también con los criterios de otros trastornos de ansiedad y depresión (Last, 1991). En la fobia social se presenta hipersensibilidad a la crítica, a la evaluación negativa o al rechazo por parte de los demás.

Los sentimientos de bajo logro personal reducen el rendimiento académico, lo que coloca al alumno en una situación de alto riesgo de bajo rendimiento y de fracaso en la escuela. La designación de estudiante en riesgo refleja la situación de que algunos estudiantes están predispuestos a experimentar problemas tanto en el rendimiento en la escuela como en sus vivencias personales y sociales (Johnson, 1997).

Caballero, Guerrero, Blanco y Piedehierro (2009) manifiestan que el dominio afectivo influye en los procesos cognitivos implicados en la resolución de tareas matemáticas.

Existe evidencia de que la ansiedad impide un desarrollo eficaz del aprendizaje. Nortes Checa y Martínez – Artero (1996) afirman que un nivel alto de ansiedad matemática inhibe el rendimiento, ya que aparece un factor que interrumpe los procesos implicados en las habilidades y destrezas necesarias para poner en funcionamiento la solución buscada. De este modo, la ansiedad matemática influye en la resolución de tareas y, por tanto, en el rendimiento matemático de los estudiantes (Iriarte, 2013, Monje, 2012 y Pérez, 2009).

Los altos índices de fracaso escolar en el área de matemáticas exigen el estudio de la influencia de los factores afectivos y emocionales en el aprendizaje matemático, ya que pueden explicar la ansiedad que siente el alumno ante la resolución de problemas, su sensación de malestar, de frustración, de inseguridad, el bajo autoconcepto que experimenta, etc., que frecuentemente, le impiden afrontar con éxito y eficacia las tareas matemáticas. (Gil, Blanco y Guerrero, 2005, p.27)

Guerrero, Blanco y Vicente (2002) explican que cuando un alumno está ansioso interpreta los sucesos, en este caso la tarea matemática, como amenazante y peligrosa creando un circuito de retroalimentación negativa entre sus respuesta cognitivas, con pensamientos del tipo “es muy difícil”, “no voy a entenderlo”, entre otros, y sus respuestas afectivas, caracterizadas por sentimientos de impotencia, fracaso, miedo, irritabilidad, tensión muscular, sudoración, etc.

Asimismo, hay estudios acerca de la influencia de la ansiedad sobre las actitudes negativas hacia las matemáticas (Sánchez, Segovia y Miñan, 2011).

La ansiedad se puede estudiar desde diferentes perspectivas, por ejemplo, como característica de la personalidad (ansiedad como propiedad, ansiedad rasgo) o como respuesta emocional (ansiedad circunstancial, ansiedad estado).

Spielberger (1966, 1972, 1989) refiere la diferencia de la ansiedad como estado emocional y rasgo de personalidad y bajo estas diferencias se propone la Teoría de Ansiedad Estado – Rasgo (Cattell y Scheier, 1961).

La ansiedad se define como un estado emocional desagradable asociado con cambios psicofisiológicos como respuesta a conflictos intrapsíquicos. En contraste, en el miedo, el peligro o amenaza no es real. También se define como un estado de aprehensión, desasosiego y miedo ante la representación de algún peligro o amenaza de carácter más intrapsíquico que externo (Martí, 2002).

La ansiedad matemática es un estado afectivo que se caracteriza por la ausencia de confort que puede experimentar un individuo en situaciones relacionadas con las matemáticas tanto de su vida cotidiana como académica, y que se manifiesta mediante una serie de respuestas tanto fisiológicas como emocionales (Pérez–Tyteca, 2011). A pesar de que el estudio sobre la ansiedad hacia las matemáticas se inició hace más de 40 años sigue siendo un tema de plena actualidad. Sin embargo, son pocos los estudios realizados en México y menos aquellos en donde se analizan los efectos de la ansiedad Matemática en estudiantes de Bachillerato y su relación con el aprovechamiento académico. Es esta investigación se pretende dar respuesta a las siguientes preguntas: ¿Existe relación entre la ansiedad hacia las matemáticas y la ansiedad social? ¿La ansiedad matemática incide de manera significativa en el rendimiento académico en matemáticas de los estudiantes?

Por tanto, el objetivo principal de esta investigación es analizar la ansiedad a las matemáticas y su relación con la ansiedad social en estudiantes mexicanos que estudian el Bachillerato y comprobar si los alumnos que tienen altos niveles de ansiedad en matemáticas son también ansiosos en contextos sociales en general. Con esto se aportaría evidencia de una especificidad de la ansiedad hacia las matemáticas.

Método

Participantes:

Cuarenta y cuatro alumnos de ambos géneros que estudiaban estadística al momento del estudio con edades comprendidas entre los 17 y 19 años de edad. Los participantes pertenecían a un Bachillerato de la ciudad de Puebla de México.

Instrumentos:

Se utilizó el instrumento The Mathematics Anxiety Rating Scale versión corta (MARS– a, Richardson y Suinn, 1972) de 30 ítems tipo Likert de 5-puntos: Nada en absoluto, Un poco, Bastante, Mucho, Muchísimo. Un ejemplo de ítem de esta escala, es el presentado en el número 20 que dice "Para mí, aprobar un examen es como si me tocase la lotería". También se usó la Liebowitz Social Anxiety Scale-self Report (LSAS; Liewobitz, 1992), que mide el nivel de ansiedad social a través del temor o evitación de situaciones diversas. Es un instrumento que consta de 24 ítems que evalúan, el temor o ansiedad por una parte, y evitación, por otra, de situaciones sociales específicas. A los sujetos se les pide que puntúen su temor o ansiedad en una escala tipo Likert que va desde 0 (nada) hasta 4 (mucho) al igual que la evitación sobre el mismo tipo de escala, desde 0 (nunca) hasta 4 (habitualmente). La puntuación total se obtiene sumando la puntuación de la subescala de temor o ansiedad y la de evitación.

Un ejemplo de ítem de esta escala es el presentado en el número 8. Trabajar mientras le están observando (P).

La MARS en este estudio demostró una confiabilidad de 0.03, con una validez muy aceptable (varianza total explicada de 62.33%). Se encontró una estructura hexafactorial: ansiedad ante los exámenes, ansiedad por competencia matemática, ansiedad por competencias matemáticas en la vida diaria, ansiedad ante la proximidad de un examen de matemáticas, ansiedad por la responsabilidad de la contabilidad y ansiedad por la evaluación extrínseca de la competencia matemática.

Procedimiento:

Las aplicaciones de los instrumentos se realizaron con quince días de diferencia, en sesiones de 20 minutos cada uno y al inicio de toda actividad académica.

El indicador del rendimiento académico en Matemáticas de los estudiantes fue obtenido de las calificaciones logradas por los estudiantes en la materia de Estadística. Específicamente, se consultaron las calificaciones reportadas por los profesores durante el periodo de evaluación correspondiente.

Resultados

Se realizaron distintos análisis a los datos recopilados. Los resultados obtenidos se organizaron en los siguientes rubros:

a) Características del rendimiento académico en matemáticas

Se encontró que la calificación en matemáticas de los participantes se concentró alrededor de 7 y que es infrecuente la calificación de 10 (Figura 1). La calificación media fue de 7.1 (Tabla 1).

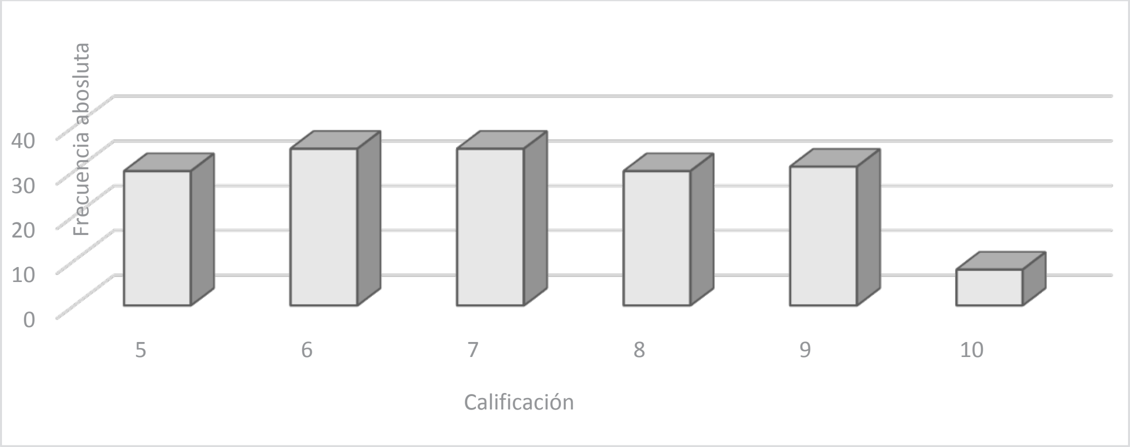


Figura 1. Distribución de frecuencias del rendimiento en matemáticas de los participantes

Tabla 1. Estadísticos descriptivos del rendimiento académico de los participantes

	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típ.
Muestra total	5.0	10.0	7.1	1.5
Masculinos	5.0	10.0	6.6	1.5
Femeninos	5.0	10.0	7.5	1.3

b) Ansiedad social y ansiedad hacia las matemáticas

Para los datos sobre ansiedad social, primero, se hizo un análisis de la frecuencia con la que se presentó cada una de las categorías de ansiedad en la escala de Liebowitz. Se encontró que la categoría más frecuente es la del tipo *ansiedad social significativa*, después del tipo *no se aprecia ansiedad social* (Figura 2).

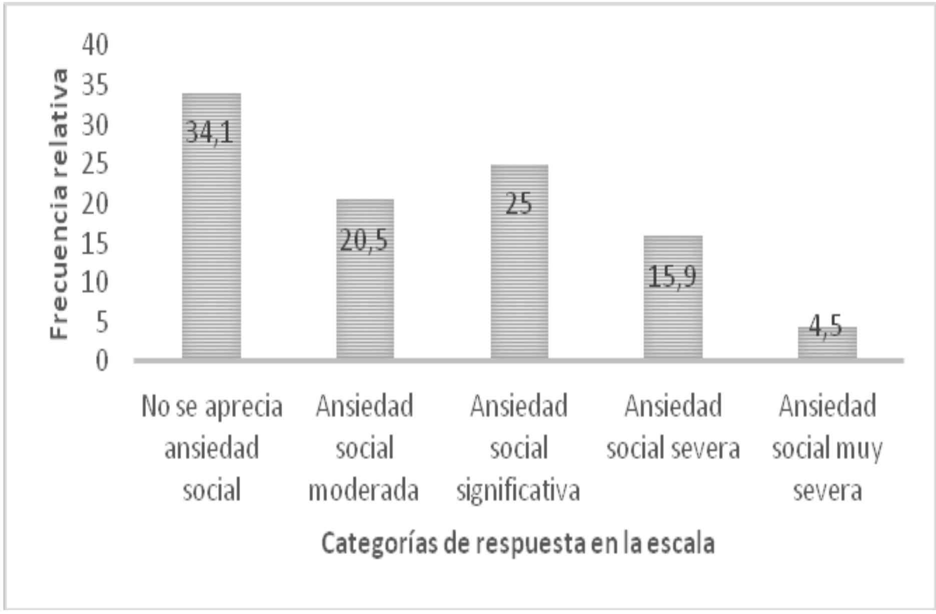


Figura 2. Distribución en frecuencias de los participantes en las categorías de ansiedad social

Respecto a los puntajes obtenidos en la MARS se halló que no prevalece una ansiedad hacia las Matemáticas muy alta en los participantes; aunque hay estudiantes que obtienen puntajes cercanos al puntaje máximo que es de 120 puntos, tomando en cuenta que la MARS tiene 30 ítems con una escala de 4 puntos (Tabla 2).

Tabla 2. Estadísticos descriptivos de ansiedad en matemáticas obtenida con la MARS

Mínimo	Máximo	Media	Desv. típ.
11.00	93.00	39.2	16.9

Sin incluir los resultados de todas las dimensiones de ansiedad a las matemáticas, tanto la ansiedad ante los exámenes y la proximidad de un examen de matemáticas, sugiere que eso es lo que provoca mayor ansiedad dentro de la ansiedad matemática.

c) Relación entre ansiedad y rendimiento académico en matemáticas

Se realizaron correlaciones entre la ansiedad matemática, la ansiedad social y el rendimiento académico de los estudiantes. La tabla 3 muestra los resultados obtenidos. Estos sugieren que la ansiedad social no correlaciona significativamente con el rendimiento en matemáticas en comparación con la ansiedad matemática; además, que a mayor ansiedad matemática menor rendimiento en matemáticas.

Tabla 3. Relación entre ansiedad matemática, ansiedad social y rendimiento en matemáticas.

Variables	r_s	*p*
Rendimiento en matemáticas-ansiedad matemática	-.56	.00
Rendimiento en matemáticas-ansiedad social	-.12	.44

También se analizó la correlación entre estas variables disgregando la muestra por el sexo de los participantes (Tablas 4 y 5).

Tabla 4. Correlación entre ansiedad matemática, ansiedad social y rendimiento académico en matemáticas en los participantes masculinos

Variables	r_s	p
Rendimiento en matemáticas-ansiedad matemática	-.49	.02
Rendimiento en matemáticas-ansiedad social	-.05	.83

Tabla 5. Correlación entre ansiedad matemática, ansiedad social y rendimiento académico en matemáticas en los participantes femeninos.

Variables	r_s	p
Rendimiento en matemáticas-ansiedad matemática	-.52	.01
Rendimiento en matemáticas-ansiedad social	-.26	.22

Los resultados evidencian que las correlaciones solo son estadísticamente significativas entre rendimiento en matemáticas y la ansiedad matemática tanto en los estudiantes masculinos como femeninos, siendo ligeramente más fuerte y significativa la correlación en los femeninos.

Conclusiones

Los resultados permiten concluir que la ansiedad social no correlaciona de manera significativa con el rendimiento en matemáticas a diferencia de la ansiedad Matemática, es decir, que un estudiante que es ansioso socialmente no necesariamente presente ansiedad hacia las Matemáticas. Pese a que no prevalece una ansiedad hacia las matemáticas muy alta en los participantes, hay estudiantes que sí obtienen puntajes muy cercanos al puntaje máximo. Por otro lado, los resultados indican que a mayor ansiedad Matemática, menor rendimiento en Matemáticas, afirmación que coincide con los resultados descritos en otras investigaciones, Gil, Blanco y Guerrero, 2005; Pérez, 2009; Monje, 2012; Iriarte, 2013. Los resultados apoyan el planteamiento de que factores emocionales, en este caso la ansiedad, influye en el aprendizaje de las Matemáticas. Derivado del análisis hexafactorial, se puede desarrollar estudios encaminados a aportar más evidencia referente a que la ansiedad hacia las matemáticas se centre o reduzca a la ansiedad hacia los exámenes de matemáticas más que a otros aspectos. De acuerdo al análisis de los resultados proporcionados por la escala LSAS mostrados en la tabla 3, un estudiante puede ser ansioso socialmente o no y ello no repercute en su logro académico en matemáticas, por lo que se puede hablar entonces de una autonomía y existencia del fenómeno de ansiedad Matemática. Finalmente, los resultados permiten concluir que se puede hablar de una ansiedad específica en matemáticas, esto es, los alumnos pueden presentar ansiedad hacia las Matemáticas pero no ser ansiosos en otros contextos. Esto es de suma importancia ya que es evidente que los estudiantes de Bachillerato presentan una fuerte aversión al estudio de las Matemáticas y que presentan ansiedad solo cuando están en clase de Matemáticas, cuando realizan algún ejercicio relacionado con Matemáticas o ante la presencia o proximidad de un examen de Matemáticas, lo que lleva a pensar, en indagar sobre oras investigaciones, acerca de las causas de la ansiedad Matemática y posibles estrategias de intervención para controlar sus niveles y que hagan que no afecte de manera directa el rendimiento del estudiante en dicha asignatura.

Referencias bibliográficas

Ashcraft, M.H., Kirk, E.P., & Hopko, D. (1998). On the cognitive consequences of mathematics anxiety. In C. Donlan (Ed.), *The development of mathematical skills* (pp. 175–196). Hove, England: Psychology Press.

Ashcraft, M. H. (2002). Math anxiety: Personal, educational, and cognitive consequences. *Current Directions in Psychological Science*, *11*, 181 – 185.

Caballero, C. A., Blanco, N. L. J. y Guerrero, B. E. (2009). El dominio afectivo en futuros maestros de matemáticas en la Universidad de Extremadura. *Paradígma, 29* (2), 157 – 171.

Cattel, R.B., y Scheier, I.H. *The meaning and measurement of neuroticism and anxiety*. Ronald Press, New York, 1961

Guerrero, E., Blanco, L.J. y Vicente, F. Trastornos emocionales ante la educación matemática. En García, J.N. (coord.), Aplicaciones para la intervención psicopedagógica. Madrid: Pirámide, 2002

Iriarte, C., Benavides, M. y Guzmán, M.J. (2013). Tratamiento de la ansiedad hacia las matemáticas. Una experiencia formativa con futuros profesionales de la educación. En V. Mellado, L.J. Blanco, A.B. Borrachero y J.A. Cárdenas (Eds.), *Las Emociones en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales y las Matemáticas*. Badajoz, España: DEPROFE.

Johnson, G.M. (1997). Resilient at risk students in the inner city. *Mc Gill Journal of Education 32*: 35-49.

Last, CG., Hersen, M., Kazdin A., *et al.* Anxiety disorders in children and their families. *Arch Gen Psychiat 1991; 48: 928 – 934.*

Martínez, P. O. J. (2005). Dominio afectivo en educación matemática. *Paradígma, 26* (2), 7 – 34.

Monje, J., Pérez, P., Castro. E (2012). Resolución de problemas y ansiedad matemática: profundizando en su relación. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 32* 45 – 62.

Nortes Checa y Martínez Artero, R (1996). La ansiedad ante los exámenes de matemáticas. Épsilon, 34, 111-120.

Nortes Checa, A; Martínez-Artero, R N; (2014). ¿Tienen ansiedad hacia las matemáticas los futuros matemáticos? *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 18*, 153 – 170.

Palacios, A., Hidalgo, y S., Ortega, T. (2013). Causas y consecuencias de la ansiedad matemática mediante un modelo de ecuaciones estructurales. *Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 31* (2)*,* 93 – 111.

Pérez-Tyteca, P., Castro, E., Segovia, I., Castro, E., Fernández, F. y Cano, F. (2009). El papel de la ansiedad matemática en el paso de la educación secundaria a la educación universitaria. *PNA, 4* (1), 23 – 35.

Pérez-Tyteca, P., Castro, E., Rico, L. y Castro E. (2011). Ansiedad matemática, género y ramas de conocimiento en alumnos universitarios. Enseñanza de las Ciencias, 29 (2), 237-250.

Richardson, F.C., & Suinn, R.M. (1972). The Mathematics Anxiety Rating Scale. *Journal of Counseling Psychology, 19*, 551 – 554.

Ries, F., y Castañeda, C. (2012). Relaciones entre ansiedad - rasgo y ansiedad – estado en competiciones deportivas. *Cuadernos de Psicología del deporte. 12* (2), 9 – 16.

Sánchez, J., Segovia, I. y Miñán, A. (2011). Exploración de la ansiedad hacia las matemáticas en los futuros maestros de educación primaria. Profesorado*. Revista de currículo y formación del profesorado, 15* (3), 207 – 312.

Spielberg, C. D. (1976). The nature and measurement of anxiety. In C.D. Spielberg & R. Diaz – Guerrero (Eds.), *Cross cultural anxiety*. Washington, DC: Hemisphere Publishing Corporation.

Spielberg, C.D. y Vagg, P.R. (1995). Test Anxiety: A transactional process. En C.D. Spielberg y P.R. Vagg (Eds.): Test anxiety: Theory, assessment and treatment (pp. 3-14). Washington, DC: Taylos & Francis.

CREENCIAS DE ALUMNOS DE NIVEL MEDIO SUPERIOR ACERCA DE LA EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES EN MATEMÁTICAS

María E. Valle Zequeida, Gustavo Martínez Sierra
Universidad Autónoma de Guerrero. México
mevzy2@gmail.com, gmartinezsierra@gmail.com

RESUMEN: En Matemática Educativa se han hecho diversas investigaciones acerca de las creencias acerca de las Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, sin embargo, se ha descuidado un proceso igualmente importante, nos referimos a la Evaluación de los aprendizajes en Matemáticas. Bajo esta idea, hemos realizado una investigación para conocer las creencias de alumnos de nivel medio superior acerca de la evaluación de los aprendizajes en Matemáticas. Realizamos entrevistas semiestructuradas a 43 alumnos de nivel medio superior. Mediante un análisis temático, encontramos en sus creencias un fuerte énfasis de la evaluación como un medio para comprobar, demostrar y acreditar.

Palabras clave: creencias, evaluación de los aprendizajes, medio superior

ABSTRACT: Different researches about beliefs related to Mathematics, its teaching and learning have been carried out by using Educative Mathematics. However, a similarly important process, the evaluation of Mathematics learning, has not been sufficiently investigated. Under this conception, we have carried out to know senior high school students' beliefs about the evaluation of mathematics learning. We made semi-structured interviews to 43 students of the senior high school. By means of a thematic analysis, we found among their beliefs, great emphasis on evaluation, as a way to check, demonstrate and validate something

Key words: beliefs, learning evaluation, senior high school

.

Introducción

Las creencias tienen una fuerte influencia en las prácticas ejercidas en el aula (Skott, 2015). Bajo esta idea, se han realizado diversas investigaciones de creencias de profesores y alumnos acerca de las Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje (Bernack-Schüle, Erens, Eichler, Leuders, 2015). Sin embargo, en estos estudios poco se ha abordado un proceso de suma importancia y además estrechamente relacionado a los procesos de enseñanza aprendizaje de las Matemáticas, nos referimos a la *evaluación de los aprendizajes*.

La mayoría de las investigaciones que se han hecho acerca de la Evaluación en Matemáticas son estudios teóricos y empíricos, por ejemplo, con respecto al teórico en Stacey y Wiliam, (2013) sostienen que el diseño de la Evaluación en Matemáticas basadas en los principios de las Matemáticas, del aprendizaje y de la equidad, pueden arrojar luz para futuras investigaciones en este campo, en el caso de los estudios empíricos, estos están diseñados para proporcionar una base probatoria para la fabricación de decisiones acerca de los métodos de evaluación (Berry y Houston, 1995; Haines y Houston, 2001; Schoenfeld, 2015). Por otro lado, los estudios sobre percepciones de los estudiantes respecto a la evaluación en Matemáticas, han sido poco estudiadas y los que se han hecho son en los niveles superiores (Iannone y Simpson, 2013; McInerney, Brown, y Liem, 2009). La literatura acerca de las percepciones de evaluación de los estudiantes muestra que: (1) existe una fuerte evidencia empírica de que la percepción del valor y la validez de la evaluación de los estudiantes afectan su aprendizaje (Scouller, 1998), (2) las características de evaluación identificadas por los estudiantes tienen un importante impacto en su enfoque de aprendizaje y viceversa (Struyven, Dochy, y Janssens, 2005) y (3) hay formas complejas en que puntos de vista de las próximas evaluaciones de los alumnos influyen en su motivación (Harlen y Deakin, 2003). Con base a lo anterior, observamos un espacio de investigación importante acerca de lo que creen los estudiantes acerca de la evaluación en matemáticas en los niveles preuniversitarios. De esta manera, el objetivo de esta investigación cualitativa es comenzar a llenar este espacio al identificar las creencias de alumnos de nivel medio superior acerca de la evaluación de los aprendizajes en Matemática. Para esto nos planteamos responder la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuáles son las creencias de los estudiantes de nivel medio superior acerca de la Evaluación de los aprendizajes en Matemáticas?

Marco conceptual

En las investigaciones en Matemática Educativa, aún no hay acuerdo sobre la definición de una creencia, sin embargo, de acuerdo con Skott (2015) se pueden identificar cuatro aspectos fundamentales que constituyen el núcleo del concepto: (1) "las creencias se utilizan generalmente para describir las construcciones mentales individuales, que son subjetivamente ciertas para la persona de que se trate" (p. 18); (2) "hay aspectos cognitivos, así como afectivos en las creencias, o por lo menos las creencias y los problemas afectivos son vistos como inextricablemente ligado, aunque considerado distinto" (p. 18); (3) "las creencias se consideran, en general, reificaciones temporal y contextualmente estables que puedan cambiar sólo como resultado de la participación sustancial en las prácticas sociales relevantes "(p. 18); y, (4)" se espera que las creencias influyan significativamente en la forma en que los profesores interpretan y comprometerse con los problemas de la práctica "(pág. 19). En resumen, las creencias de los profesores "se utilizan para designar construcciones mentales individuales relativamente estables, que son verdades subjetivamente cargados de valores y son los resultados de las experiencias sociales sustanciales y tienen un impacto significativo en las interpretaciones y contribuciones de los profesores para la práctica en el aula" (Skott, 2015a, p. 19).

En términos más formales, en la presente investigación tomamos la definición de Pajares (1992, p 316). Creencia como "el juicio de un individuo sobre la verdad o falsedad de una proposición".

Metodología

El contexto de la Investigación

El trabajo de campo se realizó en una preparatoria de la ciudad de México perteneciente al Instituto Politécnico Nacional (IPN). Esta institución es una de las que pide los puntajes más altos en el examen de ingreso. La escuela trabaja mediante un enfoque basado en competencias, en lo que respecta a la evaluación, ésta se lleva a cabo mediante una escala numérica que va de 0 a 10. En el proceso de evaluación en matemáticas intervienen diversos elementos que van desde tareas, investigaciones, proyectos que conforman el 20 % o 30% de la evaluación, y examen con una mayor porcentaje que va desde 70% a 80% según el profesor.

Participantes

Una profesora de matemáticas de la institución que gestionó tanto el acceso a la institución como los espacios para realizar las entrevistas. Además de 43 alumnos de quinto y sexto semestre (23 hombres y 20 mujeres) que aceptaron participar de manera voluntaria.

Recolección de datos

El estudio tiene un enfoque cualitativo. Bajo la idea de promover en los alumnos expresarse libremente y en un ambiente cordial, los datos se recolectaron mediante entrevistas semiestructuradas en siete grupos focales de seis alumnos cada uno (Morgan, 1996). La duración de las entrevistas osciló entre 60 y 80 minutos. Todas las entrevistas fueron video-grabadas. La dinámica de cada entrevista fue la siguiente; al principio de cada entrevista la entrevistadora se presentó y les hizo saber a los alumnos el motivo de la investigación, estableciendo el tono para una discusión relajada, posteriormente, pidió a los alumnos que se presentaran mencionando su nombre, edad y especialidad. La entrevista fue guiada por las siguientes preguntas de orden fenomenológico (Aguirre-García y Jaramillo-Echeverri, 2012): 1) ¿Qué es para ti la evaluación? y ¿Para qué sirve?, 2) ¿Qué es para ti la evaluación en la materia de Matemáticas? y ¿Para qué sirve? , 3) ¿Consideras que es lo mismo evaluar en matemáticas que otras materias? , 4) ¿Qué actividades haces para aprobar el curso de Matemáticas? ,

5) ¿Qué formas de evaluar consideras son adecuadas? ,6) ¿Qué opinas de evaluar a través de exámenes? ¿Y con proyectos? ¿Y con tareas?, 7) ¿Qué opinas de evaluar asignando una calificación o un número? , 8) ¿Crees que las evaluaciones que recibes reflejan los conocimientos matemáticos que tienes? ¿Por qué?

Análisis de datos

Las entrevistas fueron transcritas en su totalidad. El análisis de datos fue guiado por las fases de un análisis temático. El propósito del análisis temático es identificar los patrones de significado (temas) a lo largo de un conjunto de datos. (Braun y Clarke, 2006, p 82.). Las fases del análisis fueron: *1) Familiarizarse con sus datos***.** Leímos las transcripciones de las entrevistas en repetidas ocasiones. Esto contribuyó a familiarizarse con los datos y con el lenguaje utilizado por los participantes. Además, se generaron ideas para el planteamiento de códigos iniciales en la fase siguiente. *2) Generación de códigos iniciales.* Buscamos a través de cada corpus frases que tuvieran la estructura según la definición de Pajares, y que además representaran significados hacia posibles respuestas a la pregunta de investigación. Este proceso tuvo como resultado una primera agrupación de los datos; cada agrupación tuvo como título un código inicial. *3) Búsqueda de temas.* Trabajamos con los códigos iniciales. Los autores discutimos en varias sesiones de trabajo la pertinencia de los códigos iniciales de acuerdo a los extractos asociados con ellos. Observamos que algunos grupos de códigos compartían algún tipo de relación en sus ideas, de esta manera establecimos familias de códigos. De ahí surgieron los primeros temas. *4) Revisión de temas.* Con los posibles temas identificados en la fase anterior, discutimos su correspondencia con los datos. *5) Definir y nombrar temas.* Buscamos que lo títulos englobaran la idea principal de cada conjunto de extractos. Los temas finales fueron interpretados como las creencias. *6) Escribir el reporte.* Finalmente, escribimos la descripción de cada creencia. Agrupamos las creencias sobre la evaluación en términos de su papel en los procesos de evaluación. Redactamos el reporte.

Resultados

El análisis temático de las entrevistas arrojó diferentes temas y subtemas que hemos sintetizado en la Tabla 1. Los temas y sub temas los hemos redactado para que expresen una creencia específica que fue expresada por los participantes acerca de la Evaluación en Matemáticas. A su vez los temas los hemos reagrupado en términos del papel que juega la creencia en el proceso de evaluación:

Tabla 1. Creencias de los alumnos acerca de la evaluación de los aprendizajes en matemáticas

		F
Creencias acerca de cómo debe ser la evaluación		
	La evaluación debe ser práctica (solo resolver problemas). Las investigaciones y proyectos no deben ser importantes en la evaluación	33
	La evaluación en matemáticas debe ser distinta a otras materias	28
Creencias acerca de para qué sirve evaluar		
	La evaluación sirve para...	
	…saber los conocimientos de los alumnos/ si puedes resolver problemas/ que tan competente eres	28
	… comprobar/demostrar lo que has aprendido	23
	… medir el conocimiento	21
	…saber si tienes los suficientes conocimientos para pasar	18
	…saber que conocimientos tienes y que te falta	12
	…dar información al maestro para saber que tanto aprendimos	9
Creencias acerca de cómo debe expresarse la evaluación		
	La evaluación debe ser mediante una escala numérica. El numero sí refleja mis conocimientos	29
Creencias acerca de qué se debe evaluar		
	El examen debe tener mucho peso en la evaluación porque realmente evalúa lo que sabes	27

Nota. F= número de alumnos que mencionaron esa creencia

A continuación ilustramos algunas de las creencias encontradas con extractos de las entrevistas: (Los extractos están identificados con las etiquetas Hn- Gm y Mn- Gm, donde H es para hombre, M para mujer, n el número de estudiante en el grupo y m el grupo focal correspondiente).

Creencias acerca de cómo debe ser la evaluación. *La evaluación debe ser práctica (solo resolver problemas). Las investigaciones y proyectos no deben ser importantes en la evaluación*

Los alumnos creen que si las matemáticas se tratan de resolver problemas y saber aplicar formulas, la mejor manera de evaluarlos es propiamente viéndolos como resuelven problemas en clase o en el examen. Ellos creen que las investigaciones y proyectos que algunas veces realizan en matemáticas, no desarrollan en ellos conocimientos tan importantes y que perduren, a diferencia de cuando practican la resolución de problemas, es por ello que consideran que investigaciones y proyectos deben tener un peso mucho menor en la evaluación.

H5- G1__*La evaluación en matemáticas tiene que ser práctica, no tanto teórica, y es para saber que tanto aprendiste, tu resolución de problemas que tanto mejoró…* […] *no me interesa quien integró por primera vez el área de un triángulo, a mí no me sirve saber nada de eso, a mí me sirve saber cómo se hace, para después yo poderlo aplicar en el trabajo*.

La evaluación en matemáticas debe ser distinta a otras materias. Los alumnos creen que las Matemáticas son distintas a otras materias. Mencionan que la materia de matemáticas se trata de saber aplicar formulas en la resolución de problemas. Las investigaciones y proyectos no son actividades tan importantes, pues no generan en ellos aprendizajes que puedan utilizar al resolver un examen a diferencia de inglés o historia. De esta manera, ellos consideran que la evaluación en matemáticas debería ser distinta en otras materias.

H3- G1__*Yo siento que la evaluación en matemáticas es diferente a las demás materias, ya que en las demás materias su forma de evaluar se basa más en las investigaciones, más en lo teórico y aquí en la evaluación de matemáticas precisamente tienes que ir ejercitando tu habilidad matemática*.

Creencias acerca de para qué sirve evaluar. *La evaluación sirve para saber los conocimientos de los alumnos/ si puedes resolver problemas/saber que tan competente eres*

Los alumnos creen que una de las funciones de la evaluación es para saber sus conocimientos de matemáticas. Los conocimientos de los alumnos, según ellos mismos, consisten en saber aplicar formular y resolver problemas.

H2-G2__ Evaluar es darle un valor a los conocimientos que adquiriste o que tenías *y sirve para dar a conocer qué tanto sabes o para comparar que tanto has aprendido.*

La evaluación sirve para saber si tienes los suficientes conocimientos para pasar. La evaluación sirve para comprobar/demostrar lo que has aprendido. Los alumnos creen además que la evaluación es una forma de comprobar o demostrar ante el docente o la institución lo que han aprendido. Esta idea de demostración hacia los demás adquiere mucha fuerza en esta institución, los alumnos expresan ser muy competitivos y para ellos comprobar sus logros es muy importante.

H2-G3: Para mí la evaluación es el instrumento ideal para medir tus conocimientos y saber en qué nivel estas *para competir con los demás.*

La evaluación sirve para medir el conocimiento. Los alumnos utilizan metáforas como “medir”, “grados” y nivel, para comunicar sus opiniones acerca de la función de la evaluación, asumiendo que el conocimiento puede ser expresado en unidades de medida. Consideran que el conocimiento puede observarse a través del desempeño que muestren los alumnos en las clases y una escala numérica es la adecuada para valorarlo.

M2-G5: *La evaluación es medir nuestros conocimientos, el nivel que tenemos*.

La evaluación sirve para saber qué conocimientos tienes y que te falta. Aunque no es la creencia que predomina entre los alumnos, algunos ven a la evaluación como algo que aporta “feedback” a su proceso de aprendizaje. De esta manera les ayuda a ver cuáles son sus fallas y lo que tienen que mejorar.

H2- G1__ [La evaluación me sirve] *a mí como alumno me sirve porque sé que parte me está faltando aprender o recordar, incluso ver de cuantas formas se puede resolver el mismo problema.*

La evaluación sirve dar información al maestro para saber que tanto aprendimos. De igual manera que en la creencia anterior, los alumnos también creen que la evaluación aporta información al profesor, de esta manera podrá establecer parámetros de valoración de su propia práctica como docente y ver si cumplieron sus objetivos, o si tienen que modificar alguna estrategia en clase.

H3- G1__*Considero que la evaluación en matemáticas ayuda al maestro para saber qué es lo que el alumno sabe, qué es lo que le falta recordar, o qué es lo que no sabe y a partir de esto va a implementar un plan de estudio para que el alumno sea capaz de aprender*.

Creencias acerca de cómo debe expresarse la evaluación. *La evaluación debe ser mediante una escala numérica. El número sí refleja mis conocimientos.*

Esta creencia es una de las más compartidas. Para los alumnos una escala numérica donde además intervengan decimales, es más precisa para describir su conocimiento. Además, en esta institución los alumnos son muy competitivos como podemos observar en algunos de los extractos, de esta manera, los números sirven como un punto de comparación entre sus compañeros.

H4- G1__*Los números te dan una calificación exacta,* porque si nos vamos al caso donde dicen pasaron y no pasaron, muchos podrían estar en “pasaron” pero en la lista de pasaron pueden estar muchos alumnos que les faltó algo por aprender en cambio *con los números y tomando todavía* *decimales, estaría uno más consciente de que tanto aprendió* y más que nada hacer un poco competitivo con sus compañeros, que te va a ir inspirando y todavía dándote más ganas para superarte en la materia.

Creencias acerca de qué se debe evaluar

El examen debe tener mucho peso en la evaluación porque realmente evalúa lo que sabes.

Los alumnos consideran al examen como un objeto que puede dar información efectiva de los conocimientos que tienen; aunque existen otros elementos que pudieran tomarse en cuenta en la evaluación (tareas, participaciones, proyectos) no son métodos muy confiables porque pueden copiarse. Los alumnos argumentan que la materia de matemáticas se trata de resolver problemas y el examen son problemas, de esta manera, al resolver el examen solos sin la ayuda de sus compañeros o del profesor, puede verse quién sabe y quien no sabe resolver problemas.

H3-G4__*Yo pienso que el examen es el que debe de evaluar tu calificación, como la materia es práctica, si no lo desarrollas en clase no lo vas a poder aplicar en el examen.*

Conclusiones

La intención de este trabajo fue conocer las creencias de un grupo de alumnos acerca de la evaluación en matemáticas, sin embargo, además de esto, en las narrativas han surgido relaciones estrechas que guardan con otras creencias tales como las creencias de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. A partir de las narrativas podemos observar que los alumnos son muy competitivos, aparecen palabras como “comprobar”, “demostrar”, “competir”. Para ellos un número en su evaluación es de suma importancia, al ser un punto de comparación entre sus compañeros e incluso alumnos externos a la propia institución. De ahí una fuerte inclinación por ver a la evaluación como mecanismo de comprobación, demostración y acreditación. Una creencia muy compartida entre los alumnos de esta institución es el valor que le dan al examen como instrumento para “medir” su aprendizaje, encontramos que esta creencia está fuertemente asociada con la creencia acerca de la enseñanza de las Matemáticas (solo se trata de resolver problemas) y las Matemáticas (utilitarias). De esta manera, están totalmente de acuerdo en que el examen tenga tanto valor en la evaluación, y que elementos como tareas, proyectos e investigaciones no deberían formar parte importante de la evaluación. Ningún alumno considera como importante conocer conceptos matemáticos, pues mencionan que esos conocimientos no permanecen en ellos y además no tienen aplicación alguna, por tanto no tendrían por qué ser evaluables, a diferencia de resolver problemas, dado que practican constantemente la aplicación de fórmulas en la resolución de problemas. Es notable que en menor medida reconozcan a la evaluación como retroalimentación, pues el énfasis está en la evaluación como mecanismo de comprobación, demostración y acreditación.

Referencias bibliográficas

Aguirre-García, J C., Jaramillo-Echeverri, L G. (2012). Aportes del método fenomenológico a la investigación educativa. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos (Colombia)*, 8(1), 51-74. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=134129257004

Bernack-Schüler, C., Erens, R., Leuders, T., & Eichler, A. (Eds.). (2015). *Views and Beliefs in Mathematics Education*. Wiesbaden, Germany: Springer. http://doi.org/10.1007/978-3-658-09614-4

Braun, V., & Clarke, V. (2012). Thematic analysis. In H. Cooper (Ed.), *APA Handbook of Research Methods in Psychology* (Vol. 2, pp. 57–71). American Psychological Association.

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology 3*, 77–101.

Berry, J., & Houston, K. (1995). Students using posters as a means of communication and assessment. *Educational Studies in Mathematics 29*(1), 21-27.

Haines, C., & Houston, K. (2001). Assessing student project work. In D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 431-442). USA: Kluwer.

Harlen, W., & Deakin, R. (2003). Testing and Motivation for Learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice 10*(2), 169-207.

Iannone, P., & Simpson, A. (2013). Students' perceptions of assessment in undergraduate mathematics. *Research in Mathematics Education 15*(1), 17-33.

McInerney, D. M., Brown, G. T. L., & Liem, A. D. (2009). *Student Perspectives on Assessment: What Students Can Tell Us about Assessment for Learning*. USA: Information Age Publishing Inc.

Pajares, M. F. (1992). Teachers' Beliefs and Educational Research: Cleaning Up a Messy Construct. *Review of Educational Research* 62(3), 307–332. http://doi.org/10.3102/00346543062003307

Schoenfeld, A. H. (2015). Summative and Formative Assessments in Mathematics.*Theory Into Practice*, (Advance online publication).

Scouller, K. (1998). The influence of assessment method on students' learning approaches: Multiple choice question examination versus assignment essay. *Higher Education*, *35*, 453- 272.

Skott, J. (2015a). The promises, problems, and prospects of research on teachers' beliefs. In H. Fives & M. G. Gill (Eds.), *International Handbook of research on teachers' beliefs* (pp. 13–30). New York, NY: Routledge.

Stacey, K., &Wiliam, D. (2013). Technology and Assessment in Mathematics. In M.A. (Ken) Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 327--360). Australia: Springer.

Struyven, K., Dochy, F., &Janssens, S. (2005). Students' perceptions about evaluation and assessment in higher education: a review1. *Assessment & Evaluation in Higher Education 30*(4), 325-341.

ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS DE ESTUDIANTES DE PRIMER CURSO DE UNIVERSIDAD Y SU RELACIÓN CON EL RENDIMIENTO ACADÉMICO EN ASIGNATURAS AFINES

Marcelo Casis, Ana María Oyaneder, Alexis Curiche
Universidad Finis Terrae. (Chile)
marcelocasis@gmail.com, aoyaneder@uft.cl, alxcuriche@hotmail.com.

RESUMEN: Presentamos un avance de la investigación que llevamos a cabo al amparo de la dirección de investigación de la Universidad FinisTerrae. Estudiamos las actitudes hacia las matemáticas que manifiestan los estudiantes de primer curso de universidad, matriculados en carreras profesionales que dentro de su malla académica cursan asignaturas matemáticas durante el primer semestre, y cómo éstas se relacionan con el rendimiento académico. Para los propósitos de este artículo, mostramos los resultados obtenidos con los estudiantes de la carrera de arquitectura.

Palabras clave: dominio afectivo, actitudes, rendimiento académico

ABSTRACT: This paper shows part of the investigation that we are carrying out under the research management of Finis Terrae University. We study the attitudes, towards mathematical subjects, of the first-year university students who are enrolled in different professional degree courses; which curriculum includes Mathematics in the first semester. We have also investigated how such attitudes are related to the students' academic performance. For this purpose, we show the outcomes obtained by the students majoring Architecture.

Key words: emotional control, attitudes, academic performance

Introducción

El presente trabajo muestra la primera fase de la investigación que los autores desarrollamos al amparo de la Dirección de Investigación de la Universidad FinisTerrae. El Objetivo de la Investigación busca determinar la relación entre las actitudes que manifiestan hacia las matemáticas los estudiantes de primer curso universitario (para este caso los estudiantes de la carrera de arquitectura) y los resultados académicos logrados finalizado el primer semestre del año 2016. Uno de los aspectos que justifican este estudio, radica en el elevado número de alumnos que desertan del sistema universitario producto de sus malos resultados académicos en asignaturas matemáticas y donde las causas atribuidas a esta situación, como las acciones remediales que la institución desarrolla, se relacionan con aspectos cognitivos. Metodológicamente el estudio corresponde a un diseño no experimental, transeccional o transversal de alcance exploratorio, descriptivo y correlacional. Con los datos obtenidos se ha realizado un análisis descriptivo considerando la media, desviación típica, asimetría y moda, con el fin de interpretar el comportamiento que han tenido los descriptores actitudinales (autoconfianza, motivación y ansiedad) y que permiten determinar el grado de actitud que manifiestan los estudiantes de primer año de la carrera de arquitectura. Finalmente mostramos la correlación hallada con los resultados descritos.

Marco teórico

Dominio Afectivo

Dos supuestos educativos están generalmente aceptados; uno es que la capacitación matemática de los individuos es necesaria para desenvolverse en el mundo tecnológico y globalizado actual, en donde las matemáticas juegan un papel primordial en la formación de las personas e intervienen en los diversos ámbitos de la vida privada, social y civil (Anthony y Walshaw, 2009); el otro se refiere a que la competencia matemática se alcanza mayoritariamente en los centros educativos con la intervención del profesorado (Anderson, 2007; Rico, 2005), siendo el profesor que interviene en la formación matemática de los estudiantes uno de los agentes más influyentes en la consecución de dicha capacitación. Los estudiantes que acceden a la educación superior, traen consigo un historial académico que irremediablemente incide en su rendimiento. Este historial se relaciona tanto con los saberes adquiridos durante la educación básica y secundaria, como con el entorno afectivo en que esos saberes se desarrollaron. En tal sentido, la influencia que pueden ejercer los profesores en sus estudiantes, no solo se relaciona con aspectos cognitivos, los factores afectivos, son parte del proceso comunicativo en que se despliega todo acto educativo (Goñi, 2007), y estos aspectos afectivos pueden ejercer tanto influencia positiva como negativa en la calidad de los aprendizajes adquiridos. Para algunos autores, una de las causas de que los estudiantes no hayan alcanzado el nivel matemático que deberían, se atribuyen a la influencia de los aspectos afectivos (Gómez-Chacón, 2000; Goldin, 2008).

Todos estos elementos han centrado el interés de la investigación en didáctica de las matemáticas, y han logrado establecer un marco teórico (en pleno proceso de desarrollo), denominado Dominio Afectivo de la Educación Matemática. Mc Leod (1989), lo entiende como un extenso rango de humores (estadios de ánimo), que van más allá de la cognición y que inciden en el aprendizaje de las matemáticas. Este dominio afectivo, puede ser interpretado desde la teoría socioepistemológica de la matemática educativa, ya que el principio normativo de ella asume las prácticas sociales como "la base y orientación en los procesos de construcción de conocimiento” (Cantoral, 2013, p. 155), y dentro de estas prácticas sociales, los aspectos que van más allá de la cognición juegan un papel preponderante.

McLeod (1992) articula el afecto como una preocupación importante en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y describe aspectos de las creencias, las actitudes, las emociones y la autoconfianza, constructos ligados al afecto. También explica la naturaleza del dominio afectivo en la educación matemática en términos de auto-concepto, ansiedad matemática, autoeficacia, esfuerzo, motivación, autonomía y estética. Partiendo del acercamiento que hace McLeod (op. Cit) del afecto, Saint-Pierre y Lafortune (1995) lo amplían, considerándolo una categoría general cuyas componentes serían las actitudes y los valores, el comportamiento moral y ético, el desarrollo personal, las emociones (entre las que se encuentra la ansiedad) y los sentimientos, el desarrollo social, la motivación y la atribución. En la actualidad, existirían cuatro elementos claramente definidos y reconocidos como descriptores del dominio afectivo: actitudes, creencias, emociones y valores (Mandler, 1989; Gómez-Chacón, 2000; Bishop, Clarkson, Fitzsimons y Seah, 1999).

Actitudes

Nuestra investigación centra su interés en uno de estos descriptores del afecto: las actitudes. Este constructo ha sido estudiado desde diferentes disciplinas, pero sólo a partir de las últimas décadas, la didáctica de las matemáticas ha puesto su interés en él. Gracias a estos estudios, se ha logrado delimitar el concepto y determinar su relación tanto con la educación matemática (Beckler 1984; Hart, 1989; McLeod, 1989; Mandler 1989; Callejo, 1994; Guerrero, Blanco y Castro, 2001), como con la construcción social del conocimiento matemático (Cantoral, 2013). Para Nimier (1977) y Truttschel (2002) las actitudes hacia las matemáticas serían una suerte de bloqueo emocional o barrera psicológica entre el estudiante y la asignatura, mostrando en muchos casos temor, respeto e incluso odio hacia ella. En estudios anteriores y focalizados en profesores en formación de Chile, se ha puesto de manifiesto que algunos descriptores de actitud, se manifiestan moderadamente positivos en futuros profesores (Casis, Castro y Rico, 2014), poniendo en evidencia que este descriptor puede manifestarse tanto positiva, como negativamente.

La interacción entre actitud y consecución de logro académico ha recibido una gran atención (Belbase, 2013; Khine, Al-Mutawah y Afari, 2015). Esta atención ha podido ser motivada por la constatación de que otros factores, como la capacidad cognitiva o la exposición de los estudiantes a los recursos necesarios para el aprendizaje de las matemáticas y requisitos para el rendimiento en matemáticas, no explican las diferencias entre el rendimiento en matemáticas de los individuos (Lipnevich, MacCann, Krumm, Burrus y Roberts, 2011). Los resultados de estas investigaciones sobre la relación entre actitudes de los sujetos y rendimiento en pruebas de evaluación sobre logros no han sido unánimes. Parte de la investigación muestra una relación causa efecto, altamente significativa entre la actitud hacia las matemáticas y el éxito académico alcanzado en esta materia (p. ej., Kalder y Lesik, 2011), mientras que en otras investigaciones la relación encontrada es poco significativa o nula (Aiken, 1970).

En el estudio de las actitudes, junto al modelo multidimensional planteado por Beckler (1984), que es el que más ayuda a comprenderlas, se hace necesario determinar los descriptores actitudinales en estudio. Para ello hemos considerado de la dimensión personal de las actitudes las categorías autoconfianza, motivación y ansiedad. Beckler (Op. Cit) entiende las actitudes como una predisposición a responder a alguna clase de estímulos con cierta clase de respuestas, asignado al constructo un triple componente, que se relaciona entre sí. Estos tres componentes son: Componente Afectivo: Se la ha considerado como el componente fundamental de la actitud. Al presentarse un objeto, éste puede ser relacionado con sentimientos de agrado o desagrado; Componente Cognitivo: Puede considerarse el elemento que le da fundamento a la actitud. Independiente del grado de verdad, el conocimiento que posea el individuo de dicho objeto, por sí mismo ya es suficiente para fundamentar su actitud; y, Componente Conativo Comportamental: Se relacionan con las intenciones conductuales o tendencias de acción que se relacionan con una actitud. Se considera la consecuencia dinámica de la conjunción de los dos componentes anteriores.

Métodología

Método

Este estudio es de tipo encuesta o “survey”, como técnicas de recogidas de datos para el que se ha realizado un diseño no experimental, transeccional o transversal de tipo exploratorio descriptivo.

Participantes

Los participantes corresponden a un universo de 650 estudiantes que el año 2016 cursaban sus estudios profesionales en carreras que el primer semestre contemplaban asignaturas matemáticas. Para efectos del presente artículo mostramos los resultados preliminares correspondiente a 84 estudiantes de la carrera de arquitectura.

Instrumento

El instrumento utilizado para recoger los datos ha sido una escala de actitud tipo Likert. Estas escalas se han usado ampliamente para medir las actitudes y las creencias de los estudiantes en todos los niveles del currículo de matemáticas (Kalder y Lesik, 2011), siendo la escala de Fennema y Sherman (1976) la más utilizada. Para este trabajo hemos construido una escala adaptada a nuestros propósitos a partir de tres escalas diferentes de actitud y la creación de ítems nuevos. Las escalas consideradas han sido: Escala de Actitudes y Matemáticas (Fennema y Sherman, 1976); Escala de actitudes y emociones ante las Matemáticas (Caballero, Blanco y Guerrero, 2007) y Escala de Factores asociados a la actitud hacia las matemáticas (Candia, Navarro y Jacobo, 2009). A partir de estos instrumentos, hemos construido nuestra escala, respetando las etapas de elaboración de un instrumento (Donoso, Rico y Casis, 2013) con la que indagar sobre las actitudes hacia las matemáticas. El conjunto de ítems (enunciados algunos en negativo) se clasificaron en función de la o las variables de actitud que interesaba medir que habían sido establecidas de acuerdo a los objetivos planteados en la investigación, y las variables que de ahí surgieron. De esta manera determinamos la dimensión personal de la actitud, la que, a su vez, se acompaña de sus correspondientes descriptores. Entendemos esta dimensión como la manifestación de aquellas conductas que resultarían de la motivación del individuo por realizar trabajo matemático; autoconfianza al realizar tareas matemáticas y; ansiedad que provoca la disciplina (influencias personales) en las que se ve envuelto el individuo. El estudio en general considera además las dimensiones social, profesional e institucional, pero para los propósitos de este artículo, nos referimos a los resultados preliminares de la dimensión personal. Cada uno de los ítems del cuestionario de actitudes consta de cinco posibles respuestas, con un valor asociado que varía de 1 (totalmente en desacuerdo) a 5 (totalmente de acuerdo). La confiabilidad medida a través del método de dos mitades es de 0.79, valor que nos indica que nuestra escala goza de fiabilidad al presentar un índice que supera los valores señalados por Fox (1981) y Pérez-Juste (1983) como deseables.

Análisis de datos

Con los datos recogidos hemos identificado la puntuación media obtenida por los participantes, en las escalas de la categoría de la dimensión personal, con la finalidad de determinar la orientación que presentan las actitudes personales de los estudiantes de primer curso de universidad. Para la interpretación de los resultados nos valemos de los tres elementos característicos de las actitudes (Carver y Scheiler, 1997), referidos al signo, dirección y magnitud (positivas o negativas). Para tal efecto utilizamos el valor de media "tres" como valor neutro o indiferencia del individuo respecto al descriptor actitudinal a medir. Cualquier puntuación mayor a tres representaría una orientación positiva hacia el constructo. Cuanto más cercana a cinco esté la media, podemos inferir que más positiva e intensa es la manifestación del constructo. Del mismo modo, cualquier puntuación menor a 3 representaría una orientación negativa hacia el constructo. La herramienta escogida para implementar este análisis ha sido el paquete estadístico Statitiscal Package forthe Social Sciences (SPSS) en su versión veinte.

Análisis de la puntuación media en la escala de la Autoconfianza

Los ítems que se utilizan para estudiar la autoconfianza son seis. Se refieren a la percepción que tienen los sujetos sobre su capacidad, sobre los resultados obtenidos, la dificultad y complicación de la materia, la confianza en la utilidad, la desventaja percibida en la materia y la confianza en el esfuerzo.

La mitad de los ítems están redactados de forma positiva, es decir que una mayor valoración del ítem señala una mayor autoconfianza en el sujeto. El resto de ítems está formulado en sentido negativo; una mayor valoración en ellos indica una menor autoconfianza del sujeto. Para poder comparar las respuestas obtenidas y que una mayor valoración sea siempre indicio de una mayor autoconfianza, se cambian los valores de los ítems con signo negativo, permutando las valoraciones 1 y 5 y las valoraciones 2 y 4 entre sí. De esta forma, todos los ítems pueden compararse ya que una mayor valoración indica mayor autoconfianza. Además de este cambio en las puntuaciones, se le da a cada ítem un nombre para hacer referencia al aspecto sobre el que el individuo está contestando. Este nombre refleja el cambio de signo en los ítems.

La puntuación media obtenida por el global de estudiantes en la dimensión autoconfianza es de 3.9. Esto indica que, aunque algunos aspectos son puntuados de forma más positiva que otros, en el global de la dimensión, se aprecia una actitud por encima del valor neutro tres. La autoconfianza entre los estudiantes se observa que obtiene una puntuación positiva.

Análisis de la puntuación media en la escala de la motivación

El estudio de la motivación se realiza a través de las respuestas obtenidas en ocho ítems. Según los valores obtenidos en el estudio de esta escala, la valoración media de la motivación está siempre por encima del valor tres, por lo que se puede concluir que la motivación es positiva en este grupo de estudiantes. La valoración media obtenida en la escala de motivación es 3.3.

Análisis de la puntuación media en la escala de la Ansiedad

Para estudiar la ansiedad se utilizan las respuestas de los sujetos a cinco ítems. Según el análisis realizado, solamente uno de los ítems tiene puntuación por encima del valor neutro tres, el que refleja la preocupación por la capacidad en resolución de problemas. El resto de ítems son puntuados con un valor medio por debajo del valor tres. Este signo negativo refleja cierta falta de ansiedad entre los estudiantes. Finalmente, el valor medio de la escala de Ansiedad es de 2.7, lo que refleja una ansiedad baja frente a la tarea matemática.

Conclusiones

Para el objetivo Específico: “Medir las actitudes que presentan hacia las matemáticas los estudiantes de primer semestre de la carrera de arquitectura”, concluimos que las actitudes que manifiestan estos estudiantes son positivas por tener un valor superior a tres, con un valor medio de 3.4. Sin embargo, inferimos que este valor al estar más cercano al valor neutral se manifiesta de manera menos intensa y con tendencia a la indiferencia.

Para el Objetivo “Estudiar, al finalizar el primer semestre, el rendimiento académico de los estudiantes”, concluimos que los estudiantes de arquitectura, superan en un 100% los requerimientos académicos para aprobar la asignatura. El promedio del curso estudiado es de 5.24 (74.8%). Con estos resultados inferimos que si bien es un curso que aprueba, no manifiesta un rendimiento académico por sobre lo normal.

Para el Objetivo “Establecer el grado de correlación entre actitudes y rendimiento”, concluimos que pese a existir correlación entre ambas variables, esta es baja, con un coeficiente de correlación lineal de Pearson de 0.338. Inferimos que si bien existe una relación entre la variable actitudinal y el desempeño académico la correlación es baja.

Referencias bibliográficas

Aiken (1970). Attitudes toward Mathematics. *Review of Educational Research, 40 (4),* 551-596.

Anderson, R. (2007). Being a Mathematics Learner: Four Faces of Identity. *The Mathematics Educator, 17 (1),* 7-14.

Anthony G. y Walshaw, M. (2009). Characteristics of Effective Teaching of Mathematics: A View from the West. *Journal of Mathematics Education 2(2)*, 147-164.

Belbase, S. (2013). Images, anxieties, and attitudes toward mathematics. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology 1(4*), 230-237.

Beckler, S.J. (1984) Empirical validation of affect, behavior and cognition as distinct components of attitude, *Journal of Personality and Social Psychology 47*, 1191-1205.

Bishop, A., Clarkson, P., Fitzsimons, G., & Seah, W.(1999). *Values in Mathematics Education: Making Values Teaching Explicit in the Mathematics Classroom*. Paper presented at 1999 Australian Association for Research in Education Annual Conference. [World Wide Web: http://www.swin.edu.au/aare/].

Caballero, A., Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2007). Las actitudes y emociones ante las Matemáticas de los estudiantes para Maestros de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura. Comunicación presentada en el Grupo de Trabajo Conocimiento y desarrollo profesional del profesor, XI SEIEM*. Simposio de Investigación y Educación Matemática.* Universidad de La Laguna.

Callejo, M.L. (1994). Un club matemático para la diversidad. Madrid: Nercea.

Candia, P. T., Navarro, L. B. y Jacobo, A. (2009). *Actitud hacia las matemáticas de estudiantes de ingeniería de un tecnológico del sur de Sonora*. Manuscrito no publicado. Instituto tecnológico superior de Cajeme. México.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa: Estudios sobre construcción social del conocimiento*. México: Gedisa.

Carver, C. y Scheiler, M. (1997). *Teorías de la personalidad.* México: Prentice-Hall.

Casis, M., Castro, E., Rico, N. (2014). Actitudes hacia las matemáticas de los futuros profesores de E.G.B. de Chile. Estudio de cuatro descriptores actitudinales. En Lestón, P. (Ed.). (2014). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27. México, ciudad de México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Donoso, P., Rico, N. y Casis, M. (2013). Etapas de elaboración de un instrumento para indagar sobre actitudes hacia las matemáticas. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina y I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 211-218). Granada, España: Editorial Comares.

Fennema, E., y Sherman, J. A. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitudes scales: Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by females and males. *Journal for research in Mathematics Education 7(5*), 324-326.

Fox, J. D. (1981). El proceso de la investigación en educación. Pamplona: EUNSA.

Goldin, G. A. (2008). Some issues in the study of affect and mathematics learning. Draft version for discussion in tsg 30, *International Congress in Mathematics Education 11,* Monterrey, México.

Gómez-Chacón, I. M. (2000). *Matemática Emocional. Los efectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea.

Goñi, J. (2007). Las emociones de los docentes de matemáticas: emotidocencia. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas 45,* 5-7.

Guerrero, E.; Blanco, L.J. y Castro, F. (2001). Trastornos emocionales ante la educación matemática. En J.N. García, (Ed.), *Aplicaciones de Intervención Psicopedagógica.* (pp.229-237). Madrid: Pirámide.

Hart, L. (1989). Describing the affective domain: saying what we mean. En D.B. Mc Leod y V.M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving. A new perspective.* (pp. 37-45). New york. Springer-Verlag.

Kalder, R. S., y Lesik, S. A. (2011). A Classification of Attitudes and Beliefs towards Mathematics for Secondary Mathematics Pre-Service Teachers and Elementary Pre-Service Teachers: An Exploratory Study Using Latent Class Analysis. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers 5*, 1-19.

Khine, M. S., Al-Mutawah, M. y Afari, E. (2015). Determinants of Affective Factors in Mathematics Achievement: Structural Equation Modeling Approach. *Journal of Studies in Education. 5(2),* 199-211.

Lipnevich, A. A., MacCann, C., Krumm S., Burrus, J. y Roberts, R. D. (2011) Mathematics Attitudes and Mathematics Outcomes of U.S. and Belarusian Middle. *Journal of Educational Psychology*, 103(1), 105-118.

Mandler, G. (1989). Affect and learning: Reflections and prospects. En D.B. Mc Leod y V.M Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving. A new perspective*. (pp.3-19).New York: Springer-Verlag.

McLeod, D. B. (1989): The role of affect in mathematical problem solving. En D. B. McLeod y V.M. Adams (eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*. (pp.20-36). New York: Springer-Verlang.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualisation. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* (pp. 575-596). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nimier, J. (1977). Mathematiques et affectivité. *Educational Studies in Mathematics, 8(3),* 241-250.

Truttschel, W. J. (2002). *Mathematics anxiety at Chippewa Valley Technical Colleg*e. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Wisconsin, Estados Unidos de América.

Pérez-Juste, R. (1983). *Elementos de pedagogía diferencial*. Madrid: UNED.

Rico, L. (2005). Valores educativos y calidad en la enseñanza de las matemáticas, en J.M. Martínez (Ed.), *Matemáticas, Investigación y Educación. Un homenaje a Miguel de Guzmán* (pp. 158-1809. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

St-Pierre, L. y Lafortune, L. (1995). Intervenir sur la métacognition et l'affectivité. *Pédagogie collégiale, 8(4)*, 16-22.

COMPRENSIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL EN BACHILLERATO

Yanet Karina González Arellano, Ana María Ojeda Salazar
Cinvestav. (México)
ygonzalez@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx

RESUMEN: Al terminar la enseñanza de la distribución normal, se planteó gráficamente un problema de tipificación a 26 estudiantes del sexto semestre de bachillerato. 80% del grupo no dio sentido a la variable aleatoria, su estandarización, la partición del espacio muestra de sus valores; emergieron conocimientos previos deficientes como producto cartesiano, área bajo la curva, función simétrica y notación de intervalo, así como no poder operar sin la presentación de las fórmulas respectivas. Un interrogatorio a dos estudiantes, una que contestó correctamente y otro incorrectamente, reveló su inadvertencia de la exclusión mutua de eventos determinada por intervalos disjuntos de los valores de la variable. En ambos casos no se reconoció el proceso de estandarización, ni contribuyó a comprender la gráfica mostrada en el planteamiento del problema. Estos precedentes imponen investigar resultados de la enseñanza correspondiente en nivel superior.

Palabras clave: distribución, normal, estandarización

ABSTRACT: After finishing teaching normal distribution, a classification problem was graphically posed to 26 students of the sixth semester of senior high school. An eighty per cent of the group did not understand the random variable neither its standardization, nor the space fragmentation that shows its values; deficient previous knowledge emerged, such as the Cartesian product, the area under the curve, the symmetric function and the interval notation, as well as the impossibility to work without the respective formulas. A questionnaire applied to two students (one of them answered incorrectly) showed their oversight of the mutual exclusion, determined by disjointed intervals of the variable values. Both students did not recognize the standardization process; it didn't help to understand the graph shown when posing the problem. Such precedents demand to investigate about the results of the correspondent teaching process at a higher level.

Key words: distribution, normal, standardization

Introducción

La enseñanza en el nivel superior de las distribuciones de probabilidad se centra en sus propiedades formales impuestas por su utilidad para determinar sus parámetros estadísticos, sin clarificar su significado en aplicaciones concretas (por ejemplo, Torres, 2013). Nuestra investigación, perfilada hacia la comprensión de estudiantes universitarios de las distribuciones de probabilidad, requiere identificar las características de su formación en estocásticos previa en el bachillerato. Así, examinamos las propuestas de dos programas de estudio de nivel medio superior (SEP, 2013; CCH-UNAM, 2003) para el tema de nuestro interés. También realizamos una indagación (Wittrock, 1986) concerniente al desempeño de estudiantes de bachillerato en la resolución de un problema relativo a la estandarización de la distribución normal, para caracterizar su comprensión de este tema.

Elementos teóricos

Con un enfoque epistemológico, Heitele (1975) ha propuesto diez ideas fundamentales de estocásticos como guía continua de un currículum en espiral, desde un plano intuitivo hasta uno formal: medida de probabilidad, espacio muestra, adición de probabilidades, regla del producto e independencia, equiprobabilidad y simetría, combinatoria, modelo de urna y simulación, variable estocástica, ley de los grandes números y muestra. La distribución normal implica las ideas de espacio muestra, medida de probabilidad, adición de probabilidades, equiprobabilidad y simetría, variable estocástica y muestra.

Steinbring (1991) ha propuesto el triángulo epistemológico para caracterizar la constitución del concepto matemático como una interrelación entre objeto, signo y concepto; lo cual indica que éstos no pueden ser tratados de forma independiente en la deducción del significado del conocimiento matemático.

Pollatsek, Lima y Well (1981) proponen tres tipos de conocimiento que deben considerarse para la comprensión de la media: conocimiento funcional, conocimiento de cálculo y conocimiento analógico. El conocimiento funcional de un concepto hace referencia a su comprensión como un concepto del mundo real significativo. El conocimiento computacional implica una fórmula de cálculo y el conocimiento analógico puede estar relacionado a imágenes visuales que permitan una interpretación razonable del resultado obtenido al aplicar el concepto a un problema.

Métodos e instrumentos

Planteamos a un grupo de 26 estudiantes (con edades de entre 17 a 19 años), del curso optativo de *Estadística y Probabilidad II* del sexto semestre de un bachillerato público, un problema relativo a la distribución normal de probabilidad, ya estudiada en el curso. Todos los estudiantes cursaban por primera vez la materia y sólo dos habían cursado y aprobado *Cálculo Diferencial e Integral I*, y en ese momento cursaban el correspondiente curso II, ambos propuestos también como optativos.

El problema, tomado del capítulo 16 de un solucionario para bachillerato (http://www.iessantvicent.com/web/images/departaments/matematiques/solucions/m1/1BAMA1_SO_ESB04U16.pdf), se les presentó impreso en hoja de papel e incluyó la gráfica con los datos de la media y las coordenadas x para los puntos de inflexión. También se les proporcionaron tablas para Z en hoja impresa.

Problema:

La longitud de cierto tipo de peces sigue una distribución normal con media $\mu = 100$ y varianza $\sigma^2 = 81$. ¿Cuál es la probabilidad de que uno de esos peces mida entre 82 y 91mm? (Ver Figura 1).

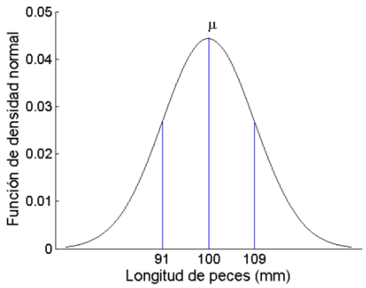


Figura 1. Distribución normal de la longitud de peces

Se pidió a los estudiantes que individualmente aplicaran lo estudiado: distribución normal estándar (identificada como la variable $Z = (X - \mu)/\sigma$), área bajo la curva normal, e identificar los valores de Z en las tablas. Cada estudiante dispuso del tiempo suficiente para dar su respuesta, pero se les dio la fórmula de la distribución normal estándar porque algunos argumentaron no recordarla y por eso no comenzaban a escribir.

La solución al problema requiere calcular $P(82 \leq X \leq 91)$, para la variable aleatoria continua X “longitud de un pez”. Por lo tanto,

$$P(82 \leq X \leq 91) = \int_{82}^{91} f_X(x)dx = \int_{82}^{91} \frac{1}{9\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-100}{9}\right)^2} dx,$$

Con $f_X(x)$ como la función de densidad de la variable continua X y x como los valores que ella toma, lo cual relaciona la probabilidad con el área bajo la curva. El método de solución enseñado en el curso es el siguiente: de la Figura 1 se tiene que $\mu = 100$ y $\sigma = 9$. La medida de probabilidad en el problema de los peces se determina al estandarizar (tipificar) la variable aleatoria X. De aquí que, para $\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{X}-100}{9}$ y mediante el uso de las tablas de la distribución normal estándar se tiene:

$$\begin{aligned} P(82 \leq X \leq 91) &= P\left(\frac{82-100}{9} \leq \frac{X-100}{9} \leq \frac{91-100}{9}\right) = P\left(\frac{-18}{9} \leq \frac{X-100}{9} \leq \frac{-9}{9}\right) \\ &= P\left(-2 \leq \frac{X-100}{9} \leq -1\right) = P(-2 \leq Z \leq -1) = P(Z \leq -1) - P(Z < -2) \\ &= 0.1587 - 0.0228 = 0.1359. \end{aligned}$$

A los datos recopilados se les aplicó la célula de análisis de la enseñanza (Ojeda, 2006). Según estos criterios, la caracterización del problema propuesto se resume en la Tabla 1.

Tabla 1. Criterios de análisis identificados en el problema planteado

Criterio	Solución al problema
Ideas fundamentales	
1) *Espacio muestra*	Conjunto Ω de todos los posibles resultados de la medición de longitudes de peces, que puede tomar distintos valores no negativos del intervalo $[0,\infty)$. El espacio muestra sería un subconjunto de $[0,\infty)$.
2) *Medida de probabilidad*	A cada evento (subconjunto de Ω), P asigna valores del intervalo real $[0,1]$.
3) *Adición de probabilidades*.	Dados dos subconjuntos $A, B \in [0,\infty)$, tal que $A \cap B = \emptyset$ se cumple que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
4) Equiprobabilidad y simetría	La función es simétrica respecto a $X = \mu$ por lo que respecto a este valor se tienen eventos equiprobables, por ejemplo, en $P(X \leq 91) = P(X \geq 109) = 1 – P(X < 109)$.
5) Variable aleatoria X	La función X es la variable aleatoria continua $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, “longitud de peces”, que asocia a cada uno de los peces su medida de longitud.
6) Muestra	El enunciado supone una muestra de peces.
Otros concepto matemáticos	Plano cartesiano, orden en los números reales, intervalos reales, suma, resta, área, función simétrica y porcentaje.
Recursos semióticos	Gráfica, lengua natural escrita y simbología matemática, en particular, notación de intervalo real.
Términos para referirse a estocásticos	Distribución normal, media, varianza y probabilidad.
Referente	Probabilidad de que la longitud de peces, como variable aleatoria $X \sim N(\mu,\sigma)$, esté en un intervalo real dado $[a,b]$.

Luego de la revisión de las soluciones que dieron los estudiantes, seleccionamos a dos de ellos (*Pa* y *Lu*) para entrevistarlos individualmente en formato semiestructurado (Zazkis y Hazzan, 1999). *Pa* determinó de forma correcta la probabilidad solicitada en el problema y, de acuerdo al profesor titular del grupo, era su mejor estudiante, había aprobado *Cálculo Diferencial e Integral I* y ya se había inscrito al curso II. Al contrario, *Lu* dio una solución incorrecta al problema y no contaba con las bases del cálculo integral. Las entrevistas se efectuaron en el plantel respectivo seis semanas después de la aplicación del problema, con duración de 75 minutos aproximadamente cada una; y se les videograbó para su análisis.

Resultados del análisis

Planteamiento Institucional

En el bachillerato, la propuesta para la enseñanza de la distribución normal pretende que se identifique esta distribución como un "modelo continuo del comportamiento de una gran diversidad de fenómenos aleatorios de su entorno" (CCH-UNAM, 2003, p. 22) y subraya la estandarización de una variable aleatoria normal y su uso en la resolución de problemas.

Para la normalización, se espera que el estudiante comprenda "el significado de la estandarización de una variable aleatoria normal y las ventajas de efectuar este proceso" (loc. cit.), e identificar "el área bajo la curva normal estandarizada a partir de la distribución de probabilidad normal" (SEP, 2013, p. 22). Para lograr este objetivo se sugiere "explicar cómo se encuentra la curva normal estandarizada ubicando la media y la desviación estándar" (loc. cit.). El programa de estudios recomienda: "realizar en equipo el análisis de los ejemplos presentados y elaborar nuevos ejemplos donde se muestre el área bajo la curva normal estandarizada a partir de la tabla" (loc. cit.); y:

recordar al estudiante el papel que desempeñan las constantes a y c en la gráfica de una función de la forma $y = af(x - c)$ y asociarlo con μ y σ en la función de probabilidad Normal, mostrar al estudiante el uso de las propiedades geométricas de la Normal Estándar en la evaluación de probabilidades y en el cálculo de z. (CCH-UNAM, 2003, p. 22).

Algunas de las actividades para promover estos desempeños implican investigación documental, presentación en plenaria por parte de los estudiantes y el uso de las TIC's.

El problema. La Tabla 2 caracteriza las respuestas de acuerdo a la célula de análisis.

Tabla 2. Criterios de análisis identificados en la solución al problema planteado

Criterio	Problema
Espacio muestra	Un estudiante escribió 13.59, el porcentaje que asoció a la probabilidad, como un valor del eje longitud de peces.
Medida de probabilidad	Dos de los estudiantes dieron como respuesta un valor negativo.
Adición de	Los estudiantes no advirtieron que $P(Z \geq -2) - P(Z \geq -1) = P(-2 \leq Z \leq$

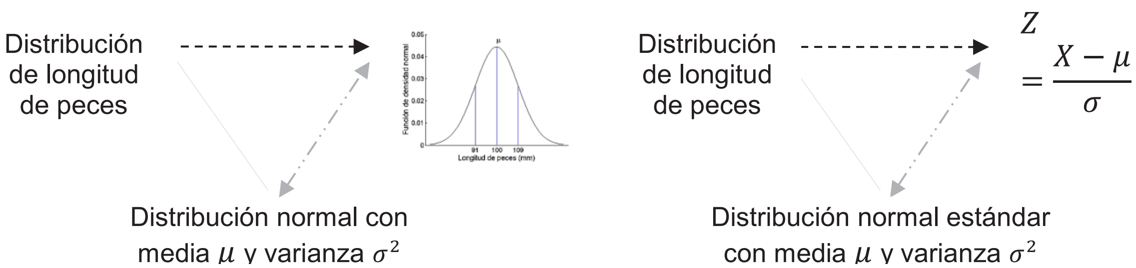
probabilidades	$-1)$, ni que $P(-2 \leq Z \leq -1) = P(Z \leq -1) - P(Z < -2)$.
Equiprobabilidad y simetría	Dos estudiantes determinaron al estandarizar: $P(Z \geq -2) - P(Z \geq -1) = 0.97725 - 0.84134 = 0.1359$.
Variable aleatoria X	Diecisiete estudiantes escribieron x (los valores que toma la variable X) como si fuera lo mismo que z o que X. Así, tres escribieron $P(x = 82)$ y $P(x = 91)$ y un estudiante escribió $P(x \geq 82)$ y $P(x \geq 91)$. Cinco estudiantes no incluyeron las variables en su solución, sino sólo sustituyeron los valores correspondientes.
6) Muestra	Aun al sombrear correctamente la región bajo la curva entre 82 y 91 no advirtieron que su respuesta, 0.8185 o 0.6826, distaba mucho de corresponder a la región que identificaron como solución al problema.
Otros conceptos matemáticos	Se manifestó insensibilidad al orden en los números. Por ejemplo, para referirse a la probabilidad de que uno de los peces midiera entre 82 y 91 mm, 23% (seis estudiantes) indicó que iban a determinar $P(82 \leq x \geq 91)$. El 12% (tres estudiantes) no se percató del orden de los números enteros al escribir que $91 \leq 82$ en $P(91 \leq x \geq 82)$. Dieciocho estudiantes concluyeron que la probabilidad de sacar un pez de entre 82 y 91 mm era el porcentaje asociado a su respuesta, aunque ésta no concordara con la región sombreada en su figura.
Recursos semióticos	Se identificó falta de conocimiento de la notación de intervalo como de la expresión algebraica para calcular la probabilidad de que un pez arbitrario midiera entre 82 y 91 mm. Ningún estudiante utilizó la información de la gráfica para solucionar el problema, sólo para sombrear la región que correspondía a la solución al problema, porque se les pidió lo hicieran.
Términos para referirse a estocásticos	Longitud, distribución normal, media, varianza, probabilidad, mida, entre 82 y 91mm.
Referente	Distribución normal de longitud de peces, con media μ y desviación σ.

En general, ocho estudiantes (31%) solucionaron correctamente el problema, 54% incorrectamente y 15% de ellos no lo resolvió. Mostraron dificultades para solucionarlo 14 de los 26 estudiantes. Al tipificar la variable (restar la media y dividir entre la desviación estándar los valores de *X* en el intervalo [82, 91]), los veintidós estudiantes sólo se limitaron a utilizar la fórmula proporcionada, $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, ignorando el proceso implicado al estandarizar. Todos los estudiantes que resolvieron el problema (incorrecta o correctamente) realizaron por separado el cálculo de z_1 y z_2, buscaron en las tablas sus valores y finalmente realizaron una resta, aunque en dos casos invirtieron el orden y les dio negativo. Los estudiantes tendieron a seguir una secuencia de resultados en la misma línea, llegando a igualar números distintos. Por ejemplo, para el cálculo de z_1 obtuvieron -1 y a su derecha lo igualaron con

$P(z \leq -1)$, es decir, escribieron: $z_1 = \frac{91-100}{9} = -1 = 0.3413$; aunque nadie distinguió z_1 de z_2 y solamente escribieron $z = \frac{91-100}{9}$ y $z = \frac{82-100}{9}$.

Triángulo epistemológico

Los resultados de este grupo de estudiantes indican que no se establecieron las interrelaciones en el triángulo epistemológico (Steinbring,1991), que corresponderían a la constitución del concepto de distribución normal (véase la Figura 3).



Entrevista

El guion de entrevista semiestructurada se basó en el análisis de las respuestas al problema planteado. A *Pa* y a *Lu* se les presentaron acetatos con las gráficas de la distribución normal, $N(100, 9^2)$ y $N(0,1)$, después de preguntarles: ¿Por qué estandarizan? ¿Es necesario estandarizar? ¿Qué significa estandarizar? ¿La gráfica de la distribución normal es igual a la de la normal estándar? También se les pidió que describieran gráficamente qué pasaba con la normal al estandarizar y que esbozaran su gráfica estandarizada. Ninguno logró explicar en qué consistía la estandarización y reconocieron operar sólo como una regla que les indicaba que debían evaluar la fórmula $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ para 82 y 91 en este caso, buscar en las tablas para Z y restar:

I: ¿Gráficamente entiendes el proceso de estandarización? ¿Qué es lo que estás haciendo?

Pa: Mmmmm realmente… no, porque no vemos mucha teoría [ríe], entonces no le podría decir o sea, a mi igual, o sea, pónganme… esteee… se escucha como que un poco absurdo, perooo no vemos teoría. Vemos así como que un parrafito y ya, entonces a lo que nos vamos es a los problemas. Siento que por eso es que no puedo como que contestarle todo, porqueee… eh… a mi me pone un problema y le digo, va, lo hago porque ya me sé la fórmula, porque sé quee... qué tengo que sustituir con qué, más… sin embargo, no, tal vez no lo podría taaan… tan explicarlo. Por ejemplo, ahorita que me estaba diciendo de la… de la gráfica normal. Entonces, digoo, no [ríe]. Creo que no la podría hacer.

I: Si, ya. Mmm o sea lo que tú haces al estandarizar solamente se reduce a… ¿a aplicar esta fórmula? ¿Y buscar en las tablas y hasta ahí?

Pa: Y buscar en las tablas y hasta ahí. Ajá, es lo único.

El interrogatorio también dejó claro que la gráfica nada les sugirió para resolver el problema, sólo se le utilizó porque se les indicó sombrear la región que correspondía a la probabilidad solicitada. Sin embargo, ambos estudiantes reconocieron que pudieron haber resuelto el problema sin ella y que, por el contrario, de no proporcionarles los datos de media y varianza (o desviación estándar) no habrían podido determinarlos, sabiendo que 91 y 109 correspondían a las coordenadas x de los puntos de inflexión.

Una pregunta de la entrevista consideraba una respuesta incorrecta de otro estudiante, quien sombreó la región pedida erróneamente y daba como respuesta a la probabilidad el 97%. *Pa* indicó que no correspondía ese valor con lo sombreado, pero no logró indicar los posibles valores que tomaba la función de probabilidad ni que 97% era incorrecto.

I: ¿Qué con respecto a lo que puso? Él dice, “la probabilidad de que un, uno de los peces mida entre ochenta y dos y noventa y cinco es de noventa y siete punto, noventa y siete... punto setenta y dos por ciento”. ¿Es correcto decir que la probabilidad es de noventa y siete punto setenta y dos por ciento? ¿Es correcto decir eso?

Pa: Mmmmm. Pues se supone que debe de ser de cero para, deee... ¿no? cero punto uno, para arribaaaa… ¿no? o sea tiene que ser arriba de cero.

I: ¿Y puede seerr… mmm cinco, por ejemplo? Decir, la probabilidad de que… este… de que hoy llueva.

Pa: ¿es del cinco por ciento? Pueees…se supone que sí.

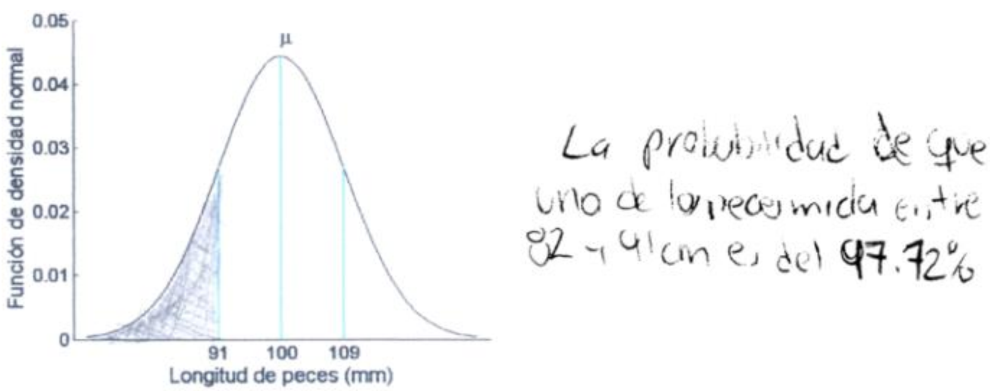


Figura 3. Ejemplo de respuesta de uno de los estudiantes

Tabla 3. Criterios de análisis identificados en las entrevistas

Criterio	Entrevista
Ideas fundamentales	
1) *Espacio muestra*	Ninguno de los dos estudiantes identificó los valores del eje de las ordenadas. *Lu*indicó que eran medidas de densidad de los peces.
2) *Medida de probabilidad*	Ninguno de los dos estudiantes entrevistados pudo indicar los valores que toma *P*, además de que expresaron su solución como un porcentaje.
3) *Adición de probabilidades*.	Reconocieron no saber en qué consistía la estandarización ni, por tanto, porqué efectuar $P(-2 \leq Z \leq -1) = P(Z \leq -1) - P(Z < -2)$.
4) Equiprobabilidad y simetría	Ninguno de los dos estudiantes describió la gráfica de la normal como simétrica. A *Lu* se le preguntó directamente si era simétrica y, aunque indicó que sí, su argumento fue incorrecto.
5) Variable aleatoria X	Ambos estudiantes reconocieron que los valores en el eje de las abscisas eran longitudes de peces, aunque ninguno dejó en claro que era una variable aleatoria. Incluso *Pa* preguntó: *¿una variable aleatoria?*
6) Muestra	Ambos estudiantes son conscientes de que la muestra utilizada en la gráfica corresponden a medidas de longitudes de peces.
Otros conceptos matemáticos	En la solución que *Lu* dio, la probabilidad de escoger un pez que midiera entre 82 y 91 mm era $P(x) = 3$; y en la entrevista, como $P(82 > x \leq 91)$. Ninguno de los dos estudiantes reconoció formalmente la relación entre área y probabilidad.
Recursos semióticos	Se desconoció la simbología matemática para representar la probabilidad de que la variable aleatoria *X* tome valores entre *a* y *b*. Ambos estudiantes reconocieron que la gráfica no les ayudó para resolver el problema. Ninguno pensó en una nueva gráfica al estandarizar. *Pa* presenta una falta de conocimiento por la notación y en la solución al problema lo plantea como $x = (82 \leq x \leq 91)$ y en la entrevista como $P(x82 \leq x91)$.
Términos para referirse a estocásticos	*Pa* señaló que no conocía la relación entre varianza ni desviación estándar. Ambos estudiantes utilizaron“media” como sinónimo de intermedio.
Referente	Distribución normal de longitud de peces, con media μ y varianza σ^2.

Comentarios

Las respuestas al problema planteado, así como respuestas a las entrevistas, revelaron que los estudiantes favorecen el pensamiento en el formato de frecuencia por sobre un formato de probabilidad, como lo señalan Gigerenzer y Hoffrage (1995). A pesar de obtener valores en decimales, todos ellos los expresaron en porcentajes y concluyeron así sus respuestas a la petición de la probabilidad y no con expresiones decimales entre cero y uno.

Los estudiantes manifestaron, a lo más, un conocimiento de cálculo (Pollatsek et al., 1981) de la distribución normal, pues interpretaron la resolución del problema planteado sólo como aplicación de un algoritmo aritmético para obtener un resultado, según ellos satisfactorio. No interrelacionaron el referente y la gráfica con el concepto de distribución normal; su respuesta del cálculo de la probabilidad pedida fue independiente de la región sombreada en su gráfica, por lo que no se puede deducir el conocimiento funcional ni analógico, en síntesis, matemático, enfoco. Un objetivo de los programas es que el estudiante “identifica el área bajo la curva normal estandarizada a partir de la distribución de probabilidad normal” (SEP, 2013, p. 22) o “comprende el significado de la estandarización de una variable aleatoria normal y las ventajas de efectuar este proceso” (CCH-UNAM, 2003). Pero del análisis de sus respuestas, estos objetivos no se cumplen.

Referencias bibliográficas

Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM (2003). *Programa de Estudios de Estadística y Probabilidad I y II*. Recuperado el 20/04/2014 de http://www.cch.unam.mx/sites /default/files/plan_estudio/mapa_estadistica.pdf.

Dirección General de Bachillerato, (2013). *Programa de Estudios. Probabilidad y Estadística II*. Recuperado el 19/04/2014 de http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/01programasdeestudio/cfp_6sem/PROBABILIDAD_ESTADISTICA_II.pdf

Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to improve bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review*, *102*, 684-704.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *EducationalStudies in Mathematics, 6* (2), 187-205.

(sf). *Solucionario de Matemáticas 1*, Bachillerato, Cap. 16, p. 84. Madrid: Ediciones SM.

Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: Un ensayo en la enseñanza de estocásticos. *Matemática educativa, treinta años.* México: Santillana-Cinvestav, pp. 195-214.

Pollatsek, A., Lima, S. & Well, A. (1981). Concept or Computation: Students’ Understanding of the Mean. *Educational Studies of Mathematics*, *12*(2), 191-204.

Steinbring, H. (1991). The Concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowledge. *Educational Studies of Mathematics*, *22*, 503-522.

Torres, O. (2013). *Limitaciones en la adquisición de ideas fundamentales de estocásticos por estudiantes de ingeniería: El caso de un instituto tecnológico*. Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav.

Wittrock, M. (1986). *La investigación de la enseñanza II*. Barcelona: Paidós

Zazkis, R. & Hazzan, O. (1999). Interviewing in Mathematics Education Research: Choosing the Questions. *Journal of mathematical behavior*, 17(4), 429-439.

EL APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN EN LAS CÓNICAS

Daniel Ramírez Balandra, Jorge Hernández Márquez
Tecnológico de Monterrey Campus Hidalgo. (México), Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo UAEH. (México)
danielramirez@itesm.mx, jhmpren@yahoo.com.mx

RESUMEN: El manuscrito tiene por objetivo analizar el desarrollo de las habilidades de pensamiento que intervienen en los procesos de demostración matemática empleadas por los estudiantes al abordar los contenidos de aprendizaje de las secciones cónicas. Con los primeros resultados se construyó el Estado del Conocimiento, se definió el Objeto de Estudio y la Perspectiva Teórica. La perspectiva teórica recupera los postulados de la Semiótica (Godino, 2003) y haciendo uso de ellos se pudo elaborar un Esquema Semiótico de Instrucción Matemática (ESIM) que involucra procesos semióticos y relacionarlo con el Esquema de Demostración Personal (EDePe) que involucra procesos de demostración.

Palabras clave: procesos de pensamiento, semiótica, argumentación

ABSTRACT: The paper is aimed at analyzing the development of thinking skills, which take part of math demonstration processes used by students to affront the learning contents of conic sections. Taking into account the first results, it was possible to establish the state of knowledge, the object of study and the theoretical perspective of this investigation. The theoretical perspective recovers the Semiotic postulates (Godino, 2003). The use of these postulates allowed elaborating a Math Training Semiotic Schedule that involves semiotic processes, and relating them to the Personal Demonstration Schedule that involves demonstration processes.

Key words: thinking processes, semiotics, argument

Introducción

Las habilidades de pensamiento involucradas en el proceso de una demostración matemática pueden aportar información sobre cómo éstas se logran articular. Desafortunadamente la poca, o casi nula, presencia de la demostración en las prácticas de los profesores es una constante en todos los niveles educativos; esto como posible consecuencia del currículo, creencias de los profesores, formación inicial de los mismos, falta de interés de los estudiantes, errores y deficiencias de los mismos, entre otras. La forma en cómo los estudiantes procesan los significados, signos, símbolos y el sentido que se les dé a ellos puede indagarse mediante sus prácticas argumentativas involucradas en una actividad demostrativa. La naturaleza matemática, histórica y epistemológica de las secciones cónicas es rica en significados, representaciones y sintaxis del lenguaje matemático que ayuda en el proceso de investigación de estas habilidades de pensamiento.

Alcances del Estado del Conocimiento

Este escrito es parte de un proyecto de investigación que se desarrolla como tesis doctoral, en donde inicialmente se tienen avances en relación al estado del conocimiento que da cuenta del periodo 1993 – 2014. Para su elaboración se revisaron 46 documentos que se obtuvieron de fuentes de investigación diversas tales como incluyen artículos de revistas, libros, tesis doctorales, actas de congresos, etcétera. Con la información categorizada y analizada se construyeron cinco categorías analíticas: i) Historia de la demostración matemática, ii) Epistemología de la demostración matemática, iii) La demostración matemática en el entorno curricular, iv) Procesos de enseñanza de la demostración matemática y v) Procesos de aprendizaje de la demostración matemática; en cada una se logran identificar las ausencias del conocimiento que está en relación con la demostración matemática.

Uno de los alcances que presenta la investigación emana desde este estado del conocimiento, en donde se explicitan los huecos o vacíos de conocimiento encontrados del objeto de estudio, los investigadores de donde se encontraron los trabajos más significativos para esta investigación son Larios (2006) Crespo (2007) y Recio (2001) los principales hallazgos son: a) La demostración matemática, está en constante evolución. Tal evolución dependerá del contexto tecnológico, cultural y social de los involucrados en su tratamiento.

b) La mayoría de las veces no existe un método único para demostrar algo, ello dependerá de la correcta aplicación de cada método demostrativo.

c) Debería existir una apertura a la definición, uso y significado de la demostración matemática para los matemáticos básicos y redescubrirla didácticamente para los docentes. d) El Software por sí sólo no hace demostraciones, obedece al que lo manipula que es este último el que las logra hacer. El software facilita la medición, graficación y los cálculos, pero el usuario es el que se auxilia de estos, los interpreta y logra demostrar.

e) Trabajar a la demostración en la formación inicial de los futuros profesores de matemáticas podría proveer a las nuevas generaciones de herramientas y habilidades matemáticas valiosas para la demostración.

f) Es importante indagar sobre las creencias, afinidades y actitudes del profesorado en relación a la demostración desde las matemáticas como desde la didáctica.

g) Existe la necesidad de introducir en todo el currículo de todos los niveles educativos, conceptos y procedimientos para favorecer en los estudiantes el logro de habilidades para demostrar, conjeturar y argumentar; obviamente, en cada nivel educativo en donde se esté trabajando se debe exigir un rigor matemático adecuado.

h) El tema de las secciones cónicas de bachillerato es relevante debido a los significados y al sentido que se les pueda dar en la vida cotidiana ya que estos conceptos poseen diferentes representaciones y aplicaciones.

i) No considerar a la demostración dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje podría privar a los estudiantes de un instrumento matemático de validación dentro de las matemáticas.

j) El uso correcto de los símbolos y signos matemáticos en las actividades demostrativas de los estudiantes es necesario para que el lenguaje matemático en el aula sea comprendido por todos.

k) Proveer a los estudiantes de un lenguaje matemático suficiente en todos los niveles educativos les podría permitir leer y comprender los libros de matemáticas que se utilizan y las demostraciones que en ellos se realicen.

l) Los cambios curriculares que ha tenido la educación mexicana, particularmente en el Nivel Medio Superior, probablemente hacen a la matemática más cercana a los estudiantes, pero no necesariamente los fortalecen en relación a la demostración.

m) El guiar a los estudiantes con el método heurístico a experimentar, descubrir, conjeturar, analizar, tal vez sea necesario y probablemente suficiente; pero el que se entrelacen todas estas habilidades y lleguen a la demostración del objeto analizado podría ayudar a construir o reconstruir nuevos significados.

n) Existen diversos errores y dificultades que presentan los estudiantes cuando se les propone una demostración que van desde falta de conocimientos previos, significados incorrectos atribuidos a ciertos conceptos matemáticos, mal uso del lenguaje matemático, reconocimiento de lo que es demostrar y la falta de métodos de demostración principalmente.

La revisión de la literatura anterior permitió plantear la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo las habilidades de observar, conjeturar, validar y argumentar permiten en los estudiantes construir procesos de demostración matemática en el tema de las cónicas? Asimismo, dentro de estas habilidades es posible analizar las argumentaciones que se suscitan en el aula como otro factor clave en el proceso de demostración y generar interpretaciones al respecto sobre los procesos involucrados en el aprendizaje de la demostración en las secciones cónicas.

Delimitación del objeto de estudio

El concepto de demostración ha tenido numerosas evoluciones a lo largo de su recorrido histórico, desde sus inicios en las culturas de oriente medio su uso obedecía a la validación y la justificación de la aseveración realizada, era un uso más como para convencer a los demás que como una forma de enseñanza. Junto con la demostración, la educación escolar también ha estado en constante evolución, vista desde las Ciencias de la Educación, impactando esto en algunos de sus elementos como el currículum, la evaluación, las políticas educativas junto con sus reformas y demás. Todas estas transformaciones han tenido consecuencias en la educación de los jóvenes mexicanos, en especial atención se volteará la mirada a los estudiantes del Nivel Medio Superior y particularmente a los que cursen la materia de Geometría Analítica en el tema de las Secciones Cónicas.

Se considera el tema de las secciones cónicas debido a la naturaleza de los significados del tema, los contenidos que anteceden a las cónicas son el álgebra y la geometría plana, estos dos son necesarios para que puedan trabajarse las secciones cónicas con sus respectivos significados y manejo de símbolos y signos. Como una consecuencia de la revisión anterior, el poco tratamiento de la demostración en el aula en todos los niveles educativos, la casi nula presencia de la demostración en el currículo particularmente en bachillerato, la formación inicial del profesor de matemáticas, los malos resultados de la educación mexicana reflejados en las pruebas estandarizadas internacionales derivados tal vez de la poca actividad de reflexión y el pensamiento analítico de los estudiantes y la ausencia de atención a la construcción de significados por parte de los mismos son parte del problema de investigación.

Perspectiva teórica

Una postura que se emplea para la investigación de la cognición matemática es la Didáctica de las Matemáticas que "*se interesa por identificar el significado que los alumnos atribuyen a los términos y símbolos matemáticos, a los conceptos y proposiciones, así como explicar la construcción de estos significados como consecuencia de la instrucción*" (Godino, 2003, p.28). La relevancia del signo, de las representaciones, de la comprensión o conocimiento y del sentido que se les asignen a los conceptos en las clases de matemáticas es relevante para el aprendizaje de las mismas y para que todas estas interactúen en armonía. En el aula debe de hablarse un mismo lenguaje por todos los participantes, ya que, si esto no se tiene difícilmente podrán dar significados a conceptos que no se entienden. Un enfoque, como consecuencia de la pregunta de investigación que se pretende emplear para analizar estos significados, signos, símbolos, lenguajes y representaciones es la Semiótica.

La perspectiva teórica que orienta el trabajo está basada en la semiótica y su relación con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Entre las herramientas semióticas que propone Godino (2003) incluidas en los procesos cognitivos, son el significado del símbolo y de los signos relacionadas en los procesos del discurso matemático en el aula en donde entran en juego estas interacciones entre la instrucción del profesor y el proceso cognitivo del estudiante que recibe la instrucción para su posterior análisis y comprensión a través de los signos y símbolos que ambos actores utilizan para comunicarse convirtiéndola entonces en un lenguaje matemático en el que ambos personajes deben de entenderlo de la misma manera. En el apartado del Marco Teórico se elaboran dos esquemas, inicialmente el Esquema de Demostración Personal (EDePe) que aborda los estadios que se pueden tener en el proceso de demostración por parte de un estudiante y relacionado con este se tiene al Esquema Semiótico de Instrucción Matemática (ESIM).

Una posible manera en la que un estudiante pueda desarrollar prácticas demostrativas en entornos favorables es que éste tenga un esquema de prueba adecuado que le ayude en el proceso de la demostración (Ibañes y Ortega, 2003). Un esquema de prueba se puede considerar como el proceso que se lleva a cabo para llegar a la demostración. Este esquema contiene varias actividades relacionadas íntimamente y secuenciadas de tal manera que el último eslabón de la cadena sea la demostración. El alumno en cada momento del proceso tiene un esquema de prueba que, con una instrucción apropiada, va evolucionando y paralelamente evoluciona también el conocimiento del alumno respecto a la demostración, como lo mencionan Ibañes y Ortega (2003). Cañadas, Castro y Castro (2007) se basan en Polya para identificar unos pasos del proceso de razonamiento, estos son i) Trabajo con casos particulares. ii) Organización de casos particulares. iii) Identificación de un patrón. iv) Formulación de conjetura. v) Justificación de conjetura (basada en casos particulares). vi) Generalización. vii) Demostración.

Estos pasos se pueden encontrar en el Esquema de Demostración Personal (EDePe) que se va a tomar en esta investigación. También contiene elementos del propuesto por Álvarez, Ángel, Carranza y Soler (2014), algunos otros de Alvarado y González (2010) y elementos del modelo de Toulmim, que al momento de adecuarlos se obtiene este esquema de prueba que se puede expresar gráficamente de la siguiente forma.

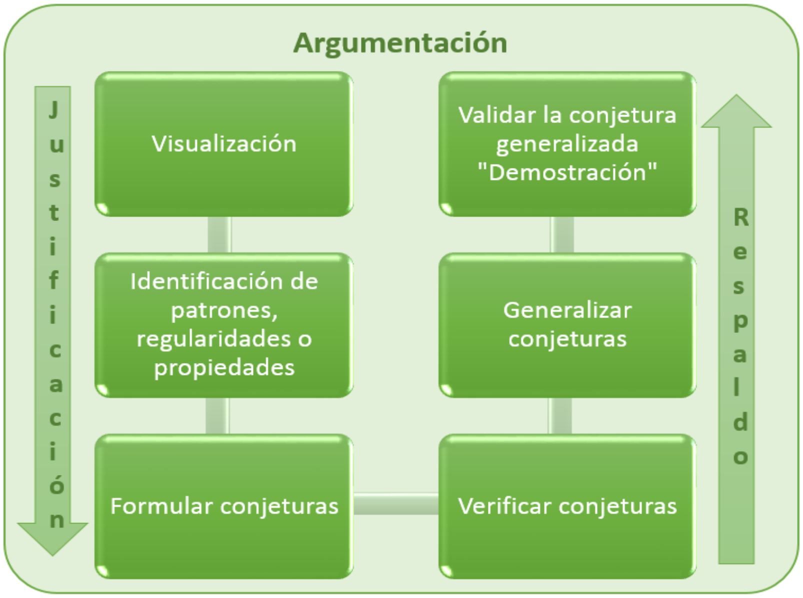


Figura 1. Esquema de Demostración Personal (EDePe)

El Esquema de Demostración Personal (EDePe) anterior se explica de la siguiente manera. Básicamente, la visualización consiste en observar el objeto matemático e identificar sus principales características, de las cuales se crean imágenes mentales, todo esto surge debido a que el ser humano tiene ya construidos datos o bases que al observar algo le permite describirlo, se encuentran también en este estadio a la visualización y el análisis visual.

Posteriormente, la identificación de patrones, relaciones, regularidades o propiedades provee de cierta información de lo observado que permite tipificar aquello que es relevante y común. Seguido de esta identificación está el poder formular conjeturas, consecuencia de la observación y la identificación. Paralelo a este proceso de observar, explorar y formular una conjetura, se encuentra la Justificación, esta justificación establece una relación entre los datos y la formulación de conjeturas, dándole solidez a la conjetura.

La verificación de las conjeturas sirve para poder llegar a convencerse de que la conjetura planteada sea verdadera, particularmente en el contexto particular en el que fue planteada. Una vez que la conjetura fue verificada se sigue a generalizar conjeturas, en esta parte, se pretende que se puedan cumplir las conjeturas ya no en ese contexto en particular donde fue planteada, sino que se pueda cumplir en cualquier contexto en general. Una vez hecho esto y por último se tiene que validar la conjetura generalizada, es decir, llegar a una demostración matemática, este es el último eslabón del esquema de prueba.

Paralelo al proceso de verificar conjeturas, generalizar conjeturas y verificar las conjeturas ya generalizadas, está desarrollándose un Respaldo que sirve de base a la justificación y su función es la de presentar una mayor evidencia, es decir, se está gestando algo ya mucho más sólido y construido matemáticamente hablando. Cabe mencionar que el proceso de argumentación está presente en todos los eslabones del esquema de prueba, ya que no es exclusivo de alguno de ellos, en cada eslabón se tiene que argumentar lo que está aconteciendo

Particularmente se está hablando de las Matemáticas por la naturaleza de la investigación. Siguiendo esta línea se hablará de la demostración, de todos los procesos cognitivos, significados, sentido, símbolos y signos, del lenguaje entre otros conceptos que permitirán al estudiante conjeturar, observar, validar, generalizar y demás habilidades.

En su libro Demostrar es un problema o el problema es demostrar, Víctor Larios da su concepción de demostración, citando "*se puede decir, de una manera breve, que una demostración matemática está constituida por una serie de argumentos que tienen, tanto en su contenido como en su estructura, particularidades muy específicas*" (Larios, 2006, p.22). Hace hincapié que lo relevante del proceso de demostración; no es en sí el llegar a demostrar, sino el estudiar las posibles justificaciones que los alumnos proporcionan para revisar lo que ellos están entendiendo por demostrar. Desde la perspectiva teórica se pretende dar ese sustento al Esquema de Demostración Personal con el Esquema Semiótico de Instrucción Matemática, el ESIM provee de información sobre las concepciones teóricas que tiene un estudiante hacia sus procesos de pensamiento, las relaciones entre concepto, representaciones, comprensión, signo, significado, sentido y lenguaje podrían relacionarse con las de observación, identificación de patrones, regularidades o propiedades, formular conjeturas, validar conjeturas, generalizar conjeturas y argumentación.

El Esquema Semiótico de Instrucción Matemática se explicita a continuación.

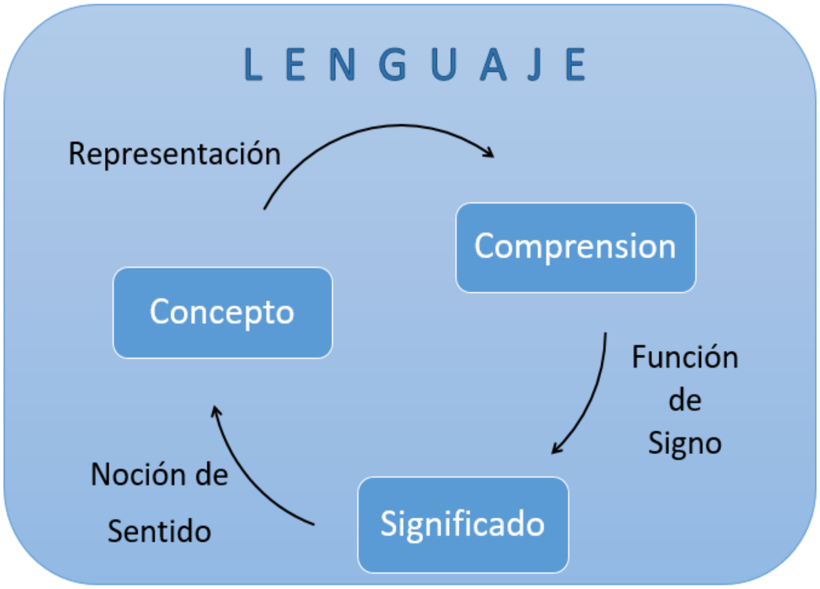


Figura 2. Esquema Semiótico de Instrucción Matemática (ESIM)

En este ESIM, se observan las interacciones que se tienen cuando dentro de las Matemáticas un concepto es presentado a un estudiante. Al momento de presentarle el concepto éste se puede representar, en primera instancia interna y luego se puede hacer externo en diversas maneras. Cuando estas representaciones externas, ubicadas en cierto contexto y bajo la institución antes mencionada, son explicitadas por el estudiante de forma correcta, entonces el estudiante las comprende, existen dos tipos de comprensión, comprensión instrumental y relacional; la comprensión instrumental se entiende como algo fácil de elaborar o de comprender ya que básicamente lo que hace es aplicar algún algoritmo o regla o "ley" que cumple bajo ciertas condiciones en matemáticas; este nivel de conocimiento es básico y sólo se queda en lo operacional, en saber utilizar un instrumento para obtener algún resultado. Mientras que la comprensión relacional logra movilizar estos saberes hacia nuevos campos, no necesariamente específicos de las matemáticas, en donde se le pueda dar solución a algún problema en cierto contexto y bajo ciertas condiciones naturales. Cuando un estudiante logra una comprensión correcta, se le aplica una función de signo para que este concepto cobre un cierto significado al momento. Cuando el estudiante le da significado al concepto y lo logra utilizar para elaborar algo en general entonces le está brindando una noción de sentido (el uso que se le otorga al significado), la cual le permitirá tener una nueva conceptualización y así ad infinitum, sin olvidar que dentro de todas estas interacciones el lenguaje que se hable entre los sujetos permitirá el poder transitar en cada uno de estos momentos del esquema. El leguaje denota expresión, comunicación, utilizar signos y símbolos para interactuar con el otro. El lenguaje entonces se puede categorizar en, al menos, dos tipos importantes. El lenguaje ordinario que es el que cotidianamente se utiliza, tiene la función de comunicar. No existe una diferencia de lenguaje ordinario bueno ni malo ya que el objetivo de comunicar se cumple. El lenguaje especializado es el que conjuga ciertas reglas gramaticales asociadas a una institución (como las matemáticas). Este lenguaje se emplea en un contexto particular socialmente consensuado y aceptado. En este tipo de lenguaje sí existe una diferencia entre el lenguaje especializado básico y el lenguaje especializado avanzado. En el lenguaje especializado básico, particularmente en el aula de matemáticas, se tienen como referencias las frases "ley, regla, fórmula, así está en el libro" entre otras. En el lenguaje especializado avanzado, igualmente desde las matemáticas, se tienen a la argumentación, justificación, deducción, validez, rigor, sustento, entre otras; en este nivel se espera que todas las conjeturas que se generen se intenten validar mediante un pensamiento matemático analítico y se emplee un lenguaje matemático con el rigor que el nivel exige.

Reflexiones y conclusiones

Para que la demostración matemática en el bachillerato se pueda suscitar tienen que converger al menos el currículo, la evaluación, los profesores y los alumnos, con la finalidad de favorecer el desarrollo de habilidades como observar, conjeturar, validar y argumentar. En diversos documentos revisados en el estado del conocimiento se da evidencia de las deficiencias que tienen los estudiantes de bachillerato al ingresar a la educación superior, por ejemplo, cuando se les solicita que hagan demostraciones matemáticas. Pero esas carencias, en algunos casos, las padecen los profesores que imparten las clases de matemáticas. Si el profesor no concibe a la demostración como algo que pueda favorecer el aprendizaje no desarrollará los sentidos y significados propios del lenguaje matemático en sus estudiantes. Lo que permite identificar estos sentidos y significados es todo el proceso que el estudiante siguió para llegar a una demostración; en el camino tuvo que observar, analizar, categorizar, plantear una conjetura y probarla de manera general. La demostración no es un proceso acabado o repetitivo; al contrario, es un proceso en constante evolución y bien utilizado permite analizar procesos cognitivos de los estudiantes, el análisis de estos procesos desde la semiótica da indicios de la forma en cómo se perciben estos significados, representaciones, sentido. El Esquema de Demostración Personal puede servir de guía para la identificación del proceso de demostración, mientras que el Esquema Semiótico de Instrucción Matemática podría ayudar en el sustento teórico desde la semiótica para el Esquema de Demostración Personal.

Referencias bibliográficas

Alvarado, A. y González, M. (2010). La implicación lógica en el proceso de demostración matemática: Estudio de un caso. *Enseñanza de las ciencias, 28 (1),* 73-84.

Álvarez, I., Ángel, L., Carranza, E. y Soler, M. N. (2014). Actividades Matemáticas: Conjeturar y Argumentar. *Números, 85,* 75-90.

Cañadas, M., Castro, E. y Castro, E. (2007). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3° y 4° de la ESO en el problema de las baldosas. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI*, (pp. 283-294). San Cristóbal de la Laguna: SEIEM.

Crespo, C. R. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas: Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Granada.

Ibañes, M. J. y Ortega, T. (2003). Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato. *Enseñanza de las ciencias, 21 (1)*, 49-63.

Larios, V. (2006). *Demostrar es un problema o el problema es demostrar.* Querétaro: Escuela de Bachilleres, U.A.Q.

Recio, A. (2001). La demostración en Matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica. En M.F. Moreno (Ed.), *Quinto simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática*, (pp. 29-43). Almería: Universidad de Almería Servicio de Publicaciones.

ALFABETIZACIÓN ESTADÍSTICA EN EDUCACIÓN SUPERIOR

Jesús Pinto[1], Liliana Tauber[2], Lucía Zapata-Cardona[3], Armando Albert[4], Blanca Ruiz[4], Joseph Mafokozi[5]
Universidad Autónoma de Yucatán (México)[1], Universidad Nacional del Litoral (Argentina)[2]. Universidad de Antioquia (Colombia)[3]. Instituto Tecnológico de Monterrey (México) [4]. Universidad Complutense de Madrid (España)[5].
psosa@correo.uady.mx, estadisticamatematicafhuc@gmail.com,
luzapata@ayura.udea.edu.co, albert@itesm.mx, bruiz@itesm.mx , mafjos@gmail.com.

RESUMEN: Este artículo presenta algunos resultados de la discusión en el Grupo de Trabajo de la Red Latinoamericana de Investigación en Educación Estadística (RELIEE), cuyo tópico de estudio fue la *Alfabetización Estadística en educación superior*, particularmente en algunos contextos latinoamericanos. Partimos de la premisa de que todo ciudadano (de cualquier profesión) debe tener un nivel de alfabetización estadística que pueda ayudarle a comprender y criticar de manera significativa la información que llegue a sus manos. Sin embargo, la realidad es que poco se conoce sobre esto en educación superior en Latinoamérica. Por tal motivo, un primer análisis nos llevó a conocer el origen, significado y características del constructo alfabetización estadística, así como a explorar avances sobre el tema en relación con la formación que recibe el estudiante y la preparación del docente.

Palabras clave: alfabetización estadística, educación estadística, estadística, profesor de estadística, currículo

ABSTRACT: This article shows some results of the discussion in the Working Group of the Latin American Statistical Education Research Network whose topic of study was the Statistical Literacy in Higher Education, particularly in some Latin American contexts. We started from the premise that any citizen (with any profession) should have a level of statistical literacy, that make him able to understand and criticize, in a significant way, the information at hands. However, the reality is that little is known about this topic in Latin American Higher Education. Therefore, a first analysis let us learn about the origin, meaning and characteristics of the Statistical Literacy concept, and explore the progress about the topic with respect to students' education and teachers' training, as well.

Key words: statistical literacy, statistical education, statistics, Statistics professor, curriculum

Introducción

El siguiente documento presenta el análisis sobre la discusión que se desarrolló en torno a la alfabetización estadística en educación superior, particularmente en países Latinoamericanos. La iniciativa surgió de la RELIEE (creada y constituida en 2013) y cuyo grupo de trabajo sesionó en Monterrey (México) en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME-30). El tema surge a partir de la necesidad de comprender los entornos en que se desarrolla la enseñanza y aprendizaje de la Probabilidad y Estadística en nuestros países, partiendo de marcos de referencia de la estocástica a nivel mundial, pero con un marcado énfasis en la realidad latinoamericana, con vistas a generar, aplicar e innovar el conocimiento científico en nuestros contextos.

Partimos del reconocimiento de que todo ciudadano y, en particular, todo profesionista debe contar con ciertos conocimientos y habilidades para leer e interpretar datos estadísticos, así como la metodología utilizada en su análisis para contar con un criterio propio de lo que se está leyendo o escuchando, es decir, contar con una alfabetización estadística mínima (Batanero, 2004). Esto implica, tanto una base de conocimientos y habilidades compartidas con todos los ciudadanos, así como específicas, propias de la naturaleza de la profesión o actividad profesional. Nuestra comunidad educativa es consciente de ello y por ello nos centramos en explorar, conocer, analizar y discutir sobre el avance de la investigación en alfabetización estadística en nivel universitario, qué significa, qué se ha hecho, cómo se ha estudiado y qué hace falta realizar en términos de investigación. Para fines de esta publicación, el análisis se focalizó en el origen y significado del término *alfabetización estadística*, sus características y la necesidad de un cambio de paradigma (o corriente) en la formación de los futuros profesionales y el rol del profesor de Probabilidad y Estadística, así como un acercamiento desde la perspectiva del currículo.

Antecedentes

La estadística es fundamental en la formación de todo estudiante para su desarrollo profesional porque muy frecuentemente su actividad está vinculada con el análisis e interpretación de su realidad, así como hacer mediciones para la toma de decisiones y valoración de riesgos. Sin embargo, su incorporación no es una tarea fácil en los cursos de Probabilidad y Estadística, por su complejidad formal y gran número de contenidos. Además, todavía es frecuente que profesor y estudiantes den prioridad al aspecto formal y algorítmico por sobre los significados. Esto tiene como consecuencia que, aunque los estudiantes aprueben sus cursos, es posible que no sean capaces de abordar críticamente la información que se presenta en su entorno profesional y ciudadano.

En este sentido, se hace necesaria la investigación a nivel universitario y, aunque todavía es incipiente, ya hay algunos trabajos pioneros como Tauber (2010) quien hace un estudio en estudiantes universitarios de humanidades y ciencias sobre conceptos básicos de alfabetización estadística. Sus resultados muestran que no hubo diferencia significativa entre los estudiantes que ya habían llevado un curso preliminar de estadística de los que no. En su estudio, sobresalió particularmente la dificultad que se presentó para verbalizar resúmenes estadísticos de datos. Otras investigaciones muestran que también estudiantes de ingeniería presentan dificultades de diversa índole, tanto en la comprensión de conceptos como en el razonamiento estadístico al hacer análisis de datos e inferencia (Albert, Ruiz y Sánchez, 2014).

La investigación identificada hasta la fecha justifica la necesidad de unir esfuerzos con dos propósitos específicos: comprender lo que ocurre en los contextos de enseñanza y aprendizaje de la Probabilidad y Estadística, e incorporar acciones que permitan lograr una estadística con significado intrínseco a la práctica profesional del estudiante. Un elemento esencial que reconocimos como necesario, fue comprender lo que está detrás del constructo *alfabetización estadística*, su significado y características.

¿Qué se entiende por alfabetización en la literatura científica?

Coincidiendo con Braslavsky (2003), podríamos indicar que el término *alfabetización*, aparece por primera vez a fines del siglo XIX, con una acepción ambigua y sin consenso. Posteriormente, en 1951, se enunció que una persona es considerada “alfabeta si es capaz de leer y escribir, comprendiendo, una breve y sencilla exposición de hechos relativos a su vida cotidiana” (UNESCO, 1999, p. 123). En el otro extremo del continuo, podríamos identificar diversas acepciones del término que han ido surgiendo. Es así que tomamos como referente del sitio web de la UNESCO, el lema del Decenio indicado por la ONU para el periodo 2003-2012: *La alfabetización: un camino hacia la libertad*, donde se reconoce que la alfabetización es un derecho humano que debe promoverse y defenderse activamente. Como podemos observar, en una misma Organización y en diferentes épocas, surgen acepciones totalmente diferentes, siendo la última mucho más amplia y teniendo implícitas diversas competencias y/o habilidades. Es así que podríamos deducir que la noción de alfabetización se caracteriza por dos rasgos definitorios que son: el contexto social y el uso individual, los cuales van a depender del contexto de cada comunidad en un determinado momento.

Todos estos debates también se han dado alrededor de expresiones que surgieron con el desarrollo de las disciplinas, por ejemplo: *alfabetización tecnológica*, *alfabetización científica* y más específicamente para nosotros, *alfabetización estadística*.

Significado y características de la Alfabetización Estadística

Una primera aproximación al significado de la alfabetización estadística lo encontramos en Wallman (1993), quien la definió como la capacidad de comprender críticamente, evaluar los resultados estadísticos que conforman nuestras vidas diarias y la capacidad de apreciar las contribuciones que la estadística puede hacer en la vida pública, profesional y personal. Por su parte Watson (1997), incorpora tres niveles progresivos: el entendimiento básico de la terminología estadística, incorporación del lenguaje y los conceptos en un contexto más amplio social o laboral y una actitud crítica ante el uso de la estadística.

Posteriormente, Gal (2004) delimita y puntualiza de manera más concreta dos conceptuaciones o competencias interrelacionadas referidas a la alfabetización estadística:

a) la habilidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos relacionados con un conjunto de datos o con fenómenos estocásticos que se pueden encontrar en diversos contextos y, b) la habilidad para discutir o comunicar sus reacciones sobre tales informaciones estadísticas, así como su comprensión del significado de la información, sus opiniones sobre las implicaciones de esta información, o sus preocupaciones sobre la validez de las conclusiones dadas (Gal, 2004, p. 49).

En consecuencia, podríamos identificar dos grupos de personas estadísticamente alfabetizadas: los productores y los consumidores de datos. Los *productores de datos* son aquellos que están implicados en la producción y el análisis de los datos y los *consumidores de datos*, son los que participan en la lectura, escucha o visualización de datos estadísticos y de las interpretaciones que de ellos se dan. En este sentido, estos últimos, tendrían un carácter pasivo respecto a la producción y al análisis de datos.

Desde otra mirada, la alfabetización estadística, en el sentido propuesto por Gal (2004) —también traducido como “cultura estadística” (Batanero, 2002)— hace referencia a las habilidades estadísticas —mínimas y funcionales— que los adultos de sociedades industrializadas deberían tener para participar plenamente en sociedad. Sin embargo, desde una postura crítica, la alfabetización estadística es mucho más que enseñar a la gente iletrada habilidades estadísticas básicas. No es tan sólo una formación técnica que pueda medirse, sino que lleva consigo una dimensión investigativa, reflexiva y crítica del mundo globalizado caracterizado por la abundancia de información y por la toma de decisiones en ambientes de incertidumbre (Campos, Jacobini, Wodewotzki y Ferreira, 2011). No sólo busca que los ciudadanos tengan una mejor comprensión de la sociedad, sino que esas habilidades contribuyan a la transformación de la sociedad, es decir, busca la formación de ciudadanos críticos “preparados para correr riesgos, desafiar y creer que sus acciones pueden marcar una diferencia en la sociedad” (Skovsmose, 1999, p. 26).

Así entonces, la alfabetización estadística del ciudadano es una responsabilidad compartida por diferentes organizaciones sociales tales como: oficinas estadísticas, sociedades estadísticas, medios de comunicación, y por supuesto el sistema educativo. Para contribuir a la alfabetización estadística en la educación superior nos centramos en el desarrollo del *pensamiento estadístico* (Wild y Pfannkuch, 1999) a partir de conflictos y crisis de la sociedad (Skovsmose, 1999) que permitan potenciar la dimensión crítica del ciudadano. Para coordinar *pensamiento estadístico* y conflictos sociales partimos del diseño e implementacion de *investigaciones estadisticas* en el aula de clase.

Nuestra concepción de investigaciones estadísticas está inspirada en la filosofía de la matemática crítica de Skovsmose (1999) pero integra importantes desarrollos de la educación estadística. Las investigaciones estadísticas: (1) son una manera holística y práctica para organizar la enseñanza e incluyen todo un proceso de identificación de un problema o asunto de interés en un contexto particular, (2) imitan la práctica diaria de los estadísticos profesionales que está centrada en la resolución de problemas reales (Wild y Pfannkuch, 1999), (3) conciben la estadística como un campo de conocimiento integrado que vincula conocimientos, procedimientos, habilidades y disposiciones para entender y participar críticamente en el mundo, (4) vinculan el conocimiento producido en la vida diaria de los estudiantes —llamado por D'Ambrosio (1999) el *mundo de afuera*— con el conocimiento escolar, (5) conciben el aprendizaje de la estadística y el desarrollo del pensamiento estadístico como procesos contextuales que se llevan a cabo dentro de experiencias de aprendizaje auténticas (MacGillivray y Pereira-Mendoza, 2011) encarnadas en conflictos y crisis de la sociedad (Skovsmose, 1999) y que aborden cuestiones del mundo —como producción de basuras— que contribuyan a la conciencia social (Stillman, Brown, Faragher, Geiger, y Galbraith, 2013), (6) no se centran exclusivamente en los saberes —dimensión técnica de la estadística— sino que toman en cuenta el desarrollo de disposiciones de pensamiento y la dimensión social de los seres (Radford, 2006) —dimensión crítica—.

Independientemente de la definición formal que se le pueda dar al concepto de alfabetización estadística, existe una concepción operativa, técnica e instrumental. Ésta puede rastrearse a través de numerosos documentos legales (ej. programas de curso) que rigen la enseñanza en los distintos niveles educativos. Además, esta concepción se intuye a través de los libros que publican las casas editoriales para los estudiantes o los profesores, editoriales que en general reflejan lo que imponen las autoridades encargadas de velar por la calidad de la enseñanza.

Todos estos elementos de análisis reflejan la importancia de la Estadística en la formación de los futuros profesionales, una formación que inicie desde los primeros años escolares y continúe en la universidad. Sin embargo, también refleja un reto porque el primer agente de cambio es el profesor.

La alfabetización estadística y la formación y/o actualización del profesor

Un primer foco, con fines de delimitar nuestra discusión, fue el profesor. En cualquier caso al docente le toca la tarea de traducir lo previsto por los planes y programas de estudio en lo que los estudiantes aprenden. En el proceso de traducción importa tanto el recorrido formativo realizado por el propio docente como la forma y contenidos que aquél selecciona. La referencia a lo vivido es indudablemente esencial.

La estadística está indiscutiblemente entroncada con la matemática o como mínimo con el razonamiento lógico-matemático. Es lógico pues suponer que sea el profesor de matemáticas el encargado del cometido de enseñar Probabilidad y Estadística. Más aún, cuando en bachillerato y educación superior cerca del 60% de los docentes no tiene una formación específica en matemáticas ni en su enseñanza (Pinto, Martín y Barrabí, 2007), por lo que podemos encontrar a docentes cuya formación inicial es de ingenieros, físicos, biólogos, entre otros. De allí la necesidad de garantizar que el profesor reciba una formación adecuada en didáctica relativa a la enseñanza y aprendizaje de la Probabilidad y Estadística.

Por consiguiente, si consideramos que la alfabetización estadística va mucho más allá que la aplicación mecánica de algoritmos y procedimientos, y que la conceptuamos como la habilidad de leer e interpretar datos de forma crítica y usar la estadística como evidencia en contextos cotidianos o profesionales, podríamos seguir reflexionando y pensando que el conocimiento estadístico que debe considerarse en la formación de los profesores de matemáticas debe tener en cuenta que éstos tienen que cumplir el rol de formar ciudadanos estadísticamente alfabetizados. Esto implicará que los profesores no sólo deben estar alfabetizados ellos mismos, sino que deberán haber tenido también posibilidades en su formación de enfrentarse a situaciones que hayan permitido formar su *razonamiento y su pensamiento estadísticos* (Ben-Zvi y Garfield, 2004). Es en este sentido que, los integrantes de este grupo de discusión, hemos iniciado el debate plateando diversas propuestas para pensar en la formación de los profesores, con el propósito de lograr docentes reflexivos de su propia práctica.

■ El análisis curricular de los planes o programas de estudio de Estadística en carreras universitarias o de nivel superior

El segundo foco de atención fue el análisis del currículo en estadística. Cada vez se reconoce con mayor frecuencia la necesidad de introducir la formación estadística en el currículo escolar desde educación básica hasta licenciatura. De ahí, que cada vez son mayores las instituciones que incluyen la estadística en sus programas académicos sin importar el área disciplinar de su formación. Sin embargo, la realidad de la enseñanza y aprendizaje de la estadística en Latinoamérica en nivel superior parece ser heterogénea y hasta cierto punto poco documentada.

Lo que es un hecho es que se aprecia que en universidades o instituciones de educación superior existe una amplia diversidad de carreras en las cuales en algunos casos se reconoce e incluye la asignatura de estadística o “probabilidad y estadística” (o equivalente) y en otros casos no es así, particularmente en determinadas carreras (ej. derecho, antropología, filosofía, entre otras). Asimismo, también se aprecia que la estadística puede estar incluida en asignaturas agrupadas dentro del *eje metodológico* de la o las carreras. Por otro lado, no se sabe (o no está documentado), cuáles saberes se deben articular para diferenciar o distinguir una estadística para *psicólogos*, *médicos*, entre otros; y por consiguiente, no se identifican diferentes niveles de complejidad en los contenidos y profundidad de estudio.

Algunas aportaciones e investigaciones en el ámbito internacional nos permiten conocer los avances en esta materia. Por ejemplo, el currículo de Nueva Zelanda proporciona en sus planes de estudio herramientas que puedan desarrollar la alfabetización estadística en sus aulas (Forbes, Camden, Pihama, Bucknall, y Pfannkuch, 2011). De igual forma, la Universidad Complutense de Madrid indica que más del 75% de sus licenciaturas incluyen estadística como herramienta multidisciplinaria. En el área de Ciencias Sociales y Jurídicas de esta misma institución, cerca del 92% de sus licenciaturas incluyen estadística como parte de su formación (Mafokozi, 2011). También está el *Proyecto Internacional de Alfabetización Estadística* (ISLP, por sus siglas en inglés), organización que reconoce la importancia de la alfabetización estadística en la vida cotidiana de las personas. Aunque existen algunos intentos por evaluar la comprensión estadística de los estudiantes que toman un primer curso de estadística a nivel terciario, Ziegler (2014) afirma que se necesita crear o diseñar instrumentos que midan la alfabetización estadística.

Conclusión

El análisis sobre la alfabetización estadística nos permitió comprender el significado que subyace, sus características y relevancia en la formación de los futuros profesionales, independientemente del área o disciplina. Sin embargo, entendemos que los entornos y realidades que se viven en las universidades son diversos, y la investigación en este sentido todavía es incipiente.

A raíz del grupo de trabajo y del análisis compartido en la RELME-30, nuestro foco de interés se centrará en tres vertientes de estudio: a) diagnosticar y valorar la alfabetización estadística en estudiantes universitarios, b) estudiar la alfabetización estadística en el profesorado de matemática, su realidad, contextos y necesidades; y c) analizar y reestructurar el currículo en torno a la delimitación por áreas o campos disciplinares, lo óptimo, pertinente y posible.

Referencias bibliográficas

Albert, J. A., Ruiz, B. y Sánchez, T. (2014). Un acercamiento cognitivo al significado de estadístico, como variable aleatoria, en estudiantes universitarios. *Cuarto Encuentro Internacional en la Enseñanza de la Probabilidad y Estadística*. Puebla, BUAP.

Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística.* Buenos Aires.

Batanero, C. (2004). Los retos de la cultura estadística. *Yupana, 1*(1), 27–37.

Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004). Statistical Literacy, Reasoning and Thinking: Goals, definitions and challenges. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3–16). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Braslavsky, B. (2003). ¿Qué se entiende por alfabetización? *Lectura y Vida. Revista Latinoamericana de Lectura*, Año *24*. 2–17

Campos, C. R., Jacobini, O. R., Wodewotzki, M. L., y Ferreira, D. H. (2011). Educação Estatística no contexto da Educação Crítica. *Boletim de Educação Matemática, 24*(39), 473–494.

D'Ambrosio, U. (1999). Literacy, matheracy and technocracy: a trivium for today. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 131–153.

Forbes, S., Camden, M., Pihama, N., Bucknall, P., y Pfannkuch, M. (2011). Official Statistics and statistical literacy: They need each other. *Statistical Journal of the IAOS, 27*(3, 4), 113–128.

Gal, I. (2004) Statistical Literacy. Meanings, Components, Responsibilities. En: D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 47–78). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Mafokozi, J. (2011). Nivel de alfabetización estadística del alumnado universitario de letras: El caso de la Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid/Statistical literacy level of arts college students: The case of the School of Education of the Complutense University of Madrid. *Revista Complutense de Educación, 22*(1), 95–125.

MacGillivray, H., y Pereira-Mendoza, L. (2011). Teaching statistical thinking through investigative projects. En C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE Study* (pp. 109–120). Springer Science+Business Media. doi:10.1007/978-94-007-1131-0_14

Pinto, J., Martín, G. y Barrabí, B. (2007). Estudio de necesidades de formación de profesores que imparten estadística en carreras del área social. En G. Buendía Abalos y G. Montiel Espinosa (Eds.), *Memorias de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 451–463). México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa (CIMATE).

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Relime, Número Especial*, 103–129.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica.* (P. Valero, Trad.) Bogotá: Una Empresa Docente (Trabajo original publicado en 1994).

Stillman, G., Brown, J., Faragher, R., Geiger, V. y Galbraith, P. (2013). The role of textbooks in developing a socio-critical perspective on mathematical modelling in secondary classrooms. En G. A. Stillman (Ed.), *Teaching mathematical modelling: Connection to research and practice. International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 361–371). Dordrecht: Springer Science + Business. doi:10.1007/978-94-007-6540-5_30

Tauber, L. M. (2010). Análisis de elementos básicos de alfabetización estadística en tareas de interpretación de gráficos y tablas descriptivas. *Ciencias Económicas*, *1*(12), 53–74.

UNESCO-ICSU (1999). Declaración de Budapest sobre la Ciencia y el uso del saber científico. *Conferencia Mundial sobre la Ciencia para el siglo XXI: Un nuevo compromiso*. Budapest (Hungría). Recuperado el 20 de junio de 2016 de: http://www.unesco.org/science/wcs/esp/declaracion_s.htm

Wallman, K.K. (1993). Enhancing statistical literacy: Enriching our society. *Journal of the American Statistical Association*, *88*, 1–8.

Watson, J. M. (1997). Assessing statistical thinking using the media. En Gal, I. y Garfield, J. (Ed.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 107-121). Amsterdam: IOS Press.

Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). *International Statistical Review, 67*(3), 223–265.

Ziegler, L. A. (2014). *Reconceptualizing statistical literacy: Developing an assessment for the modern introductory statistics course.* (3630287 Ph.D.), University of Minnesota, Ann Arbor.

FORMAS DE PENSAMIENTO ALGEBRAICO ASOCIADAS A SITUACIONES FUNCIONALES CON ESTUDIANTES DE NIVEL SECUNDARIA

José David Zaldívar Rojas, Idalia Citlalli Alonso Ruiz
Universidad Autónoma de Coahuila. (México)
david.zaldivar@uadec.edu.mx,ialonso@uadec.edu.mx

RESUMEN: La presente investigación reporta cómo alumnos de nivel Secundaria en México desarrollan formas de pensamiento algebraico y los medios semióticos que usan para ello. Nuestro objetivo es analizar la interpretación y medios semióticos que usan los estudiantes para referirse a lo *indeterminado* cuando se enfrentan a una situación donde se establece una relación funcional de manera implícita. El análisis se realiza con base en las categorías delimitadas dentro de la Teoría de la Objetivación, dejando ver aquellas formas de pensamiento algebraico que se presentan en los estudiantes que anteceden a un nivel simbólico y que se basan en otros recursos semióticos para ello. En este trabajo mostramos avances parciales de nuestra investigación, presentamos una revisión bibliográfica al respecto del tema y el camino de análisis que se pretende realizar. El análisis permite brindar evidencia sobre gestos y recursos semióticos que dejan ver un nivel de pensamiento algebraico contextual, donde los significados y argumentos son principalmente numéricos.

Palabras clave: pensamiento algebraico, objetivación, relación funcional

ABSTRACT: This research reports how secondary school students in Mexico develop algebraic thinking ways and the semiotic means they use to do it. Our goal is to analyze the interpretation and semiotic means that students use to refer to indeterminateness when facing up a situation where a functional relationship is implicitly established. The analysis is carried out based on the categories delimited within the theory of objectification, showing up those forms of algebraic thinking that students, preceding a symbolic level, have which are based on other semiotic resources. In this work we show partial advances of our research. We present a bibliographical review regarding the topic and the type of analysis that is intended to be carried out. The analysis allows providing evidence about gestures and semiotic resources that reveal a level of contextual algebraic thinking, where the meanings and arguments are mainly numerical.

Key words: algebraic thinking, objectification, functional relationship

Introducción

El interés hacia el tema del pensamiento algebraico surge de reflexiones relacionadas con la transición de la aritmética al álgebra, misma que acontece principalmente en el nivel Secundaria y, en ocasiones, presenta problemas de diversa índole (Butto y Delgado, 2012). Nuestra intención en este trabajo es mostrar avances en el análisis sobre medios semióticos de objetivación (Radford, 2010) presentes en estudiantes de nivel Secundaria cuando se enfrentan a una actividad de predicción relacionada a una función lineal. Nuestro interés también radica en la mejora de los procesos de enseñanza-aprendizaje de nuestros estudiantes en el nivel Secundaria, de manera que éstos puedan acceder al estudio del álgebra por medio de actividades centradas en una articulación entre lo aritmético y lo algebraico.

La problemática de investigación

De manera general, cuando se habla de “álgebra” en la escuela, los estudiantes creen que eso implica hablar de operaciones con *letras*. Sin embargo, lo cierto es que el álgebra y el pensamiento algebraico nos permite acceder a un pensamiento lleno de simbolismo útil para desempeñar cualquier tipo de trabajo u oficio, desde leer un instructivo o llenar un formulario, es decir, es un tipo de pensamiento que nos posibilita a trabajar en situaciones donde se presenta lo *indeterminado* (SEP, 2011).

El álgebra en la escuela es un tema enseñado en nivel Secundaria como una transición de la aritmética y se encarga del estudio de objetos matemáticos indeterminados como incógnitas, variables y parámetros. Al respecto, Butto y Delgado (2012, p.2) mencionan: “Una de las dificultades que la mayoría de los estudiantes enfrentan al iniciarse en el estudio de álgebra obedece a que ésta ha sido vista como una transición lineal, como una extensión de los cálculos numéricos al cálculo literal”. Desde nuestro punto de vista, dicha “transición lineal” provoca que el álgebra sea vista también como un conjunto de operaciones carentes de significados. De hecho, Butto y Delgado (2012) mencionan que la manera en la cual se inician los estudiantes en el estudio del álgebra permitirá en gran medida llegar a conocer algunos de los obstáculos anteriormente mencionados.

Por otro lado, diferentes investigaciones abordan la transición entre la aritmética y el álgebra desde diferentes enfoques (ver por ejemplo: Butto y Delgado, 2012; Rojano y Sutherland, 2001; Kieran y Filloy, 1989). De manera general, en estos trabajos, se brinda evidencia de que los alumnos presentan dificultades al llegar al proceso de *generalización* que implica el álgebra simbólica. Por ejemplo, Kieran y Filloy reportan que, en ocasiones, en el estudio del álgebra los estudiantes consideran a las letras (símbolos) como meras “etiquetas” de aquello que representan, sin un sentido relacionado con la noción de variable.

Marco conceptual

Hay autores que mencionan que el uso de la simbología algebraica para resolver problemas o situaciones no revela un pensamiento algebraico, sino que pudiera tratarse de procedimientos aritméticos, como es el caso de un despeje o una sustitución. Radford (2010) menciona que son tres los elementos que caracterizan al pensamiento algebraico: el sentido de indeterminancia (objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetro), la analiticidad (reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos); y la designación simbólica o expresión semiótica de sus objetos (manera específica de nombrar o referir los objetos en algebra). Los anteriores elementos hacen del pensamiento algebraico un conjunto de procesos corporizados de acción y reflexión constituidos histórica y culturalmente, de manera que pensar algebraicamente va más allá del manejo de las letras y de las operaciones algebraicas. En dicho pensamiento está implícito lo desconocido, de manera que el álgebra posee como característica intrínseca el enfrentarse a lo indeterminado usando formas analíticas (Radford, 2010). Además, Radford propone una tipología de pensamiento algebraico para referirse a la indeterminancia: el *factual*, el *contextual* y el *simbólico*. En el pensamiento algebraico factual la indeterminancia no alcanza el nivel de la enunciación, sino que se expresa en acciones y la indeterminancia queda implícita. En el contextual, por su parte, la indeterminancia es explícita, mientras que en el simbólico se utilizan símbolos alfanuméricos del álgebra para nombrar la indeterminancia.

Esta tipología del Pensamiento Algebraico propuesta por Radford tiene sus bases en la Teoría de la Objetivación (TO) (Radford, 2014) que propone que "aprender no es simplemente adquirir un conocimiento, sino también es un proceso formativo y trans-formativo del ser, del sujeto que aprende" (Radford, 2011, p.44). Para la TO el saber es continuo y evolutivo en un contexto cultural, político y social determinado. Así, la educación no debería centrarse solamente en difundir saberes dejando de lado el ser. En la práctica escolar, el contexto es el aula misma y, al tratarse de un proceso social, deben estar involucrados factores externos tales como la actividad en sí, la cual nos permite crear la intención para que llegue a un fin o un saber intencional. Además, el aprendizaje no ocurre solo y debe ser mediado. Al estar en contacto con el medio, con el exterior, nos topamos con objetos, instrumentos, cosas, etc., llamados artefactos, mismos que en la TO se consideran como fuentes de saber, de manera que "el "conociendo" (knowing) queda definido como toma de conciencia en el curso de un proceso social, emocional y sensible; es un proceso mediatizado por la cultura material (signos, artefactos, lenguaje, etc.), los sentidos y el cuerpo (a través de gestos, acciones kinestésicas, etc.)" (Radford, 2014, p. 142). Dicha "toma de conciencia" queda entonces definida como objetivación, misma que Radford define como: "el proceso social, corpóreo y simbólicamente mediado de toma de conciencia y discernimiento crítico de formas de expresión, acción y reflexión constituidas históricamente y culturalmente" (p. 141).

Aspectos metodológicos: el diseño experimental

Con la intención de analizar cómo estudiantes de nivel Secundaria desarrollan formas de pensamiento algebraico y los medios semióticos que usan para ello, se convino en diseñar una actividad que se denominó "Los Resortes", basada en los trabajos de Arrieta y Díaz (2015) y Méndez (2006). La intención de las tareas que componen la actividad es que los estudiantes produzcan recursos semióticos que les permitan referirse a lo indeterminado cuando se presenta una relación funcional entre dos variables. La tipología del pensamiento algebraico anteriormente mencionada constituirá una herramienta para el análisis de las producciones de los estudiantes. Además, se pondrá especial énfasis en los recursos semióticos (lo hablado, lo escrito, lo representado, lo gesticulado) que los estudiantes emplean.

La actividad "Los Resortes" consistió en presentarles a los estudiantes imágenes de un resorte al cual se le colocan diferentes pesas y las tareas buscan que los estudiantes produzcan maneras para referirse a lo indeterminado, que en este caso se refiere al estiramiento del resorte cuando se le pone cualquier peso (ver figura 1). Una vez presentadas las imágenes, se les realizan a los estudiantes preguntas (ver Cuadro 1), las cuales se dividen en momentos correspondientes a los elementos de la tipología del pensamiento algebraico propuestas en Radford (2010). Al final se agrega un problema que se denominó "El problema del Mensaje".

Asociado a lo anterior, por ejemplo, Küchemann (1978) determinó 6 niveles para describir las diferentes formas en que las letras se pueden utilizar: letra evaluada, ignorada, como objeto, como letra desconocida específica, como número generalizado y como variable. La clasificación anterior deja ver que la noción de variable es un tema complejo puesto que un estudiante, tanto en el estudio del álgebra como de las matemáticas en general, debe transitar por diferentes conceptualizaciones de dicha noción, lo cual conlleva distintas maneras de actuar y usar los significados de la variable, por parte de los estudiantes. Al igual que el trabajo anterior, Trigueros y Ursini (2000) realizan una investigación sobre la conceptualización de la variable en la enseñanza con una serie de actividades que propusieron a estudiantes de secundaria, de preparatoria y primer grado de universidad. A partir de este estudio, las autoras clasifican tres usos de la variable: como incógnita, número general y como relación funcional. De hecho, los resultados de la investigación anterior también dejan ver que en el nivel medio superior la comprensión de la noción de variable dentro de problemas que involucraban relaciones entre variables, es decir, variables en relaciones funcionales, fue uno de los aspectos donde los estudiantes tuvieron más dificultades, lo cual hace pensar que en dicho nivel las relaciones funcionales son desatendidas dentro de la enseñanza.

En la presente investigación también consideramos como problemática la poca atención a la noción de variable en actividades que involucren relaciones funcionales. Pero, además, consideramos necesario reflexionar sobre la forma en la cual el pensamiento algebraico se presenta cuando los estudiantes se enfrentan a actividades que requieren relacionar dos variables o simbolizar una relación funcional y qué recursos semióticos utilizan para ello.

Figura 1. Actividad “Los resortes”

Cuadro 1. Momentos que conforman la actividad

Momento	Preguntas
1	¿Cuál es el estiramiento del resorte al colocarle una pesa de 20 gramos? ¿Cuál es el estiramiento del resorte al colocarle una pesa de 40 gramos? ¿Cuál es el estiramiento del resorte al colocarle una pesa de 60 gramos? ¿Cuál es el estiramiento del resorte al colocarle una pesa de 80 gramos? (para la pesa de 80 gramos el estudiante debe encontrar un estiramiento constante cada 20 gramos)
2	¿Cuál será el estiramiento del resorte si se colocan una pesa de 30 gramos? (dado que el estudiante no cuenta con una pesa de 10 gramos se torna importante que comprenda cómo cambia el estiramiento cada 10 gramos)
3	¿Cuál será el estiramiento del resorte si se colocan una pesa de 17 gramos? (dado que no se cuenta con pesas de 1 gramo, el estudiante debe encontrar cuánto cambia el estiramiento por cada gramo de peso)
4	¿Cuál será el estiramiento del resorte si se colocan una pesa de 33.3 gramos? (Se busca que el estudiante generalice una relación funcional que pueda establecer entre el estiramiento y el peso, probablemente proponer una fórmula)
Problema del mensaje	¿Cuál será el estiramiento del resorte si se coloca cualquier cantidad en el porta pesas? (se busca que el estudiante proponga una fórmula simbólica)

La actividad se aplicó a dos grupos de 2 y 3 estudiantes de tercer grado de Secundaria, respectivamente, en la ciudad de Saltillo, Coahuila. Las sesiones se video-grabaron y se audio-grabaron con fines de análisis. Durante la implementación de la actividad el profesor no solo fue un facilitador o transmisor del saber, sino que se convirtió en parte activa del aprendizaje.

A continuación mostramos un análisis preliminar de los resultados, dado que la investigación que se reporta se encuentra actualmente en curso.

Análisis preliminar de resultados

Durante el momento 1 de la actividad, los estudiantes usaron el ritmo y el movimiento de la mano para referirse a lo que estaban buscando, es decir, lo *indeterminado*, y utilizaron estos recursos como medios semióticos para objetivar. En la Figura 3 se muestra cómo la estudiante mueve la mano de arriba hacia abajo y otra vez hacia arriba para decir cuánto se estira el resorte, llegando, desde nuestro marco conceptual, a un pensamiento que se podría denominar de tipo factual.

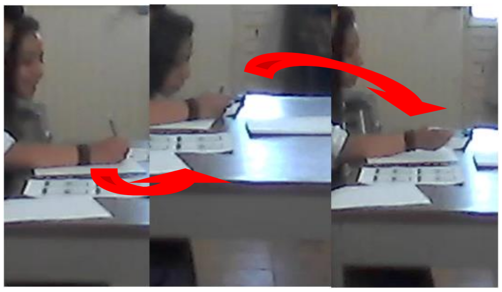


Figura 3. Gesticulación de “arriba hacia abajo” para expresar estiramiento

Una vez que la estudiante objetiva la indeterminación a partir de un gesto y de cuánto cambia el estiramiento en cada pesa de 20 gramos, opera con ella de una forma razonada y la suma para obtener el estiramiento del resorte con una pesa de 80 gramos (figura 4). En este momento consideramos que se presenta un pensamiento *contextual,* puesto que eso desconocido para el estudiante se expresa y se exterioriza por medio de la resta y se debe de sumar al anterior encontrando así el estiramiento que se le pide.

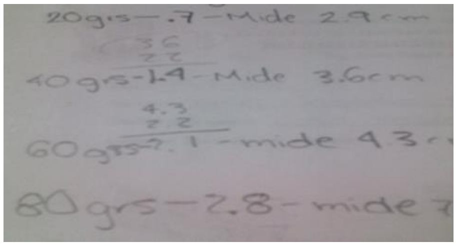


Figura 4. Lo indeterminado expresado contextualmente

En el momento 2, los estudiantes dicen la palabra “aumenta” como medio para referirse a la indeterminación. Para resolver el momento 2 y dado que no se tienen pesas de 10 gramos, los estudiantes determinan cuánto “aumenta” el estiramiento cada 10 gramos calculando la mitad entre el estiramiento de una pesa de 20 gramos y una pesa de 40 gramos y al resultado le suman 2.2 (que es el tamaño original del resorte sin pesa), de manera que se hace consciente la necesidad de una condición inicial la cual es indispensable para encontrar el resultado final del estiramiento para 30 gramos (ver extracto 1). En este momento se presenta un pensamiento contextual y se utiliza una palabra clave como medio semiótico para ello: “aumenta”.

Alumna1: Porque cada 20 ***aumenta*** *0.7 tenemos que sacar la mitad de 0.7*
Alumno1: que es 0.35, por tres sería 1.05
Investigador: entonces ustedes dicen que se estira 1.05 con 30 gramos y con 20, ¿2.9?
Alumno1: más 2.2

Extracto 1. Diálogo sobre la necesidad de una condición inicial y lo que aumenta el estiramiento por cada 10 gramos.

En el momento 3, los alumnos observan que la estrategia de la mitad no les funciona como en el momento anterior, entonces buscan cuánto se estira el resorte por gramo y lo llaman ***y.*** El valor *y* anterior resulta ser la razón de cambio entre lo que se estira el resorte y cada gramo de peso (Extracto 2). Los estudiantes alcanzan a generalizar de esta manera la indeterminación, y la manejan de una forma analítica.

Alumna 1: Ya habíamos sacado lo de diez que era .35 entonces el .35 lo dividimos entre los diez y para sacar lo de cada gramo y es 0 .035, y eso por 17 es .59 más lo de 2.2 que ya medieron al principio y eso da 2.79

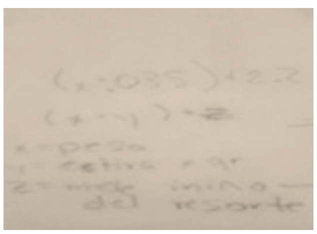
Extracto 2. La razón de cambio y la forma de expresar la indeterminación.

En el momento 4 los estudiantes manejan la indeterminación como algo inherente a ellos y operan con ella de forma analítica. Desde la postura teórica asumida en este trabajo, se podría decir que los estudiantes lograron objetivar lo indeterminado (el estiramiento) con base en el establecimiento de la razón de cambio haciendo evidente la generalización a la que han llegado como se observa en el Extracto 3.

Investigador: ¿cuánto es?
Alumno 2: 3.36
Investigador: ¿por qué?
Alumno2: porque multipliqué lo que se estira cada gramo por 33.3 más 2.2 ósea se estiro 1.16.

Extracto 3. Se objetiva el estiramiento a través del establecimiento de la razón de cambio.

Por último, el "problema del mensaje" consistió en decirles a los estudiantes que se imaginaran a un amigo en otra escuela al cuál le tenían que explicar cómo sacar el estiramiento del resorte si se coloca cualquier cantidad en el porta pesas. En este momento los alumnos objetivan la indeterminación usando un recurso semiótico simbólico, es decir, se estableció una "fórmula" para calcular el estiramiento del resorte (ver figura 5). El estudiante que propuso dicha relación usó símbolos alfanuméricos propios del álgebra operando la indeterminancia con cierta naturalidad, como algo propio, presentándose un pensamiento algebraico simbólico. Se pone el resultado del estudiante y lo acompañamos de una copia fiel para apoyar a la visualización de lo escrito por el estudiante.



(x*.035)+2.2
(x*y)+z
x=peso
y= estira x gr
z= mide inicio del resorte

Figura 5. La "fórmula" propuesta por un estudiante durante el problema del mensaje.

Comentarios finales

El trabajo presentado es una investigación en proceso. Se continuará con un análisis más exhaustivo de los medios semióticos usados por los estudiantes, principalmente los que anteceden al uso de símbolos alfanuméricos. No obstante, consideramos que se ha realizado un avance importante en el análisis.

El análisis preliminar presentado deja ver elementos que permiten esclarecer el desarrollo del pensamiento algebraico en situaciones donde se debe establecer una relación funcional entre dos variables. De tal manera, nuestro trabajo viene a enfatizar afirmaciones realizadas por Radford (2010) sobre una tipología del pensamiento algebraico, el cual evoluciona a través de lo factual y lo contextual, hacia lo simbólico. Consideramos que además contribuimos a atender las problemáticas relacionadas con el establecimiento de relaciones funcionales que dentro de los cursos regulares de álgebra en Secundaria, muchas veces son descuidadas por un énfasis en tareas algorítmicas.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18(1)*, 30-48.

Butto, C., y Delgado, J. (2012). *Rutas hacia el algebra: actividades en Excel y Logo*. México: Horizontes Educativos.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, *7*(3), 229-240.

Küchemann, D. (1978). Children's Understanding of Numerical Variables. *Mathematics in School*, *7(4)*, 23-26.

Méndez, M. (2006). *Las prácticas sociales de modelación multilineal; modelando un sistema de resortes.* Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(2), 132-150.

Radford, L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. El caso de la didáctica de las matemáticas. *L'ctivitat docent intervenció, innovació, investigación, 12(1),* 33-49.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12(1),* 1-19.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Núm. Esp.,* 103-129.

Rojano, T. y Sutherland, R. (2001). Algebraic reasoning with spreadsheets. *Centre of Research and Advanced Studies,1-16.*

Secretaría de Educación Pública. 2011. *Libro para el maestro Educación Secundaria*. Distrito Federal, México.

Trigueros M. y Ursini A. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Revista Educación Matemática*. *17(12),* 27-47.

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años).* Tesis de doctorado no publicada, Universidad Distrital José de Caldas. Bogotá, Colombia.

ANÁLISIS HISTÓRICO – EPISTEMOLÓGICO EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Fabián W. Romero, Flor M. Rodríguez, Sara M. Henao
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. (México),
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
fwromero@cinvestav.mx, flor.rodriguez@uagro.mx, saramarcelahenao@gmail.com

RESUMEN: Investigadores en el campo de la Educación Matemática han señalado la importancia de realizar estudios históricos-epistemológicos de los conceptos matemáticos, incluso existe una amplia discusión sobre los aportes de la historia de la matemática en los procesos de enseñanza-aprendizaje de los conceptos. En parte, esto responde a la problemática de la consideración de los conceptos sin una contextualización histórica. En este artículo, mostramos dos investigaciones cuyo objetivo fue realizar un estudio histórico-epistemológico sobre la constitución de conceptos de la matemática, a saber, las ecuaciones diferenciales ordinarias y las series trigonométricas de Fourier. Se discutirá además sobre la metodología de la investigación histórica.

Palabras clave: epistemología, ecuaciones diferenciales, serie de Fourier

ABSTRACT: Researchers in the field of Mathematics Education have pointed out the importance of performing historical-epistemological studies of mathematical concepts; there is even a wide discussion about the contributions of the history of mathematics to the teaching-learning processes of concepts. Partly, it responds to the problematic of the consideration of the concepts without a historical contextualization. In this article, we show two investigations whose objective was to make a historical-epistemological study on the construction of mathematical concepts, namely the ordinary differential equations and Fourier trigonometric series. Besides, the methodology of historical research will be discussed.

Key words: epistemology, differential equations, fourier series

Introducción

Investigadores han señalado la importancia de realizar estudios históricos-epistemológicos de en educación matemática (Smestad, B., Jankvist, U. T., & Clark, K. (2014); Clark, K. M. (2012); Jankvist (2009); Tzanakis & Arcavi (2000); Bakker & Gravemeijer (2006)). Recientemente, en el ICME 2016, realizado en la ciudad de Hamburg, Alemania, se presentaron dos grupos de discusión, el denominado *History of the teaching and learning of mathematics* y *The role of history of mathematics in mathematics education*, grupos que discuten las aportaciones que hacen el tipo de investigaciones históricas y epistemológicas no sólo a nivel teórico sino a nivel de aplicación en la formación inicial y continua de los docentes, incluyendo su impacto en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos. Otros eventos con intereses similares son el History and Pedagogical of Mathematics (HPM) y el Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática (CIHEM), entre otros.

Farmaki & Paschos (2007) discuten el papel de la historia en las clases de matemáticas, argumentan que son un factor de motivación para los estudiantes en su aprendizaje, ya que la historia contribuye a mantener el interés y el entusiasmo de los alumnos en la asignatura. Bakker & Gravemeijer (2006) refieren que la enseñanza basada en elementos históricos, devela unas matemáticas más humanas y menos atemorizantes, puesto que permite hacer conscientes a los estudiantes de que el mismo concepto matemático con el que ellos tiene dificultad, probablemente también se presentó en una determinada época para los matemáticos de antaño. Otra discusión data sobre que los estudios históricos y epistemológicos le permiten al docente evidenciar ciertos problemas en la constitución de los conceptos matemáticos, por ejemplo, Jankvist (2009) menciona que uno de tales problemas puede ser los obstáculos epistemológicos que se presentan en los procesos de aprendizaje. Asimismo Witzke, Struve, Clark, & Stoffels (2016) consideran que la historia debe ser una parte del conocimiento matemático del profesor. Además, la historia muestra los aspectos culturales y científicos que dieron origen a los conceptos, lo que dota a la matemática de un contexto específico de su génesis, lo que de acuerdo a la hipótesis de la investigación histórica, ello podría ayudar a entender aspectos actuales de la educación.

Bajo este paradigma, en este artículo presentamos, sucintamente dos ejemplos: a) una investigación cuyo objetivo fue analizar de manera sistémica la Serie Trigonométrica de Fourier (STF), bajo el marco de la teoría Socioepistemológica y la ingeniería didáctica como metodología, para proponer un diseño de intervención en el aula; b) una investigación de fuentes primarias, para conocer la constitución histórica de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), usando el método de investigación histórica.

Ejemplo 1. Construcción social de la serie trigonométrica de Fourier. (Romero, 2016)

Investigaciones realizadas en Educación Matemática sobre la STF dan cuenta de aspectos relacionados con la serie: el problema de la cuerda vibrante como antecedente del trabajo de Fourier, la determinación del estado estacionario como fenomenología intrínseca a la serie, las nociones de periodicidad y de calor, entre otros. Dichas investigaciones sólo estudian a la serie en diferentes contextos, pero no articulan los diferentes aspectos y su relación con la función trigonométrica, como momento previo de construcción social a la serie trigonométrica. Por lo tanto, el objetivo de esta investigación fue *significar las nociones matemáticas alrededor de la Serie Trigonométrica de Fourier mediante una problematización del saber matemático que dé cuenta de su construcción social.*

Para alcanzar este objetivo se usó a la Ingeniería Didáctica y a la Socioepistemología, con el propósito de acercarse al fenómeno de la apropiación del saber matemático a través de su construcción social. Así, en el análisis preliminar, se realizó una aproximación sistémica al fenómeno a través de cuatro componentes: epistemológica, cognitiva, didáctica y socio-cultural; la integración de estas componentes es lo que se conoce en Socioepistemología como la problematización del saber matemático (Reyes-Gasperini, 2011).

A continuación, se muestran algunos aspectos relacionados con la dimensión epistemológica, sin olvidar que la dimensión socio-cultural se articula con ésta, pues el principal foco de atención es "las circunstancias que hicieron posible la construcción del conocimiento matemático" (Cantoral, 2013, p. 147). De esta manera, se analizan diferentes momentos históricos: la discusión alrededor del problema de la cuerda vibrante, el trabajo de Fourier sobre la propagación de calor y el contexto de trabajo de Fourier. Abordaremos aquí los dos primeros momentos, un análisis de las cuatro dimensiones a profundidad lo encuentra en (Romero, 2016).

Momento 1. El problema de la cuerda vibrante

Este fue enunciado por B. Taylor en 1715, la discusión alrededor de su solución fue motivo de discusión por célebres matemáticos de la época como Johann Bernoulli, D'Alembert, Daniel Bernoulli y Euler. La solución presentada por D. Bernoulli como superposición de ondas, a partir de sus conocimientos musicales, provocaba que la función inicial (forma inicial de la cuerda) se pueda representar como una serie de funciones sinusoidales. La crítica de Euler a la solución de D. Bernoulli es que, además de que sus argumentos fueron completamente físicos, la función inicial debe cumplir las propiedades de ser periódica e impar (por las propiedades de la función seno), lo cual es una restricción innecesaria. Sin embargo, D. Bernoulli afirmaba que en la ecuación existen infinitos coeficientes, lo que permite escogerlos de manera tal que la igualdad se cumpla. Farfán (2012, p. 51) menciona que "el meollo de la discusión no radica en la solución en sí misma, sino en cuál de ellas es la *solución general*, así como en la metodología empleada para encontrarla", esto debido a la definición de función de la época lo que provocó la revisión de los fundamentos del Análisis Matemático.

A partir de la solución propuesta por D. Bernoulli se aprecia que comprendía cómo se comportaba la superposición de ondas, esto es un indicador de lo esencial para la comprensión de la serie trigonométrica de Fourier, pues al saber cómo se comportan las sumas parciales se pueden *predecir* ciertas propiedades del comportamiento general de la serie, donde lo que se requiere es acercarse a la forma inicial de la cuerda (convergencia de la serie), mediante la comprensión del comportamiento de las sumas parciales.

Momento 2. El problema de la propagación del calor

Las ideas de D. Bernoulli esperaron por más de cincuenta años para ser tomadas en cuenta, esta vez por Jean Baptiste-Joseph Fourier quien, preocupado por modelar los fenómenos naturales, logra dar explicación al fenómeno de propagación del calor en forma matemática, pero congruente con las ideas físicas involucradas, aunque separadas, algo no usual en la manera de hacer matemática de la época.

Las ideas de Fourier quedan plasmadas en su libro *Théorie Analytique de la Chaleur* de 1821, donde expresa: "La Teoría que vamos a exponer tiene por objeto demostrar estas leyes; el calor, y las cuestiones del cálculo integral donde los elementos están dados por la experiencia" (Fourier, 1822, p. 1, la traducción es nuestra).

Fourier determina la ecuación diferencial que modela la propagación del calor en cuerpos sólidos, luego proporciona problemas de uso de la ecuación, en el cual considera el problema de la propagación del calor en una lámina infinita, problema en el que Fourier plantea un modelo de la propagación del calor en la Tierra (Romero, 2016). Al resolver este problema, Fourier llega la siguiente ecuación:

$$1 = a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + \cdots$$

La cual representa la misma situación que provocó la discusión sobre el problema de la cuerda vibrante, es una representación en serie trigonométrica de una constante, lo que logró hacer Fourier, que no hizo D. Bernoulli, fue proporcionar el cálculo de los coeficientes. Pero antes de esto vio necesario justificar dicha solución físicamente, ver que su solución es coherente con el problema físico planteado.

Esto permite ver que Fourier está interesado en "anticipar el comportamiento de la naturaleza, en modelarla" (Cantoral et al, 2006, p. 94). Fourier en todo su trabajo tiene la necesidad de comprobar que las soluciones obtenidas se adecúan a los datos empíricos y a la situación física, pero a diferencia de la tradición, los argumentos físicos no afectan lo matemático, se van dando de manera paralela, pero inicia una separación entre las ideas físicas y las ideas matemáticas. Ver detalles en Romero (2016).

Finalmente, los aspectos presentados funcionan como un ejemplo de cuestiones de interés histórico-epistemológicos a considerar desde la Socioepistemología para la problematización del saber matemático. En este caso, las prácticas de predecir, modelar e interpretar juegan un rol importante para el surgimiento de la STF.

Ejemplo 2. Estudio histórico-epistemológico de las EDO. (Henao, 2016)

Esta investigación tuvo como hilo conductor la pregunta: *¿Cuáles fueron los factores epistemológicos vinculados con el desarrollo del cálculo de variaciones y la modelación de problemas físicos, que posibilitaron el surgimiento y constitución de las ecuaciones diferenciales ordinarias como una disciplina en las matemáticas?*

Se consideró como marco metodológico a la investigación histórica en el campo de la educación matemática, ésta involucra principalmente tres etapas: i) Identificar y acotar una problemática, es decir la elección de un tema que será objeto de reflexión; ii) Organizar y seleccionar los datos o documentos que serán las unidades de análisis y; iii) elaborar un informe de investigación (Cohen & Manion, 2002), (en este artículo, sólo exponemos de i) y ii). En la primera, se realizó un análisis de fuentes secundarias que arrojaron evidencia sobre el surgimiento y desarrollo de las EDO. En esta etapa, se analizaron los capítulos 21 y 29 de Kline (1992) y la investigación de Nápoles (1998) y Nápoles et al. (2004). En la segunda, se realizó la selección y clasificación de fuentes primarias que fueron las unidades de análisis. Los criterios de selección de las fuentes primarias se fundamentaron en la pertinencia para la problemática y la accesibilidad de los mismos, algunas fuentes analizadas fueron Bernoulli (1690), Bernoulli (1691), Bernoulli (1694). Es importante señalar que, el método hermenéutico posibilitó la interpretación de cada uno de los documentos originales.

Del análisis de documentos de la primera y segunda etapa, podemos decir que, la historia de las matemáticas mostró que algunos de los problemas que permitieron la constitución de las EDO se originaron a finales del siglo XVII y comienzos del siglo XVIII. Los científicos de estos siglos intentaron dar respuestas a problemas de la física vinculados con el campo de la elasticidad y la astronomía, entre otros. Dichos problemas, exigían para su solución un abordaje matemático que pudiera modelar fenómenos de variación. Esta necesidad, posibilitó la emergencia de una nueva disciplina dentro de las matemáticas, las EDO. Uno de los primeros métodos, fue resolver las ecuaciones a partir de la expresión analítica de una curva. Sin embargo, fueron diversos los fracasos presentados con este método, por ello se emprendió una búsqueda para hallar métodos que permitieran solucionar EDO. Otro de los factores que influyeron en el surgimiento de las ecuaciones diferenciales se vincula con el desarrollo en el cálculo. Los aportes de Newton y Leibniz fueron fundamentales en la creación de métodos para resolverlas. Entre las primeras técnicas que aparecieron se encuentra la aproximación por funciones elementales, el cálculo de cuadraturas y la separación de variables.

Para ejemplificar, mostramos el análisis de uno de los problemas que permitieron la constitución de las EDO: *El problema de la braquistócrona*. En junio de 1696 Johann Bernoulli público un problema a la comunidad matemática en las *Acta Eruditorum*. El desafío consistía en hallar el camino *ABM* por el que una partícula móvil *M*, descendiendo por su propio peso, iría de *A* a *B* en el menor tiempo posible (ver Figura 1), los puntos *A* y *B* se encuentran en un plano vertical, a diferentes alturas y no están ubicados directamente uno encima del otro.

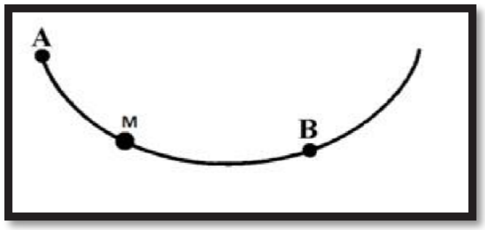


Figura 1. La braquistócrona

Johann Bernoulli llamó a esta curva *braquistócrona* (del griego braquis, corto y cronos, tiempo). En 1697 aparecieron las demostraciones de Leibniz, Jacob Bernoulli, L'Hôpital y Newton. Se encontró que la curva que soluciona el problema planteado por Bernoulli es la cicloide. La demostración de Johann Bernoulli consistió en establecer una analogía entre la curva de más breve descenso y la trayectoria que seguirá el rayo de luz en un medio plano con índice de refracción adecuadamente elegido. Los elementos fundamentales de la demostración de Johann Bernoulli fueron el principio de Fermat del tiempo mínimo, la ley de refracción de Snell y el cálculo infinitesimal. La ley de Snell establece que un rayo de luz al pasar de un medio a otro de densidad diferente se desvía de modo que la relación entre las velocidades y el seno del ángulo que forma la curva con la vertical permanece constante. Además, por Galileo se conocía que la velocidad de caída de un cuerpo es proporcional a la raíz cuadrada de la distancia desde donde cae. Ambos elementos están presentes en la demostración de Johann Bernoulli.

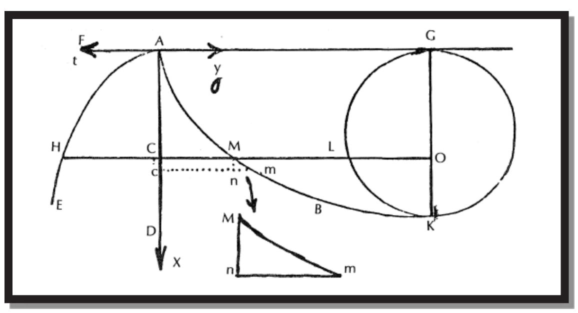


Figura 2. Solución del problema de la braquistócrona por Johann Bernoulli (Actas Eruditorum p, 201)

Johann en su demostración toma el eje *y* horizontal y el eje *x* ortogonal con la dirección positiva hacia abajo (ver Figura 2), note que esta forma de tomar los ejes es contraria a la que normalmente se utiliza. El objetivo era encontrar la curva de mínimo descenso de un punto *A* con velocidad nula hasta un punto *B* deslizándose sin rozamiento por la acción de la gravedad. Johann considera que la velocidad en cualquier punto *M* de la trayectoria depende únicamente de *x*, así pues, la braquistócrona que se busca puede identificarse con la trayectoria de un rayo de luz que parte de *A* y llega a *B*. De acuerdo a Galileo la velocidad en el punto *M* será $\sqrt{2gx}$, es decir depende únicamente de *x*, este hecho le permite a Johann establecer la analogía con la trayectoria de un rayo de luz que parte de *A* hasta *B*. Johann supone que el espacio está dividido en franjas separadas por planos horizontales de grosor infinitesimal cuyas densidades varían. En cada punto de la curva braquistócrona buscada se cumple que el seno del ángulo entre la tangente a la curva y el eje vertical es proporcional a la velocidad (ley de Snell) y ésta es a su vez proporcional a la raíz cuadrada de la altura del cuerpo que cae (segunda ley de Galileo). Bajo estas condiciones Bernoulli inicia su demostración. Ver detalles en Henao (2015).

Cabe mencionar que, a mediados del siglo XVIII, las EDO ya se habían convertido en una disciplina independiente y la resolución en un fin en sí mismo, desvinculada de los problemas del campo de la física (Kline, 1992), puesto que, ya existía un amplio campo de métodos asociados con la resolución de EDO.

■ Conclusiones

Desarrollar un análisis histórico-epistemológico, en tanto, considera las circunstancias y los medios que posibilitaron el surgimiento de los conceptos y las nociones matemáticas permite: 1) Proveer de historicidad a los conceptos matemáticos que la enseñanza usual presenta como objetos universales; 2) Proveer de historicidad a las nociones metamatemáticas y protomatemáticas, tales como el rigor, mostrando que no existe un rigor eterno y perfecto de las matemáticas y; 3) Posibilita la observación de las disparidades entre el saber científico y el enseñado, demostrando que no es cierto que los objetos de enseñanza en la escuela son copias de los objetos de la ciencia (Farfán, 2012).

De esta manera, los dos ejemplos presentados muestran cómo desde distintas posturas teóricas, se pueden realizar diferentes abordajes de las nociones y objetos matemáticos en su génesis histórica-epistemológica. Tanto para la emergencia de la STF como para el surgimiento y constitución de las ecuaciones diferenciales ordinarias como una disciplina en la matemática, se evidencia el papel que juega el desarrollo del cálculo y la modelación de problemas físicos, y que estos no surgieron espontáneamente, sino que son resultado de una reflexión profunda y coherente con los problemas planteados a partir del estudio de los fenómenos de la naturaleza.

Además, el recurso de la analogía como mecanismo para la resolución de problemas, evidenciado en el problema de la braquistócrona, donde se transforma un problema meramente mecánico en uno de óptica, no es un recurso para resolver un problema hoy en día. Por otra parte, en el trabajo sobre propagación de calor, el mismo Fourier plantea que dicho problema es diferente a los problemas de la mecánica racional (Fourier, 1822), razón por la cual sus argumentos matemáticos se ven separados de los argumentos físicos, pero siguen siendo coherentes los unos con los otros. Estos dos ejemplos muestras que lo que se considera "hacer matemáticas" cambia dependiendo de los problemas que se estén respondiendo, de los contextos y preocupaciones de los individuos y las sociedades.

Referencias bibliográficas

Bakker, A. & Gravemeijer, K. (2006). An historical phenomenology of mean and median. *Educational Studies in Mathematics, 62*, 149-168.

Bernoulli, J. (1690). Analisis Problematis Antehac. *Acta Eruditorum*, 217-219.

Bernoulli, J. (1691). Solutio Problematis Funicula. *Acta Eruditorum*, 274-276.

Bernoulli, J. (1694). Modus Generalis Construen di Omnes equationes differentiales primi gradus. *Acta Eruditorum*, 435-437.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J. & Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, especial, 83-102.

Clark, K. M. (2012). History of mathematics: illuminating understanding of school mathematics concepts for pre-service mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *81(1)*, 67-84. doi:10.1007/s10649-011-9361-y

Cohen, L. & Manion, L. (2002). Investigación Histórica. En *Métodos de investigación educativa* (págs. 75-101). Madrid: La Muralla.

Farfán, R. M. (2012). *Socioepistemología y ciencia. El caso del estado estacionario y su matematización*. Barcelona: Gedisa.

Farmaki, V. & Paschos, T. (2007). Employing genetic 'moments' in the history of mathematics in classroom activites. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 83-106.

Fourier, J. (1822). *Théorie analytique de la chaleur*. París: Chez Firmin Didot, père et fils.

Henao, S. (2016). *La constitución de las ecuaciones diferenciales ordinarias como disciplina de la matemática: Un análisis histórico- epistemológico.* Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Janvist, U. T. (2009). On empirical research in the field of using history in mathematics education. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12(1)*, 67-101.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días. Volumen 2.* Madrid: Editorial Alianza S.A.

Nápoles, J. (1998). El legado histórico de las ecuaciones diferenciales ordinarias, consideraciones (auto) criticas. *Boletín de matemáticas, 5*, 53-79.

Nápoles, J., Gonzáles, A., Genes, F., Basabilbaso, F. & Brundo, J. (2004). El enfoque histórico-problématico en la enseñanza de la matemática para ciencias técnicas: el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias. *Scientiae*, *6*, págs. 41-59. Canoas.

Reyes-Gasperini, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Romero, F. (2016). *Construcción social de la serie trigonométrica de Fourier. Pautas para un diseño de intervención en el aula*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Smestad, B., Jankvist, U. T. & Clark, K. (2014). Teachers' mathematical knowledge for teaching in relation to the inclusion of history of mathematics in teaching. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *19(3-4)*, 169-183.

Tzankis, C. & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. En J. Fauvel, & J. Van Maanen (Ed.), *History in Mathematics Education* (págs. 201-240). Dordrecht: Kluwer Academic.

Witzke, I., Struve, H., Clark, K. & Stoffels, G. (2016). ÜberPro – A seminar constructed to confront the transition problem from school to university mathematics, based on epistemological and historical ideas of mathematics. *MENON: Journal of Educational Research*, *2nd Thematic Issue*, 66-93. Retrieved from http://www.edu.uowm.gr/site/system/files/uberpro_-a_seminar_constructe_scienc_en.pdf

APRENDIZAJE INVISIBLE EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Sergio Rubio-Pizzorno, Gisela Montiel Espinosa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav). México.
sergio.rubio@cinvestav.mx (www.zergiorubio.org), gmontiele@cinvestav.mx

RESUMEN: A partir de la tercera revolución de la humanidad, la tecnología digital ha crecido de manera ingente, lo cual ha provocado, por ejemplo, un cambio en la estructura de la sociedad y cómo se comprende la educación. En esta última categoría, se manifiesta la posibilidad que tienen los individuos, y las comunidades que conforman, de suplir sus propias necesidades educativas. Este fenómeno ocurre como respuesta a la desidia del mundo oficial a dar respuesta al fenómeno de la educación. Debido a lo informal de estos aprendizajes, la institucionalidad responde a este fenómeno invisibilizando los aprendizajes desarrollados de esta manera.

En consecuencia con la problemática identificada, el propósito de este escrito es detectar indicios de aprendizajes matemáticos invisibles, mediante la revisión de literatura especializada, específicamente a través del análisis del *software* GeoGebra, como una manifestación de la sociedad 3.0. Con lo cual se comienza a delinear el problema de esta investigación, respecto a los aprendizajes invisibles para el caso de la geometría dinámica.

Palabras clave: aprendizaje invisible, tercera revolución de la humanidad, oficial - no oficial, GeoGebra

ABSTRACT: From the third humanity revolution, digital technology has rapidly increased, which has caused a change in the structure of society and the way education is understood. In latest category, the possibilities the individuals and their communities have to satisfy their own educational needs are shown. This phenomenon occurs in response to the official world's reluctance to respond to the phenomenon of education. Due to the informal nature of these learning, the institutions respond to this phenomenon by ignoring the learning developed in this way. In correspondence with the identified problem, this paper is aimed at detecting signs of invisible mathematical learning, through the review of specialized literature, specifically through the analysis of GeoGebra software, as an expression of the 3.0 society. Thus, the problem of this research, with respect to the invisible learning for the case of dynamic geometry, starts being focused.

Key words: invisible learning, third revolution of humanity, official - unofficial, geogebra

Introducción

En este escrito se reporta la identificación de la problemática a atender en nuestra investigación, la cual está caracterizada por el fenómeno social y educativo provocado por la aparición de las tecnologías digitales en el panorama mundial, o tercera revolución de la humanidad como lo denomina Serres (2013). Los efectos de este fenómeno en la educación han provocado una bifurcación entre el ámbito oficial y no oficial, en la manera de atender y de ocuparse de las necesidades educativas de las personas y las comunidades que integran. Lo oficial atiende a sus necesidades institucionales e invisibiliza los aprendizajes desarrollados por las personas en ámbitos no oficiales, aunque estos aprendizajes estén directamente relacionados con suplir las necesidades de las personas, solo por el hecho de no haber sido desarrollados en instancias oficiales.

En consecuencia al fenómeno señalado, es de interés para esta investigación situar los efectos de la tercera revolución de la humanidad y la dicotomía oficial-no oficial en la educación matemática, mediante la revisión de literatura especializada, específicamente lo que respecta a la geometría, debido al gran avance en las prácticas didácticas empleando ambientes de geometría dinámica (Sinclair et al., 2016). De tal manera que se comience a delinear un problema de investigación susceptible de desarrollar y viable de estudiar.

La tecnología digital ha penetrado e impactado a la educación

La relación entre educación y tecnología digital comenzó a mediados del siglo XX (Freiman, 2014), y a partir de ese momento esta tecnología ha penetrado e impactado en la educación a distintos niveles, tanto en sala de clases, escuelas, sistemas educativos, políticas gubernamentales, e incluso acuerdos de organizaciones internacionales preocupadas por la educación. Vemos como en la actualidad las aulas están equipadas con aparatos electrónicos como proyectores, pizarras digitales interactivas y computadores; las escuelas cuentan con conexión a Internet y laboratorios de cómputo; instituciones educativas brindan cursos de formación a distancia por medio de aulas virtuales; los gobiernos promulgan leyes y planes para entregar un computador o tabletas por estudiante. Esta penetración se condensa y converge a declaraciones de organismos internacionales preocupados de la educación, refiriéndose, por ejemplo, a la importancia de las competencias digitales como parte de las ocho competencias fundamentales de los ciudadanos del siglo XXI, por parte de la Agenda de Lisboa (Cobo y Moravec, 2011), o la tecnología como un dominio de aprendizaje del siglo XXI, por la Unesco (Learning Metrics Task Force – Unesco, 2013).

Tercera revolución en la humanidad

Esta penetración tecnológica no es exclusiva de la educación, otros ámbitos de la humanidad, como la sociedad, la economía, el trabajo y la vida privada se han visto modificadas por la integración tecnológica a sus prácticas. Estos cambios se fueron gestando durante la segunda mitad del siglo XX y detonaron la aparición de las tecnologías digitales. Esto dio origen a lo que Serres (2013) denomina como una de las tres principales revoluciones en la historia de la humanidad, luego de la creación de la escritura e invención de la imprenta. Esta Tercera Revolución de la Humanidad (3RH) cambió, entre otros, la manera en que se articula la sociedad y cómo se entiende la educación.

Cobo y Moravec (2011) caracterizan el cambio social a raíz de la 3RH, como un cambio de paradigma entre la sociedad 1.0 (análoga, jerárquica, mecánica y determinista) y a la sociedad 3.0 (digital, intencionada y autoorganizada, sinérgica y diseñada).

En cuanto al efecto de la 3RH en la educación, Freiman (2014) identifica que, en su mayoría, los organismos oficiales se preocuparon de incorporar la tecnología teniendo en cuenta sus necesidades institucionales, por sobre atender a las necesidades educativas de las personas. Es decir, atender las directrices establecidas por políticas de los países, que fomentan el uso de tecnología en las escuelas, pero sin considerar cómo llevar a cabo magna tarea.

La descripción realizada sobre los efectos de la 3RH en el paradigma social dominante y el desempeño de la educación, se enmarca en un nivel de desarrollo oficial, entendiendo esto como las instituciones, centros de enseñanzas u otras instancias, que ejercen cierta autoridad sobre los miembros o conjunto de la sociedad, la nación, el estado o entidades territoriales.

Sin embargo, gracias a la proliferación y expansión de Internet, herramienta insigne de la sociedad 2.0, que emerge como instancia de democratización social y apertura a la libre disponibilidad de la información, también sucedieron cambios sociales y educativos a un nivel *no oficial*, motivados por la posibilidad de las personas para incidir en cambios locales, personales y colectivos, con efectos y resultados instantáneos.

En términos sociales, a partir de la 3RH, el avance tecnológico y la omnipresencia de Internet, la sociedad y la ciudadanía también se comenzaron a vivir de manera digital. Emergieron las redes sociales, plataformas para compartir información personal y comunitaria (YouTube, Flickr, Wikipedia, etc.), que permitieron compartir no sólo ideas, sino también generar nuevas interpretaciones de éstas. Cobo y Moravec (2011) denominan a este cambio social, a nivel no oficial, como el paradigma cultural del “corta-pega”, aludiendo a la característica de remezclar y reutilizar información ya existente, para dar lugar a significados tan exclusivos y personales como los de las obras originales en las que se basaron (p. 51). Los blogs son un claro ejemplo de esta cultura del corta-pega, espacio en el cual los autores comparten sus ideas personales con la comunidad global, valiéndose de la información compartida y disponible en esta red, expresada en distintos y diversos formatos, tales como audio, video, texto, imágenes.

Actualmente, en el contexto de la educación, existen modalidades de aprendizaje mediadas por la tecnología que nacen de manera independiente al ámbito oficial y a lo que éste determina que se debe aprender. Estas modalidades, como videos tutoriales en YouTube, plataformas de aprendizaje personalizado como Khan Academy, comunidades mundiales alrededor de software libre como GeoGebra, aplicaciones y sitios web para aprender idiomas como Duolingo, etc.; nacen en la búsqueda por satisfacer las necesidades colectivas y personales de los miembros de la comunidad.

Debido a estas características, los aprendizajes desarrollados en estas modalidades corresponden a *aprendizajes invisibles* entendidos como:

Por una parte, contamos con el conocimiento explícito, que es sencillo de codificar o verbalizar, e incluso observar en libros, bases de datos, manuales de programación, partituras musicales, etc. Y por otra parte, está ese otro conocimiento, llamado tácito, que es personal o experiencial y que resulta mucho más complejo (sino imposible, en algunos casos) de exportar, sistematizar e incluso verbalizar. (Cobo y Moravec, 2011, p. 26)

Estos conocimientos o aprendizajes invisibles, se manifiestan en distintos ámbitos del saber humano, en el caso de las tecnologías digitales, con plataformas y formatos generales (como el caso de YouTube y Khan Academy), o de manera focalizada a distintas disciplinas (como GeoGebra para el caso de matemáticas y Duolinguo para lenguas). Para esta investigación, nos interesa estudiar los aprendizajes invisibles relacionados con aprender matemáticas, por lo que analizamos el caso de GeoGebra, en sus facetas de herramienta digital y como comunidad global.

Geogebra como manifestación de la sociedad 3.0

Esta investigación reconoce como uno de sus principios que, debido al impacto global que ha provocado la aparición de la tecnología digital en el panorama educativo, las distintas disciplinas comparten de manera general algunas descripciones y caracterizaciones. Por ejemplo, en nivel de investigación educativa “la clave está en cómo se aprende, no en qué se aprende” (Cobo y Moravec, 2011, p. 61), lo cual aplica para diferentes didácticas disciplinares (historia, lengua, matemáticas, ciencias, etc.). Sin embargo, cada una de éstas tiene sus propias y privativas características, lo que obliga a considerar las particularidades de cada una al momento de realizar una investigación. De esta manera podemos declarar que, de manera general, aprender en ambientes materiales es diferente de aprender en ambientes híbridos. Y más aún, cuando se aprende en un ambiente híbrido, aprender matemática es distinto de aprender, por ejemplo, lengua, historia o alguna otra disciplina.

Reconocer este principio, permite enfocar las investigaciones a su campo disciplinar, que en el caso de esta investigación es la Matemática Educativa, disciplina que “se ocupa de los fenómenos didácticos ligados al saber matemático” (Cantoral y Farfán, 2003).

En particular, analizamos la herramienta digital GeoGebra, de gran impacto en los ámbitos docente e innovación de la educación matemática, ya que que pusieron los ambientes de geometría dinámica a disposición de todos, debido a su estatus de *software* libre (Sinclair et al., 2016).

GeoGebra es un software educativo cuyo propósito inicial fue combinar en una sola interfaz gráfica, las bondades de un procesador geométrico y de un sistema de cálculo algebraico simbólico (CAS), de ahí su nombre: GEOmetría y álGEBRA.

Desarrollo y Trabajo interconectado

Esta característica habla de la manera en que se construye y articula una herramienta en el Paradigma dinámico. Los grupos que desarrollan el software ya no son pequeños y cerrados, por el contrario, se constituyen una comunidad global alrededor de la herramienta digital. Pero no sólo en el desarrollo del programa, sino también en la posibilidad de compartir el conocimiento de manera libre y sin fronteras.

Esta organización social alrededor del software es natural cuando se habla de Software Libre, un concepto desarrollado por Richard Stallman en la década de 1980, como respuesta a la hegemonía de los sistemas operativos privativos, y a la imposibilidad de hallar una alternativa que no estuviese vinculada al monopolio comercial de tales software.

La propuesta de Stallman, que se sigue desarrollando de manera fructífera en estos días a través del Proyecto GNU y la Free Software Foundation, propone que un programa es software libre, si sus usuarios tienen las cuatro libertades esenciales:

- Libertad 0: La libertad de ejecutar el programa como se desea, con cualquier propósito.
- Libertad 1: La libertad de estudiar cómo funciona el programa, y cambiarlo para que haga lo que usted quiera. El acceso al código fuente es una condición necesaria para ello.
- Libertad 2: La libertad de redistribuir copias para ayudar a su prójimo.
- Libertad 3: La libertad de distribuir copias de sus versiones modificadas a terceros.

Esto le permite ofrecer a toda la comunidad la oportunidad de beneficiarse de las modificaciones. El acceso al código fuente es una condición necesaria para ello. (Free Software Foundation, 2016)

Para el propósito de este trabajo, es de interés analizar que la definición de software libre, a través de la declaración y cumplimiento de las cuatro libertades, tiene que ver más con efectos éticos, sociales y políticos, que con cuestiones técnicas. Como declara Stallman en una de sus conferencias sobre el software libre: “es el que respeta tu libertad y la solidaridad social de tu comunidad” (Stallman, 2013). Además enfatiza que el uso del software libre implica desarrollo social, ya que permite y fomenta el libre acceso a la información.

Conjugar las propuestas del software libre y el potencial de Internet, propicia de manera natural, el establecimiento y desarrollo de una comunidad colaborativa y global, alrededor de las herramientas digitales involucradas.

Volviendo al caso de GeoGebra, queda de manifiesto lo natural que se vuelve la colaboración entre los miembros de la comunidad. En palabras de Markus Hohenwarter, en su conferencia Dynamic Mathematics for Everyone: “para mí y para todos los que trabajamos con GeoGebra, la idea de compartir materiales educativos gratuitos con otros es muy importante” (Hohenwarter, 2013). Un dato interesante en cuanto a la articulación social alrededor del software, es que, según Markus Hohenwarter, el *origen de la Comunidad GeoGebra* ocurrió sólo después que el programa pasara a ser software libre.

Herramienta integradora

Debido al propósito inicial de GeoGebra, se concibió como un software que permitía distintas representaciones de los objetos matemáticos de manera simultánea. La relevancia de esta multirepresentación es que “contribuyen al entendimiento de una noción específica, facilitada por el uso de software que ofrecen una conexión de diferentes aplicaciones” (Aldon, 2015, p.367). En la actualidad, GeoGebra cuenta con un variado número vistas, donde cada una de ellas se asocia a una representación de los objetos matemáticos: vista algebraica, vista gráfica (x2), cálculo simbólico (CAS), hoja de cálculo, vista gráfica 3D, entre otros.

La puesta en funcionamiento de estas multirepresentaciones se produce gracias a la integración de todas las vistas de GeoGebra, por ejemplo, al crear un punto en la vista gráfica, se obtendrá su representación visual, además de sus coordenadas cartesianas en la vista algebraica. Pero esta característica por sí sola, no asegura que el trabajo realizado en el ambiente propicie un mejor entendimiento del objeto matemático en cuestión, ya que si bien se puede asegurar la multirepresentación simultánea de un objeto, esto no es garantía de su integración para generar una actividad con intención didáctica.

La multirepresentación habla del potencial productivo del software (eficiencia, costo y campo de validez), llamado *valor pragmático* de la herramienta. Pero no se refiere a lo que se está estudiando con el software, ni cómo este ambiente ayuda al entendimiento del objeto de estudio. Cuando el software afecta el cómo se comprende el objeto matemático y genera preguntas sobre éste, habla de su *valor epistémico* (Artigue, 2002).

Por lo tanto, la multirepresentación, como valor pragmático, corresponde sólo a una condición necesaria para generar una herramienta integradora. Se requiere también integrar tales representaciones con una intencionalidad didáctica, que de cuenta del valor epistémico de la herramienta.

Manipulación dinámica

Una de las características emblemáticas de GeoGebra es la capacidad de dinamizar el tratamiento de los objetos matemáticos involucrados en las construcciones y actividades realizadas en el software. Tan relevante es esta característica, que desde los inicios de la Geometría Dinámica se ha teorizado acerca de la “transformación continua en tiempo real, a menudo llamada *arrastre*'” (Goldenberg, 1998, p. 351), la cual permite diferenciar a los software de geometría dinámica de otros software de geometría.

El arrastre permite manipular los objetos matemáticos abstractos de una forma en la cual, sólo con herramientas mecánicas o análogas, era imposible de realizar. Del Castillo y Montiel (2009) mencionan respecto de los ambientes informáticos que “permiten al usuario operar de una forma directa los objetos matemáticos y sus relaciones, concretando de alguna manera los conceptos matemáticos abstractos” (p. 462).

Al reflexionar en los objetos matemáticos, es posible darse cuenta de su inmaterialidad, es decir, la incapacidad humana de poder acceder a ellos de manera física o perceptible. No podemos tomar una función entre nuestras manos, ni mirar a lo lejos cómo camina el dos. De ahí la importancia, en este campo disciplinar, de la representación de los objetos matemáticos para poder interactuar con ellos.

En consecuencia, la representación dinámica de los objetos, en este caso la cualidad de arrastre en el software GeoGebra, emerge como un gran avance a la hora de interactuar con los abstractos objetos matemáticos.

Ambientes híbridos

GeoGebra fue creado con la intención de ayudar a los profesores de matemáticas en su quehacer docente. Junto con esto, las características propias del software, permiten integrar el programa a una clase escolar, a través de la proyección digital de su interfaz, su uso en tabletas y teléfonos inteligentes, al aprovechar su potencial dinámico en una pizarra digital interactiva, compartir o buscar construcciones de manera libre en su plataforma web, etc.

Todas estas maneras de integrar GeoGebra al quehacer educativo, propician una hibridación en los ambientes de trabajo, desarrollando actividades tanto en ambientes materiales (sala de clase), como en ambientes digitales (plataforma web, dispositivos móviles, proyecciones digitales).

Resultados iniciales

El análisis realizado a GeoGebra muestra ciertos aspectos del *software*, que dan evidencia de ser una construcción propia de la sociedad 3.0. Por ejemplo en facetas como propiciar una organización social en comunidades comunidades de carácter público, colaborativo y global (Contreras, 2003), la relación sinérgica que provoca entre los miembros de la comunidad, la integración de diferentes formatos y ambientes de trabajos intencionando la constitución de ambientes híbridos de trabajo. Sumado a estas características, se reconoce un tipo de interacción distinta con el saber matemático, lo cual puede dar pie a plantear una hipótesis relativa a la reducción de la brecha mediacional, presente al estudiar matemáticas.

Al identificar estas características se puede reconocer, en términos generales, el potencial de GeoGebra como representante de las herramientas de la sociedad 3.0. Así también, nos interesa profundizar en aspectos del saber matemático, con el propósito de focalizar la investigación hacia aspectos de la educación matemática. Para lo cual, ponemos el énfasis en qué se estudia en el ambiente que provee GeoGebra.

De esta manera, reconocemos ciertas propiedades que se relacionan con el saber matemático, tanto en su manipulación, como en sus características epistémicas. En términos generales, GeoGebra realiza una multirepresentación de los objetos matemáticos, articulando las distintas vistas del programa; de manera específica, sus vistas gráficas, representantes de los ambientes de geometría dinámica, destacan por la manipulación dinámica de los objetos geométricos, mediante el *arrastre*.

El arrastre, como característica definitoria de los ambientes de geometría dinámica, añade ciertas propiedades al ambiente, las cuales son heredadas a los objetos geométricos representados en ese entorno, modificando su naturaleza geométrica (Rubio-Pizzorno y Montiel, 2017). Esta nueva naturaleza en los objetos geométricos dinámicos, podría fomentar el surgimiento de aprendizajes invisibles asociados a ciertos saberes matemáticos estudiados en ambientes inusuales (digitales), invisibilizados por una dimensión hegemónica del *discurso Matemático Escolar* (en el sentido que plantean Soto y Cantoral, 2014).

Conclusiones y prospecciones

A partir de la 3RH, la sociedad experimentó ciertas modificaciones. En particular notamos en la educación el fenómeno de invisibilización de los aprendizajes construidos en entornos no oficiales por instancias oficiales. Debido a la disciplina donde se enmarca este proyecto de investigación, se focaliza en aspectos relativos a la educación matemática mediante el análisis de GeoGebra.

De este análisis surgen algunos resultados que permiten delinear una ruta investigativa para este proyecto, centrando la atención el saber en juego mediante una problematización de la geometría, lo que denominamos *énfasis epistémico*, así como también estudiando de qué manera incide la tecnología digital en el desarrollo social de ciertas comunidades, a lo cual nos referimos como la *organización social propiciada por la tecnología digital*.

Al abordar estos dos elementos pretendemos desarrollar sustento teórico para delinear un planteamiento de investigación que considere los aspectos claves identificados hasta el momento: impacto de la tecnología digital en la emergencia de aprendizajes invisibles; distinción del desarrollo educativo en ámbitos oficiales y no oficiales; énfasis epistémico; y organización social propiciada por la tecnología digital.

Referencias bibliográficas

Aldon, G. (2015). Technology and Education: Frameworks to Think Mathematics Education in the Twenty-First Century. En: Uwe Gellert, Joaquim Giménez Rodríguez, Corinne Hahn y Sonia Kafoussi (Eds.), *Educational Paths to Mathematics*: A C.I.E.A.E.M. Sourcebook, 365–381. Springer International Publishing, Cham. ISBN 978-3-319-15410-7. doi: 10.1007/978-3-319-15410-7 24.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245–274. ISSN 13823892. doi:

10.1023/A:1022103903080.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *6*(1), 27–40.

Cobo, C. y Moravec, J. (2011). *Aprendizaje invisible. Hacia una nueva ecología de la educación*. Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona, Barcelona. ISBN 9788447535170.

Contreras, Pau (2003). *Me llamo Kohfam. Identidad de un hacker: una aproximación antropológica*. Editorial Gedisa S. A., Barcelona. ISBN 84-9784-007-0.

Del Castillo, A. y Montiel, G. (2009). ¿Artefacto o Instrumento? Esa es La Pregunta. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 459–468. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Free Software Foundation (2016). ¿Qué es el software libre? Extraído el 30 de septiembre de 2016 desde www.gnu.org/philosophy/free-sw.html

Freiman, V. (2014). Types of Technology in Mathematics Education. En Stephen Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*, 623 – 629. Springer Netherlands.

Goldenberg, E. P. y Cuoco, A. A. (1998). What is Dynamic Geometry? En R. Lehrer y D. Chazan (Eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space*, 351–367.

Hohenwarter, M. (2013). *Dynamic Mathematics for Everyone* [Video]. En youtu.be/Yq1eBZjz16I

Learning Metrics Task Force - Unesco (2013). Toward Universal Learning. What Every Children Should Learn. UNESCO Institute for Statistics and the Center for Universal Education at the Brookings Institution.

Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2017). Naturaleza de los objetos de la geometría dinámica. En F. J. Córdoba Gómez, J. C. Molina García, L. A. Ciro López (Eds.), *Avances en la integración de tecnologías para la innovación en educación. Congreso Latinoamericano de GeoGebra 2016* (en prensa). Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad La Gran Colombia.

Serres, M. (2013). *Pulgarcita*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM - Mathematics Education*, *48*(5), 691-719. doi: 10.1007/s11858-016-0796-6

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión socioepistemológica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática 28*(50), 1525-1544. doi: 10.1590/1980-4415v28n50a25

Stallman, R. (2013). *Conferencia sobre Software Libre* [Video]. En https://youtu.be/5t_EcPTEzh4

CARACTERÍSTICAS DE LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA POR PROYECTOS

Abraham Flores, Jesús Pinto
Facultad de Educación, Universidad Autónoma de Yucatán. (México)
abrahamifc@gmail.com, psosa@correo.uady.mx

RESUMEN: La enseñanza de la Estadística por Proyectos aporta resultados favorables en el aprendizaje de los estudiantes. En la revisión de la literatura se encuentran una diversidad de características y metodologías por Proyectos lo que permite un abanico de posibilidades para desarrollar aprendizajes. Este artículo propone una caracterización, organización y clasificación de los proyectos en Estadística, estos pueden organizarse según tres clasificaciones: (a) según las etapas del proceso de investigación estadística (ocho variantes), (b) según la finalidad y alcances metodológicos (cuatro tipos de proyectos), y (c) según la magnitud y alcances de la asignatura (tres formas). La propuesta se sustenta con base en la revisión de estudios que utilizaron proyectos en Estadística como estrategia de enseñanza. Se presentan algunas consideraciones que el docente debe tener presente al momento de utilizar la clasificación y enseña Estadística por proyectos como estrategia en sus cursos.

Palabras clave: enseñanza estadística, proyectos

ABSTRACT: Project-based Statistics teaching leads to favorable results in the students' learning. In the review of the literature there is a diversity of project-based methodologies and characteristics which allow a wide range of options to develop learning. This article proposes a characterization, organization and classification of projects in Statistics. They can be organized according to three classifications: (a) according to the stages of the statistical research process (eight variants), (b) according to the purpose and methodological scope of projects (four types of projects), and (c) according to the magnitude and scope of the subject (three forms). The proposal is based on the review of studies that used projects in Statistics as a teaching strategy. There are some considerations that the teacher must keep in mind when using project-based Statistics classification and teaching as a strategy in their courses.

Key words: statistic teaching, projects

Introducción

La enseñanza de la Estadística es un tema que se ha estudiado con anterioridad por la importancia que significa comprender y analizar datos en el mundo actual; sin embargo, esta materia puede presentar dificultades en su aprendizaje a cualquier edad. Al respecto, Garfield y Ben-Zvi (2007), mencionan que diversos estudios sobre el aprendizaje de la Estadística han identificado errores heurísticos comunes, prejuicios y conceptos erróneos en estudiantes de universidad y personas adultas.

A pesar de la importancia de la estadística para la vida diaria y académica de las personas, su enseñanza en los diferentes niveles educativos se ha fundamentado en una enseñanza basada en el aprendizaje técnico del procedimiento estadístico y descontextualizado a la aplicación en la vida real de los estudiantes, que no permiten un aprendizaje adecuado. Sobre esto Pinto (2010) menciona que:

> …prevalece el uso de la estadística de forma procesal, cuyos conocimientos y competencias son pasivos e independientes del contexto en que se usa. Todavía se estudia una estadística cuyo énfasis es el cálculo y la elaboración de ejercicios o actividades encaminadas a los procesos exclusivamente, desligado del análisis conceptual y de la toma de decisiones en su uso (ICMI/IASE, 2006, p. 144)

Una de las estrategias de enseñanza que se ha utilizado con resultados favorables en el aprendizaje de la Estadística son los Proyectos. Esta estrategia se caracteriza por permitir a los estudiantes elegir el tema a estudiar, plantear una pregunta de investigación, determinar cómo recolectar la información, elegir las medidas estadísticas y gráficas para el resumen, organización y presentación de los datos, analizar los resultados obtenidos y comunicar las principales conclusiones y hallazgos obtenidos con el trabajo (Batanero y Díaz, 2005a; Gil, 2010; Hogg, 1991; Ledolter, 1995).

Sin embargo, en la literatura los profesores e investigadores que han utilizado los proyectos en diferentes cursos de Estadística han implementado diferentes metodologías al llevar a cabo esta estrategia, adecuando sus características de acuerdo al propósito del estudio o a las características del grupo de alumnos. El propósito de este estudio fue conocer cuáles eran las características de la enseñanza de la Estadística por proyectos a través de la revisión de la literatura y posteriormente contrastar la información obtenida con la implementación de proyectos en un curso de Estadística de nivel medio Superior del entorno.

Procedimiento de análisis

Se realizó una revisión de artículos de investigación nacionales e internacionales en diferentes motores de búsqueda especializados con las siguientes palabras claves*: projects, teaching, learning, statistics*. En total se analizaron 18 artículos que emplearon proyectos para la enseñanza de la Estadística a los cuales se determinó su objetivo, temas de Estadística, tamaño y selección del grupo, elección del tema del proyecto, recolección de los datos, etapas del proyecto y duración, presentación de resultados, evaluación del proyecto, rol del docente y conclusiones del estudio. Con la información obtenida se planteó una caracterización, clasificación y organización de los proyectos que se pueden emplear en el aula. Posteriormente con el apoyo de entrevistas a profesores de un subsistema de bachillerato público se evaluó la práctica docente en contextos reales durante la aplicación de proyectos en el curso de Estadística.

Revisión de la literatura

Se revisaron 17 investigaciones donde el objeto de estudio fueron los proyectos en Estadística, además de un manual sobre proyectos para un curso; quedando un total de 18 artículos. Los estudios recopilados se realizaron en los siguientes países: Estados Unidos (Aklilu, Lee y Daniels, 2006; Albert, 2000; Bailey, Spence y Sinn, 2013; Carnell, 2008; Fillebrown, 1994; Ledolter, 1995; Love, 2000; Melton y Reed, 1999; National Science Foundation, 1998; Short y Pigeon, 1998; Smith, 1998; Sovak, 2010), Grecia (Chadjipadelis y Andreadis, 2006; Ghinis, Chadjipantelis y Bersimis, 2005), Australia (Mackisack, 1994), Nueva Zelanda (Binnie, 2002), España (Gil, 2010) y Brasil (Porciúncula y Samá, 2014). El *nivel educativo* en el cual se aplicaron los proyectos no tuvo mucha variación: 14 de los estudios se realizaron en el nivel superior, principalmente en cursos introductorios a la Estadística. Los estudios restantes que reportaron la aplicación de la metodología por proyectos se realizaron en niveles de educación básica o media superior.

Se identificaron ocho categorías desde las cuales se pueden clasificar los proyectos: duración, formación de los equipos, integración del equipo, elección del tema, recolección de datos, resumen y análisis de datos, presentación de resultados y evaluación. A continuación se presentan los hallazgos en las investigaciones.

La *duración* utilizada para el desarrollo de los proyectos durante el curso fue variada; algunos autores aplicaron proyectos de larga duración (seis meses) para permitir a los estudiantes desarrollar todas las etapas del proceso de investigación estadística. Otros aplicaron proyectos de medio semestre (tres meses) para desarrollar el tema de investigación, pero simplificando las etapas del proceso estadístico. También existieron autores que desarrollaron proyectos de corta duración (menos de tres meses) para los cuales ya tenían ciertos aspectos predeterminados de la investigación, como los temas o el conjunto de datos.

Sobre el *tamaño y selección del grupo*, los proyectos se realizaron generalmente en grupos de dos hasta cinco estudiantes. Los integrantes se elegían por afinidad, por asignación aleatoria, por el docente o por interés al tema de estudio. Sin embargo en algunos estudios los autores optaron por realizar proyectos individualmente, argumentando la dificultad para comprobar que todos los estudiantes en un equipo hayan colaborado en el trabajo.

En la mayoría de los estudios la *elección del tema* del proyecto fue realizada por los estudiantes, estos escogían algún tema de interés general o relacionados a sus áreas de estudio. Otra manera de elegir el tema fue cuando el docente elegía un tema para todos los proyectos grupales del salón y cada uno trabajaba con base en dicho tema asignado. Otra alternativa de elegir el tema fue a través de un consenso entre estudiantes y docente para decidir cuál de los temas que tenían pensado era el más factible. Para la *recolección de datos* la estrategia más utilizada fue permitir a los estudiantes recolectar los datos a través del diseño y aplicación de un instrumento (generalmente cuestionarios) previamente revisado por el docente; de esta forma los estudiantes aprendían el valor y las dificultades de llevar a cabo una adecuada recolección de la información. Otra manera de recolectar datos fue a través de sitios web de registros oficiales, donde se podía obtener amplia información bien organizada y estructurada. Una forma más rápida y fácil de obtener los datos fue con el método de recolección de datos en tiempo real, donde el docente sugería un tema y pregunta de investigación y en ese momento recolectaban los datos necesarios para contestar esa pregunta. En otros estudios los docentes les brindaron a los estudiantes el conjunto de datos predeterminado para que realizaran el análisis estadístico. Para la *presentación de los resultados y conclusiones* de los proyectos se utilizaron principalmente dos opciones: un reporte escrito o una presentación oral. El reporte escrito podía contener diferentes aspectos dependiendo de lo requerido por el docente. La presentación oral se realizó frente al grupo y contenía los resultados del proyecto. En cuanto a *la evaluación* de los proyectos realizada por los docentes, la estrategia más empleada fue la rúbrica y dicha evaluación se realizó desde dos perspectivas: una evaluación continua durante el desarrollo del trabajo, o bien, una evaluación final del trabajo presentado por los estudiantes. Además se utilizaron diferentes estrategias de evaluación, como la autoevaluación de los estudiantes sobre su desempeño durante las etapas del proyecto y la coevaluación de los otros integrantes de un equipo, si fuera el caso, para asegurarse que todos participaran durante el trabajo.

Características de los proyectos en Estadística. Una propuesta

Con base en las características que se mencionan anteriormente se considera que en cada estudio de esta revisión se plantea una enseñanza de la Estadística centrada en el estudiante la cual favorece, en medida de los resultados obtenidos, el razonamiento y la comprensión estadística ya que el alumno participa en las diferentes etapas del proceso de investigación favoreciendo la comprensión de los conceptos, más que el procesamiento técnico de las operaciones estadísticas. Asimismo se hace uso de datos reales y contextualizados, una característica importante de la Estadística que es útil para la comprensión de la utilidad de esta materia. Además, en la estrategia de enseñanza por proyectos el trabajo colaborativo permite, a través de la interacción con sus compañeros, construir el conocimiento con la ayuda de las experiencias compartidas con sus pares para la resolución de problemas que se presentan durante el proceso de investigación. Con base en las características de las metodologías comentadas anteriormente, en la Figura 1 se presenta, *según las etapas del proceso de investigación estadística* una clasificación desde donde se puede entender los proyectos en Estadística.

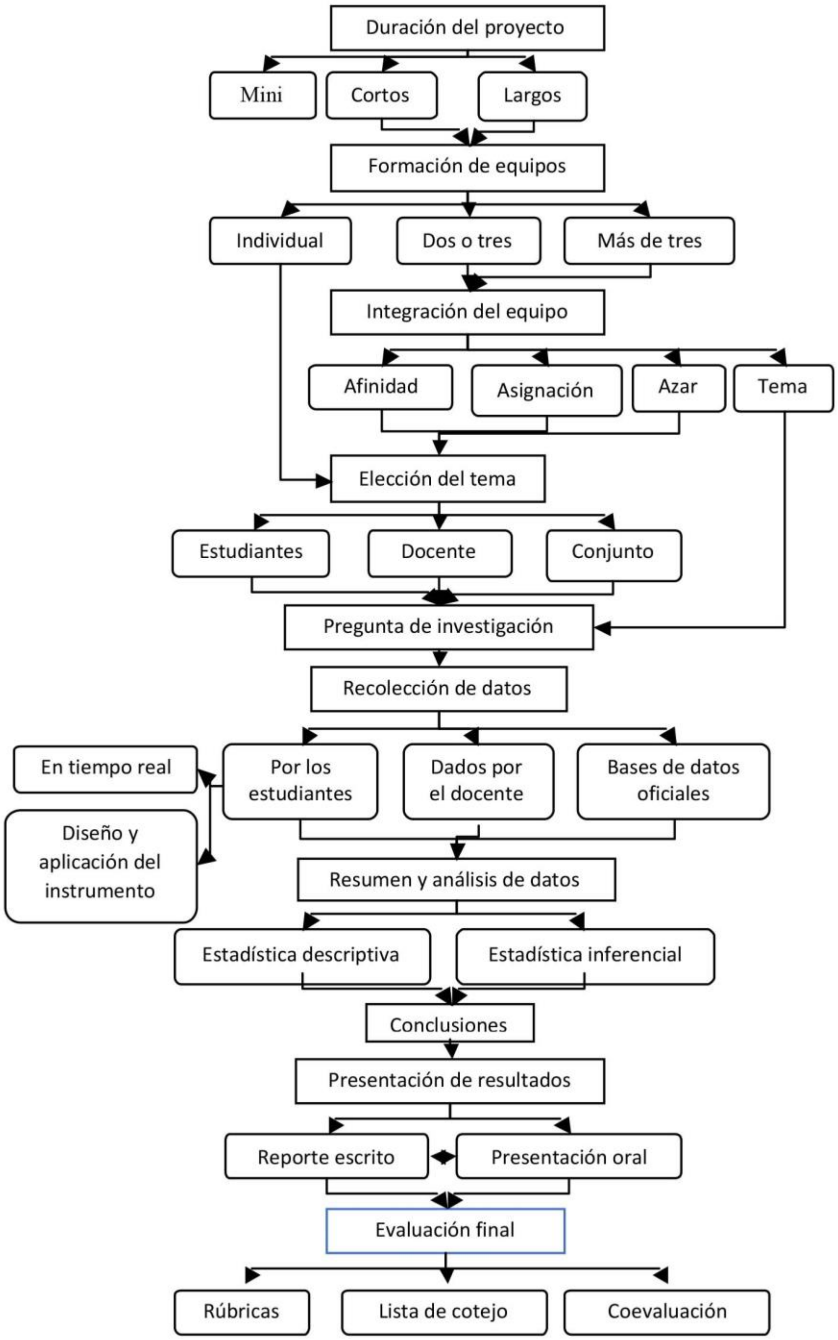


Figura 1. Clasificación de los proyectos según las etapas del proceso de investigación estadística

Por otro lado, con base en la literatura, también se pueden clasificar los proyectos en estadística, *según su finalidad y alcances metodológicos*, de la siguiente manera:

a. *Empíricos:* este tipo de proyectos tienen la finalidad de descubrir algo novedoso sobre algún tema que sea de interés para los estudiantes. Están dirigidos a comprobar una hipótesis a partir de la recolección de datos reales por parte de los alumnos, posteriormente deben comunicar sus resultados a través de un reporte escrito o presentación oral. Por ejemplo, un grupo de estudiantes quiere conocer si existe diferencia en el contenido de azúcar que existe entre diferentes marcas de productos de dulces que venden en su escuela. En este tipo de proyectos caen investigación experimentales, cuasiexperimentales, expost-facto, correlacionales y comparativos. Generalmente surgen de estudios que ya existen, y los estudiantes hacen una réplica en una población o muestra distinta.

b. *Descriptivos:* los proyectos están orientados a describir mediante estadística descriptiva y gráficas algún aspecto de la realidad que sea de interés de los estudiantes. Intentan explorar y describir la realidad sobre una o más variables. Se definen y operacionalizan las variables, se diseña o elige un instrumento corto (tipo encuesta), se recolecta información de una muestra real, se analizan los datos y comunican los resultados. Estos tipos de proyectos son más característicos en cursos de nivel medio superior y superior.

c. *Ejemplos predeterminados*: en este tipo de proyectos los alumnos eligen algún tema o pregunta de investigación que previamente el docente ya tiene enlistados y que tiene una finalidad específica relacionada con el objetivo o tópico estadístico a estudiar. La ventaja es que el profesor tiene más control del proceso y dirige de manera más el proceso de enseñanza y aprendizaje. Útil para los niveles de preescolar, primaria y segundaria, donde hay más limitaciones tiempo y de acceso y disponibilidad de usuarios externos al aula.

d. *Espontáneos:* se presentan cuando el docente elige un tema general al momento y que pueden ser realizados en el contexto del aula; los estudiantes recolectan la información para contestar esa pregunta y se formulan preguntas con base en el contenido para que todo el grupo trabaje de forma general. También llamados proyectos *didácticos*, buscan hacer mediciones específicas de rápida obtención, ya sea en el aula o de un día para otro (ej. con la familia, en el recreo, en la biblioteca). Se recolecta y analiza la información en un tiempo corto y los estudiantes exponen y discuten los resultados. Ejemplo: que los estudiantes tomen su frecuencia cardiaca en reposo promedio del grupo y la comparen con la frecuencia cardiaca después de realizar una actividad física leve.

Una tercera clasificación correspondería *según la magnitud y los alcances de la asignatura*. De esta manera se identifica tres tipos: a) esporádicos: aquellos que se realizan ocasionalmente, con limitaciones que pueden ser el tiempo, el objetivo de la asignatura, el número de estudiantes, la falta de recursos y herramientas, entre otros; b) micro-proyectos: que se realizan en un período de tiempo determinado, donde a los estudiantes se les plantea un objetivo de aprendizaje, una tarea concreta y la realizan en condiciones específicas que el profesor les proporciona; y c) macro-proyectos: aquellos que se realizan a lo largo del ciclo escolar, semestre o cuatrimestres, es decir, durante la duración del curso y se realiza de manera gradual.

Algunas consideraciones en el uso de proyectos en Estadística

El uso de la Estadística por proyectos está condicionada a varios elementos. Algunos de los cuales se comparten a continuación y que se espera el profesor los considere previo a utilizar la estrategia.

Primero, la participación del alumno en la actividad y el planteamiento de una problemática a estudiar (Batanero y Díaz, 2005b) pues los temas no siempre son de su interés, además de que se vuelven repetitivos y favorece su posterior reproducción por otros estudiantes. Se recomienda que exista una mayor libertad para que los estudiantes puedan elegir los temas de los proyectos y plantear una pregunta de investigación, así como una mayor libertad de los docentes para variar la guía establecida en el libro de texto.

Segundo, la dificultad de recolección de datos en escenarios reales, lo que conlleva a pensar en alternativas distintas para la obtención de datos. Ante esto se recomienda la utilización bases de datos en línea para la recolección de datos, de esta manera se agilizaría la realización del proyecto (Aklilu, Lee, y Daniels, 2006), o bien, contar con bases de datos existentes, provenientes de investigaciones concluidas o datos públicos (ej. INEGI).

Tercero, la forma de presentar los resultados del proyecto, ¿reporte escrito? ¿oral? ¿ambos? Cada uno tiene sus alcances y limitaciones que son necesarios valorar y decidir la mejor alternativa. Esta decisión limita o condiciona la comunicación de los resultados de los proyectos en Estadística (Hogg, 1991; Ledolter, 1995).

Cuarto, el acompañamiento necesario, a través de la asesoría al avance de los proyectos. No es “mandar” a los estudiantes a trabajar por proyectos. La Estadística por proyectos es una estrategia formativa que requiere de la motivación, cercanía y revisiones constantes con el o los estudiantes. Esto se traduce en escuchar, orientar, leer, corregir y estimular.

Quinto, los contextos diferentes que viven las aulas escolares en los diferentes sub-sistemas educativos de cada país. El profesor después de reconocer y conocer el entorno donde impartirá el curso, hará los ajustes y tomará las decisiones más pertinentes para el logro del objetivo.

Sexto, la incorporación de modos diferentes de evaluar la Estadística por proyectos; lo que conlleva a la necesidad que el profesor diversifica la modalidad de evaluación no convencionales y más centrado en evaluación formativa que en la sumativa. En este proceso será importante incorporar la autoevaluación y coevaluación, con las adaptaciones respectivas según el nivel escolar y el objetivo del curso.

A manera de cierre

Como es posible apreciar, la estrategia de los proyectos para enseñar Estadística representa una amplia variedad de características y formas de clasificación que ofrece al profesor un abanico de posibilidades para trabajar en sus cursos de Estadística. La finalidad es lograr ayudar al docente en la transición de una Estadística centrada en contenidos y ejercicios (generalmente descontextualizados o sin significado para los estudiantes), a una Estadística por proyectos, con base en marcos de referencia de la educación estadística, al uso y significado intrínseco de la Estadística en sus vidas o proyectos profesionales, que favorezca el aprendizaje significativo y una forma diferente de aprender Estadística. La siguiente fase de la investigación será explorar cómo las diferentes formas de clasificar los proyectos ayudan al profesor y el significado que le da a cada etapa, proceso o características de los proyectos, así como las dificultades que enfrenta y cómo los resuelve.

Referencias bibliográficas

Aklilu, Z., Lee, C. y Daniels, J. (2006). Developing projects based on student's data in introductory statistics. *Presented at the ICOTS-7*, Brasil.

Albert, J. (2000). Using a Sample Survey Project to Asses the Teaching of Statistical Inference. *Journal of Statistics Education*, *8*(1).

Bailey, B., Spence, D., y Sinn, R. (2013). Implementation of Discovery Projects in Statistics. *Journal of Statistics Education*, *21*(3). Retrieved from http://www.amstat.org/publications/jse/v21n3/bailey.pdf

Batanero, C., y Díaz, C. (2005a). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. Presentado en el *I Congresso de Estatística e Investigação Operacional da Galiza* e Norte de Portugal, Guimarães, Portugal.

Batanero, C., y Díaz, C. (2005b). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. Presentado en el *VII Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacións*, Portugal.

Binnie, N. (2002). Using projects to encourage statiscial thinking. Presentado en el *ICOTS-6*, Sout Africa.

Carnell, L. (2008). The effect of a student-designed data collection project on attitudes towar statistics. *Journal of Statistics Education*, *16*(1). Retrieved from www.amstat.org/publications/jse/v16n1/carnell.html

Chadjipadelis, T., y Andreadis, I. (2006). Use of projects for teaching social statistics: Case study. Presentado en el *ICOTS-7*, Brasil.

Fillebrown, S. (1994). Using Projects in an Elementary Statistics Course for Non-Science Majors. *Journal of Statistics Education*, *2*(2).

Garfield, J., y Ben-Zvi, D. (2007). How Students Learn Statistics Revisited: A Current Review of Research on Teaching and Learning Statistics: How Students Learn Statistics Revisited. *International Statistical Review*, *75*(3), 372–396. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2007.00029.x

Ghinis, D., Chadjipantelis, T., y Bersimis, S. (2005). Experiences from Teaching Statistics Using Directed Projects in Greek Elementary School. *Teaching Statistics*, *27*(1), 2–7. https://doi.org/10.1111/j.1467-9639.2005.00188.x

Gil, A. (2010). La estadística oficial en el aula. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (24), 177–182.

Hogg, R. V. (1991). Statistical Education: Improvements are Badly Needed. *The American Statistician*, *45*(4), 342–343. https://doi.org/10.1080/00031305.1991.10475832

Ledolter, J. (1995). Projects in Introductory Statistics Courses. *The American Statistician*, *49*(4), 346–367.

Love, T. (2000). A different Approach to Project Assesment. *Journal of Statistics Education*, *8*(1).

Mackisack, M. (1994). What is the use of Experiments conducted by statistics students? *Journal of Statistics Education*, *2*(1).

Melton, A., y Reed, B. (1999). A project-Based Elemantary Statistics Course. *The Challenge of Diversity*, 142–147.

National Science Foundation. (1998). *Teaching Chance*. New Hampshire: Dartmouth College.

Pinto, J. (2010). Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: estudios de casos con profesores de estadística en carreras de psicología y educación. Tesis de doctorado no publicado. España: Universidad de Salamanca

Porciúncula, M., y Samá, S. (2014). Teaching Statistics through learning projects. *Statistics Education Research Journal*, *13*(2), 117–186.

Short, T., y Pigeon, J. (1998). Protocols and Pilot Studies: Taking Data Collection Projects Seriously. *Journal of Statistics Education*, *6*(1).

Smith, G. (1998). Learning statistics by doing statistics. *Journal of Statistics Education*, *6*(3).

Sovak, M. (2010). *The effect of student-drive projects on the delovepment of statistical reasoning* (Tesis de Doctorado). University of Pittsburgh, Pittsburgh.

LOS MODOS DE PENSAR LA DERIVADA: UN ESTUDIO DE CASO

Irma Pinto Rojas, Marcela Parraguez González
Universidad Católica del Norte, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)
ipinto@ucn.cl, marcela.parraguez@pucv.cl

RESUMEN: El objetivo de este reporte es mostrar evidencia empírica que sustenta los modos de pensar el concepto de derivada, desde una variación del marco teórico, –Los Modos de Pensamiento– de Sierpinska. Con un estudio histórico y epistemológico de la derivada, emergió un modelo que interpreta su comprensión, cuyas componentes se han definido como los modos de pensar: Sintético-Geométrico-Convergente, Analítico-Operacional y Analítico-Estructural. Un estudio de caso con tres matemáticos investigadores en las líneas de “Linear Control Systems on Lie Group”, “Sub-Riemannian Geometry Optimality Semigroups” y destacados docentes de una universidad chilena, documentaron a través de una entrevista semiestructurada, la consistencia de los modos definidos, así como también se identificaron aquellos elementos matemáticos que permiten el tránsito de un modo geométrico a un modo analítico del concepto de derivada.

Palabras clave: comprensión, derivada, modos de pensamiento

ABSTRACT: The aim of this report is to show empirical evidence that supports the ways of thinking about the concept of derivative, from a variation of the theoretical framework, “Thinking Modes” by Sierpinska. With a historical and epistemological study of the derivative, a model that interprets its understanding emerged. Its components have been defined as modes of thinking: Synthetic-Geometric-Convergent, Analytical-Operational, and Analytic-Structural. A case study with three mathematical researchers in the fields of "Linear Control Systems on Lie Group", "Sub-Riemannian Geometry Optimality Semi groups" and outstanding teachers of a Chilean university as well, documented through a semi-structured interview, the consistency of the defined modes. Those mathematical elements that allow the transition from a geometric mode to an analytical mode of the concept of derivative were also identified.

Key words: understanding, derivative, thinking modes

Introducción

El Cálculo Diferencial está presente en los programas de estudio de Ciencias, Economía e Ingenierías en general y el concepto de derivada es su actor principal. En una institución universitaria del norte, existe preocupación por el aprendizaje de la derivada en sus estudiantes y direccionar un estudio en los aspectos cognitivos, fue el primer impulso de motivación para esta investigación. Responder ¿cómo comprenden la derivada los estudiantes? y ¿qué estrategias utilizan los estudiantes al resolver problemas que involucran la comprensión de la derivada?, fueron las primeras preguntas, un tanto ingenuas, para un problema tan complejo como es el aprendizaje de este concepto.

Desde la experiencia docente, se observa que los estudiantes están más cómodos resolviendo problemas donde se priorizan los algoritmos para trabajar con derivadas y presentan dificultades en problemas que requieren un entendimiento más profundo del concepto, Sierpinska (1985) y Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (1995), muestran evidencias de tal situación. Otras investigaciones en Didáctica de La Matemática han indagado en la derivada desde diversas perspectivas, entre éstas, Pino-Fan, Godino y Font (2015), con un estudio cuantitativo y cualitativo realizado a 53 estudiantes, señalan que el 56% de los estudiantes tuvieron problemas para demostrar mediante la definición formal de la derivada, en particular la derivada como límite, lo mismo se afirma en Vinner y Dreyfus (1989), Font (2000), Sierpinska (2007). La función derivada (aspecto global de la derivada) y la derivada en un punto (aspecto local de la derivada), han sido reportadas en Inglada y Font (2003), Badillo, Azcárate y Font (2011) como problemas metodológicos pendientes. Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008), presentan una revisión de investigaciones que reportan sobre el aspecto global, y local de la derivada, argumentando que los estudiantes no comprenden las ideas que vinculan estos dos aspectos. Además, la doble naturaleza algorítmica y estructural de la derivada (Sfard, 1991) influyen en la comprensión del concepto en los estudiantes, proceso que se torna aún más complejo.

Para indagar la comprensión de la derivada desde su desarrollo en la matemática, esta investigación realiza un análisis histórico y epistemológico del concepto de derivada, con base en el marco teórico– Los Modos de Pensamiento– de Sierpinska (2000), marco que permite a partir de una variación de sus modos, realizar una interpretación de los modos de comprensión para la derivada. De esta forma, esta investigación considera tres formas de pensar la derivada, que se definen como el modo, Sintético-Geométrico-Convergente (SGC), el modo Analítico-Operacional (AO) y el modo Analítico-Estructural (AE) como las componentes de un modelo que relaciona el aspecto local en relación sinérgica con el aspecto global de la derivada. Desde esta perspectiva se concibe la comprensión profunda de la derivada como la capacidad de un sujeto para articular estos tres modos de pensamiento.

Para afrontar la problemática, se plantean las siguientes preguntas que guían la investigación: ¿cuántas maneras diferentes de pensar la derivada se ponen en juego en una tarea matemática? y ¿qué elementos matemáticos contribuyen al logro del tránsito entre los modos de pensamiento geométrico y analítico del concepto? Un desafío en esta etapa de la investigación, será dar respuesta a estas preguntas, por lo que se han planteado los siguientes objetivos:

Objetivo general de investigación

Comprender y analizar, desde los modos SGC, AO y AE, el hecho didáctico de pensar la derivada como la pendiente de la recta tangente en un punto de la curva, la derivada como el límite de las pendientes de las rectas secantes en un punto y los indicadores que dan consistencia a la pendiente, para identificar y describir su conexión.

Específicamente, se pretendió determinar los elementos articuladores entre las formas de comprender la derivada, la búsqueda de estos elementos conectores que pudiera estar en el ámbito de la matemática o de la física o de otra disciplina. La búsqueda de los elementos que favorecen el tránsito entre estos modos de pensar la derivada, direcciona la búsqueda de una base teórica que permita describir y dar respuesta a la problemática planteada.

Marco de referencia: los modos de pensar la derivada

Desde un estudio histórico y epistemológico de la derivada, esta investigación realiza una variedad del marco teórico que presenta Sierpinska (2000), para interpretar la comprensión de la derivada en los aprendices. Se debe precisar desde el punto de vista matemático que el aspecto local de la derivada está referido a la consideración del entorno de un punto específico, como una vecindad de este punto en la curva, y en lo global es de interés una vecindad del punto específico suficientemente grande como el dominio de la función. En este estudio histórico y epistemológoco se han identificado tres etapas en el desarrollo de la derivada, su génesis, su naturaleza operacional y su carácter formal en la matemática. Todo este proceso, puede ser resumido a través de la siguiente frase: “Primero fue usada, después descubierta, explorada y desarrollada y solo entonces definida”, (Grabiner, 1983, p. 202).

Este marco de referencia corresponde a un modelo para la comprensión de la derivada, donde se relaciona el aspecto local y global de la derivada y sus modos de pensar respectivamente. Modelo que ha sido el resultado de la evolución de una investigación iniciada como una variación del marco teórico –Los Modos de Pensamiento– de Anna Sierpinska, reportado en, Pinto y Parraguez (2015), estos modos se han definido de la siguiente manera:

Modo Sintético-Gráfico-Convergente (SGC)

El contexto geométrico de la derivada como la pendiente de la recta tangente en el análisis histórico y epistemológico, (Bourbaki, 1972), muestra la diversidad de puntos de vista sobre la noción de recta tangente, así también la recta tangente es la noción matemática que esta investigación considera como una componente fundamental para conseguir la imagen directa, observable del concepto de derivada, característica que Sierpinska, (2000) da al pensamiento practico del modo Sintético-Geométrico (SG), al que esta investigación define como modo Sintético-Geométrico- Convergente, (Figura 1).

De acuerdo con Canul, E.; Dolores, C y Martínez-Sierra, G. (2011), una concepción geométrica global de la tangente, en la definición de Euclides, refiere a la tangente de una circunferencia, como*: Una línea recta es tangente a una curva cuando tenga un punto en común con la curva, no se puede pasar por este punto ninguna recta entre ella y la curva*. Sin embargo, para el propósito de construir rectas tangentes a la curva en esta investigación, esta definición presenta dificultad en la comprensión, dado que la curva con puntos de inflexión no tendría posibilidad de tangente, la concepción euclidiana se torna inadecuada, (Canul et al. 2011). Es necesario entonces considerar una definición de tangencia que suponga la tangencia desde lo local. En esta perspectiva, se considera entonces, para poder trazar tangentes a estas nuevas curvas, el punto de vista desarrollado por D´Alembert (1717-1783), para el logro de la representación del concepto de derivada por medio de la tangente que concuerda con la definición propuesta por Leibniz.

Modo Analítico -Operacional (AO)

Para definir la derivada en términos de la definición de límite, (Grabiner, 1883), Cauchy considera el límite de la relación de las diferencias $[\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{i})-\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x})]\,/\,\boldsymbol{i}$ en un intervalo de continuidad de $f\,(x)$. Se necesita de la continuidad para $f\,(x+i) - f\,(x)$ e i puedan tanto "acercarse indefinidamente y al mismo tiempo el límite cero", o lo que es equivalente, "cantidades infinitamente pequeñas." Cauchy nunca indica explícitamente esto como un teorema, cada función diferenciable debe ser continua. Como lo habían hecho muchos de sus predecesores, que aunque el numerador y el denominador de la razón $f\,(x + \mathrm{i}) - f\,(x)\,/\,\mathrm{i}$ es cero ", la relación en sí misma puede converger a otro límite, ya sea positiva o negativa", que cuando existe, tiene un valor definido para cada valor particular de x, para indicar esta dependencia, se da a la nueva función el nombre de la función derivada y se designa con la ayuda de un acento por la notación y' o $f'\,(x)$; la frase "este límite, cuando existe" ejemplifica la actitud rigurosa de Cauchy. Tal vez la calificación "cuando el límite existe" sólo estuvo motivada por el comportamiento de las funciones conocidas en puntos aislados, pero su lenguaje era lo suficientemente general para abrir toda la cuestión de la existencia o no existencia de derivadas (ver Figura 1).

Modo Analítico -estructural (AE)

Los modos de pensamiento son formas de ver y entender los objetos matemáticos y dependen de los tipos de relaciones y de los objetos evocados por el sujeto en el momento de resolver una tarea, (Parraguez, 2012), por tal razón este modo considera los indicadores y las propiedades que caracteriza a la pendiente en relación con la recta tangente y la curva (ver Figura 1).

Se presentan tres modos que permiten describir la comprensión de la derivada en lo local.

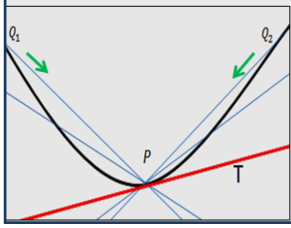
Sintético-Geométrico-Convergente SGC	Analítico-Operacional AO	Analítico-Estructural AE
	• $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ • Si este límite existe en x_0 $m=f'(x_0)$. Donde m es el límite de las pendientes de las rectas secantes a f desde P	• Recta tangente a la curva en P • Indicadores que dan consistencia a la pendiente de la recta tangente a la curva en P

Figura 1. Sintético-Geométrico -Convergente (SGC), el Modo Analítico-Operacional (AO) y el Modo Analítico- Estructural (AE) del concepto de derivada.

Para comprender la derivada en lo local, se deben articular los tres modos presentados en Figura 1, describir y validar dichos elementos es el propósito de esta investigación. En la Figura 2, se muestra el diagrama que guiara la búsqueda, para ello se plantea la siguiente pregunta ¿cuáles son los elementos articuladores entre los aspectos Sintético-Geométrico-Convergente, Analítico-Operacional y Analítico-Estructural, que permiten la comprensión del concepto de derivada?

Diagrama que representa la búsqueda de articuladores

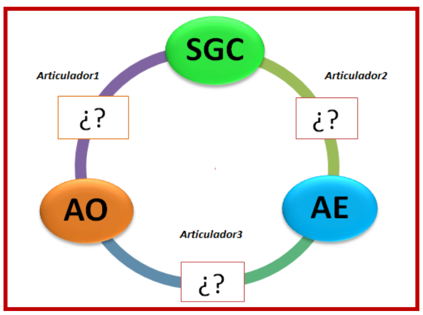


Figura 2. La relación de los articuladores con los modos definidos

Metodo y resultados

La propuesta de validación de estos tres modos de pensar la derivada, está sustentada en dos fuentes:

Primera fuente: El análisis histórico-epistemológico, cognitivo y didáctico del concepto de derivada sustentado en la literatura existente, que ha proporcionado categorías conceptuales útiles para la construcción de los modos de pensar la derivada, relevante en el aprendizaje del Cálculo Diferencial.

Segunda fuente: Un estudio de caso (Stake, 2010). La aplicación de una entrevista semiestructurada a tres investigadores en matemáticas en las líneas del álgebra y la geometría con vasta experiencia en el campo de la enseñanza, el propósito de indagar si los informantes expertos refutan o confirman la estructura en la Figura1. La implementación de la situación corresponde a una entrevista en donde los modos (Figura 1), son presentados en tres tarjetas, sin rótulo, las que el entrevistado puede manipular, con el objeto de no producir sesgo en los datos.

Se muestra en este escrito una pequeña parte de la entrevista. La transcripción de la entrevista por episodios, al primer informante, rotulado [INF1].

[1INF1]Y en caso que se produzca un vértice como en el caso de la función módulo de x por ejemplo, no existe una única recta que pasa por ese punto, que podría ser considerada como tangente, sino que hay varias, es por ese concepto, como hay tantas pendientes, no tiene sentido la derivada en ese punto, se puede mirar al revés. Uno podría ver también que la función es derivable cuando se puede asociar una única pendiente a una recta tangente ¿entiendes?

[1ENT]: ¿Qué elementos de la matemática, cree usted que relacionan estos aspectos de la derivada?

[2INF1] Primero es que usted puede fijar el *f(x)* del punto P y puede decir que *f(x+h)* es el extremo del triángulo, en conexión con el punto *Q*, o puede ser mirando cualquier punto del otro lado, a la izquierda o derecha de *P*. Con relación al cociente, usted, tiene un triángulo, con eso estamos pensando en el límite, con relación al cociente, usted, tiene un triángulo y con eso relaciono, el valor de h que es lo que define el cateto del triángulo.

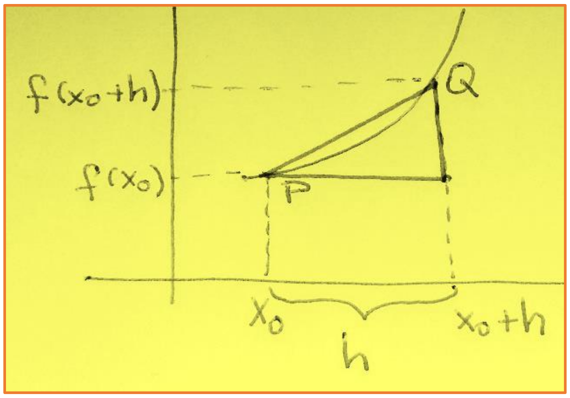


Figura 2. Articulador del modo SGC y AO

El ángulo de tangencia da exactamente la pendiente de la recta tangente, cuando *h* tiende a cero. Para mí el concepto que hace la ligazón entre los dos es perfectamente el triángulo rectángulo, porque estoy usando implícitamente que el ángulo está formado entre dos catetos del triángulo.

Reflexiones

El análisis de los datos tomados de los informantes, respecto de los modos definidos, dan cuenta de la coherencia existente entre los modos definidos y lo declarado por los informantes, como se muestra en [1INF1].

El triángulo rectángulo (Figura 3), es el elemento geométrico que articula el modo SGC y AO desde la perspectiva local de la derivada y se corresponde con el triángulo característico de la perspectiva leibniziana, la curva como una poligonal de lados infinitesimales.

Se pretende validar los articuladores para el aspecto global con la aplicación de nuevos instrumentos y entrevistas en profundidad, para concluir con la realización de una secuencia de enseñanza y actividades de aprendizaje del concepto, que serán relevantes para la comprensión de la derivada.

Referencias bibliográficas

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática*, 97-140.

Badillo, E., Azcárate, C., & Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos *f'(a)* y *f'(x)* en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(2), 191-206.

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de la historia de las matemáticas.* España: Alianza Editorial.

Canul, E.; Dolores, C. y Martínez-Sierra, G. (2011). De la concepción global a la concepción local. El caso de la recta tangente en el marco de la convención matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 14(2), 173-202.

Font, V. (2000). Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de *f'(x).* El caso de la función seno. *Uno*. *Revista de Didáctica de las Matemáticas* 7(25), 21-40.

Grabiner, J. (1981). *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*. New York: Dover Publications.

Grabiner, J. (1983). The Changing Concept of change: The derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine*. 56(4), 195-206.

Inglada, N., & Font, V. (2003). Significados institucionales y personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación incremental. *XIX Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas* (SI-IDM), 1-18.

Parraguez, M. (2012). *Teoría los modos de pensamiento. Didáctica de la Matemática*. Valparaíso: Ediciones Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., & Font, V. (2015). Una Propuesta para el Análisis de las Prácticas Matemáticas de Futuros Profesores sobre Derivadas. *Bolema*, 29(51), 60.

Pinto, I. y Parraguez, M. (2015). El concepto de derivada desde la teoría Los Modos de Pensamiento, sustentada en la epistemología de Cauchy. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28,* 337-344. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions. Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22 (1), 1-36.

Sánchez-Matamoros, G.; García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 11(2), 267-296.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de límite*. Recherches en Didactique des Mathematiques.* 6(1), 5-7.

Sierpinska, A. (2000). *On some Aspects of Student´s thinking in Linear Algebra.* Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A. (2007). I need the teacher to tell me if I am right or wrong. In *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Seoul, South Korea* (Vol. 1, pp. 45-64).

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions. Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22 (1), 1-36.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos. Madrid*: Morata.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for research in mathematics education,* 356-366*.*

UNA ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA DE LA DERIVADA DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES EN UN LIBRO DE TEXTO PARA INGENIERÍA

Katia Vigo Ingar, Cintya Gonzales Hernández
Pontificia Universidad Católica del Perú. (Perú)
kvigo@pucp.pe, cintya.gonzales@pucp.pe

RESUMEN: El objetivo de este artículo es describir y el analizar una organización matemática en relación a una aplicación de la derivada de funciones de dos variables de un libro de texto utilizado por los estudiantes de Ingeniería del segundo año de estudios. Para ello adoptamos la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Además, como parte de este análisis tomamos en cuenta los tratamientos y conversiones de los registros de representación semiótica que el autor del libro didáctico realiza. Nuestra investigación es cualitativa de tipo bibliográfica. Identificamos que el libro muestra una organización matemática puntual puesto que presenta solo un tipo de tarea, una sola técnica y el bloque tecnológico-teórico está presente de manera aislada en relación a este objeto. En el análisis encontramos que hay presencia de tareas rutinarias y procedimentales, afirmando que esta genera técnicas estabilizadas, el alcance de esas técnicas es limitado. Por otro lado hay ausencia de tareas inversas y tareas que privilegien la intuición geométrica.

Palabras clave: organización matemática, derivada parcial, ingeniería

ABSTRACT: The aim of this article is to describe and analyze a mathematical organization in relation to an application of the derivative of functions of two variables of a textbook used by second-year students of Engineering. We adopt the Anthropological Theory of Didactics. In addition, within this analysis we take into account the treatments and conversions of the records of semiotic representation that the author of the didactic book performs. Our research is qualitative, of bibliographic type. We identify that the book shows a mathematical punctual organization since it presents only one type of task, a single technique and the technological-theoretical block is present in isolation in relation to this object. In the analysis we found that there are routine and procedural tasks, which generates stabilized techniques, the scope of these techniques is limited. On the other hand, there is absence of inverse tasks and tasks that favor the geometric intuition.

Key words: mathematical organization, partial derivative, engineering

Introducción

Se realiza este estudio visto que, de acuerdo con Gonzales (2014), el libro de texto es considerado como referencia básica, tanto para los profesores como para los estudiantes y es una herramienta fundamental para el desarrollo de las clases. Por otra parte Trigueros y Martínez – Planell (2010) afirman que las funciones de dos variables juegan un papel importante en las matemáticas aplicadas, en las ciencias, en la ingeniería y en la economía.

Además, en base a estudios realizados en educación matemática con respecto a la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial de funciones de dos variables reales, por ejemplo los realizados por Trigueros y Martínez-Planell (2010), Alves (2011) e Ingar (2014), entre otros, se ha mostrado que los estudiantes presentan algunos problemas en su aprendizaje, como por ejemplo, la relación entre las variables, la identificación del dominio de una función de dos variables, la representación gráfica, la conversión entre las representaciones propias al estudio de las funciones de dos variables, la percepción del registro gráfico de una función de dos variables, entre otros.

Con respecto a una de las aplicaciones de las derivadas parciales, Xhonneux y Henry (2010) realizan el estudio del teorema de Lagrange bajo la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y presenta un modelo epistemológico de referencia (MER) para analizar las organizaciones matemáticas de ese objeto en libros de texto. Dicho estudio muestra que el análisis de una organización matemática en un libro de texto no es suficiente, que es necesario realizar el análisis de la organización didáctica con el fin de investigar los conocimientos matemáticos. Al respecto, coincidimos con estos autores cuando afirman que el análisis de texto es el inicio para investigar los conocimientos matemáticos, puesto que el estudio de las organizaciones praxeológicas didácticas son pensadas para la enseñanza y el aprendizaje de organizaciones matemáticas; dado que, la TAD es una teoría que nos permite describir como son presentados los conocimientos matemáticos en los libros de texto; es que concordamos con Xhonneux y Henry (2010) cuando aseveran que una de las características de esta teoría es su poder descriptivo. Asimismo, esta teoría permite describir y analizar tanto las organizaciones matemáticas como las didácticas.

Teoría Antropológica de lo Didáctico

Según Chevallard (2001), en la TAD, las nociones de (tipo de) tarea, (tipo de) técnica, tecnología y teoría permiten modelar las prácticas sociales en general y en particular la actividad matemática, basándose en: Toda práctica institucional puede ser analizada bajo diferentes puntos de vista y de diferentes maneras, en un sistema de tareas relativamente bien delineadas, y el cumplimiento de toda tarea ocurre del desenvolvimiento de una técnica. Para el autor, la palabra técnica es utilizada como una “manera de hacer” una tarea, pero no precisamente como un procedimiento estructurado y metódico o algorítmico.

Según el investigador, la relación institucional que se establece entre una institución (I) alumno, profesor y un objeto (O), depende de las posiciones que ocupan en esa institución y del conjunto de tareas que esas personas deben cumplir usando determinadas técnicas. El problema de delimitar tareas, según el autor, en una práctica institucional que varía de acuerdo con el punto de vista de la institución en la cual se desarrolla la práctica o de una institución externa que observa la actividad para describirla con un objetivo preciso.

En este sentido, en una organización praxeológica el Tipo de tarea denotado por T es identificado si contiene por lo menos una tarea t. Tipos de tarea provocan acciones con objetivos bien definidos y son siempre expresados por un verbo. Por ejemplo, encontrar el valor máximo de $f(x,y)= x^2+y^2$ es un tipo de tarea, pero “encontrar” simplemente no lo es. Es por esto que se hace necesario distinguir tarea, tipo de tarea y género de tarea.

Para el investigador, un género de tarea existe bajo la forma de diferentes tipos de tarea, cuyo contenido está bien claro y definido. Por ejemplo, encontrar es lo que se llamará un género de tareas, que pide un determinativo.

Tarea, tipos de tareas y géneros de tareas, para el autor, no son datos de la naturaleza, pero si artefactos, obras, constructos institucionales, cuya reconstrucción en tal institución es un problema enteramente objeto de la didáctica.

La técnica denotada por τ, es una determinada manera de hacer o realizar un tipo de tarea T. Una praxeología relativa al tipo de tareas T contiene, en principio, una técnica ô relativa a T. De esta manera se tiene un “bloque” designado por [T/τ], que se denomina bloque práctico-técnico y que, para el autor se identificará como un saber-hacer: un determinado tipo de tareas T y una determinada manera τ de realizar las tareas de este tipo.

La tecnología denotada por Ө, es un discurso racional que tiene por finalidad justificar la técnica τ y para garantizar que permita realizar las tareas del tipo T. La tecnología permite asegurar que la técnica es correcta, exponer el porqué es de aquella manera, además de posibilitar la producción de nuevas maneras de hacer, es decir, nuevas técnicas. La cuarta y última noción del modelo praxeológico es la Teoría, denotada por Ɵ. Según Chevallard (2001), como el discurso tecnológico contiene afirmaciones, más o menos explícitas, se hace necesario un nivel superior de justificación-explicación-producción. Es, en este sentido que la teoría asume, en relación con la tecnología, la función que esta última tiene en relación de la técnica, es decir, la teoría tiene el objetivo de justificar y de esclarecer la tecnología. Por lo expuesto, el autor afirma que la tecnología y la teoría están próximas, y no sería difícil confundirlas.

Metodología

Nuestra investigación es cualitativa de tipo bibliográfica, porque usa los textos como fuente de análisis; además, según Gil (2002) permite al investigador cubrir una amplia gama de fenómenos y ésta se amplía mucho más porque se puede buscar directamente. Además, para De Andrade y Lakatos (2003), la metodología cualitativa de tipo bibliográfica abarca toda la bibliografía hecha pública, es decir, publicaciones sueltas. Es así que, esta metodología tiene por finalidad colocar al investigador en contacto directo con todo lo que está escrito. En este sentido, basados en los aportes de estos autores, nuestro texto a analizar es el de Finney & Thomas (2010), está presente en el sílabo del curso de Matemática III como bibliografía básica; por ello es utilizado por estudiantes de Ingeniería de Alimentos en el tercer ciclo de estudios (segundo año).

En el capítulo 14, sección 14.7 se encuentra nuestro objeto matemático de estudio: valores extremos y puntos de silla. El autor presenta 4 tareas resueltas y 30 tareas propuestas relacionadas con el estudio de los extremos locales.

Organización Matemática

En este apartado describiremos la organización matemática presente en el texto Finney & Thomas (2010) relacionada a la determinación de valores extremos locales de funciones reales de dos variables, a partir de ahora denominaremos funciones.

Afirmamos que si sabemos que la función tiene un valor extremo, entonces la tarea es determinar ese valor, y de no ser así, verificar. Vamos a definir dos tipos de tareas para determinar valores extremos locales de funciones de dos variables:

T1 - Determinar los valores extremos locales de funciones no diferenciables

T2 - Determinar los valores extremos locales de funciones diferenciables

A continuación describimos las tareas, técnicas y tecnología relacionadas a estos tipos.

Respecto al tipo de tarea T1 y T2 describimos las siguientes tareas, las cuales definiremos de la siguiente manera $t_{i,j}$, donde i representa el tipo al que pertenece y j es el número de la tarea.

$t_{1,1}$: Determinar los valores extremos locales de funciones no diferenciables continuas (donde no existen las derivadas parciales) dada su expresión algebraica.

$t_{1,2}$: Determinar los valores extremos locales de funciones no diferenciables discontinuas (donde existan derivadas parciales) dada su expresión algebraica.

t_2: Determinar los valores extremos locales de funciones diferenciables dadas su expresión algebraica.

Llamaremos τ_1 a la técnica que emplea la representación gráfica como referencia para resolver las tareas del tipo 1 y 2.

Paso1,1: Determinar el dominio de la función.

Paso1,2: Realizar un esbozo de la representación gráfica de la función graficando curvas de nivel.

Paso1,3: Determinar con la intuición geométrica los posibles valores extremos.

Paso1,4: Verificar la definición de valores extremos (Examinar los valores que toma la función cerca del punto del dominio donde se estudia el extremo).

De acuerdo con Bosch (1994 citada en Gonzales, 2014) existe una dicotomía entre los elementos de la praxeología matemática, ya que los pasos de una técnica en una institución pueden ser tareas en otra y viceversa, consideramos institución en el sentido de TAD. Por ejemplo, el paso 1.2 de la organización matemática presentada, corresponde a una tarea en gráfica de funciones.

En el texto analizado encontramos la siguiente definición (ver):

> **DEFINICIONES** Sea que $f(x, y)$ esté definida en una región R que contiene el punto (a, b). Entonces,
>
> **1.** $f(a, b)$ es un valor **máximo local** de f si $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) del dominio en un disco abierto con centro en (a, b).
>
> **2.** $f(a, b)$ es un valor **mínimo local** de f si $f(a, b) \leq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) del dominio en un disco abierto con centro en (a, b).

Figura 1. Definición de Máximo y Mínimo Local. Fuente: Finney & Thomas (2010) p. 803

En esta definición podemos encontrar un paso de la técnica τ_1 para determinar los extremos locales de una función de dos variables.

Llamaremos τ_2 a la técnica que emplea la representación algebraica como referencia para resolver las tareas del tipo 1.

Paso1,1: Determinar el dominio de la función.

Paso2,1: Determinar el rango de la función a partir de la expresión algebraica.

Paso2,2: Aplicar desigualdades de números reales.

Paso1,4: Verificar la definición de valores extremos (Examinar los valores que toma la función cerca del punto donde se estudia el valor extremo).

En esta técnica se puede observar lo que afirma Bosch (1994) puede ocurrir que algunas técnicas se articulen entre sí en un sistema para formar una técnica de nivel superior. Podemos ver que τ_2 contiene algunos pasos de τ_1.

En el texto analizado encontramos el teorema (ver Figura 2) que se emplea para determinar los puntos del dominio donde es posible que la función tenga extremo. Podemos observar que se utiliza la definición de punto crítico.

TEOREMA 10: Criterio de la primera derivada para valores extremos locales
Si $f(x, y)$ tiene un valor máximo o mínimo local en un punto interior (a, b) de su dominio, y si las primeras derivadas parciales existen allí, entonces $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$.

Figura 2. Criterio de la primera derivada. Fuente: Finney & Thomas (2010) p. 803

En la figura 3 se puede observar algunos pasos de técnica τ_2, son complementados con la definición de punto crítico, la cual podemos denominar como sigue:

Paso (2,*) Determinar los puntos críticos de la función

EJEMPLO 1 Obtenga los valores extremos locales de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4y + 9$.

Solución El dominio de f es todo el plano (de manera que no hay puntos frontera) y las derivadas parciales $f_x = 2x$ y $f_y = 2y - 4$ existen en todas partes. Por lo tanto, los valores extremos locales pueden presentarse sólo cuando

$$f_x = 2x = 0 \quad \text{y} \quad f_y = 2y - 4 = 0.$$

La única posibilidad es el punto (0, 2), donde el valor de f es 5. Como $f(x, y) = x^2 + (y - 2)^2 + 5$ nunca es menor de 5, vemos que el punto crítico (0, 2) tiene un mínimo local (figura 14.43). ■

Figura 3. Tarea aplicación del teorema 10. Fuente: Finney & Thomas (2010)

Llamaremos τ_3 a la técnica que emplea para resolver las tareas del tipo 2.

Paso1,1: Determinar el dominio de la función.

Paso3,1: Determinar si la función es diferenciable.

Paso (2,*): Determinar los puntos críticos de la función.

Paso 3,2: Determinar el discriminante.

Paso1,4: Verificar el criterio de la segunda derivada (ver figura 4).

En la figura 5 se puede ver un problema resuelto usando la técnica.

TEOREMA 11: Criterio de la segunda derivada para valores extremos locales
Suponga que $f(x, y)$ y sus primeras y segundas derivadas parciales son continuas en un disco con centro en (a, b), y que $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$. Entonces,

i) f tiene un **máximo local** en (a, b), si $f_{xx} < 0$ y $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ en (a, b).
ii) f tiene un **mínimo local** en (a, b), si $f_{xx} > 0$ y $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ en (a, b).
iii) f tiene un **punto de silla** en (a, b), si $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ en (a, b).
iv) **El criterio no es concluyente** en (a, b), si $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ en (a, b). En este caso, debemos encontrar otra manera de determinar el comportamiento de f en (a, b).

Figura 4. Criterio de la segunda derivada. Fuente: Finney & Thomas (2010

La tecnología de la organización matemática presentada está dada por el siguiente teorema:

ϴ – Sea $f: U \subseteq R^n \to R$ una función definida en el conjunto abierto U de R^n que tiene en $\bar{x} \in U$ un punto crítico. Supongamos que en una bola B de R^n con centro en $\bar{x}$, las derivadas parciales de segundo orden son continuas. Sea $H(\bar{x})$ la matriz hessiana de *f* en $\bar{x}$. Entonces:

a. Si la forma cuadrática es definida positiva, entonces *f* tiene un valor mínimo local en $\bar{x}$.
b. Si la forma cuadrática es definida negativa, entonces *f* tiene un valor máximo local en $\bar{x}$.

Por lo que afirmamos que esta tecnología que justifica las técnicas, presenta un modelo matricial. Además que el bloque tecnológico-teórico está presente de manera aislada en relación a este objeto.

Según Xhonneux (2011), la presencia o ausencia de tareas estructurales, permite constituir el bloque tecnológico-teórico de manera eficaz. Por ejemplo, en el álgebra escolar, al pasar de ver las expresiones algebraicas como procesos (forma operativa heredada del aprendizaje de la aritmética escolar) a verlas como objetos, dentro de una estructura algebraica.

Se puede suponer que la actividad matemática trata de articular la parte estructural a la parte procedimental en la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, la importancia acordada a cada uno de esos dos aspectos de la actividad matemática en los procesos de enseñanza y en la realización de tareas inherentes a cada tipo de actividades varía de una institución a otra.

EJEMPLO 3 Determine los valores extremos locales de la función

$$f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4.$$

Solución La función está definida y es derivable para todas las x y y, y su dominio no tiene puntos frontera. Por lo tanto, la función tiene valores extremos sólo en los puntos donde f_x y f_y se anula en forma simultánea. Esto da como resultado

$$f_x = y - 2x - 2 = 0, \qquad f_y = x - 2y - 2 = 0,$$

o bien,

$$x = y = -2.$$

Por lo tanto, el punto $(-2, -2)$ es el único punto donde f puede asumir un valor extremo. Para ver si esto es así, calculamos

$$f_{xx} = -2, \qquad f_{yy} = -2, \qquad f_{xy} = 1.$$

El discriminante de f en $(a, b) = (-2, -2)$ es

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (-2)(-2) - (1)^2 = 4 - 1 = 3.$$

La combinación

$$f_{xx} < 0 \qquad \text{y} \qquad f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

nos dice que f tiene un máximo local en $(-2, -2)$. El valor de f en este punto es $f(-2, -2) = 8$. ■

Figura 5. Tarea criterio de la segunda derivada. Fuente: Finney & Thomas (2010)

Análisis de la organización matemática

1. Faltan definir tareas donde se pueda privilegiar la intuición geométrica, es decir se pueda realizar la técnica τ_1. De acuerdo con Bosch (1994), las técnicas tienden a estar normalizadas; este es un rasgo importante de la vida institucional, esto se puede entender que como los estudiantes ya aprendido derivadas parciales, entonces se tiene que utilizar, además porque están en la sección y otros factores que no permiten la articulación con otras OM.
2. Respecto al alcance de la técnica que presenta el libro analizado, el criterio de la segunda derivada no resuelve tareas donde al menos una de sus derivadas parciales no exista o el Hessiano sea cero.
3. Ausencia de tareas inversas, por ejemplo una tarea inversa a determinar los valores extremos locales, podemos plantear la tarea, demostrar que una función no tiene valores extremos locales.
4. Presencia de tareas rutinarias que pueden ser resueltas con una técnica estabilizada, que permiten realizar las tareas de manera supuestamente idóneas. Se presentan tareas donde las funciones siempre son diferenciables, como se puede observar en la figura 5. Se puede proponer tareas donde las derivadas parciales existen pero no se anulan en ningún punto del dominio de la función.
5. Sólo se presentan tareas procedimentales, más no tareas estructurales en el sentido de Xhonneux (2011), estos son los tipos de tarea que se definen por explicar, interpretar, definir, analizar, resumir, etc.

Consideraciones finales

De los resultados obtenidos, observamos que la organización matemática que se desarrolla en torno a la aplicación de la derivada de funciones de dos variables, está justificada por la teoría de matrices, respecto al bloque práctico-técnico se priorizan tareas procedimentales, cuyas técnicas se presentan de manera algorítmica, se formulan en lenguaje matemático, es decir, se presentan mediante definiciones y teoremas; el alcance de la técnica presente es limitado. Por otro lado, no se presentan tareas estructurales necesarias para el desarrollo del pensamiento matemático formal. Afirmamos que el libro presenta una organización matemática puntual puesto que presenta un tipo de tarea, una sola técnica en relación a este objeto matemático.

Referencias bibliográficas

Alves, V. (2011). *Aplicações da sequência Fedathi na promoção do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis*. Tesis de doctorado no publicada, Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, Brasil.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática el caso de la proporcionalidad*. Tesis de doctorado no publicada. Universitat Autónoma de Barcelona. España.

Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente, *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemática, Huesca*. 1-10. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr.

De Andrade, M. y Lakatos, E. (2003). *Fundamentos de la Metodología Científica*. (5ta. Ed.). Brasil: Editorial Atlas.

Finney, R. y Thomas, G. (2010). *Cálculo varias variables*. (12 Ed.). México: Addison Wesley Longman de México, S.A

Gil, A. (2002). *Como elaborar projetos de pesquisa*. (4ta. Ed.) Brasil: Editorial Atlas

Gonzales, C. (2014). *Una praxeología matemática de proporción en un texto universitario.* Tesis de maestría no publicada, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Ingar, K. (2014). *A visualização na Aprendizagem dos Valores Máximos e Mínimos Locais da Função de Duas Variáveis Reais.* Tesis de doctorado no publicada, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

Trigueros, M., & Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two variable functions, *Educational Studies in Mathematics*, *73*(1), 3-19.

Xhonneux, S. (2011) *Regard instutionnel sur la transposition didactique du théorème de Lagrange en mathématiques et en économie*. Tesis de doctorado no publicada, Université de Namur. Francia.

Xhonneux, S. & Henry, V. (2010). *A didactic survey of the main characteristics of Lagrange's theorem in mathematics and in economics*. Cerme 7: Working Group 14, 1-10.

EL TIPO DE MATEMÁTICAS QUE DEBEN SER ENSEÑADAS Y APRENDIDAS POR LOS FUTUROS INGENIEROS

Ruth Rodríguez, Bertha Ivonne Sánchez, Ismael Arcos, Hipólito Hernández, Alberto Camacho, Atenea De la Cruz, Fernando Cajas
Tecnológico de Monterrey, Instituto Tecnológico de Cd. Jiménez, Universidad Autónoma del Estado de México, Universidad Autónoma de Chiapas, Instituto Tecnológico de Chihuahua II. México. Universidad de San Carlos de Guatemala.
ruthrdz@itesm.mx, ivonnesanchez10@yahoo.com, ismael_arcos@msn.com, polito_hernandez@hotmail.com, ateneadr@hotmail.com, camachoalberto@hotmail.com, fcajas@usac.edu.gt

RESUMEN: El objetivo del grupo es reflexionar sobre la enseñanza de la matemática en escuelas de formación de ingenieros. Se presentan parte de las discusiones que se generaron durante la presentación en la Relme 30 en Monterrey, México, enfocadas a la matemática que se enseña y la que debiera enseñarse en las escuelas de ingeniería.

Palabras clave: formación de ingenieros, matemática educativa, modelación matemática

ABSTRACT: The aim of this group is to reflect on the teaching of mathematics in engineer training schools. Some of the discussions that were generated during the presentation at the 30th RELME in Monterrey, Mexico, are presented, focused on the mathematics being taught and the one that should be taught in engineering schools.

Key words: training of engineers, educational mathematics, mathematical modeling

Introducción

Uno de las 5 preguntas directrices de este grupo de discusión es justamente el cuestionarse sobre la Matemática que debiera ser enseñada y aprendida por los estudiantes de ingeniería en formación. Si bien es cierto que hasta hace algunos años la enseñanza de Cálculo principalmente estaba en base a un discurso matemático escolar de los libros de texto “clásicos” (o más utilizados en las universidades), desde hace aproximadamente dos décadas la enseñanza de las Matemáticas, y del Cálculo en particular, ha sido cada vez enfatizando el carácter funcional de los conceptos matemáticos ahí estudiados (Zaldívar, Cen Chen, Briseño, Méndez & Cordero, 2015); es decir, mostrando cada vez el uso y aplicaciones de estos conceptos con problemáticas de la vida real y/o del “cotidiano” profesional de los estudiantes una vez que estén en situación laboral.

Marcos de referencia para la educación matemática de los ingenieros

Sólo recientemente se comienza a reconocer que, en el estudio de la problemática referente a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el nivel superior, un factor muy importante a tomar en cuenta lo constituyen las necesidades específicas que de la disciplina tendrán los egresados de un determinado programa educativo, en nuestro caso, de ingeniería. Por tal razón resulta indispensable analizar las indicaciones y propuestas que se producen en los ámbitos nacional o internacional, con respecto a esta problemática.

A continuación se mencionan algunos documentos en los que podemos encontrar indicaciones sobre la educación en general, sobre la formación escolar de ingenieros y sobre la formación matemática de los ingenieros.

Comencemos, pues, haciendo referencia a uno de los varios documentos que la UNESCO ha emitido para hacer recomendaciones sobre la educación en este siglo. Se trata de Educación de Calidad para Todos: un asunto de derechos humanos (UNESCO, 2007), en donde se llama la atención sobre la necesidad de considerar la educación en las escuelas como un asunto mucho más amplio que sólo transmitir conocimientos. En el resumen ejecutivo del documento encontramos lo siguiente:

La selección de los aprendizajes más relevantes adquiere especial significación en la actual sociedad del conocimiento, donde los contenidos se duplican a gran velocidad y muchos pierden vigencia rápidamente. La sobrecarga de los currículos actuales hace necesario decidir de manera urgente cuáles son los aprendizajes más relevantes que han de formar parte de la educación escolar. […]. Los cuatro pilares del informe Delors (1996) para el aprendizaje del siglo XXI, –aprender a conocer, a hacer, a ser y a vivir juntos– constituyen una referencia indispensable para establecer cuáles deben ser los aprendizajes básicos y más relevantes en la educación. (Delors, 1996).

Podemos identificar aquí, como una recomendación, la de disminuir considerablemente la lista de contenidos, que en el caso de los cursos de matemáticas en escuelas de ingeniería suelen ser tradicionalmente muy amplios. Al utilizar aprendizajes en lugar de contenidos se está llamando la atención sobre la necesidad de considerar habilidades y valores, además de los conocimientos mismos, como se indica en los citados cuatro pilares del informe Delors.

En el caso de la educación universitaria, y en el ámbito latinoamericano, encontramos, en el informe final del Proyecto Tuning-América Latina (2004-2007), indicaciones precisas sobre cuestiones relevantes como las competencias genéricas para el nivel universitario (licenciatura), así como las competencias específicas para un determinado programa educativo, por ejemplo, el de ingeniería civil. También encontramos, para el caso de la ingeniería civil, indicaciones sobre enfoques de enseñanza, aprendizaje y evaluación.

En cuanto a recomendaciones específicas sobre la formación matemática de los ingenieros, en el ámbito nacional encontramos las emanadas del Consejo de Acreditación de la Enseñanza de la Ingeniería (CACEI). En la versión 2014 del marco de referencia para la acreditación de los programas de ingeniería (CACEI, 2014), encontramos lo siguiente:

El objetivo de los estudios en Matemáticas es contribuir a la formación del pensamiento lógico-deductivo del estudiante, proporcionar una herramienta heurística y un lenguaje que permita modelar los fenómenos de la naturaleza. Estos estudios estarán orientados al énfasis de los conceptos y principios matemáticos más que a los aspectos operativos. Deberán incluir Cálculo Diferencial e Integral y Ecuaciones Diferenciales, además de temas de Probabilidad y Estadística, Algebra Lineal, Análisis Numérico y Cálculo Avanzado. Los cursos de computación no se consideran dentro del grupo de materias de Ciencias Básicas y Matemáticas.

Así pues, podemos observar que el CACEI sigue identificando los conocimientos con los contenidos y agrupándolos en disciplinas que, implícitamente, sugieren agrupar los contenidos en esos cursos que han permanecido tradicionalmente en los planes y programas de estudio de las carreras de ingeniería.

Por otra parte, la Sociedad Europea para la Formación de Ingenieros (SEFI), en su Marco de Referencia para el Currículo Matemático en la Formación de Ingenieros (SEFI, 2013), establece un conjunto de recomendaciones más específicas respecto de la formación matemática de los ingenieros, considerando como un propósito fundamental de los cursos de matemáticas el de habilitar al estudiante en el aprendizaje y manejo de los conocimientos propios de las ciencias de ingeniería.

En este documento se da un conjunto de recomendaciones más detalladas y específicas. Primeramente, se propone una estructura de organización de los contenidos en niveles, correspondiendo el núcleo o nivel cero, a los prerrequisitos de ingreso, que serían los contenidos que se esperaría fueran impartidos en el bachillerato, el nivel uno a las competencias que deben adquirir todos los estudiantes de ingeniería, y que en consecuencia serían incluidos en cursos obligatorios, independientemente del área, el nivel dos, correspondiente a los contenidos que resultan de interés en áreas específicas de la ingeniería, y que por lo tanto serían incluidos en cursos optativos, y el nivel tres, que incluiría módulos específicos para alguna área en particular.

Por otra parte, se indican ocho competencias matemáticas básicas para los estudiantes de ingeniería, para cada una de las cuales se establece un nivel de dominio deseable: Reproducción, Conexión y reflexión. Las ocho competencias son: pensamiento matemático, razonamiento matemático, Resolución de problemas, modelación matemática, comunicación, representación, simbolización y formalismo y ayudas y herramientas.

Para cada nivel las competencias se agrupan en áreas y se describen indicando lo que “se espera que el alumno sea capaz de hacer, luego del aprendizaje del material correspondiente”, así, el nivel 1 se compone de cinco áreas: Análisis y Cálculo, Matemáticas Discretas, Geometría, Álgebra lineal, y Probabilidad y Estadística. En el área de Análisis y Cálculo, por ejemplo, la primera competencia indicada es: (*el alumno será capaz de*) definir y hacer un croquis de la gráfica de las funciones senh, cosh y tanh.

Vincular la matemática al contexto de la ingeniería: una necesidad

En las carreras de ingeniería sus objetivos son: analizar, diseñar, aplicar, diagnosticar o predecir fenómenos naturales y de contextos propios de la ingeniería para su solución. El Discurso Matemático Escolar, los programas de estudios de matemáticas están fraccionadas y descontextualizadas de la vida real y sin aplicación en su entorno social, así como, en los textos de ingeniería la matemática solo es usada como una herramienta y no para generar conocimiento matemático por sí mismo (Hernández, 2016).

En el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas es importante tener en cuenta los objetivos y las preguntas que nos hacen los estudiantes que cursan materias de matemáticas en una carrera de ingeniería, sobre el uso y aplicación de los contenidos que se está abordando en los cursos de matemáticas en turno. Sobre estos cuestionamientos es importante caracterizar la importancia de relacionar los contenidos de matemáticas y de las ingenierías, es decir, abordar los contextos de las ingenierías como señala Camarena (2012), con la finalidad de hacer que la matemática sea más funcional en las carreras de ingeniería.

Por lo tanto, debemos buscar alternativas o propuestas didácticas que apoyen a la relación de la matemática y los contenidos con las ingenierías; con la finalidad de obtener elementos de nuevas formas de aprendizaje de la matemática con el contexto de por medio, es decir, como mencionan Mendoza y Cordero (2014) en el sentido de hacer la matemática más funcional en la ingeniería y en la vida cotidiana. Pensamos que esta propuesta enriquece el aprendizaje de las matemáticas en las ingenierías.

En este sentido es pertinente abordar temáticas de: la modelación y graficación en el comportamiento de estructuras; potencial complejo; procesos de infiltración, variación de temperatura, impedancia compleja, campos de pendientes de ecuaciones diferenciales en circuitos eléctrico, producto escalar y vectorial, teorema de continuidad, conservación de masa y procesos de reacción de energía enzomática por mencionar algunos.

Para fortalecer la relación entre los contenidos de los cursos de matemáticas y los contenidos de la ingeniería, se sugiere:

1. Caracterizar los procesos de aprendizaje que relaciones los conceptos, modelos, procedimientos matemáticos que se usan en los contextos de ingeniería: civil, mecánica, química, eléctrica y electrónica, etc.
2. Analizar que habilidades tienen los estudiantes en la modelación y resolución de problemas en contextos de las ingenierías.

Sin embargo, aún hay mucho por hacer. Creemos que la riqueza de los hallazgos previamente encontrados se mueven justamente a mostrar los aportes de:

a) enfoques de enseñanza basados en la modelación de fenómenos reales (Camacho-Leon y Quishpe-Armas, 2015; Rattan & Klingbeil, 2015; Rodríguez y Quiroz, 2016);
b) en la simulación de éstos tomando en cuenta otros factores de manera más amplia (Smith & Campbell, 2011; Rodríguez y Bourguet, 2015);
c) sobre el aprender de las prácticas de los ingenieros en el mundo laboral y la manera en cómo llevar éstas a situaciones de aprendizaje en el aula (Covián y Romo-Vázquez, 2014; Camacho y Romo-Vázquez, 2015; Vázquez, Romo-Vázquez y Trigueros, 2016);
d) en el aprendizaje basado en retos donde la parte de aprendizaje experiencia es central (Tecnológico de Monterrey, 2015).

Algunos riesgos de la modificación del currículo de Matemáticas para ingenieros

Es relevante notar el riesgo de trabajos de esta naturaleza son varios:

a) La enseñanza de las Matemáticas a través de la modelación de fenómenos asume el pensar la modelación como una estrategia didáctica. Para ello, se ha previamente reportado la importancia de que el profesor a cargo de la clase conozca de manera importante no sólo los conocimientos puramente matemáticas sino algunas otros de naturaleza disciplinar (física, química, biología, otros) y además que conozca y desarrolle en sus alumnos algunas otros conocimientos transversales pero igualmente importante como lo son el uso de ciertas tecnologías (ejemplo: uso de sensores para la parte experimental en clase) y que pueda lidiar con los diversos argumentos y cuestionamientos que puedan surgir de los propios alumnos cuando se enfrentan a modelar problemas diversas y abiertos que corresponden no a una única disciplina sino a varias otras.

b) En el caso de la simulación es algo bastante parecido y justamente el uso de tecnología muy específica propone que los profesores conozcan la herramienta que pretenden enseñar (caso de Smith & Campbell, 2011, sería el uso de Matlab/Simulink; el caso de Rodríguez & Bourguet, 2015, en el uso del software de modelación dinámica Vensim).
c) Respecto a la introducción de nuevas prácticas (de modelación principalmente) en el aula de clase con la intención de que se promuevan desde etapas tempranas el uso específico de ciertas nociones matemáticas y se favorezca su significación en contextos muy específicos, creemos de gran valor estos procesos (Covián y Romo-Vázquez, 2014; Camacho y Romo-Vázquez, 2015; Vázquez, Romo-Vázquez y Trigueros, 2016). Sin embargo, tal como lo comenta Camacho (2014) es importante tomar precauciones sobre la introducción de una epistemología diferente de cada práctica profesional y la manera en que esta epistemología vive / convive con una epistemología más matemática que obedece a otros principios. Si bien es cierto que estas ideas de observar prácticas ingenieriles en el mundo laboral e intentar traerlas a situaciones escolares muy específicas es un buen avance; es importante tomar cuidado de cómo éstas pueden entrar en conflicto con las prácticas de aprendizaje usualmente promovidas en un contexto escolar tradicional.
d) Finalmente, es importante mencionar la emergencia de “nuevas” técnicas didácticas que promueven el aprendizaje experiencia fuera de la clase para aprender conceptos matemáticos a través de su uso en situaciones específicas. Un reto que tiene este tipo de postura es el cómo dividir o diferenciar la técnica didáctica respecto a anteriores (como aprendizaje basado en problemas, ABP ó aprendizaje basado en proyectos, PBL por sus siglas en inglés) ya que la línea entre problema, proyecto y reto pareciera muy delgada y la diferencia parece radicar en la “amplitud” del reto y su vinculación con lo real.

A manera de reflexión

Lo anterior pretende mostrar un contraste entre diversos avances que se han hecho ya desde hace algunos años, desde la investigación educativa, para dar respuesta a ese nuevo currículo de Matemáticas que debiera ser enseñado a estudiantes de una carrera como ingeniería, donde la parte de aplicación de los conceptos aprendidos en la escuela es fundamental en problemas reales de su entorno (o de su futuro entorno). Lo que se señala en lo anterior es que cada avance supone retos o áreas de oportunidad para los propios alumnos pero sobre todo para los profesores que se encuentran día a día frente a grupo.

Si llegamos a caracterizar los marcos de referencias y establecer una propuesta didáctica en los programas de estudios de matemáticas o de ciencias básicas que relacionen los contenidos de matemáticas y de las ingenierías, es decir, abordar los contextos de las ingenierías, con la finalidad de hacer que la matemática sea más funcional en las carreras de ingeniería. Estaremos en condiciones de responder los cuestionamientos que hacen los estudiantes acerca de la utilidad de las asignaturas de matemáticas en las carreras de ingeniería

En resumen, para trabajar en la problemática de la enseñanza de las matemáticas en escuelas de ingeniería, debemos partir de que esta presenta rasgos característicos que la distinguen de la que se presenta en otros programas educativos (particularmente los que tienen lugar en escuelas de ciencias), de manera que el pensamiento matemático esperado por parte del estudiante de ingeniería es necesariamente distinto, por ejemplo, al de aquel que estudia para ser un profesional de la matemática.

Referencias bibliográficas

CACEI. (2014). Marco de Referencia para la Acreditación de los Programas de Ingeniería. Disponible en:http://cacei.org.mx/images/docs/29-ago-16/L-CACEI-DGE-01_marco_ref_ING_inst_2.pdf

Camacho-Leon, S. & Quishpe-Armas, J. (2015). Electronics-based Calculus: A transposition pilot study. Proceedings of the 13th *Latin American and Caribbean Conference for Engineering and Technology (LACCEI)*: *Enhancing Undergraduate Education 1-3*. Santo Domingo, Dominican Republic. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/281098904_Electronics-based_Calculus_A_transposition_pilot_study

Camacho, A. (2014). Tecnologías que justifican técnicas. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27*, 2065-2074. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Camacho A. y Romo-Vázquez A. (2015). Déconstruction-construction d'un concept mathématique. In Theis L. (Ed.) Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage -*Actes du colloque EMF2015* - GT5, pp. 443-453.

Camarena, P. (2012). Epistemología de las impedancias complejas en ingeniería. *Revista Innovación Educativa 12(58).*

Covián, O. y Romo-Vázquez, A. (2014). Modelo Praxeológico Extendido una Herramienta para Analizar las Matemáticas en la Práctica: el caso de la vivienda Maya y levantamiento y trazo topográfico. *Boletim de Educação Matemática [en linea] 2014*, 28 (Abril): [Fecha de consulta: 20 de septiembre de 2015] Disponible en:<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291231123008> ISSN 0103-636X

Delors, J. (1996). *La educación encierra un tesoro*. París: Ediciones UNESCO.

Hernández, H. (2016). *Una visión socioepistemológica de la matemátización del movimiento: del binomio de Newton a la serie de Taylor*. México: Editorial Kali

Mendoza, J. & Cordero, F. (2014). Matemática funcional en una comunidad de conocimiento. Una situación de acumulación en la formación de ingenieros civiles. En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta*

Latinoamericana de Matemática Educativa 27, 1557-1563. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Proyecto Tuning-América Latina (2007). *Reflexiones y perspectivas de la Educación Superior en América Latina. Informe final.* España: Publicaciones de la Universidad de Deusto. Disponible en: http://tuning.unideusto.org/tuningal/index.php?option=com_docman&Itemid=191&task=view_category&catid=22&order=dmdate_published&ascdesc=DESC

Rattan, K. & Klingbeil, N. (2015). *Introductory Mathemathics for Engineering Aplications*. Hoboken: Wiley.

Rodríguez, R., y Bourguet, R. (2015). Building bridges between Mathematics and Engineering: Modeling practices identified through Differential Equations and Simulation. American Society of Engineering Education (ASEE) *Annual Conference and Exposition, Conference Proceedings*. Atlanta, Estados Unidos. Disponible en: https://www.asee.org/public/conferences/56/papers/13153/view

Rodríguez, R. y Quiroz, S. (2016). El rol de la experimentación en la modelación matemática. *Educación Matemática*. Disponible en: http://www.revista-educacion-matematica.com

SEFI. (2013). *Marco de Referencia para el Currículo Matemático en la Formación de Ingenieros.* Un reporte del Grupo de Trabajo de Matemáticas. Bruselas: SEFI. Disponible en http://www.sefi.be/wp-content/uploads/Competency%20based%20curriculum%20incl%20ads.pdf

Smith, C. y Campbell, S. (2011). *A first course in Differential Equations, Modeling and Simulation*. Boca Raton: CRC Press.

Tecnológico de Monterrey (2015). *Aprendizaje basado en Retos*. Reporte de Edutrends. Disponible en: http://observatorio.itesm.mx/edutrendsabr

UNESCO. (2007). Educación de Calidad para Todos: un asunto de derechos humanos. *Documento de discusión sobre políticas en el marco de la II Reunión Intergubernamental del Proyecto Regional de Educación para América Latina y el Caribe* (EPT/PRELAC). Chile. Disponible en: http://portal.unesco.org/geography/es/ev.php-URL_ID=7910&URL_DO=DO_TOPIC&URL_SECTION=201.html

Vázquez, R.; Romo, A.; Romo-Vázquez, R.; y Trigueros, M. (2016). La separación ciega de fuentes: un puente entre el álgebra lineal y el análisis de señales. *Educación Matemática 28(2),* 31-57. Recuperado de http://oai.redalyc.org/articulo.oa?id=40546500002

Zaldívar, D., Cen Chen, C., Briseño, E., Méndez, M. & Cordero, F. (2015). El Espacio de Trabajo Matemático y la Situación Específica de la Matemática Funcional: Un Ejercicio de Diálogo*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. *17(4)*, 417-436.

CAPÍTULO 2

PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Domingo Yojcom Rocché
dyojcom@cicc-solojnaoj.org

Al hablar de propuestas para la enseñanza de las matemáticas, debemos de referirnos a la mediación pedagógica, una de las prácticas indispensables del quehacer docente. La capacidad de mediar es un proceso que implica interiorización y apropiación, es donde descansa la mayor parte del trabajo docente. Un esfuerzo intelectual que traspasa el dominio de objeto matemático, un espacio de creación y diseño, que toma en cuenta el contexto y los elementos que intervienen en el aprendizaje educativo. El pensamiento es considerado también una reflexión mediatizada del mundo de acuerdo a las diferentes formas o modos de actividad humana (Radford, 2006).

Este capítulo pone de manifiesto la necesidad de la comunidad educativa por mediar el conocimiento, desde la óptica de varios enfoques teóricos que se interesan por elucidar los problemas suscitados en el aprendizaje de las matemáticas. Las propuestas tratadas en este espacio forman parte de la creación y el diseño de docentes e investigadores que buscan ofrecer al estudiante alternativas metodológicas y herramientas funcionales para el abordaje de las matemáticas. Desde esta óptica la mediación del pensamiento se refiere al papel que desempeñan los artefactos (Vygotski, 1983), tales como objetos, instrumentos, sistemas de signos, etc. en la realización de la práctica social (Radford, 2006).

Contiene diseño de situaciones del nivel primario, nivel medio y nivel superior como propuestas didácticas para el desarrollo de ideas fundamentales de las matemáticas y la estadística, con el uso de diferentes recursos, como el género novela y herramientas tecnológicas, entre otros. La mediación pedagógica una necesidad que atraviesa fronteras y épocas históricas, desde la aparición de los primeros maestros la búsqueda de estrategias didácticas para la enseñanza de la geometría, la trigonometría, luego la estadística y el álgebra han sido la parte medular de la formación y el desarrollo humano.

Ahora las preocupaciones han incrementado, la modelación se hace más notoria e interesante en el campo de la investigación, interesa por ejemplo la aplicación del teorema de convulsión para las escuelas de ingeniería sin olvidar las nuevas tendencias de una formación por competencias y los criterios asociados a la planeación y la evaluación de esta nueva vertiente de formación. A decir de Vygotsky (1983) la actividad mediadora implica el empleo de herramientas y el empleo de signos. Por medio de la herramienta el hombre influye sobre el objeto de su actividad, provoca uno o varios cambios en el objeto, lo convierte en el medio exterior que modifica la naturaleza. El signo se transforma en el medio de que se vale el hombre para influir psicológicamente, bien en su propia conducta, o bien en la de los demás; es un medio para su actividad interior, dirigida a dominar el propio ser humano (Vygotski, 1983).

Hoy en día, el uso de la tecnología y los nuevos hallazgos de la ciencia moderna, hacen que la matemática educativa sea más heterogénea en su intervención en aula. No siempre se obtienen competencias directas entre profesor-estudiante, o entre saber y saber aprendido, la mayoría de veces pasa por el proceso de mediación. Este capítulo se preocupa para dar respuesta a estas necesidades de los profesores.

La educación escolar está inmersa en la vida cotidiana y viceversa, ambos espacios sociales no preservan ni contienen receta alguna que sea válida universalmente, porque cada situación es particular que posee sus propias especificidades. La reciprocidad de las actividades cotidianas con la resolución de problemas matemáticos en aula sigue siendo un desafío. Por lo que las secuencias didácticas, los diseños de situaciones, el uso de software y el uso de otros recursos como los géneros textuales vienen a contribuir a esta necesidad actual.

Los invito a leer este capítulo que contiene los aportes de la comunidad académica que hace de la matemática educativa una verdadera disciplina que interviene directamente en la formación de los nuevos ciudadanos de este siglo.

Referencias

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, número especial, 103-129.

Vygostki, L. (1983). *Obras Escogidas.* Tomo I, II Y III. Madrid: Visor.

DISEÑO DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA DEL TEOREMA DE CONVOLUCIÓN PARA ESCUELAS DE INGENIERIAS

Ernesto Arturo Bosquez, Javier Lezama, Avenilde Romo
Universidad Autónoma Metropolitana. (México) Centro de Investigación de Ciencia. Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. (México) ernestok1@hotmail.com, jlezamaipn@gmail.com, avenilderv@yahoo.com.mx

RESUMEN: En este artículo se plantea el diseño de una secuencia didáctica, orientada al estudiante de ingeniería para que vincule el teorema de convolución en el contexto de la ingeniería. Partimos del supuesto teórico de ver a la disciplina matemática como una disciplina de servicio, este hecho nos permite analizar diferentes usos del teorema de convolución, en lo que se conoce en ingeniería como disciplinas intermediarias, estas situaciones permitirán al estudiante vincular este conocimiento matemático desde varias perspectivas como la modelación matemática de circuitos eléctricos con ecuaciones diferenciales, la transformada de Laplace como técnica de solución de ecuaciones diferenciales, la simulación a través de diagramas de bloques y éstos como cajas negras para que el estudiante proponga modelos que le sirvan para obtener la función de amortiguamiento en un circuito eléctrico, así como el uso de las leyes de ohm, Kirchoff y programas como OrCad, Math Lab y Graph.

Palabras clave: teorema de convolución, situación didáctica, modelación matemática, disciplina intermediaria

ABSTRACT*:* This paper is concerned with a didactic sequence design addressed to engineering students, so that they link the convolution theorem to the engineering context. We start from the theoretical assumption of viewing mathematics as a service discipline, which allows us to analyze the different uses of convolution theorem in what is known in engineering as intermediate disciplines. These situations will allow the student to link the mathematical knowledge from various perspectives, such as: the mathematical modeling of electric circuits, to differential equation, Laplace's transformation as a solution technique of differential equation, simulation through block diagrams, and these as black boxes, so that the student propose models that be useful to obtain the damping function in an electric circuit, as well as the laws of Ohm, Kirchoff ,and programs such as Orcad, Math Lab and Graph.

Key words: Convolution theorem, didactic situation, mathematical modeling, intermediate discipline.

Planteamiento del problema

El teorema de convolución es estudiado en el discurso escolar de las ecuaciones diferenciales en las escuelas de ingeniería. Al tratar a la Transformada de Laplace como una técnica para resolver ecuaciones diferenciales lineales se incorpora este teorema, la manera en que se presenta este conocimiento en los textos utilizados por profesores y estudiantes de este curso es,

Teorema de Convolución: Sean las funciones $f(x)\ g(x)$ continuas por tramos en el Intervalo $[0,\infty)$ y de orden exponencial, entonces

$$\mathcal{L}[f*g]=F(s)\cdot G(s)$$

Dónde $f*g$ es la convolución de f con g y se define como,

$$f*g=\int_0^t f(\alpha)g(\alpha-t)\,d\alpha$$

Siempre que esta última integral exista.

Este enfoque discursivo, reduce la actividad matemática del estudiante un aspecto operatorio para resolver ecuaciones diferenciales, es decir, promueve la idea de que el teorema es una serie de pasos que le permitirán resolver ecuaciones diferenciales y a través de este proceso, podrá elegir cuándo utilizar o no este teorema. También se observa que en este discurso el procedimiento muestra un desprovisto de vinculaciones del mismo en relación a la ingeniería que estudian (Bosquez, Lezama y Mora, 2010).

Lo que nos propusimos es diseñar una secuencia didáctica que permita:

- Construir un medio didáctico que considere los elementos de la matemática, ingeniería y tecnología.
- El medio didáctico permitirá que el estudiante vincule estos elementos en el contexto de la ingeniería.
- La secuencia didáctica permitirá la interacción entre el alumno, el medio didáctico y el docente.

A partir de esta intencionalidad, nos planteamos los cuestionamientos siguientes ¿Cómo involucrar al teorema de convolución en los contextos matemáticos de la ingeniería y tecnológicos? ¿Qué aspectos teóricos de la didáctica considerar? ¿Cómo construir los escenarios donde el estudiante pueda desarrollar de manera práctica los aspectos matemáticos y las disciplinas intermediarias en una secuencia didáctica?

Fundamentos teóricos

El diseño de una secuencia didáctica que se propone, surge a partir de la metodología conocida como ingeniería didáctica (Artigue, Douady, Moreno y Gómez, 1995), así como algunos aspectos teóricos de la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1986) y del paradigma científico de ver a la disciplina Matemática como una disciplina de servicio (Howson, Kahane, Lauginie y Turckheim, 1988). Otro aspecto importante corresponde a la actividad de la modelación tanto en la matemática como en la Física y en la Ingeniería misma (Blum, 2002), es decir, la representación de expresiones matemáticas relacionadas con situaciones de la vida real. Todos estos elementos teóricos nos permitieron vincular de alguna manera al teorema de convolución con los elementos mencionados.

Primer componente teórico

Consideramos dos aspectos para nuestro trabajo. En el primero como característica relevante es que el profesor ve al estudiante como un contenedor de conocimientos matemáticos, entre mejor contenedor mejor estudiante será, en este enfoque cancela un significado fuera del contexto matemático, restringiendo así al estudiante. En el otro aspecto, una secuencia didáctica se refiere al conjunto de interrelaciones entre tres sujetos: profesor, estudiante y medio didáctico. El medio didáctico lo constituye el espacio donde se desenvuelven los elementos y es propuesta por el profesor. Así la secuencia didáctica comprende el proceso en el cual el docente proporciona el medio didáctico en donde el estudiante construye su conocimiento. Dentro de una secuencia didáctica se encuentran las situaciones a didácticas que corresponden a los procesos en los cuáles el profesor plantea al estudiante un problema que asemeje situaciones de la vida real que podrá abordar a través de sus conocimientos previos, y que le permitirán generar, hipótesis y conjeturas que asemejen el trabajo que se realiza en una comunidad científica (Brousseau, 1986). En este trabajo una de las tareas a realizar es describir y diseñar el medio didáctico que estará realizado por una serie de situaciones a didácticas que en suma conformarán a la secuencia que propondremos para llevarla a clase. En la consideración de los aspectos epistemológicos, didácticos y cognitivos, nos lleva a considerar lo siguiente:

- Observamos que la génesis del teorema de convolución es de naturaleza matemática, por lo que adoptar esto en nuestro diseño es altamente complejo o mejor dicho, imposible, esto se confirma en el trabajos de Mellin (1896).
- Vimos que el discurso escolar típico de este conocimiento matemático deja en los estudiantes de ingenierías un significado del tipo operatorio y por tanto restringido a la falta de vinculación con la ingeniería que estudian.
- Como campo de restricciones quedan los estudiantes en el discurso típico escolar de este conocimiento sin una participación significativa dentro del aula en donde pudieran conjeturar o construir este conocimiento a partir de motivaciones indicadas por el docente.

Lo anterior justifica el por qué nuestro interés de diseñar una secuencia didáctica para el discurso escolar del teorema de convolución con el objeto de que el estudiante sea ahora el actor principal durante su desarrollo y que el medio didáctico le permita hacer vinculaciones de este conocimiento para enriquecerlo en los contextos de la matemática, ingeniería y tecnológicos.

Segundo componente (teórico)

El estudio ICMI 3 “Mathematics as a service subset”, en cuya introducción se afirma:

> The teaching of mathematics to students of other disciplines must now be accepted as a fact, a social need and, also, a relatively new problematic issue. (Howson et al. 1988, p.1).

Es decir, en este estudio se ve a la disciplina matemática como una disciplina de servicio.

En este mismo estudio, Pollak (1988) evidencia dos tipos de necesidades matemáticas en la práctica de ingenieros:

Elementary needs: << the ability to set up the right problem, to have a good idea how big the answer should be, and to get the right answer by any available means whatsoever-mentally, calculator, paper-and-pencil, computer whatever >>.

Advances needs: << we need employees who know that there is a large variety of forms of mathematical thinking, and what these various forms can do.

La pregunta que emerge es: ¿cómo lograr que desde la enseñanza de las matemáticas estas necesidades sean tomadas en cuenta?

Presentación del diseño de la Secuencia Didáctica

En esta secuencia didáctica se proveen una serie de actividades con sus tareas respectivas con el objeto de hacer interactuar al estudiante de ingeniería de tal manera que pueda resolver cada una de éstas usando sus conocimientos previos y pueda hacer conjeturas o hipótesis para que a través del espacio didáctico que se le proporciona pueda vincular en conjunto a la ecuación diferencial, modelos matemáticos, modelos físicos, conocimientos de la ingeniería de especialidad como la teoría de control y teoría de circuitos eléctricos y así culminar con una suma de vinculaciones que le ayuden a incorporarlos en el teorema de convolución. En esta secuencia didáctica se usarán los elementos siguientes: un circuito eléctrico resistencia –inductancia (*RL*)*,* el ambiente electrónico Or Cad (Spice) y el software Matlab 7, así como conocimientos de la disciplina de especialidad de la ingeniería: teoría de control, teoría de circuitos eléctricos. Esta secuencia didáctica está compuesta por cinco actividades específicas, cada una está seguida de la descripción de su objetivo particular, y de lo que se espera que hagan los estudiantes involucrados. Los estudiantes deberán tener los conocimientos de un curso de ecuaciones diferenciales, así como el manejo necesario para construir y realizar mediciones en los circuitos eléctricos *RL,* con el programa computacional *Or Cad.* Así mismo, se requiere un manejo básico de la opción del *Simulink* y del programa computacional MatLab7, ya que será fundamental para manejar elementos del álgebra de bloques.

Primera Actividad

El objetivo de esta actividad es que cada estudiante involucrado con esta actividad obtenga empíricamente el modelo matemático de la corriente eléctrica que circula en un circuito eléctrico *RL*. Pretendemos que lo anterior se logre a través de tres tareas específicas que tiene que desarrollar cada estudiante. En esta actividad utilizará el programa *Or Cad*, mismo que se le proporcionará en una PC.

Primera tarea. - Usando el programa Or Cad, cada estudiante construirá virtualmente, un circuito *RL*, como el que se indica en la figura No 1. El estudiante debe obtener un dibujo parecido al indicado en la figura No 1.

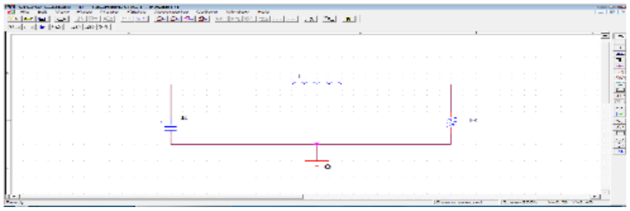


Figura 1

R	*L*	*E*
1	1	12
2	3	12
3	5	12

Figura 2

Segunda tarea. - El estudiante dará los valores que se indican en la figura 2 a *R, L y E*. (Ver figura No 2), y por cada triada obtendrá gráficamente, las caídas de voltaje tanto de R y L, es decir V_R, V_L, respectivamente. Así mismo abrirá una tercera ventana para que ahí grafique $V_R + V_L$, y observe que se obtiene en cada caso, ver figura No 3.

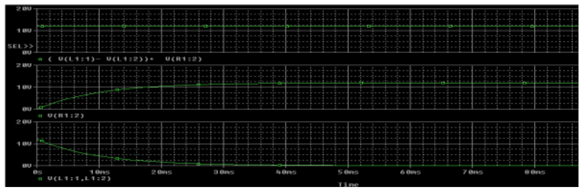


Figura 3

En la parte inferior se observa a V_R, en medio a V_L y en la parte superior a la suma de ambas, algo similar deberá ocurrir en los demás casos.

El estudiante debe observar que a partir de los resultados de las gráficas de la figura No 4, pueda inferir, al menos empíricamente, que:

$$V_R + V_L = E. \tag{1}$$

Es decir, *justifica experimentalmente* una de las leyes de Kirchhoff, “la suma de las caídas de voltaje en un circuito eléctrico es cero”.

Tercera tarea. - El estudiante debe expresar matemáticamente a (1) en términos de la corriente eléctrica $i(t)$

Es decir, el estudiante debe inferir, al menos empíricamente, que todo circuito *RL* propuesto, cómo el que construyó en Or Cad, es modelado por una ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes constantes, dónde $i(0) = 0$.

$$V_L + V_R = E \quad \rightarrow \quad L\frac{d\,i(t)}{dt} + Ri = E(t). \tag{2}$$

Segunda Actividad

El objetivo de esta actividad es cada estudiante contraste que la gráfica de la solución de la ecuación diferencial (2) con la gráfica del circuito eléctrico RL, que se obtiene con el programa Or Cad. Para lograr esto se le proponen al estudiante tres tareas que se describen a continuación.

Primera tarea. - El estudiante debe resolver la ecuación diferencial (2) usando la técnica de la transformada de Laplace.

$$L\frac{d\,i(t)}{dt}+R\,i=E \qquad \underset{\text{LAPLACE}}{\overset{\text{USANDO}}{\Rightarrow}} \qquad i(t)=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right) \tag{3}$$

Segunda tarea. - Usando un soft ware matemático (en nuestro caso Graph) obtenga la gráfica de la solución obtenida en la primera tarea.

Tercera tarea- Contrastar la gráfica anterior con la gráfica que obtuvo en Or Cad.

Esperamos que el estudiante en esta segunda actividad infiera que las gráficas en ambos casos son las mismas.

Tercera Actividad

El objetivo de esta actividad es que el estudiante construya un diagrama de bloques "sugerido" por el profesor y pueda contrastarlo con el circuito construido en Or Cad. Para lograr esto la actividad correspondiente está compuesta por tres tareas.

Primera tarea. - El estudiante debe construir el diagrama de bloques que se propone (Figura No 4), de tal manera que podrá verificar, si es correcta o no su construcción ya que en esta parte él podrá obtener los resultados inmediatos para su confiabilidad.

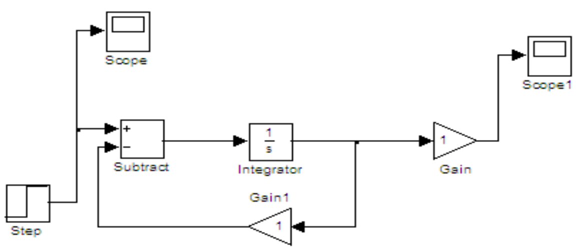


Figura 4 Representación del diagrama de bloques

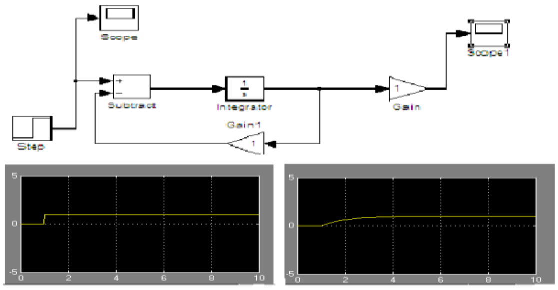


Figura 5 Diagrama de bloques propuesto por el docente.

Segunda tarea. - El estudiante explorará el diagrama de bloques construido por él, dando diferentes valores de entrada y observará los distintos valores de salida del sistema, así podrá darse cuenta que para todos los casos que proponga siempre va obtener los resultados similares a los que se representan en el diagrama de bloques representado en la figura No 5.

Tercera tarea- El estudiante responderá al siguiente cuestionamiento.

i) Considere la gráfica de la expresión (3), con los valores $E=3, R=1 \;\; y \;\; L=1$. Contraste ésta con la gráfica anterior, ¿que observa?

ii) Ahora dé usted valores constantes arbitrarios a la misma expresión; *E, R y L* y estos mismos valores compárelo con el diagrama de bloques dado, ¿Qué observa?

iii) ¿Puede usted dar una inferencia a partir de i) y ii)?

El estudiante debe inferir que el diagrama de bloques es similar al circuito *RL*.

Cuarta Actividad

Objetivo: Usando el diagrama de bloques de la actividad anterior, y las consideraciones teóricas de la disciplina intermediaria, el estudiante mediante experimentación deberá darse cuenta que la función impulso unitario, bajo las condiciones que se especifican en la teoría de Control y que se exponen a continuación es del tipo $h(t)=e^{-kt}$. Esta actividad está compuesta de dos tareas. A continuación se darán algunas consideraciones teóricas relevantes.

A) Al circuito eléctrico se le considera cómo un sistema lineal constante, dónde la señal de entrada a este sistema es el voltaje, o bien, la señal del impulso unitario según sea el caso. La respuesta al sistema mencionado es la corriente eléctrica, o bien, la respuesta del sistema al impulso unitario.

El contenido del diagrama mencionado se describe gráficamente en la figura No 6, y seguidamente se describe su análisis.

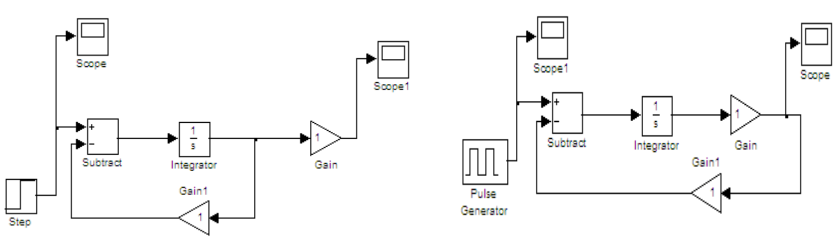


Figura 6. Señales de Entrada y Salida.

El análisis se fundamenta en la función de transferencia, según la *teoría de control,* es decir, a partir de la ecuación diferencial que modela el circuito, se le aplica la transformada de Laplace, y de ahí se considera al cociente de la función de salida entre la función de entrada, esta es una forma de obtener los diagramas de bloques expuestos.

.

B) La respuesta de un sistema lineal constante, cumple con las dos condiciones siguientes.

i) Principio de superposición, es decir dadas las señales de entradas del sistema considerado E_1 y E_2, con sus respectivas respuestas de salida $i_1(t)$ y $i_2(t)$, entonces, se tiene que,

$$E_1 + E_2 \rightarrow i_1 + i_2 \qquad (4)$$

ii) La respuesta de salida de un sistema lineal siempre puede expresarse cómo:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau) E(\tau) d\tau \qquad (5)$$

Dónde $h(t,\tau)$ es la respuesta del impulso unitario del sistema cuándo éste está en reposo.

Primera tarea. - Cada estudiante propondrá un tipo de circuito eléctrico dónde la señal de entrada sea una aproximación a la delta de Dirac, y a partir de éste deberá proponer un diagrama de bloque que construirá en Matlab 7, tomando en consideración que la salida será $h(t)$. Para esto deberá usar como herramienta el diagrama de bloques usado en la actividad anterior. Esperamos que el estudiante use Matlab y su propuesta deberá ser algo parecido al diagrama de bloque mostrado en la Figura 7

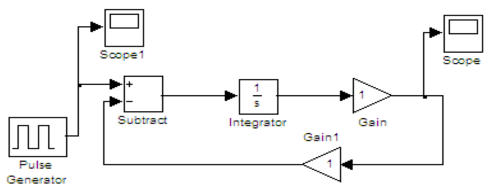


Figura 7 Diagrama de bloque construido con Matlab 7, que representa a un circuito eléctrico cuya señal entrada es aproximada a la delta de Dirac.

Segunda tarea. - El estudiante explorará dando valores a la aproximación delta de Dirac, es decir, incorporará estas cantidades en el diagrama de bloques elaborado en Matlab 7, e interpretará las gráficas que obtenga en la salida del sistema.

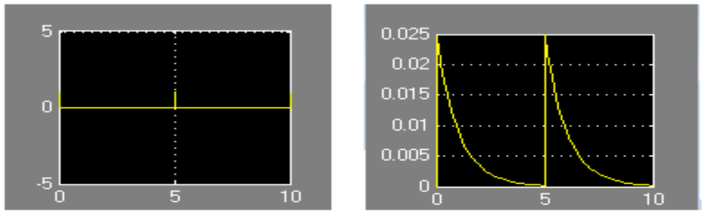


Figura 8 Obtención de las gráficas correspondientes a la señal de entrada y salida del diagrama de bloques de la figura 10 Los valores considerados son, Amplitud 1, Periodo 5, y Porcentaje (%) de periodo .5.

1.- ¿Qué observa si el periodo crece? ¿Según las gráficas obtenidas, a qué función se aproxima la respuesta de este sistema?

2.- ¿Qué función representa la solución de esta ecuación diferencial?

Quinta Actividad

Objetivo: El estudiante debe dar cuenta que la manera en que se propone en la ciencia interdisciplinaria el cálculo de la función de salida, en este caso $i(t)$, con la condición inicial $i(t)=0$, cuándo se da una señal de entrada $E(t)$, corresponde justamente a la solución obtenida en 3 y de aquí deduzca que la solución $i(t)$ en un circuito *RL* corresponde a una integral de convolución, claro esto de manera empírica. Con esto creemos que el estudiante le dará un sentido al **teorema de convolución** y con esto finaliza esta secuencia didáctica. Para lograr esto se proponen dos tareas.

Primera tarea. - Cada estudiante calculará $y(t)$, usando los conocimientos de la disciplina intermediaria, es decir, usará la segunda propiedad de los sistemas lineales constantes (integral (5)).

Aquí esperamos que el estudiante considere la expresión (9), es decir:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau)E(\tau)\,d\tau,$$

Y sustituya a $h(t)$ para $t\geq 0$, entonces obtiene que,

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau)E(\tau)\,d\tau=\frac{1}{L}\int_{o}^{\infty} e^{-\frac{R}{L}t}E(t-\tau)\,dt. \tag{6}$$

Segunda tarea. - El estudiante contrastará el resultado anterior con el resultado de la solución de la ecuación diferencial (3). ¿Qué encuentra en este contraste?

Esperamos que el estudiante responda,

$$i(t)=\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}*E(t). \tag{7}$$

Conclusiones

Con lo expuesto anteriormente hemos buscado dotar de un sentido a este teorema sin depender de toda la complejidad matemática que le da sentido únicamente en el contexto matemático. Lo anterior atiende al paradigma de las matemáticas como disciplina de servicio y ofrece una posibilidad de vincular modelos físicos, matemáticos y de ingeniería a través de interfaces: los escenarios de simulación que ofrecen los softwares Or Cad y Mat Lab. La modelación aparece como un elemento clave, en particular con el uso de modelos físicos (Circuitos), matemáticos (Ecuaciones diferenciales) y de ingeniería (Función de transferencia), los cuales fungen como elementos de control de la simulación y el tratamiento de las tareas propuestas. La secuencia propone así un escenario desde la disciplina intermediaria, que permite introducir este teorema dotándolo de un sentido a partir de su uso. Otra situación relevante es que en esta propuesta de enseñanza el estudiante es el principal actor durante el proceso, es decir está siempre supervisado por el docente, sin embargo el estudiante es el que actuará la mayor parte en todas las actividades que se proponen, finalmente, la obtención de función "*h*" es por ensayo y error, quedará pendiente, en otro escrito, su obtención específica.

Referencias bibliográficas

Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (Ed.) (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática, Un esquema para la Investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.* Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica,

Bosquez, E., Lezama, J., Mora, C. (2010). Algunas reflexiones de contraste del formalismo con la algoritmia de la enseñanza del teorema de convolución en escuelas de ingeniería. En P. Lestón, (Ed.). (2010). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 23* (361-368). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education. Discussion document. *Educational Studies in Mathematics*, 51: 149 doi: 10.1023/A:1022435827400.

Brousseau, G. (1986). Fondements et mèthodes de la didactique des Mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2),* 33-115.

Howson, A. G., J. P. Kahane, P. Lauginie, y E. de Turckheim (Eds.) (1988), *Mathematics as a Service Subjec.* ICMI Study Series, Cambridge: Cambridge University Press.

Mellin H.(1896). Ueber gewisse durch bestimmte Integrale vermittelte Beziehungen zwischen linearen Differentialgleichungen mit rationale Coefficienten, *Societatis Scientiarum Fennicae*, *21(196),* 6-57.

Pollak H. O. (1988). Mathematics as a service subjec- why? In A. G. Howson, J. P. Kahane, P. Lauginie, E. de Turckheim (Eds.), *Mathematics as a service subject.* ICME Study Series, Cambridge: Cambridge University Press pp. 28-34.

NÚCLEO DE ESTUDOS SOBRE FORMAÇÃO E PRÁTICAS DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA: INVESTIGAÇÕES SOBRE AVALIAÇÃO

Nielce Meneguelo Lobo da Costa, Rosangela de Souza Jorge Ando, Vera Mônica Ribeiro, Rosana Jorge Monteiro Magni
Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN. (Brasil)
nielce.lobo@gmail.com, rosangela.ando@gmail.com, veramonica@terra.com.br, rosanajmm@gmail.com

RESUMO: Neste artigo discutimos parte de uma pesquisa cujo objetivo foi acompanhar e analisar estudos sobre avaliação da aprendizagem empreendidos por professores de Matemática de um Projeto maior, inserido no Programa Observatório da Educação, da CAPES, Brasil. A fundamentação teórica relativa à formação continuada veio de estudos de Imbernón e sobre avaliação, de Cury e Haydt. A metodologia qualitativa, de cunho co-generativo, segundo Greenwood e Levin, teve como procedimentos: acompanhamento dos encontros dos professores e suporte às ações para suas classes. A coleta foi por observações, recolha de materiais dos professores e gravações audiovisuais dos encontros e da sala de aula. A análise foi interpretativa por triangulação, conforme Denzin. Concluímos que, a partir dos estudos e investigações em avaliação realizadas em conjunto pelos professores, eles puderam conhecer melhor dificuldades dos alunos sobre funções, especialmente analisando tipos de erros identificados nas resoluções das questões.

Palavras chave: avaliação, formação Ccontinuada, erros, estratégias equivocadas, funções

ABSTRACT: This article discusses a partial research aimed at accomplishing and analyzing learning evaluation studies, which were carried out by Mathematics professors, as a part of a wider project, inserted in the Observatory Education Program of "CAPES", Brazil. It also includes a theoretical support related to the continuous training based on Imbernon's studies and about evaluation by Cury and Haydt. The qualitative co- generative methodology, according to Greenwood and Levin, used as procedures: professor's supervision and support to the actions for their lessons. The collected information was obtained by means of observations, getting of teachers' materials, and classroom activities recorded on videos. The analysis was processed by means of triangulation, according to Denzin. We conclude that from the researches and studies about evaluation, already carried out together with the professors; it was possible to better know the students' difficulties about functions, especially by analyzing the types of mistakes identified in the problem solving activities.

Key words: evaluation, continuous training, mistakes, wrong strategies, functions

Introdução

A pesquisa que subsidia este artigo se desenvolveu em um projeto de formação e pesquisa em andamento, intitulado "Educação Continuada do Professor de Matemática do Ensino Médio: Núcleo de Investigações sobre a Reconstrução da Prática Pedagógica" financiado pelo Programa Observatório da Educação da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), do Ministério da Educação do Brasil. O Projeto tem a duração de quatro anos e foi iniciado em 2013, com o intuito de constituir, desenvolver e analisar um núcleo investigativo sobre o trabalho docente. Assim sendo, busca compreender processos formativos que possam impulsionar a reconstrução da prática docente e suas implicações na sala de aula. O Núcleo de Estudos sobre Formação e Práticas do Professor de Matemática foi constituído no âmbito do Projeto e a pesquisa aqui abordada teve por objetivo acompanhar e analisar estudos sobre a avaliação da aprendizagem empreendidos por professores de Matemática integrantes do Núcleo, particularmente quanto à análise de erros dos estudantes em avaliações sobre funções.

Partimos do pressuposto que a prática pedagógica se compõe de momentos de planejamento, de docência e de avaliação. Dessa forma, ao investigar a prática, deve se considerar que a avaliação é um dos aspectos do processo educativo a ser analisado e que ainda carece de estudos. A avaliação, vista como integrante da prática é a que se denomina avaliação interna, a qual é pensada, elaborada e aplicada pelo professor em sua classe. Ela produz dados cuja análise fornece indicativos sobre a aprendizagem dos alunos.

A avaliação apresenta três funções para informar sobre os conhecimentos dos alunos de modo a auxiliar os processos de ensino e de aprendizagem. São elas, as funções de: diagnosticar, controlar e classificar. De acordo com estas características, são definidas três modalidades de avaliação: a diagnóstica, a formativa e a somativa.

A avaliação com caráter diagnóstico visa identificar os conhecimentos prévios e caracterizar eventuais lacunas ou dificuldades na compreensão dos conceitos e dos procedimentos, que requerem intervenções didáticas. A avaliação com a função de controle é a denominada formativa e procura apontar os acertos e dificuldades do aprendiz, de modo a permitir o reajuste das ações pedagógicas ao longo dos processos de ensino e de aprendizagem. Seus resultados auxiliam tanto o professor como o aluno, visto que permitem ao professor identificar possíveis erros e dificuldades dos alunos de modo a reorientar o ensino e, ao aluno, permitem perceber seus acertos e estratégias equivocadas de modo a refinar seus conhecimentos. A avaliação somativa é a que objetiva apreciar se as metas foram atingidas e é normalmente aplicada com caráter classificatório (para aprovar ou reprovar).

As modalidades de avaliação, seja a diagnóstica, a formativa e a somativa, se complementam para confiabilidade da interpretação, formando um tripé para assegurar uma coleta de dados própria para fornecer informações a serem utilizadas na continuidade dos processos de ensino e de aprendizagem. Nesse sentido Haydt (2008) insiste: "Essas três formas de avaliação estão intimamente vinculadas. Para garantir a eficiência do sistema de avaliação e a eficácia do processo ensino-aprendizagem, o professor deve fazer uso das três modalidades” (p.18).

Além das avaliações de caráter interno, os sistemas educacionais utilizam as chamadas avaliações externas que geram resultados globais sobre o desempenho não de um aluno, individualmente, mas de um conjunto de alunos e têm a função de informar o nível educacional atingido pelo sistema avaliado. Quanto a esse tipo de avaliação, vale ressaltar que hoje os professores brasileiros têm acesso a diversos resultados, uma vez que são disponibilizados os indicadores de avaliações externas aplicadas no âmbito nacional tais como, por exemplo, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), ou locais, como os do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (Saresp), a Avaliação da Aprendizagem em Processo (AAP) entre outros.

Entendemos que, seja a avaliação interna, seja a externa, “ela só se torna relevante no processo educativo se os seus resultados forem analisados e utilizados para orientar os alunos e para regular a prática pedagógica. Contudo, empreender essas análises e construir intervenções didáticas não é tarefa simples para o professor”, como já discutimos em Lobo da Costa, Ando, & Magni, (2015). Isso posto, ressaltamos a importância de abrir espaços de discussão sobre tal nos processos de formação continuada, assim como nos grupos de estudos de professores e em núcleos que tenham um caráter de investigação da prática.

Neste artigo discutimos investigações sobre avaliação empreendidos por professores de Matemática do Núcleo. Esses professores ao longo de uma formação continuada estudaram processos avaliativos desenvolvidos em sala de aula e em avaliações externas, sobretudo utilizando as bases de dados do INEP e, quanto ao conteúdo matemático, analisaram funções e sua abordagem em exames como ENEM e PISA e identificaram erros recorrentes de alunos.

Fundamentação teórica

A fundamentação teórica quanto à formação continuada veio dos estudos de Imbernón (2000) que enfatiza a importância de que essa seja pensada de modo a privilegiar cinco eixos de atuação:

1. A reflexão prático-teórica sobre a própria prática mediante a análise, a compreensão, a interpretação e a intervenção sobre a realidade. A capacidade do professor de gerar conhecimento pedagógico por meio da prática educativa.
2. A troca de experiência entre iguais para tornar possível a atualização em todos os campos de intervenção educativa e aumentar a comunicação entre os professores.
3. A união da formação a um projeto de trabalho.
4. A formação como estímulo crítico ante práticas profissionais como a hierarquia, o sexismo, a proletarização, o individualismo, o pouco prestígio etc., e práticas sociais como a exclusão, a intolerância etc.

5. O desenvolvimento profissional da instituição educativa mediante o trabalho conjunto para transformar essa prática. Possibilitar a passagem da experiência de inovação (isolada e individual) à inovação institucional. (Imbernón, 2000, p. 48)

A pesquisa aqui discutida envolve professores do Núcleo estudando e refletindo sobre processos avaliativos e se alicerça nestes cinco eixos destacados por Imbernón (2000), uma vez que se caracteriza por trocas de experiência entre eles, por reflexões sobre a própria prática ao estudarem tipos de avaliação, por estar unida a um projeto de trabalho e considerar o desenvolvimento da instituição de atuação do professor.

Entendemos que a formação continuada é ação para a (re)construção dos saberes e práticas pedagógicas, desse modo, uma temática relevante para discussão nos processos formativos é a avaliação da aprendizagem, seja interna ou externa à escola, e as formas de auxiliar o professor a compreendê-la e a refletir sobre sua prática, como enfatiza Imbernón (2009).

Em relação à avaliação da aprendizagem o aporte veio dos estudos de Cury (2007) e Haydt (2008). Assumimos que a avaliação é um processo interpretativo que inclui a aplicação de instrumentos, tais como testes e provas, entretanto não se restringe a determinar medidas. Para Haydt, (2008, p.14) “atualmente, a avaliação assume novas funções, pois é um meio de diagnosticar e de verificar em que medida os objetivos propostos para o ensino-aprendizagem estão sendo atingidos. Portanto, a avaliação assume uma dimensão orientadora”.

Uma possibilidade viabilizada pela avaliação é a de auxiliar o professor a identificar erros recorrentes dos estudantes. Nesse aspecto, a fundamentação teórica para as análises dos erros apresentados nas resoluções das questões das avaliações foi pautada nos estudos de Cury (2015), para a qual a análise de erros necessita uma categorização para auxiliar o professor a agrupar erros similares e comuns entre os alunos. Em relação à categorização dos erros, nos baseamos em Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, & Inbar (1987) os quais, a partir de pesquisas, estruturaram seis categorias de erros recorrentes dos alunos ao resolverem questões de matemática, quais sejam: uso errado dos dados, linguagem mal interpretada, inferência lógica inválida, definição ou teorema distorcido, solução não verificada e erros técnicos.

Metodologia da pesquisa

A metodologia da pesquisa que subsidia este artigo foi a qualitativa de cunho co-generativo, segundo Greenwood & Levin (2000). Os procedimentos metodológicos foram: acompanhamento dos encontros dos professores, do planejamento e do suporte às ações, às atividades de avaliação para a sala de aula, à sua aplicação e análise. Os dados foram coletados por meio de observações, materiais produzidos/ adaptados pelos professores e gravações audiovisuais dos encontros do Núcleo e da sala de aula. A análise dos dados foi interpretativa pelo método de triangulação de dados, conforme (Denzin, 1988).

A formação continuada em análise foi constituída de 33 encontros presenciais semanais entre Fevereiro e Novembro de 2015, com três horas de duração cada um, sediados em uma escola do poder público estadual da cidade de São Paulo, com oito professores de matemática e quatro pesquisadoras da universidade.

Investigações sobre avaliação

Os professores integrantes do Núcleo, iniciaram os estudos conjuntos elaborando e, a seguir, aplicando e analisando uma Avaliação Diagnóstica para seus alunos. Na sequência analisaram tipos de Avaliação, Matrizes de Referência e características de exames aplicados a alunos do Ensino Médio, como a AAP, o ENEM e o PISA. Estudaram funções e seus diferentes registros de representação, para então selecionarem, resolverem e classificarem questões sobre funções abordadas tanto nas AAP quanto no ENEM (período de 2009 a 2015). Em seguida elaboraram e aplicaram aos seus alunos uma segunda avaliação, de cunho formativo, ou seja, com intenção de acompanhamento dos estudos. Esta avaliação formativa foi composta por questões do ENEM sobre funções já selecionadas e classificadas pelos professores participantes. Analisados os resultados, foram identificados erros e estratégias equivocadas dos alunos, de modo a auxiliar futuras intervenções em sala de aula.

A seguir, analisamos essa avaliação formativa elaborada pelos professores do Núcleo, as questões que a integraram e exemplificamos erros conceituais identificados em uma delas. As quatro questões que compuseram essa avaliação estão sumarizadas na Figura 1.

1) (ENEM 2009 - Prova Amarela - Questão 142)
Questão envolvendo como contexto tabagismo e câncer de pulmão, apresentando um gráfico sobre Casos de câncer pulmonar X número de cigarros consumidos diariamente. De acordo com as informações do gráfico o aluno deveria identificar a alternativa com afirmação correta. A questão, de acordo com a Matriz do ENEM, se classifica como sendo do eixo Cognitivo Construção de Argumentação (CA); da Subcompetência da área de Matemática: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas (M5); da Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação (H22). De acordo com o PISA classifica-se como Situação ou contexto: Pública; Conteúdo Matemático: Mudança e Relações; Agrupamento de competências: Reflexão; Tipo de resposta: Múltipla escolha. A síntese da tarefa é: Análise de gráfico.
2) (ENEM 2013 - Prova AMARELA - Questão 136)

Questão que apresenta o desenho de uma taça gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z e desenhada com apoio do plano cartesiano. Informações sobre a parábola e sobre a função que a descreve: ($f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$) estão entre os dados da questão e pede-se que o aluno encontre o valor da constante C dessa função. A questão se classifica de acordo com a Matriz do ENEM como: Eixo Cognitivo: Enfrentamento e resolução de situações-problema (SP); Subcompetência da área de Matemática: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas (M5); Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos (H21) e, de acordo com o PISA, como Situação ou contexto: Pública; Conteúdo Matemático: Mudança e Relações; Agrupamento de competências: Reflexão; Tipo de resposta: Múltipla escolha. A síntese da tarefa é: Determinar o coeficiente C da função quadrática.
3) (ENEM 2012 - Prova Amarela - Questão 158)
Questão escolhida para discussão na íntegra neste texto que apresenta um gráfico com os valores das ações de uma empresa, os quais variam de hora em hora durante um dia no período das 10h às 17h e também apresenta uma tabela com informações de horário de compra e de venda de ações por cinco investidores. A questão solicita que seja identificado qual investidor fez o melhor negócio. A questão se classifica de acordo com a Matriz do ENEM como: Eixo Cognitivo: Construção de Argumentação (CA); Subcompetência da área de Matemática: Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano (M4); Habilidade: Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação (H17) e, de acordo com o PISA, como Situação ou contexto: Pública; Conteúdo Matemático: Mudança e Relações; Agrupamento de competências: Reflexão; Tipo de resposta: Múltipla escolha. A síntese da tarefa para esta questão é: Analisar os dados apresentados em gráfico e tabela e ao realizar esta tarefa
4) (ENEM 2011 - Prova Amarela – Questão 180).
Essa questão apresenta um contexto sobre uma empresa de telefonia que oferece aos seus clientes dois planos, descrevendo-os na linguagem usual e solicitando escolha do gráfico que melhor representava tal situação. A questão se classifica de acordo com a Matriz do ENEM como: Eixo Cognitivo: Compreensão de fenômenos (CF); Subcompetência da área de Matemática: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas (M5); Habilidade: Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas (H20) e, de acordo com o PISA como Situação ou contexto: Pessoal; Conteúdo Matemático: Mudança e Relações; Agrupamento de competências: Conexão; Tipo de resposta: Múltipla escolha. A síntese da tarefa é: Reconhecimento de gráfico por duas funções

Figura 1. Súmula das questões e classificação
Fonte: Acervo das autoras

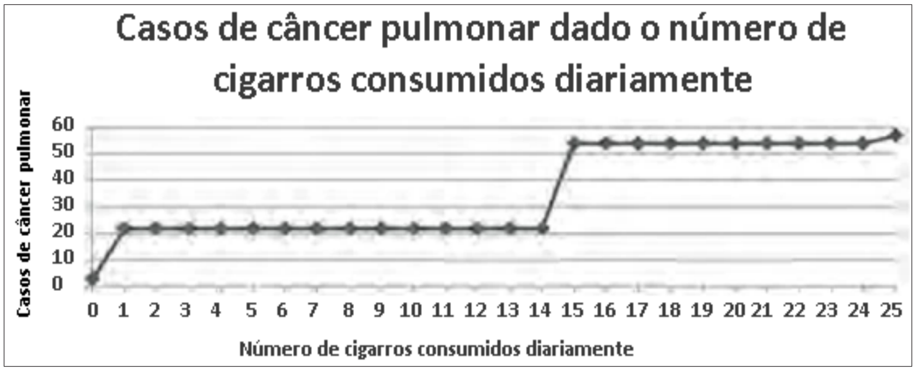
A Avaliação foi aplicada a 258 alunos do Ensino Médio, sendo 130 da 1ª série, 46 da 2ª série e 82 da 3ª série. Na logística de aplicação foi solicitado aos alunos que registrassem suas soluções no espaço disponibilizado na prova e não apenas indicassem a alternativa correta das questões objetivas. Os professores explicaram previamente aos alunos que a finalidade desta Avaliação era detectar conhecimentos e dúvidas surgidas ao resolverem as questões do ENEM de anos anteriores e, para tanto, a análise das resoluções registradas seria fundamental.

A correção e análise desta avaliação formativa foi feita com base em oito categoria de erros inspiradas na categorização de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), são elas: Erro de interpretação do enunciado/tarefa (E1); Erro conceitual ou estratégico (E2); Erro procedimental ou técnico (E3); Erro de cálculo (E4); Erro na utilização de dados (E5); Erro na validação da solução (E6); Erro de representação (E7); Outros erros (E8).

Dada a limitação própria de um artigo escolhemos discutir tão somente a presença de erro conceitual identificado nas resoluções dos alunos na primeira questão da Avaliação. O erro conceitual caracteriza-se quando o aluno desconhece o conceito envolvido na questão ou a estratégia de solução, ou utiliza outros conceitos que destoam do proposto na tarefa.

Para tanto, apresentamos na íntegra essa questão 1, na Figura 2.

A suspeita de que haveria uma relação causal entre tabagismo e câncer de pulmão foi levantada pela primeira vez a partir de observações clinicas. Para testar essa possível associação, foram conduzidos inúmeros estudos epidemiológicos. Dentre esses, houve o estudo do número de casos de câncer em relação ao número de cigarros consumidos por dia, cujos resultados são mostrados no gráfico a seguir.



De acordo com as informações do gráfico,

A) o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas inversamente proporcionais.

B) o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas que não se relacionam.

C) o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas diretamente proporcionais.

D) uma pessoa não fumante certamente nunca será diagnosticada com câncer de pulmão.

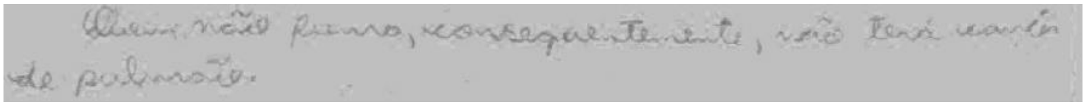
E) o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas que estão relacionadas, mas sem proporcionalidade.

Figura 2. A questão 1 proposta na avaliação formativa. Fonte: ENEM 2009 - Prova Amarela - Questão 142

Em relação a esta questão, um encaminhamento para sua resolução pode ser o seguinte: Analisar o gráfico e, a partir dessa análise concluir que o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão estão relacionados, mas sem uma proporcionalidade, pois seu gráfico apresenta patamares, nos quais a pessoa que consome diariamente entre um e quatorze cigarros e de quinze a vinte e quatro cigarros possui a mesma probabilidade do tabagismo ser causa de câncer pulmonar em cada um desses patamares. Apesar de, entre as pessoas não fumantes, existem poucos casos de câncer, este número não igual a zero.

Assim sendo, a resposta correta é a alternativa E. Após a correção desta questão foram separadas as provas com resoluções erradas para análise, identificação e classificação dos tipos de erros.

A seguir apontamos uma amostra de erros conceituais identificados. No exemplo exposto na Figura 3, o aluno assinalou a alternativa D e justificou.

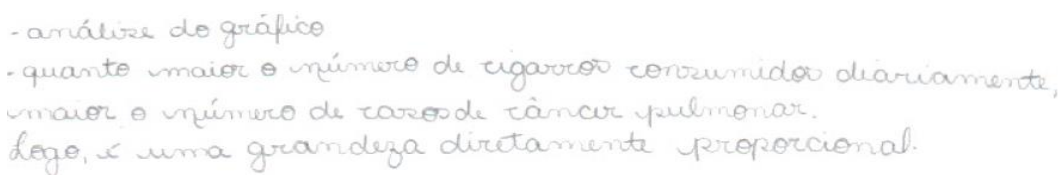


Transcrição: “Quem não fuma, consequentemente, não terá câncer de pulmão”

Figura 3: Protocolo BA-20 com justificativa do aluno para a resposta a questão 1. Fonte: Acervo das Autoras

No caso, trata-se de erro conceitual, pois o aluno utilizou uma crença para seleção da resposta e não os dados apresentados na questão.

No exemplo exposto na Figura 4, o aluno assinalou a alternativa C e justificou.


- análise do gráfico
- quanto maior o número de cigarros consumidos diariamente, maior o número de casos de câncer pulmonar.
Logo, é uma grandeza diretamente proporcional.

Transcrição" – análise do gráfico

Quanto maior o número de cigarros consumidos diariamente, maior o número de casos de câncer pulmonar.

Logo, é uma grandeza diretamente proporcional". (sic)

Figura 4: Protocolo BA-23 com a justificativa do aluno para a resposta a questão 1. Fonte: Acervo das autoras

Nesta amostra, trata-se também de erro conceitual, pois o aluno utilizou uma crença, no caso, se uma grandeza aumentar (número de cigarros) e a outra grandeza aumentar (casos de câncer) isto é suficiente para concluir que são grandezas diretamente proporcionais, sem considerar a constante de proporcionalidade.

Conclusão

Concluímos que os professores participantes do Núcleo, por meio dos estudos e investigações realizadas em conjunto sobre avaliação em matemática, particularmente envolvendo questões sobre funções, puderam conhecer melhor dificuldades dos alunos no momento em que se debruçaram na análise dos tipos de erros identificados nas resoluções das questões. Como exemplo, a identificação de erros conceituais dos alunos pode auxiliar os professores no ensino e na forma de mediar a construção dos conceitos envolvidos e corrigir desvios de aprendizagem.

Entendemos que ao analisar os erros dos alunos o professor pode detectar situações que necessitam sua intervenção em sala de aula e pode se conscientizar de aspectos relativos aos tipos de equívocos e também rever seus próprios procedimentos de ensino, avaliando se estão adequados para o seu particular conjunto de alunos.

Finalizando, concluímos que as discussões sobre os processos avaliativos devem ser privilegiadas em formações continuadas de forma a auxiliar o professor a compreendê-los e a refletir sobre sua prática.

Agradecimentos

Agradecemos ao Programa Observatório da Educação (OBEDUC), da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela concessão de bolsas e demais subsídios para o desenvolvimento desta pesquisa alojada no Projeto 19366/12 Edital 049/12.

Referências Bibliográficas

Cury, H. N. (2015). *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos* (2 ed.). Belo Horizonte: Autêntica.

Denzin, N. (1988). Triangulation in educational research. Em J. Keeves, *Educational research, methodology and measurement: An International handbook* (pp. 318-322). Oxford: Pergamon Press.

Greenwood, D. J., & Levin, M. (2000). Reconstructing the relationships between universities and society through action research. Em N. Denzin, & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (2ª ed., pp. 85-106). Thousand Oaks, California: Sage Publications Inc.

Haydt, R. C. (2008). *Avaliação do Processo Ensino-Aprendizagem* (6ª ed.). São Paulo: Ática.

Imbernón, F. (2000). *Formação docente e profissional: formar-se para a mudança e a incerteza*. São Paulo: Cortez.

Imbernón, F. (2009). *Formação Permanente do Professorado: novas tendências*. São Paulo: Cortez.

Lobo da Costa, N. M., Ando, R. d., & Magni, R. J. (2015). *Universidade e Escola em Colaboração para Investigar Práticas Avaliativas sobre Funções no Ensino Médio*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*(1), pp. 3-14.

ACTIVIDAD DIDÁCTICA INTRODUCTORIA PARA EL TEMA DE CORRELACIÓN Y REGRESIÓN LINEAL

Giovanna Patricia Fernández de Arteaga Domínguez, Irma Nancy Larios Rodríguez, Enrique Hugues Galindo
Universidad de Sonora. (México)
giovanna-arteaga@hotmail.com, nancy@gauss.mat.uson.mx, ehugues@gauss.mat.uson.mx

RESUMEN: En el trabajo se describe una primera actividad didáctica de una secuencia de actividades didácticas para promover la compresión de los conceptos de regresión y correlación lineal en estudiantes del área de Ciencias Sociales de la Universidad de Sonora, se presentan además algunos de los elementos de justificación para realizar el diseño de dicha secuencia, las características generales de la propuesta y los elementos teóricos metodológicos para el diseño, dejando para otro artículo los resultados de la implementación de la propuesta, por cuestiones de espacio.

Palabras clave: relaciones lineales, correlación lineal.

ABSTRACT: This paper describes a first teaching activity, which belongs to a sequence of teaching activities to foster the understanding of linear correlation and regression concepts in the students of Social Sciences at the University of Sonora. It also shows some supporting elements for the design of such sequence, as well as the general characteristics of the proposal and the theoretical and methodological elements of the design. The proposal implementation outcomes were left for another paper, due to the lack of space.

Key words: linear relationships, linear correlation.

Introducción

El tema de regresión y correlación lineal se encuentra en el programa del curso de Estadística Descriptiva del área de Ciencias Sociales de la Universidad de Sonora, donde el plan curricular de los programas educativos de esta área está basado en un modelo por competencias. En general, las técnicas de regresión y correlación se preocupan de la interrelación entre dos o más variables continuas. En situaciones de la vida cotidianas las personas tienen la capacidad de relacionar variables y de emitir juicios con base en creencias, intuiciones o en conocimientos previos.

Batanero (2001), justifica la relevancia del estudio de la asociación y correlación debido a los siguientes motivos:

1) Permiten modelizar relaciones entre variables estadísticas, incluyendo la idea de regresión que permite predecir una de las variables a partir de la otra.
2) En la correlación y regresión para cada valor de la variable independiente se tiene una distribución de valores de la variable dependiente.
3) La regresión y correlación se pueden estudiar desde las diferentes ramas en que tradicionalmente se ha dividido la estadística.
4) Son base de muchos otros métodos estadísticos.

Existen investigaciones donde se señalan dificultades en torno al aprendizaje de los conceptos de correlación y regresión lineal como los que señalan a continuación.

Particularmente para la regresión lineal, Estepa, Gea Serrano, Cañadas de la Fuente y Contreras Gacía (2012) plantean que “En la escuela, el concepto de regresión lineal, es concebido como fórmula para calcular valores, dejando a un lado el análisis de variación de los datos, por ende, la falta de comprensión del concepto”.

Gea y Estepa (2012) en una revisión sobre la investigación desarrollada acerca de la enseñanza de las nociones estadísticas de correlación establece un compilado dificultades entorno a ese concepto. A continuación se señalan algunas de ellas:

- Existe una gran dificultad para el razonamiento covariacional negativo (concepción unidireccional), esto es, los estudiantes perciben la dependencia sólo cuando ésta es positiva, y asignando independencia al caso de asociación inversa (Estepa, 1994; Batanero, Estepa y Godino, 1996; Estepa y Batanero, 1996)
- La concepción determinista de la asociación. Los alumnos sólo consideran la asociación desde un punto de vista funcional (Estepa, 1994; Batanero, Estepa y Godino, 1996; Estepa y Batanero, 1996)
- La concepción local de la asociación. Los alumnos utilizan parte de los datos del estudio y no el conjunto de todos los datos para emitir el juicio de asociación (Estepa, 1994; Batanero, Estepa y Godino, 1996; Estepa y Batanero, 1996).

Con base en la experiencia consideramos que los estudiantes del área de Ciencias Sociales de la Universidad de Sonora no son ajenos a las dificultades señaladas en las investigaciones presentadas anteriormente, de ahí la necesidad de realizar esfuerzos con el fin de disminuir esas dificultades, que permitan el desarrollo de la comprensión de los conceptos de correlación y regresión lineal.

Marco teórico metodológico

El marco teórico metodológico principal para el *diseño e implementación* de las actividades didácticas es la metodología ACODESA (aprendizaje en colaboración, debate científico y auto-reflexión) de Hitt, F. y Cortes, C. (2009), la cual es una adaptación a un acercamiento sociocultural del aprendizaje de las matemáticas, es importante señalar que en esta metodología, el profesor presenta una *situación problemática* que provoque la reflexión, no se pretende explicitarle a los estudiantes la matemática que debe ser utilizada, ni dictaminar sobre lo realizado por los mismos en las primeras etapas, salvo al final en el proceso de institucionalización. Es decir, es deber de los estudiantes el argumentar y validar sus producciones, en el proceso de institucionalización es donde el profesor resalta las diferentes representaciones y presenta las representaciones institucionales. A continuación se describen muy brevemente las fases de la metodología ACODESA.

- Fase I. Trabajo individual (producción de representaciones funcionales para comprender la situación problema).
- Fase II. Trabajo en equipo sobre una misma situación. Proceso de discusión y validación (refinamiento de las representaciones funcionales).
- Fase III. Debate (que puede convertirse en un debate científico). Proceso de discusión y validación (refinamiento de representaciones funcionales).
- Fase IV. Regreso sobre la situación (trabajo individual: reconstrucción y auto-reflexión).
- Fase V. Institucionalización. Proceso de institucionalización y utilización de representaciones institucionales.

Bajo este marco teórico-metodológico se espera que los estudiantes se enfrenten a una tarea matemática (problema o situación problema), e intenten comprenderla, si la tarea no está directamente relacionada con una actividad conocida que ponga en marcha un pensamiento convergente (el recuerdo de un algoritmo conocido por los alumnos). A lo anterior le llamaremos *representaciones funcionales* (Hitt, 2009; Citado por Rodríguez, 2012), en ellas los estudiantes se sumergen en un proceso de pensamiento divergente (es decir que no existiendo un camino directo, la tarea los obliga a la búsqueda de alternativas, esa búsqueda puede estar ligada a intentos por entender la tarea). Este los lleva a la producción de representaciones mentales que al expresarlas sobre papel u otro medio, sirven como medio de interpretación y discusión con sus compañeros, para comprender mejor la tarea y al mismo tiempo, se crea un campo de posibilidades que podrían encaminar a los interesados hacia la solución de la tarea.

Por otro lado, las representaciones institucionales (Hitt, 2010; Citado por Rodríguez, 2012) son representaciones que son reconocidas y aceptadas por la comunidad en un contexto educativo.

Se tiene como teoría complementaria la *traslación de registros en el razonamiento estadístico de* Moritz (2004). Según Moritz, el razonamiento acerca de la covariación comúnmente envuelve procesos de "traslación" entre datos numéricos crudos, representaciones gráficas y afirmaciones verbales acerca de covariación estadística. La base para el análisis de los resultados de alumnos que han trabajado con este tipo de razonamiento, en función de las habilidades son:

a) Generación especulativa de datos, esta se puede realizar bosquejando datos de manera gráfica que representen una declaración verbal.

b) Interpretación verbal de gráficas, a partir de la descripción de un diagrama de dispersión se realiza una declaración verbal.

c) Interpretación numérica de gráficas, esta se demuestra leyendo un valor en el grafico para luego interpolar otro valor.

En la Figura 1 se ilustra las relaciones entre los diferentes registros de representación, planteados por Moritz.

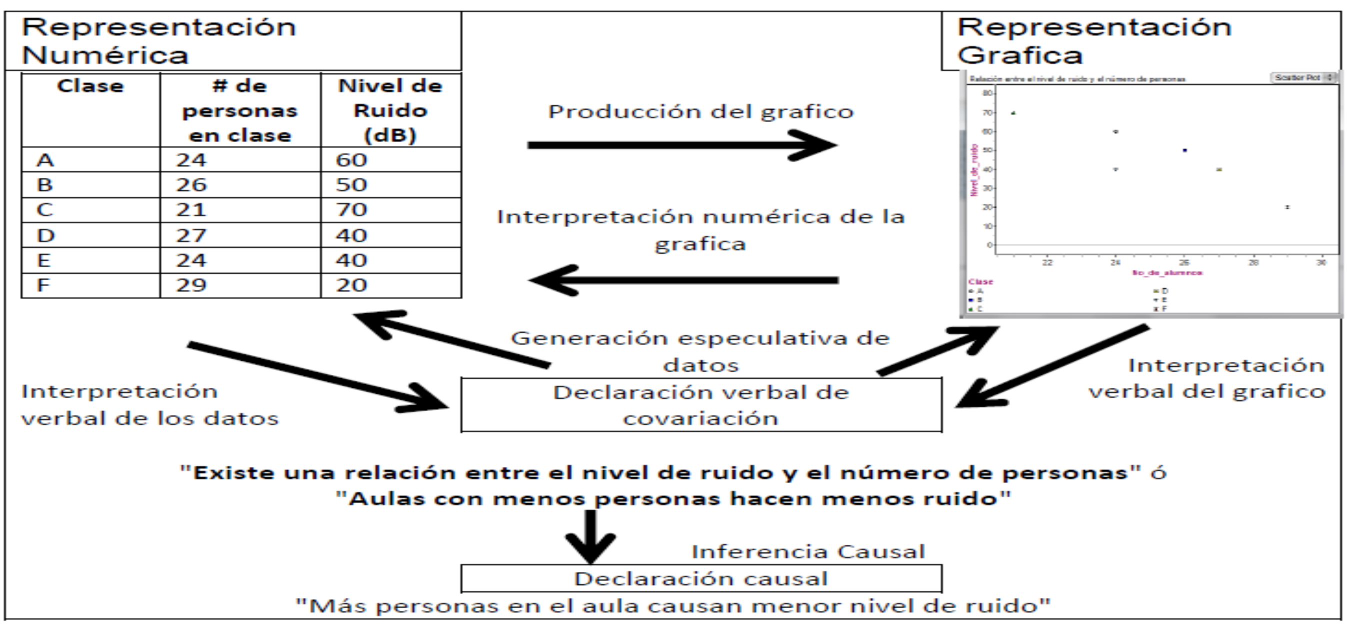


Figura 1. Registros de Representación

Propuesta

Las características generales de la secuencia de actividades didácticas son las siguientes:

Uso de tecnología en algunas actividades didácticas (Excel y Fathom)
Promover el trabajo colaborativo entre los estudiantes
Resolución de problemas utilizando contextos de la vida real
Uso de hojas de trabajo
A continuación se presenta la actividad de inicio de la secuencia de actividades didáctica, la cual se titula: Factores que se relacionan con el rendimiento escolar.

El propósito general de la actividad didáctica es:

Promover la identificación de relaciones lineales y no lineales entre variables a partir los diagramas de dispersión, así como la identificación de relaciones lineales inversas y directas. Y los propósitos específicos, que el estudiante:

a) Identifique las variables involucradas en la situación problema.
b) Identifique relaciones lineales y no lineales entre variables.
c) Observe relaciones directas e inversas entre las variables.
d) Participe de manera colaborativa en la resolución de la situación problema.
e) Comunique los resultados obtenidos en la resolución de la situación problema.

Situación problema:

Ana, Lucía y Juan estudiantes del curso de Estadística Descriptiva en la carrera de Trabajo Social de una universidad, se encuentran realizando un trabajo escolar sobre posibles actores que se relacionan con el rendimiento escolar en el curso. Con el trabajo escolar ellos van a acreditar el tema de regresión y correlación lineal.

Fase I. Trabajo individual

Conteste los siguientes cuestionamientos de forma individual:

1. Ana propone empezar por elegir en el equipo algunos factores que pueden estar relacionados con el rendimiento escolar y analizar esa posibilidad. ¿Cuáles factores consideras que pueden ser? Enlístalos.
2. De los factores enlistados en el punto anterior, ¿Estarán igualmente relacionados o unos más que otros? ¿Son benéficos o perjudiciales para el rendimiento escolar?
3. Lucía propone aplicar una encuesta a un grupo de estudiantes que ya hayan cursado el curso de Estadística Descriptiva, pero tienen dudas sobre los factores que deben de preguntar dado el tema que pretenden evaluar es el de regresión y correlación lineal, por lo cual consideran importante investigar un poco sobre él.

Orientación didáctica. Solicitar a los estudiantes que investiguen, como trabajo extra clase sobre el tema de regresión y correlación lineal, y que hagan un resumen sobre lo investigado y lo suban al SIVEA (plataforma institucional para los cursos que se imparten en la Universidad de Sonora)

Fase II y Fase III. Trabajo en equipo y trabajo grupal.

4. Formar equipos de tres estudiantes y compartir lo encontrado en la investigación y comentar las respuestas dadas en los numerales 1 y 2. Posteriormente compartir con el grupo las respuestas, consensuando cuáles son aquellos factores que deben incorporarse en la encuesta que aplicaran Ana, Lucía y Juan, argumentado la razón. Así como los numerales siguientes.
   Ana y Lucía aplicaron una encuesta a 30 estudiantes, Ana fue la encargada de llevar a cabo la encuesta, presentando la información obtenida en la Tabla 1.

Tabla 1. Resultados de la encuesta

No. de estudiante	Promedio del curso de Estadística Descriptiva	# de inasistencias	# de tareas realizadas	Promedio del curso de Matemáticas*	# de hrs. semanales laboradas
1	72	0	22	68	0
2	70	1	22	70	16
3	70	0	21	54	0
4	69	0	20	36	0
5	69	0	21	27	5
6	68	0	19	74	8
7	60	2	17	69	6
8	60	2	17	25	5
9	60	2	17	32	0
10	59	3	16	72	5
11	54	3	14	54	8
12	54	2	14	45	6
13	54	4	15	48	9

14	54	3	14	62	9
15	54	3	13	38	0
16	45	5	11	56	10
17	44	4	10	68	10
18	43	5	10	52	10
19	42	6	11	25	0
20	41	8	9	40	14
21	40	5	8	38	12
22	39	4	9	69	16
23	38	7	9	28	0
24	35	9	8	42	15
25	32	6	7	43	18
26	28	7	5	56	20
27	28	9	6	28	20
28	28	8	4	60	22
29	27	10	3	30	18
30	27	10	3	60	18
* Curso anterior seriado con el curso de Estadística Descriptiva					

5. Propongan que tipo de procedimientos estadísticos, se consideran pertinentes realizar con la información de la tabla para realizar el trabajo escolar solicitado.
   Lucía realizó algunos sgráficos para presentar la información de la Tabla 1, los cuales se muestran a continuación:

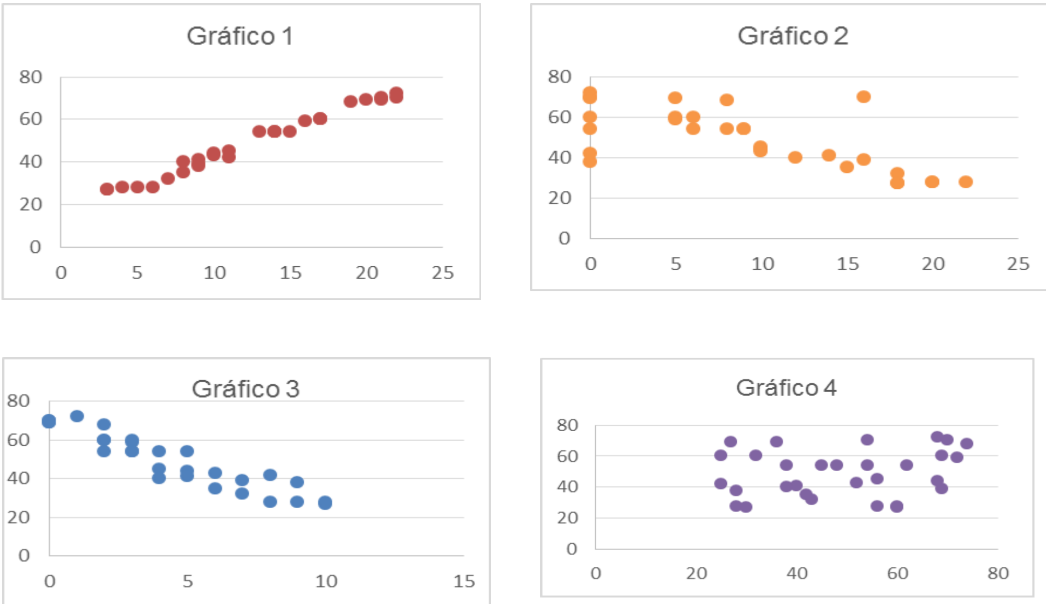


Figura 2. Gráficos de la información de la tabla 1

6. Comenta con tus compañeros tus argumentos del numeral anterior e intercambien opiniones y de acuerdo a sus respuestas, nombren los títulos de ejes de los gráficos.
7. ¿En cuáles de estos gráficos consideras que existe una relación entre las variables involucradas?
8. Para los casos en el numeral anterior en los que sí se considera que existe una relación:

   a) ¿Qué tipo de relación consideras hay entre las variables?
   b) ¿Puedes inferir en la intensidad o la fuerza de la relación entre las variables?
   c) ¿Qué puedes concluir sobre la dirección de las variables?
   d) ¿Cuándo cambia una de las variables (crece o decrece) que sucede con la otra?
   e) Si una de las variables toma dos veces un mismo valor, ¿Qué sucede con los valores correspondientes a la otra variable? ¿Por qué?

Fase III. Trabajo grupal.

Se invita a los equipos a elegir a uno representante para que, de manera sintética, expliquen al resto del grupo los acuerdos a los que llegaron para dar respuesta a los numerales 5, 6, 7 y 8 de manera que el docente dedicará a moderar las intervenciones así como las réplicas del grupo a cada equipo, permitiendo y promoviendo de este modo el debate de ideas que posibilitará arribar a un eventual consenso

Fase IV. Auto-reflexión

9. Individualmente redacte un breve informe sobre los factores que se relacionan con el rendimiento escolar, con base en lo analizado en esta actividad, así mismo resuelva las situaciones problemas que están en la sección de tareas del SIVEA y envíele a su profesor.

*Fase de Institucionalización***.** Al finalizar el profesor formaliza el nombre de los gráficos presentados como diagramas de dispersión, los cuales son la representación de parejas de datos sobre un sistema de ejes coordenados, donde la primera coordenada son los datos de la variable explicativa (eje horizontal) y la segunda coordenada son los datos de la variable de respuesta (eje vertical). Así como su importancia para percibir patrón general que permite inferir informalmente sobre la relación entre las variables, la dirección y la forma con base en el trabajo y respuestas propuestas por los estudiantes.

Comentarios finales

El objetivo general de la propuesta es diseñar una secuencia de actividades didácticas, como la presentada anteriormente, con ayuda de la metodología ACODESA en el diseño de estas para tratar de disminuir algunos errores y dificultades que se presentan alrededor del estudio de la correlación y regresión lineal, es decir proponer materiales didácticos para que se desarrollen las competencias estadísticas en los estudiantes. En este semestre nos encontramos en el diseño de la secuencia, la cual se pretende pilotear con un grupo de estadística descriptiva, con la intención de realizar ajustes en la propuesta y poder implementarla de forma experimental durante el semestre 2017-1.

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2001). Didáctica de la Estadística. España: Universidad de Granada.

Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J.D. (1997). Student´s undertanding of statistical association a computer environment, en Garfield, J. y Burrill. G. (eds.). *Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics.* International Statistical Institute, pp. 191-205. Voorburg (Holanda): International Statistical Institute.

Estepa, A. (1994). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Estepa, A., Batanero, C. (1996). Judgments of correlation in scatter plots: Students' intuitive strategies and preconceptions. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 4, pp. 25-41.

Estepa, A., Gea S. M., Cañadas de la Fuente, G., y Contreras G. J. (2012). Algunas notas históricas sobre correlación y regresión y su uso en el aula. *NÚMEROS Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 5-14.

Gea, S. M., Estepa, A. (2012*).* Las nociones de correlación y regresión en la investigación educativa. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 107-117). Ciudad Real: SEIEM.

Hitt, F., Cortez, C. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista digital Matemática*, *Educación e Internet*, Vol. 10, n°1, pp. 1-30. Disponible en: www.cidse.itcr.ac.cr/revistamete.

Moritz, J. (2004). Reasoning about Covariation. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.). *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*, (pp. 221-255). (Eds. Ben-Zvi y J. Garfield). Dordrecht (The Nederlands): Kluwer Academic Publishers.

Rodríguez, M. (2012). *Actividades didácticas dirigidas a profesores de matemáticas de secundaria diseñadas con la metodología ACODESA*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad de Sonora. México.

EL RAZONAMIENTO INFERENCIAL INFORMAL EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS DE CIENCIAS SOCIALES

Jesús Guadalupe Lugo Armenta, Enrique Hugues Galindo, Irma Nancy Larios Rodríguez
Universidad de Sonora. (México)
lupitalugo_@hotmail.com, ehugues@mat.uson.mx, nancy@mat.uson.mx

RESUMEN: En este reporte de investigación se describen rasgos del Razonamiento Inferencial Informal (RII) de estudiantes universitarios del área de Ciencias Sociales, obtenidos al analizar respuestas a cuestionario que incorpora en su marco conceptual y metodológico ideas acerca de este tipo de razonamiento propuestas en el trabajo de Zieffler, Garfield, DelMas y Reading (2008). Adicionalmente, en el diseño del cuestionario y análisis de respuestas a éste, se utilizan herramientas introducidas por Curcio (1989) y por la taxonomía SOLO de Biggs y Collins (1982), con algunas adaptaciones para el caso del RII, a fin de caracterizar este tipo de razonamiento en estudiantes sin una instrucción diseñada exprofeso. Dicho cuestionario está compuesto por cuatro situaciones problema, la primera de ellas enfocada a los niveles de lectura y las restantes al RII. Este esfuerzo forma parte del abordaje al problema de investigacion: ¿En qué medida los estudiantes universitarios desarrollan y hacen uso de un Razonamiento Inferencial Informal?

Palabras clave: razonamiento inferencial informal, inferencia estadística

ABSTRACT: This research paper describes features of Informal Inferential Reasoning (IIR) of Social Sciences university students. Such features were obtained when analyzing the answers to a questionnaire which involves, in its conceptual and methodological framework, ideas related to this kind of reasoning proposed by Zieffler, Garfield, DelMas and Reading (2008). Besides, tools introduced by Curcio(1989) and by the SOLO taxonomy of Biggs and Collins (1982) are used in the questionnaire design and the analysis of its answers as well, with some adaptations for the IIR case in order to characterize the reasoning of students who have not received a specially designed teaching. The questionnaire consists of four problem situations, the first one focused on the levels of reading, and the others focused on the IIR. This endeavor takes part of the research problem approach: How much university students develop and use the Informal Inferential Reasoning?

Key words: Informal inferential reasoning, statistical inference.

Introducción

En los diferentes niveles educativos podemos encontrar la presencia de la Estadística, lo que evidencia la importancia que tiene la educación estadística en el currículo escolar y que atribuimos al papel que se percibe tienen las ideas, conceptos y técnicas estadísticas, especialmente la capacidad de utilizar todo esto, en la vida cotidiana y profesional de una gran cantidad de personas. Sin embargo, en México, la revisión de currículos de los diferentes niveles educativos arroja que no es sino hasta el nivel superior que algunos estudiantes entran en contacto con tópicos específicos de la Estadística Inferencial, aun cuando ésta pueda considerarse central para la Estadística y lo que le da sentido, ya que constituye la fase que guía el análisis de datos y que permite juicios y toma de decisiones en los estudios estadísticos, lo que frecuentemente no es bien comprendido. Diversos autores (Zieffler, Garfield, DelMas y Reading, 2008) han venido señalando la existencia de serias dificultades para lograr que los estudiantes desarrollen las capacidades necesarias para realizar y analizar críticamente inferencias estadísticas. Dificultades que se han visto fuertemente vinculadas a la falta de comprensión de antecedentes de la Estadística Inferencial, muy especialmente un conjunto de formas de proceder anticipando algunos aspectos de la inferencia estadística que se denomina: Razonamiento Inferencial Informal (RII); y que pueden ser desarrolladas previo a la instrucción en Estadística Inferencial. El desarrollo del RII en los estudiantes universitarios nos parece sumamente importante como sustento del sentido estadístico de los estudiantes además de la posibilidad de servir como un puente hacia la Estadística Inferencial.

Se puede considerar a la inferencia como un tópico de investigación de la educación estadística relativamente nuevo, sin embargo existen numerosas obras en la literatura de investigación que proporcionan elementos, bases conceptuales e interrogantes para nuevos estudios al respecto y más específicamente acerca del RII. Como sucede luego con nuevos constructos, existen en la literatura diversas concepciones de este tipo de razonamiento y para los fines de este trabajo adoptaremos la definición y concepciones propuestas por Zieffler et al (2008). En torno a este tópico hemos detectamos la necesidad de investigar acerca del desarrollo del RII como componente y producto de la formación estadística en estudiantes lo que nos ha llevado a plantearnos como problema de investigación: ¿En qué medida los estudiantes universitarios desarrollan y hacen uso de un Razonamiento Inferencial Informal?

Precisando que se plantea abordar el problema restringiendo el escenario a estudiantes de carreras del área de Ciencias Sociales, sin ser sometidos a un tratamiento didáctico encaminado a fortalecer su RII, y haciendo uso de herramientas de indagación acordes al marco de trabajo propuesto por Zieffler et al (2008). Además, tomando en cuenta que la mayoría de los estudiantes, en este contexto no entrarán en contacto con la Estadística Inferencial y sus fundamentos, no se enfocará en la medición o expresión de grado de incertidumbre al hacer inferencias, aunque resulta pertinente indagar someramente sobre la posibilidad de que el tipo de estudiantes bajo estudio module sus conclusiones o inferencias con alguna valoración de la incertidumbre al realizar generalizaciones hacia la población.

■ Marco conceptual

Así, entendiendo por marco conceptual los principales conceptos o elementos que se encuentran involucrados en la problemática de investigación y que son indispensables para emprender y/o comprender su estudio, en esta investigación destacamos los siguientes: el RII, las tres tareas propuestas por Zieffler et al (2008), los niveles de lectura de Curcio (1989), la taxonomía SOLO de Biggs y Collins (1982).

El RII y las tres tareas centrales:

En esta investigación adoptamos la definición propuesta por Zieffler et al (2008) acerca del RII, “la forma en la cual los estudiantes usan su conocimiento estadístico informal para hacer argumentos que apoyen las inferencias acerca de poblaciones desconocidas basados sobre muestras observadas” (p.44). Entendido el conocimiento estadístico informal como aquel conocimiento que poseen los estudiantes previamente a su contacto con la Estadística Inferencial.

Una de las nociones con mayor relevancia en el presente trabajo son los tres tipos de tareas de RII propuestas por Zieffler et al (2008, p.47), mismas que han sido centrales para nosotros y que se resumen en:

1. Estimar y graficar una población basados en una muestra;
2. Comparar dos o más muestras de datos para inferir si existe una verdadera diferencia entre las poblaciones de las que se obtuvieron las muestras, y
3. Juzgar cuál de dos modelos en competencia o afirmaciones es más probable sea el verdadero.

Tareas que se perciben como pertinentes tanto para indagar acerca del RII como para desarrollar formas de pensamiento involucradas en él, a través de cuestionamientos o actividades didácticas.

Niveles de Lectura:

Reconociendo que las situaciones o actividades didácticas estadísticas requieren algún tipo de lectura especializada de datos en donde se activan conocimientos estadísticos y se producen conjeturas y/o generalizaciones, componentes propios del RII, resulta importante tener en cuenta en este trabajo la valoración en los estudiantes de las capacidades correspondientes a tales lecturas. De aquí que entre las herramientas a utilizar en este trabajo incluimos los niveles de lectura en gráficos propuestos por Curcio (1989), aunque extendemos su uso para incluir tanto gráficos como otras formas de presentar la información cuya lectura constituirá un recurso para que los estudiantes inicien algún RII, siendo dichos niveles los siguientes:

(a) Leer los datos: este nivel de comprensión requiere una lectura literal del gráfico; no se realiza interpretación de la información contenida en el mismo.
(b) Leer dentro de los datos: incluye la interpretación e integración de los datos en el gráfico; requiere la habilidad para comparar cantidades y el uso de otros conceptos y destrezas matemáticas.

(c) Leer más allá de los datos: requiere que el lector realice predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se refleja directamente en el gráfico. (Batanero, Godino, Green, Holmes & Vallecillos, 1994, p. 529)

Aunados al nivel posteriormente añadido por Friel, Curcio y Bright (2001):

(d) "Leer detrás de los datos: consistente en valorar críticamente el método de recogida de datos, su validez y fiabilidad de extensión de las conclusiones." (Arteaga, Batanero, Cañadas & Contreras, 2011, p. 60)

Taxonomía SOLO:

La taxonomía SOLO se ha utilizado en investigaciones tanto de tópicos estadísticos como probabilísticos, para lo cual se han propuesto jerarquías o clasificaciones inspiradas en ella con algunas adaptaciones acordes al contexto de uso. Por ejemplo, García, Medina y Sánchez (2014) utilizan la taxonomía SOLO para jerarquizar el razonamiento probabilístico en las respuestas de estudiantes de secundaria y bachillerato acerca de algunas nociones básicas de la teoría de probabilidad, lo cual se indaga por medio de una situación problema de la distribución binomial; en Landín y Sánchez (2010) proponen una jerarquía de razonamiento para la distribución binomial, con estudiantes de bachillerato que recibieron un curso de instrucción previo al estudio; Juárez e Inzunsa (2014) evalúan la comprensión y razonamiento de los profesores de bachillerato sobre diversos conceptos estadísticos por medio de un cuestionario y realizan la clasificación del RII por medio de una adaptación que proponen de la taxonomía SOLO.

Partiendo de que "la comprensión se desarrolla poco a poco, haciéndose cada vez más estructurada y articulada" (Biggs, 1999, p.60), se ha propuesto la taxonomía SOLO para clasificar los avances de las personas en alguna comprensión determinada. Este modelo, desarrollado por Biggs y Collins (1982), plantea cinco niveles de comprensión, agrupados en dos fases: cuantitativa y cualitativa. Los niveles ubicados en la fase cuantitativa se presentan mientras la persona enfrenta un tema nuevo y son: preestructural, uniestructural y multiestructural, mientras que un avance o refinamiento de estas comprensiones es ubicada en la fase cualitativa, siendo en tal caso los niveles de comprensión: relacional y abstracto ampliado.

Dada la existencia de una íntima relación entre la comprensión y el razonamiento, ya que la primera puede ser vista como producto del segundo, pero éste es un proceso que hace uso de comprensiones (conocimientos y habilidades), esta taxonomía suele ser utilizada también para clasificar el proceso de razonamiento en niveles. Así, llevando el modelo Taxonómico SOLO al contexto de nuestro proyecto, hemos realizado una adaptación de éste para clasificar respuestas de personas a cuestionamientos en una situación o actividad didáctica estadística en diferentes niveles de RII, la cual se presenta en la Tabla 1:

Tabla 1: Niveles de RII con base en la Taxonomía SOLO

Clasificación de respuestas en niveles de Razonamiento Inferencial Informal adoptados de la Taxonomía SOLO
Nivel Preestructural – Sin comprender
No plantea conclusión y/o inferencia alguna o plantea una errónea, pudiendo hacer referencia a conceptos estadísticos y a información de la situación, pero sin comprensión de la función o papel que podrían tener ante la situación.
Nivel Uniestructural – Identificar, realizar un procedimiento sencillo
Plantea una conclusión y/o inferencia, argumentada en base a un concepto o información estadística acorde a la situación.
Nivel Multiestructural – Enumerar, describir, hacer una lista, combinar, hacer algoritmos
Plantea una conclusión y/o inferencia, argumentada con base en dos o más elementos de la situación y conceptos estadísticos involucrados pero sin conectar todo esto.
Nivel Relacional – Comparar/contrastar, explicar causas, analizar, relacionar, aplicar
Plantea una conclusión y/o inferencia argumentada con base en una conexión de información involucrada en la situación y de conceptos y propiedades estadísticas.
Nivel Abstracto Ampliado – Teorizar, generalizar, formular hipótesis, reflexionar
Plantea una conclusión y/o inferencia realizando las conexiones necesarias, pero además genera hipótesis y reflexiones acerca de la problemática.

Como mencionamos anteriormente, el modelo base supone que la comprensión se desarrolla poco a poco, de modo que podemos decir que los niveles de RII adaptados, además de ser sucesivos, se superponen unos a otros.

Metodología

La metodología de investigación que sigue nuestro trabajo es de carácter cualitativa y descriptiva, toda vez que pretendemos observar, analizar y clasificar el RII de estudiantes universitarios en carreras de Ciencias Sociales a su paso por el curso de Estadística Descriptiva en la Universidad de Sonora, los sujetos encuestados en el estudio que aquí se reporta fueron 76 estudiantes, para lo cual se utilizan cuestionarios como medios de investigación, cuyas respuestas se someten a interpretación, descripción y los análisis necesarios para extraer conclusiones acerca del desarrollo del RII en ellos.

El diseño del cuestionario aquí reportado, que es el diagnostico final de una evaluación del RII, está dirigido por los elementos descritos en el marco conceptual y se estructura a través de cuatro situaciones, en las cuales se originan preguntas enfocadas a los propósitos de cada una de ellas. Tiene como principal objetivo responder una de las preguntas, del estudio en el cual se inserta lo presentado en este reporte: ¿Cuál es el estado de desarrollo del Razonamiento Inferencial Informal de los estudiantes una vez que concluyen su primer curso universitario de Estadística?

La situación 1 ésta ligada a los niveles de lectura, declarados en marco conceptual, así como el primer cuestionamiento de cada una de las situaciones 2, 3 y 4 (Lugo, 2016, Anexo,105-108), con la finalidad de valorar el conocimiento estadístico informal con que cuentan los estudiantes y que en los subsecuentes cuestionamientos de cada una de estas situaciones habrán de utilizar; por lo que las respuestas que los estudiantes proporcionan en estas cuestiones son analizadas por medio de los niveles de lectura. Los cuestionamientos restantes de las situaciones 2, 3 y 4 están diseñadas en términos de nuestra interpretación de "las tres tareas centrales", además se pretende que los estudiantes expresen una valoración de la incertidumbre involucrada en preguntas finales de las situaciones 3 y 4, por lo que el análisis de las respuestas de los estudiantes a cada una de estas cuestiones se realiza con la adaptación de los niveles de la taxonomía SOLO al caso del RII.

Completando esta descripción, a continuación se presentan los propósitos de cada una de las situaciones problema que estructuran el cuestionario, así como la (s) acción (es) a realizar por los estudiantes en cada pregunta de dichas situaciones problema.

Tabla2: Propósitos de situaciones problema y de sus respectivas preguntas

Propósito de la situación problema		Propósito de la pregunta	
1	Identificar la habilidad de los estudiantes para el manejo del lenguaje y las posibles relaciones entre muestra y población	1	Identificar la población (lee los datos)
		2	Identificar la muestra (lee los datos)
		3	Realizar lectura de gráfica (lee dentro de los datos)
		4	Realizar lectura de gráfica (puede referirse a la muestra o a la población, lee dentro de los datos o lee más allá de los datos)
		5	Inferir acerca de la población (lee más allá de los datos)
2	Identificar la habilidad del estudiante para hacer juicios, afirmaciones, o predicciones acerca de una población basados en la muestra	1	Responder con base en la muestra o en la población (puede ubicarse en alguno de los niveles de lectura)
		2	Identificar la relación entre dos muestras de la misma población y hacer inferencias
		3.1	Identificar la relación muestra-población y hacer inferencias
		3.2	Identificar la relación muestra-población, hacer inferencias y describir su gráfica
		3.3	Identificar la relación muestra-población y graficar las inferencias realizadas
		4	Identificar diferencias y similitudes entre muestras de la misma población
3	Identificar la habilidad del estudiante para describir las posibles diferencias entre dos poblaciones basado en las diferencias observadas entre dos muestras	1	Realizar lectura de la situación y de la gráfica (se puede ubicar en alguno de los cuatro niveles de lectura)
		2	Distinguir entre población y muestra (lee los datos)
		3	Establecer diferencias entre las poblaciones argumentando con base en acerca de la media y la dispersión
		4	Establecer diferencias entre las poblaciones argumentando con base en acerca de la media y la dispersión
		5	Inferir acerca de las poblaciones expresando una valoración de la incertidumbre involucrada
4	Identificar la habilidad del estudiante para decidir y argumentar sí o no una muestra de datos es posible o probable dada una expectativa inicial	1	Realizar lectura de la situación y de la gráfica (se puede ubicar en alguno de los cuatro niveles de lectura)
		2	Comparar la gráfica de la muestra con la gráfica de la distribución
		3	Comparar las gráficas de dos muestras de la misma población
		4	Comparar la gráfica de la segunda muestra con la gráfica de la distribución
		5	Concluir cuál de las dos muestras es más probable con base en los elementos presentados
		6	Inferir acerca de la población expresando una valoración subjetiva de la incertidumbre involucrada

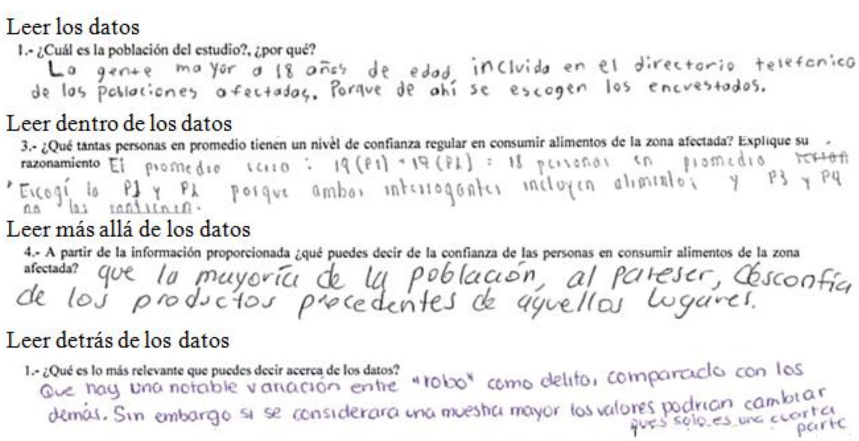
Resultados

Las respuestas que los estudiantes dieron a cada una de las preguntas del cuestionario diagnóstico final se analizan y categorizan de acuerdo a los niveles de lectura y a los niveles del modelo taxonómico SOLO. La categorización de respuestas al cuestionario por niveles de lectura se resume en la Tabla 3:

Tabla 3: Resultados del diagnóstico final por niveles de lectura

Situación problema	Pregunta	Niveles				
		Leer los datos	Leer dentro de los datos	Leer más allá de los datos	Leer detrás de los datos	Ninguno
1	1	39	0	0	0	37
	2	41	0	0	0	35
	3	8	39	0	0	29
	4	43	13	11	0	9
	5	47	8	11	0	10
2	1	66	3	0	2	5
3	1	31	31	0	0	14
	2	53	0	0	1	22
4	1	29	14	0	1	32

Estos resultados acerca de la lectura de datos por los estudiantes, muestra que el 52.19% de las respuestas se ubican en el nivel lee los datos, el 15.79% lee dentro de los datos, el 3.22% lee más allá de los datos y también destaca que sólo el 0.58% lee detrás de los datos, mientras que en el 28.22% de las respuestas, los estudiantes no fueron capaces de leer los datos. En la imagen 1 se muestran algunas respuestas que dieron los estudiantes en cada nivel de lectura:



Leer los datos

1.- ¿Cuál es la población del estudio?, ¿por qué?
La gente mayor a 18 años de edad incluida en el directorio telefonico de las poblaciones afectadas. Porque de ahí se escogen los encvestados.

Leer dentro de los datos

3.- ¿Qué tantas personas en promedio tienen un nivèl de confianza regular en consumir alimentos de la zona afectada? Explique su razonamiento
El promedio seria : 19 (P1) + 19 (P2) : 18 personas en promedio
Escogí la P1 y P2 porque ambos interrogantes incluyen alimentos y P3 y P4 no las contienen.

Leer más allá de los datos

4.- A partir de la información proporcionada ¿qué puedes decir de la confianza de las personas en consumir alimentos de la zona afectada?
que la mayoría de la población al pareser, desconfía de los productos procedentes de aquellos lugares.

Leer detrás de los datos

1.- ¿Qué es lo más relevante que puedes decir acerca de los datos?
Que hay una notable variación entre "robo" como delito, comparado con los demás. Sin embargo si se considerara una muestra mayor los valores podrían cambiar pues solo es una cuarta parte

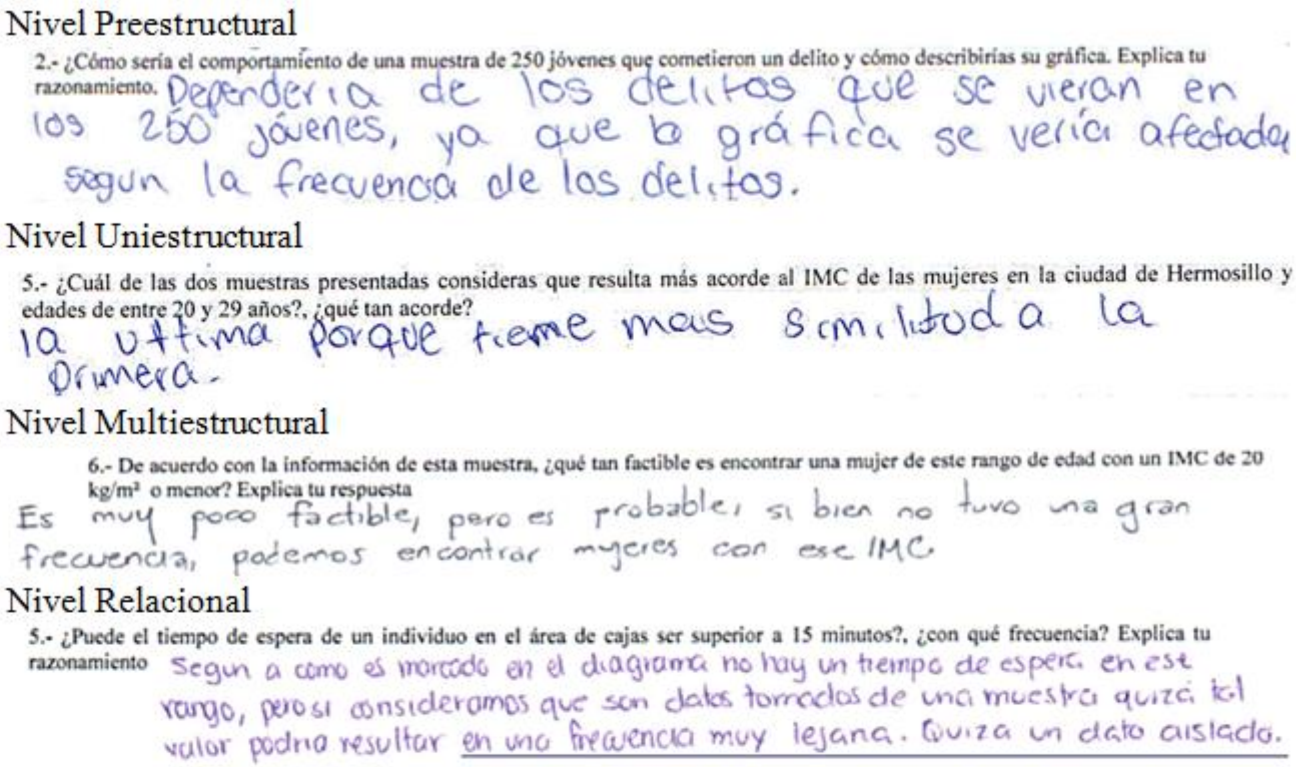
Figura 1: Respuestas de los estudiantes al diagnóstico final por niveles de lectura

En la Tabla 4 se resume la categorización de respuestas al cuestionario diagnóstico final por niveles del modelo taxonómico SOLO, estando ausente de este análisis la situación problema uno y algunas preguntas de situaciones restantes, debido a que sus respuestas sólo se clasifican por niveles de lectura por así corresponder a su diseño. De esta tabla se destaca que el 52.33% de las respuestas se encuentran en un nivel preestructural, un 42.21% en el nivel uniestructural, el 5.06% en el nivel multiestructural, mientras que sólo el 0.40% se ubica en el nivel relacional, estando ausentes razonamientos en el nivel posterior.

Tabla 4: Resultados del diagnóstico final por niveles del modelo taxonómico SOLO

Situación problema	Pregunta	Niveles				
		Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional	Abstracto ampliado
2	2	39	36	1	0	0
	3.1	48	25	3	0	0
	3.2	52	24	0	0	0
	3.3	61	12	3	0	0
	4	54	21	1	0	0
3	3	19	46	10	1	0
	4	21	47	8	0	0
	5	30	37	8	1	0
4	2	57	17	2	0	0
	3	39	34	2	1	0
	4	25	46	4	1	0
	5	29	45	2	0	0
	6	43	27	6	0	0

En la imagen 2 se muestran algunas respuestas que dieron los estudiantes en cada nivel tanto de RII con base en la adaptación de la taxonomía SOLO:


Nivel Preestructural

2.- ¿Cómo sería el comportamiento de una muestra de 250 jóvenes que cometieron un delito y cómo describirías su gráfica. Explica tu razonamiento. Dependeria de los delitos que se vieran en los 250 jóvenes, ya que la gráfica se veria afectada segun la frecuencia de los delitos.

Nivel Uniestructural

5.- ¿Cuál de las dos muestras presentadas consideras que resulta más acorde al IMC de las mujeres en la ciudad de Hermosillo y edades de entre 20 y 29 años?, ¿qué tan acorde? la ultima porque tiene mas similitud a la primera.

Nivel Multiestructural

6.- De acuerdo con la información de esta muestra, ¿qué tan factible es encontrar una mujer de este rango de edad con un IMC de 20 kg/m² o menor? Explica tu respuesta
Es muy poco factible, pero es probable, si bien no tuvo una gran frecuencia, podemos encontrar mujeres con ese IMC.

Nivel Relacional

5.- ¿Puede el tiempo de espera de un individuo en el área de cajas ser superior a 15 minutos?, ¿con qué frecuencia? Explica tu razonamiento Segun a como es marcado en el diagrama no hay un tiempo de espera en este rango, pero si consideramos que son datos tomados de una muestra quiza tal valor podria resultar en una frecuencia muy lejana. Quiza un dato aislado.

Figura 2: Respuestas de los estudiantes al diagnóstico final por niveles de taxonomía SOLO

Conclusiones

De las respuestas proporcionadas rescatamos que en tareas de lectura un 52.19% fueron ubicadas en el nivel leer los datos, siendo éste el nivel mínimo y que para ubicar una respuesta aquí el estudiante sólo necesita realizar una lectura literal de la información que se les presenta en la situación problema, por lo que resulta preocupante que la mayoría de los estudiantes universitarios que participaron en este estudio se ubiquen en dicho nivel ya que están concluyendo su primer curso universitario de estadística. Por otra parte, en las respuestas de los estudiantes a las tareas de inferencia destaca que un 52.33% se encuentra en un nivel preestructural, es decir no establecieron conclusión o inferencia alguna o la establecida es incorrecta. Cabe agregar que la falta de una mejor respuesta de los estudiantes, después de todo, atrae nuestra atención pues si esperábamos que el RII de los estudiantes tuviera un desarrollo significativo en este momento pues el programa del curso tiene indicaciones que abren esta posibilidad. Se observa que las mayores dificultades para los estudiantes en este diagnóstico en tareas de lectura se presentan al identificar la muestra y la población de estudio. Y en cuanto a las tareas de inferencia, las mayores dificultades se presentan en la situación problema dos, donde se pretende identificar la habilidad del estudiante para hacer juicios, afirmaciones, o predicciones acerca de la población basados en la muestra. Sin embargo, en este diagnóstico se muestran las serias dificultades que presentan los estudiantes tanto para realizar una adecuada lectura de datos como para integrar ésta, junto con la comprensión de los conceptos estadísticos y el razonamiento estadístico, a fin de realizar inferencias apoyadas en información estadística.

Referencias bibliográficas

Biggs, J. B., & Collins, K. F. (1982). Evaluating the Quality of Learning: The taxonomy. New York: Academic Press. (Citado en Biggs, J.B. (1999). *Teaching for Quality Learning at University* (2da ed.), 60)

Curcio, F. R. (1989). Developing graph comprehension. Reston, VA: N.C.T.M. (Citado en Batanero C., Godino J.D., Green D.R., Holmes P. & Vallecillos A. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547)

Friel, S., Curcio, F., & Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education* 32(2), 124-158. (Citado en Arteaga P., Batanero C., Cañadas G. & Contreras J.M. (2011). Las Tablas y Gráficos Estadísticos como Objetos Culturales. *NÚMEROS Revista de Didáctica de las Matemáticas*; V76, 55-67)

Juárez, J. A., & Inzunsa, S. (2014). Comprensión y razonamiento de profesores de Matemáticas de bachillerato sobre conceptos estadísticos básicos. *Perfiles educativos*, *36*(146), 14-29.

Landín, P. R., & Sánchez, E. (2010). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. *Educação Matemática Pesquisa*, *12*(3).

Lugo, J. (2016). Razonamiento Inferencial Informal de Estudiantes Universitarios como Componente de su Formación Estadística. (Tesis de maestría, Universidad de Sonora). Recuperado de http://www.bidi.uson.mx/TesisIndice.aspx?tesis=1700148

Sánchez, E. A. S., García, J. I., & Medina, M. (2014). Niveles de razonamiento y abstracción de estudiantes de secundaria y bachillerato en una situación-problema de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*(6).

Zieffler, A., Garfield, J., DelMas, R., & Reading, C. (2008). A Framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*,7(2), 40-58.

EL ANÁLISIS ESTADÍSTICO DEL NIVEL DE APRENDIZAJE EN MATEMÁTICA Y BIOESTADÍSTICA

María José Castro, Marcela Fernícola, Myriam Nuñez, Christiane Ponteville
Universidad de Buenos Aires, Facultad de Farmacia y Bioquímica. (Argentina)
myr1710@yahoo.com, chponteville@gmail.com

RESUMEN: En este trabajo se busca analizar el rendimiento académico de los alumnos de Matemática y Bioestadística del año 2014, en la Facultad de Farmacia y Bioquímica de la Universidad de Buenos Aires. Este rendimiento académico se analizará teniendo en cuenta los resultados de las Pruebas Diagnósticas previas a la cursada y los resultados de los exámenes parciales y promocionales de los cursos impartidos en 2014.

Se realizó un análisis descriptivo de los datos y se estudió la independencia entre las variables estudiadas, entre ellas la asignatura, el cuatrimestre de curso, las calificaciones obtenidas en pruebas diagnósticas, exámenes regulatorios y exámenes promocionales. El objetivo central de este trabajo consistió en relevar este diagnóstico para, eventualmente, elaborar estrategias didácticas para el mejoramiento del dictado de las asignaturas antes mencionadas.

Palabras clave: rendimiento académico, matemática, bioestadística

ABSTRACT: This work seeks to analyze the academic performance of Mathematics and Biostatistics students in the year 2014, in the Faculty of Pharmacy and Biochemistry, at the University of Buenos Aires. Their academic performance will be analyzed taking into account the marks obtained in the diagnostic tests as well as the mid-course assessment exams, and end-of-year exams of the courses given in the year 2014. We made a descriptive analysis of data, and studied the independent nature of variables, among of which were: the subject, the term, the marks obtained in the diagnostic tests, in mid-course assessment exams, and in end-of-year exams. This work was aimed at changing this diagnosis to elaborate, at some point, didactic strategies for the improvement of Mathematics and Biostatistics teaching.

Key words: academic performance, mathematics, biostatistics.

Marco referencial

En las últimas décadas, se ha planteado una serie de investigaciones centradas en el alumnado, para estudiar la efectividad y receptividad de diversas estrategias didácticas en el campo de la matemática y estadística (Shotwell, Apigian, 2015). Para ello es necesario obtener, en primera instancia, un diagnóstico de situación que dé cuenta del rendimiento promedio que demuestran los alumnos en cuanto al contenido disciplinar específico.

Con el fin de analizar el rendimiento académico de los alumnos que cursaron en ambos cuatrimestres del 2014, se analizaron los resultados de la Prueba Diagnóstica (Núñez, Ponteville, Castro, 2013), de los exámenes parciales y de los exámenes promocionales.

El análisis se efectuó en las asignaturas: Matemática y Bioestadística, impartidas por la Cátedra de Matemática en las carreras de Farmacia y Bioquímica de la Facultad de Farmacia y Bioquímica de la Universidad de Buenos Aires,

Siendo la organización de la estructura curricular de ambas carreras, la siguiente:

- ✓ Ciclo Básico Común (CBC): correspondiente al primer año y común a otras carreras de la Universidad de Buenos Aires
- ✓ Ciclo Común: común a ambas carreras, correspondiente al segundo y tercer año
- ✓ Ciclo Superior: correspondiente a la especialización, ciclo orientado a cada una de las carreras mencionadas, cuarto y quinto año

El dictado de la asignatura Matemática se realiza en ambos cuatrimestres, estando ubicada dentro de la currícula, en el primer cuatrimestre del segundo año, mientras que la materia Bioestadística se dicta en ambos cuatrimestres y los alumnos pueden cursarla cuando se encuentran en condiciones de cursar una asignatura del quinto cuatrimestre.

Objetivos

El objetivo central de este trabajo es obtener herramientas didácticas que contribuyan a mejorar la calidad del dictado de las asignaturas antes mencionadas, favoreciendo de este modo el desarrollo de habilidades intelectuales y analíticas de los alumnos (Ponteville, Núñez, Fernícola, Castro, 2016).

Los objetivos específicos planteados son:

- ✓ identificar patrones de rendimiento en las pruebas diagnósticas, según los grupos de ejercicios que las componen.
- ✓ recabar y analizar la información sobre las condiciones finales de los alumnos en las asignaturas cursadas.
- ✓ analizar patrones diferenciales en el rendimiento, entre asignaturas, entre cuatrimestres, y en relación con diferentes tipos de ejercicios disciplinares.

- ✓ reconocer las modificaciones a realizar en los procesos de enseñanza-aprendizaje, con el fin de obtener mejores resultados (Ponteville, Nuñez, Granchetti, Reynoso, Seifert, 2014).

Materiales y métodos

Para llevar a cabo el análisis anteriormente mencionado, se evaluaron los resultados provenientes de:

- ✓ las pruebas diagnósticas
- ✓ los cuatro exámenes parciales
- ✓ los dos exámenes promocionales
- ✓ los recuperatorios puntuales y el examen de regularización, para los alumnos que no hayan regularizado la asignatura en la instancia de exámenes parciales

La gran cantidad de alumnos que cursan las asignaturas anteriormente mencionadas hace que se deban tomar los exámenes en forma escrita.

Para regularizar la materia el alumno debe asistir por lo menos al 75% de las actividades obligatorias (en las que se toma asistencia) y además aprobar al menos 3 de los 4 parciales. Para promocionar tiene que aprobar además los parciales promocionales con notas que promedien al menos 7 puntos. Aquel estudiante que aprueba sólo 2 parciales puede rendir exámenes recuperatorios para alcanzar la regularización. Por último, el alumno que no alcance la regularidad con los exámenes recuperatorios o que, sin haberlos rendido, haya aprobado por lo menos 1 examen parcial, puede rendir el examen de regularización que consiste en una prueba que abarca todos los temas de la guía de trabajos prácticos desarrollados a lo largo del cuatrimestre. Los estudiantes que regularizaron las materias sin promocionar tendrán que ser evaluados mediante en un Examen Final que abarca todos los contenidos teórico-prácticos impartidos en el curso.

Los alumnos que rinden el primer parcial o asistieron a menos de 25% de las clases son categorizados como No Cursantes. Los alumnos que aprobaron a lo sumo dos exámenes (en cualquiera de las instancias antes mencionadas), se los califica como Desaprobados. De la misma manera se considera desaprobado a los que asistan a más del 25% pero menos del 75% de las clases.

El análisis de los datos se realizó teniendo en cuenta la metodología estadística adecuada en cada caso: análisis descriptivo, mediante frecuencias absolutas, frecuencias relativas y gráficos de barras; y pruebas de independencia, mediante el test de Chi cuadrado. Para esto último se utilizó un nivel de significación del 5%.

Desarrollo

Prueba Diagnóstica

Los alumnos inscriptos en la asignatura Matemática en el primer cuatrimestre fueron 649, mientras que los que rindieron la Prueba Diagnóstica 535. En el segundo cuatrimestre los inscriptos fueron 425 y los que rindieron la Prueba Diagnóstica 312.

Para la asignatura Bioestadística los alumnos inscriptos, en el primer cuatrimestre, fueron 410 y en el segundo 275 mientras que los que rindieron la Prueba Diagnóstica 269 y 202, respectivamente.

Las diferencias que hay entre el número de alumnos inscriptos y los que asisten a la Prueba Diagnóstica se debe a la dinámica de inscripción de los alumnos en las asignaturas del mismo cuatrimestre.

Por ejemplo, en el caso de Bioestadística los alumnos priorizan aquellas materias que le podrían acarrear un problema posterior debido a las correlatividades que involucran.

Para Matemática la situación no es la misma, en general el alumno no deja la asignatura sino la carrera o todas las asignaturas del cuatrimestre, debiéndose en general a situaciones de índole personal y no estratégico.

En referencia a la Prueba Diagnóstica, la misma fue realizada por los alumnos en la primera clase práctica de cada una de las asignaturas, como un medio para conocer mejor las competencias que los alumnos poseían acerca de diferentes estrategias necesarias para la adquisición de los contenidos propios de las asignaturas analizadas.

La Prueba Diagnóstica consta de 10 ejercicios que fueron redactados teniendo en cuenta notación propia de la Matemática y de la Bioestadística y representaciones esquemáticas de información. Cada uno de los ejercicios que la conforman se evalúa de la siguiente manera: Bien, Mal, No Resuelve. La prueba se considera Aprobada si el alumno realiza por lo menos 4 de los 10 ejercicios en forma correcta.

Exámenes Rendidos a lo Largo de la Cursada

En relación a los 4 exámenes parciales, cada examen constaba de cuatro ejercicios basados en los contenidos de la asignatura, utilizando el material propuesto por la cátedra y la bibliografía recomendada. Cada uno de estos exámenes se consideró Aprobado si el alumno realiza en forma correcta, por lo menos 2 de los 4 ejercicios.

Los dos exámenes promocionales contenían los 4 ejercicios del segundo y cuarto parcial, respectivamente, y 2 ejercicios de contenidos teórico/conceptuales.

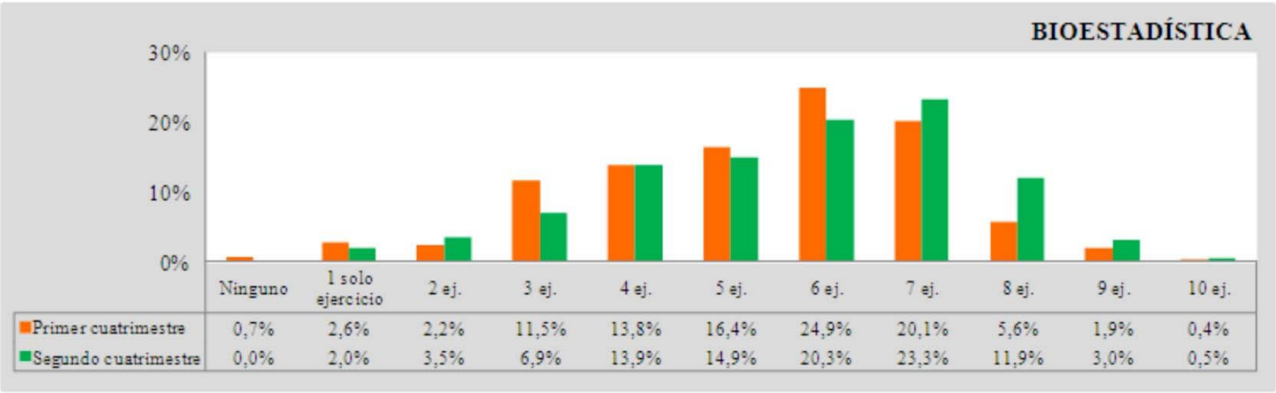
Analisis y resultados

Prueba Diagnóstica

Para las Pruebas Diagnósticas se realizaron dos tipos de análisis diferentes: el primero, agrupando a los alumnos según la cantidad de ítems bien resueltos, y el segundo, dividiendo los ítems según áreas temáticas, y dentro de cada área temática se consideraron la cantidad de ejercicios bien resueltos.

Como puede verse en los gráficos 1 y 2 la mayoría de los alumnos de Bioestadística resolvieron correctamente entre 6 y 7 ejercicios, en ambos cuatrimestres, mientras que en Matemática la mayoría de los alumnos resolvieron Bien entre 2 y 4 ejercicios.

AÑO 2014



	Ninguno	1 solo ejercicio	2 ej.	3 ej.	4 ej.	5 ej.	6 ej.	7 ej.	8 ej.	9 ej.	10 ej.
Primer cuatrimestre	0,7%	2,6%	2,2%	11,5%	13,8%	16,4%	24,9%	20,1%	5,6%	1,9%	0,4%
Segundo cuatrimestre	0,0%	2,0%	3,5%	6,9%	13,9%	14,9%	20,3%	23,3%	11,9%	3,0%	0,5%

Figura 1. Distribución del Porcentaje de Alumnos según la cantidad de ejercicios realizados correctamente en la Prueba Diagnóstica

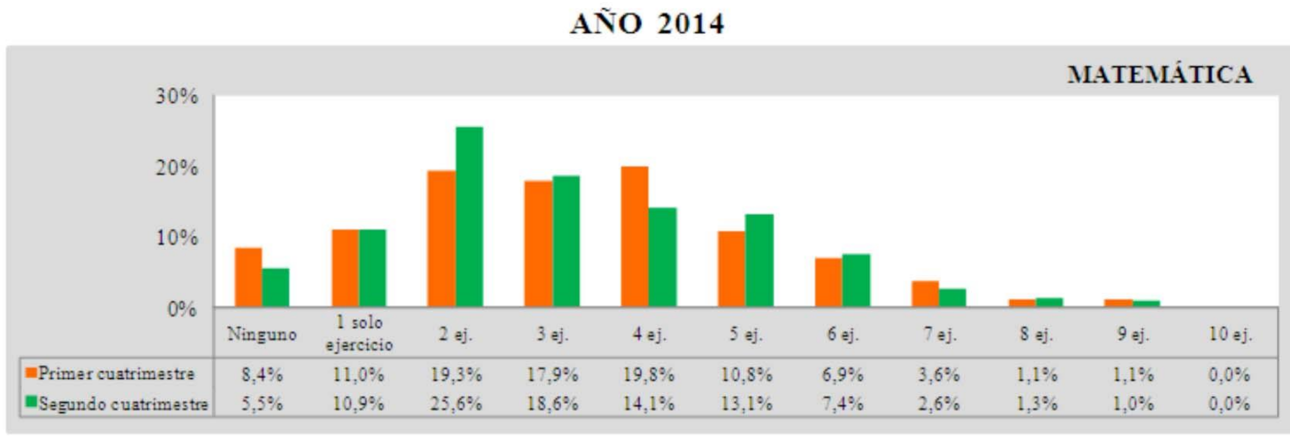


Figura 2. Distribución del Porcentaje de Alumnos según la cantidad de ejercicios realizados correctamente en la Prueba Diagnóstica

En la Tabla 3 se muestran las áreas temáticas utilizadas para el segundo análisis.

Tabla 3. Agrupación de ejercicios de las Pruebas Diagnósticas según áreas temáticas

BIOESTADÍSTICA		MATEMÁTICA	
Grupo de Ejercicios	**Área temática**	**Grupo de Ejercicios**	**Área temática**
GB1	Operaciones aritméticas y algebraicas	**GM1**	Operaciones Algebraicas
GB2	Cálculo porcentual y proporcionalidad	**GM2**	Funciones (Lineal, Cuadrática y Exponencial)
GB3	Derivadas e integrales	**GM3**	Estudio de funciones (Trigonométricas y Homográficas)
		GM4	Derivadas e integrales

En la Tabla 4 se analizan los resultados obtenidos, considerando cada una de las áreas temáticas antes descriptas.

Tabla 4. Número de alumnos que, según materia y área temática, resolvieron en forma correcta cierta cantidad de ejercicios

Grupo de Ejercicios	Cantidad de Ejercicios Resueltos Correctamente				
BIOESTADÍSTICA					
GB1	Ninguno	Uno	Dos	Tres	
	30	34	336	71	
GB2	Ninguno	Uno	Dos	Tres	Cuatro
	24	83	98	119	147
GB3	Ninguno	Uno	Dos	Tres	
	114	283	61	13	
MATEMÁTICA					
	Ninguno	Uno	Dos	Tres	
GM1	88	231	412	116	
GM2	305	282	200	60	
GM3	Ninguno	Uno	Dos		
	576	260	11		
GM4	707	100	40		

Como puede verse en la tabla anterior, para la asignatura Bioestadística, la mayoría de los alumnos (71,3%) resuelven correctamente dos de los tres ejercicios correspondientes al área temática de operaciones algebraicas, mientras que en los temas de derivadas e integrales sólo el 13% resuelven dos ejercicios correctamente.

La proporción de alumnos con tres ejercicios Bien, resultó, para ambas áreas temáticas despreciable en relación a la cantidad de alumnos que respondieron Bien dos.

En el caso de los temas vinculados a cálculo porcentual y proporcionalidad, el 77% de los alumnos contestaron Bien entre dos y cuatro ejercicios.

Para la asignatura Matemática, en relación al tema de operaciones algebraicas, el 48% de los alumnos resolvieron Bien dos ejercicios. Esto evidencia, que, en el caso de las operaciones algebraicas, cuyos conceptos se refuerzan en esta asignatura, se logra un mejor rendimiento académico a través de las estrategias utilizadas.

Mientras que en temas vinculados a derivadas e integrales sólo el 4,7% resuelven dos ejercicios Bien. Si bien se mejora el rendimiento, este cambio no resultó eficiente. Con lo cual se modificarán las estrategias del proceso de enseñanza-aprendizaje, con el fin de obtener mejores resultados.

El 68% de los alumnos no resuelve ninguno de los ejercicios correspondientes a análisis de funciones homográficas y trigonométricas, y, en el caso de funciones lineal, cuadrática y exponencial, el 69% responde a lo sumo un ejercicio Bien.

Exámenes Rendidos a lo Largo de la Cursada

Teniendo en cuenta las instancias de aprobación descriptas anteriormente, en el Gráfico 5 se pueden visualizar los resultados académicos de las cursadas de ambas asignaturas.

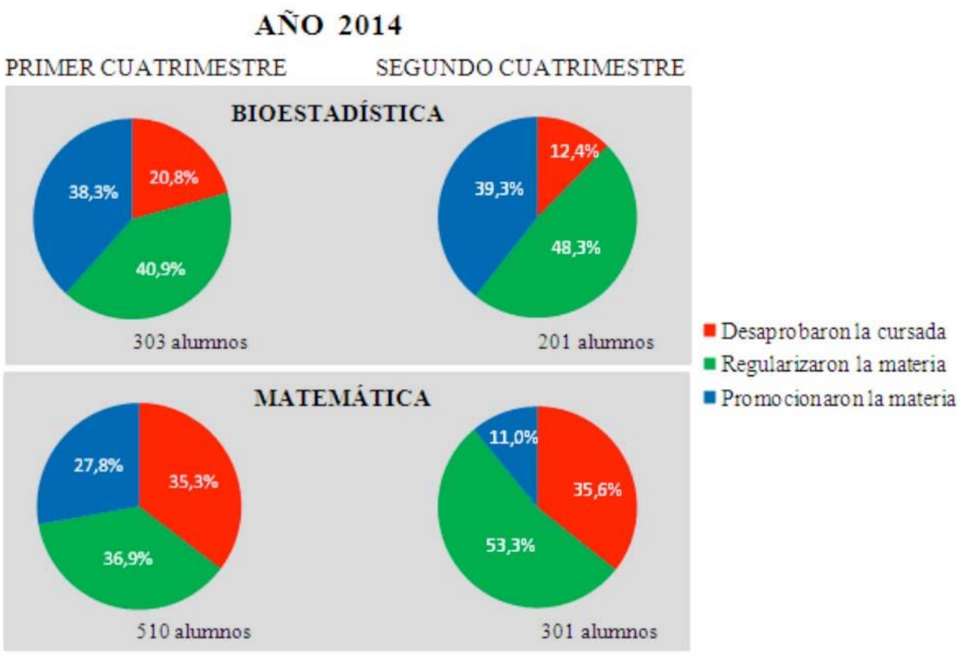


Figura 5. Resultados académicos globales

Como puede observarse en el gráfico 5, de la cantidad de alumnos que cursaron Bioestadística en el segundo cuatrimestre, regularizaron la asignatura, alrededor del 90%, de los cuales, promocionaron alrededor del 50%.

Mientras que para la asignatura Matemática regularizaron el 66% de los alumnos y promocionaron sólo el 11%.

Examen de Regularización

Los alumnos que solo aprueban 1 o 2 parciales de la asignatura, tienen la posibilidad de regularizar la misma rindiendo un examen de regularización, que consta de ocho ejercicios, de los cuales deben resolver Bien cinco, para poder aprobar.

En *Bioestadística*,

- ✓ En condiciones de rendir el examen de regularización con sólo un parcial aprobado:

  Primer cuatrimestre: 36 alumnos

  Aprobaron 13,9%, desaprobaron 13,9% y el 72,2% no se presentó.

  Segundo Cuatrimestre: 12 alumnos

  Aprobaron 12%, desaprobaron 25% y el 75% no se presentó.

- ✓ En condiciones de rendir el examen de regularización con dos parciales aprobados:

  Primer cuatrimestre: 54 alumnos

  5 rindieron y 3 aprobados.

  Segundo Cuatrimestre: 28 alumnos

  2 rindieron y 1 regularizó la materia.

En *Matemática*,

- ✓ En condiciones de rendir el examen de regularización con sólo un parcial aprobado:

  Primer cuatrimestre: 91 alumnos

  Aprobaron 9,9%, desaprobaron 37,4% y el 52,7% no se presentó.

  Segundo Cuatrimestre: 44 alumnos

  Aprobaron 4,5%, desaprobaron 36,4% y el 59,1% no se presentó.

- ✓ En condiciones de rendir el examen de regularización con dos parciales aprobados:

  Primer cuatrimestre: 105 alumnos

  28 rindieron y 9 aprobaron.

  Segundo Cuatrimestre: 60 alumnos

  12 se presentaron al examen de los cuales 4 regularizaron.

Se aplicó un test de independencia con el fin de analizar la relación entre la condición final del alumno y el ciclo electivo elegido, se concluyó que la condición final del alumno depende del cuatrimestre para ambas Asignaturas, como puede visualizarse en la Tabla 6.

Tabla 6. Resultados del Test de Independencia

Asignatura	Valor estadístico (Chi cuadrado Pearson)	p-valor
Bioestadística	6,35	0,0419
Matemática	36,84	< 0,0001

Finalmente, para relacionar el resultado obtenido en la Prueba Diagnóstica y la condición final de la cursada se empleó un test de independencia y se concluyó que la condición final del alumno depende del resultado obtenido en la Prueba Diagnóstica para la Asignatura Matemática, como puede visualizarse en la Tabla 7.

Tabla 7. Resultados del Test de Independencia

Asignatura	Valor estadístico (Chi cuadrado Pearson)	p-valor
Matemática Primer Cuatrimestre	44,58	< 0,0001
Matemática Segundo Cuatrimestre	30,58	< 0,0001

Para el análisis de los datos se utilizó el programa estadístico Infostat – Profesional Versión 2014 p.

Conclusiones

Como se vio en el apartado anterior, los resultados obtenidos por los alumnos en las Pruebas Diagnósticas en la asignatura Bioestadística, muestran una evolución tanto en el conocimiento de los contenidos de Matemática como en el abordaje de situaciones problemáticas.

En el caso de la asignatura Matemática, los resultados de las Pruebas Diagnósticas no fueron satisfactorios, los motivos del bajo rendimiento son diversos: la materia se dicta en el tercer cuatrimestre de la carrera, primer cuatrimestre de la facultad y si bien algunos de los contenidos de la Prueba Diagnóstica los estudiaron en Matemática del Ciclo Básico Común, y otros los adquirieron en la enseñanza media, ambas instancias no logran la nivelación necesaria debido a la heterogeneidad académica de las sedes e instituciones, respectivamente. Además, algunos de los alumnos no poseen estrategias de estudio eficientes.

Debido a lo anteriormente expuesto, se tomó la decisión de dictar un Curso Introductorio que abarque los siguientes temas: Operaciones Algebraicas, Derivadas e Integrales. El mismo se dictará una semana antes del comienzo del cuatrimestre con el fin de lograr finalmente una mayor nivelación del grupo de estudiantes.

En referencia al Examen de Regularización, en ambas asignaturas, se observa que este no parece ser el procedimiento más adecuado para remediar un rendimiento académico insatisfactorio, ya que la mayoría de los alumnos no se presentan a rendirlo, y, los que lo hacen, en su mayoría no terminan aprobando la materia. En relación a este punto, la propuesta será proponer la evaluación de los alumnos a través de recuperatorios puntuales, es decir, que cada examen tenga la posibilidad de ser recuperado.

En relación a la asignatura Bioestadística, la gran heterogeneidad existente en el curso, nos obliga a modificar estrategias de enseñanza de forma tal que la asignatura sea comprensible y de utilidad para todos los alumnos. La gran heterogeneidad se hace presente en este curso, ya que, los alumnos pueden cursar la asignatura a partir del quinto cuatrimestre y hasta el final de la carrera. Esto se logra incorporando ejemplos de utilidad para los futuros profesionales, cuyos contenidos no utilicen, en profundidad, temas relacionados con asignaturas que se dictan hacia el final de la carrera.

Referencias bibliográficas

Núñez, M., Ponteville, Ch.; Castro, L. (2013). *Pruebas diagnósticas en el aula de bioestadística*. Trabajo presentado en las sesiones del Congreso de Docencia Universitaria organizado por la Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires.

Ponteville, Ch., Nuñez, Granchetti, H., Reynoso, M., & Seifert, E. (2014). Enseñar Bioestadística en carreras de ciencias de la salud. En P. Lestón (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 27* (pp. 1265-1271). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ponteville, Ch, Núñez, M., Fernicola, M. & Castro, M. (2016). Análisis estadístico de resultados académicos. *Acta de la XI Conferencia Argentina de Educación Matemática,* (pp. .10-19). Buenos Aires: Sociedad Argentina de Educación Matemática.

Shotwell, M.; Apigian, Ch. (2015). Student Performance and Success Factors in Learning Business Statistics in Online vs. On-ground Classes using a Web-Based Assessment Platform. *Journal of Statistics Education, 23*(1). Disponible en www.amstat.org/publications/jse/v23n1/shotwell.pdf

INNOVACIÓN METODOLÓGICA EN LA EDUCACIÓN SUPERIOR PARA FAVORECER LA COMPRENSIÓN

Lidia Beatriz Esper, María Graciela Juárez
Facultad de Ciencias Naturales, Universidad Nacional de Tucumán. (Argentina)
liesper@yahoo.com.ar, grajuarez6@yahoo.com.ar

RESUMEN: Uno de los factores que causa dificultades en el cursado de la asignatura Matemática, en la carrera de Geología de la Universidad Nacional de Tucumán, es la escasa formación básica con la que llegan los alumnos a la universidad. También la importante reducción horaria, producida por cambios curriculares ha profundizado esta situación. Preocupadas por la manera en que aprenden nuestros alumnos y su rendimiento, decidimos elaborar una propuesta didáctica en el marco de la Enseñanza para la Comprensión abordando funciones exponenciales y logarítmicas. En ella intentamos que nuestros alumnos, comprendan, sepan aplicar y transferir lo aprendido a diferentes contextos, favoreciendo un aprendizaje reflexivo, donde se dé lugar primordial al pensamiento, a la comprensión, y no a la memoria. Intentamos, además, aportar a los colegas una herramienta de planificación y de diseño que busca fomentar la comprensión del tema.

Palabras clave: propuesta didáctica, enseñanza para la comprensión; funciones exponencial y logarítmica.

ABSTRACT: The poor basic education the students have when they enter university is one of the factors that cause the shortcomings they face to study mathematics in the Geology degree course at the National University of Tucumán. A significant reduction in hours, due to the curricular changes, has deepened such difficulties. Being concerned about the way our students learn, as well as their academic performance, we have decided to elaborate a didactic proposal, in the framework of Teaching for Understanding, focused on exponential and logarithmic functions. Such proposal is intended to make the students understand, and learn to apply and transfer what they have learnt to different contexts, which favors a reflexive learning by placing essential emphasis on thinking and understanding, instead of on memorizing. We also try to provide our colleagues with a planning and design tool to foster the comprehension of this topic.

Key words: didactic proposal, teaching for understanding, exponential and logarithmic functions.

Introducción

Numerosas investigaciones realizadas en Educación Superior dan cuenta de la existencia de importantes deficiencias en la formación matemática de los ingresantes universitarios, los que poseen un conocimiento frágil y un pensamiento pobre (Aiello, 2007; Zagarese, Tannure, Aguirre, Pérez Carmona y Esper, 2009)

En particular, en la Facultad de Ciencias Naturales e I.M.L. de la UNT, facultad en la que nos desempeñamos como docentes de la asignatura Matemática I y Matemática II (Plan 1974) y Matemática (Plan 2012) correspondiente al Ciclo Básico de la carrera de Geología, observamos un alto porcentaje de alumnos que presentan escasa formación básica y dificultades para la comprensión de diferentes conceptos matemáticos. Sumado a esto, los procesos de cambio curricular en marcha, de esta carrera, implicaron una reducción importante de las horas de esta asignatura, profundizando dicha situación. Frente a esta problemática, vimos la necesidad de promover un aprendizaje que satisfaga las características de un conocimiento generador, de un conocimiento transformacional; de un conocimiento que no se acumula, sino que actúa enriqueciendo el perfil profesional de los estudiantes. Para ello, decidimos incursionar nuestra práctica docente, en el marco de la Enseñanza para la Comprensión (EpC), elaborando propuestas pedagógicas-didácticas para abordar distintas unidades de la materia. En ellas intentamos que nuestros alumnos, recuerden, sepan aplicar y transferir lo aprendido a diferentes contextos, favoreciendo un aprendizaje reflexivo, donde se dé lugar primordial al pensamiento, a la comprensión, y no a la memoria.

El objetivo de este trabajo es aportar a los colegas una herramienta de planificación y de diseño de práctica de aula, que busca fomentar la comprensión del tema “Función Exponencial y Logarítmica”, a través de los cuatro elementos de la comprensión que plantea la EpC: *tópicos generativos*, *metas de comprensión*, *desempeños de comprensión,* y *valoración continua y evaluación final*, con el fin de potencializar las cuatro dimensiones de la comprensión: contenido, métodos, propósitos y formas de comunicación.

La importancia del tópico seleccionado está dada por sus aplicaciones en el campo de la Geología, por ello creamos situaciones que requieran del uso del conocimiento de conceptos, propiedades y fenómenos, a través de la producción de tareas y de problemas reales propios de la disciplina, con el fin de promover la interacción con el mundo real.

Marco de Referencia

Entre los reportes de investigación sobre la función logarítmica, se identifican los trabajos que se enfocan en lo cognitivo (Dubinsky, 1992) esbozando algunas explicaciones sobre esta problemática, otros que reflexionan sobre la historia de esta noción (Gonzales y Vargas, 2007) sin intencionalidades escolares, y los que se preocupan por las dimensiones cognitiva y epistemológica sobre la didáctica y lo sociocultural con respecto a la función exponencial y/o logarítmica (Ferrari y Farfán, 2009; Abrate y

Pochulu, 2007). El eje estrictamente didáctico lo constituye Sierpinska (1992) quien identifica obstáculos epistemológicos y actos de comprensión en la enseñanza y aprendizaje del tema. Todas estas propuestas son aportes válidos para la enseñanza de la función exponencial y logarítmica; y pueden ser tenidas en cuenta cuando se trabaja con un marco conceptual como la EpC.

> La EpC surge de la vivencia de los profesores en el aula; por lo tanto, la teoría y la práctica están estrechamente ligadas, pero claramente diferenciadas, de tal manera que la teoría ilumina la práctica y la práctica nutre la teoría. Con este paradigma de trabajo, no se pretende que los profesores copien un modelo sino que exploren y reflexionen sobre sus propios contextos, realidades, intereses y necesidades para transformar sus prácticas educativas (Acevedo, Jaramillo, Esteban, 2013, p.84).

La meta de la propuesta didáctica es mejorar la comprensión de la función exponencial y logarítmica, mediante el uso de los cuatro elementos de la comprensión que plantea la EpC, ya que permite:

- acertar en la selección de lo que realmente vale la pena comprender, organizando el currículo alrededor de *Tópicos Generativos* centrales y que sean comprensibles e interesantes tanto para estudiantes como para docentes;
- clarificar a los estudiantes lo que deben comprender; formulando *Metas de Comprensión* explícitas, centradas en ideas fundamentales de cada tema;
- favorecer en los estudiantes la asimilación de las metas de comprensión, planteando *Desempeños de Comprensión* que comprometen a los educandos y les exija profundizar, sintetizar y aplicar lo que comprendieron y aprendieron;
- medir la comprensión mediante la *Evaluación Continua* de cada desempeño, siendo sus criterios conocidos por los estamentos que están directamente vinculados con las metas de comprensión.

Los *Tópicos Generativos* son temas, cuestiones, conceptos, ideas que ofrecen profundidad, significado, conexiones y variedad de perspectivas en un determinado nivel, suficiente como para apoyar el desarrollo de comprensiones más profundas por parte de los estudiantes. Responde, además, el interrogante ¿Qué es lo realmente importante enseñar?

Dichos tópicos cumplen, entre otras, las siguientes características: son centrales para uno o más dominios o disciplinas; suscitan la curiosidad de los estudiantes, son de interés para los docentes; son accesibles, y ofrecen la oportunidad de establecer numerosas conexiones.

Las *Metas de Comprensión* son afirmaciones que expresan lo más importante para los estudiantes en un periodo académico y/o durante el curso. Aquí, es de vital importancia formularse la pregunta ¿Qué vale la pena enseñar? (Blythe y Outerbridge, 2006)

Las metas de comprensión manifiestan de forma específica y se socializan abiertamente para poder concluir y orientar el tema que el docente quiera que sus estudiantes comprendan; por lo tanto deben acordarse en conjunto con los alumnos. Estas pueden subdividirse en dos clases:

i) Metas de Comprensión de la unidad. Estas deben cumplir con los planteamientos generales de las metas de comprensión y siempre, como metas particulares que son, deben estar ligadas a las metas abarcadoras del curso.

ii) Metas de Comprensión Abarcadoras o Hilos Conductores. Describen las comprensiones más importantes que deberían desarrollar los estudiantes durante el curso.

Para planear los hilos conductores o metas abarcadoras se debe responder de manera objetiva la pregunta: ¿Cuáles son las cosas más importantes que se pretenden llevar consigo los estudiantes al terminar el año?

Los Desempeños de Comprensión responden a la pregunta: ¿cómo debemos enseñar para comprender? (Stone, 1988). Es decir, son las actividades que desarrollan y demuestran comprensión, haciendo que los estudiantes utilicen lo que conocen en formas y contextos diferentes, por lo tanto, deben evidenciarse en acciones con las cuales los estudiantes muestran su pensamiento y comprensión; deben cumplir con las siguientes características:

- se deben diseñar en forma concatenada y sistemática con las metas tanto de unidad como abarcadoras y con los tópicos generativos;
- se elaboran partiendo de las ideas previas del estudiante, cuestionándole sobre sus dudas e inquietudes;
- la formulación concatenada de las actividades debe fundamentarse en la orientación investigativa, análisis de tópicos, búsqueda de pensar en lo estudiado y en los proyectos prácticos evidenciables;
- deben constituirse en el eje central del proceso de aprendizaje;
- muestra al docente el nivel de pensamiento del estudiante;
- demuestra la aplicación de las redes conceptuales;
- permiten la reflexión y retroalimentación de todos los sujetos involucrados en el desarrollo del estudiante.

Los desempeños se plantean de manera gradual de acuerdo a un grado de complejidad creciente: *preliminares*, *investigación guiada* y *síntesis*.

Los *desempeños de comprensión preliminares* tienen la finalidad de que los estudiantes exploren los temas antes de darles la información. Por lo general, aparecen al inicio de la unidad curricular y sirven para ubicar al estudiante en el dominio del tópico generativo, quien verá la relación de éste con sus intereses. También le permitirá al docente identificar conocimientos previos y posibles errores conceptuales de los estudiantes.

Los *desempeños de investigación guiada* sirven para que los estudiantes se centren en problemas y cuestiones específicas, relacionadas con el tópico generativo y las metas de comprensión. La guía del profesor ayuda a los estudiantes a aplicar conceptos y métodos disciplinares, a integrar sus conocimientos y a poner en práctica una comprensión cada vez más elaborada y avanzada promoviendo la reflexión sobre la acción.

Los *desempeños de síntesis (o proyectos finales)* exigen a los estudiantes integrar las distintas comprensiones desarrolladas en los desempeños previos y, por ende, mostrar con claridad el dominio que tienen de las metas de comprensión establecidas. Es la última etapa que permite sintetizar y demostrar. En este tercer elemento los profesores indagan: ¿Qué deben hacer los estudiantes para desarrollar y demostrar su comprensión?

El cuarto elemento fundamental de este modelo pedagógico es la Valoración Continua, su objetivo primordial es que el estudiante aprenda con vista a comprender. La valoración no debe centrarse en la calificación y en la responsabilidad del alumno, que aunque son elementos importantes, no son útiles para el verdadero aprendizaje. Es el proceso en el cual los estudiantes obtienen retroalimentación continúa sobre los desempeños de comprensión con el fin de mejorarlos y profundizarlos. La valoración continua responde a la pregunta: ¿Cómo saben los estudiantes y docentes lo que comprenden los estudiantes y cómo pueden desarrollar una comprensión más profunda?

El marco de la EpC no es rígido, constituye una serie de pautas generales, es decir, es una estructura lo suficientemente flexible para satisfacer las necesidades del maestro en el aula. Por lo tanto, permite apoyar al estudiante durante su trayectoria en el transcurso del aprendizaje. La valoración continua cumple con las siguientes características:

- es la permanente autoevaluación y reflexión que realizan los estudiantes y docentes;
- se realiza de forma socializada con los estudiantes, docentes y compañeros;
- se aplican a cada uno de los desempeños de comprensión dando lugar a la crítica, el análisis y la autoconstrucción personal, intelectual y social.

A continuación, se presenta el diseño de la propuesta didáctica, siguiendo para su construcción, los cuatro elementos propuestos por la EpC que se explicaron anteriormente. Para el desarrollo de algunas actividades se usó el aula virtual, mediante la plataforma Moodle, con la cual se trabaja desde el año 2012.

Diseño y Descripción de la Propuesta Didáctica

(Tópico Generativo) *A lo largo de mi carrera, ¿en qué situaciones relaciono las funciones exponenciales y logarítmicas con el contexto geológico?*

(Hilo Conductor) *Los alumnos comprenderán el comportamiento de las funciones exponenciales y logarítmicas*

(Indicadores de Desempeño) Los alumnos comprenderán:

- mediante la lectura e interpretación de gráficos, situaciones que responden a modelos exponenciales y logarítmicos;
- cómo resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas, haciendo uso de definiciones y propiedades de estas operaciones;
- cómo plantear y solucionar situaciones problemas en contextos geológicos.

Estas metas serán sociabilizadas con los estudiantes en la portada del tema Funciones exponenciales y logarítmicas prevista en el aula virtual, también estarán informados de los desempeños requeridos y los criterios de evaluación.

(Desempeños de Comprensión) Para llevar adelante el tópico seleccionado se aplicó una secuencia didáctica de tres etapas de desempeños de comprensión:

1. Etapa de exploración: En esta etapa los estudiantes pondrán en práctica sus comprensiones anteriores, de manera de obtener información sobre sus propias experiencias y saberes previos.

a. La primera actividad será impartida en el aula virtual, y se ofrecerá una colección de cuadros que involucran diferentes modelos funcionales: gráficos cartesianos, enunciados de situaciones problemáticas, expresiones algebraicas o tablas de valores. Con ellos, los estudiantes, deberán responder a la consigna: *Relacionar* los gráficos con las situaciones y fórmulas que crean que se correspondan, y responder a cuestiones sobre características de la función (dominio, imagen, crecimiento o decrecimiento, máximos o mínimo, pertenencia de puntos, puntos de cortes, etc.). Reunidos en pequeños grupos, los alumnos deberán d*iseñar* un afiche con la red de relaciones encontradas, para que lo *expongan* y *argumenten* brevemente su trabajo en forma oral.

En una clase presencial se realizará la puesta en común, del trabajo realizado, detectándose así los conocimientos previos respecto a las características generales de una función. El docente intervendrá para marcar errores, aclarar dudas, ajustar el proceso de enseñanza aprendizaje y evaluará el grado de participación de los estudiantes.

b. Mediante una lluvia de ideas y con los aportes recibidos de los alumnos se establecerá la relación entre el concepto de logaritmo de un número, su valor y relación con la potencia. Luego se propone el cálculo de potencias y diferentes tipos de logaritmos que den lugar al cambio de bases y al uso de calculadoras; con la participación oportuna del docente.

Cada alumno elaborará un resumen teórico de los conceptos vistos, lo envía al aula virtual.

(Criterios de Valoración) Presentación del trabajo completo con los ejercicios resueltos; claridad y coherencia de los conceptos presentados; nivel de fundamentación de sus aportes; rol y grado de participación en el trabajo grupal.

2. Etapa guiada: En esta etapa, se pondrá énfasis en habilidades básicas tales como la observación, el registro preciso de datos y la síntesis de información de fuentes múltiples, alrededor de una consigna específica. Esta etapa se llevará a cabo mediante la asistencia del docente que guía al alumno en la aplicación de conceptos y métodos, en la integración de su creciente cuerpo de conocimientos y en la puesta en práctica de una comprensión cada vez más compleja.

a. En el aula virtual, se propondrá a los estudiantes que, luego de investigar en diferentes fuentes de información, respondan a las siguientes interrogantes:

¿Cuáles son las funciones exponenciales y logarítmicas? ¿Qué fenómenos reales pueden ser explicados mediante estas funciones?

La investigación estará acompañada con actividades de completación, análisis, verdadero o falso, etc., con el objeto de hacer una lectura más profunda del tema.

En el próximo encuentro y con el fin de establecer el grado de avance en las metas propuestas y sociabilizar lo investigado, se realizará un cuadro comparativo, caracterizando cada una de estas funciones y estableciendo las relaciones detectadas, con la colaboración de toda la clase. En esta instancia, el docente presentará aplicaciones en el campo geológico que no hayan surgido de la búsqueda de los estudiantes. Teniendo en cuenta el uso de estas funciones en distintas áreas geológicas (sismología, hidrografía, petrología, etc.) se les propondrá a los alumnos seleccionar un área de interés, en la cual profundizaran resolviendo situaciones problemáticas.

b. En clase, se les da a los estudiantes una guía de actividades con ejercicios intra y extra matemáticos, que deberán resolverlos individualmente en horarios fuera de clase.

Actividad de coevaluación: los estudiantes divididos en grupos de cuatro, compararán sus respuestas y realizarán las correcciones pertinentes (evaluación de pares). Se busca que ellos sean críticos respecto de su trabajo y el de sus compañeros, siguiendo los criterios de corrección fijados por el docente. Las producciones finales deberán ser presentadas.

c. Actividad extra. Investigar: ¿qué son las escalas logarítmicas?

En el aula virtual, deben acceder y visualizar los archivos y videos propuestos. Luego el alumno desarrollará una guía de actividades para representar en escalas convenientes, datos reales de distintas áreas de geología, que será subido al aula virtual, para su evaluación.

A medida que se avance en la realización de estas actividades de exploración, los estudiantes comenzarán a investigar la temática elegida de un área geológica, para realizar su proyecto. El docente irá sociabilizando los errores detectados.

(Criterios de Valoración) Desarrollo de la actividad de forma completa y correcta; riqueza y veracidad de las relaciones entre conceptos; variedad y complejidad en las situaciones presentadas; grado de participación y nivel de fundamentación de sus aportes.

3. Proyecto final de síntesis: En esta etapa los alumnos demostrarán el dominio de las metas de comprensión establecidas. Está pensado con la intención de que el estudiante tenga contacto, desde los primeros años de su carrera, con publicaciones de trabajos de investigación realizados por geólogos; de tal manera de iniciarlo en la primera fase de la actividad de investigación que debe acompañar a todo profesional capacitado y actualizado. Además pretende fortalecer el concepto de aprendizaje cooperativo, con grupos heterogéneos u homogéneos, en los cuales se puedan establecer una interdependencia positiva, con igual participación, que fomente la responsabilidad individual, y que promueva la interacción simultánea de todos los alumnos (Kagan, 1988).

En esta instancia, los estudiantes formarán equipos de trabajo y realizarán una investigación sobre la actividad sísmica de una zona determinada de Argentina, en un período de cinco décadas. En el trabajo deberán comparar, la intensidad del sismo de mayor magnitud ocurrido en la zona de estudio, con la del sismo ocurrido el 28/12/1908, sucedido en Messina (Italia) de magnitud 7.5, el cual ocasionó 120.000 muertes. También serán inducidos para generar otras hipótesis como, por ejemplo, la relación entre distribución de frecuencia acumulada y magnitud de los registros de sismos observados.

Todos los grupos deberán presentar un trabajo escrito que será también expuesto en forma oral, utilizando distintos recursos (afiches, multimedia, folletos, videos, etc.). El docente evaluará las distintas etapas de desarrollo en la investigación, y la calidad y exposición de los resultados.

(Criterios de Valoración) Presentación oral (organización, coherencia y claridad en la exposición con la capacidad de responder preguntas o encontrar explicaciones alternativas para sus compañeros); presentación escrita (utilización correcta de notación y lenguaje matemático, presentación legible, sin errores conceptuales, ni de ortografía); trabajo grupal.

A modo de reflexión

Esta propuesta ha sido aplicada con interrupciones durante el año 2014, a una muestra piloto de veinte alumnos. Como evaluación de la misma sólo hemos considerado las respuestas de la encuesta que les realizamos a nuestros alumnos al finalizar el curso. Esto con el objetivo de hacerlos partícipes tanto en la evaluación como en los posibles cambios de la metodología impartida.

Algunas de las conclusiones extraídas de la encuesta, con respuestas del 80% de los alumnos de la muestra, fueron las siguientes:

- El 75% de los alumnos se conecta a Internet diariamente y el resto lo hace cada dos o tres días. La mayoría se conecta a través de su celular (87,5%).

- Al 94% de los encuestados les resulta muy fácil o medianamente fácil la utilización del campus virtual.
- Respecto a las características destacables de la propuesta, como positivas, marcaron: "el trabajo en grupo", "la forma colaborativa", "evaluación entre pares", como negativa sólo marcaron: "demasiadas actividades y/o lecturas".
- Respecto a lo que esperan de la/s docente/s, las palabras más nombradas fueron: paciencia, apoyo, ayuda, acompañamiento, comprensión, interacción, claridad, retroalimentación, dedicación. De todas, la más frecuente fue el pedido de "acompañamiento" para con ellos.

En el período lectivo 2015 esta propuesta ya no pudo ser evaluada, pues se la implementó combinada con la metodología de aula invertida.

A partir de estas opiniones y nuestras apreciaciones, estamos seguras que un buen camino hacia el aprendizaje de la matemática superior, es aquel que incentive las búsquedas bibliográficas, el estudio de problemas en contexto que despierten la curiosidad, el deseo por conocer vinculando contenidos, es decir planteando el gran desafío de pensar los aprendizajes más allá de las paredes del aula.

Referencias Bibliográficas

Abrate, R. S. y Pochulu, M. D. (2007). Los logaritmos, un abordaje desde la Historia de las Matemáticas y las aplicaciones actuales. En R. Abrate y M. Pochulu (Comps.). *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de Matemáticas*, (pp. 111 – 135). Villa María: Universidad Nacional de Villa María.

Acevedo Vélez, D.P.; Jaramillo López, C.M.; Esteban Duarte, P.V. (2013). Unidad curricular sobre el concepto de probabilidad en el contexto de la enseñanza para la comprensión. *Uni-pluri/versidad*, *13*(3).

Aiello, M. (2007). El aprendizaje en el aula universitaria. Una propuesta de innovación para intentar superar las dificultades. *Revista Cs. de la Educación*, *17*(30).

Blythe, T. y Outerbridge, D. (2006). Metas de Comprensión. *La Enseñanza para la Comprensión: Guía para el docente* (pp. 65-86). Buenos Aires: Paidós

Dubinsky, E. (1992). The nature of the process conception of function. En E.Dubinsky y G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* (pp 85-106), EEUU: Mathematical Association of America. Vol. 25

Ferrari Escolá, M. y Farfán Márquez, R.M. (2009). Una aproximación al primer momento de lo logarítmico con estudiantes de bachillerato. En P. Leston (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 22*, 1165-1173. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Gonzales, M. T. y Vargas, J. (2007): Segmentos de la Historia: La función logarítmica. *Matemáticas: Enseñanza universitaria*, *15*(2), 129 - 144.

Kagan, S. (1988): Cooperative Learning. San Juan Capistrano. California: Resources for Teachers. Logarithms. *Sciencie & Education*, *20*(1), 1 – 35.

Sierpinska A. (1992). On understanding the notion of function, En: Harel & Dubinsky, 199). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, Washington, DC: Mathematical Association of America, 25-58. Traducción al castellano (inédita) de Cesar Delgado.

Stone Wiske, M. (1998). *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica.* Paidós, Buenos Aires. Reedición 2003. pp 95-126.

Zagarese, J.F.; Tannure, B.; Aguirre, R.; Pérez Carmona, M.C. y Esper, L.B. (2009) Problemática de los aspirantes al nivel universitario. *Serie Monográfica y Didáctica* Vol.48 de la FCN e IML.

ESTUDIO DE UN CASO SOBRE EL ANÁLISIS DIDÁCTICO REALIZADO EN UN TRABAJO FINAL DE UN MÁSTER PARA PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN SERVICIO

Adriana Breda, Valderez Marina do Rosário Lima, Vicenç Font
PUCRS, PUCRS, Universitat de Barcelona (Brasil, España)
adriana.breda@ulagos.cl; valderez.lima@pucrs.br; vfont@ub.edu

RESUMEN: Este Reporte de Investigación muestra el análisis de las reflexiones hechas por un maestro de escuela básica, en la implementación de una propuesta didáctica que fue diseñada con el propósito de mejorar la enseñanza de las matemáticas que se enseñan comúnmente en ese nivel escolar en el contexto brasileño, a través de la introducción de las nociones de cálculo integral. Como resultado del análisis fue posible notar que los "criterios" empíricos que utiliza el maestro para reflexionar sobre su práctica está en correspondencia con los indicadores de idoneidad didáctica introducidas por el Enfoque Ontosemiótico. En este sentido se concluye que estos criterios pueden ser considerados como herramientas útiles para el diseño de los ciclos formativos que promueven la reflexión entre los maestros sobre sus propias prácticas.

Palabras clave: análisis didáctico, criterios de idoneidad, trabajo de fin de máster.

ABSTRACT: This research report shows the analysis of a basic-school teacher's reflections on the implementation of a didactic proposal which was designed to improve mathematics teaching by introducing integral calculus notions, at the basic-school level in the Brazilian context. The outcomes of such analysis allow noticing that the teacher´s empiric criteria to think about his practice are in correspondence with the didactic suitability indicators introduced by the onto-semiotic approach. In this sense, the authors conclude that such criteria can be considered useful tools for the design of the formative cycles that promote the reflection among the teachers about their own practices.

Key words: didactic analysis, suitability criteria, final report for a master's degree.

Introducción

La tendencia a una convergencia internacional en la planificación de los estudios universitarios y, en particular, a los que se refieren a la formación en maestría profesional centrado en la formación del profesorado, ha impulsado una serie de reformas en diferentes países, de manera que presenta un modelo organizado por un cierto refinamiento y la evolución en torno a las competencias profesionales. En el escenario de Brasil, la *Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes)* propone los Másteres Profesionales (MP) como un modo de Postgrado direccionado a la formación de profesionales en los diversos campos del conocimiento, mediante el estudio de técnicas, procesos o cuestiones que cumplen parte de la demanda del mercado de trabajo que proporciona, entre los objetivos principales, la formación de profesionales cualificados para el ejercicio de la práctica profesional avanzada y transformadora, dirigidas a mejorar la eficacia y eficiencia de las organizaciones públicas y privadas a través de la resolución de problemas apropiada, y la generación y aplicación de los procesos de innovación. En el contexto brasileño, en un intento de formar a los profesores de matemáticas en ejercicio, se inició en 2010, a través de la recomendación del *Conselho Técnico-Científico da Educação Superior da Capes*, el Máster Profesional en Matemáticas en la Red Nacional (PROFMAT) que constituye un postgrado, presencial y a distancia, ofrecido en todo el territorio nacional de Brasil, coordinado por la *Sociedade Brasileira de Matemática (SBM)*, que tiene como objetivo principal, atender a los profesores de matemáticas que trabajan en la educación primaria, especialmente en las escuelas públicas, que van al encuentro de la mejora en su formación profesional, con énfasis en el dominio profundo contenido matemático relevante para sus actividades de enseñanza (Brasil, 2013), teniendo en cuenta la misión estatutaria de la SBM "Fomentar la mejora de la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles".

El trabajo que se presenta aquí, forma parte de una investigación más amplia que tiene como finalidad investigar cuáles son los criterios y en qué medida son utilizados por los profesores (alumnos participantes del PROFMAT) para justificar que sus propuestas de trabajo final de maestría (TFMs) implican una mejora en la enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica. Para esto analizamos las memorias de los trabajos finales de dicho curso, dado que en ellas los profesores consideran trabajos de reflexión mediante los cuales deben demostrar que adquirieron los objetivos de la maestría, los cuales los capacita para dar continuidad a su actuación como docentes de matemáticas en la Educación Básica, ya que las directrices proporcionadas por PROFMAT demuestran que el trabajo final debe ser desarrollado de acuerdo con temas específicos del currículo de matemáticas de Enseñanza Básica, de forma innovadora y que tenga aplicación directa en el aula. El objetivo de este trabajo es presentar un estudio de caso mediante el cual se analiza el proceso de reflexión que realiza un profesor al que llamaremos Lopes, para mejorar la implementación de nuevos contenidos relacionados con la integral de Riemann en la Educación Básica, lo cual propone como TFM en el programa PROFMAT. Como resultado se evidencia que los criterios utilizados por el autor, de forma empírica, para justificar que su propuesta didáctica representa una mejora para la enseñanza de las matemáticas de Educación Básica, se corresponden en cierta medida con los *criterios de* *idoneidad didáctica* propuestos por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007).

Aspectos teóricos y metodológicos

En este trabajo partimos suponiendo que el trabajo de fin de master (TFM) es una tarea que implica, de forma implícita o explícita, un ejercicio de análisis didáctico, ya que en el TFM los profesores deben explicar una propuesta didáctica y justificar por qué esta significa una mejora para la enseñanza. Como referente teórico para analizar las reflexiones realizadas por los profesores sobre cómo mejorar su práctica docente, relacionada con la implementación de la propuesta didáctica que propusieron como parte de su TFM, utilizamos los *criterios de idoneidad didáctica* propuestos por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2011; Breda, Font y Lima, 2015):

1. Idoneidad Epistémica, para evaluar si las matemáticas que están siendo enseñadas son “buenas matemáticas”.
2. Idoneidad Cognitiva, para evaluar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de aquello que los alumnos saben, y después del proceso, si los aprendizajes adquiridos están cerca de aquello que se pretendía enseñar.
3. Idoneidad Interaccional, para evaluar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos.
4. Idoneidad Mediacional, para evaluar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción.
5. Idoneidad Emocional, para evaluar la implicación (intereses, motivaciones,…) de los alumnos durante el proceso de instrucción.
6. Idoneidad Ecológica, para evaluar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional (Font, Planas y Godino, 2010, p. 101).

La propuesta didáctica del profesor Lopes

El TFM de Lopes (2014) se titula “Un relato sobre la introducción de las sumas de Riemann en la Educación Básica”, y en él se presenta el diseño y la implementación de una propuesta didáctica para un grupo de estudiantes de tercer año de enseñanza básica, para introducir de manera intuitiva el cálculo integral por medio del estudio de las áreas de figuras geométricas planas. Lopes (2014) explica que es posible introducir en la enseñanza básica métodos y nociones del cálculo integral, de manera intuitiva, a partir de problemas de cálculo de áreas don contornos curvilíneos. Es decir, se trata de ampliar el cálculo de áreas que se estudia en la enseñanza básica a través del estudio del cálculo de áreas de figuras con contornos curvilíneos, mediante el uso de los métodos de Arquímedes y Riemann. En la siguiente sección presentamos el análisis que realiza el profesor Lopes de su implementación. Dicho análisis se basa en los criterios de idoneidad didáctica del EOS conforme se hizo en Breda y Lima (2016).

Análisis del profesor lopes sobre su implementación

Cuando los profesores tienen que reflexionar sobre una propuesta didáctica que significa un cambio o una innovación sobre su propia práctica, utilizan de manera implícita algunos *criterios de idoneidad didáctica*. El TFM de Lopes (2014) también nos ha permitido inferir el uso de algunos de estos criterios en la justificación y reflexión de la propuesta que realiza. A continuación evidenciamos en qué medida los criterios de idoneidad propuestos por el EOS son contemplados por el autor, de manera explícita e implícita, para tratar de justificar que su propuesta didáctica representa una mejora para la enseñanza de las matemáticas.

Idoneidad Epistémica

De manera general, a partir de la lectura del relato que el profesor realiza, se puede concluir que presenta las definiciones y procedimientos de manera clara y correctamente enunciados. Así mismo, presenta explicaciones, comprobaciones, demostraciones, etc., de forma adecuada, considerando el nivel educativo en el que está trabajando. Lopes (2014) justifica la calidad de ‘innovadora’ de su propuesta, señalando que ésta fomenta que los alumnos realicen procesos matemáticos relevantes, en especial, el proceso de modelaje matemático. Él lo señala de la siguiente manera:

> De esta forma, el trabajo de aplicación, dividido en tres etapas, busca construir el conocimiento mediante el uso de modelos matemáticos. A partir de la primera construcción, a medida que el asunto es profundizado y surgen nuevos elementos, otros modelos son construidos, basados en los anteriores […]. (Lopes, 2014, p. 22)

El profesor también consideró que su propuesta innovadora permite que los alumnos realicen otros procesos matemáticos relevantes tales como conexiones, construcciones significativas, resolución de problemas, etc. Lopes (2014, p. 21) lo señala así:

> En ese sentido, se busca: introducir conceptos de matemática avanzada, por medio del cálculo de áreas, considerar las numerosas aplicaciones que el estudio de la geometría proporciona, orientar al alumno en la construcción e identificación de diferentes formas geométricas, proporcionar al alumno la construcción geométrica y aritmética de conceptos y entes

matemáticos, despertar en el alumno la creatividad y la voluntad de aprender geometría, crear con el alumno modelos geométricos, estableciendo conexiones con la realidad, proporcionar situaciones-problemas con enfoque geométrico[…].

En su relato se observa que algunos de los procesos que menciona efectivamente fueron profundizados durante la implementación de la propuesta. Por ejemplo, Lopes (2014, p. 76) presenta evidencia de que los alumnos realizaron, respectivamente, procesos de resolución de problemas, argumentación y analogías (entre el cálculo del área de la elipse y del círculo):

1 P: ¿Cómo podemos resolver ese problema?

2 P: ¿Cuál de los dos métodos estudiados resuelve mejor esta situación-problema?

3 E: [Intercambiando ideas, la mayoría de los alumnos concuerdan que el mejor método para resolver el problema sería el método de Riemann. Un grupo de estudiantes (Ss) lo expresan:] Es sólo dividir la medida de la base en intervalos iguales y escribir rectángulos, como ocurre en el cálculo del área del círculo y del área de la elipse.

4 P: [El profesor proporciona a cada alumno una copia impresa de la construcción gráfica y, los orienta a dividir la medida de la base (eje horizontal), inicialmente en 10 partes iguales, calculando el valor aproximado para el área.

En general, el profesor nos presenta en su trabajo reflexiones explícitas sobre el hecho de que su propuesta didáctica para la enseñanza del cálculo de áreas es más representativa (pues aborda con profundidad el cálculo de áreas de figuras de contorno curvilíneos) que las propuestas que son implementadas habitualmente en la enseñanza media.

Idoneidad Cognitiva

Con relación a este tipo de idoneidad, en el trabajo de Lopes (2014) se observan comentarios, reflexiones, etc., que permiten concluir que el autor toma en cuenta, en la mayoría de los casos de forma implícita, indicadores de idoneidad cognitiva.

Conocimientos previos. El profesor realiza una evaluación inicial para conocer si los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema. Así mismo, el se asegura de que los alumnos tengan dichos conocimientos previos, concretamente, dedica una parte del tiempo destinado a su implementación, para revisar el cálculo de áreas de cuadriláteros y triángulos, y el estudio de las razones trigonométricas. Por otro lado, los resultados de aprendizaje, según el profesor, fueron alcanzados por los alumnos, “para lo cual se tiene una confirmación de que los métodos de

Arquímedes y de *Riemann* se encuentran en la zona de desarrollo próximo de los estudiantes" (Lopes, 2014, p. 19).

Adaptación curricular a las diferencias individuales. Con el relato del profesor no se puede concluir si tiene en cuenta o no actividades de ampliación o reforzamiento. No obstante, cuando evalúa los aprendizajes del método de *Riemann*, llega a la conclusión de que muchos alumnos no conseguirán dicho aprendizaje, y argumenta: "[…] sería necesario un período de estudio un poco mayor, para exigir a los alumnos, en una actividad evaluativa, la interpretación de resultados con mayor profundidad, considerando que cada alumno es único y por eso necesita de un tiempo de aprendizaje, sea mayor o menor" (Lopes, 2014, p. 92).

En cuanto al *aprendizaje,* el profesor presenta de forma muy clara que debe realizar una evaluación para comprobar que su propuesta innovadora alcanza el aprendizaje de los alumnos. Así, además de la evaluación inicial el profesor realiza tres evaluaciones formativas que muestran la apropiación de los conocimientos/competencias implementadas. Con dichas evaluaciones el profesor concluye que el aprendizaje fue alcanzado claramente para el tema del cálculo de áreas de cuadriláteros y triángulos, y para el método de Arquímedes, pero no se puede afirmar lo mismo para el método de Riemann, lo cual atribuye a la falta de tiempo.

Alta demanda cognitiva. El autor considera que su propuesta contempla una alta demanda cognitiva para sus alumnos, ya que activa procesos cognitivos relevantes. De hecho, la alta demanda cognitiva es la otra cara de la moneda de la riqueza de procesos comentado en la idoneidad epistémica. Es decir, el profesor al optar por una propuesta didáctica que implica la realización de procesos matemáticos relevantes (buenas matemáticas), está proponiendo a sus alumnos tareas que los lleva a un alta demanda cognitiva.

Idoneidad Interaccional

Interacción docente-discente. El profesor describe en su trabajo una interacción profesor-grupo grande, mediante una dinámica de preguntas del profesor y respuestas de los alumnos, lo cual según él "facilita la comprensión de los alumnos" (Lopes, 2014, p. 32). El profesor también presenta ejemplos de cómo este tipo de interacción clarifica y resuelve las dudas de los alumnos.

Interacción entre discentes. En su relato, el profesor también concluye que los alumnos trabajaron en pequeños grupos, y que esta organización permitió que algunos alumnos que difícilmente participaban en el aula, se expresaran en el grupo grande.

Autonomía. A partir del TFM del profesor es posible concluir que hubo momentos de fomento de la autonomía de los alumnos. Por un lado, "el alumno debía realizar tareas en casa" (Lopes, 2014, p. 67); por otro lado, fueron contemplados momentos en los cuales los estudiantes asumían la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación).

Evaluación formativa. Tal como se comentó en la idoneidad cognitiva, el profesor realizó una evaluación formativa que le permitió la observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.

Idoneidad Mediacional

Tanto en la planificación como en la implementación es posible apreciar el uso de *recursos materiales* tales como manipulativos, calculadoras y computadora. El profesor explica que utilizó el Software *GeoGebra* y la calculadora en su proceso de instrucción. Con relación al *GeoGebra*, presenta comentarios evaluativos implícitos sobre la conveniencia de incorporar este software de geometría dinámica en el proceso de instrucción.

Número de alumnos, horario y condiciones de la sala de clase. En relación a este componente, el profesor realiza muchos comentarios. De manera relevante, explica que el número de alumnos y las condiciones de la sala de clase (tanto el espacio físico, como el laboratorio de informática), condicionaron de alguna forma el uso del *GeoGebra*. Así, el software fue usado mayoritariamente por el profesor, para ilustrar y visualizar prácticas matemáticas (e.g., el cálculo de áreas de cuadriláteros y triángulos).

En relación al *tiempo –de enseñanza colectiva y del aprendizaje–,* el profesor presenta comentarios y evaluaciones sobre tres indicadores de este componente: adecuación de los significados pretendidos en el tiempo disponible, tiempo invertido en los contenidos más importantes o centrales, y tiempo invertido en los contenidos que presentan mayor dificultad. Respecto del primer indicador el profesor deja muy claro que no consiguió adecuar los significados pretendidos en el tiempo disponible. En particular indica que no tuvo tiempo suficiente para terminar de explicar lo que había planeado del método de *Riemann*. Respecto del segundo indicador, el profesor indica que le llevó mucho tiempo asegurar los conocimientos previos necesarios y que, por otro lado, le faltó tiempo para resolver el problema inicial contextualizado con el cual pretendía la introducción de los métodos de Arquímedes y Riemann. Finalmente, sobre el tercer indicador, los comentarios del profesor permiten inferir que no fue posible realizar todo el estudio por falta de tiempo (e.g., faltó tiempo para explicar con profundidad el método de Riemann).

Idoneidad Emocional

Con relación a esta idoneidad, no se encontraron en el TFM de Lopes (2014) comentarios referentes a los *intereses* y *necesidades de los estudiantes*, ni sobre las *actitudes* de los mismos. En cuando a las *emociones,* el profesor señala que la propia implementación realizada promueve la autoestima de los estudiantes.

Idoneidad Ecológica

De acuerdo a los criterios y objetivos que los profesores debían contemplar en la elaboración de sus TFM, el profesor Lopes justifica que su propuesta es una *innovación didáctica* que se *adapta al currículo* de Educación Básica y, según sus alumnos, que ayuda a la inserción social-laboral (*utilidad socio-laboral*) y que presenta una *conexión* intramatemática con matemáticas de niveles superiores (*conexiones intra e interdisciplinares*).

Reflexiones finales

Una ventaja con la que se encuentra el lector de la propuesta didáctica de Lopes (2014), es que el autor justifica la calidad de una propuesta que fue implementada, con un relato muy completo. El profesor, de manera implícita o explícita, utiliza todos los criterios de idoneidad didáctica propuestos por el EOS (Godino, 2011). Un problema a resaltar es que el profesor evidencia el problema de encontrar un equilibrio entre los criterios de idoneidad; por un lado, el autor planea una innovación con una alta idoneidad epistémica y en su reflexión se evidencia que además e preocupa por conseguir una alta demanda cognitiva. No obstante, para lograr esto renuncia a algunos contenidos previamente planificados, y en particular, no consigue resolver el problema inicial que había propuesto, en ese sentido el aprendizaje no fue completo (en partículas lo referente al método de Riemann). El profesor indica que esto se debió a falta de tiempo, es decir, no logró una buena idoneidad mediacional.

En general con el análisis del trabajo del profesor Lopes, muestra como en los procesos de reflexión de los profesores sobre su propia práctica, están presentes los criterios e indicadores de *idoneidad didáctica* propuestos por el EOS, por lo que dichos criterios se prevén como herramientas metodológicas potentes para el diseño de ciclos formativos orientados a potenciar la dimensión “meta” del conocimiento didáctico-matemático de los profesores de matemáticas (Pino-Fan, Assis y Castro, 2015).

Agradecimientos

Este trabajo fue financiado por el programa PDSE/CAPES bajo proceso número 99999.004658/2014-00.

Referencias bibliográficas

Brasil. (2013). Un análisis cualitativo y cuantitativo de los perfiles de los candidatos a la Maestría Profesional en Matemáticas en la Red Nacional (PROFMAT). *Informe final del procedimiento de análisis cualitativo y cuantitativo de los perfiles de los candidatos aprobados en el Máster Profesional en Matemáticas en la Red Nacional* (PROFMAT). Sociedad Brasileña de Matemáticas (SBM).

Breda, A., Font, V., y Lima, V. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática,* 8(1), 4-41.

Breda, A.; Lima, V. M. R. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio*. REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, 5(1), 74-103.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas [Indicators of didactical suitability of process of teaching and learning of mathematics]. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME).* Recife, Brasil.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127 – 135. doi: 10.1007/s11858-006-0004-1

Lopes, A. (2014). *Um relato sobre à introdução às somas de Riemann na Educação Básica* (Dissertação de Mestrado) –Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT–. Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, Brasil.

Pino-Fan, L., Assis, A., y Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *EURASIA Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *11*(6), 1429-1456. doi: 10.12973/eurasia.2015.1403a

LA ANALOGÍA, UNA TRANSICIÓN DE LA LEY DE COULOMB A LA LEY DE GRAVITACIÓN DE NEWTON

Gildardo Cortés Bello, Pericles Ramírez, Rodolfo D. Arrieta Bonilla

Instituto Tecnológico de Acapulco. (México), Centro de Estudios Tecnológicos Industrial y de Servicio No. 116. (México), Universidad Autónoma de Guerrero. (México)

RESUMEN: Este trabajo reporta resultados de una investigación que tiene la finalidad de evidenciar a la analogía como un proceso de modelación de un fenómeno a partir de la articulación de los parámetros de los modelos de otro fenómeno. Reportamos herramientas, procedimientos y argumentos de estudiantes de nivel medio superior, al construir un modelo de la fuerza gravitacional entre dos masas, a partir de modelos construidos previamente de la fuerza de atracción entre dos cargas eléctricas con diferente signo. La perspectiva teórica que sustenta el trabajo es la Socioepistemología. La metodología es la de investigación de diseño.

Palabras clave: analogía, funciones de la analogía.

ABSTRACT: This work describes the results of a research aimed to show analogy as a modeling process of a phenomenon from the linkage of the parameters of other phenomenon models. We show tools, procedures and criteria of senior high education students when building a model of gravitational force between two masses, taking as a reference point the previously obtained models of attraction force between two electrical charges with different signs. Socio-epistemology is the theoretical perspective that supports this work where we used a design research methodology.

Key words: analogy, analogy functions.

Introducción

Un aspecto relevante de la modelación, es cómo se construyen los modelos de fenómenos o situaciones reales considerando la experiencia previa en los procesos de la modelación. Por ejemplo, Méndez (2008), menciona que los estudiantes al modelar la elasticidad de los resortes con modelos lineales, no consideran su experiencia anterior al modelar el llenado de un estanque cilíndrico; argumentamos entonces, que este fenómeno didáctico ocurre, porque han construido una red de modelos lineales centrada en la elasticidad de los resortes. Para descentrar la red de modelos del fenómeno, se requiere de un proceso de modelar otros fenómenos con la misma red de modelos, mediante un proceso de analogía con el fenómeno modelado inicialmente. El objetivo de nuestro trabajo, es la de evidenciar cómo en el proceso de modelación la analogía, a través de sus funciones da lugar a una red de modelos descentrada del fenómeno que le dio origen.

Los diseños de aprendizaje

Con esta finalidad elaboramos diseños de aprendizaje basados en el tránsito de un modelo que relaciona la fuerza entre dos cargas eléctricas a un modelo de la fuerza de atracción de dos masas. Para llegar a este diseño los estudiantes participan previamente en tres diseños. El primero referente a la modelación lineal del llenado de un estanque cilíndrico (Méndez, 2008), el segundo con base en la modelación inversamente proporcional del tiempo de vaciado de un vaso respecto del número de hoyos que tiene (Olea, 2011) y el tercero la modelación de la fuerza entre dos cargas eléctricas (Cortés, 2014).

La ley de Coulomb

La modelación de la fuerza entre dos cargas eléctricas (ley de Coulomb) la realizan a partir de la experimentación y toma de datos con un simulador digital. Primero, los estudiantes mantienen fija la magnitud de una carga y varían la magnitud de la otra carga. Después varían la distancia entre las cargas manteniendo fija las magnitudes de las cargas. Con los datos obtenidos en el primer caso, construyen un modelo lineal de la fuerza con respecto de la magnitud de las cargas. Con los datos obtenidos en el segundo caso construyen un modelo inversamente proporcional al cuadrado.

El esquema de la fig. 1 para la ***ley de Coulomb***, queda determinado por los diseños de aprendizajes D1 y D2. Nuestra intención con este diseño es que los actores logren construir lo inversamente proporcional y lo inversamente proporcional al cuadrado.

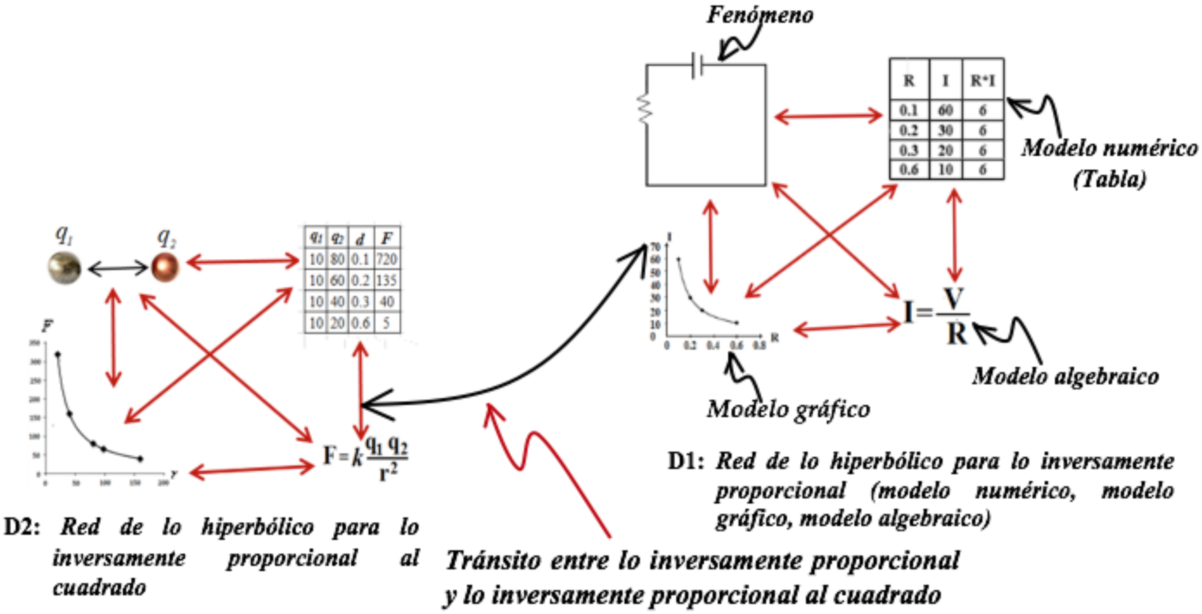


Figura 1: Esquema para la ley de Coulomb, que permite establecer una vinculación entre los fenómenos y la red de modelos a partir del uso de la analogía en los diseños de aprendizajes **D1** y **D2**.

La ley de gravitación universal de Newton.

Con la experiencia de modelar la fuerza entre dos cargas, la propuesta es que discutan en equipo, pregunta por pregunta, ¿Por qué caen los objetos? ¿Caen o se atraen? ¿Porque gira la luna alrededor de la tierra? ¿Si colocas dos cuerpos en una mesa se atraen o se rechazan? ¿Qué pasa si están en el espacio?

Primera cuestión: ¿Por qué caen los objetos?

Situación: ¿Qué pasa aquí?

E1-Diana

Por la fuerza de atracción gravitacional que experimentan todos los cuerpos en caída libre

E2-Gabriel

porque la gravedad causa que los objetos, en caída libre, sean atraídos al centro de la Tierra.

E3-Luís

Por la fuerza de graveda que tiene la tierra

Los actores dieron respuestas muy semejantes ante la situación planteada: ¿Qué pasa aquí?, dejando caer un objeto casi esférico hecho de papel.

Segunda cuestión: ¿Caen o se atraen?

La respuesta de los actores es que los objetos son atraídos por lo que conocemos como gravedad, esta respuesta está en función de lo observado en la situación planteada ¿Qué pasa aquí?

Tercera cuestión: ¿Por qué gira la luna alrededor de la tierra?

E1-Diana

Porque también es afeclada por la fueza de gravedad
que emana de la lierra creando una orbila.

E2-Gabriel

Porque sus fuerzas son atraidas y Producen una Carda que al mismo
tiempo recorren esa misma trayectoria y la suma de todas esas
Cardas O desPlazamientos crean una orbita al rededor de la
tierra con respecto al Sol.

E3-Luís

Por la energia gravitacional de la tierra fluye de manera circular
en ese caso la luna esta Separado a una cierta distancia
de la tierra y ~~ea~~ de la mano ald teoria de coulomb entre
mayor ~~fuer~~ distancia menor fuerza que Seria como la fuerza
gravitacional de la tierra a la luna.

En esta cuestión los actores creen que la luna gira por el efecto de la gravedad sobre los objetos, en el caso del equipo de ***Diana*** y ***Luís***, pero en el caso del equipo ***Gabriel*** creen que la luna gira debido a que tanto la luna como la tierra producen una cuerda al mismo tiempo que recorren la misma trayectoria creando una órbita alrededor de la tierra con respecto al sol.

Cuarta cuestión: ¿Qué pasa si están en el espacio?

E1-Diana

En el espacio existe la gravedad cero y no existe fuerza que riga el sentido de los cuerpos.

E2-Gabriel

Se atraen, chocan después de una hora, debido a las ondas gravitatorias. Llega un punto donde chocan y empieza una repulsión.

E3-Luís

Los objetos se quedan fijos y sino puede depender de la forma del objeto

Los actores dan diversos argumentos:

El equipo de *Diana* concluye que no hay fuerzas que rigen el sentido de los cuerpos, ya que en el espacio hay gravedad cero.

El equipo de *Gabriel*, argumenta que los cuerpos se atraen, chocan después de cierto tiempo hay una repulsión debido a las ondas gravitacionales.

El equipo de ***Luís*** argumenta que los objetos se quedan fijos y si no puede depender de la forma de los cuerpos.

La primera conjetura que levantan los actores, es que hay una fuerza de atracción entre las masas, que la provoca su propia masa. La segunda conjetura, es que la fuerza entre las masas podría ser como la fuerza entre las cargas eléctricas. Estas conjeturas surgen cuando se les planteo la quinta cuestión:

Quinta cuestión: ¿Podrían establecer la relación entre dos cuerpos de masa1 y masa2, y una distancia entre ellas?

E1-Diana

Si se puede establecer la relación, sería la fuerza y esta se podría establecer mediante la ~~relación~~ ley de Coulomb.

$$F = K\frac{q_1 q_2}{d^2}$$

E2-Gabriel

La ley de la gravitación universal establece que la fuerza de atracción entre dos masas es directamente proporcional al producto de la misma, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. La ley de Colomb es similar, pero en vez de masa, se habla de cargas.

E3-Luís

Seria porque si estuviera la tierra con la luna a una cierta distancia cada una tiene una carga de gravedad Seria Por que la tierra es redonda su energia de atraccion es de forma circular es por eso que la luna sigue su onda de atraccion la luna gira al rededor de la tierra Por la forma de atraccion

Escenario experimental

Los actores que participan en el diseño de aprendizaje son 20 estudiantes del sexto semestre del CONALEP Acapulco II y 20 estudiantes del primer año de ingeniería del Instituto Tecnológico de Acapulco (**ITA**). Se organizan en cinco equipos de cuatro estudiantes, las evidencias se recogen con videograbaciones y las producciones electrónicas (hojas de cálculo) y físicas. Han participado en diseños de aprendizaje que caracterizan a la modelación inversamente proporcional. Esto es que los modelos inversamente proporcionales, son aquellos que el producto de las variables es constante o "cuasi constante" si consideramos ruido en los datos.

Marco conceptual y Metodología.

El marco teórico que sustenta la investigación, es la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, mediante sus cuatro principios (*la normatividad de las prácticas, el relativismo epistemológico, la racionalidad contextualizada, la resignificación progresiva*) en virtud de que tiene la característica primordial de ser contextualizada, relativista (no hay verdades absolutas), incluye lo referente al discurso argumentativo de las producciones de los actores involucrados en la investigación, es funcional, ya que considera la complejidad del conocimiento humano y sus formas de construirlo (Cantoral, 2013) y la concepción de la modelación de Arrieta y Díaz (2015), quienes conciben a la modelación como una práctica constituida por actividades recurrentes en diversas comunidades de profesionistas. La metodología empleada, es la de investigación de diseño (Confrey, 2006), ya que nos permite analizar, evaluar y perfeccionar los diseños de aprendizajes, así como también las estrategias y herramientas de enseñanza basados en los principios teóricos derivados de investigaciones previas, como son las prácticas de modelación convivencia.

La analogía.

En nuestro trabajo de investigación hemos concebido a la analogía como un proceso de articulación de los elementos y de las relaciones de una entidad uno (E_1) con los elementos y de las relaciones de una entidad dos (E_2). En el proceso de articulación de los elementos y relaciones entre las dos entidades E_1 y E_2 la analogía se caracteriza por su intencionalidad, que conlleva a conocer a los elementos y las relaciones de la entidad E_2 a partir de su articulación con los elementos y relaciones de una entidad E_1 ya conocidos.

La construcción de la analogía se inicia con una interacción o experimentación (fase uno) en un sentido amplio de la entidad a conocer (E_2), en esta interacción identifico a los elementos y a sus posibles relaciones; en una segunda fase planteamos relacionarlos o articular a los elementos identificados con los elementos de la entidad conocida (E_1); en una tercera fase establecemos la analogía y verificamos que funciona, desde nuestros propósitos (*intencionalidad: modelar para intervenir, intervenir para predecir, etc.*), donde los elementos son los diferentes modelos que componen una red.

En general podemos decir, que en la construcción de la analogía siempre estarán presentes tres componentes básicos referidos a las *entidades*, los *atributos* y las *relaciones* establecidas entre ellos conformando una red. En ese sentido se puede argüir que la analogía vive sobre una base construida en diseños de aprendizajes con *prácticas de convivencia*, estableciéndose lo que hemos llamado *funciones de la analogía*, estas funciones se relacionan con los elementos que se articulan de las referidas entidades E_1 y E_2. La construcción de la analogía en nuestra investigación, se consolida en un todo o unidad, a partir de la constitución de sus funciones referente a los *argumentos*, los *procedimientos*, la *utilización* del referente construido y la función *relacional* que permite la intervención, a través de la experiencia vía la analogía.

Para nosotros en esta investigación, una práctica-con-vivencia *(P-C-V)* está referida a actividades recurrentes, que se ejercen en interacción. La referencia a *convivencia* tiene su fundamento en el constructo de la *Dasein Gei de Heidegger*, que evoca al hombre echado al mundo situado, haciendo algo en un *contexto referenciado* a lo que hace, por qué lo hace, como las intenciones; cómo lo hace los procedimientos, con que lo hace, las herramientas y sus justificaciones a los argumentos (Berciano, 1990).

La práctica convivencia es un ente dinámico, que evoluciona en el tiempo y tiene su pasado, que explica por qué ha llegado a ser como son y su horizonte que da cuenta de qué es lo que llegarán a ser: *las herramientas, los procedimientos, los argumentos, las intenciones.* Los aspectos mencionados son los que dan origen a las funciones de la analogía referente a: *La función argumentativa, La función procedimental, La función utilitaria o instrumental y La función relacional.*

Las funciones de la analogía

La *función argumentativa* tiene su origen en las acciones durante la articulación de los argumentos e implica la validación de los argumentos para la entidad construida, destacando las similitudes que avalan las conclusiones extraídas de la entidad propuesta a partir de una regla propia, que sugiere una metodología propia de investigación.

La *función procedimental*, tiene su origen en los procedimientos articuladores de las dos entidades en interacción (*eléctrico-gravitacional*), en esta parte de la construcción de la analogía se articulan las herramientas (*modelo algebraico, numérico, gráfico*) y es inherente a la *función utilitaria o instrumental* que se refiere a la utilización de las herramientas. La *función relacional* permite articular, las redes de modelos y sus relaciones conceptuales con lo modelado, en esta función se producen por completo todas las funciones de la construcción de la analogía, destacándose la importancia de la naturaleza de la modelación, que dota de una caracterización a las prácticas de modelación, a través de la articulación y su intencionalidad de intervención. Durante el proceso de experimentación se hace necesario interactuar con la entidad que se desea intervenir y su red de modelos asociados a ella. En este proceso resulta, que la experimentación no es suficiente, debido a que al intervenir una identidad a partir de otra, se obtienen nuevos elementos de análisis que permiten una configuración de las prácticas de modelación.

Las funciones de la analogía permiten establecer las etapas de las prácticas convivencia de modelación, que en nuestra investigación están referidas a: a) *La experimentación con el fenómeno, que establece las bases de lo convivencial, b) La linealidad de la fuerza con respecto a las cargas, c) La relación inversamente proporcional al cuadrado de la fuerza con respecto de las distancias de las cargas, d) Establecer el campo de fuerzas referidas a la posición de las cargas.* Estas etapas dan lugar al establecimiento de la red de modelos asociadas al fenómeno base, y que es transferible al fenómeno análogo a partir de la caracterización de la red. El resultado de este análisis permite diseñar nuevas prácticas; nuestra intención en este caso son las prácticas de modelación de lo inversamente proporcional al cuadrado, a partir del fenómeno que hemos denominado “Ley de Coulomb”; el esquema siguiente da una orientación para su construcción.

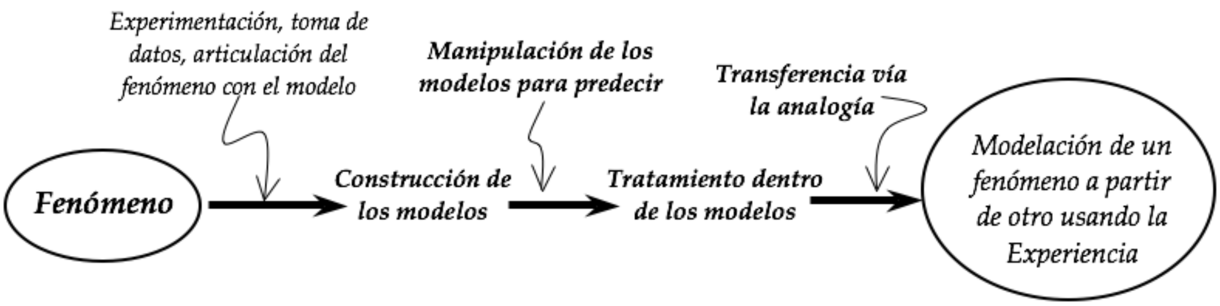


Figura 2: Esquema de la analogía entre la ley de Coulomb y la de Gravitación Universal

Mediante la *función relacional* podemos construir el diseño de aprendizaje para la construcción de lo hiperbólico y lo hiperbólico al cuadrado como se muestra en la figura 3, en donde la analogía es la herramienta vinculadora de la red de modelos para la construcción de lo hiperbólico al cuadrado D3, a partir de fenómenos eléctricos D1 y D2.

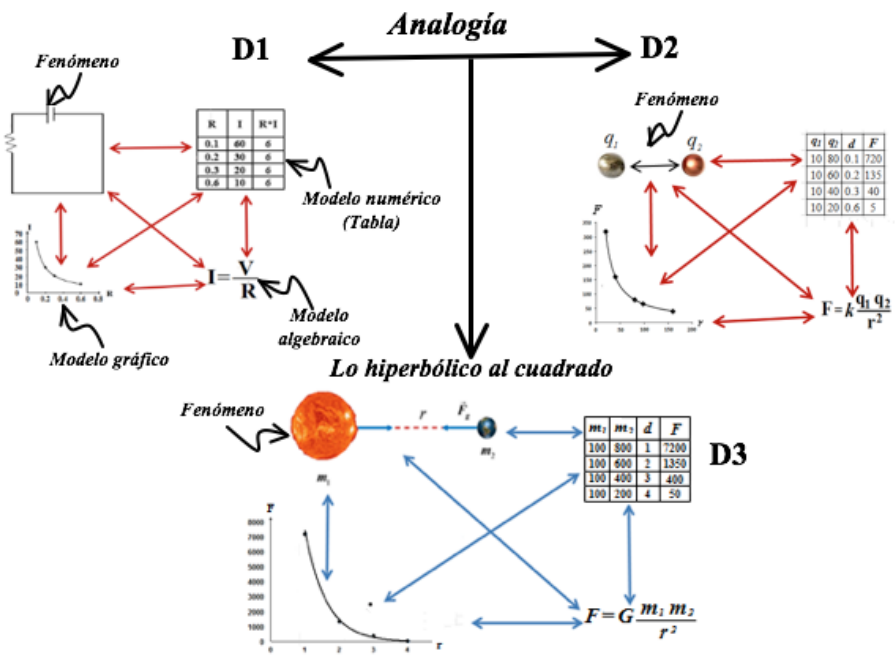


Figura 3: Vinculación de una red de modelos **D1** y **D2**, a través de la analogía para lo hiperbólico al cuadrado, para fenómenos gravitacionales **D3.**

Las características básicas que nos interesa reconozcan los estudiantes en la ejecución de los diseños de aprendizajes (prácticas de modelación convivencia) es que: 1) D*istingan las variables, que intervienen en el fenómeno base y el fenómeno análogo, 2) Establezcan las relaciones, que existen entre las variables, 3) Distingan la relación entre los datos y las variables del fenómeno a modelar, 4) Establezcan patrones de comportamiento con los datos obtenidos del fenómeno, 5) Construyan un modelo y predecir con él.*

A manera de conclusión

1. Los actores de la puesta en escena del diseño de aprendizaje construyen una red de modelos de la fuerza entre dos masas a partir de la analogía con la ley de Coulomb que previamente han construido. La analogía se presenta como un proceso que permite transitar de una situación conocida (fenómeno-red de modelos base) a otra situación desconocida (fenómeno-red análogo), las argumentaciones que levantan para establecer la analogía entre los dos fenómenos-red son ricas y variadas destacándose las cuatro funciones de la analogía que la hacen posible: *función argumentativa*, *función procedimental*, *función utilitaria o instrumental*, *función relacional*.
2. En esta investigación la matemática solo puede coexistir en otros contextos, si se atiende al problema de interés respetando la perspectiva teórica y los resultados que en otras disciplinas se obtienen, solo de esta manera podemos darnos cuenta que: a) *Hay que mirar bien y tener presente la diversidad de los fenómenos de interés y los métodos de estudio con que son abordados,* b) *Los físicos construyen sus propias herramientas, para descubrir qué relaciones hay entre los fenómenos abordados y lo esperado de esto se desprende su probable origen inicial y la sistematización lógica de los datos obtenidos en la observación minuciosa,* c) *Se tiene presente, que la teoría no siempre llevará a acciones experimentales fáciles de realizar, es aquí donde la matemática coexiste en los entornos de la física y resulta plausible la axiomatización matemática de la misma, para extraer las relaciones, que los físicos pretenden visualizar durante la experimentación y la modelación matemática.*

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18 (1)*, 19-48.

Berciano, M. (1990). Temporalidad y Ontología en el círculo de Ser y Tiempo. *Thémata*, Vol. *7*, 13-50.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la matemática Educativa: estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona España: Editorial Gedisa.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology, en Sawyer, R.K. (ed.). *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*, (pp. 135-152). New York: Cambridge University Press.

Cortés, G. (2014). La analogía, una fase de la modelación. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 27*, 1277-1287. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Méndez, M. (2008). *Un estudio de la evolución de las prácticas: la experiencia al modelar linealmente situaciones análogas*. Tesis de Maestría no publicada. Unidad Académica de Matemáticas. Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Olea, N. (2011). *Un estudio del papel de los contextos en la modelación inversamente proporcional.* Tesis de Maestría no publicada. Unidad Académica de Matemáticas. Universidad Autónoma de Guerrero. México.

PARADOJAS COMO RECURSO DIDÁCTICO EN LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD

María M. Gea, Carmen Batanero, J. Miguel Contreras, Pedro Arteaga
Universidad de Granada. (España)
mmgea@ugr.es, batanero@ugr.es, jmcontreras@ugr.es y parteaga@ugr.es

RESUMEN: Se describe una propuesta de enseñanza sobre probabilidad, susceptible de implementar con estudiantes de secundaria o bachillerato. El propósito es analizar cómo una paradoja sirve como recurso didáctico para la enseñanza de la probabilidad, aportando dinamismo en la gestión del aula, a la vez que sirve para detectar dificultades y errores de los estudiantes al enfrentarlos a sus intuiciones en el desempeño del tema. Se complementa este trabajo con sugerencias metodológicas y otras paradojas de interés para la enseñanza del tema.

Palabras clave: paradojas, probabilidad, recurso, enseñanza, aprendizaje.

ABSTRACT: The research describes a teaching proposal about probability, which can be implemented with senior or junior high school students. The aim is to analyze how a paradox can be used as a didactic resource for probability teaching, providing dynamism to the classroom management whereas it is also useful to detect students' errors and difficulties when they are faced up to their own intuitions working with the topic. This work also proposes some methodological suggestions and other paradoxes of concern to teach the topic.

Key words: paradoxes, probability, resource, teaching, learning.

■ Introducción

El estudio de la probabilidad forma parte del currículo español desde la etapa de educación primaria (6-12 años), al igual que en otros muchos países; siendo un objetivo clave que los estudiantes realicen estimaciones sencillas basadas en la experiencia con situaciones aleatorias (Batanero, Gea, Arteaga y Contreras, 2014). La resolución de problemas se convierte en uno de los ejes principales de la actividad matemática, ya que cuando el estudiante se enfrenta a una situación problemática y trata de resolverla, pone en marcha sus capacidades de lectura, razonamiento y reflexión, planificación de la resolución, estrategias para poner en práctica, ejecución y revisión de procedimientos, comprobación de la solución encontrada y comunicación de la misma. Todo ello le permitirá ir progresivamente adquiriendo conocimientos más complejos, comprendiendo y haciendo uso de los conceptos fundamentales en que se basa el razonamiento probabilístico.

La tarea del profesor es diseñar situaciones de enseñanza para que el estudiante desarrolle su razonamiento probabilístico, a la vez que le permitan evaluar las intuiciones de sus estudiantes sobre el azar. Ortiz (1999) pone de manifiesto la dificultad de esta tarea, proponiendo la cooperación en los equipos de profesorado para facilitarla. En su investigación, centrada en el estudio de la presentación de la probabilidad en libros de texto de bachillerato, muestra el desequilibrio de situaciones problemáticas a favor de situaciones basadas en el cálculo (en la concepción clásica o laplaciana de probabilidad), donde se aplica el principio de indiferencia y se aplica un razonamiento combinatorio. Coincidimos con el autor en que estas actividades no cubren verdaderamente las diversas concepciones sobre probabilidad que los estudiantes deben comprender. Esta situación se hace más dificultosa cuando, al finalizar la etapa de educación secundaria (13-14 años), evaluamos a nuestro alumnado en la adquisición de capacidades en torno al azar y probabilidad tales como:

> Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar y la estadística. Formula y comprueba conjeturas sobre los resultados de experimentos aleatorios y simulaciones. […] Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos en los que intervengan dos experiencias aleatorias simultáneas o consecutivas. (MECD, 2015, p. 407).

El presente trabajo presenta una situación de enseñanza dirigida al alumnado de educación secundaria y bachillerato, que utiliza una paradoja de probabilidad como recurso didáctico. El propósito es mostrar la utilidad de este tipo de problemas paradójicos en la enseñanza de la probabilidad, que sirven para contextualizar ideas estocásticas fundamentales, a la vez que facilitan al profesor su gestión en el aula. Como indica Contreras (2011), estas propuestas de enseñanza permiten mostrar las intuiciones del alumno sobre el tema y facilitan la labor del profesor en identificar sus errores o concepciones sobre el mismo, posibilitando el diseño de un modelo de intervención más adecuado a su alumnado.

Las paradojas como recurso de enseñanza de la probabilidad

En la historia de la probabilidad han aparecido múltiples paradojas, algunas de las cuáles pueden utilizarse en su formulación elemental para introducir una dinámica de resolución de problemas en el aula (Borovcnik y Kapadia, 2014). El objetivo principal es motivar, a través de la experiencia, el diseño e implementación de actividades de enseñanza basadas en el uso de paradojas de probabilidad. Para ello, se plantean los siguientes objetivos específicos:

1. Experimentar y resolver una actividad de probabilidad basada en una paradoja, debatiendo con los asistentes las estrategias y soluciones encontradas. Seguidamente, se llevará a cabo un análisis didáctico de la misma, que servirá para mostrar la riqueza de objetos matemáticos utilizados en la resolución de la actividad; las ideas fundamentales que se han desarrollado; así como las posibles dificultades que se han manifestado o se pueden encontrar en el proceso de resolución de la actividad.
2. Presentar resultados de investigaciones relacionadas con el uso de paradojas en la enseñanza, que muestren sesgos y errores que en la literatura se han evidenciado y que emergen en la resolución de este tipo de tareas.
3. Describir una metodología de enseñanza para el tema, fundamentada en la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1997), que centra la atención en la acción del estudiante y motiva el desarrollo de capacidades necesarias para su formación integral.
4. Mostrar y discutir otras paradojas presentes en la literatura, susceptibles de ser incluidas en la enseñanza de la probabilidad, que sirvan como recurso didáctico tal y como la que se plantea en este trabajo.

Descripción de la propuesta de enseñanza

La consecución de estos objetivos se ha llevado a cabo de manera secuencial, en dos sesiones de dos horas cada una. En primer lugar, se propuso la situación que se muestra en la Figura 1, basada en la paradoja de las tres cajas planteada por Joseph Bertrand (1822-1900), que Shannon y Weaver (1949) adaptaron tal y como se lleva a cabo en este curso. Se proporcionó el material a los asistentes y las tarjetas para que pudieran tocarlas y experimentar por sí mismos, y se llevó a cabo la simulación de esta situación, con la intención de facilitar la resolución de la misma y compartir entre todos las estrategias llevadas a cabo.

La simulación se desarrolló en fases de diez ensayos cada una, donde se fue completando una tabla de registro de datos como la que se muestra en la Figura 2. Fueron necesarias unas tres fases para alcanzar los objetivos previstos pero, si fuese necesario, en el aula con los estudiantes se pueden llevar a cabo más fases, e incluso dejar que ellos mismos lleven la experiencia a cabo.

Se toman 3 fichas (cartas) de la misma forma y tamaño, de las cuales una es roja por ambas caras; otra es azul por una cara y roja por la otra, y la tercera es azul por las dos caras.

El profesor coloca las tres fichas en una caja, que agita convenientemente, antes de seleccionar una de las tres fichas, al azar. Muestra, a continuación, una de las caras de la ficha elegida, manteniendo la otra tapada, pidiendo a sus alumnos que adivinen el color de la cara oculta.

Una vez hechas las apuestas, el profesor muestra la cara oculta. Cada participante que haya acertado en la predicción efectuada, consigue un punto.

Figura 1. Tarea fundamentada en la paradoja de la caja de Bertrand

	Resultados para cada ensayo efectuado									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Color de la cara mostrada										
Color predicho de la cara oculta										
Color de la cara oculta										

Figura 2*.* Tabla de registro de los resultados en cada ensayo

Al finalizar la primera fase de diez ensayos, se explicó la estrategia elegida por cada uno de los asistentes y la puntuación obtenida siguiendo dicha estrategia. Se compartieron y discutieron las estrategias utilizadas, de modo que los participantes tuvieron ocasión de cambiar de estrategia para la realización del experimento en la siguiente fase o mantener la que habían seguido en la fase anterior. La siguiente fase sirvió para contrastar la efectividad de las estrategias utilizadas, así como las intuiciones que ya se habían manifestado en la discusión, al finalizar la fase anterior.

A pesar de ser pocas simulaciones (20 ensayos, según las dos fases realizadas), se consiguió evidenciar, de manera frecuencial, la validez de algunas estrategias. Tras la discusión de los resultados obtenidos después de la segunda fase, la mayoría de los participantes optaron por la estrategia correcta “mantener como color predicho el color mostrado”. Una tercera fase sirvió para contrastar su hipótesis sobre la mejor estrategia para ganar más puntuación y se animó a demostrar la estrategia ganadora, pudiendo con ello revelar razonamientos incorrectos o errores al justificar o argumentar las demostraciones aportadas.

Se resolvió la actividad entre todos los asistentes de diversos modos y haciendo uso también del diagrama de árbol. Además, se mostró a los participantes ejemplos de resultados de estudiantes de secundaria y bachillerato que habían puesto en práctica esta misma situación.

En la siguiente sesión, los participantes identificaron, de manera individual o en parejas, los objetos matemáticos (tipo de lenguaje, problemas, conceptos, propiedades, procedimientos y justificaciones) que se movilizaban en la resolución de la actividad, así como algunos posibles conflictos y dificultades que hubiesen encontrado o se pueden prever en los estudiantes en el desempeño de la misma. Una vez discutidos estos aspectos, se identificaron las ideas fundamentales que se deben trabajar en un curso de probabilidad, y que nuestros estudiantes deben ir adquiriendo de modo progresivo desde la educación primaria a la universidad. Como indica Batanero (2004), la mayoría de situaciones aleatorias permiten desarrollar estas ideas, y su conocimiento por parte del docente es vital, pues deben servir de guía para el desarrollo del currículo y el diseño de actividades de enseñanza. Basándonos en el trabajo desarrollado por Heitele (1975), se explicaron cada una de las ideas fundamentales (probabilidad; espacio muestral; independencia; regla de la suma; equidistribución y simetría; combinatoria; simulación; variable aleatoria; ley de los grandes números; y muestra) que se utilizaron para resolver la situación llevada a cabo.

Igualmente, se describieron las condiciones mediante las que el estudiante construye el conocimiento a través de la práctica matemática según la Teoría de Situaciones Didácticas abordada por Brousseau (1997). Se pone de manifiesto que el estudiante aprende haciendo matemáticas y resolviendo problemas. La motivación que este tiene por actuar ante el problema, de anticipar una respuesta, de ejecutar un plan de actuación y formular posibles estrategias de resolución, posibilita que el contexto, la cultura y sus ideas previas se movilicen para dar una respuesta. La comunicación en el trabajo colaborativo y su defensa en el debate con los compañeros posibilita el uso y desarrollo del lenguaje, donde, finalmente, la institucionalización de los saberes es significativamente recibida por los estudiantes, ya que la acomodación al nuevo saber ha sido asimilada gracias a su trabajo previo ante la situación (Brousseau, 1997).

Se finaliza compartiendo y planteando otros problemas interesantes, que permitan al estudiante seguir la metodología propuesta, y se complementa esta discusión con las posibles adaptaciones para llevar al aula dichas propuestas con alumnos de secundaria y bachillerato. Algunas de estas propuestas son: la paradoja del niño y la niña; el problema de Monty Hall; el juego de ruletas no transitivas o la paradoja de Simpson. De entre todas ellas, se describieron con más detalle la paradoja de Simpson y el problema de Monty Hall, dada su conexión a la realidad de los estudiantes de secundaria y bachillerato, para quienes van dirigidas.

Otras paradojas de interés para la enseñanza de la probabilidad

La paradoja de Monty Hall es la variante más conocida de la paradoja de las cajas de Bertrand (más que la paradoja del niño y la niña) y el hecho de estar inspirada en un concurso televisivo potencia la implicación y el interés del estudiante. La formulación más conocida de esta paradoja es la de suponer que estamos en un concurso en el que nos ofrecen escoger entre tres puertas, tras las cuales se esconden dos cabras y un coche (o un gran premio similar). Al escoger una puerta, se nos abre una de las otras no escogidas inicialmente, mostrándonos una cabra. El dilema surge cuando se nos vuelve a dar a elegir, si mantenernos en nuestra elección inicial, o bien, cambiar de puerta.

El cambiar de puerta aumenta nuestra probabilidad por ganar el coche (o un gran premio similar), lo que supone una solución contraintuitiva pues, es muy común encontrar respuestas en donde se piensa que es indistinto, mantenerse o cambiar de puerta. Algo que supone una motivación e interés en nuestros estudiantes es ligar nuestra enseñanza con los medios de comunicación, como es la televisión. Visualizar con nuestros alumnos en clase series televisivas y películas donde esta paradoja se ha presentado supone un incentivo a la enseñanza. Por ejemplo, la paradoja de Monty Hall ocupa lugar en la famosa serie “Numbers” (https://www.youtube.com/watch?v=pqJBTWoIkbA) o también en la película “21 Black Jack”.

La paradoja de Simpson o efecto de Yule-Simpson, muestra la necesidad de analizar el fenómeno que se produce, en el estudio de la asociación entre variables, cuando no se controla el efecto de una tercera variable. El efecto de esta tercera variable no controlada (o de confusión) puede incluso cambiar el sentido de la asociación entre las variables de estudio. El ejemplo que se propuso mostraba los resultados del control de alcoholemia realizado a hombres y mujeres con motivo de estudiar la efectividad de una campaña realizada para concienciar a la población de los peligros del alcohol.

En el análisis previo a la campaña, realizado a 600 conductores, el 21,66% de los conductores presentaba una tasa de alcohol superior al límite permitido. Tras la realización de la campaña, habiendo analizado la tasa de alcohol a otros 600 conductores, el 23,33% de ellos presentaba una tasa de alcohol superior al límite permitido. La conclusión de que la campaña ha sido un fracaso es susceptible de ser analizada bajo la mirada del efecto de la variable del sexo, ya que si nos detenemos en la muestra analizada: antes de la campaña, entre 500 conductoras y 100 conductores, el 20% y el 30%, respectivamente, dieron niveles por encima del límite permitido. Después de la campaña, entre 100 conductoras y 500 conductores, el 15% y el 25%, respectivamente, dieron niveles por encima del límite permitido. De este modo, considerando la variable sexo, podemos concluir que la campaña fue un éxito.

Un ejemplo muy interesante, también discutido entre los asistentes, fue el propuesto por Engel y Sedlmeier (2011) en cuanto al estudio de asociación entre el tiempo que un estudiante está matriculado en una titulación universitaria (por semestres) y el salario percibido en el primer año de empleo, como se muestra en la Figura 3.

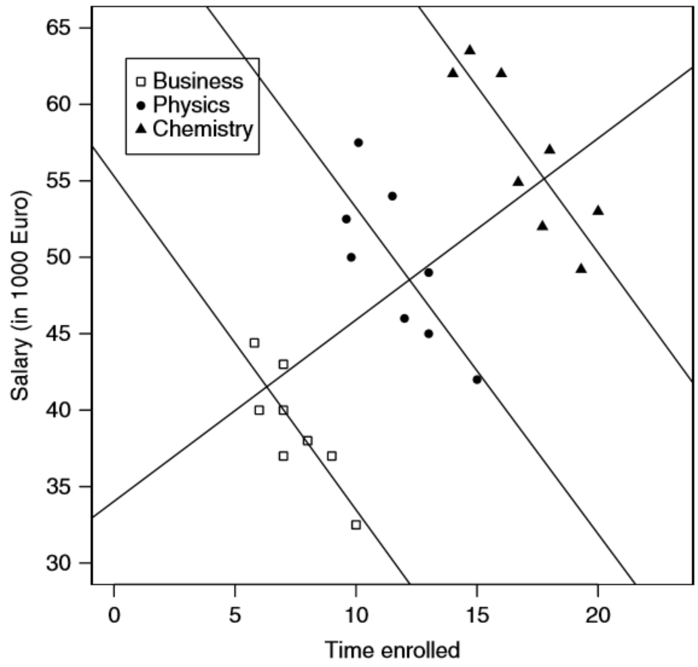


Figura 3. Tiempo matriculado hasta la graduación (en semestres) y salario en el primer año de empleo (en miles de Euros) (Engel y Sedlmeier, 2011, p.249)

En este ejemplo, los titulados que mayor tiempo de matriculación poseen (por semestres) son, por orden, las titulaciones en química, física y económicas. Y los salarios percibidos, en el primer año de empleo al finalizar sus estudios en dichos estudios, suelen tener una variabilidad similar, aunque los salarios percibidos por los titulados en química suelen ser mayores que los titulados en física, y éstos aún mayores que los titulados en económicas. El efecto que se observa es que, al reunir a todos los estudiantes en el mismo análisis, tal y como se publicó en un periódico alemán, existe una correlación positiva entre estas dos variables (tiempo de matriculación y salario percibido), pero que, realmente, se manifiesta negativa y fuerte cuando estudiamos estas variables según cada una de las titulaciones analizadas.

Reflexión final

Este trabajo describe una propuesta de enseñanza diseñada para estudiantes de secundaria y bachillerato, haciendo uso de una paradoja como recurso didáctico para la enseñanza de la probabilidad. Diversas preguntas dirigen la experiencia para motivar la discusión sobre las estrategias de resolución utilizadas, a la vez que se ponen a prueba las ideas que se poseen sobre el tema.

En base al trabajo desarrollado por Heitele (1975), se explicaron cada una de las ideas fundamentales que se utilizaron para resolver la situación propuesta y cómo poder identificar el grado de adquisición de estas ideas en nuestros estudiantes pues, como indica Batanero (2004), es vital que el docente conozca el desarrollo de estas ideas en sus estudiantes ya que deberán ir evolucionando de manera gradual a lo largo de su formación.

Igualmente, se aportan sugerencias metodológicas fundamentadas en la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997), bajo la premisa de que el estudiante aprende resolviendo problemas, que se considera un eje vertebrador en las directrices curriculares en España (MECD, 2015).

La situación llevada a cabo, y otras más que se sugieren, muestran cómo las paradojas promueven un aprendizaje significativo del tema, aumentando la motivación de nuestro alumnado, y movilizando el uso de ideas previas que, de manera constructivista, permitirán a nuestros estudiantes facilitar su aprendizaje (Lesser, 1998; Konold, 1994). Como sugiere Contreras (2011), se trata de trabajar las intuiciones en probabilidad de nuestros estudiantes, que son en su mayoría erróneas, y si no se detectan pronto, posteriormente serán más difíciles de erradicar.

La formación del profesor en todos estos aspectos es fundamental, ya que debe servir de guía a sus alumnos, para permitirles que actúen y anticipen sus respuestas, que formulen sus estrategias y discutan sus resultados. Con ello pensamos, que este tipo de actividades son útiles en cursos de formación dirigidos al profesorado pues, al mismo tiempo que le sirven para su profesión, se ponen ellos mismos ante una situación problemática, que les puede servir para aumentar sus conocimientos sobre probabilidad.

Agradecimientos

Proyecto EDU2013-41141-P y EDU2016-74848-P (MEC), Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2004). Ideas estocásticas fundamentales ¿Qué contenidos se debe enseñar en la clase de probabilidad? En J. A. Fernandes, M. V. Sousa y S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística. Actas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 9-30). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Batanero, C., Gea, M. M., Arteaga, P. y Contreras, J. M. (2014). La estadística en la educación obligatoria: Análisis del currículo español. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, *14*(2). http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/.

Borovcnik, M. y Kapadia, R. (2014). From puzzles and paradoxes to concepts in probability. En E. J. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives* (pp. 35-73). New York: Springer.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics. Didactique des mathématiques, 1970-1990*. London: Kluwer.

Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Universidad de Granada.

Engel, J. y Sedlmeier, P. (2011). Correlation and regression in the training of teachers. En Batanero, C., Burrill, G. F. y Reading, C. (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics- challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE study* (pp. 247-258). Dordrecht: Springer.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, *6*, 187-205.

Konold, C. (1994). Teaching probability through modeling real problems. *The Mathematics Teacher*, *87*(4), 232-235.

Lesser, L. (1998). Countering indifference – Using counterintuitive examples. *Teaching Statistics*, *20*(1), 10-12.

M.E.C.D. (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte). (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la educación secundaria obligatoria y del bachillerato*. Madrid: Autor.

Shannon, C. E. y Weaver, W. (1949). *A mathematical model of communication. Urbana*. IL: University of Illinois Press.

Ortiz, J. J. (1999). *Significado de los conceptos probabilísticos elementales en los textos de Bachillerato*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

RELACIONES DIDÁCTICAS Y OPERACIONES INTELECTUALES IMPLICADAS EN LA CONSTRUCCIÓN DEL NÚMERO NATURAL

Francisco Emmanuel González Ángeles, María Bertha Fortoul Ollivier
Facultad de Humanidades y Ciencias Sociales, Universidad La Salle. (México)
fga_1994@hotmail.com; bertha.fortoul@ulsa.mx

RESUMEN: El objeto de estudio de esta investigación se enfocó en reconocer las situaciones didácticas que favorecen el desarrollo de las operaciones de seriación, clasificación y correspondencia, con diferentes agrupamientos cardinales de elementos discretos, en "escenarios numéricos" relativos al conteo, en alumnos de tercer grado de primaria. El propósito de la investigación fue identificar cómo el niño elabora la correspondencia de los cálculos relacionales, al utilizar la estrategia de comparación en su regularidad numérica, en una sucesión con números naturales, reconociendo la composición y descomposición cardinal, en su reversibilidad operatoria, sin que pierda sus propiedades y características numéricas en una serie. Se consideró el enfoque basado en la solución de problemas, con base a la utilización de estrategias de elaboración con base en objetos concretos e imágenes visuales, representantes de los contextos sociales de referencia utilizados.

Palabras clave: relaciones didácticas, aprendizaje, número natural.

ABSTRACT: The object of study of this research has been focused on recognizing the didactic situations that favor the development of series, classification and correspondence operation, with different cardinal arrangements of discrete elements in "numerical scenes", related to counting, for third- grade students of primary schools. The aim of the research was to investigate how the child elaborates the correspondence of the relational calculus when using the comparison strategy throw its numerical regularity in a sequence of natural numbers by recognizing the cardinal composition and fragmentation in its operatory reversible nature, without losing its numerical properties and characteristics in a series. The work considered the approach based on problem solving, as a basis for the use of elaboration strategies supported by concrete objects and visual images representing the social contexts of reference they used.

Key words: didactic relations, learning, natural number.

Introducción

Este reporte de investigación presenta los avances obtenidos en las indagatorias realizadas en el aula de tercer grado, en una escuela pública regular, como parte de un proyecto de tesis para la obtención del grado de Licenciatura en Educación Primaria. Su propósito fue el de identificar los modos y estrategias didácticas que son relevantes en la formación de los niños de este grado escolar, cuando son objeto de mediaciones para la construcción de las operaciones de *clasificación*, *seriación* y *correspondencia* y su respectiva comprensión y uso del número natural en diferentes contextos y situaciones problema de carácter social, teniendo en foco el análisis de las respuestas dadas por estos niños, de acuerdo a categorías de análisis como son los argumentos utilizados para dar respuestas a la solución de problemas, al trabajar con conjuntos discretos para el conteo, diferenciando entre la cardinalidad (clase numérica) y la ordinalidad (transitividad y reciprocidad cuantitativa), a fin de identificar, reconocer y definir algunas estrategias didácticas que facilitan el logro de aprendizajes que resulten acordes a los intereses de los niños al elaborar la construcción de estos conocimientos. Se consideran las estrategias didácticas utilizadas por los niños como instrumentos de investigación, ya que se busca advertir cómo es que los alumnos desarrollan habilidades lógicas para un uso de conocimientos aritméticos que se relacionaran específicamente con el conteo y la comprensión de la serie numérica de orden ascendente y descendente, en un primer momento de forma intuitiva y, después, con base en la utilización de ordenadores verbales y gráficos, que les permitan ejecutar y dar solución acertada a las operaciones intelectuales correspondientes y a los problemas implicados.

Al conjunto de estrategias constructivas y de contextualización que se utilizaron como instrumentos de investigación se les nombró “Escenarios numéricos”, por ser éstos y su uso exitoso una herramienta que ubica al niño en un contexto cercano y cotidiano para la construcción y competencia matemática en la solución de problemas que se le presentan en su entorno sociocultural.

Preguntas de investigación

Las preguntas que orientan la investigación fueron las siguientes ¿Cuál es el proceso que siguen los alumnos de 3° grado sobre el dominio de las operaciones intelectuales para la construcción del número natural? ¿Qué situaciones de aprendizaje favorecen el transito del pensamiento concreto al pensamiento abstracto en el dominio de las operaciones intelectuales fundamentales?

Marco teórico

Teorizar sobre los diferentes contextos educativos es un acto complejo cuando lo que se busca es ligar las perspectivas y confrontaciones de lo que como investigador se esté abordando en el fenómeno educativo que se estudia y lo que se quiere conocer de él. En este estudio se buscó enfatizar sobre las formas en las que los niños del segundo ciclo de Educación Primaria construyeron el conocimiento aritmético en contextos de educación escolarizada en la escuela regular, pues fue este espacio el escenario de investigación donde se llevó a cabo el trabajo de campo. El grupo de niños en estudio favoreció la obtención de diversas significaciones sobre lo que fue aprender matemáticas en un contexto y ambiente de aprendizaje definido y exprofeso. Esta experiencia de investigación señala la importancia de la necesidad de trasladar los "escenarios numéricos" al salón de clase, como una estrategia didáctica fundamental, es decir, favorecedora del grado de impacto y disposición cognitiva, afectiva, emocional y operacional del aprendiz hacia la posibilidad de la construcción del aprendizaje de los contenidos matemáticos considerados en esta investigación. La relación lograda entre estos componentes didácticos, se expresan en la Figura 1.

Figura 1. Relación tríadica implicada en la construcción del concepto de número. Fuente: Cordero (1998). Elaboración por parte del investigador.

Para Cordero (1998), una de las formas en que se hace evidente la existencia de un conocimiento matemático en el contexto escolar es a través del homorfismo, que consiste en el hecho de hacer pasar al niño de una situación *real* a la representación o simulación didáctica; en este sentido no solo se trata de ponerle en conflicto cognitivo (Piaget, 1987), a través de la interacción con los objetos de aprendizaje, si no que logre establecer relaciones intelectuales para dar solución a la situación problema planteada, con base en la interpretación correspondiente y el logro de la representación de la realidad del niño que tiene enfrente, de tal forma que así esté de este modo en circunstancias óptimas para aprobar o refutar sus propias hipótesis.

Por lo arriba expresado es que se pide en las aulas de primaria que se haga explicito lo que cada alumno va construyendo para que mediante el intercambio de ideas con sus pares puedan elaborar la reformulación de los saberes que cada uno ha gestado. El papel de las ideas antes mencionadas para la construcción del conocimiento y uso exitoso del número natural busca dar sentido a la necesidad de conocer por medio de aproximaciones teóricas y acercamientos epistemológicos que, según Cordero

(1998, p.18), quien menciona que las aproximaciones teóricas son aquellas aportaciones donde se formulan hipótesis sobre lo que se espera que el estudiante debe construir, a fin de buscar la construcción de evidencias resultantes de las interacciones escolares, con base en el diseño e implementación de situaciones para después analizar los datos obtenidos, para que con ello se revisen las hipótesis formuladas y se defina su grado de asertividad.
Los resultados de investigación se pueden obtener desde los siguientes enfoques:

- El origen empírico: el entendimiento y las diferentes clases de competencias y concepciones de los niños de los conceptos matemáticos al ser utilizadas en las interacciones escolares deben de tener un origen y sentido matemático.
- Los acercamientos epistemológicos: las preguntas de investigación en el campo de la matemática educativa pueden ser restringidas a la naturaleza y funcionamiento del conocimiento matemático *in situ*, ya que una de las primeras restricciones es sobre la naturaleza misma de la disciplina, pues se condiciona a las visiones de la matemática en conjunción con la psicología y su funcionamiento operativo, al estar enmarcada en la visión social a la que pertenece el alumno y a su aplicación conceptual a la vida real.

Con relación a la aplicación conceptual de los números naturales a la vida real, los aportes de Gelman y Gallistel (1978) y Gelman y Meck (1983), sobre los cinco principios fundamentales del conteo, ponen de manifiesto la necesidad de la relación directa con los objetos concretos de conjuntos discretos para identificar las cardinalidades correspondientes en acciones matemáticas que fundan su comprensión. Ellos son la *correspondencia biunívoca uno a uno*, *el orden en la seriación*, *la cardinalidad* para la representación de los conjuntos, *el principio de abstracción* y *la independencia numérica en el orden de las cantidades*, al obtener un resultado determinado, como consecuencia de elaborar operaciones cognitivas de cuantificación. Además, se debe elaborar su relación para que los alumnos se habiliten en identificar, plantear y resolver diferentes tipos de situaciones que den lugar al progreso en el dominio de las operaciones intelectuales de conteo, con base en la *clasificación*, la *seriación* y la *correspondencia* (Piaget, 1987).

La manipulación de objetos, la comparación cuantitativa de colecciones y el conteo sin obstáculos de conjuntos discretos para dar lugar a la abstracción correspondiente y a la respectiva representación gráfica, que lo ubica en otro plano cognitivo.

Estos referentes teóricos son base para comprender los procesos de construcción del concepto del número natural y su relación con la habilidad para contar (seriación cuantitativa), que tiene su génesis en el aspecto cardinal para dar lugar a la ordinalidad, y sus respectivas manifestaciones a través de la señalización, sea oral o mental con las palabras-número o los signos numerales.

Las situaciones de conteo se ven, entonces, contextualizadas en prácticas tales como identificar, “mayor que”, “menor que” o “igual que”, al comparar los conjuntos cardinales o en acciones más cotidianas como lo puede ser la compraventa de algún artículo, etc., de aquí que la exploración sobre la importancia de los “escenarios numéricos” fuera trascendente para identificar las experiencias tenidas al elaborar estas construcciones de conocimiento por parte de los niños, así como el logro de la identificación con su respectivo contacto con los nombres de los números. La construcción de la relación en los niños de los esquemas numéricos con el lenguaje correspondiente, hacia cualquier dirección de representación, por ejemplo, identificar la serie numérica, sea ascendente o descendente en su antecesor y sucesor o específicamente en su agrupamiento o desagrupamiento, de acuerdo a lo propuesto por Gelman y Galistell, (1978), con el principio de “orden estable” o la “correspondencia biunívoca”, cuando la comparación relacional logra establecer la vinculación “uno a uno” entre los elementos discretos, los cuales deben ser contados una sola vez. Se advierte la conexión entre objeto, imagen mental lograda y palabra, según D´Amore (2015, p. 9-25), pues el hecho de asumir que el niño forma modelos cognitivos completos sobre el conteo, de forma simple, es un error de la docencia actual, pues son procesos complejos para encontrar semejanzas y diferencias cardinales y ordinales entre los diferentes conjuntos para poder establecer las respectivas deducciones numéricas.

La construcción social del conocimiento, según Edwards y Mercer (1987) se entiende como una elaboración del niño que se expresa en las interacciones orales con los pares, al tener necesidad de compartir lo que ha podido construir y, de esta manera, configurar los ajustes producidos colectivamente en el aula escolar sobre su propio conocimiento, bajo un mecanismo de “ayuda ajustada” (Vygotsky, 1978).

Método

Esta investigación es de corte cualitativo, con un enfoque exploratorio interpretativo. Con base en él, se analizaron las acciones didácticas y epistemológicas que sucedieron en el trabajo de campo, con base en la confrontación teórica arriba expresada. El foco de análisis se abocó a la Investigación-Acción-Participante (Ferrandíz, 2014), con apoyo en el registro etnográfico y categorías de análisis de carácter constructivo-didáctico, epistemológico y socioepistemológico, haciendo uso de la técnica de análisis y reflexión de las acciones para el logro del aprendizaje, realizadas en la clase de Matemáticas. Se llevó a cabo el registrar de forma etnográfica por video grabación, la dinámica didáctica seguida en esta clase.

La metodología utilizada para el análisis de los datos estuvo en función de la perspectiva de Stenhouse (1998), al poner al descubierto lo que se hace en los “escenarios numéricos” de aprendizaje. Las observaciones fueron participantes, ya que esta condición facilitó la creación de relaciones sociales de empatía con los sujetos de investigación, incrementando la calidad de los datos recuperados y ubicando al investigador como un miembro más de la dinámica social de aprendizaje. Esta visión la sostiene De Ibarrola (1987), quien dice que, "la etnografía constituye un recurso metodológico básico para comprender la vida cotidiana escolar". Por otro lado, desde la visión de la etnografía educativa, la tarea del investigador, a decir de Bertely (2000) estriba en comprender desde dentro y en situaciones específicas, las representaciones sociales, oficiales o no oficiales, escritas u orales que conforman el entramado cultural de la educación escolarizada, porque tiene que ver con la orientación epistemológica de la que parte el investigador para recopilar los datos. El análisis cognitivo realizado tuvo por foco la advertencia de la correspondiente construcción intelectual realizada por los niños en esta aula específica, con base en la construcción de las operaciones de *clasificación*, *seriación* y *correspondencia* y su relación con los principios de conteo.

Resultados

Se identificó en los resultados del análisis de la información que algunos alumnos tienen un dominio parcial de las habilidades del conteo para dar cuenta de los conceptos relativos al conjunto de los naturales, ya que el ordenamiento de cantidades, noción que resulta relevante en términos de competencias para la adquisición de conocimientos aritméticos más complejos, se observó que su uso se lleva a cabo de forma mecánica y sin comprensión conceptual.

Se identificó la inclinación de los niños por la realización de dibujos, como un elemento fundamental de apoyo para la representación gráfica de los numerales, en tanto que la función simbólica permitió la representación de lo *real* como mediación de los significantes distintos de las cosas significadas (Piaget y Inhelder,1984). Del mismo modo, se impuso la falta de identificación de la seriación cualitativa, es decir que no reconocieron la secuencia de las cualidades cuantitativas de los conjuntos para ordenarlas de mayor a menor o viceversa, dado que se encontraban en el proceso de construcción de esta habilidad intelectual. A partir de las respuestas dadas por los niños y los resultados obtenidos se ajustó, ejecutó la propuesta de investigación educativa presente, a fin de obtener resultados precisos y validados sobre los aprendizajes logrados.

Estos resultados permitieron prefigurar las conclusiones de este estudio, además de las respuestas a las preguntas de investigación. Los elementos recuperados en el análisis se plantearon en las siguientes proporciones, un 89.65% de los niños demostraron competencia cualitativa en la seriación, un 6.89% no lo lograron y un 3.44% se encuentran en proceso. Con respecto a la seriación cuantitativa, un 55.17% de los niños se encontraban en proceso de construcción de dicha habilidad; un 37.93% se ubicaron como competentes y un 6.89%, no lo había logrado; lo cual demuestra que el dominio en la progresión de las series numéricas a partir de 2 elementos, consecutivamente, deberá incentivarse en esta aula con base en plantear la integración de conjuntos, con base en el principio de agrupamiento y desagrupamiento y las respectivas representaciones gráficas de los numerales que integran la serie numérica. El 44.82% de los estudiantes demostró competencia para establecer correspondencias cardinales con cada numeral y relacionarlas significativamente con sus representaciones gráficas, a la vez que un 37.93% se encontró en proceso de construcción de este proceso. Finalmente un, 17.24% no expresó alguna evidencia sobre las nociones de la composición y descomposición de una cardinalidad sin que ésta perdiera sus características numéricas, y su lugar en la serie.

En cuanto al establecimiento de las relaciones *uno a uno* entre elementos, el 58.62% arrojó evidencia de tener competencias para lograr estas relaciones; mientras que el 27.58% se ubicó en el proceso de transitar del pensamiento unívoco al pensamiento biunívoco. El 13.79% de los estudiantes no logró la habilidad intelectual anterior, ni la clasificación cuantitativa de conjuntos, ubicando los términos <, >, =.

Conclusiones

Los resultados obtenidos del análisis arrojaron que existe cierto dominio de la habilidad en el uso de la *clasificación*, la *seriación* y la *correspondencia*, pues hubo evidencia en la solución de los problemas correspondientes al "escenario numérico", en el que los niños aplicaron los principios del conteo correctamente (Gelman y Galistell, 1978), y utilizaron las operaciones intelectuales idóneas en la solución de los diferentes planteamientos en el "escenario numérico", que sirvieron de instrumento de investigación. La habilidad que demostraron los niños para ubicar grupos y subgrupos del conjunto cardinal base (composición y descomposición de un cardinal), se encontró en proceso parcial de construcción, por lo que resultó relevante en esta investigación y sugirió prestar atención en futuras investigaciones, que pudieran poner énfasis a este aspecto, por pertenecer a un proceso de construcción cognitiva fundamental, en el desarrollo del pensamiento lógico matemático.

Se considera que los niños de 3°B lograron algunos procesos de consolidación en la construcción del concepto del número natural, de acuerdo al diseño de los "escenarios numéricos" presentados para plantear conflictos cognitivos contextualizados y significativos para ellos.

Los resultados de investigación obtenidos dieron respuesta a la importancia de las acciones directas con el objeto de conocimiento y sobre la necesidad de ubicarse en contextos de referencia cotidianos para llevar a cabo la construcción de su aprendizaje, así como para transformar sus conocimientos previos en planteamientos cognitivos específicos y productivos, al tener contacto con los "escenarios numéricos" presentados como instrumentos de investigación.

Los "escenarios numéricos" utilizados como instrumentos de investigación, permitieron conocer las interacciones que tienen los niños para la construcción del saber matemático, al identificar los esquemas cognitivos que necesitan para poder interactuar didácticamente en el desarrollo del conocimiento que se pone en juego en el aula, en cuanto a su evolución y funcionalidad como puede observarse en la siguiente Figura 2.

+

Figura 2. Participación de los niños en el escenario numérico denominado "Restaurante".

La identificación de los datos y el análisis de las variables que sirvieron para enmarcar el problema de investigación, fueron indicadores de las maneras y los modos en que los niños se desempeñan en el aula escolar, así como los efectos provocados en ellos cuando tuvieron necesidad de organizar su aprendizaje, dando al objeto de conocimiento un sentido y un significado real.

El planteamiento y análisis epistemológico-didáctico realizado en la información recuperada en el campo de investigación, arrojó elementos a considerar como valiosos para la formación de los niños que cursan la primaria, pues señalaron lo determinante que puede llegar a ser un "escenario numérico" de aprendizaje para el logro en la construcción de los contenidos curriculares propuestos por la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2011).

Referencias bibliográficas

Cordero, F. (1998). *Cognición y enseñanza. La distinción y formación de construcciones en la didáctica de la matemática*. Serie: Antología número 3. Programa editorial: Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, pp. 1-45 México. Centro de Investigación de Estudios Avanzados del IPN.

Bertely, Busquets M. (2000). *Conociendo nuestras escuelas. Un acercamiento etnográfico a la cultura escolar*. Colección Maestros y enseñanza núm. 6, México: Paidós.

D´Amore, B. (2015). Primeros elementos de Didáctica de la Matemática. En L. Hernández, J. Juárez, J. Slisko (Eds), *Tendencias en la educación matemática basada en la investigación.* (pp. 9-25). México: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

De Ibarrola, M. (1987). *La formación del investigador en México, Avance y Perspectiva*. número 33- México, Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.

Edwards, D. y Mercer, H. (1987). *Common Knowledge*. Londres: Methuen/Routledge Trad. cast. (1988). El conocimiento compartido: El desarrollo de la comprensión en el aula, Barcelona: Paidós-MEC.

Ferrándiz, F. (2014). *Etnografías contemporáneas. Anclajes, métodos y claves para el futuro*. Madrid: Anthrophos.

Gelman, R. y Gallistel, C. (1978). *The child's understanding of number*, Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Gelman, R. y Meck, E. (1983). Preschooler's counting: principles before skill. *Cognition 13*, 343-3609.

Piaget (1987). *Introducción a la epistemología genética*. Buenos Aires: Paidós.

Piaget, J. y Inhelder, B. (1984). *Psicología del niño.* Madrid: Morata.

SEP (2011). *Programa de Estudios de Tercer Grado de Educación Primaria*. México: Secretaría de Educación Pública.

Stenhouse, I. (1998). *La investigación como base de la enseñanza*. Madrid: Morata.

Vygotsky, L.S. (1978). *Pensamiento y Lenguaje*. Madrid: Paidós.

LA REFLEXIÓN COMO VÍA DE APRENDIZAJE DE LAS FRACCIONES

Carlos Baltazar Vicencio, Marta Elena Valdemoros Álvarez
CINVESTAV-IPN (México)
cbaltazarv@hotmail.com, mvaldemoros@cinvestav.mx

RESUMEN: Se reporta una investigación donde se aplica un programa de instrucción distinto al que tiene lugar en la escuela elemental (enseñanza experimental) con el propósito de inducir nociones básicas vinculadas a las fracciones en alumnos que no han tenido experiencia escolar con esos números. Las actividades giran en torno a la reflexión de los alumnos sobre las acciones realizadas. A partir de dicha reflexión, los alumnos lograron nombrar y escribir algunas fracciones como resultados de repartos. Se seleccionó un grupo de tercer grado de primaria de una escuela que pertenece al sector particular incorporado a la Secretaría de Educación Pública, localizada en una zona urbana de la Ciudad de México. Los instrumentos metodológicos que se consideraron en la investigación son: la observación, la entrevista y el programa de enseñanza experimental. Los resultados permiten distinguir cuatro maneras como los alumnos establecen la relación entre los componentes propios de las fracciones y la organización que hace de ellos en su pensamiento reflexivo.

Palabras clave: fracciones, reflexión, aprendizaje, reparto.

ABSTRACT: This research deals with a study where a teaching program that is different from the elementary school program (experimental teaching) is used. The aim of this work is to induce basic notions related to fractions in those students who have not had any school experience with this kind of numbers. The activities are focused on the students´ reflection about the actions carried out. From this reflection on, the students could mention and write some fractions obtained after the distributions. A group of the third-grade students from a private primary school of the Public Education Department, located in the urban sector of Mexico City, was chosen. The methodological instruments taken for granted in this research were: the observation, the interview and the experimental teaching program. The results allow distinguishing four ways in which students establish the relationship between the fractions own components and how they organize them by means of the reflexive thinking.

Key words: fractions, reflection, learning, distribution.

Introducción

El estudio de las fracciones es la problemática que se aborda en la investigación reportada dado que la no comprensión de ese tipo de números contribuye a la distorsión de conocimientos de la aritmética que se tratan en la escuela primaria, así como a la distorsión de conceptos que se construyen en la secundaria y preparatoria.

La mayoría de las investigaciones que se han realizado sobre propuestas de enseñanza de las fracciones se enfocan principalmente en el diseño de actividades y materiales (concretos y virtuales) que puedan ayudar a los alumnos en la comprensión de los números fraccionarios (Lerman, 2014). Sin embargo, son pocas las investigaciones que se han centrado en la actividad mental y el pensamiento, en particular, del alumno en el aprendizaje de las fracciones. De acuerdo a la relevancia del problema y a los objetivos de nuestro estudio, nos centramos en dar respuesta a las siguientes preguntas: ¿De qué manera la abstracción reflexiva contribuye a que los alumnos den sentido a las fracciones, en situaciones de reparto? ¿Cómo evolucionan las ideas de los niños acerca de las fracciones a partir de la reflexión realizada sobre sus acciones, en situaciones de reparto? Fijándonos los siguientes objetivos del estudio: a) Desarrollar una propuesta de enseñanza que permita promover la abstracción reflexiva de los alumnos para que den sentido a las fracciones en escenarios de reparto y b) Identificar lo que comunican los alumnos a partir de las reflexiones, individuales y colectivas, realizadas sobre lo que hacen al resolver tarea de reparto que originan fracciones.

Partimos de las circunstancias de reparto para inducir a los alumnos en el estudio de las fracciones porque esas situaciones son realizadas por ellos aún antes de iniciar su enseñanza escolar, y porque en el reparto se trabaja con una relación fundamental para la comprensión de la fracción, la relación parte-todo.

Marco Teórico

Piaget (2001) distingue dos tipos básicos de abstracción: la abstracción empírica y la abstracción reflexiva. Identifica a la abstracción empírica como la que el sujeto realiza a partir de las características que observa en los objetos o de sus acciones sobre las características materiales de esos objetos. Indica que la abstracción reflexiva es el proceso por el cual el sujeto construye conocimientos sistemáticos que se producen a partir de los conocimientos previos. También señala que la reflexión es una de las fuerzas motrices del desarrollo cognitivo de los sujetos. Entonces, si la reflexión es fundamental para esa evolución del pensamiento de los alumnos, se hace imprescindible que la abstracción reflexiva sea promovida desde la escuela. En el programa de enseñanza experimental motivo del estudio se parte de las abstracciones empíricas de los estudiantes para llevarlos, a través de preguntas planteadas por el investigador, hacia la reflexión sobre sus acciones, reflexión que les permitió desarrollar algunas nociones básicas respecto de las fracciones.

Para desarrollar el programa de enseñanza se considera el significado de la fracción como cociente. Respecto del conocimiento del número racional, Kieren (1983) afirma que éste es un contenido matemático complejo cuya construcción contiene algunas experiencias que comprenden herramientas del pensamiento como las particiones, la identificación de partes y la formación de equivalencias. El mismo investigador menciona que en la expresión a/b se encierran cinco constructos (significados de acuerdo a los autores de este escrito) de la fracción: cociente, medida, operador, razón y relación parte-todo. Él mismo define a la relación parte-todo como un todo que es cortado en partes iguales, y utiliza la idea de fracción para cuantificar la relación entre un número designado de partes y el todo. También Kieren (1983) afirma que existe una íntima correspondencia entre el constructo de cociente y la relación parte-todo, ya que ese significado de la fracción permite la cuantificación de los resultados cuando se divide una cantidad en un número determinado de partes.

Varias investigaciones (Kieren, 1983; Streefland, 1993; Lamon, 1996) sugieren que las acciones de reparto son una vía para la construcción de la fracción, dado que son acciones que los niños realizan con cierta familiaridad. Por lo anterior, en la investigación que se reporta, se hace uso de actividades de reparto para guiar las reflexiones de los alumnos.

Con las actividades de reparto se hace surgir la necesidad de realizar particiones. Con relación a la partición, Kieren (1983) la define como una equidivisión de una cantidad en un número dado de partes y la considera como la idea base para la relación parte-todo. Observa de este mecanismo de construcción tres aspectos importantes: primero, que es un tipo de clasificación o asignación basado en el criterio de igualdad y suficiencia, teniendo una génesis social en la acción de repartir; otro aspecto es la relación con el lenguaje que describe el acto y el tercero, muestra que para los niños la partición, el tamaño y la medida pueden ser bastante independientes. Por su parte, Lamon (1996) define a la partición como una operación que genera cantidad, basada en actividades intuitivas y el conocimiento informal del niño acerca del reparto equitativo, el que consiste en la determinación de particiones iguales y se ve como una operación de múltiples etapas: marcar objetos, cortarlos e indicar claramente la porción que le corresponde a cada persona.

De acuerdo con los principios de la matemática realista, Streefland (1993) afirma que cuando los estudiantes son iniciados a partir de experiencias ligadas a la realidad, ellos solos pueden cruzar el límite de las matemáticas para estructurar, simbolizar, esquematizar y muchas otras acciones más. De acuerdo con lo anterior, en el programa de enseñanza que se reporta se propusieron actividades cercanas a la cotidianeidad de los alumnos participantes en la investigación. En el mencionado programa se propusieron tareas para que los alumnos dieran significado a algunas nociones básicas en torno a las fracciones, como la partición, la equivalencia y las unidades, así como para que ellos realizaran sus propias escrituras para dichos números.

En el programa de enseñanza adquirieron especial relevancia los diálogos entre los niños, entre los niños y el investigador, así como el diálogo que el niño realiza con él mismo, con la intención de conocer lo que los estudiantes pensaban ante cualquier tarea. En estos diálogos fueron promovidas las relaciones intrasubjetivas e intersubjetivas (Vygotsky, 1995); las primeras para que el alumno reflexionara sobre sus propias ideas y las segundas, para promover que los alumnos ratificaran o rectificaran sus ideas iniciales a través del intercambio de puntos de vista con sus iguales y con el investigador.

Método

Los sujetos del estudio

Se seleccionó un grupo de tercer grado de primaria, integrado por 16 niños de ambos sexos con edades entre 7 y 9 años. La escuela del grupo elegido pertenece al sector privado incorporada al Sistema Educativo Nacional y se encuentra ubicada en una zona del área urbana de la Ciudad de México.

Instrumentos metodológicos considerados en la investigación

Observación. Se observó 2 sesiones, una antes y otra después de la aplicación del programa de enseñanza experimental. El objetivo de la primera observación fue detectar las formas como los alumnos resolvieron tareas de reparto sin que se llegaran a generar fracciones. En la segunda observación se pretendió observar la forma como el programa de enseñanza experimental pudo influir en el trabajo de la profesora del grupo motivo de la investigación.

Entrevistas individuales. Fueron semiestructuradas y audiograbadas. Se aplicó a dos alumnos y a la profesora. Se realizaron en dos momentos de la investigación: antes y después de la aplicación del programa de enseñanza experimental. Las entrevistas iniciales con los alumnos se diseñaron siete tareas para indagar lo que hacen cuando se enfrentan por primera vez a situaciones que originan fracciones antes de iniciar su enseñanza escolar, incluyendo las formas como pueden expresar los resultados de esos repartos y con la maestra se pretendió averiguar sus ideas acerca de las fracciones, del reparto y de la reflexión. El objetivo principal de las entrevistas finales con los alumnos fue registrar los cambios que el programa de enseñanza hubiera potenciado, así como realizar retroalimentación (Valdemoros, 1997). En cuanto a la entrevista final con la maestra, se pretendió que valorara el programa de enseñanza que el investigador llevó a cabo con sus alumnos y averiguar las modificaciones que se hubieran dado en torno a las ideas de la docente sobre de la reflexión.

Programa de enseñanza experimental. El programa de enseñanza estuvo integrado por diez sesiones, de cuarenta a cincuenta minutos cada una, las cuales se desarrollaron en once intervenciones en el aula. En todas las sesiones, la intervención del investigador se enfocó principalmente en la promoción de las reflexiones de los estudiantes. En este programa de enseñanza se propusieron tareas donde surgieron fracciones propias e impropias usando medios y cuartos, con todos continuos y discretos.

Resultados

La observación

Los resultados obtenidos en la observación inicial revelan una enseñanza donde los alumnos tienen libertad para expresar sus ideas. La maestra limita la reflexión de los alumnos a la socialización de los resultados de los problemas y de las estrategias para encontrarlos. En cuanto a la observación final, los resultados permiten afirmar que la maestra fue influenciada en dos aspectos principales: en cuanto al tipo de problemas propuestos y respecto a la forma de promover amplias reflexiones en los alumnos. En este último aspecto, la docente realizó un seguimiento más cercano de las respuestas de los alumnos invitándolos de manera constante para que argumentaran sus respuestas y buscaran diversas formas de expresar sus ideas.

Las entrevistas

En las entrevistas iniciales, los alumnos lograron resolver las tareas de repartos desarrollados en todos continuos y discretos. Usaron las expresiones “mitad” y “pedazos” para referirse a los medios y cuartos de los todos continuos. Utilizaron el conteo y los números naturales para determinar los resultados de los repartos de todos discretos. En la entrevista inicial, la maestra reconoció a la fracción en la relación parte-todo y concibe a la reflexión de los alumnos como el intercambio de ideas para resolver una tarea, compartir sus estrategias de resolución y desarrollar nuevas nociones de fracción.

En las entrevistas finales, los estudiantes lograron expresar numéricamente, con fracciones propias e impropias, los resultados de repartos de todos continuos Uno de ellos pudo usar las fracciones para determinar el resultado de un reparto de un todo discreto. Por su parte, la maestra dio muestras de ampliar su idea de las fracciones hacia el significado de cociente (ligado al reparto) y aceptó que los receptores no siempre son personas. Ella misma, identifica a la reflexión como parte importante del proceso de aprendizaje de los alumnos y destaca la importancia del docente como quien debe provocar esa reflexión a partir de preguntas en el transcurso de todas las actividades de aprendizaje de los alumnos.

Programa de enseñanza

Cuando los alumnos enfrentaron diversas situaciones que generaron fracciones, desarrollaron nociones alrededor de esos números, usando una cantidad variable de elementos y estableciendo diversas relaciones entre ellos. De esa manera se distinguieron los siguientes cuatro casos:

1. Con pocos o un único componente y escasa organización en el pensamiento reflexivo del niño. Los alumnos utilizaron pocos elementos para realizar sus elaboraciones y los organizaron usando pocas relaciones, sin embargo este logro no es trivial, requiere de grandes esfuerzos

por parte de los alumnos. Por ejemplo, cuando los alumnos lograron establecer la relación entre el numerador y el denominador para aceptar a la fracción como el número que cuantifica el resultado de un reparto. En este caso consideramos como elementos al numerador y al denominador, organizados de manera que se integraron en un solo número bajo la forma de fracción.

2. Con pocos o un único componente y alta organización en el pensamiento reflexivo del niño. Esta situación se refiere a las producciones de los alumnos cuando utilizaron pocos elementos pero con varias relaciones entre ellos. En este caso se consideran las reflexiones cuando los alumnos logran pasar de la expresión "la mitad" a "1/2". Los elementos que intervienen en esta situación son "la mitad" y "1/2" considerando una serie de relaciones como la necesidad de partir un objeto para poderlo repartir y el uso de diversas formas de particiones, hasta la escritura fraccionaria de ½, asignado a la relación entre el numerador y el denominador de la fracción como cociente (vinculado al reparto).
3. Con muchos componentes y una organización elemental en el pensamiento reflexivo del niño. Así, la mayoría de los alumnos logró transferir la relación entre el numerador y el denominador de una fracción dada a cualquier situación de reparto, propuesta como un problema, donde el niño generalizó a nuevas situaciones sin modificar la fracción. Por ejemplo, para la fracción 7/4 propusieron los problemas: "En una dulcería hay 7 chocolates y 4 niños que se los quieren repartir justamente. ¿Cuánto le toca a cada uno?" y "Camila quiere repartir 7 pasteles entre 2 niños. ¿Cuántos pasteles le tocan a cada uno?".
4. Con muchos componentes y alta organización en el pensamiento reflexivo del niño. Podemos distinguir el caso de la equivalencia entre los resultados de un mismo reparto, como cuando lograron desarrollar la equivalencia de ½, ½ y ½ (en una relación aditiva) con 3/2 y con 1 ½. En este desarrollo se observa también el uso de pictogramas y líneas que relacionan el resultado del reparto que origina las fracciones motivo de esta denominación. Ver figura 1.

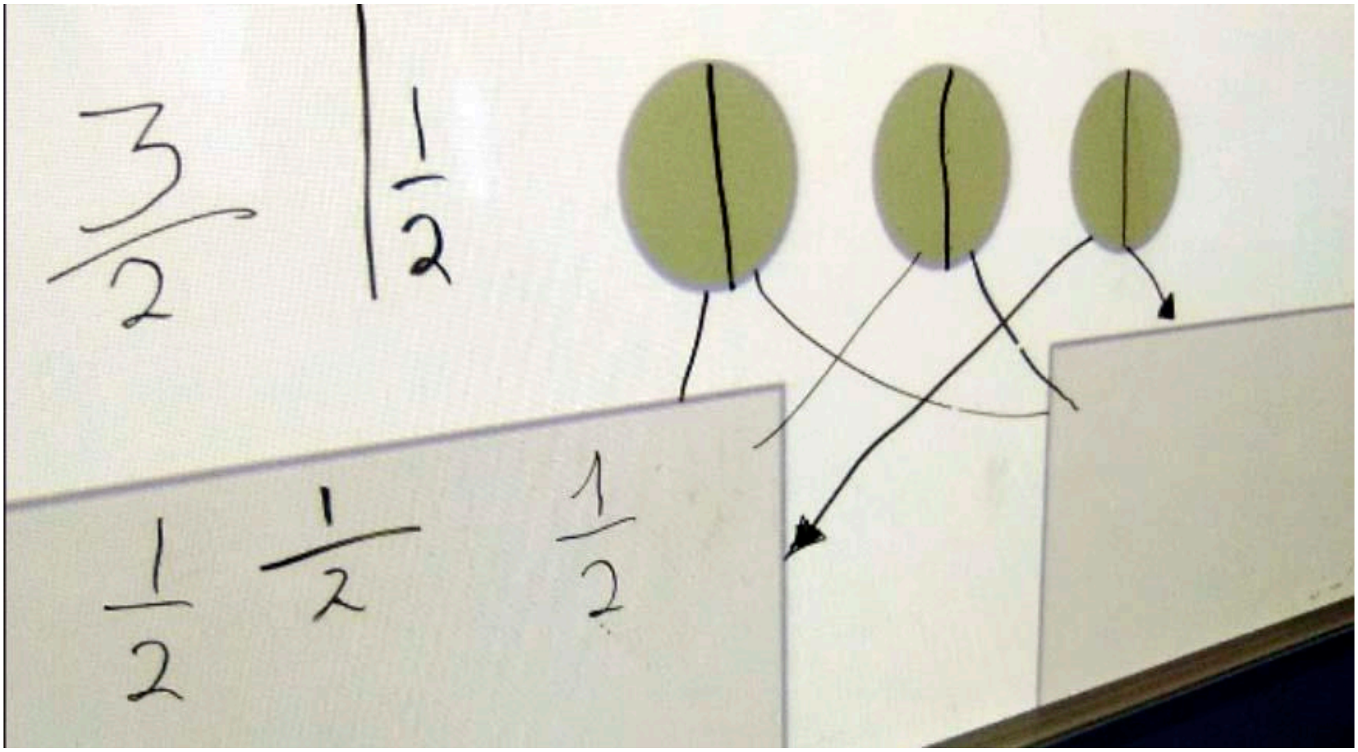


Figura 1. Expresiones fraccionarias para el resultado de repartir 3 objetos entre 2 destinatarios.

Otros resultados obtenidos en torno a las reflexiones, pensamientos intuitivos y notaciones de los alumnos, fueron:

- Pudieron descartar la idea de un par de números naturales en beneficio del reconocimiento del número de la forma a/b como un número por sí mismo y de una naturaleza diferente a la de los números naturales.
- Identificaron a las fracciones como un número que representa el resultado de un reparto.
- Propusieron sus propias formas de escribir las fracciones. Así propusieron las siguientes escrituras para la fracción ½: a) "3", donde establecieron una relación aditiva entre el número de objetos por repartir y el número de destinatarios; b) "12", donde usaron una yuxtaposición de números naturales: objetos (1) y destinatarios (2), dejando de lado el valor posicional de las cifras; y c) "1-2" donde distinguieron que el número de objetos por repartir (1) y el número de destinatarios (2) deben ser distinguidos de alguna manera.
- Logaron escribir de diversas formas el resultado de un mismo reparto.
- Designaron de modo personal a los números fraccionarios, como "números repartidores", "números cortadores", "números medios" y "números locos" (enfatizando tácitamente un cambio de sentido respecto a los números naturales). El alumno que los nombra "números locos" dio

evidencia que se niega a reconocer a las fracciones como números que pueden ser menores que 1, en un hondo arraigamiento con los números naturales (coincidiendo con lo planteado por Streefland, 1993), suponiendo con ello que este niño se niega a reconocer a otros números diferentes a los que él conoce. Ver figura 2.

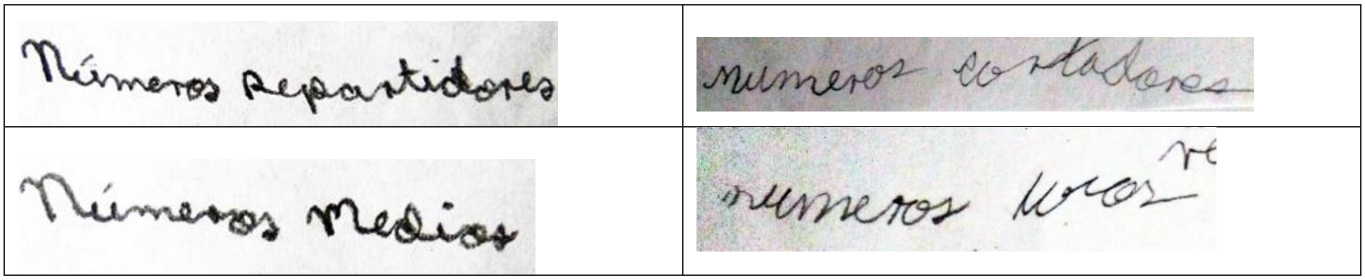


Figura 2. Nombres asignados por los alumnos a las fracciones.

Conclusiones

Los resultados obtenidos a través de los diálogos entre los alumnos y con el investigador, así como de los registros sobre las producciones de los estudiantes, permiten aseverar que las nociones básicas asociadas a las fracciones resultan difíciles para los alumnos que no han tenido experiencia escolar con ese tipo de números.

El uso de pictogramas (Valdemoros, 1997) es un recurso muy utilizado por los alumnos para establecer relaciones entre los distintos elementos que intervienen en el otorgamiento de sentido a las fracciones.

Los constantes diálogos permitieron a los alumnos reflexionar sobre sus actos y sus pensamientos. Esto los llevó a enriquecer sus estrategias de resolución así como a desarrollar las nociones básicas que en torno a las fracciones se pretendieron desplegar durante el programa de enseñanza.

Los alumnos transitan entre la abstracción empírica y la abstracción reflexiva realizando un movimiento en espiral dialéctica durante la construcción de algunas nociones básicas alrededor de las fracciones. En ese tránsito van de manera constante a sus experiencias para anticipar lo que pueden hacer al resolver nuevos problemas. Aunque, es necesario reconocer que en esa espiral ascendente se pueden presentar tránsitos regresivos, como pudimos observar en algunos momentos de la experiencia.

Podemos aseverar que la reflexión aporta elementos importantes para que los alumnos que se inician en el estudio de las fracciones logren identificarlas como números que cuantifican los resultados de una gran diversidad de repartos.

Referencias bibliográficas

Kieren, T. (1983). Partitioning, equivalence and the construction of rational number ideas. *Proceedings of the Fourth International Congress on mathemmatical Education.* Birkhauser Boston, E.E.U.U.

Lamon, S. (1996). Partitioning and unitizing. *Proceeding of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 233-239.

Lerman, S. Ed. (2014). Rational Numbers. *Encyclopedia of Mathematics Education.* 473-474, London, UK: Springer.

Piaget, J. (2001). *Studies in Reflecting Abstraction.* 1-27 y 303-322, New York, E.E.U.U.: Taylor and Francis.

Streefland, L. (1993). The design of a mathematics course a theretical reflection. *Educational Studies in Mathematics*, 25, 109-135.

Valdemoros, M. (1997). Recursos intuitivos que favorecen la adición de fracciones. Estudio de caso. *Educación Matemática*, 9, 5-17, México, México: Iberoamérica.

Vygotsky, L. (1995). *Pensamiento y lenguaje*. 197-229, Barcelona. España: Paidós.

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL Y SU RELACIÓN CON EL APRENDIZAJE FUERA DEL AULA EN EDUCACIÓN SUPERIOR

Guilherme Mendes Tomaz dos Santos, Francisco Emmanuel González Ángeles
Centro Universitário La Salle – Canoas (Brasil), Facultad de Humanidades y Ciencias Sociales, Universidad La Salle (México)
guilherme.santos@unilasalle.edu.br, fga_1994@hotmail.com

RESUMEN: Este trabajo tuvo como objetivo analizar el quehacer de los estudiantes de licenciatura de una Institución de Educación Superior (en adelante IES) en el segundo semestre fuera del aula para relacionar las actividades de autoestudio con el aprendizaje en la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral I. Para eso, se contó con 47 sujetos de la investigación, la cual fue un estudio exploratorio que resulta de un estudio de caso y su respectivo análisis. Como un resultado fundamental, se percibió que los estudiantes, en general, estudiaban individualmente una vez en la semana fuera de la clase, hasta por treinta minutos sin realizar ejercicios.

Palabras clave: cálculo diferencial e integral I, aprendizaje, ambiente áulico, enseñanza superior.

ABSTRACT: This work was aimed at analyzing the degree course students' out-of-class work in a Higher Education Institution in order to relate their self-study activities with their learning in the subject Integral and Differential Calculus I, during the second semester. Seven students were included in the investigation, which was a exploratory study as part of a case study, and its correspondence analysis. As the main result, the authors found that the students' out-of-class individual study takes place once a week, up to half an hour, without doing exercises.

Key words: integral and differential calculus, learning, classroom setting, higher education.

Introducción

El aprendizaje en Cálculo Diferencial e Integral I se encuentra históricamente marcado por una trayectoria reflejada en el fracaso estudiantil y en la deserción de la asignatura en el contexto internacional (Barufi, 1999 y Vitelli, 2012). Todavía, esa realidad puede ser resultante de múltiples factores, como el proceso de enseñanza, situaciones familiares, así como los conocimientos previos sobre la asignatura (Santos, 2014). Al respecto, las investigaciones apuntan que una de las causas de esta situación es que los estudiantes no tienen compromiso para con su propio aprendizaje y que llegan a la universidad con una seria deficiencia en los referentes necesarios para este curso que requiere álgebra, trigonometría, aritmética, entre otros saberes matemáticos (Cavasotto, 2010).

Sin embargo, se sabe qué factores relativos a la enseñanza y por lo tanto al profesor también contribuyen para el logro de un aprendizaje significativo o no (Gauthier et al, 2006). Como también lo señala González y Gaytán (2015) refiriéndose a las siguientes preguntas que debieran orientar la acción docente basada en la solución de problemas ¿Cuáles son los elementos didácticos que posibilitan dicha construcción? ¿Cómo el método de enseñanza pudiera facilitar el logro de los aprendizajes matemáticos? Pero, un sitio importante es investigar el hacer de los académicos fuera de la clase para saber por dónde transitar en este trayecto del Cálculo Diferencial e Integral I. Este “trayecto” se refiere entre otras cosas a la posibilidad de comprender las acciones que los universitarios emprenden para el aprendizaje de esta asignatura, lo que invita a repensar las decisiones que toman los directivos institucionales de modo que impacten de manera positiva en las estrategias metacognitivas que resulten en permanencia y mejor desempeño en Cálculo I.

De esta forma y partiendo de los presupuestos arriba mencionados, este trabajo tuvo como objetivo analizar el quehacer de estudiantes de un grupo de licenciatura de una Institución de Educación Superior en el segundo semestre del año 2013 fuera del ambiente áulico para poder relacionarlo con su aprendizaje formal en la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral I.

Marco Teórico

La realidad del Cálculo Diferencial e Integral I como ya se ha mencionado anteriormente se muestra de modo preocupante, no solamente para los estudiantes y profesores, sino también para las autoridades educativas, una vez que este escenario de fracaso puede comprometer todo un sistema, es decir, la permanencia del académico, la visión docente y los indicadores de calidad universitaria. De acuerdo con Vitelli (2012), la deserción y reprobación en la asignatura se encuentra cerca del 70% en una IES de Brasil. Ya para Barufi (1999), los datos del fracaso giran de los 30% a los 80%. Molon (2013) afirma que estos índices en una determinada institución tienen un promedio de 60%.

Estos datos, nos llevan a mirar la complejidad de los multifactores que atañen a la asignatura en el ámbito áulico e institucional, pues estos resultados son reflejo de un contexto de enseñanza, aprendizaje y toma de decisiones en las IES. En este sentir, se abordan y presentan algunas perspectivas teóricas que abordan esta asignatura, además de otros que puedan influir para la comprensión de algunas actitudes que puedan interpelar al presente estudio.

Rezende (2003), al realizar su tesis doctoral percibió que la problemática del Cálculo I es mucho más de origen epistemológica que de cualquier otra. Este autor sostiene que una de las causas de los elevados índices de fracaso, representados por la deserción y reprobación, ocurre desde los inicios en esta asignatura, una vez que se han establecido las “normalidades” de las dificultades. Para Rezende (2003), esta cultura contribuye para que así permanezcan los alumnos de bajos rangos y los alumnos que tengan altos rangos y un desempeño deseable, sean considerados en el imaginario social como “geniales” y que los maestros sigan con este rol, tradicional, unilateral y enciclopedista de la enseñanza que se propone.

Cavasotto (2012), realizó un estudio en nivel de maestría en el cual se percibe el proceso de enseñanza y aprendizaje de Cálculo I en una IES brasileña en el aula y las clases de tutoría. En esta investigación, se pudieron dar cuenta de que los estudiantes que participaron de la tutoría como actividad extracurricular tuvieron un mejor aprendizaje en la asignatura, así como los maestros percibieron estos datos reflejados en sus clases y pruebas, pues ellos, los estudiantes, estaban más preparados para las mismas. Cavasotto (2010) destaca la importancia de nivelar a los alumnos que llegan a universidad, pues la deficiencia en los conocimientos previos necesarios es un factor que predomina en las clases de las matemáticas, aún más en Cálculo que requiere gran parte de la base de matemáticas elementales para la realización de los cálculos complejos.

Ya Santos (2014), en su trabajo de tesis de maestría, al investigar el factor académico de los estudiantes que cursaban la asignatura en cuestión, focalizó su investigación en el compromiso de los académicos, destinando la atención para el quehacer antes, durante y después de la clase. En este estudio, el autor puede percibir las diferentes estrategias de aprendizaje utilizadas por los alumnos y que estas pueden contribuir o no para mejores desempeños en la materia, como, por ejemplo, el estudio colaborativo y/o individual, las anotaciones del contenido, las preguntas para prescindir las dudas, entre otros dispositivos pedagógicos. Sin embargo, uno de los hallazgos más significativos, comprobados por la estadística inferencial por medio de correlación y regresión lineal, es que el compromiso del académico ocurre solamente durante las clases y que esto está directamente relacionado con el desempeño estudiantil.

En este sentido, al analizar a los autores arriba mencionados, es posible pensar que por más que esta asignatura tenga un trayecto histórico de fracaso, es posible obtener mejores resultados por medio de actividades fuera de la clase y, en especial, a través de la autorregulación (García, 2012) y compromiso del estudiante, una vez que él es el principal interesado en el proceso de aprendizaje, o que por lo menos suponemos que sea. Por ello, es imprescindible pensar que el compromiso como actitud hacia la matemática tiene una fuerte conexión con el aprender y quehacer de los académicos.

Para Felicetti y Morosini (2011) y Santos (2014), el compromiso del estudiante con su aprendizaje es generado por todas las acciones que este hace para lograr sus objetivos en la asignatura y en su desempeño académico. Para los autores, el estudiante tiene la responsabilidad de buscar estrategias adecuadas a su forma de aprender y buscar ayuda para tener éxito a lo largo de su formación profesional.

Ya en relación al compromiso, es importante percibir que no depende exclusivamente del académico, una vez que la interacción familiar y universitaria, las relaciones con los compañeros y los maestros, el proceso de integración social y todo lo demás, puede aumentar o disminuir el compromiso y por consiguiente, reflejarse en el desarrollo o fracaso en Cálculo I.

En la perspectiva de Astin (1984), el estudiante puede tener buen desempeño en las asignaturas de la universidad cuando se involucra en las actividades del ambiente universitario, sea por medio de equipos de investigación y/o estudio, participación en eventos científicos o extensión, entre otros. Para el autor, cuanto más el académico está inmerso en su institución formadora y el profesor despierta la voluntad de aprender en él, mejor podrán ser sus resultados con su aprendizaje.

Para Pace (1982), el alumno podrá tener más éxito en su proceso formativo cuando se dedica a los estudios y las clases no solamente durante la fase interactiva, sino antes y después de las mismas, pues para el autor, este proceso pasa por la preparación antes, la profundidad durante y por la revisión después de ellas. De esta forma, Pace (1982) advierte que cuánto más dedicado y esforzado sea el estudiante, más oportunidad tiene de tener un buen desempeño. Aunadamente destaca la importancia del acompañamiento institucional en la trayectoria estudiantil, antes y después de la asignatura y al egreso, siendo posible predecir y tomar decisiones sobre múltiples factores, como, por ejemplo, metodologías a ser utilizadas en clases, programas de tutoría, profesionalización, entre otros.

En esta dirección, Pascarella y Terenzini (1991; 2005) percibieron que en la enseñanza superior es muy importante que haya un sentimiento de pertenencia por parte de los estudiantes, y que estas relaciones sean proyectadas por los maestros y por los demás actores involucrados en el ambiente universitario. Para ellos, cuando un alumno le gusta estar donde recibe su formación, más ocupado está en obtener mejores resultados, pues sabe qué forma parte de un grupo en que él es reconocido y, por ende, conforma un equipo que puede ayudarlo cuando se presentan las dificultades. De este modo, se relaciona más y mejor con sus pares, con los catedráticos y con directivos.

Tinto (1987; 2005) comprende que para que el académico tenga un seguimiento, es necesaria una integración social desde la perspectiva familiar y universitaria, de modo tal que se pueda garantizar la permanencia en la enseñanza superior y en las asignaturas, por medio de tutorías y acompañamientos. Para el autor, el éxito también pasa por estas cuestiones y que ellas son reflejadas en los desempeños académicos.

Ya Kuh (2009), entiende que el aprendizaje tiene relación directa con el compromiso. Para él, cuánto más compromiso demuestra el estudiante en su formación, mejor serán los resultados. De acuerdo con Kuh (2009), el alumno(a) debe ser el protagonista de su hacer estudiantil y buscar como se ha hecho mención las propias estrategias que le son funcionales en el aprendizaje de cada asignatura, objetivando la continuidad y por ende la aprobación.

Es posible observar la multiplicidad del proceso de aprendizaje de una asignatura y de una carrera. Distintos son los componentes que pueden influenciar el quehacer de los estudiantes, como, por ejemplo, relación con los compañeros y maestros, sentimiento de pertenencia, sentido de la materia para su vida y aplicaciones en el cotidiano como lo señalan Saldívar y Cordero (2014), la dedicación antes, durante y después de las clases, entre otros. De este modo, se vuelve sustancial analizar cómo ocurre el quehacer de los universitarios fuera de las clases de Cálculo Diferencial e Integral I, visto que es una asignatura que está involucrada en muchas problemáticas en cuestión de la permanencia y del proceso de enseñanza y aprendizaje. Así siguiendo al respecto, se presenta el método utilizado en este estudio.

Método

Esta investigación fue un estudio de caso con objetivo exploratorio. Para Yin (2009), el estudio de caso es un procedimiento técnico de investigaciones que pretenden la comprensión de lo que pasa con un individuo, un grupo o un conjunto que reúne las mismas características, que en este caso es un grupo de licenciatura que estudió la asignatura de Cálculo. Para este fin, Gil (2012), sostiene que el objetivo exploratorio intenta verificar lo que está pasando en un determinado campo del conocimiento o área en el que no se encuentran suficientes producciones sobre el tema. En este caso, el texto centralizó sus reflexiones y análisis en el espacio fuera de la clase, pues es un tema poco explorado en el ámbito de la asignatura en cuestión.

Los sujetos de investigación fueron 47 estudiantes de un grupo de licenciatura de una Institución de Educación Superior de la región sur de Brasil que estaban cursando la asignatura en el segundo semestre de 2013. La elección del grupo permitió a los investigadores tener más facilidad en el acceso a la obtención de los datos, utilizándose así el criterio de conveniencia (Gil, 2012). El contexto de investigación es una Institución de Educación Superior (IES) privada comunitaria. Estas instituciones revierten todos recursos financieros a la propia comunidad educativa y también puede participar de convocatorias para intentar conseguir recursos del gobierno estatal y federal, es decir, son organizaciones que no tienen fines lucrativos. La IES quedase localizada cerca de la capital del Estado do Rio Grande do Sul, la ciudad de Porto Alegre.

Para la recopilación de datos se utilizó un cuestionario cerrado que buscó percibir las relaciones discentes para el estudio de Cálculo fuera de la clase. Así el concentrado de la investigación fueron las respuestas de las 47 encuestas aplicadas in situ para los estudiantes. Para los análisis de datos fue utilizada la estadística descriptiva. De este modo, en los resultados se presentan los hallazgos de la investigación y las interlocuciones con el marco teórico.

Resultados

A partir de la recopilación de las 47 encuestas fue constatado que 72% de los estudiantes estaban cursando el segundo semestre de su carrera cuando estudiaron la asignatura; 70% eran trabajadores, es decir, que ejercían actividad remunerada durante el día para estudiar por la noche. También se verificó que 65% de los estudiantes no estudiaban diariamente el Cálculo Diferencial e Integral I; 47% se dedicaban apenas un día de la semana fuera de la clase y 73% estudiaba en casa y 85% prefería estudiar solo. En esta perspectiva y basado en los resultados presentados, nótese que los estudiantes de este grupo de licenciatura no se dedicaban al estudio extraescolar de la asignatura.

Conclusiones

Analizar los factores externos a la clase de una asignatura en una Institución de Educación Superior es muy importante para comprender cómo es posible contribuir para la mejora del aprendizaje estudiantil a lo largo de su formación académica (Santos, 2014). En este sentido, percibir que hay más indicadores que influyen para que el alumno aprenda una asignatura de las matemáticas, puede proporcionar un conjunto de estrategias para establecer políticas institucionales para la retención académica en la universidad (Rezende, 2003). Se puede pensar que muchos de estos indicadores son el tiempo de estudio fuera de la clase, sus estrategias de aprendizaje utilizadas para la asignatura, o los locales donde el estudiante se siente mejor para retomar los asuntos de la materia, entre otros (Santos, 2014).

Y como se ha observado en esta investigación, los académicos del contexto analizado prácticamente no estudian fuera de la clase, es decir que ellos no se comprometen con su aprendizaje. Se concluye que:

a) Los académicos que cursan la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral I necesitan de hábitos de estudio para hacerlo fuera del espacio de la clase, de modo que se fortalezca el proceso de aprendizaje;
b) Se vuelve importante estimular las prácticas de estudios en equipo y de modo colaborativo, pues se puede aprender más con los pares sobre las diferentes estrategias de aprendizaje para la resolución de ejercicios de la asignatura en cuestión.
c) El factor de los estudiantes, en su mayoría, se encuentra en la condición de que son trabajadores, además que el período diurno parece contribuir para la falta de compromiso con la asignatura, visto que afirman que no tienen tiempo para la realización de los ejercicios y tareas solicitadas, aún menos para dedicarse diariamente a la misma;

Por ello, este texto puede estimular la realización de nuevas investigaciones e intervenciones para que se pueda efectivamente impactar en esta realidad con la motivación de cambiar los datos del Cálculo Diferencial e Integral I en otros contextos universitarios.

Referencias bibliográficas

Astin, A. W. (1984). *Student involvement: A developmental theory for higher education. Journal of College Student Personnel*, 25(4), 297–308.

Barufi, M. C. B. (1999). *A construção/negociação de significados no curso inicial de Cálculo Diferencial e Integral.* 195 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo. São Paulo.

Cavasotto, M. (2010). *Dificuldades na aprendizagem de Cálculo: o que os erros cometidos pelos alunos podem informar.* 146 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Faculdade de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre.

Felicetti, V. L.; Morosini, M. C. (2011). *Do compromisso ao comprometimento: o estudante e a aprendizagem.* Educar em Revista. n. esp. 2. Curitiba: PUCPR, p. 23-44.

García, Montero, I. (2012). LA AUTORREGULACIÓN DEL APRENDIZAJE ESCOLAR. Editado por CLACSO.

Gauthier, C. et al (2006). *Por uma teoria da Pedagogia.* Trad. Francisco Pereira. 2. ed. Ijuí: Unijuí, 457 p.

Gil, J. (2012). *El aprendizaje-servicio en la enseñanza superior: Una aplicación en el*

ámbito de la educación física. Tesis doctoral. Castellón: Universidad Jaume I.

González, F y Gaytán F. (2015). *La práctica docente en la aritmética: una mirada etnográfica* En R. Flores (Ed.) Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28, pp.1125-1132, México.

Harper, S. R.; Quaye, S. J. (2009). *Student Engagement in Higher Education: theoretical perspectives and practical approaches for diverse populations.* New York: Routledge.

Kuh, G. D. (2008). *Higher-Impact Educational Practices: What they are? Who has access to them and Why they matter?* Washington: Association of American Colleges and Universities.

Molon, J. (2013). *Cálculo no ensino médio: uma abordagem possível e necessária com o auxílio do software geogebra.* 198 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Centro de Ciências Naturais e Exatas, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria.

Pace, Charles Robert (1982). *Achievement and the Quality of Student Effort. National Commission on Excellence in Education (ED)*. Washington, DC, 1982. Disponible en: <http://www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/Home.portal?_nfpb=true&ERICExtSearch_SearchValue_0

=robert+pace&searchtype=basic&ERICExtSearch_SearchType_0=kw&pageSize=10&eric_displayNtriever=false&eric_displayStartCount=91&_pageLabel=RecordDetails&objectId=0900019b80047798&accno=ED227101&_nfls=false>. Consultado: 07 de jul. 2016.

Pascarella, E. T.; Terenzini, P. T. (1991). *How College Affects Students: Findings and Insights from Twenty Years of Research,* v. 1. São Francisco: Jossey-Bass.

Pascarella, E. T.; Terenzini, P. T. (2005). *How College Affects Students: A Third Decade of Research,* v. 2. São Francisco: Jossey-Bass: A Wiley Imprint.

Rezende, W. M. (2003). *O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica.* 468 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

Sáldivar, D y Cordero, F. (2014). *Un estudio de la construcción social del conocimiento matemático en el cotidiano* En R. Flores (Ed.) Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28, pp.1511-1519, México.

Santos, G. M. T. (2014). *O comprometimento do estudante e a aprendizagem em Cálculo I.* 217 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro Universitário La Salle. Canoas.

Tinto, V. (1987). *Leaving College: Rethinking the Causes and Cures of Student Attrition.* Chicago: University of Chicago Press.

Tinto, V. (2005). *Moving from theory to action.* In: A. SEIDMAN (Ed.), College student retention: Formula for student success. Washington, DC: American Council on Education and Praeger, p. 333-371.

Vitelli, R. P. (2012). *Evasão Em Cursos De Graduação: Fatores Intervenientes No Fenômeno.* In: Jesús Arriaga García de Andoaín y otros. (Org.). *II CLABES*. Segunda conferencia latinoamericana sobre el abandono en la educación superior. 1ed. Madrid: Dpto. de Publicaciones de la E.U.I.T. de Telecomunicación.

Yin, Robert K. (2009). *Case Study Research. Design and Methods*, Fourth Ed. London: SAGE.

LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN EL APRENDIZAJE DE MATEMÁTICAS: ¿USO EXPLÍCITO O IMPLÍCITO?

Marger da Conceição Ventura Viana
Universidad Federal de Ouro Preto (Brasil)
margerv@terra.com.br

RESUMEN: Se presenta un estado del arte sobre el rol de la Historia de las Matemáticas, que incluye múltiples relaciones, entre otras con Matemáticas y Educación Matemática. Este artículo se va a detener en esa última, discutiendo formas de relaciones de la Historia de las Matemáticas y sus potencialidades en la enseñanza de Matemáticas. Esto incluye la forma explícita, cuando se pone el énfasis en la propia Historia de las Matemáticas, a ejemplo del uso de una su pequeña parte, como la creación de los conceptos matemáticos para resolver problemas; o implícitamente cuando aparece de forma indirecta, en la perspectiva y organización de los contenidos, al indicar el camino de trabajo que se debe seguir, como un elemento orientador en la elaboración de actividades. Así, en la práctica del profesor, el conocimiento de la Historia de las Matemáticas es muy relevante para la enseñanza de las matemáticas.

Palabras clave: uso implícito y explícito, Historia de las Matemáticas.

ABSTRACT: This work shows a theoretical review about the role of Mathematics History which includes multiple relations, among others, with Mathematics and Mathematical Education. This article focuses just on mathematical education discussing the types of relations of Mathematics History and its potentialities in mathematics teaching. It includes the explicit way, when the own Mathematics History is stressed, with the use of its small part as the creation of mathematical concepts for solving problems; or it is explicit when it appears in an indirect way, in the perspective and arrangement of contents, when showing the working way to follow, as a guiding element to elaborate activities. Thus, in the teacher’s practice, the knowledge of mathematics history is very important for mathematics teaching.

Key words: implicit and explicit use, Mathematics’ History.

Introducción

Hace tiempo que las relaciones entre Historia de las Matemáticas, Pedagogía y Matemáticas son objeto de investigaciones por parte de la comunidad académica internacional. Así es como en Toronto-Canadá, en el año 1983, durante el Workshop Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática, fue creado el International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics (HPM) que forma parte de la Comisión Internacional de la Enseñanza de las Matemáticas (ICMI). De entre los miembros del HPM hay investigadores en matemáticas, en Educación Matemática, historiadores de las matemáticas, profesores de matemáticas y representantes de varios países, incluso Brasil.

En Brasil aunque la Sociedad Brasileña de Historia de las Matemáticas (SBMat) haya sido creada en 1999 en el tercer Seminario Nacional de Historia de las Matemáticas, desde de la década de los 80 del siglo XX ya había grupos de investigaciones y estudios aislados acerca del tema.

Actualmente el abanico de investigaciones sobre las múltiples relaciones entre Historia de las Matemáticas, Matemáticas y Educación se ha ampliado siendo visibles tres grandes campos de investigaciones: el de la Historia de las Matemáticas, el de la Historia de la Educación Matemática y el de la Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática (Miguel y Miorim, 2004).

Este último abarca estudios cuyos objetos de investigación se refieren a la inserción de la Historia de las Matemáticas en la formación de profesores de Matemáticas, formación matemática de estudiantes de todos los niveles, libros de textos de matemáticas, programas y currículos para la enseñanza de las matemáticas, en las investigaciones en Educación Matemáticas y otros.

En resumen, considerando la Historia de las Matemáticas y sus relaciones con la Educación Matemática se destacan tres importantes campos de investigación: el de la Historia de las Matemáticas, el de la Historia de la Educación Matemática y el de la Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. Este trabajo se enmarca en este último, en el campo Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. Tiene como objetivo presentar un estado del arte sobre el rol de la Historia de las Matemáticas, que incluye múltiples relaciones, entre otras con Matemáticas y Educación Matemática. Este artículo se va a detener en esa última, discutiendo formas de relaciones de la Historia de las Matemáticas y sus potencialidades en la enseñanza de Matemáticas, las formas de utilización de la Historia en la enseñanza de las Matemáticas, según investigaciones realizadas sobre el tema.

De hecho, la Historia de las Matemáticas puede participar de dos maneras distintas en los procesos de enseñanza-aprendizaje de Matemáticas: de manera implícita o explícita.

Explícita, cuando se pone el énfasis en la propia historia, a ejemplo del uso de una pequeña parte de la historia, como la creación de los conceptos matemáticos para resolver problemas,desde el momento en que son utilizados problemas idénticos a los que aparecen en la Historia de las Matemáticas o por medio del uso de fuentes originales, de forma directa, a ejemplo de las notas históricas en libros didácticos; y de manera implícita, cuando aparece de forma indirecta, en la perspectiva y organización de los contenidos, al indicar el camino de trabajo que se debe seguir, como un elemento orientador en la elaboración de actividades, a partir de la utilización de situaciones adecuadas al contexto actual en la perspectiva y organización de los contenidos, o sirviendo como guía para que sean abordadas actividades matemáticas curriculares.

Antecedentes

En su disertación de Máster Universitario, Santos (2012), utilizó la Historia de las Matemáticas de forma explícita en la solución de problemas que han generado teorías, porque tiene sentido que los estudiantes vean en la Historia de las Matemáticas algunos porqués de la creación de ciertas matemáticas. Pero la precaución es necesaria en la elección de problemas, pues el objetivo no es introducir a los estudiantes en los problemas discutidos durante siglos e incluso incurrir en el riesgo de que ya no tengan sentido para ellos. Así los problemas y las actividades propuestas por los profesores son adaptaciones, es decir, no son reconstrucciones idénticas a las del pasado (Miguel y Miorim, 2004).

Por otra parte, puede haber presentación explícita de problemas y métodos de acuerdo con el desarrollo histórico, pues existe la necesidad de que no se ignore el ambiente sociocultural ni la época en la cual los conceptos matemáticos fueron creados y desarrollados, especialmente para la perspectiva sociocultural de la Historia de las Matemáticas, en la cual los textos y conocimientos matemáticos del pasado son analizados (Furinghetti y Radford, 2002) apud Oliveira (2012).

La Historia de las Matemáticas participa de forma implícita cuando no se hacen referencias históricas explícitas; cuando aparece de forma indirecta, en la forma de perspectiva y organización de los contenidos, al indicar el camino de trabajo que se debe seguir, como “un elemento orientador en la elaboración de actividades y situaciones-problema, de selección y seguimiento de temas de Matemáticas en libros didácticos” (Miguel y Miorim, 2004, p. 44).

Los motivos de naturaleza epistemológica pueden llevar a la utilización de la Historia de las Matemáticas de modo implícito, como concibió Oliveira (2012), en algunas de las actividades realizadas para la elaboración de su disertación de Máster Universitario.

De entre los varios investigadores que consideran la utilización de la Historia de las Matemáticas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de Matemáticas están Fauvel y Van Maanen (2000), Miguel (1993) y Miguel y Miorim (2004), Mendes (2006) y muchos otros.

Fauvel y Van Maanen (2000), por ejemplo, consideran tanto la utilización de forma implícita como la de forma explícita de la Historia de las Matemáticas en Educación Matemática, citando las siguientes áreas:

> El aprendizaje de Matemáticas; el desarrollo de la visión de la naturaleza de las Matemáticas y de la actividad matemática; la práctica didáctica de los profesores y su bagaje pedagógico; la predisposición afectiva con relación a las Matemáticas, y la apreciación de las Matemáticas como un emprendimiento cultural humano (Fauvel y Van Maanen, 2000, p. 203).

Potencialidades de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza de las Matemáticas

> Conocer la Historia de las matemáticas permite intentos de suscitar situaciones didácticas más pertinentes para conseguir aprendizajes, gracias al conocimiento que se puede tener sobre el origen de la noción que se enseña, sobre el tipo de problema que pretendía resolver, las dificultades que surgieron y el modo como fueron superadas (Martins, 1999, p. 4).

Así, pensamos que es importante considerar los argumentos que discuten las potencialidades pedagógicas de la Historia de las Matemáticas presentes en la literatura, para no tener la ingenuidad de asumir que la Historia de las Matemáticas es la solución para todos los problemas de la enseñanza de las Matemáticas.

Esto es, que si se organiza para fines pedagógicos y se articula con las demás variables que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje, la Historia de las Matemáticas puede traer contribuciones significativas para las matemáticas escolares.

Hay una lista de motivos para utilizar la Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática presentada por Fauvel (1991): ayuda a aumentar la motivación para aprender; humaniza las matemáticas; el desarrollo histórico ayuda a organizar la presentación de asuntos en el currículo; mostrar el desarrollo de los conceptos ayuda a los alumnos para su comprensión; hace posible que los alumnos perciban los cambios de las matemáticas; hacer comparaciones entre lo antiguo y lo moderno da valor a las técnicas modernas; ayuda a desarrollar un enfoque multicultural; ofrece oportunidades para investigación; los obstáculos aparecidos en el desarrollo de las matemáticas, en el pasado, ayudan a aclarar lo que los alumnos de hoy encuentran difícil; los alumnos se alivian al percibir que no son los únicos con problemas; estimula a estudiantes más ágiles a mirar hacia delante; ayuda a explicar el papel de las matemáticas en la sociedad; consigue que las matemáticas sean menos asustadoras; el examen de la Historia de las Matemáticas ayuda a mantener su propio interés y entusiasmo por las matemáticas; ofrece oportunidades para trascender el currículo, trabajando con otros profesores o asuntos.

En una investigación realizada por Miguel (1993), fueron encontrados argumentos favorables a la utilización de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza de las Matemáticas, y otros contrarios.

Así, a pesar de que los argumentos a favor del uso de la Historia de las Matemáticas son muchos, Miguel y Miorim (2004, p.62), resaltan que “no todos los autores defienden e incentivan la participación de la Historia en el proceso de enseñanza-aprendizaje de Matemáticas. Hay quienes han planteado problemas y objeciones.”

De una lista de modos de usar la Historia de las Matemáticas en clase de Matemáticas, sugeridos por Fauvel (1991), se pueden citar: presentar a los alumnos conceptos nuevos con una introducción histórica; animarlos a entender los problemas históricos que originaron los conceptos que están aprendiendo; darles lecciones de Historia de las Matemáticas ; elaborar actividades, en clase o fuera de ella, usando textos matemáticos del pasado; promover actividades dramáticas que reflejen la interacción matemática; darles tareas de creación de carteles y proyectos con algún tema histórico; desarrollar proyectos sobre actividades matemáticas locales del pasado; usar ejemplos críticos del pasado para ilustrar técnicas o métodos; mostrar visiones de concepciones falsas, errores o alternativas del pasado para ayudarlos a entender y solucionar dificultades actuales; inventar un enfoque pedagógico para un tema con base en su desarrollo histórico; ordenar y estructurar asuntos del programa basándose en informaciones históricas.

En Brasil, al inicio del siglo XX, ya había autores de libros de texto que incluían elementos de la Historia de las Matemáticas en sus obras. Era resultado de las orientaciones de la Reforma de Francisco Campos, cuyas propuestas oficiales apuntaban, manifiestamente, la importancia de la Historia de las Matemáticas para la formación de los estudiantes (Miguel y Miorim, 2004). “Una obra que merece ser destacada es la titulada *Mahematica,* de autoría de Cecil Thiré y Mello y Souza, y, después, también la de Euclicles Roxo” (Miguel y Miorim, 2004).

A continuación presentamos estudios acerca de la utilización implícita y explícita de las Matemáticas en libros de texto a partir del siglo XIX.

■ Utilización implícita y explícita de la Historia de las Matemáticas

Dambros (2006), presentó en su tesis de doctorado un estudio sobre obras de autores que, a lo largo de los años, utilizaron la Historia de las Matemáticas en las formas explícita e implícita. Así, y considerando la importancia de la obra del francés Alex Claude Clairaut en las discusiones sobre la utilización de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza, elaboró un análisis puntual del libro *Èléments de Géométrie.*

> (...) un ejemplo de la forma implícita de participación de la Historia [de las Matemáticas] está en el libro *Èléments de Géométrie*, del francés Alexis Claude Clairaut (1713-1765), publicado por primera vez en 1741. En esta obra, a pesar de ser considerada por diversos investigadores como la primera en hacer una relación más directa entre la Historia de las Matemáticas y la enseñanza de matemáticas, se percibe que tal relación no aparece de forma tan explícita a lo largo del texto (Dambros, 2006, p. 17).

De su estudio, Dambros (2006) considera que la participación de la Historia de las Matemáticas en la forma explícita tiene poca importancia en la obra citada, cuando afirma: “Es en la participación implícita de la Historia de las Matemáticas donde reside la importancia del libro de Clairaut, cuando se quiere entender la relación entre Historia de las Matemáticas y enseñanza de matemáticas” (Dambros, 2006, p. 20).

Según el historiador Gert Schubring (2003), "el principal interés de Clairaut está expreso en el prefacio no asombrar a los principiantes (appllanir les difficultés)" (Schubring, 2003, p. 56).

También de acuerdo con este autor, a pesar de que el enfoque de Clairaut no proporciona el "camino real" para facilitar la comprensión de las matemáticas, influyó en el discurso sobre los libros de texto de matemáticas "durante al menos 60 años a causa de" la palabra clave " para su metodología: *la marche dês inventeurs,* es decir, se entendía que la metodología de estos libros debería seguir el camino tomado por los inventores para hacer descubrimientos matemáticos (Schubring de 2003 apud Dambros, 2006)

De acuerdo con Schubring (2003, citado en Dambros, 2006), fue D'Alembert, en su contribución a la “Encyclopédie” quien lanzó el camino de los inventores como una herramienta metodológica, siendo más tarde, sin embargo, criticado y abandonado por los autores influyentes, como Sylvestre Lacroix (1765-1843).

En su estudio, Dambros (2006) considera que la participación de la Historia de las Matemáticas en forma explícita tiene poca importancia en el trabajo de Clairaut: “en la participación implícita de la Historia de las Matemáticas radica la importancia del libro de Clairaut cuando se quiere entender la relación entre la Historia de las Matemáticas y la enseñanza de las matemáticas" (Dambros, 2006, p.20).

Asimismo, otros investigadores encontraron motivos y posibilidades, de las más diversas, para la utilización de la Historia de las Matemáticas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, aunque también existen voces disonantes.

Según Dambros (2006), dos importantes matemáticos que defendieron la utilización de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza de matemáticas fueron Félix Klein (1849-1925) y Poincaré (1854-1912), pues defendían que era importante respetar, en la enseñanza, el orden de la construcción histórica de los conceptos matemáticos.

Estos dos matemáticos se servían del “Principio Genético” para justificar el recurso a la Historia de las Matemáticas. Según Byers (1982), apud Dambros (2006, p. 2) el principio genético puede ser entendido como: “(…) el aprendizaje efectivo requiere que cada aprendiz rehaga los principales pasos en la evolución histórica del asunto estudiado”.

Tal principio fue utilizado en educación matemática para justificar la necesidad de los estudios históricos en matemáticas. De acuerdo con Miguel y Miorim (2004) el Principio tiene influencia directa en el Positivismo, pues los autores entendían que debían respaldar científicamente sus ideas, y el Principio Genético parecía servir perfectamente para ello.

Dambros (2006) también hizo un estudio de las obras de Euclides Roxo (1890-1950), destacada figura en Brasil y que estuvo influenciado por el Principio Genético. Esta autora concluye que "la colección de libros *Curso Elementar de Matemática* de Euclides Roxo, puede considerarse un ejemplo de participación implícita de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza de matemáticas" (Dambros, 2006, p. 23).

Del análisis del libro de Leopoldo Nachbin, *Introdução à Algebra,* de 1971, Dambros (2006) concluyó que en este, la Historia de las Matemáticas está usada tanto en la forma implícita como en la explícita, predominando la explícita.

En cuanto al paralelismo entre ontogénesis y filogénesis aplicado a la enseñanza de las matemáticas, además de la inconsistencia de la teoría que le dio origen, el desarrollo histórico de los conceptos es mucho menos simple y lineal de lo que esa analogía supone (Fauvel, 1991).

Y Brolezzi (1991), completa: "Si tomamos ese paralelismo ontofilogenético literalmente, puede conducir a absurdos, pues, no existe un principio claro que determine la evolución de las Matemáticas como un todo" (Brolezzi, 1991, p. 216).

Byers (1982), apud Dambros (2006, p. 25), alertó de que el Principio Genético no debe ser aplicado literalmente en la enseñanza de matemáticas, y lo ejemplificó diciendo que "jamás sería sugerido que un niño debiese ignorar el concepto de cero hasta completar los estudios de geometría griega, donde este concepto no aparece".

Sin embargo, Miguel y Miorim (2004) consideran que no se debe negar la existencia de vínculos entre la filogénesis y la ontogénesis, pero sí negar el determinismo de una en relación a la otra.

Dambros (2006) explica que después de los años sesenta del siglo XX, el Principio Genético volvió a ganar fuerza poniendo como ejemplo a los autores Polya y Morris Kline, que lo defendieron en esa época. No obstante la inconsistencia científica del mismo, esos trabajos ofrecieron varias contribuciones a la educación matemática. Así, ese Principio fue muy importante en el proceso de valorización de los estudios históricos en matemáticas.

Conclusiones: el conocimiento histórico, y la práctica del profesor

Autores como Freudenthal (1981) insisten en la importancia del conocimiento histórico para que el profesor tenga una visión de las matemáticas como un conocimiento humanizado y en construcción.

Los Parámetros Curriculares Nacionales - PNC (Brasil, 1998), resaltan claramente la necesidad de inserción de la Historia de las Matemáticas en la formación docente a través de las asignaturas que permitan al futuro educador conocer el desarrollo de las Matemáticas como una ciencia. Recomiendan el uso de la Historia de las Matemáticas como “recurso didáctico con muchas posibilidades para desarrollar diversos conceptos, sin reducirla a hechos, fechas y nombres para memorizar” (Brasil, 1998, p.43).

Según Mendes (2006), la falta de conocimiento e información por parte del profesor sobre el uso apropiado de la Historia de las Matemáticas como recurso didáctico puede obstaculizar la realización de la (re)construcción del pensamiento matemático por el estudiante. La Historia de las Matemáticas le puede aclarar las ideas matemáticas que está construyendo, darle respuestas a algunos "porqués" y contribuir así a la creación de una visión más crítica de los objetos del conocimiento (Mendes, 2006).

Hay varios trabajos publicados que sugieren actividades para realizar en el aula que contienen la integración de la Historia de las Matemáticas con el contenido matemático.

Dambros (2006) cita trabajos que muestran como la Historia de las Matemáticas de los estudios en Historia de las Matemáticas puede tener aplicaciones directas en el aula. Trabajos que incluyen recursos tales como: problemas históricos, biografías, técnicas y métodos históricos, el uso de fuentes (documentos), análisis de obras de arte de diversas culturas, etc.

Sobre este aspecto, autores como Ferreira y Rich (2001) y Fiorentini (1995) se refieren a la influencia del conocimiento histórico en la práctica del profesor.

Según Fiorentini (1995), la forma como conocemos y concebimos los contenidos de la enseñanza tiene fuertes implicaciones en el modo como las empleamos en clase.

Tales ideas expresan la creencia de una determinada relación entre el conocimiento histórico de los contenidos matemáticos y la concepción y la enseñanza de matemáticas del profesor.

La relevancia de dichas ideas implica que en la práctica del profesor, el conocimiento de la Historia de las Matemáticas es muy relevante para la enseñanza de las matemáticas

Referencias bibliográficas

Brasil (1998). Ministério da Educação e do Desporto. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática* - 1o e 2o ciclos. Brasília: MEC/SEF.

Brolezzi, A. C. (1991). A *arte de contar: uma introdução ao estudo do valor didático da História da Matemática.* Tesis de maestría no publicada. Universidade de São Paulo. Brasil.

Byers, V. (1982). Porque Estudar História da Matemática? Trad. Maria Q. Amoroso Anastácio e Eduardo Sebastiani Ferreira. En: *Inst. J. Math. Educ. Sci. Technol*, 13 (1), p. 59-66.

Dambros, A. A. (2006). *O conhecimento do desenvolvimento histórico dos conceitos matemáticos e o ensino de matemática: possíveis relações*. Tesis de Doctorado no publicada. Universidade Federal do Paraná. Curitiba. Brasil

Fauvel, J. (1991).Using History in Mathematics Education*. For the Learning of Mathematics.* Vol. 11. n.2.

Fauvel, J.; Maanen, J. van. (s.d.).*The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics-Discussion Document for a ICMI Study.* Recuperado de <http://athena.mat.ufrgs.br/~portosil/hist2000.html> en 20/10/ 2000.

Ferreira, R. A. T.; Rich, B.S. (2001). Integrating history of mathematics into the mathematics classroom. *Quadrante*. Lisboa APM, 10 (2).

Fiorentini, D. (1995). Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil*. Zetetiké* (4), p. 01-37.

Freudenthal, H. (1981).Should a mathematics teacher know something about the history of mathematics? In: *For the Learning of Mathematics* 2(1).

Martins. A. *História da Matemática no Ensino da Matemática.* 1986. Recuperado de <http:/ www.mat.uc.pt/~jaimecs/mhist.htm> en 05/10/2000.

Mendes, I. A. (2006). A investigação histórica como agente da cognição matemática na sala de aula. In: Mendes, I. A.; Fossa, J.A.; Valdés, J. E. N. *A História como um agente de cognição na Educação Matemática.* Porto Alegre: Sulina.

Miguel, A. (1993). *Três estudos sobre história e educação matemática*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidade Estadual de Campinas, Brasil.

Miguel, A. (1997). As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. *Zetetiké*, Campinas, 5(8), 73-105.

Miguel, A.; Miorim, M. A. (2004) *História na Educação Matemática: propostas e desafios.* Belo Horizonte: Autêntica. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

Oliveira, D. P. A.(2012). *Um estudo misto para entender as contribuições de atividades baseadas nos fundos de conhecimento e ancoradas na perspectiva sociocultural da história da matemática para a aprendizagem de funções por meio da pedagogia culturalmente relevante*. Tesis de maestría no publicada Universidade Federal de Ouro Preto. Brasil.

Santos, M. N. (2012). *A História da Matemática como desencadeadora de atividades investigatórias sobre o Teorema de Tales: análise de uma experiência realizada com uma classe do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Ouro Preto (MG)*. Tesis de maestría no publicada Universidade Federal de Ouro Preto. Brasil.

Schubring, G. (2003). *Análise Histórica de Livros de Matemática* – Notas de aula. Trad. Maria Laura Magalhães Gomes. Campinas, SP: Autores Associados.

RELACIÓN ENTRE AREA Y PERÍMETRO: UNA ACTIVIDAD DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN (AEI)

José Valério Gomes da Silva, Lídia Serrano, Marianna Bosch
UNIAN – SP (Brasil). IES Vinyet Sitges (España). Universidad Ramon Llull (España).
valerio.gomes@yahoo.com.br, lidiaserrano@yahoo.com, marianna.bosch@iqs.edu

RESUMEN: Esta investigación se propone estudiar las respuestas de alumnos de primer curso de secundaria (12-13 años) a una *actividad de estudio e investigación* sobre las relaciones entre área y perímetro de figuras planas estructurada en base a los *momentos didácticos* (Chevallard 1999). Presentamos una primera fase de la *actividad* experimentada en tres sesiones, donde aparecen los momentos del primer encuentro y el exploratorio, junto con una actividad de evaluación. El análisis de las respuestas permite establecer los resultados sobre las estrategias de comparaciones de magnitudes y de medida, su apropiación y su posible explotación en momentos posteriores de la experimentación.

Palabras clave: área, perímetro, actividad de estudio e investigación

ABSTRACT: This research is aimed at analyzing the answers of the 12-13 year- old students of secondary school to an activity of study and inquiry about the relations between area and perimeter of plane figures, based on the didactic steps (Chevellard 1999). We show a first stage of the three-session activity which includes both the first and the exploratory meetings, as well as an evaluation activity. The analysis of the answers allows defining the results about magnitude and measurement comparison strategies, and their acquisition and possible further use after the experimentation.

Key words: area, perimeter, teaching and researching activity

Introducción y marco teórico

La enseñanza de la matemática en la escuela secundaria en Brasil y España presenta problemas complejos e ineludibles, que conllevan altos niveles de frustración para los estudiantes y profesores. Cuando consideramos las nociones de área y perímetro y buscamos la razón de ser "oficial" en los libros de texto y otros materiales didácticos de la educación secundaria obligatoria, encontramos situaciones que no corresponden con el énfasis puesto por los currículos en el trabajo con más de una magnitud y en la exploración de relaciones entre magnitudes. Tampoco se suelen considerar más de una magnitud asignada a un mismo objeto.

Nos situamos en el marco teórico desarrollado por Yves Chevallard de la Teoría antropológica de lo didáctico (TAD) y, en particular, en el diseño y análisis de Actividades de Estudio e Investigación basadas en los momentos didácticos (Chevallard 1997, 1999, 2002, Bosch y Gascón, 2010). Partiremos así de un contenido de enseñanza descrito en términos de *praxeologías*, es decir de un conjunto de tipos de problemas que se resuelven mediante ciertas técnicas no necesariamente algorítmicas dentro de un entorno teórico formado por una primera descripción de las técnicas y tipos de problemas (la "tecnología" o discurso – *logos* – sobre la técnica) y un segundo nivel de justificación formado por la teoría propiamente dicha. La construcción de praxeologías en el aula puede describirse en términos de 6 momentos (no necesariamente cronológicos) del estudio que están relacionados con los diferentes componentes de las praxeologías:

- El momento del primer encuentro con la praxeología, que puede realizarse desde sus componentes tecnológico-teóricos (por ejemplo, presentando sus elementos o propiedades) o desde los tipos de problemas por resolver y técnicas o maneras de abordarlos, acercándose así a las posibles razones de ser de la praxeología considerada;
- el momento exploratorio que consiste en la resolución de los tipos de problemas más centrales de la praxeología y la emergencia de técnicas apropiadas para resolverlos;
- el momento del trabajo de la técnica que permite mejorar el dominio de los procesos de resolución, analizar el alcance y limitaciones de las herramientas utilizadas y generar nuevas necesidades teóricas;
- el momento tecnológico-teórico que surge cada vez que aparecen nuevas necesidades descriptivas, explicativas o justificativas;
- el momento de la institucionalización que permite organizar y preparar para nuevos usos los elementos praxeológicos puestos en práctica;
- el momento de la evaluación para poner a prueba tanto la validez de la praxeología construida como la posibilidad de manejarla de forma funcional.

Según Bosch y Gascón (2010), la noción de actividad de estudio e investigación (AEI) aparece como un modelo didáctico de referencia para analizar la co-construcción de praxeologías en el aula. Las AEI pueden tomar formas muy diversas en función de la institución escolar y de las praxeologías consideradas. Podemos sin embargo señalar algunos aspectos que caracterizan la estructura y las funciones de este modelo didáctico. Dada una praxeología por enseñar, el diseño de una AEI se inicia buscando una "situación del mundo" en la que aparezca una cuestión problemática cuya resolución permita o incluso requiera su reconstrucción. Así, se parte de una cuestión generatriz cuyo estudio debería dar lugar a un conjunto de cuestiones derivadas que corresponderían a algunos de los tipos de problemas más representativos de la praxeología objeto de estudio. Puede decirse que las AEI retoman, en cierta manera, una preocupación inherente a la teoría de situaciones didácticas y a su propuesta de reconstrucción de los conocimientos matemáticos a partir de situaciones fundamentales, cuyo objetivo es situar la razón de ser de dichos conocimientos en el corazón mismo del proceso de estudio.

Una vez que la situación ha sido presentada a la comunidad, se inicia un proceso de estudio que, como todos, puede describirse funcionalmente mediante los momentos o dimensiones de dicho proceso. En el caso de las AEI es importante subrayar que el momento del primer encuentro se retrotrae a una cuestión generatriz "en bruto", en lugar de iniciarse con una tarea escolar ya depurada. La principal función didáctica de las AEI es la de introducir en el núcleo del programa de estudio, de manera explícita y como cuestión generatriz del mismo, la razón de ser de la praxeología que se quiere construir a partir del estudio de una "situación del mundo". No haría falta subrayar en este punto que las matemáticas forman parte del mundo y, por lo tanto, que una AEI puede consistir, naturalmente, en el estudio de una situación matemática.

El caso de la medida de áreas y perímetros

Para nuestra investigación, la praxeología considerada es la de la medida de áreas y perímetros de figuras geométricas simples mediante técnicas de medición elementales basadas en propiedades de regularidad de las figuras. Muchas investigaciones publicadas en torno a las relaciones entre área y perímetro ponen en evidencia la existencia de dificultades de los alumnos para concebir que las magnitudes consideradas son autónomas y establecer relaciones entre ellas (Speranza, 1987; Moreira y Comiti, 1993; Jaquet, 2000; D'Amore y Pinilla, 2006). Uno de los aspectos que puede ser determinante en estas dificultades es la dinámica de presentación de los saberes enseñados y, en particular, el fenómeno de *aritmetización de las actividades de medida* puesto en evidencia por Chamorro (2003).

El estudio que aquí presentamos tiene por objetivo incidir en esta dinámica mediante el estudio de las respuestas de un grupo de alumnos de primer curso de educación secundaria obligatoria (12-13 años) en una actividad sobre las relaciones entre área y perímetro de figuras planas por medio de una AEI. De forma similar a la propuesta por Fonseca, Gascón y Lucas (2014), se partió de la elaboración de un *modelo epistemológico de referencia* sobre las magnitudes y sus medidas para el caso del área y perímetro de figuras planas. Este modelo sirvió en una primera fase de la investigación para mostrar que, en el caso de la enseñanza secundaria en Brasil (Gomes da Silva y Dias, en prensa), aparecen muy pocas actividades de comparación de áreas y perímetro sin medida, así como de medida de figuras irregulares. Las dificultades encontradas en los alumnos para relacionar y distinguir las magnitudes de área y perímetro nos parecieron ser una consecuencia directa del tipo de enseñanza propuesta sobre este tema.

A modo de estudio exploratorio, utilizamos el modelo de referencia sobre las magnitudes para diseñar una actividad centrada en la distinción y comparación de áreas y perímetros, para observar las técnicas utilizadas por los alumnos de primer curso de secundaria (aprendidas por lo tanto en primaria) y los elementos teóricos que las acompañan a modo de descripción, explicación o justificación.

■ La experimentación en el aula

La experimentación se realizó con tres grupos-aula de primer curso de secundaria de un instituto público de la región metropolitana de Barcelona (63 alumnos en total), cuya profesora, Lídia Serrano (en adelante, LS) es investigadora en didáctica y coautora de la comunicación. Solo presentamos aquí una primera fase de la AEI experimentada, tres sesiones de 50 minutos, donde aparecen los momentos del primer encuentro y exploratorio, junto con una actividad de evaluación. En esta comunicación nos proponemos analizar las reacciones de los alumnos ante una actividad de clase atípica (cambio en el contrato didáctico), así como contrastar las dificultades encontradas por los alumnos en torno a las relaciones entre área y perímetro documentadas por la literatura.

Nuestra AEI parte de una cuestión problemática inspirada por D'Amore y Pinilla (2007): *Una inmobiliaria compró terrenos para vender y los tiene que vallar. El precio final depende del tamaño y contorno de cada terreno. 1ª Parte: ¿Qué terreno es más caro y por qué? 2ª parte: Ordenar los terrenos según su área y su perímetro. 3ª parte: Dado el precio de los terrenos (en €/m*^{2}*) y el precio de la valla (en €/m), ¿qué terreno es más caro? ¿Y cuál es el más barato?*

Los terrenos venían representados por cinco conjuntos de cuatro figuras en cartulina de formas variables a escala 1:100 sin una comparación evidente entre sus áreas y perímetros (ver figura 1).

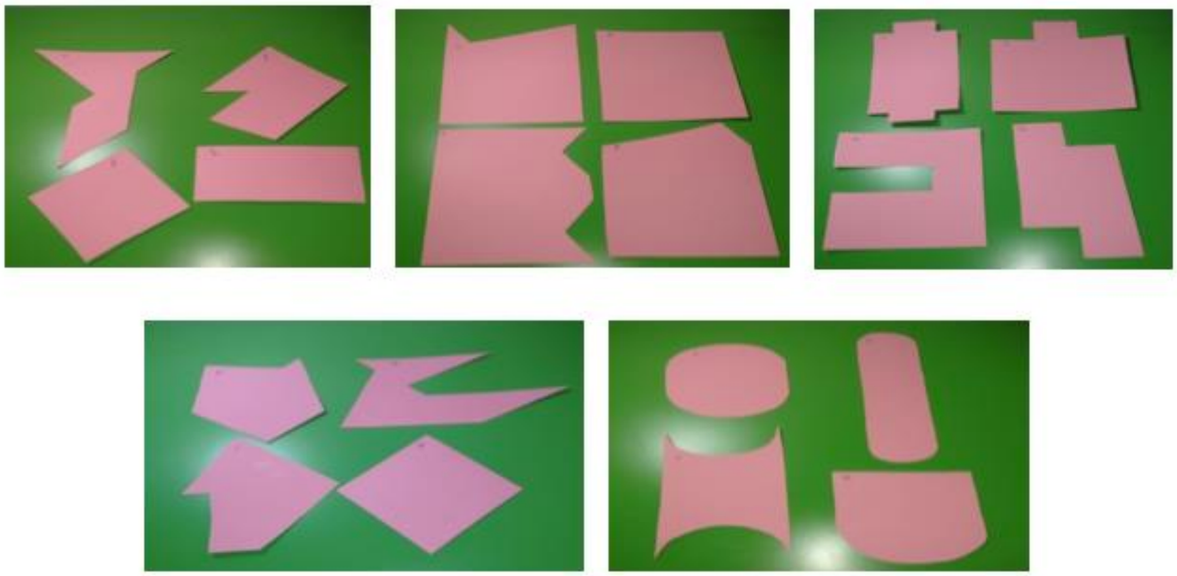


Figura 1: Representación de los terrenos

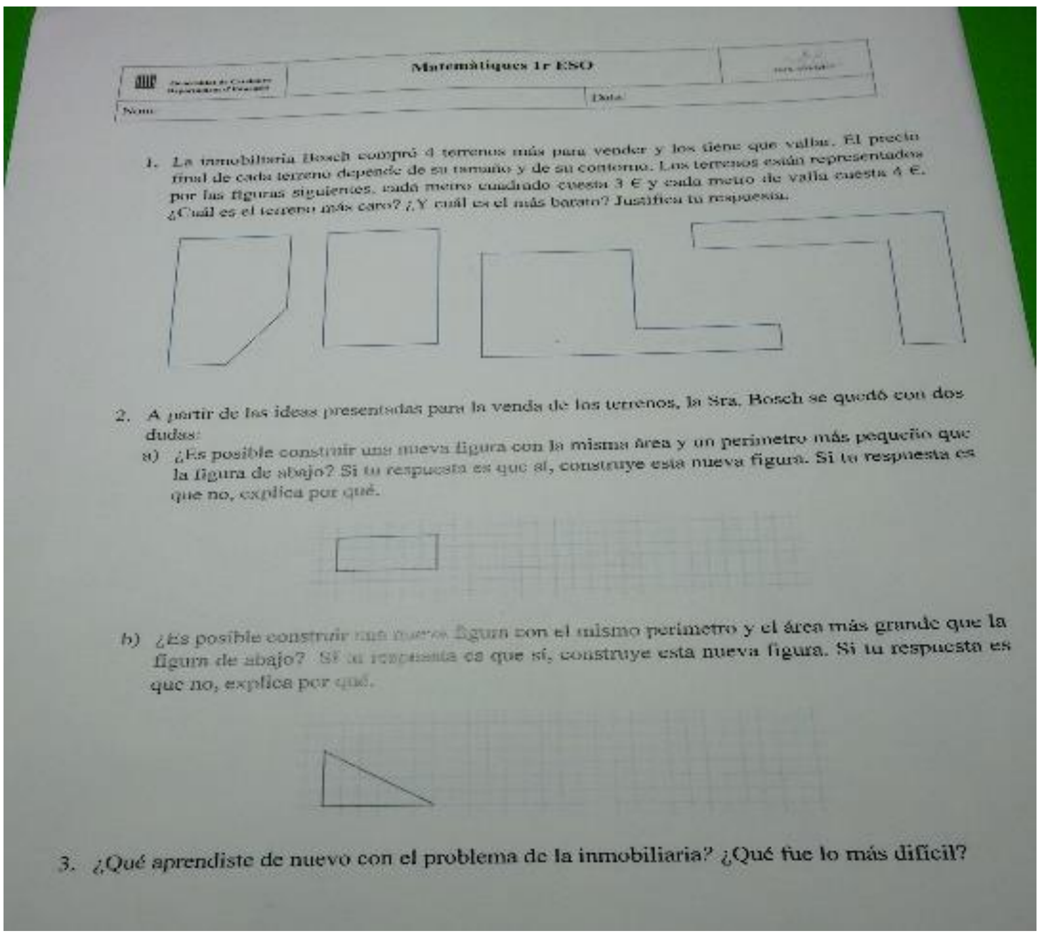
Los alumnos se distribuyeron en grupos de tres o cuatro, asignándose a cada grupo un conjunto de cuatro terrenos de tal forma que a lo sumo dos grupos de alumnos trabajaron con el mismo conjunto de terrenos. En la primera sesión se presentó la cuestión generatriz y se pidió elaborar una respuesta para las dos primeras partes. En la segunda sesión se hizo una puesta en común de los resultados obtenidos y en el caso de disconformidad entre grupos, se discutieron las diferencias para llegar a un acuerdo común, utilizando principalmente argumentos que no involucrasen la medida directa (inclusión de una figura en otra, utilización del pedazo de cinta que envuelve un terreno para bordear otro, etc.). Esta sesión acabó con la presentación de la tercera parte, relativa al cálculo de los precios finales de los terrenos y la comprobación (o discusión) de los resultados avanzados en la sesión anterior. Finalmente, en la tercera sesión se propuso un ejercicio individual con un nuevo grupo de terrenos para estimar su precio, añadiéndose preguntas puntuales sobre la existencia de una figura de misma área y mayor perímetro que una figura dada o viceversa.

El análisis de las respuestas al ejercicio individual, junto con un estudio cualitativo a partir de los materiales recogidos (vídeos de las sesiones y materiales producidos por los alumnos) han permitido establecer los resultados sobre las estrategias de comparación de magnitudes y de medida utilizadas en el momento exploratorio, la apropiación de estas estrategias por parte de los alumnos y la explotación de esta actividad en los momentos posteriores a la experimentación (tecnológico-teórico, trabajo de la técnica, institucionalización y evaluación).

Consideramos los momentos didácticos para presentar el análisis de los resultados de este estudio. En la primera sesión en los tres grupos-aula, la profesora (LS) presenta a los alumnos a José Valério (en adelante JV, investigador en didáctica y coautor de esta comunicación) que viene a plantearles un problema sobre la inmobiliaria en la cual trabaja, propiedad de Marianna Bosch (en adelante MB, investigadora en didáctica y coautora también de este texto). JV proyecta sobre la pizarra el problema y pide que se trabaje en las dos primeras partes ya que en la siguiente sesión vendrá MB al aula. Así, el primer encuentro con la praxeología se da a través de la presentación de un problema proyectado en la pizarra. Se invita a un alumno a leer el encargo y se inicia una primera discusión en gran grupo. Luego se distribuyen en pequeños grupos. Las primeras técnicas que surgen son: medición de los lados de cada figura; descomposición de las figuras de los terrenos en figuras usuales como triángulos, cuadrados y rectángulos; conteo de unidades de medida de área, es decir, recuento de cuadraditos de papel cuadriculados para calcular el área de las figuras; conteo de unidades de longitud para calcular el contorno de la figura de los terrenos; utilización de una cinta para medir el contorno de las figuras circulares. Estas técnicas permiten determinar el terreno con mayor superficie y mayor perímetro (longitud de la valla). Los estudiantes también utilizan las operaciones de adición y multiplicación como estrategia de cálculo al sustituir las fórmulas para calcular el área de cuadrados, triángulos y rectángulos. Al final de la sesión aparecen breves momentos de institucionalización y evaluación cuando JV pide a los alumnos explicaciones y justificaciones de las respuestas. En el contraste de los diferentes resultados, algunos grupos se dan cuenta de los errores cometidos (por ejemplo en los cálculos o mediciones) y vuelven a considerar sus respuestas.

La segunda sesión se inicia presentando a la propietaria de la inmobiliaria (MB), tal como se les había anunciado en la sesión anterior. Un representante de cada grupo le hace un resumen de las conclusiones a las que su grupo había llegado. A continuación, MB les plantea las siguientes nuevas cuestiones: *Dado el precio de los terrenos (en €/m^2) y el precio de la valla (en €/m), ¿qué terreno es más caro? ¿Y cuál es el más barato?* Algunos grupos cuestionan la falta de datos para llegar una respuesta numérica y elaboran sus propias cuestiones, otros necesitaron ayuda por parte de los mediadores de la experimentación. MB escribe en la pizarra el precio: 5€/m para la valla y 2€/m^2 para el terreno. También indica que dos cuadraditos de la hoja corresponden a un metro en la realidad. MB escribe en la pizarra 1*cm* hoja = 1*m* realidad (escala 1:100). Algunos estudiantes se basan en fórmulas para calcular las nociones de área y perímetro, como también las operaciones de adición y multiplicación. La mayoría mide los lados y divide las figuras en rectángulos y triángulos para calcular las áreas y perímetros. Los que tienen figuras con contorno circular piden a LS que les recuerde la fórmula del área del disco. En este momento todos los grupos trabajan muy concentrados. La mayoría se ha repartido las figuras y todos calculan las áreas y perímetros. La institucionalización y evaluación de la sesión viene dada al final de la sesión con una puesta en común de las repuestas.

La evaluación individual duró 50 minutos y estaba formada por tres cuestiones. La primera: *La inmobiliaria Bosch compró 4 terrenos más para vender y los tiene que vallar. El precio final de cada terreno depende de su tamaño y de su contorno. Los terrenos están representados por las figuras siguientes, cada metro cuadrado cuesta 3 € y cada metro de valla cuesta 4 €. ¿Cuál es el terreno más caro? ¿Y cuál es el más barato? Justifica tu respuesta.* Las figuras de los terrenos están en la figura 2. Desde las presentaciones de los grupos de alumnos todos comprenden la cuestión, crean estrategias adecuadas, pero la mayoría no consigue presentar un raciocinio completo. La segunda cuestión: *A partir de las ideas presentadas para la venta de los terrenos, la señora Bosch se quedó con dos dudas: a) ¿Es posible construir una nueva figura con la misma área y un perímetro más pequeño que la figura de abajo? Si tu respuesta es que sí, construye esta nueva figura. Si tu respuesta es que no, explica por qué. b) ¿Es posible construir una nueva figura con el mismo perímetro y el área más grande que la figura de abajo? Si tu respuesta es que sí, construye esta nueva figura. Si tu respuesta es que no, explica por qué.* Las figuras de la cuestión están en la figura 2. Esta cuestión presentó muchas dificultades a los estudiantes, tal vez porque no fue tratado en las sesiones. La tercera cuestión: *¿Qué aprendiste de nuevo con el problema de la inmobiliaria? ¿Qué fue lo más difícil?* Para la primera pregunta, encontramos principalmente: calcular perímetros; las mediciones; el proceso de saber si el terreno es más caro o más barato. Y para la segunda: calcular las áreas de las figuras redondas.



Matemàtiques 1r ESO

Nom: Data:

1. La inmobiliaria Bosch compró 4 terrenos más para vender y los tiene que vallar. El precio final de cada terreno depende de su tamaño y de su contorno. Los terrenos están representados por las figuras siguientes, cada metro cuadrado cuesta 3 € y cada metro de valla cuesta 4 €. ¿Cuál es el terreno más caro? ¿Y cuál es el más barato? Justifica tu respuesta.

2. A partir de las ideas presentadas para la venda de los terrenos, la Sra. Bosch se quedó con dos dudas:
   a) ¿Es posible construir una nueva figura con la misma área y un perímetro más pequeño que la figura de abajo? Si tu respuesta es que sí, construye esta nueva figura. Si tu respuesta es que no, explica por qué.
   b) ¿Es posible construir una nueva figura con el mismo perímetro y el área más grande que la figura de abajo? Si tu respuesta es que sí, construye esta nueva figura. Si tu respuesta es que no, explica por qué.

3. ¿Qué aprendiste de nuevo con el problema de la inmobiliaria? ¿Qué fue lo más difícil?

Figura 2: Copia de la evaluación

Conclusiones provisionales

Entre las dificultades e impresiones que se han observado a lo largo de la actividad destacamos: (a) la falta de tiempo para el momento inicial de manipulación de las figuras y para la comprensión de las convergencias y divergencias entre ellas; (b) la búsqueda espontánea de las medidas y las fórmulas de cálculo de áreas y perímetros, utilizando reglas y calculadoras, indicio del fenómeno de aritmetización de la medida antes mencionado; (c) identificación de una dificultad en los estudiantes por expresar sus ideas, tanto en forma escrita como oral (dentro del propio grupo como en gran grupo); (d) impresión que la actividad se debía haber diseñado de forma que los resultados de un grupo se validaran con los de algún otro grupo para poder identificar los errores y poder tomar decisiones.

En relación con el modelo epistemológico de referencia utilizado, basado en las investigaciones sobre medida de Sierra (2006) y que no hemos detallado en este artículo, observamos que los tres tipos de praxeologías (comparación directa de objetos / comparación mediante elección de unidades de medida / unidad única y cálculo de medida) no se vivieron por igual en todos los grupos e incluso, en algunos grupos no fue posible identificar esta secuencia por el poco tiempo de que se disponía.

Finalmente, consideramos que la AEI proporcionó a los alumnos una gran interacción entre ellos favoreciendo minimizar las dudas y maximizar el desarrollo del aprendizaje en torno a las relaciones entre área y perímetro en un objeto. También animó a los estudiantes a sentirse protagonistas de sus acciones desde el cambio de contrato didáctico, permitiendo una matemática más próxima a sus experiencias diarias, así como la formulación de sus propias preguntas y la necesidad de defender y justificar sus respuestas. Para futuros trabajos, se prevé desarrollar esta actividad para articularla con una nueva AEI sobre construcción de figuras geométricas.

Referencias bibliográficas

Bosch, M. y Gascón J. (2010). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los “talleres de prácticas matemáticas” a los “recorridos de estudio e investigación”**.** En A. Bronner et al. (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d’action* (pp.1-10). Montpellier, Francia : IUFM.

Chamorro, M. C. (2003). El tratamiento escolar de las magnitudes y su medida. En *Didáctica de las Matemáticas para Primaria* (pp. 221-244). Madrid: Pearson Educación.

Chevallard, Y. (1999). L’analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (1997). *Familière et problématique, la figure du professeur.* Recherches en didactique des mathématiques, *17* (3), 17-54.

Chevallard, Y. (2002). *Organiser l'étude. 3*. Écologie & régulation, in J. L. Dorier et al. (Eds.) Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques (pp. 41-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

D'Amore, B. y Fandiño, M. I. (2006). Área e perímetro. *Aspettí concettuali e didattici.* Trento: Erickson.

Fonseca, C; Gascón, J. y Lucas, C. O. (2014). Desarrollo de un Modelo Epistemológico de Referencia en torno a la Modelización Funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17* (3). 289-318.

Gomes da Silva, J. V. y Alves Dias, M. (en prensa). Magnitudes y medidas: un recorrido de estudio e investigación para la práctica profesional. *Actas del 5º Congreso Internacional sobre la TAD*.

Jaquet, F. (2000). Il conflito area-perimetro I. *L'educazione matematica, 2*(2), 66-77.

Moreira, P. y Comiti, C. (1993). Difficultés rencontrées par des élèves de cinquième en cequi concerne la dissociation aire/périmètre pour des rectangles. *Petit x 34*, 43-68.

Sierra, T. A. (2006). *Lo Matemático en el Diseño y Análisis de Organizaciones Didácticas: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes.* Tesis deDoctorado en Educación. Universidad Complutense de Madrid. Madrid – España.

Speranza, F. (1987). La geometria dalle cose alla lógica. En B. D'Amore (Ed.). *La matematica e la sua didatica* (pp. 105-114). Bologna: Pitagora.

TIRO PARABÓLICO Y SU DESCRIPCIÓN ALGEBRAICA EN EL BACHILLERATO TECNOLÓGICO

Pedro Javier Ubaldo Salinas, Rogelio Martínez García, Liliana Flores Jiménez
CECyTNo4 "Lázaro Cárdenas", DME Cinvestav, Instituto Politécnico Nacional. (México)
pubaldos@ipn.mx, martinezga@ipn.mx, lfloresj@ipn.mx.

RESUMEN: En el marco de un proyecto interinstitucional sobre docencia e investigación en Matemática Educativa, se indaga acerca de la comprensión de los estudiantes de tercer semestre del tiro parabólico y su descripción matemática mediante la ecuación cuadrática. Luego de la enseñanza del tema, aunque los estudiantes comprendieron el fenómeno físico, no dieron sentido al modelo matemático. Los resultados obtenidos apuntan a la necesidad de investigar acerca de la forma en que la enseñanza pueda hacer efectiva para el estudiante la interrelación entre las distintas Unidades de Aprendizaje de las diferentes disciplinas, con miras al logro de los objetivos de los Programas de Estudio del bachillerato tecnológico.

Palabras clave: tiro parabólico, ecuación cuadrática.

ABSTRACT: This research is within the framework of an inter-institutional project about Educational Mathematics teaching and research. The work investigates about the third-semester students' understanding of the parabolic throwing and its mathematical description by means of the quadratic equation. After teaching the topic, the students understood the physical phenomenon; however, they didn't get the essence of mathematical model. The obtained results show the necessity to investigate about the way in which the teaching process can make the students effectively use the interrelation among the Learning Units of the different disciplines, in order to achieve the aims of the technological high school Teaching Programs.

Key words: parabolic throwing, quadratic equation.

Introducción

En el marco de un proyecto interinstitucional sobre docencia e investigación en Matemática Educativa, se indaga acerca de la comprensión de conceptos de matemáticas de los estudiantes, revelada cuando los aplican para describir fenómenos físicos que se estudian como tal, de forma tradicional, en el Laboratorio de Física. Informamos aquí de la comprensión de los estudiantes de tercer semestre de bachillerato tecnológico del fenómeno de tiro parabólico y su descripción matemática mediante la ecuación cuadrática, luego de la enseñanza del tema en el curso de *Física I* (DEMS, 2008).

Marco de referencia

El tema de la ecuación cuadrática se incluye en el programa de estudios del bachillerato tecnológico en la unidad de aprendizaje *Álgebra* para el primer semestre (DEMS, 2008, Unidad didáctica 4, p. 16). Le siguen las unidades *Geometría y Trigonometría* para el segundo semestre y *Geometría Analítica* para el tercero. Esta secuencia lleva a suponer que el estudiante del tercer semestre ha alcanzado un cierto dominio de las expresiones simbólicas matemáticas y de los conceptos a los que se refieren. También para el tercer semestre se prescribe para el curso de *Física I* la impartición del tema del tiro parabólico, precedida por la de los temas de caída libre y de movimiento rectilíneo uniforme; la enseñanza teórica es anterior a la experimental respectiva en el laboratorio para cada tipo de movimiento. Con el antecedente del curso *Álgebra*, en *Física I* se espera que el estudiante utilice la ecuación cuadrática como la ecuación de movimiento del tiro parabólico y calcule los valores de sus principales características, a saber: altura máxima, alcance máximo, tiempo en alcanzar la altura máxima y tiempo de vuelo. Con la ecuación cuadrática se obtiene el valor del tiempo de vuelo del proyectil. No obstante, ya Barojas, Covarrubias, Gallegos, López y Vega (1997) han señalado que los estudiantes utilizan una representación *escolarizada* de los conceptos científicos “para dar respuesta a las demandas escolares y que sólo forman parte de su memoria y que manifiestan sólo en procesos declarativos y operacionales” (p.217).

El orden mismo de las asignaturas transgrede el de la evolución del conocimiento, señalada por Born (1956) con su origen en la experiencia con problemas o preguntas referidas a situaciones concretas, que culmina con su formulación matemática abstracta, no al revés. En la misma línea, en su propuesta psicogenética de la evolución del pensamiento del individuo, Piaget e Inhelder (1985) han señalado que los esquemas formales se construyen progresivamente a partir de los esquemas anteriores, en el mismo orden y sin que pueda omitirse alguno de ellos, y subrayó la importancia de la acción en situaciones concretas del entorno para dar lugar a la abstracción. No obstante, incluso la enseñanza tradicional de la Física incluye primero la descripción matemática del fenómeno y luego su confirmación experimental (DEMS, 2008).

Métodos e instrumentos

La Tabla 1 muestra la correspondencia de los contenidos, de interés aquí, de la asignatura de Matemáticas (M) con el tema de Física (LF) y sus semestres respectivos en números romanos. Si bien en el tercer semestre también se incluye el tema de la parábola en la unidad de aprendizaje *Geometría Analítica* (DEMS, 2008, p. 10), su estudio es más o menos simultáneo al de tiro parabólico en *Física I* (DEMS, 2008), por lo que no se puede suponer un dominio del primero por parte de los estudiantes comparable al de la cuadrática.

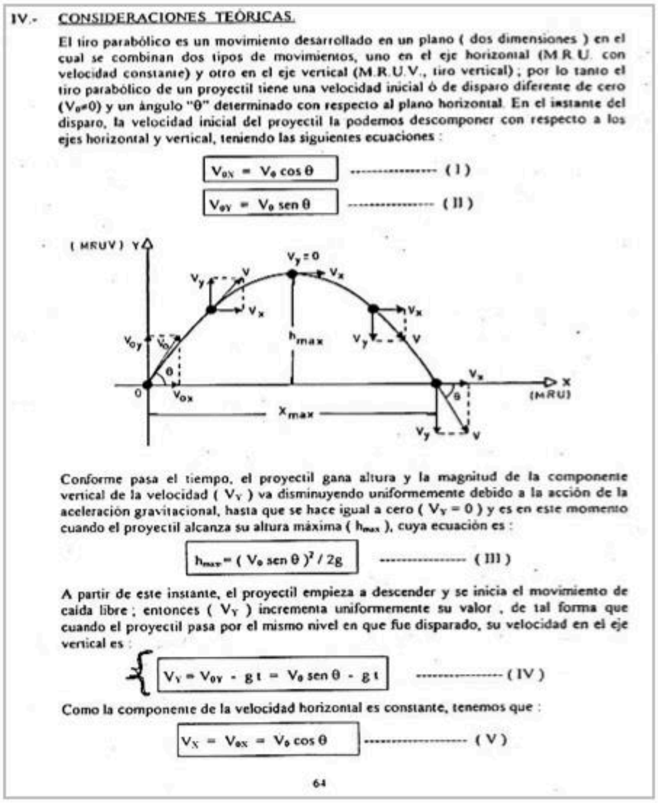
Tabla 1. Articulación de contenidos.

Matemáticas (M)	Competencia particular: Contenido	Semestre M	Semestre LF	Laboratorio de Física I (LF) Practicario (Carrillo, 2006, pp. 63-66)
Álgebra (DEMS, 2008)	Unidad 4: Funciones y ecuaciones cuadráticas (p. 17)	I	III	Unidad 4 Física I (DEMS, 2008) Práctica 16-Tiro Parabólico (DEMS, 2008, pp. 14, 30)

Durante los primeros 15 minutos previos al comienzo de la enseñanza del tiro parabólico, se le aplicó el cuestionario C_1 a un grupo de 16 estudiantes, con el fin de obtener datos de sus conocimientos requeridos por el tema por enseñar. C_1 planteó cuatro reactivos con preguntas abiertas y otro de opción múltiple (véanse en la Tabla 2); se le presentó en el pizarrón para su contestación individual escrita en hoja de cuaderno.

La estrategia de enseñanza fue la dictada por el programa de estudios respectivo (DEMS, 2008); se basó en lo propuesto para el tema en el libro de texto recomendado (Pérez, 2011) y consistió en siete sesiones de aula de una hora cada una y, la octava, de laboratorio, de dos horas. Durante las primeras seis sesiones de aula se introdujeron los conceptos de movimiento uniforme y caída libre, tiro horizontal y sus ecuaciones de movimiento respectivas. En la séptima sesión, para tiro parabólico, mediante problemas alusivos a él se planteó la necesidad de la resolución de la ecuación cuadrática para la obtención del tiempo de vuelo del proyectil desde una altura determinada.

En la octava sesión, el desarrollo de la práctica fue videograbado. La hoja de control consistió en la práctica “Tiro parabólico” propuesta institucionalmente (véase DEMS, 2008, *Física I*, p. 30), e impresa, en la que los estudiantes registraron individualmente por escrito sus cálculos (véase la Figura 2) y conclusiones de la experimentación.



IV.- CONSIDERACIONES TEÓRICAS.

El tiro parabólico es un movimiento desarrollado en un plano (dos dimensiones) en el cual se combinan dos tipos de movimientos, uno en el eje horizontal (M.R.U. con velocidad constante) y otro en el eje vertical (M.R.U.V., tiro vertical) ; por lo tanto el tiro parabólico de un proyectil tiene una velocidad inicial ó de disparo diferente de cero ($V_0 \neq 0$) y un ángulo "θ" determinado con respecto al plano horizontal. En el instante del disparo, la velocidad inicial del proyectil la podemos descomponer con respecto a los ejes horizontal y vertical, teniendo las siguientes ecuaciones :

$$\boxed{V_{0X} = V_0 \cos\theta} \quad \text{---------------- (I)}$$

$$\boxed{V_{0Y} = V_0 \operatorname{sen}\theta} \quad \text{---------------- (II)}$$

Conforme pasa el tiempo, el proyectil gana altura y la magnitud de la componente vertical de la velocidad (V_Y) va disminuyendo uniformemente debido a la acción de la aceleración gravitacional, hasta que se hace igual a cero ($V_Y = 0$) y es en este momento cuando el proyectil alcanza su altura máxima (h_{max}), cuya ecuación es :

$$\boxed{h_{max} = (V_0 \operatorname{sen}\theta)^2 / 2g} \quad \text{---------------- (III)}$$

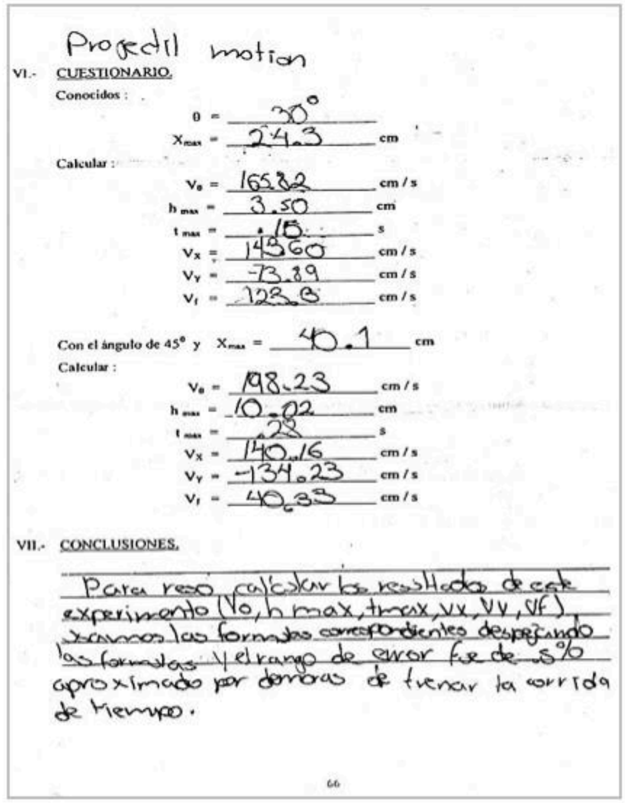
A partir de este instante, el proyectil empieza a descender y se inicia el movimiento de caída libre ; entonces (V_Y) incrementa uniformemente su valor , de tal forma que cuando el proyectil pasa por el mismo nivel en que fue disparado, su velocidad en el eje vertical es :

$$\boxed{V_Y = V_{0Y} - g\,t = V_0 \operatorname{sen}\theta - g\,t} \quad \text{---------------- (IV)}$$

Como la componente de la velocidad horizontal es constante, tenemos que :

$$\boxed{V_X = V_{0X} = V_0 \cos\theta} \quad \text{---------------- (V)}$$

64



Progetil motion

VI.- CUESTIONARIO.

Conocidos :

θ = 30°

X_{max} = 24.3 cm

Calcular :

V_0 = 165.82 cm / s

h_{max} = 3.50 cm

t_{max} = .15 s

V_X = 145.60 cm / s

V_Y = -73.89 cm / s

V_f = 123.8 cm / s

Con el ángulo de 45° y X_{max} = 40.1 cm

Calcular :

V_0 = 198.23 cm / s

h_{max} = 10.02 cm

t_{max} = .28 s

V_X = 140.16 cm / s

V_Y = -134.23 cm / s

V_f = 40.33 cm / s

VII.- CONCLUSIONES.

Para reso calcular los resultados de este experimento (Vo, h max, tmax, vx, Vy, Vf) usamos las formulas correspondientes despejando las formulas y el rango de error fue de .5% aproximado por demoras de frenar la corrida de tiempo.

66

Figura 1. Teoría en la hoja de control (Carrillo, (2006), pp. 63-66).

Figura 2. Resultado de mediciones y conclusiones en la hoja de control.

Para desarrollar la práctica el grupo se organizó en equipos de seis estudiantes. En cada equipo, uno de los estudiantes establecía las condiciones del disparo (ángulo de tiro, altura inicial, masa del proyectil), otro activaba el disparador y otro medía el alcance máximo del proyectil; los demás registraban los datos en sus hojas de control. Con estos datos y con el uso de la calculadora, los estudiantes efectuaron los cálculos requeridos para la descripción del movimiento (velocidad inicial, altura máxima, tiempo de vuelo y alcance máximo).

Luego, en sesión de aula se aplicó el cuestionario C_2, impreso, que planteó siete reactivos, de los cuales uno fue de opción múltiple, dos fueron instrucciones y cuatro fueron preguntas abiertas (véase la Tabla 2); la contestación, individual, duró 50 minutos. El objetivo de C_2 fue obtener datos de la comprensión de los estudiantes del fenómeno del tiro parabólico y su descripción matemática al término de la enseñanza del tema.

Resultados

La Tabla 2 resume los resultados de cada cuestionario, la correspondencia de los reactivos por contenido común y las frecuencias de respuestas correctas proporcionadas a cada reactivo, para C_1, en el primer renglón, mientras que para C_2 en la celda que corresponde al contenido común con el reactivo en C_1 (“TP” denota “Tiro Parabólico”).

Tabla 2. Correspondencia de los reactivos de C_1 y C_2 y frecuencia de respuestas correctas a sus reactivos respectivos.

Reactivos de C_1 (antes de la enseñanza)	¿Qué es TP?	TP es un movimiento ¿de qué tipo?	¿Qué ecuaciones describen un TP?	¿Ecuación alcance máximo? a) lineal, b) cuadrática c) cúbica	¿Qué curva representa a un TP?	
C_1	12	8	6	7	9	
(%)	*75%*	*50%*	*38%*	*44%*	*36%*	
Reactivos de C_2 (después de la enseñanza)						**C_2 (%)**
1) ¿TP es movimiento en: a) Dos, b) Una, c) Tres dimensiones?	---	*14*				*88%*
2) ¿De cuántos y cuáles movimientos consta el TP?	---	*15*				*94%*
3) Trace la gráfica que representa un TP.	---				*16*	*100 %*
4) ¿Tipo de movimiento y ecuación para alcance máximo en TP?	---			*13*		*81%*
5) ¿Movimiento qué tipo y ecuación para altura máxima en un TP?	---	*12*				*75%*
6) Dada altura inicial, ¿ecuación para tiempo de vuelo y de qué orden es?	---		*10*			*63%*
7) Dada velocidad inicial, ¿ecuación para altura en cualquier instante?	---		*6*			*38%*
Promedio por contenido C_2 (%)	---	*85%*	*50%*	*81%*	*100%*	

Antes de la enseñanza, los estudiantes expresaron una noción general de la representación del tiro parabólico y poco conocimiento de la ecuación que lo modela (véanse las segunda y tercera filas de la Tabla 2 para C_1). Un ejemplo de respuestas típicas dadas al cuestionario C_1 se muestra en la Figura 3. Todas las respuestas se dieron en lengua natural y cuatro estudiantes (25%) incluyeron una figura en su respuesta al reactivo 5. Sólo cinco estudiantes contestaron que la cuadrática describiría al tiro parabólico.

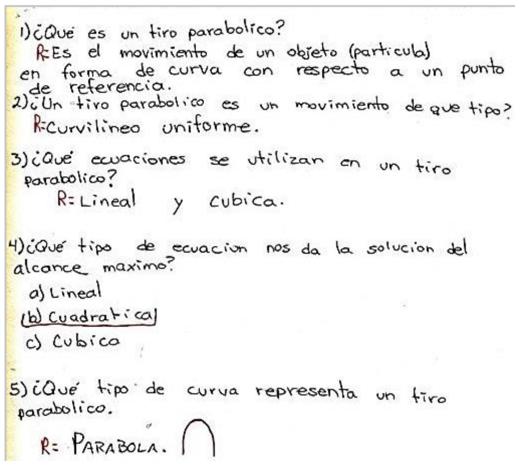

1) ¿Qué es un tiro parabolico?
R: Es el movimiento de un objeto (particula) en forma de curva con respecto a un punto de referencia.
2) ¿Un tiro parabolico es un movimiento de que tipo?
R: Curvilineo uniforme.
3) ¿Qué ecuaciones se utilizan en un tiro parabolico?
R: Lineal y cubica.
4) ¿Qué tipo de ecuacion nos da la solucion del alcance maximo?
a) Lineal
b) Cuadratica
c) Cubico
5) ¿Qué tipo de curva representa un tiro parabolico.
R: PARABOLA.

Figura 3. Respuestas comunes al cuestionario C_1.

Después de la enseñanza, los resultados de C_2 parecen indicar que los estudiantes comprendieron el fenómeno del tiro parabólico como la composición de dos movimientos perpendiculares entre sí, uno rectilíneo uniforme y el otro uniformemente acelerado debido a la acción de la gravedad sobre el proyectil (véanse los renglones cuarto y quinto de la Tabla 2 y la Figura 4), pero no comprendieron su descripción mediante la ecuación cuadrática (véanse los reactivos 6 y 7 de C_2 en la Tabla 2 y la Figura 5), ni los valores obtenidos a partir de ella.

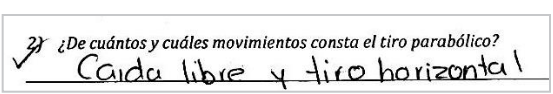

2) ¿De cuántos y cuáles movimientos consta el tiro parabólico?
Caida libre y tiro horizontal

Figura 4. Cuestionario C_2: movimientos componentes del Tiro Parabólico.

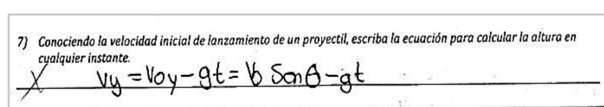

7) Conociendo la velocidad inicial de lanzamiento de un proyectil, escriba la ecuación para calcular la altura en cualquier instante.
$V_y = V_{0y} - gt = V_0 \operatorname{Sen}\theta - gt$

Figura 5. Cuestionario C_2: descripción matemática del Tiro Parabólico.

Contribuyó a este resultado aparente la centración en la operatividad, resuelta con el uso de la calculadora, que dio lugar a la incorrección en la escritura simbólica, igualando el cuadrado de una magnitud con su raíz cuadrada, la colocación del signo de igualdad a la altura del numerador de un cociente, la omisión de unidades de medida, incluso la de ángulos, la colocación de subíndices a la misma altura que la de los símbolos. En particular, aún con el uso de la calculadora, los estudiantes mostraron descuido con el sistema decimal, como lo muestran las Figura 6 y 9 para el valor al cuadrado de la velocidad inicial ($v_0^2 = 27498.85 \ \ cm^2/seg^2$, en lugar de 274.92 (cm^2/seg^2)).

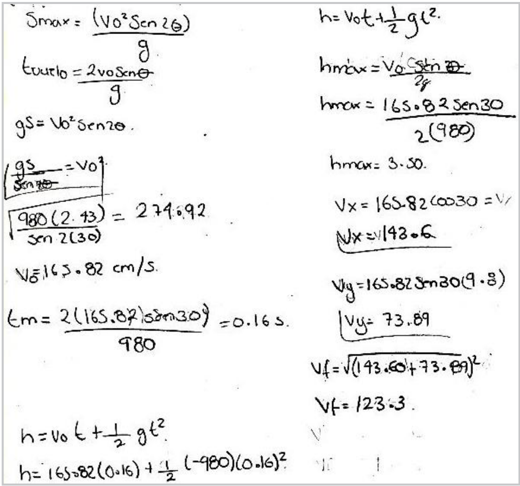
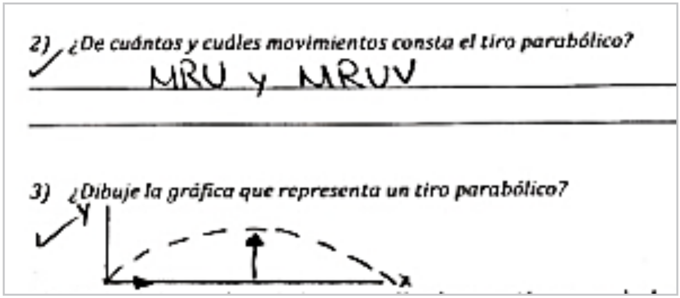


Figura 6*.* Cálculos solicitados en la práctica de laboratorio.

Además, incluso si de los datos obtenidos con las hojas de control de la práctica de laboratorio se pudiera afirmar que los estudiantes comprendieron el tiro parabólico como la composición de dos movimientos independientes (véase la Figura 7), uno rectilíneo uniforme en el plano horizontal y otro vertical (caída libre) variable debido a la acción de la gravedad, una revisión de la enseñanza efectuada arrojaría la duda de si los estudiantes meramente repitieron lo que se les dijo y lo que se les presentó durante las sesiones de estudio del tiro parabólico en el aula y en el laboratorio (véase la Figura 1).

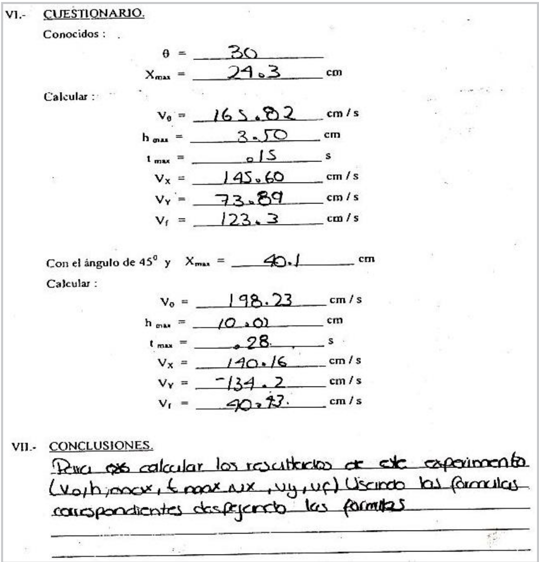
Por los resultados de los cuestionarios C_1 y C_2 considerados respecto a la correspondencia de conceptos mostrados en la Tabla 2, los estudiantes parecieron haber comprendido los conceptos físicos después de la enseñanza y haber distinguido al tiro parabólico como la composición de dos movimientos (reactivo 2 de C_1 (50% de respuestas correctas) y reactivos 1, 2 y 5 de C_2 (en promedio, 85% de respuestas correctas)). Además, pareció que todos lograron identificar después de la enseñanza la forma de la trayectoria descrita por el proyectil (reactivos 5 en C_1 y 3 en C_2; véase la Figura 7).


2) ¿De cuántos y cuáles movimientos consta el tiro parabólico?
MRU y MRUV

3) ¿Dibuje la gráfica que representa un tiro parabólico?

Figura 7. Identificación de la forma de la trayectoria de un proyectil en el cuestionario C_2.

Pero también los datos de la correspondencia de los reactivos en la Tabla 2 (reactivo 3 en C_1 y reactivos 6 y 7 en C_2, y reactivo 4 en C_1 y reactivo 4 en C_2) exhibieron que las operaciones y los cálculos realizados con las mediciones que los estudiantes obtuvieron en la práctica de laboratorio (véanse las Figuras 6, 8 y 9) no contribuyeron a la comprensión del modelo matemático para el tiro parabólico.


VI.- CUESTIONARIO.
Conocidos :
θ = 30
X_{max} = 24.3 cm
Calcular :
V_0 = 165.82 cm / s
h_{max} = 3.50 cm
t_{max} = .15 s
V_X = 145.60 cm / s
V_Y = 73.89 cm / s
V_f = 123.3 cm / s

Con el ángulo de 45° y X_{max} = 40.1 cm
Calcular :
V_0 = 198.23 cm / s
h_{max} = 10.02 cm
t_{max} = .28 s
V_X = 140.16 cm / s
V_Y = -134.2 cm / s
V_f = 40.33 cm / s

VII.- CONCLUSIONES.
Para calcular los resultados de este experimento (vo, hmax, tmax, vx, vy, vf) Usando las fórmulas correspondientes despejando las formulas

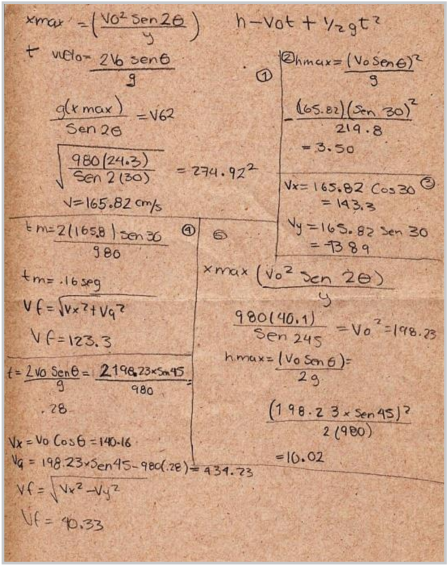


Figura 8. Memorización de "fórmulas".

Figura 9. Operatividad de "fórmulas".

Los estudiantes mismos expresaron en sus conclusiones de la práctica la obtención de resultados mediante la mera aplicación de fórmulas (véase la Figura 8), de lo que se infiere que para que las recuperaran pudieron haber recurrido ya fuera a sus notas, a sus textos o bien a su memoria. Por otro lado, queda por indagar acerca de la contribución de la realización efectiva de las operaciones por los estudiantes mismos, sin el uso de calculadora, a su comprensión de la cuadrática para describir el movimiento del tiro parabólico, a su dotación de sentido a los valores obtenidos y a la necesidad de que expresen sus unidades de medición.

Conclusiones

La representación por parte de los estudiantes del tiro parabólico, la memorización escolarizada de formas de representación en el ámbito matemático (véase la Figura 1) y el énfasis en la operatividad (véanse las Figuras 6 y 9), son causas de su interpretación inconveniente para el análisis de problemas científicos. La insuficiencia en la adquisición de los conocimientos previos requeridos para el estudio de temas nuevos, tales como el sistema decimal, el valor posicional, los sistemas de medidas y la sintaxis algebraica, obstaculizaron la identificación de la cuadrática como descriptor general del movimiento de proyectiles.

El tiro parabólico, como cualquier nuevo tema a revisar en el Programa de Estudios de *Física I*, es en un inicio difícil de comprender para el estudiante; sin embargo, las ecuaciones que modelan este movimiento y su resolución son otras causas del bajo desempeño de nuestros educandos.

Por otra parte, surge la interrogante de si la experimentación efectiva en el laboratorio de Física debería anteceder al estudio en el aula de la descripción matemática del tiro parabólico y de qué manera se propondría tal experimentación para que el estudiante dotara de sentido a la ecuación cuadrática como ecuación de movimiento del proyectil.

Los resultados obtenidos apuntan a la necesidad de investigar acerca de la forma en que la enseñanza pueda hacer efectiva para el estudiante la interrelación entre las distintas Unidades de Aprendizaje de las diferentes disciplinas, con miras al logro de objetivos de los Programas de Estudio del bachillerato tecnológico.

Referencias bibliográficas

Barojas, H., Covarrubias, F., Gallegos, L., López, A., Vega, E. (1997). Transformación de concepciones epistemológicas y de aprendizaje en procesos de física en el nivel medio superior. En G. Waldegg (Ed.). *Memorias del IV Congreso Nacional de Investigación Educativa,* pp. 216-229. México D. F: COMIE.

Born, M. (1956) *Experiment and Theory in Physics.* Nueva York: Dover.

Carrillo, R. (2006). *Tiro parabólico en Prácticas de laboratorio*. México D. F: IPN-CECyT No 4 “Lázaro Cárdenas”.

Dirección de Educación Media Superior (DEMS). (2008). *Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: Álgebra.* México: IPN.

Dirección de Educación Media Superior (DEMS). (2008). *Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: Física I.* México: IPN.

Pérez, H. (2011). *Física General*. México D. F.: Patria.

Piaget, J., Inhelder, B. (1985). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente.* 6ª. ed. Barcelona: Paidós Ibérica.

OBRAS DE TEATRO PARA RESOLVER PROBLEMAS ADITIVOS

Mario Hernández Pérez, Aurora Gallardo Cabello
CINVESTAV. (México)
mhernandezp@cinvestav.mx, agallardo@cinvestav.mx.

RESUMEN: Estudiantes de 11 a 13 años de edad primer grado de la escuela secundaria resuelven problemas aditivos después de recibir enseñanza en el tema. La resolución consta de dos momentos: en el primero, resuelven usando los recursos que consideran convenientes, en el segundo momento, se les sugiere usar el guión teatral. Buscamos las posibles conexiones entre respuestas intuitivas y formales en sus procedimientos. Los textos creados por ellos muestran aspectos que nos permiten profundizar en la interpretación y resolución de este tipo de problemas, pretendiendo aportar algunos elementos en el estudio de los números negativos con énfasis en el lenguaje verbal. En esta tarea, los sujetos usan un lenguaje acorde a su vida cotidiana y muestran distintos niveles de desempeño tanto en la creación de textos como en la puesta en escena dentro del salón de clases.

Palabras clave: problemas aditivos, negatividad, teatro

ABSTRACT: The 11-13 year- old students of first-year of secondary school solve addition problems after the topic is taught. The solution is conceived by two steps. In the first one, the students solve problems by using the resources they consider appropriate. During the second step, they are suggested to use a theatrical guide. We look for the possible connections between their intuitive and formal answers with respect to their procedures. Their texts they create show some aspects that allow us to deepen in the understanding and solution of this kind of problems, attempting to provide some elements in the study of negative numbers, with emphasis in verbal language. While fulfilling this task, the students use a language in correspondence with their daily activities and they show different performance levels both in creating the texts and acting them out in the classroom.

Key words: addition problems, negativity, theater

Marco Teórico

Almeida y Bruno (2013) reportan el distanciamiento entre las resoluciones formales y las intuitivas en problemas aditivos. Esta diferenciación ayuda a profundizar en el conocimiento de los números negativos. Buscamos establecer cómo el alumno al elaborar un guión teatral, revela un diálogo que aunque simple le permite dar sentido a los enunciados verbales de problemas aditivos, que quizá un profesor pudiera presentarlos de forma complicada.

Pretendemos dar respuesta a la siguiente pregunta:

¿Cómo son los procedimientos que usan los estudiantes de secundaria al resolver problemas aditivos a través de un guión teatral?

Bruno y Martinón (1994) definen a los problemas aditivos como aquellos que se pueden resolver con sumas y restas de números enteros donde una suma se convierte en una resta al introducir estos números y viceversa. Bruno y Martinón (1997) proponen la Clasificación Funcional y Semántica de Problemas Aditivos. Ellos explican la resolución de estos problemas a través de representaciones formales (sintaxis) con los enteros donde la semántica juega un papel fundamental. Nos advierten de la existencia de formas semánticas equivalentes al darle sentido a las expresiones sintácticas. Estos autores recurren a significados como: estado, variación y comparación. El estado tiene un sujeto, una magnitud y una unidad de medida, por ejemplo: *Juan tiene 5 pesos*. La variación implica un cambio de estado en un periodo de tiempo; *Juan tenía 5 pesos en la mañana y por la tarde tiene sólo 3 pesos*. La comparación se presenta, por ejemplo, si digo que: *Juan tiene 2 pesos más que Pedro*. Los autores parten de estos conceptos básicos y avanzan hacia otros más complejos que permiten la conformación de las once categorías en su clasificación.

Así también, Gerstberger (2009) señala que dentro del trabajo con obras de teatro de matemáticas hay guiones de buena calidad que se pueden aplicar con los alumnos y también pedirles otros, con lo que estaríamos estimulando su creatividad. El autor expone que en su trabajo con obras de teatro en la enseñanza universitaria, los estudiantes han reformulado guiones teatrales en su propio lenguaje, expresando ideas socioculturales, Gerstberger retoma a Pierce (1976) quien explicó que en este proceso los alumnos crean signos en la mente que sólo de esta forma es posible concebirlos. Él usa distintos conceptos para fundamentar este tipo de trabajo en las aulas, por ejemplo el término estética (percepción sensorial y cognición en general y la otra acepción que es catalogar algo como estético o no estético).

Walker, Tabone y Weltsek (2011) justifican el uso del teatro porque en sus estudios aportan la evidencia del potencial de las artes para contribuir en los logros del lenguaje y las matemáticas. Las razones por las que estas actividades resultan efectivas son tal vez que los estudiantes ven en el teatro algo muy cercano a su vida y los profesores tienen ánimo porque ven renovada su labor docente. El lenguaje juega un papel fundamental porque son los alumnos quienes redactan y se expresan frente a sus compañeros logrando así una alfabetización con formas propias de expresión.

Los autores ven la necesidad de proyectos de artes bien planeados por las drásticas y duras realidades de las capacidades intelectuales de sus jóvenes.

Inoa, Weltsek y Tabone (2014) dan continuidad al trabajo de Walker et al. (2011), y aportan datos adicionales para justificar la enseñanza del teatro como estrategia para la mejora en matemáticas y otras materias. Ellos argumentan las siguientes ideas: En los últimos 30 años ha habido una creciente conciencia de la eficacia de la integración de las artes para el mejoramiento del aprendizaje, especialmente para estudiantes de bajos recursos, por ejemplo, el éxito de estudiantes en estas escuelas gracias a las artes cuyos profesores expresaron la percepción de una renovación de su profesión. Otras escuelas superaron aspectos como el ambiente, la lectura y las matemáticas. Ha habido una positiva asociación entre el teatro y la lectura, la comprensión del lenguaje oral y comprensión de historias escritas, la relación entre el teatro y el desarrollo del lenguaje oral. Existe un vínculo entre el teatro creativo y las habilidades en el lenguaje oral de niños con problemas de aprendizaje. El uso de títeres y máscaras con alumnos de tercer y cuarto grado, ha dado seguridad para superar el miedo de usar el lenguaje de forma incorrecta. La positiva relación entre el teatro y la comprensión lectora, la escritura y las habilidades de comunicación. Las clases de teatro, fundamentalmente en Estados Unidos durante los últimos 30 años, han sido usadas para reforzar el desarrollo y comunicación interpersonal y las habilidades sociales. Surge reconocimiento de la persona como individuo productivo, creativo y que está aprendiendo.

Método

Se presentó un problema aditivo a 106 estudiantes de primer grado de secundaria a quienes mes y medio antes de la aplicación, se les enseñó la resolución de 18 ejercicios de situaciones aditivas durante cuatro sesiones continuas de 50 minutos cada una a través de: fichas, lenguaje verbal, situaciones de ganancia-pérdida, el termómetro, el elevador.

Se dio énfasis a las equivalencias semánticas y sintácticas (Bruno y Martinón, 1997) para que ellos advirtieran que un problema se puede resolver con suma y resta usando los negativos. Siguieron dos sesiones donde resolvieron un ejercicio de 14 expresiones con números enteros. Como parte de su evaluación bimestral se incluyó un problema con redacción similar a una categoría de Bruno y Martinón (1997): variación de un estado, una de las categorías más simples definida por estos autores.

El profesor proporcionó a los alumnos el guión de una obra de teatro con el tema de los derechos de los trabajadores. Ellos la representaron en equipo. A continuación se les dio un problema expuesto aquí, en el rubro de Resultados, para que lo resolvieran y luego lo representaran en una obra de teatro. El propósito principal sería explicar el procedimiento de resolución. Se les dieron dos sesiones de 50 minutos para el trabajo. Se analizaron los guiones teatrales y se escogieron tres porque los estudiantes fueron explícitos en sus procedimientos.

Se escogió la obra del estudiante *E4* (el texto se muestra en el apartado de Resultados) para ser representada con los estudiantes de los cuatro grupos que participaron en este estudio y así poder observar el desempeño de cada uno de éstos. Se destinaron dos sesiones de 50 minutos de ensayo, en este proceso, se colocó una lámina con el guión teatral al frente del salón para que los estudiantes copiaran el guión y pudieran consultarlo en cualquier momento. Finalmente en la tercera sesión de 50 minutos, se presentó la Obra en equipo varias veces conforme lo permitió el tiempo.

Resultados

Presentaremos *tres ejemplos* de la resolución del problema: "Un comerciante compró un artículo por 7 pesos, lo vendió en 8, lo volvió a comprar en 9 pesos y lo vendió finalmente en 10 pesos. ¿Cuál fue la ganancia?" (Alberro, Bulajich y Cetina 2005, p. 24).

Los estudiantes son denotados con *E1, E2 y E4,* de estos tres, sólo el sujeto *E1* resuelve correctamente el problema sin embargo sólo usa sumas de números positivos y el guión teatral. Al terminar de presentar los ejemplos señalados líneas arriban, hacemos comentarios acerca del desempeño de los grupos en la representación teatral.

Los tres ejemplos de guiones teatrales

Estudiante E1

Primero se presenta el enunciado y la resolución del problema vía respuesta formal con sumas de números negativos, la cuál es la idónea para los estudiantes de la escuela secundaria. Posteriormente se presenta el mismo problema pero con la resolución por un alumno a través de un guión teatral. El alumno recurrió a los números positivos.

Problema

"Un comerciante compró un artículo por 7 pesos, lo vendió en 8, lo volvió a comprar en 9 pesos y lo vendió finalmente en 10 pesos. ¿Cuál fue la ganancia?" (Alberro et al. 2005, p. 24).

Respuesta deseable

(-7)+(+8)+(-9)+(+10)=(+2)

Respuesta del alumno:

7+1=8 Ganó 1, 9+1=10 Ganó 1, Ganancia $2

Resolución del alumno (E1) con un guión teatral

El estudiante en el guión habla sobre un contexto familiar donde aparece un narrador (que es el propio alumno), la suegra y su hija y finalmente la prima de la suegra. En la siguiente parte se muestra el guión teatral donde el investigador ha agregado *E1* para indicar la aparición del narrador así como los sustantivos: suegra, hija y prima, ya que el alumno sólo fue indicando los diálogos con guiones.

E1: Mi suegra la diablilla tenía $20 y compró un peine de $7 para peinarse, según ella para verse como la bella pero más bien era la bestia.

Suegra: Oye hija, te vendo un peine.

Hija: ¿En cuánto, mamá?

Suegra: En $8, hija.

Hija: Dámelo mamá.

E1: Entonces así mi suegra la bruja recuperó $1 y lo volvió a comprar en $9, y se lo vendió a su prima.

Suegra: Prima te vendo un peine.

Prima: ¿En cuánto prima?

Suegra: En $10.

Prima: ¡Dámelo prima!

E1: Y según mi suegra la pelos de gallina, su ganancia fue de $1, más que en el total dan $2.

E1 resuelve correctamente el problema recurriendo a los números positivos (sumas). En el guión teatral muestra una resolución correcta explicando paso a paso, usa un lenguaje acorde a su vida cotidiana, no recurre a los negativos.

Estudiante E4

Se le pidió a un alumno que resolviera un problema con el procedimiento que él quisiera. Posteriormente se le solicitó la resolución a través de un guión teatral. A continuación se presenta la resolución sintáctica del alumno, después aparece el guión teatral creado por él.

Problema

"Un comerciante compró un artículo por 7 pesos, lo vendió en 8, lo volvió a comprar en 9 pesos y lo vendió finalmente en 10 pesos. ¿Cuál fue la ganancia?" (Alberro et al. 2005, p. 24).

Respuesta deseable

$(-7)+(+8)+(-9)+(+10)=(+2)$

Respuesta del alumno: Lo compra en 7, lo vende en 8 y gana $1 y tiene 9 y esos 9 los que gasta otra vez, ahí no tiene, pero lo vende en $10 y su ganancia es de $1.

(-7)+(+8)-(9)+(10)=+1

Se muestra el guión teatral creado por el estudiante, el investigador ha agregado algunas explicaciones. En el guión hay un narrador que denotaremos con *E4* (Estudiante 4). Los personajes del guión creado, pertenecen a la serie animada Dragon Ball Z (en esta caricatura aparecen varios guerreros cuyo fin es defender a la tierra del ataque de seres procedentes de otros mundos que pretenden conquistarla). Los personajes que el alumno usa en la obra son: Gohan y Gotenz (dos niños), Gokú (Padre de Gohan y Gotenz), Trunks (es amigo de Gohan y de Gokú), Píkoro (fue maestro de Gohan), el escenario es el planeta Hahio (el alumno señala a este planeta en lugar de la tierra). En la historia aparecen términos como “Super Sayayin” que se refiere a un poder que aumenta la fuerza de los guerreros, “esfera del dragón” con la cual se puede invocar a un dragón y pedirle a éste deseos que les facilite la labor de los guerreros. La serie animada contiene muchos personajes y elementos, el alumno ha cambiado ligeramente algunos componentes originales.

Resolución del alumno (E4) con un guión teatral

E4: Gotenz compra un radar para buscar las estrellas del dragón, le costó 7 pesos. Trunkz se da cuenta y le dice…

Trunkz: ¿Dónde lo conseguiste?

E4: Gotenz no quiso decirle. Trunkz se enoja y se convierte en Super Sayayin. Gohan los separa.

Gotenz: Cálmate por favor que destruirás el planeta Haio.

Trunkz: Cállate. Gohan: dile que me lo venda, le doy 8 pesos.

Gotenz: ¡Si claro!, claro que si, dame el dinero.

Trunkz: Está bien, toma. Qué negocio.

E4: Gotenz regresa a la cabina de Pikoro y le dice…

Gotenz: ¿Tendrás otro?

Pikoro: Sí, tengo más pero valen 8 pesos, porque la brújula no existe en este planeta.

Gotenz: Justo lo que traigo en mi cartera, je, je.

E4: Gotenz regresa y se encuentra a su papá Gokú.

Gokú: Es un radar de la esfera del dragón. ¡Véndemelo!

Gotenz: Está mal, no lo sé.

Gokú: Ándale y te llevo al parque de diversiones, si¡!¡!¡

Gotenz: Está bien dame 10 pesos.

Gokú: Claro, toma hijo.

E4: Se van al parque de diversiones y Gotenz se ganó $1.

En la primera resolución el estudiante usa lenguaje verbal que dice: Lo compra en 7, lo vende en 8 y gana $1 y tiene 9 (el alumno no indica de dónde saca el peso que suma a los 8 y así pueda gastar la cantidad de 9 pesos) y esos 9 los que gasta otra vez, ahí no tiene, pero lo vende en $10 y su ganancia es de $1. El alumno no suma el peso ganado en la primera venta con el peso ganado en la segunda venta, por lo que da una respuesta de $1 que no es correcta. También usa sintaxis con enteros. La expresión sintáctica es correcta, el alumno muestra comprensión del problema y se da cuenta que es posible resolverlo usando sintaxis con enteros, sin embargo no llega a la respuesta deseable: (-7)+(+8)+(-9)+(+10)=(+2), ya que el resultado en lugar de 1 debe ser 2.

Por otra parte, en la secuencia del guión teatral el alumno cambia un dato del problema original ya que en lugar de comprar la segunda vez el producto en $9, el personaje lo compra en $8 que es la cantidad que obtuvo al vender el producto por primera vez.

Advertimos la necesidad de conexión entre representaciones concretas y formales, las cuales deben corresponder recíprocamente para dar sentido correcto en el uso de los enteros con los estudiantes de la escuela secundaria.

Estudiante E2

Se le pidió a otro estudiante que resolviera un problema aditivo y que después hiciera la resolución a través de un guión teatral. Se presenta primero la resolución del estudiante con lenguaje verbal. Luego se muestra el guión teatral donde el profesor ha agregado comentarios entre paréntesis. En el texto hay un relator que denotaré por *E2* (Estudiante 2). Además aparecen los personajes: Gobernante corrupto y Paquita la del Barrio (cantante conocida por los mexicanos).

“Un comerciante compró un artículo por 7 pesos, lo vendió en 8, lo volvió a comprar en 9 pesos y lo vendió finalmente en 10 pesos. ¿Cuál fue la ganancia?” (Alberro et al. 2005, p. 24).

Respuesta del alumno:

Porque lo compró en 7 y lo vendió en 8 lo volvió a comprar en 9 así que pierde el peso que ganó y lo vende en 10 así que gana 1 peso.

Resolución del alumno (E2) con un guión teatral

La vaca asesina

E2: Una vaca iba caminando por la calle y se encuentra al gobernante corrupto.

Vaca: Mató a mis hijos *(Refiriéndose al gobernante).*

Gobernante: Si, ¿y qué vas a hacer?

E2: La vaca saca una pistola y lo mata.

E2: Años después el gobernante es resucitado por los dioses del más allá. Entonces va a comprar unas galletas con Paquita la del Barrio y le cuestan 7 pesos y como no le dieron las que quería las vende en 8, se compra otras donas que le cuestan 9 y no le gustan y las vende en 10 pesos y ya no compró más cosas.

E2: Va de nuevo (*el gobernante*) con Paquita y compra una leche, pero la leche era de la que experimentó y tenía cáncer de vaca y se murió (*el gobernante*). Y Paquita empieza a cantar: vaca de dos patas, que bueno que estás aquí.

Fin.

La resolución muestra que el estudiante tuvo dificultades para darse cuenta de la ganancia total, ya que sólo considera lo que ganó al vender el segundo producto sin tomar en cuenta lo que pasó desde un inicio, es decir, no advierte lo que ganó al vender el primer producto porque señala que al comprarlo en nueve pesos pierde la ganancia de un peso que había obtenido al vender el primer producto en ocho pesos, lo que sugiere dificultades en la comprensión lectora.

El desempeño en la representación teatral

Los estudiantes presentaron distintos niveles en el desempeño de la situación: unos dependían mucho del texto, es decir, ellos básicamente se dedicaron a realizar una lectura dramatizada del guión; otros hicieron también una lectura dramatizada, sin embargo cambiaron algunos elementos del texto que no modificaba la parte matemática, otros estudiantes improvisaron los diálogos respetando la secuencia, incluso agregaron frases con humor en sus representaciones.

Reflexiones finales

- Sólo un estudiante del total recurrió a los negativos en la resolución del problema. Caso (*E4*).
- Varios estudiantes son capaces de crear guiones teatrales con secuencia lógica (15 de 106).
- Sólo tres sujetos muestran en su guión teatral la respuesta correcta.
- Algunos sujetos en su guión teatral conciben que la variación descrita por Bruno y Martinón (1997), puede referirse a más de un sujeto, cuatro estudiantes propusieron lo anterior en su desempeño.
- El guión teatral posibilitó la exploración de las ideas de los alumnos acerca de la interpretación del problema.
- Los guiones teatrales permitieron conocer el tipo de lenguaje usado por los estudiantes.
- Se observó un intento de conexión entre representaciones intuitivas y formales, recurriendo a números negativos. (Caso *E4*).
- Se observaron dificultades de comprensión lectora.
- Los estudiantes crean guiones con contextos adecuados en los problemas.

Referencias bibliográficas

Alberro, A., Bulajich, R. y Cetina, D. (Eds.). (2005). *Problemas del calendario matemático infantil 2005-2006, un reto diario.* México D. F.: Torre y de la Torre Impresos.

Almeida, R. y Bruno. A. (2013). Estrategias de futuros profesores de primaria en la resolución de problemas aditivos con números negativos. En A, Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 127-136). Bilbao: SEIEM.

Bruno, A. y Martinón, A. (1997). Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos. *Educación Matemática, 9* (1), 33-46.

Bruno, A. y Martinón, A. (1994). La recta en el aprendizaje de los números negativos. *Suma*, *18*, 39-48.

Gerstberger, H. (2009). Mathematics learning and aesthetic production. *Mathematics Education, 41*, 61-63.

Inoa, R, Weltsek, G. y Tabone, C. (2014) A Study on the Relationship between Theater Arts and Student Literacy and Mathematics Achievement. *Journal for Learning through the Arts, 10* (1), 1-21. Recuperado de: https://escholarship.org/uc/item/3sk1t3rx

Peirce, C.S. (NEM) (1976). *The new elements of mathematics by Charles S. Peirce* (Vol. I-IV). The Hague-Paris/Atlantic Highlands, NJ: Mouton/Humanities Press.

Walker, E., Tabone, C., y Weltsek, G. (2011) When Achievement Data Meet Drama and Arts Integration. Language Arts, v88 n5, 365-372. Recuperado de: https://static1.squarespace.com/static/564f666fe4b09f09af209c21/t/56a55df8be7b963366ffc53f/1453678073208/Walker-Tabone-Weltsek-achievement-drama-LA-2011.pdf

UNA PROPUESTA DE SITUACIÓN DIDÁCTICA PARA LA APROXIMACIÓN DE LA MEDIDA DEL ÁREA POR EXHAUSCIÓN

Francisco Ugarte Guerra, Mihály Martínez Miraval
Pontificia Universidad Católica del Perú. (Perú)
martinez.ma@pucp.edu.pe, fugarte@pucp.edu.pe

RESUMEN: Esta investigación presenta el análisis de las dialécticas de la Teoría de las Situaciones Didácticas por las que transitan estudiantes universitarios al desarrollar una situación didáctica, mediada por el GeoGebra, que los lleva a la aproximación de la medida del área. Al realizar el contraste entre los resultados esperados y obtenidos, se observó que los estudiantes adaptaron por sí mismos un procedimiento de aproximación para medir el área que se les propuso, conceptualizando de esta forma (en el sentido de Brousseau), la noción de límite infinito asociado al cálculo de medición a partir de un proceso por exhausción; al mismo tiempo se observaron las dificultades en el proceso de conversión de la aproximación geométrica (registro gráfico) al registro algebraico.

Palabras clave: teoría de situaciones didácticas, geometría dinámica, GeoGebra, concepto de área

ABSTRACT: This research work shows an analysis of the dialectics of the Didactic Situation Theory that the university students affront when developing a didactic situation, by using the Geogebra software, in order to approximately obtain the measurement of the area. When comparing the expected and obtained results, it was possible to observe that students adapted by themselves an approach procedure for measuring the proposed area. So, they conceptualize (in Brousseau's sense) the notion of infinite limit associated to measurement calculus from a process by exhaustion. At the same time, difficulties in the conversion process from the geometric approach (graphic register) to algebraic register were observed.

Key words: Didactic Situation Theory, dynamic geometry, Geogebra, area concept

Introducción

El proceso de conceptualización del área se desarrolla de manera transversal durante todo el periodo escolar y, en el nivel superior, se asocia al concepto de integral definida. Al respecto, Corberán (1996), señala que la dificultad que tienen los estudiantes en la construcción de conceptos matemáticos como, por ejemplo, el de integral definida, se explica por la falta de un concepto de área.

En nuestra práctica docente, en una universidad de Lima, no se propone una definición formal de área ni de integral definida, aún cuando se basan en conceptos que son familiares a los estudiantes tales como: funciones, intervalos, áreas de rectángulos, sumatorias, límites, entre otros. De esta manera, consideramos que se pierde la oportunidad de que los estudiantes adquieran un nuevo concepto a partir de sus conocimientos previos, por medio de una situación didáctica.

Freudenthal (1999) presenta diferentes enfoques para la construcción del concepto de área, la existencia de estos enfoques es un argumento común a muchas investigaciones (Puig, 1997; Corberán 1996) que intentan explicar la complejidad de la construcción de este concepto. En nuestra investigación hemos empleado el enfoque por medición mediante un proceso de exhausción, que se caracteriza por el uso de unidades de área cada vez más pequeñas que generan una aproximación, por defecto, al área.

La situación didáctica que planteamos propone que el estudiante adapte a su aprendizaje un procedimiento de aproximación, mediado por el Geogebra, que le permita aproximar la medida del área tanto como lo desee mediante la adición de medidas de áreas de rectángulos de igual base. Adicionalmente y de forma complementaria al objetivo planteado, pretendemos que el estudiante represente dicha aproximación utilizando un registro algebraico.

Con esa finalidad diseñamos una propuesta didáctica, tomando como marco teórico a la Teoría de las Situaciones Didácticas, de forma tal que a partir de la interacción entre el estudiante, el saber y el medio, el aprendizaje se logre (Brousseau, 2007).

Por otro lado hemos elegido a la Ingeniería Didáctica como nuestro marco metodológico, por ser, en palabras de Artigue (1995), «un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza» (p. 36).

Respecto al uso de las herramientas informáticas, que involucran a la geometría dinámica, Amorin et al. (2011) afirman que estas permiten que el estudiante valide sus hipótesis, y argumente o cuestione sus ideas o las de sus compañeros. En las situaciones que hemos diseñado, a diferencia de otras, como las de Ribeiro (2002), en las que reportan el uso de la tecnología como una herramienta que permite al estudiante dibujar rectángulos en el plano y hallar sus áreas, a partir del ingreso de comandos en la barra de entrada (procedimiento estático), nosotros hemos diseñado *applets* en Geogebra, basados en deslizadores, de modo que permitan observar, de forma dinámica, cómo al aumentar el número de rectángulos, aumenta la suma de las medidas de sus áreas, lo que además permite centrar la atención del estudiante en la interpretación de resultados y no en la complejidad de los cálculos.

Problemática

En la etapa escolar, el concepto de área se enseña a partir de métodos de subdivisión finita debido a que se desarrolla un pensamiento matemático elemental; sin embargo, en una etapa superior donde se debe desarrollar un pensamiento matemático avanzado, se esperaría que dicho concepto se enseñe a partir de un proceso de subdivisión infinita; sin embargo, este proceso no se realiza.

Es frecuente que los textos de cálculo integral propongan solucionar el problema del área a partir de una construcción utilizando el límite de una suma Riemann (Stewart, 2001; Leithold, 1998), asociando dicho límite a la integral definida. Sin embargo, esta construcción no se presenta como una actividad de aprendizaje, sino como una definición y los problemas asociados están enfocados a la aplicación directa del teorema fundamental del cálculo y de las propiedades de integral definida, produciéndose un fenómeno advertido por Artigue (2003).

Nosotros diseñamos e implementamos actividades donde el estudiante construyó el concepto de área utilizando el enfoque por medición, a partir de un proceso de exhauscíón que considera subdivisiones cada vez más finas, generadas a partir del incremento de rectángulos de aproximación que tienden al infinito. De esta forma, la definición de área se obtendría de manera natural como resultado de una suma de medidas de áreas de infinitos rectángulos.

Esta propuesta mediada por el Geogebra es una alternativa al uso del teorema fundamental del cálculo como estrategia presentada en los textos arriba mencionados. De esta manera, se esperan superar las dificultades que presentan los estudiantes en el proceso de conceptualización de los procesos de límites, al mismo tiempo que se conectan, de una manera flexible, el trabajo analítico y gráfico.

Marco teórico y diseño de la investigación

El aprendizaje de un concepto matemático, desde nuestra concepción, debe surgir a partir de las interacciones entre el estudiante, el saber y el medio creado por el profesor que le permita al estudiante construir el nuevo conocimiento. Por ese motivo, consideramos que el marco teórico más adecuado para nuestra investigación es la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (2007).

Para que el estudiante adapte a su aprendizaje un procedimiento que le permita aproximar el área de una región tanto como lo desee, hemos diseñado actividades desde la teoría de situaciones didácticas, para que el estudiante adquiera el concepto de área a partir de la interacción con el medio propuesto por el profesor, que incluyen a su compañero de dupla, a la otra pareja de participantes, al Geogebra y las tareas propuestas, a sus conocimientos previos, a los nuevos conocimientos que se van generando, al profesor investigador, etc.

La situación propuesta en nuestra investigación utiliza la variable didáctica *número de rectángulos de aproximación*, con el fin de que el estudiante analice los cambios dinámicos que se generan en el dibujo y en los valores numéricos de las medidas de las áreas de los rectángulos, dado que, al aumentar el número de rectángulos, estos ocupan un mayor espacio en la región, la suma de sus áreas aumenta, así como también el número de términos de la adición; los espacios de la región que no quedan cubiertos por los rectángulos disminuyen, del mismo modo que la medida de las bases de los rectángulos.

Estos cambios en la variable didáctica, generan cambios en la manera de percibir el problema por parte de los estudiantes. Al principio, el estudiante dibuja dos o cuatro rectángulos y su foco está puesto en calcular la medida de sus áreas, pero al trabajar con más de 100 rectángulos, su foco cambia, pues busca un modelo que le permita expresar dicha área y centra su visión en observar cómo la región se va completando con rectángulos. Este proceso permite que el estudiante transite por las distintas dialécticas propias de la teoría de las situaciones didácticas como son las de *acción*, *formulación* y *validación*, las que forman parte de la *situación a-didáctica* que es una situación en la cual la intención de enseñar no es revelada al estudiante, pero que es diseñada por el profesor con el objetivo de lograr que el estudiante se adapte al medio e interactúe con él, y así adquiera el saber (Brousseau, 2007).

En una dialéctica de acción, el estudiante actúa sobre el medio a partir de sus conocimientos previos, y elige sus estrategias de resolución. La respuesta dada por el medio a la acción del estudiante, puede reforzar el proceso que sigue el estudiante para la adquisición del saber, o hacerle cambiar su procedimiento si los resultados obtenidos no son coherentes. En una dialéctica de formulación, el estudiante comunica sus resultados e intercambia opiniones, ya sea de manera oral, visual, escrita, etc. con el objetivo de uniformizar o corroborar los procedimientos utilizados, lo que permite generar un mismo lenguaje que sea comprensible a todos los participantes de la actividad. En una dialéctica de validación, el estudiante debe justificar a otras personas la validez de sus procedimientos y la coherencia de sus resultados, y debe ser capaz de aclarar las dudas que aparezcan en la discusión con sus compañeros.

Análisis de algunas tareas de la situación didáctica

A partir de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), hemos diseñado e implementado una situación didáctica y algunos *applets* en GeoGebra (ver figura 1), en base a deslizadores, para que el estudiante los utilice como herramienta para aproximar la medida del área mediante la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos de aproximación de igual base, siendo este número de rectángulos nuestra variable didáctica.

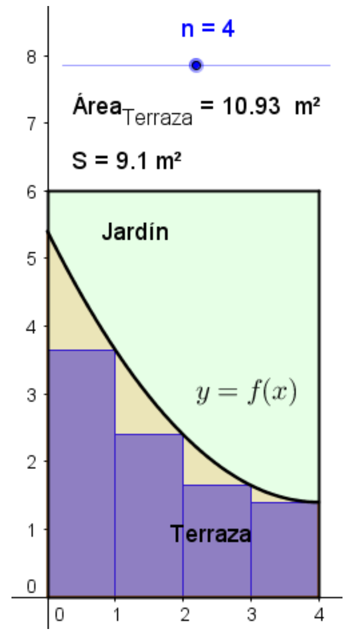


Figura 1. Applet en GeoGebra.

La investigación se realizó con cuatro estudiantes y sus respuestas se recogieron tanto física como oralmente. A continuación presentamos el análisis de las respuestas de uno de los estudiantes.

En una de las tareas propuestas se pidió al estudiante explicar qué calcula *S* (ver figura 1), cuando el número de rectángulos aumenta de 1 a 8. Se esperaba que el estudiante movilice el deslizador e indique que *S* calcula la suma de áreas de los rectángulos dibujados; sin embargo, el estudiante no solo reconoció lo esperado, sino que formuló, con cierta duda, que se estaba aproximando el área de la terraza. Asimismo, representó correctamente el valor de *S* como una adición de términos (la figura 1 muestra lo que el estudiante vio en el monitor de su computadora).

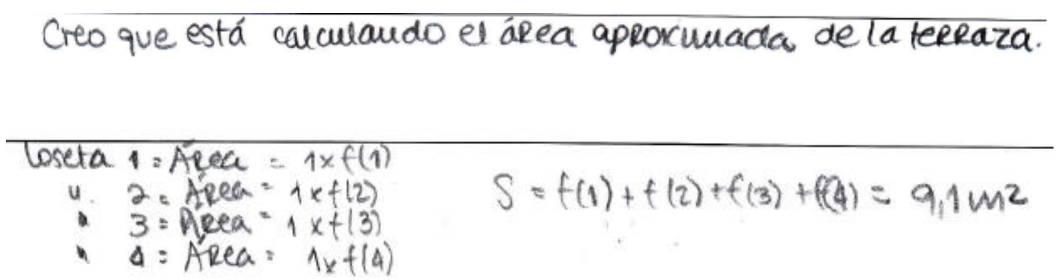


Figura 2. Suma de áreas de rectángulos *S.* Fuente: Martínez (2015, p. 140)

Observamos que cuando se trabajó con un número pequeño de rectángulos y la medida de cada base fue un número natural, ningún estudiante presentó dificultades para expresar *S* como una adición de medidas de áreas de rectángulos; sin embargo, cuando se pidió al estudiante representar *S* como una adición de términos para 8, 87 y 871 rectángulos, presentó dificultades al representar la altura de cada rectángulo de forma algebraica, lo que ocasionó errores en el planteamiento.

En otra tarea de la situación didáctica, el estudiante debía dibujar 1000 rectángulos en la terraza y señalar si estos la cubrían totalmente; luego debía indicar cuántos rectángulos sí lo cubrirían.

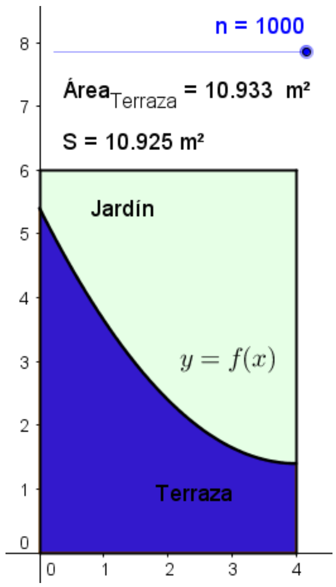
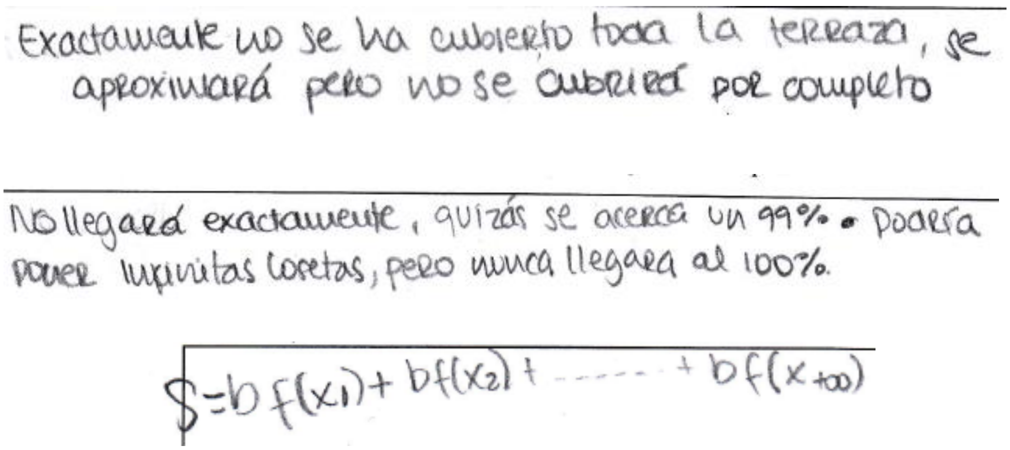


Figura 3. Dibujo de 1000 rectángulos en una región

Como se observa en la figura 3, ya no se aprecia en la terraza el dibujo de los 1000 rectángulos, por ese motivo, se esperaba que el estudiante deje de lado el análisis gráfico y centre su atención en los resultados numéricos, los cuales muestran que la terraza no se cubre en su totalidad; inclusive, era probable que el estudiante indicara que usando rectángulos no se podría cubrir una región no lineal. Asimismo, se esperaba que el estudiante se dé cuenta que necesitaba aumentar el número de rectángulos para aproximarse cada vez más al área de la región, y que este número tendería al “infinito”.


Exactamente no se ha cubierto toda la terraza, se aproximará pero no se cubrirá por completo

No llegará exactamente, quizás se acerca un 99%. Podría poner infinitas cometas, pero nunca llegara al 100%.

$$S = b\,f(x_1) + b f(x_2) + \dots + b f(x_{+\infty})$$

Figura 4. Respuestas dadas por el estudiante luego de dibujar 1000 rectángulos.

Fuente: Martínez (2015, p. 183 y 189)

A partir de las respuestas dadas por el estudiante (ver figura 4) a la tarea propuesta, observamos que se validó el procedimiento de aproximación, porque el estudiante se dio cuenta que puede aproximarse tanto como lo desea a la medida del área, y es consciente que no llegará a calcular exactamente dicha medida. Asimismo, observamos que representó correctamente la suma *S* como una adición de infinitos términos (adición de medidas de áreas de infinitos rectángulos), superando las dificultades presentadas en tareas anteriores, esto se consiguió luego de que el profesor explicara el uso de expresiones simbólicas con subíndices naturales. Por estos resultados, afirmamos que el estudiante alcanzó la *dialéctica de validación*.

Conclusiones

A partir del desarrollo de la situación didáctica; de la información recogida de los estudiantes, tanto escrita como oralmente; y del análisis realizado, hemos llegado a las siguientes conclusiones:

- Al poder observar cómo varían las gráficas y los cálculos numéricos de forma dinámica, los estudiantes centraron su atención en analizar, justificar, e interpretar los resultados obtenidos.
- El estudiante amplía su noción de área a partir del proceso de exhausción, esto es que puede aproximarse tanto como quiera a la medida de un área, utilizando un número de rectángulos que tiende al infinito.

- Es posible implementar otra situación didáctica cuyo objetivo sea expresar la medida del área como el límite de la suma de las medidas de las áreas de infinitos rectángulos, de modo que se introduzca la definición de área como el límite de una suma de Riemann o la medida del área como integral definida (Martínez, 2015).

Referencias bibliográficas

Amorim, F., Costa, G & Salazar, J. V. (2011, junio). *Atividades com Geogebra para o ensino de Cálculo.* Anais de XIII CIAEM-IACME. Recife: Universidade Federal de Pernambuco. Recuperado de http://ciaem-redumate.org/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1649/749

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En P. Gómez (Ed.). *Ingeniería Didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (2003). *¿Qué Se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario? Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *X*, 117-134. Recuperado de https://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/artigue.pdf

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Corberán, R. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad*. [Tesis Doctoral]. Universidad de Valencia. España. Recuperado de http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/Corberan96.pdf

Freudenthal, H. (1999). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. New York: Kluwer Academic Publishers.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo.* México, D. F.: Oxford.

Martínez, M. (2015). *Una propuesta para articular área y medida usando la tsd, en alumnos de nivel superior*. [Tesis de Maestría no publicada]. Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú. Recuperado de

http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/123456789/6113/MARTINEZ_MIRAVAL_MIHALY_PROPUESTA_TSD.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp 61-94). Recuperado de http://www.uv.es/puigl/fd.pdf.

Ribeiro, J. (2002). *Conceito de integral: Uma proposta computacional para seu ensino e aprendizagem*. [Tesis de Maestría no publicada]. PUC-SP. Brasil. Recuperado de https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/11147/1/dissertacao_jose_manuel_melo.pdf

Stewart, J (2001). *Cálculo de una variable. Trascendentes Tempranas.* México, D. F.: Thomson Editores.

EL PROCESO COGNITIVO-LINGÚÍSTICO DE LA JUSTIFICACIÓN EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Rodolfo Eliseo D´Andrea[(1),(2)], Mónica Adriana Real[(3)], Patricia Sastre Vázquez[(2)]
(1) Pontificia Universidad Católica Argentina. Facultad de Química e Ingeniería.
(2) Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.
(3) Instituto Superior de Formación Docente N° 1 de la Provincia de Buenos Aires (República Argentina)
rodolfoedandrea@gmail.com, monireal@gmail.com, pasava2001@yahoo.com.ar

RESUMEN: El objetivo de este trabajo es analizar los procesos cognitivo-lingüísticos que los estudiantes pueden llegar a utilizar para determinar y sostener el valor de verdad de una proposición. Se les propuso determinar el valor de verdad de un grupo de proposiciones, justificando el porqué de la elección realizada. Los resultados obtenidos mostraron que un importante porcentaje de estudiantes pudieron determinar el valor de verdad adecuadamente, pero no pudieron justificarlo. En los casos que lo hicieron, se observó, que la justificación realizada consistió en la exhibición de algunos casos particulares aleatorios, mientras la justificación coloquial fue usada por pocos estudiantes.

Palabras clave: justificación de proposiciones, valor de verdad, estrategia cognitiva

ABSTRACT: The aim of this research work is to analyze the cognitive-linguistic processes that can be used by students to determine and support the truth value of a proposition. The students were asked to determine the truth value from a set of propositions, by justifying their election. The obtained results showed that a significant percentage of students could adequately determine the truth value, but they could not justify it. In the cases they could do it, they just showed some specific randomize cases, while few students used the colloquial justification.

Key words: proposition justification, truth value, cognitive strategy

Introducción

El presente reporte de investigación forma parte del trabajo realizado en el proyecto de investigación acreditado: Procedimientos lógicos y procesos cognitivos lingüísticos asociados a la enseñanza y aprendizaje de las ciencias en la formación universitaria, en desarrollo en la Facultad de Agronomía de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina y en la Facultad de Química e Ingeniería del Rosario de la Pontificia Universidad Católica Argentina, Campus Rosario.

El presente trabajo es referente a la justificación que realiza el estudiante universitario en los procesos cognitivos – lingüísticos durante procesos de validación. En relación a esto, es muy atinado iniciarlo con representativa cita textual de Piaget (1983) en que se hace referencia a la justificación, y que se manifiesta del modo siguiente:

> La justificación de las cosas es necesaria ya que al niño, las indicaciones no lo satisfacen pues él encuentra una justificación a todo lo que para nosotros es un mero dato sin una razón, a todo lo que no puede ser sino asumido.” (p.146)

Esta cita suena sorprendente si pensamos a ese niño transformado en un estudiante del ciclo de enseñanza media en Argentina y en un curso de Matemática donde, en general, los procesos de aprendizaje se estructuran sobre una praxis integrada por actividades que aplican algoritmos sin que medie la justificación de las razones que llevan a realizarlas.

Si el niño es curioso y por todo pregunta el porqué, entonces: ¿Por qué el pensamiento de ese niño curioso se transforma en el proceso de escolarización? Según Parra (1990) en la escuela media en Argentina interesa que el estudiante aplique algoritmos, que no estén concebidos como un proceso sino como una rutina memorística, que no lo obliga a interactuar con situaciones que lleven a modificar, revisar o rechazar un conocimiento para generar uno nuevo. Los estudiantes en Argentina que ingresan a la Universidad en Carreras que utilizan Matemática como herramienta requieren ciertos contenidos propedéuticos de carácter elemental que son imprescindibles para el desarrollo de esta ciencia y que son propios del ciclo medio y cuya solidez posibilitará generar la construcción intelectual de la carrera de grado elegida. Estos conocimientos no son suficientes, requieren conocer también cuestiones epistemológicas que se traducen en acciones, entre otras como la justificación. Dreyfus (2000) considera que la justificación es un trabajo continuo para avanzar en el pensamiento matemático. No obstante, los estudiantes en Argentina están entrenados en la repetición de algoritmos durante su enseñanza media perdiendo así ese ‘niño curioso’ necesario en los procesos de validación.

El objetivo de este trabajo es analizar el proceso cognitivo-lingüístico de la justificación que estudiantes universitarios utilizan para determinar y sostener el valor de verdad de una proposición. Nos preguntamos cuáles son las estrategias que esgrimen para sostener la justificación y validación de las proposiciones.

Marco teórico

Se define *estrategia* a un proceso configurado como un conjunto de tareas sistemáticas adecuadas para la consecución de una meta. Siendo *estrategia cognitiva*, el bagaje que todo ser humano posee para pronosticar contextos ya vivenciados. (Coll, 1987).

Jorba, Gómez, Prat (1998) definen como estrategias o habilidades cognitivo-lingüísticas al conjunto de operaciones de identificación, de relación, de comparación y activación de los conocimientos lingüísticos. Estas habilidades son las formas que se realizan al leer o al escribir, aunque aún permanezcan en discusión. Según Jorba et al (1998) las habilidades cognitivo-lingüísticas son las descripciones; definiciones; explicaciones; justificaciones y argumentaciones.

Interesa en este trabajo enfocarse en la justificación. Ésta es una estrategia que consiste en generar razones e instaurar vínculos que posibiliten la concreción de un designio de tipo comunicacional. Permite preservar el valor de verdad de un determinado conocimiento y la sustentabilidad de una posición. Los procedimientos cognitivos implicados en esta estrategia se manifiestan a través de las siguientes acciones: 1) engendrar razones o argumentos; 2) la constitución de relaciones que permitan establecer el sostén del valor de verdad de un conocimiento; 3) el examen de aceptación; 4) la evaluación de posiciones opuestas que permitan establecer la validez de la postura adoptada. (Jorba et al, 1998). Particularmente en Matemática interesan las dos primeras. La validez de una proposición verdadera se establece a través de una cadena de argumentos que se sostienen en la justificación. Las relaciones que se establecen entre los eslabones de la cadena argumentativa es lo que establece la sustentabilidad de la verdad de la proposición. Si se contextualiza el término justificación en relación al procedimiento que puede realizar un estudiante en la resolución de un problema o en el sostén del valor de verdad de una proposición, se hace referencia entonces a los recursos argumentativos que se establecen en una clase de matemática para sustentar enunciados con contenido matemático y para promover un grado de adhesión y convencimiento hacia él. En general, la justificación suele tener dos propósitos: uno epistemológico que consiste en la aseveración, explicación o fundamentación de una verdad matemática; y por otro lado, uno psicológico, que consiste en que el interlocutor consiga algún aprendizaje, así como un estado epistémico — que consiste en la certeza o convicción acerca del valor de verdad — hacia la proposición que se quiere validar. Esta actitud de convencimiento propugna en el estudiante el desarrollo de un criterio de certeza que será determinante en el futuro profesional. (Hanna y Jahnke, 1996).

El proceso de la justificación implícitamente permite la comprensión y apropiación de las diferentes estructuras conceptuales. Los estudiantes de cualquier nivel requieren siempre, en Matemática, colocarse frente a situaciones que necesitan decidir el valor de verdad de una proposición. Tal decisión debe ser sostenida y para ello es necesario poner en juego la acción de justificar y la justificación requiere de la argumentación y ésta, del razonamiento. Al momento de justificar, los estudiantes pueden realizar, desde una simple explicación coloquial hasta un razonamiento de mayor complejidad apoyado por conceptos teóricos e inclusive, en ciertos casos, podrían exponer una justificación sostenida en un razonamiento visual. Es un procedimiento común, también, que los estudiantes presenten un ejemplo ante el proceso de validación de una proposición cuyo valor de verdad se quiere sostener. Pero ese ejemplo, no puede estar desprovisto de explicaciones que sustenten su presencia y su razón de ser frente a la necesidad de justificación.

Balacheff (2000) encuadra como "*empirismo ingenuo*" a la prueba que presenta un estudiante para establecer la verdad de una proposición e inclusive justificarla mostrando algunos ejemplos elegidos en forma aleatoria, sin criterio. Por lo general, cuando se les pide a los estudiantes, validar una nueva proposición, éstos reaccionan de manera espontánea y sin reflexión, exhibiendo un ejemplo aleatorio. Inclusive, se desempeñan así, aún habiendo visto su prueba de validez, expuesta por el docente en clase. Healy y Hoyles (2000) sostienen que los estudiantes necesitan realizar ensayos de verificación – inclusive después de realizada la demostración – porque precisamente, la demostración no los convence y la exhibición de ejemplos les refuerza la idea conceptual propugnada por la proposición demostrada.

La elección adecuada de ejemplos es una tarea que requiere reflexión y su práctica cotidiana contribuye a la construcción del razonamiento de los estudiantes.

■ Metodología

El trabajo de campo asociado a esta investigación se realizó en la Facultad de Química e Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica Argentina, Campus Rosario. Se efectuó una convocatoria voluntaria para estudiantes de Ingeniería de dos especialidades: Industrial y Ambiental con la condición que tuvieran aprobado el curso propedéutico y no tuvieran la carga adicional de un trabajo. Así, se constituyó un grupo de 50 estudiantes de 18 años, con idéntico número de varones que de mujeres. El instrumento que permitió realizar el estudio propuesto para esta investigación consistió en un grupo de proposiciones en las que cada estudiante debía determinar su valor de verdad justificando en cada caso la elección realizada. El momento elegido para llevar a cabo la experiencia fue una de las primeras clases al inicio de la cursada del primer cuatrimestre de la Carrera, en la asignatura: 'Álgebra y Geometría'. Las proposiciones fueron leídas lentamente y en voz alta por un docente, de manera de evitar cualquier ambigüedad en cuanto a la interpretación de signos y símbolos. Se puso a consideración de los estudiantes cuatro funciones proposicionales cuantificadas de carácter elemental que tenían como propósito la determinación de sus valores de verdad y su justificación. Se recolectaron las producciones individuales de los estudiantes y se tabularon de acuerdo a las respuestas que ellos dieron. El carácter elemental de las proposiciones no fue casual, se planteó de modo tal que el contenido implícito en la proposición no contuviera complejidades conceptuales que pudieran interferir en el objetivo del trabajo. Al momento de diseñar la actividad, se tuvo en cuenta que se contemplaran todos los casos posibles: una función proposicional cuantificada universalmente verdadera y otra falsa; una función proposicional cuantificada existencialmente verdadera y otra falsa. A continuación, se detallan las consignas de la propuesta:

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justificar el por qué del valor de verdad escogido en cada caso, sosteniendo el mismo a través de una explicación coloquial y/o sustento teórico asociado a la proposición analizada.

$1.\ \exists x \in M \,/\, (x+1)(x+5)x(x-3)(x-1)(x-2)(x-4)=0;$ $\quad 2.\ \exists x \in M \,/\, x-1=4;$

$3.\ \forall x \in M : x-1<4;$ $\quad 4.\ \forall x \in M : x^2<0,\ siendo:\ M=\{-3,-2,-1,1,2,3,4\}$

Resultados

En todos los ejercicios, la idea central es describir cómo los estudiantes evalúan el valor de verdad de una función proposicional cuantificada y cómo justifica su elección. Y cuál es el análisis que realiza el estudiante respecto del valor de verdad.

EJERCICIO 1 : $\exists x \in M/(x+1)(x+5)x(x-3)(x-1)(x-2)(x-4)=0$, siendo: $M=\{-3,-2,-1,1,2,3,4\}$

En este ejercicio, se presenta una función proposicional cuantificada existencialmente con valor de verdad verdadero. La forma más usual de validar un caso como éste es la exhibición de un ejemplo que haga verdadera a la función proposicional. En base a esto, lo esperado es que los estudiantes pudieran determinar el valor de verdad de la proposición con la exhibición de, por lo menos, un caso que anulara la función proposicional asociada al cuantificador. Asociados al valor o valores escogidos se esperaba también que los estudiantes pudieran exhibir una mínima explicación coloquial del porqué de la elección o elecciones realizadas y/o también que mostraran el cálculo que permitía determinar que ese valor escogido satisfacía la función proposicional asociada al cuantificador.

Los resultados obtenidos se detallan a continuación:

1) el 29% de los estudiantes determinaron adecuadamente el valor de verdad de la proposición dada sin justificar; 2) el 3% de los que determinaron adecuadamente el valor de verdad de la proposición dada, justificaron a través de una inapropiada explicación coloquial: 3) el 6% determinó inadecuadamente el valor de verdad de la proposición dada sin justificar; 4) el 4% determinó inadecuadamente el valor de verdad de la proposición dada con una contradictoria justificación coloquial; 5) el 7% hizo la determinación adecuada del valor de verdad de la proposición dada y justificó a través de una apropiada explicación coloquial: 6) un 6% que determinó adecuadamente el valor de verdad de la proposición dada justifica con una apropiada explicación coloquial y además exhibe un ejemplo, pero sin mediar el cálculo que muestra que ese valor escogido satisface a la función proposicional asociada al cuantificador; 7) un 3% determinó adecuadamente el valor de verdad de la proposición dada, justificando con una apropiada explicación coloquial y la exhibición de

un ejemplo, con el cálculo que muestra que ese valor escogido satisface a la función proposicional asociada al cuantificador; 8) el 15% de los estudiantes determinaron adecuadamente el valor de verdad de la proposición dada y justificaron a través de la exhibición de un ejemplo sin mediar una explicación ni el cálculo que muestre que este caso satisface a la función proposicional asociada al cuantificador; 9) el 16% logró determinar adecuadamente el valor de verdad de la proposición dada y justificar a través de la exhibición de un ejemplo sin mediar una explicación, pero si mostrando el cálculo que permite ver que el valor escogido satisface a la función proposicional asociada al cuantificador; 10) el 7% de los estudiantes determinó adecuadamente el valor de verdad de la proposición dada y justificó a través de la exhibición de dos o tres valores, pero sin explicitar el cálculo que muestra que los valores escogidos satisfacen a la función proposicional asociada al cuantificador; 11) el 4% determinó adecuadamente el valor de verdad de la proposición dada y justificó a través de la exhibición de dos o tres valores sin mediar una explicación, pero si mostrando el cálculo para cada uno de los valores escogidos que satisfacen a la función proposicional asociada al cuantificador.

EJERCICIO 2 $\exists x \in M / x - 1 = 4$, siendo: $M = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$

Aquí, se presenta una función proposicional cuantificada existencialmente con valor de verdad falso. En este ejercicio, lo esperado es que el estudiante pueda ver que, probando con todos los elementos del universal, se justifica que el valor de verdad de la función proposicional cuantificada existencialmente es falso. Asimismo, el estudiante podría resolver la ecuación establecida como función proposicional asociada al cuantificador existencial y ver que el elemento perteneciente al conjunto solución no pertenece al universal.

Los resultados obtenidos se detallan a continuación: 1) el 28% de los estudiantes determinó el valor de verdad de la proposición dada adecuadamente sin justificar; 2) el 11% determinó el valor de verdad adecuadamente de la proposición dada y justificó a través de la exhibición de un ejemplo elegido al azar, no escogido del universal; 3) un 13% de los estudiantes determinó el valor de verdad adecuadamente de la proposición dada y justificó a través de la exhibición de un ejemplo elegido del universal; 4) otro 13% determinó el valor de verdad de la proposición dada adecuadamente y justificó a través de la exhibición de varios ejemplos elegidos al azar, no escogidos del universal; 5) el 12% de los estudiantes determinó el valor de verdad adecuadamente de la proposición dada y justificó a través de la exhibición de varios ejemplos elegidos del universal; 6) el 3% de ellos determinó el valor de verdad de la proposición dada adecuadamente y justificó a través de una inapropiada explicación coloquial; 7) el 7% de los estudiantes determinó el valor de verdad de la proposición dada adecuadamente con justificación coloquial y un ejemplo escogido del universal; 8) el 5% logró determinar el valor de verdad de la proposición dada adecuadamente resolviendo la ecuación asociada al cuantificador existencial y viendo que ese elemento no pertenecía al universal; 9) el 3% de los estudiantes determinó el valor de verdad de la proposición dada adecuadamente y justificó evaluando la función proposicional asociada al cuantificador existencial para todos los elementos del universal;

10) el 2% de los estudiantes determinó inadecuadamente el valor de verdad de la proposición dada sin justificación ni la exhibición de un ejemplo; 11) el 3% de los estudiantes determinó inadecuadamente el valor de verdad de la proposición dada con una justificación coloquial contradictoria.

EJERCICIO 3: $\forall x \in M: x - 1 < 4$, siendo: $M = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$

La proposición dada en este caso alude a una función proposicional cuantificada universalmente verdadera. Se espera que el estudiante pueda justificarla chequeando uno por uno los elementos del universal en la función proposicional asociada al cuantificador. Otra opción, es que el estudiante pueda resolver la desigualdad asociada al cuantificador universal y observar que ésta es satisfecha por todos los elementos del universal.

Los resultados obtenidos se detallan a continuación: 1) El 31% de los estudiantes determinó el valor de verdad adecuadamente de la proposición dada sin justificar; 2) el 21% de ellos determinó el valor de verdad de la proposición dada adecuadamente y justificó resolviendo la desigualdad asociada al cuantificador, observando que todos los valores del universal satisfacen la condición establecida por la nueva desigualdad obtenida; 3) el 16% de los estudiantes determinó el valor de verdad de la proposición dada adecuadamente y justificó chequeando uno por uno los valores del universal, observando que satisfacen la desigualdad asociada al cuantificador; 4) el 12% determinó el valor de verdad adecuadamente y justificó con algunos ejemplos del universal (pero no todos); 5) un 8% logró determinar el valor de verdad de la proposición dada adecuadamente justificando coloquialmente de manera apropiada; 6) El 6% de los estudiantes determinó el valor de verdad de la proposición dada adecuadamente y justificó a través de una inapropiada explicación coloquial; 7) solo un 6% de los estudiantes determinó inadecuadamente el valor de verdad de la proposición dada sin justificación.

EJERCICIO 4: $\forall x \in M: x^2 < 0$, siendo: $M = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$

La proposición considerada en este caso alude a una función proposicional cuantificada universalmente con valor de verdad falso. Se espera que los estudiantes puedan probar que la proposición es falsa, utilizando un contraejemplo, o bien que pudieran justificar a través de la definición de valor absoluto o apelando a su interpretación geométrica. Aquí, puede entrar en juego, la visualización en el último caso, o la mera justificación conceptual en el caso de apelar directamente a la definición.

Los resultados obtenidos se detallan a continuación: 1) el 29% de los estudiantes determinaron adecuadamente el valor de verdad de la proposición dada sin justificar; 2) el 31% determinó adecuadamente el valor de verdad de la proposición dada y justificó a través de la exhibición de un ejemplo elegido sin criterio – esto se evidencia por la ausencia de una explicación coloquial que sostuviera esta elección y también por la ausencia de la evaluación de la función proposicional en ese valor que permitiera determinar que para este valor de verdad la función proposicional resulta falsa –;

3) un 11% de los estudiantes determinaron adecuadamente el valor de verdad de la proposición dada y justificaron a través de la exhibición de varios ejemplos elegidos sin criterio; 4) el 3% determinó el valor de verdad de la proposición dada adecuadamente y justificó a través de una apropiada explicación coloquial; 5) el 7% de los estudiantes determinó adecuadamente el valor de verdad de la proposición dada justificando con una apropiada explicación coloquial y la exhibición de un ejemplo aleatorio; 6) el 3% de los estudiantes determinó adecuadamente el valor de verdad de la proposición dada y justificó a través de una inapropiada explicación coloquial: 7) el 6% de los estudiantes determinó inadecuadamente el valor de verdad de la proposición dada sin justificar; 8) el 3% de los estudiantes determinó inadecuadamente el valor de verdad de la proposición dada con una contradictoria justificación coloquial.

Los resultados obtenidos mostraron que un importante porcentaje de los estudiantes que realizaron los ejercicios pudieron determinar el valor de verdad de la proposición dada pero no pudieron sostenerlo. Por otro lado, pocos estudiantes determinaron inadecuadamente el valor de verdad de cada proposición. Algunos, en el último caso descripto, intentaron justificar, pero lo hicieron contradictoria o erróneamente. Estos resultados, hacen suponer que los estudiantes no se desempeñan adecuadamente para la tarea de justificación. Una posible explicación podría deberse al desconocimiento conceptual de la función proposicional involucrada en la proposición, lo que aquí no tiene sentido, debido al carácter elemental del contenido implícito en cada proposición. Más probablemente el factor determinante en la incapacidad de justificación es la imposibilidad que presentan los estudiantes en generar argumentos construidos a partir de los conocimientos que se determinan en un cierto universo del discurso específico del área que están desarrollando. Otro factor decisivo es que no pudieron establecer relaciones con conceptos previos conectados con el de la proposición a validar. Esto se evidenció a través de una acción muy recurrente de los estudiantes al momento de justificar, y fue la exhibición de casos particulares. Esto usualmente se evidencia porque los ejemplos aparecen, en la generalidad, sin la debida evaluación de la función proposicional que se quiere validar en estos casos que se ejemplifican. Esto denota dos cuestiones epistemológicas importantes. Por un lado, la confusión del estudiante frente a las acciones de justificar y verificar. Por otro lado, el desempeño inadecuado en la realización de esas actividades. Los estudiantes consideran que a través de la verificación están justificando, y no siempre esto es suficiente para satisfacer tal requisito. Si se observan detenidamente los resultados obtenidos en cada ejercicio, hay una constante que se repite ostensiblemente en todos. Los estudiantes, en general, exhiben ejemplos como justificación sea cual sea el cuantificador e inclusive en algunos casos lo hacen adicionalmente a la presentación de una explicación coloquial.

Conclusiones

De acuerdo a los resultados obtenidos y descriptos precedentemente en el párrafo anterior, se exponen las siguientes conclusiones. El proceso cognitivo – lingüístico de justificación que el estudiante utiliza para determinar y sostener el valor de verdad de una proposición, resulta que al decir de Parra (1990), el estudiante se paraliza porque no hay un algoritmo de referencia para resolver la situación propuesta. Según Dreyfus (2000), en su historia de escolarización sistemática, nunca fueron relevantes los procesos de justificación y validación, por lo tanto, no se les hace necesario utilizarlos. Se desorientan al no tener un proceso definido que responda a un algoritmo concreto, produciéndose una desarticulación intelectual, de manera que el estudiante recurre al empirismo ingenuo (Balacheff, 2000), realizando un continuo ensayo y error consistente en una exhibición compulsiva de ejemplos, carentes de fundamento y criterio. Esto confirma que la actitud psicológica de convencimiento y la epistémica que permite alcanzar el criterio de certeza, que aluden Hanna y Jahnke (1996) son las que el estudiante tiene que esgrimir y que nunca le fueron enseñadas. No sabe hacerlo, ya que, en su historia escolar previa, estos procesos no se produjeron. Buscando en su memoria emotiva de la escuela secundaria un proceso que puedan replicar, en esa búsqueda no encuentran nada, ya que no tuvieron la posibilidad de aprender esos procesos. Se limitaron a la simple aplicación de algoritmos, y es entonces que se producen esos visos de empirismo ingenuo (Balacheff, 2000) porque apelan a una estructura psíquica anterior y elemental que es mostrar casos.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá: Una empresa docente. Universidad de Los Andes.

Coll, C. (1987). Meaning and sense in school learning. Thoughts about meaningful learning. *Journal for the Study of Education and Development.* 11 (41), 131 – 142

Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido a lo largo del curriculum. En Gorgorió, N. Deulofeu, A. y Bishop, A. (Coords.). Matemáticas y Educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional. Barcelona. Graó, S.R.L. pp.125– 133.

Hanna, G. y Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. En A. J. Bishop et al. (Eds.): *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 877-908). Dordrecht: Kluwer, A. P

Healy, L. y Hoyles, C. (2000). A study of proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education. 31(4),* 396 – 428.

Jorba, J., Gómez, I. y Prat, A. (1998). Hablar y escribir para aprender. U o de la lengua en situación de enseñanza-aprendizaje desde las áreas curriculares. Madrid: Síntesis.

Parra, B. (1990). "Dos concepciones de resolución de problemas de matemáticas". En: Alarcón Bortolussi, J.; Rosas Domínguez, R.S. (coord.). La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Lecturas. 1995. p. 13. SEP, México. (Primer nivel. Programa Nacional de Actualización Permanente. Originalmente apareció en la revista Educación Matemática, 2(3). 1990.

Piaget, J. (1983). *El Lenguaje y El Pensamiento en el niño.* Estudio sobre la lógica del niño I. Buenos Aires: Guadalupe.

LA CONSTRUCCIÓN DE CONTRAEJEMPLOS EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Rodolfo Eliseo D´Andrea(1),(2), Mónica Adriana Real(3), Patricia Sastre Vázquez(2)
(1) Pontificia Universidad Católica Argentina. Facultad de Química e Ingeniería.
(2) Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Facultad de Agronomía
(3) Instituto Superior de Formación Docente N° 1 de la Provincia de Buenos Aires.
(República Argentina)
rodolfoedandrea@gmail.com, monireal@gmail.com, pasava2001@yahoo.com.ar

RESUMEN: El objetivo de este trabajo fue analizar el desempeño de estudiantes universitarios de Argentina que ingresan al ciclo básico de la Carrera de grado de Ingeniería, en procesos de validación de proposiciones con valor de verdad falso. Para la realización de esta investigación se diseñó una actividad cuyo objetivo fue que el estudiante determinara el valor de verdad de una serie de proposiciones y su justificación. La mayor parte de las proposiciones dadas a los estudiantes eran falsas y algunas, verdaderas. La presencia de proposiciones verdaderas permitió comparar los procedimientos utilizados por los estudiantes frente a ambos tipos, sin perder de vista el foco principal del estudio: la construcción del contraejemplo. Los resultados revelan que los estudiantes, en procesos de validación se desempeñan en ambos tipos de proposiciones, de formas muy similares. En ambos casos, sólo son capaces de generar ejemplos aleatorios con los que pretenden mostrar la validez de la proposición propuesta, lo que supone un vacío epistemológico no menor.

Palabras clave: : contraejemplo; procesos de validación y justificación

ABSTRACT: This work was aimed at analyzing university students' performance when entering to the basic level of the Engineering degree course in Argentine. The study was focused on proposition validation processes with a false truth value. For carrying out this research, an activity was designed, which objective was that the students determined the truth value of a set of propositions, and its justification. Most of the propositions given to the students were false and some of them were truth. The existence of truth proposals allowed comparing the procedures the students used in on both types, without forgetting the main purpose of the study: the making of an opposed example. The outcomes show that students, during the validation processes, similarly face both types of proposals. In both cases, they are able only to generate random examples to show the validity of their proposition which presupposes a no smaller epistemological gap

Key words: opposed example, validation and justification processes

Introducción

Considérese a un grupo de estudiantes universitarios de Argentina, durante la cursada de Álgebra y Geometría - una asignatura anual del currículum del primer año del ciclo común de la carrera de grado de Ingeniería – frente a la siguiente consigna: 'Probar que la diferencia de conjuntos no es conmutativa'. Los procedimientos utilizados por los estudiantes indicarían que piensan en la conmutatividad y buscan un ejemplo consistente en dos conjuntos de manera tal que, al realizar su diferencia, en uno y otro orden, se puede observar que ambas operaciones ofrecen resultados diferentes. La elección de los conjuntos, por parte de los estudiantes, es una tarea de ensayo y error, buscando el par adecuado que permita obtener esos resultados distintos. El ejemplo citado es el disparador del problema de investigación que plantea este trabajo: la búsqueda y por ende, la construcción del contraejemplo en el ingresante universitario a carreras de grado de Ingeniería.

El objetivo de este trabajo es analizar el desempeño del estudiante universitario ingresante al ciclo básico de la carrera de grado de Ingeniería en la búsqueda de contraejemplos en el proceso de validación de proposiciones cuyo valor de verdad es falso.

Marco teórico

El principio de la verdad (Johnson–Laird, 2001) describe la tendencia del sujeto a representar los casos verdaderos más que los falsos. En un primer nivel, las personas representan inicialmente mediante modelos, exhibiendo las posibilidades verdaderas, y dejando para hacer explícitas en un momento posterior, el resto de la información. Si las personas no suelen representar lo que es falso, es necesario explicar cómo hacen para imaginar situaciones falsas cuando les son requeridas.

Santamaría y Espino (2000) consideran que, en tales situaciones, se puede proponer un procedimiento que podría usarse en estas circunstancias y que recibe el nombre de *heurístico de negación*. Su funcionamiento es muy simple. Si se le pide a alguien que exprese el caso en que el valor de verdad de una proposición es falso, producirá la representación inicial de la situación en que el valor de verdad es verdadero y entonces lo negará. Como cualquier heurístico, el de negación es adecuado en la mayoría de los casos (de ahí su utilidad).

La búsqueda de contraejemplos adecuados no es una tarea simple, porque podría ocurrir que el individuo que hace la búsqueda pueda encontrar ciertos casos particulares que hacen a la proposición verdadera.

"Un contraejemplo es un elemento perteneciente al dominio de una determinada afirmación que no verifica lo afirmado." (Calvo Pesce, 2001, p.49)

Balacheff (1990) considera que las consecuencias de la exhibición de un contraejemplo, pueden generar diferenciaciones, según que éste recaiga sobre la conjetura, la prueba de la falsedad con su utilización, o sobre los conocimientos o fundamentos racionales implícitos de su estructura. Asume que la superación de la contradicción, generada propiamente por el contraejemplo, pueda atribuirse a la crítica o al rechazo de él.

Es de destacar que a veces ocurre que la verdad de ciertas proposiciones queda establecida, en el sentido en que son verdaderas salvo una pequeña cantidad de casos excepcionales, cuya exclusión explícita del dominio de aplicación del resultado las harían absolutamente verdaderas. Esta idea aparece también en la obra *Pruebas y Refutaciones* (Lakatos, 1978, p. 43) cuando se habla de "*tres tipos de proposiciones: las verdaderas, las falsas sin esperanza y las esperanzadoramente falsas*"; este último tipo se puede mejorar convirtiéndolas en verdaderas al añadirles una cláusula que enuncie las excepciones.

En general, en el proceso de validación de proposiciones verdaderas, en un estadío inicial, los estudiantes operan desde el *empirismo ingenuo*, según la clasificación de Balacheff (2000) acerca de los modos de demostrar. Lo realizan sustituyendo la ó las variables de la función proposicional implícita en la proposición por ejemplos elegidos aleatoriamente por los estudiantes, sin un criterio formado. En estadíos algo más avanzados, los estudiantes pueden ser capaces de realizar construcciones intelectuales originadas en una definición o propiedad y que se sustentan a través de la transformación de expresiones simbólicas formales. En tales casos, se dice que el estudiante realizó un *experimento crucial*. (Balacheff, 2000). Por ejemplo, supóngase que los estudiantes tienen que probar que la siguiente proposición es verdadera: $\forall a \in Z: a\ es\ par\ entonces\ a^2\ es\ par$. Según la clasificación citada, un estudiante ha realizado un *experimento crucial* para este caso particular si, en una primera instancia escribe simbólicamente a un número par, y luego lo eleva al cuadrado. Posteriormente considera que la expresión obtenida es par porque consiste en la multiplicación de 4 por un entero. Luego, prueba la validez de la misma, evaluándola para diferentes valores de k enteros.

Una experiencia con un grupo de estudiantes

A los efectos de estudiar el desempeño de estudiantes de Ingeniería a la hora de validar proposiciones con valor de verdad falso, se diseñó una actividad que se puso a consideración de estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica Argentina, Campus Rosario. Se consideró un grupo mixto de 84 estudiantes ingresantes a Ingeniería provenientes de dos especialidades diferentes: Industrial y Ambiental. La convocatoria para la realización del trabajo de campo fue voluntaria, la única condición para presentarse era tener aprobado el curso propedéutico y no tener la carga adicional de un trabajo. En el grupo había igual número de varones que de mujeres. El momento elegido para llevar a cabo la experiencia fue una de las primeras clases al inicio de la cursada del primer cuatrimestre de la Carrera, en la asignatura: 'Álgebra y Geometría'. Las proposiciones fueron leídas lentamente y en voz alta por un docente, de manera de evitar cualquier ambigüedad en cuanto a la interpretación de signos y símbolos.

La consigna del trabajo consistió en determinar el valor de verdad de una serie de proposiciones y justificarlo. Dentro de ese conjunto de proposiciones, algunas resultaban verdaderas y la mayor parte de las mismas, falsas; algunas estaban referidas a un universal infinito y otras a un universal finito, posible de ser contado físicamente. Esto no constituyó un simple detalle, fue esencial a la hora del establecimiento de las conclusiones, porque el proceso de validación para proposiciones varía según el referencial. La confección de los ejercicios apuntó principalmente a proposiciones falsas, excepto tres. La presencia de las tres proposiciones verdaderas tuvo como objetivo comparar el desempeño del estudiante en el proceso de validación de los dos tipos de proposiciones. Entre las proposiciones verdaderas es esencial destacar el universal al que se remitía el cuantificador. Así, el universal de una de ellas era un conjunto finito, posible de ser contado físicamente. En los otros dos casos se consideraron conjuntos infinitos: el conjunto de los reales y el conjunto de los enteros. De forma análoga, se establecieron los referenciales de las proposiciones falsas. Las proposiciones verdaderas propuestas apuntaron a cuestiones simples de probar. En la proposición 3: $\forall x \in R: |x| \geq 0$, además de un contraejemplo, el valor de verdad se podía sostener por la definición de valor absoluto o la interpretación geométrica de este concepto, lo que no requería de una prueba con argumentación, ya que se trataba de una consecuencia inmediata de la definición. La proposición 7: $\forall a \in Z: a\ es\ par\ entonces\ a^2\ es\ par$, en cambio, requiere una breve argumentación para sostener la verdad.

Se presentan, seguidamente, los ejercicios propuestos a los estudiantes.

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones, y luego sostener (probar) en cada caso tal valor de verdad. Considerar para algunos casos que: $B = \{x \in N: 2 \leq x \leq 9\}$

$1. \forall x \in B: x + 5 < 12; \quad 2. \forall x \in B: x\ es\ primo; \quad 3. \forall x \in R: |x| \geq 0;$

$4. \forall x \in B: x^2 > 1; \quad 5. \forall x \in B: x\ es\ par; \quad 6. \forall x \in R: x^2 - x < 0;$

$7. \forall a \in Z: a\ es\ par\ entonces\ a^2\ es\ par$"

Resultados

En la Figura 1, se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes en los ejercicios: 1, 2, 5 y 6. La particularidad de los mismos es que el valor de verdad de las proposiciones dadas es falso. Los resultados revelan que el 72% de la población analizada exhibió un ejemplo para sostener la falsedad de la proposición. El 9% exhibió varios ejemplos. El 12% se limitó únicamente a sostener que la proposición es falsa sin realizar acción alguna para sustentarlo. Mientras que el 7% no respondió a la consigna.

La figura 2 muestra el gráfico correspondiente a los resultados obtenidos por los estudiantes en el ejercicio 3. En este caso el estudiante se encontró con una proposición verdadera donde el referencial corresponde al conjunto de los reales. El 65% justificó la verdad, pero no desde exhibición de ejemplos. Algunos lo hicieron desde la definición de valor absoluto y otros desde la interpretación geométrica de la misma definición. El 11% procedió según el *empirismo ingenuo*, exhibiendo un ejemplo fortuito sin un criterio formado que lo sostenga. El 6 % exhibió varios ejemplos. El 11% se limitó a postular que la proposición propuesta es verdadera sin sostener este aserto. El 7% no respondió a la consigna.

Figura 1

Figura 2

En la figura 3 se presenta el gráfico correspondiente a los resultados obtenidos por los estudiantes en el ejercicio 4. Aquí, el estudiante se encontró con una proposición verdadera donde el referencial corresponde a un conjunto finito posible de ser contado físicamente. El 53% procedió chequeando uno por uno los valores del conjunto B, para sostener la verdad de la proposición. El 11% procedió según el *empirismo ingenuo*. Un porcentaje idéntico, de forma análoga a como hizo con la falsedad, exhibió varios ejemplos. Otro 11%, se limitó a postular que la proposición propuesta es verdadera sin sostener este aserto. Mientras que el 6%, sostuvo la verdad justificando coloquialmente. Particularmente, argumentaron que en virtud de que los elementos del conjunto superan a 2, su cuadrado supera a la unidad. El 8% no respondió a la consigna.

En la figura 4 se representan los resultados obtenidos por los estudiantes en el ejercicio 7. En este caso, el estudiante se encontró con una proposición verdadera donde el referencial es el conjunto numérico de los enteros. El 68 % procedió según el *empirismo ingenuo* para sostener la verdad de la proposición. El 11% también procedió según el *empirismo ingenuo* pero exhibiendo varios ejemplos como en ejercicios anteriores. El 15% se limitó a postular que la proposición propuesta es verdadera sin sostener este aserto. El 3 % no respondió a la consigna. Otro 3% realizó un intento de *experimento crucial*.

Figura 3

Figura 4

Los resultados muestran que los estudiantes al momento de validar proposiciones con valor de verdad falso, en un importante porcentaje exhibieron el contraejemplo que prueba la falsedad de la proposición propuesta. Asimismo, en situaciones de validación de proposiciones verdaderas, un porcentaje similar también exhibe un ejemplo para probar la validez de la proposición. Frente a proposiciones verdaderas con un referencial finito posible de ser contado físicamente, un importante porcentaje de estudiantes supo cómo operar analizando la verdad o falsedad de la proposición con cada uno de los elementos del conjunto. Pero frente a proposiciones verdaderas con un referencial infinito, un ínfimo porcentaje supo que el sostén de tal proposición necesitaba de una prueba. Esta reacción fue diferente frente a una proposición verdadera con referencial infinito. Un gran porcentaje supo sostener esa verdad justificando adecuadamente, pero a la hora de tener que sostener con una prueba la validez de una proposición verdadera, el estudiante no pudo abordarlo.

Conclusiones

Los estudiantes, en el proceso de justificación de una proposición falsa, operan de forma similar al utilizado para sostener el valor de verdad de una proposición verdadera. Exhiben ejemplos aleatorios, sin un criterio determinado. Para ambos casos, buscan un ejemplo que, al sustituirlo en la función proposicional implícita en la proposición, éste se adecúe al valor de verdad de ella. En algunos casos, los estudiantes suelen presentar varios ejemplos para ambos casos. Se conjetura que esta acción puede enmascarar la inseguridad del estudiante, que puede pensar ingenuamente que, con mayor cantidad de ejemplos, se refuerza la verdad o falsedad postulada por la proposición. Se presume que aparentemente no dilucidan la diferencia entre ambas acciones y concretamente el significado del ejemplo y la acción epistemológica de la verificación contenida implícitamente. Análogamente ocurre con el desconocimiento del significado del contraejemplo y la acción epistemológica de probar el valor de verdad de una proposición falsa, contenida también implícitamente. Asimismo, se puede observar como resultado del trabajo experimental, que los estudiantes en dos de los ejercicios propuestos que corresponde a una proposición verdadera sustentaron el resultado obtenido desde el lenguaje coloquial. No manifestaron esta acción para ninguna de las proposiciones con valor de verdad falso. Esto es compatible con el principio de la verdad postulado por Johnson–Laird (2001).

Estas diferentes apreciaciones permiten plantear los siguientes interrogantes: los estudiantes, frente a un contraejemplo, ¿no consideran que se trata de un caso excepcional?; ¿realmente tienen conciencia acerca de la acción que están llevando a cabo? o ¿proceden de manera similar a la exhibición de ejemplos como sostén de una proposición cuyo valor de verdad es verdadero, sin que medie la reflexión y el razonamiento?

Significa entonces que, para los estudiantes, la validación pasa simplemente por exhibir ejemplos aleatorios que ‘encajen’ o ‘funcionen’ en la estructura de la proposición. Este proceder es general, aunque hay algunos pocos casos particulares que se evidenciaron y describieron en el párrafo anterior de resultados.

De acuerdo a lo postulado por Santamaría y Espino (2000) el heurístico de negación es un procedimiento aparentemente natural y útil pero el estudiante de Argentina que ingresa a la Universidad no ha sido instruido en tales cuestiones durante el ciclo medio. Quizás no sea la palabra más adecuada, el decir, que no ha sido instruído sino que no ha sido entrenado en esas destrezas que requieren de una praxis cotidiana que necesita de la maduración intelectual. Es tarea del conductor del aprendizaje, inducir o guiar al estudiante en la búsqueda de contraejemplos, haciendo notar que esta exploración puede conducir en muchos casos a situaciones donde la demostración de la validez de la proposición no se alcance. Precisamente, éste es el momento crucial del proceso de validación de una proposición cuyo valor de verdad es falso. Comprender que cuando una proposición en matemática es falsa y verdadera, excepcionalmente, bajo ciertas condiciones, significa que no tiene validez universal y que su valor de verdad es definitivamente falso.

Según Balacheff (1990), la mostración de un contraejemplo permite establecer diferencias según donde este reincida. El estudiante recurre entonces a su memoria emotiva buscando estructuras ya asimiladas en el ciclo medio pero no las encuentra y acude a la acción de establecer el valor de verdad, pero no siempre puede sostenerlo porque se insiste que en este tipo de tareas no fue entrenado. De manera que en muchos casos se queda en el proceso de la determinación de tal valor de verdad pero esta acción es carente de un valor epistémico.

La educación matemática en el ciclo medio en Argentina, en general, se reduce a la realización de ejercicios repetitivos sostenidos en la aplicación de algoritmos sin que medie la reflexión y la conceptualización teórica. El conocimiento del lenguaje y la epistemología de esta Ciencia son inexistentes en este estadío de la formación. Ellos conciben a la Matemática, según expresión textual, como una disciplina que consiste en 'sentarse a hacer ejercicios'. Aquellos estudiantes que deciden estudiar una carrera universitaria de grado en Ingeniería tienen en su currículum varios cursos de Matemática. La realización de estos cursos requiere que los estudiantes tengan una sólida base de Álgebra elemental, Geometría euclidiana y Trigonometría además del conocimiento del lenguaje matemático y su epistemología. Esto lleva a pensar en la necesidad de generar una educación matemática que se sostenga en una formación basada en su lenguaje y la epistemología que le es propia. Por lo general, en Argentina, los cursos universitarios iniciales de Álgebra y Cálculo que integran el currículum de carreras de grado de Ingeniería que utilizan Matemática como herramienta, abordan los contenidos específicos y propios pero no se focalizan inicialmente en una instrucción, por lo menos, introductoria e informal, sobre las cuestiones inherentes al lenguaje y la epistemología matemática. Se enfatizó antes, que estas acciones se realicen en cursos universitarios iniciales, porque realizarlos en cursos avanzados no generará los mismos efectos que si se instruye al estudiante desde los comienzos. Esta propuesta no está reñida con lo que reza el Ministerio de Educación acerca de la necesidad de Matemática como Ciencia Básica de la Carrera, ya que éste propugna su importancia por dos grandes razones: "*desarrollar el pensamiento lógico deductivo y la* *capacidad heurística no traducida como una resolución de problemas sostenida en la aplicación de algoritmos sino como una praxis que esté sustentada en la conceptualización teórica*". (LEN 26410)

La puerta queda abierta para futuras investigaciones sobre la problemática desarrollada en este trabajo, ya que el estudio aquí presentado se centró sobre estudiantes universitarios ingresantes a Ingeniería en su primera semana de cursada. Habría que enfocarse en diferentes estadíos de la carrera y durante el desarrollo de los diferentes cursos de Matemática y analizar qué tipo de educación debería ser la pertinente de esgrimirse en cada instancia.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemática.* Una empresa docente. Bogotá: Universidad de Los Andes.

Balacheff, N. (1990). Beyond a psychological approach: the psychology of mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *10*(3), 2-8.

Calvo Pesce, C. (2001). Un estudio sobre el papel de las definiciones y demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona. Departament de Didàctica de la Matemàtica i de las Ciències Experimentals. Bellaterra, Barcelona.

Johnson–Laird, P.N. (2001). Mental models and deduction. Trends in Cognitive Science, 5, 435 – 442.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Universidad.

LEN 26410 (1996). Ley de Educación Nacional 26410/1996. República Argentina.

Santamaría, C. y Espino, O. (2000). Truth and falsity in propositional reasoning: the negation heuristic. En J. A. García-Madruga, N. Carriedo y M. J. González Labra. *Mental Model in reasoning*. Madrid: UNED.

HISTORIA NOVELADA DE LA MATEMÁTICA COMO RECURSO DIDÁCTICO PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS EN ESTUDIANTES DE MEDIA SUPERIOR

Leticia Avila Mera
Bachillerato General Oficial “Ahuazotepec”. (México)
letifanny65@gmail.com

RESUMEN: En este artículo se muestran los resultados de una investigación cualitativa del tipo participativa, basada en el programa de lectoescritura, cuyo objetivo es que el estudiante de Media Superior descubra la relación de la matemática con otras asignaturas, a través de la lectura de literatura sobre historia de la matemática. Asimismo, se considera como recurso didáctico para estimular sus procesos cognitivos. Se presentan las conclusiones de la investigación, las implicaciones experimentadas por los estudiantes durante el desarrollo de las actividades y las competencias que lograron desarrollar.

Palabras clave: historia de las matemáticas, recurso didáctico, interdisciplinariedad

ABSTRACT: This article shows the results of a participative qualitative research, based on the reading-writing program. The aim is to achieve that the senior high school student identify the relationship between Mathematics and other subjects, by reading Mathematics History literature. It is also considered a didactic resource to stimulate the students’ cognitive processes. The paper also shows the conclusions of the research, the involvement the students experimented during the development of the activities, as well as the competences they could develop.

Key words: Mathematics’ History, didactic resource, interdisciplinary

Introducción

Uno de los objetivos de la RIEMS (Reforma Integral de Educación Media Superior) en México es que las asignaturas se lleven de manera interdisciplinaria para que los alumnos desarrollen las competencias genéricas y disciplinares en todas las asignaturas, en los seis semestres a través de la ayuda de diversos proyectos que los diferentes subsistemas de bachilleratos incorporan.

Los resultados de las evaluaciones PISA (2009) y ENLACE (2010) muestran que los hábitos y las capacidades relacionadas con la lectura en jóvenes mexicanos entre 15 y 18 años están muy por debajo de los niveles satisfactorios. Ante esto, el Programa de Fomento a la Lectura en Educación Media Superior incorpora ciertos mecanismos de acción de tal manera que los estudiantes puedan disfrutar más de la lectura y se genere un impacto positivo en su desempeño escolar.

La OCDE (2010) considera que si los alumnos usan estrategias adecuadas para entender lo que leen, tales como el subrayado de lo más importante, exponer o discutir lo que leen ante los demás, permitirá el desarrollo de sus capacidades de razonamiento y de abstracción.

En México, aproximadamente 90% de los alumnos no tienen el hábito de la lectura desde la niñez; los docentes deben establecer ciertas estrategias aprovechando la etapa de la adolescencia, por ser el momento oportuno en que los adolescentes maduran ciertas funciones intelectuales y están más dispuestos a desarrollar sus habilidades, talentos y capacidad de abstracción, si se les orienta oportuna y adecuadamente.

En el bachillerato de Ahuazotepec, comunidad ubicada en la Sierra Norte en el estado de Puebla, en México, el proyecto de lectoescritura tomó la estructura de un espacio en donde todos los alumnos, a sugerencia de los profesores o de los mismos estudiantes, leen un libro por semestre con el objetivo de que todos contribuyan al fomento de la lectoescritura y al desarrollo de habilidades relacionadas con otras materias: en especial la matemática.

Para documentar los resultados del proyecto se ideó una investigación educativa cualitativa, que tomó la forma de una secuencia didáctica cuyo objetivo fue determinar la efectividad de las actividades de lectoescritura de ficción con respecto a la historia de la matemática, para motivar a los estudiantes de bachillerato en el estudio de la disciplina.

Fundamentación

Según Bell (1985) ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como las matemáticas. Se hace uso de esta frase porque se encuentra la oportunidad para que el estudiante observe desde otra perspectiva a la matemática.

Con la incorporación de la lectura de historia de las matemáticas del género novela y poesía como recurso didáctico como primera instancia para despertar su motivación en interés por la lectura, analizar la información de los libros para empezar a relacionarse con ciertos personajes importantes en la historia de la matemática, familiarizarse con conceptos matemáticos y empezar a resolver y reflexionar algunas problemáticas que se exponen en los libros utilizando sus conocimientos previos.

Al respecto, Zapico (s.f) menciona que el objetivo de enseñar matemática con su historia es establecer que la percepción hacia la matemática cambia en la medida en que docentes y estudiantes pueden "contextualizarla y humanizarla". Es decir que al presentar a la matemática al alumno desde el aspecto literario con historias noveladas, despierta en él el interés de conocer la historia de los matemáticos, sus descubrimientos, los conceptos, como en diferentes épocas sus descubrimientos los llevaron a la práctica y como se pueden aplicar en nuestros entornos, también conocer la metodología para resolver grandes problemas así como las ideas originales de los matemáticos.

Metodología

El proyecto de investigación se realizó con 28 alumnos del sexto semestre del Bachillerato General Oficial "Ahuazotepec".

Se realizó la secuencia didáctica bajo un enfoque constructivista, considerando la teoría de Las Situaciones Didácticas adaptada, en donde el docente genera situaciones construidas intencionalmente con el fin de hacer adquirir a los alumnos un saber determinado; basándose principalmente que el conocimiento puede ser determinado por una acción entre dos o más personas (Brousseau, 1986).

Con respecto a las situaciones didácticas, en este trabajo se pueden incorporar cuatro aspectos de los que señala Brousseau (1996):

- Acción. Ésta se da cuando el estudiante o los estudiantes que se enfrentan a la lectura de los libros, ponen en práctica su conocimiento, subrayado, análisis de los libros, realización de ejercicios propuestos y fichas de resumen.
- Comunicación. Se da durante la lectura en donde los estudiantes comparten experiencias, ideas, dudas, conocimientos, etcétera; la comunicación interviene como puente para transformar el conocimiento implícito en explícito.
- Validación. Ésta se presenta cuando no existe armonía en las opiniones entre los estudiantes que se enfrentan a una situación y en la cual hay opiniones diferentes en cuanto a los valores éticos y morales de los protagonistas de las diferentes lecturas, para lo cual existe un acompañamiento por parte del profesor y existe la labor de convencimiento para que existan acuerdos comunes.
- Institucionalización. Se trata de llevar a la práctica la teoría que los estudiantes aprendieron mediante la lectura de los libros de historia de las matemáticas del género novela y poesía.

Desarrollo experimental

El proceso de investigación inició en el mes de enero del 2016. Se les proporcionaron a los estudiantes los libros: “El tío Petros y la conjetura de Goldbach”, “Los Simpson y las Matemáticas”, “El diablo de los números”, el poemario “Alucinaciones Paralelas” y algunos capítulos del libro inédito “Hipatia una mujer controvertida”

- Realizaban como tarea un reporte de lectura de cada capítulo.
- Cada ocho días por un espacio de 20 minutos, en el salón de clases se leían algunos reportes que se consideraron relevantes, los alumnos exponían o debatían aspectos que cada quien consideraba importante de cada capítulo,
- Entregaron un reporte final de los libros con los aspectos más importantes.
- Los alumnos exponían de manera individual o por equipos las ideas fundamentales de cada libro

Las preguntas abiertas permitieron explorar de manera cualitativa algunos aspectos de interés de la investigación. De esta manera, fue viable indagar y analizar si la historia de la matemática, desde el punto de vista de la novela y la poesía, influye positivamente en los estudiantes en el estudio de la disciplina al verla desde otra perspectiva.

Cuando se dieron a conocer los títulos de los libros no se recibió ninguna respuesta positiva por parte de los estudiantes; al empezar con la lectura los alumnos estaban totalmente apáticos y renuentes, en especial las mujeres porque algunas de ellas están acostumbradas a leer novelas de otro tipo: romance o de aventuras.

Se les explicó la intención de encontrar en estas lecturas las conexiones de la matemática con otras materias y contribuir a facilitar su entendimiento la clase de matemática.

Cuando los estudiantes leyeron el libro “Los Simpson y las Matemáticas”, presentaron algunas dificultades cuando se relacionó la misma serie con algunos capítulos del libro, debido a que la traducción del libro no está relacionado con el contexto de los mexicanos porque al comparar algunos capítulos de la serie le dan más importancia a las bromas que a las cuestiones matemáticas que realmente contiene la serie. Por lo tanto se les hizo difícil entender algunas problemáticas planteadas debido a la traducción.

Resultados

A continuación se describen las competencias disciplinares que los alumnos lograron desarrollar en las diferentes asignaturas en su paso por el Nivel Medio Superior.

A continuación se describen las competencias disciplinares establecidas en el acuerdo 444 de la Reforma Integral de educación que los alumnos lograron desarrollar en las diferentes asignaturas en su paso por el Nivel Medio Superior.

Matemáticas: - Formularon y resolvieron problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. - Explicaron e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. - Argumentaron la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. - Analizaron las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

Literatura: - Identificaron, ordenaron e interpretaron las ideas, datos y conceptos explícitos e implícitos en un texto. - Produjeron textos con base en el uso normativo de la lengua, considerando la intención y situación comunicativa. - Expresaron ideas y conceptos en composiciones coherentes y creativas, con introducciones, desarrollo y conclusiones claras. - Utilizaron las tecnologías de la información y comunicación para investigar, resolver problemas, producir materiales y transmitir información.

Ética y Valores, Filosofía, Desarrollo humano y Orientación Profesiográfica: - Actuaron en la resolución ética de conflictos. - Ejercieron su libertad comprometido con una jerarquización propia de valores. - Argumenta una opinión personal sobre conflictos morales. - Asumieron la interculturalidad como elemento sustancial para las relaciones interpersonales respetuosas. Se identificaron y asumieron como miembro de un contexto cultural. - Asumieron la responsabilidad que implica la toma de decisiones. Asumieron la responsabilidad que implica la toma de decisiones. -Definieron un proyecto de vida personal con base en los conocimientos adquiridos, el autoconocimiento, la autoaceptación y la autoestima.

Historia Universal. - Identificaron el conocimiento social y humanista como una construcción en constante transformación. - Situaron hechos históricos fundamentales que han tenido lugar en distintas épocas en el mundo con relación al presente. - Interpretaron su realidad social a partir de los procesos históricos, locales, nacionales e internacionales que la han configurado. - Valoraron las diferencias sociales, política, económica, étnicas, culturales y de género y las desigualdades que inducen. - Deliberarán sobre los prejuicios culturales construidos históricamente.

Razonamiento Verbal. - Producen párrafos a partir de la selección de ideas principales y secundarias. - Realizaron lecturas panorámica, analítica y crítica.

De las once competencias genéricas que establece el acuerdo 444 de la Reforma Integral de Educación Media Superior en México (SEP, 2008) se percata que los alumnos adquirieron las siguientes:

1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.

3. Elige y practica estilos de vida saludables.

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.

6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general,

8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.

Se presentan algunas opiniones de los alumnos sobre los libros que se utilizaron durante el estudio:

"El Tío Petros y la Conjetura de Goldbach"

Es una gran historia de amor hacia la matemática, ya que demuestra que la perseverancia, la pasión por las matemáticas y la inteligencia, logran grandes cosas a pesar de que se ponga en duda tu prestigio o tu salud mental.

Al sumergirte en historias de este tipo, te vas interesando cada vez más y te estás dando cuenta que estás aprendiendo, también entendimos sobre de que trata la teoría de números.

"Los Simpson y las Matemáticas"

Es sorprendente descubrir que escritores, editores, guionistas sean matemáticos.

Aprendimos los distintos tipos de números (perfectos, vampiros, narcisistas, primos, triangulares, fibonacchi), así como conceptos, procedimientos, teoremas que los matemáticos antiguos y modernos formularon y resolvieron.

Nos resultó un libro complicado porque la traducción del mismo resultó deficiente y no se relaciona muchas veces los capítulos de la serie con lo que se dice en el libro.

"El Diablo de los Números"

En especial el diablo de los números fue una historia fascinante, ya que conocimos a la matemática a través del juego y como el diablo de los números dio muchos ejemplos de la matemática a Robert y cómo se utilizaban en la vida cotidiana.

Aprendimos la utilidad de las fracciones, del número uno y el cero, de las potencias, los números primos, fibonacci, números romanos, triangulares, las permutaciones y combinaciones, etc. Consideramos que este libro es muy didáctico porque también utiliza dibujos para ilustrar las escenas, algo que nos divierte y nos motiva.

"Alucinaciones Paralelas"

Con la lectura del Poemario, nos sorprendió demasiado porque pudimos darnos cuenta que se pueden expresar sentimientos de una manera bella utilizando conceptos matemáticos, en conclusión la matemática y la literatura no tienen porque ser dos asignaturas opuestas, al contrario se complementan.

"Hipatia una mujer controvertida"

Esta historia nos atrapó porque la autora utiliza diálogos ficticios para darle vida a la matemática y nos transporta a esa época de una manera muy amena para que conociéramos su historia, las aportaciones que la matemática hizo a la matemática, filosofía y astronomía.

Conclusiones

Conforme los alumnos se fueron involucrando en la lectura, su actitud fue cambiado. Cada ocho días exponían de manera motivada sus reflexiones, sus dudas, los conceptos aprendidos y la resolución de algunos problemas; cabe señalar que alumnos que se mostraban apáticos en la materia de matemáticas en semestres anteriores mostraron mucha capacidad de liderazgo a la hora de exponer los libros y organizar las actividades con sus equipos. Es importante señalar que con las actividades propuestas, un alumno de lento aprendizaje por primera vez se sintió motivado y se relacionó con sus demás compañeros para la realización de los diferentes trabajos.

Al terminar de leer los tres libros, el poemario "Alucinaciones Paralelas" y algunos capítulos de "Hipatia una mujer controvertida":

- Vieron desde un punto de vista más humano a las matemáticas, porque se percataron y valoraron el esfuerzo que los matemáticos hacen por compartirnos sus descubrimientos, hallazgos, sus reflexiones y que todo este proceso se puede llevar años, con el objetivo de hacernos la vida más fácil y valoran que también su vida nos es tan fácil como ellos creían, que tienen una vida igual o más difícil que la de ellos.
- No importaron los obstáculos que se encuentre uno en el camino, que se requiere valor y tesón para vencer las dificultades que les presente.
- Despertaron su curiosidad acerca de la teoría de los números y también preguntaron sobre aquellos problemas de las matemáticas que todavía están sin resolver.
- Sin darse cuenta los alumnos llevaron a cabo la interdisciplinariedad con otras materias: Ética y Valores, Literatura, Taller de Lectura y Redacción, Orientación Vocacional, Pensamiento Crítico y Creativo, Razonamiento Verbal, Historia Universal y la Matemática misma.

- Enriquecieron su cultura, porque conocieron nuevos conceptos, simbologías, personajes matemáticos, estrategias de resolución de problemas.
- Los estudiantes lograron algunas competencias genéricas y disciplinares que se establecen en el Acuerdo número 444 que constituyen el marco curricular común del Sistema Nacional de Bachillerato.

Por lo tanto los resultados de la investigación indican que la revisión de la historia de la Matemática, a través de la novela y la poesía, es un recurso didáctico que ofrece una excelente opción para que el alumno se muestre motivado e interesado en esta ciencia.

Referencias bibliográficas

Acuerdo N° 444. (2008, 21 de octubre). *Competencias que constituyen el marco curricular común del Sistema Nacional de Bachillerato.* México, Secretaría de Educación Pública. Recuperado de http://www.sep.gob.mx/work/models/sep1/Resource/7aa2c3ff-aab8-479f-ad93-db49d0a1108a/a444.pdf

Avila, L. (2016, 22 de abril). *Uso de la historia de la matemática del género novela como recurso didáctico en el aula*. Revista 360, (décima edición). Recuperado de http://cremc.ponce.inter.edu/360/revista360/Decima%20Edicion/Uso%20de%20la%20historia%20de%20la%20matem%C3%A1tica%20del%20g%C3%A9nero%20novela%20como%20recurso%20did%C3%A1ctico%20en%20el%20aula.pdf

Berger, E. (2013). *El diablo de los números*. México: Siruela.

Brousseau, G. *La teoría de las situaciones didácticas*, pp.10-23. Recuperado el 02/02/2016 de http://www.ardm.eu/contenu/guy-brousseau-espanol

Doxiadis, A. (2000). *El tío Petros y la Conjetura de Goldbach*. España: Ediciones B. Barcelona

González, PM (2004). *"La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza"*. *Suma* 45; 17-28. Recuperado de http://revistasuma.es/IMG/pdf/45/017-028.pdf

Planchart, O. (1991). *Alucinaciones Paralelas*. Universidad Interamericana de Puerto Rico.

Sadovsky, P. *La Teoría de las Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar en la enseñanza de la matemática.* Recuperado el 11/12/15 de https://www.fing.edu.uy/grupos/nifcc/material/2015/teoria_situaciones.pdf

SEP (2012) *Programa de fomento a la lectura para la Educación Media Superior*. Recuperado dehttp://www.dgb.sep.gob.mx/acciones-programas/siguele/FomentoLectura_sep2012.pdf

Singh, S. (2015). *Los Simpson y las Matemáticas.* México: Ariel M.R, Zapico, I. (s.f.). *Enseñar matemática con su historia*. Recuperado de http://soarem.org.ar/Documentos/29%20Zapico.pdf

CONCEPÇÕES DE FORMANDOS DO ENSINO MÉDIO SOBRE A DENSIDADE DOS NÚMEROS REAIS

Gerson Geraldo Chaves, Vera Helena Giusti de Souza
Universidade Federal de Viçosa – *campus* Florestal. (Brasil).
Universidade de São Paulo - Instituto de Matemática e Estatística. (Brasil)
ggchaves011166@gmail.com, verahgsouza@gmail.com

RESUMO: Apresenta-se um recorte de uma pesquisa de Doutorado em Educação Matemática, com a qual procurou-se investigar que elementos, presentes na *imagem de conceito* relativa à densidade dos números reais, são manifestados por 23 estudantes brasileiros, formandos do Ensino Médio (16-18 anos de idade), na resolução de quatro questões, duas com foco no aspecto numérico da densidade do conjunto dos números reais e as outras duas, no geométrico. Trata-se de uma pesquisa qualitativa e, para a análise dos dados, teve-se como referencial as ideias de *imagem de conceito* e de *definição de conceito* dadas por Tall e Vinner (1981) e o construto *já*-encontrado, presente na teoria dos *Três Mundos da Matemática*, defendida por Tall (2013). A análise das respostas aponta que o conceito de densidade dos números reais não está presente na *imagem de conceito* dos estudantes participantes e que, em particular, a ideia de sucessor, como definida para os números inteiros, constitui um *já-encontrado* dificultador para a compreensão da densidade dos números reais.

Palavras-chave: números reais, densidade, ensino médio

ABSTRACT: This paper presents a review of a PhD research in Mathematics Education, which seeks to investigate which elements, present in the image of the concept about the density of real numbers, are expressed by 23, high school graduates (16to18 age group) Brazilian students in the solution of four question; two focusing on the numerical aspect of the density of a set of real numbers and the other two on geometric aspects. It is a qualitative research and, for the analysis of the data, we had as a reference point, the ideas of image and definition of concept given by Tall and Vinner (1981) and the already-known construct, present in the theory of Three Worlds of Mathematics, defended by Tall (2013). The analysis of the answers points out that the concept of density of real numbers is not present in the image of the concept of the students who were involved, and that, in particular, the idea of successor, as defined for the integers, constitutes an already found constraint for the understanding of the density of real numbers.

Key words: real numbers, density, high school, onto semiotic approach.

Introdução

A noção de número real está presente na maioria dos conteúdos de Matemática e, apesar de ser importante para a compreensão de outros assuntos, em diversas áreas, muitas dificuldades são manifestadas e equívocos são cometidos quando se refere aos números reais e noções subjacentes, mesmo por indivíduos que tiveram contato com o tema por vários anos, conforme destacam pesquisas realizadas em diversos países, como as de Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) em Israel; Robinet (1986) na França e Soares, Ferreira e Moreira (1999) no Brasil. Tais pesquisas apontam que a questão dos números reais, suas representações e noções subjacentes se mostram confusas e pouco compreendidas por estudantes de todos os níveis, inclusive por futuros professores de Matemática.

Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) levantaram a hipótese de que a aprendizagem dos números irracionais enfrenta dois obstáculos intuitivos: as noções de incomensurabilidade e de densidade (o fato dos números racionais constituírem um conjunto denso no conjunto dos reais, mas que não preenche toda a reta). A fim de avaliar a presença e os efeitos desses obstáculos, esses pesquisadores investigaram o conhecimento que alunos do ensino secundário e futuros professores de Matemática, da região de Tel Aviv, detêm sobre tais números. Os resultados obtidos revelam que a maioria dos alunos secundários e muitos futuros professores não são capazes de definir números racionais, irracionais e/ou reais; classificar corretamente números pertencentes a conjuntos numéricos distintos; identificar características que diferenciam $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{Q}^{C}$. Também ficaram evidentes ideias confusas sobre os conceitos de números racionais e irracionais e de relações entre eles.

No que se refere à densidade, foram propostas algumas questões para observar a reação dos participantes da pesquisa frente à relação existente entre os racionais, irracionais, reais e a reta numérica, sendo que os estudantes não se surpreenderam frente ao fato de que em um intervalo existe uma infinidade de números racionais e irracionais, contrariando a suposição inicial de que isso ocorreria. Com isso, concluíram que dificuldades que poderiam gerar os dois obstáculos intuitivos não são de ordem intuitiva, primitiva, rudimentar. Pelo contrário, seria um indicativo de um nível relativamente alto de conhecimento matemático. Uma sugestão dos autores é que a ausência de significado intuitivo na ideia de coexistirem, em um mesmo intervalo, dois conjuntos infinitos de números distintos, ambos densos na reta numérica, com características e propriedades particulares, é dificuldade que deve ser enfrentada e não evitada na Educação Matemática.

Compactuados com a sugestão dada por esses pesquisadores, acrescentamos, em concordância com Silva e Penteado (2009), a defesa e a importância da introdução de conceitos relacionados à densidade dos números reais na Educação Básica brasileira, especialmente no Ensino Médio, pois entendemos que é um assunto importante a ser trabalhado, uma vez que é um conceito necessário para a compreensão de outros tópicos da Matemática, tais como intervalos reais e funções nesse nível de ensino e limite e continuidade de funções em estudos mais avançados.

Além das dificuldades apontadas em pesquisas, na compreensão da densidade, no desempenho de nossas funções docentes muitas vezes nos deparamos com a não compreensão ou, talvez, com o não conhecimento da noção de densidade dos números reais. A não compreensão e/ou não conhecimento dessa propriedade pode ser observada quando, por exemplo, o aluno é solicitado a indicar um número real que seja o mais próximo de 1 e à sua direita e o estudante indica 1,1, parecendo transferir propriedades válidas para os números inteiros aos reais. Outro equivoco pode ser observado quando indagamos sobre a quantidade de elementos existentes no intervalo real $\{x \in \mathbb{R} | 1 < x < 4\}$ e o estudante indica que existem apenas dois, os números 2 e 3.

Preocupados com a situação que se mostra, resolvemos buscar uma melhor compreensão das ideias manifestadas por estudantes secundários sobre a densidade dos reais e, assim, estabelecemos como objetivo de pesquisa identificar que elementos da *imagem de conceito* são evocados na resolução de quatro questões, duas delas com foco no aspecto numérico da densidade do conjunto dos números reais e as outras, no geométrico. Também procuramos identificar *já-encontrados* que possam ter influenciado as respostas dadas pelos participantes.

As lentes que serão utilizadas para trazer à tona respostas às indagações que pusemos para o nosso estudo serão fornecidas pelas ideias de *imagem de conceito* e de *definição de conceito* (Tall e Vinner, 1981) e o construto *já-encontrado,* presente na teoria dos *Três Mundos da Matemática* (Tall, 2013).

Considerações teóricas

Segundo Tall e Vinner (1981), podemos dizer que a *imagem de conceito* se refere à estrutura cognitiva individual total associada a determinado conceito, que pode ter aspectos incluídos, excluídos ou modificados, conforme o indivíduo amadurece. Não é uma estrutura estática, pode ser enriquecida à medida que o indivíduo encontra novos estímulos, no decorrer da vida.

A *imagem de conceito* pode ser composta por atributos de diferentes naturezas e ter representações verbais e não verbais de todos os tipos, que cada um associa a determinado conceito, que podem ser coerentes ou não com o que é aceito pela comunidade matemática. A *imagem de conceito evocada*, ou seja, aquela que se manifesta quando se questiona sobre a densidade dos conjuntos numéricos, pode incluir elementos e justificativas tais como: inclusão de outros conjuntos (um conjunto é denso porque contém outros conjuntos numéricos como os inteiros e decimais, por exemplo) ou a impossibilidade de indicar um número próximo a outro número (em um conjunto denso não se pode indicar um número – antes ou depois – que seja mais próximo desse que todos outros). Esses atributos podem, ou não, estar na *imagem de conceito* de um indivíduo e se associar ao conceito de densidade.

A *Definição de Conceito* está relacionada ao conjunto de palavras utilizadas pelo indivíduo para definir determinado conceito, sendo também individual e, como a *imagem de conceito,* pode mudar ao longo do tempo. Pode ser uma simples memorização, expressar a compreensão matemática do conceito em questão ou ser uma reconstrução pessoal da definição formal. Por exemplo, para Caraça (1951, p. 51), a *definição de conceito* de densidade de um conjunto é que “entre dois dos seus elementos *quaisquer* exista uma infinidade de elementos do mesmo conjunto”.

O entendimento de certa situação matemática varia de indivíduo para indivíduo, porque é baseado em experiências anteriores, seja da vida escolar ou do cotidiano, que o ajudaram a desenvolver a própria *imagem de conceito*. Essas experiências são de fundamental importância, pois afetam a aprendizagem de um conceito matemático e quando um indivíduo se depara com uma situação que lhe parece familiar, pode utilizar um procedimento ou conceito que já conhece e que pode ser solidário ou problemático para a aprendizagem do novo conceito. Dessa forma, um *já-encontrado* “é toda e qualquer experiência anterior a um certo aprendizado, considerada como construto mental, presente na imagem de conceito do aluno, que possa interferir no aprendizado em questão, seja de forma positiva ou negativa” (Lima, 2007, p.88).

Entendemos que alguns *já-encontrados* podem ser dificultadores para a compreensão dos números reais e do conceito de densidade, dos quais destacamos a generalização inadequada do conceito de sucessor, válida para o conjunto dos números inteiros, estendida aos reais. Por outro lado, a compreensão de características da reta, como ser ilimitada e formada por infinitos pontos adimensionais, pode ser um *já-encontrado* que atue de forma colaboradora quando se quer a compreensão da correspondência que existe entre os números reais e os pontos da reta.

Tais pressupostos teóricos serviram de base para a elaboração das questões e para a análise das respostas dadas pelos 23 participantes do Estudo Preliminar.

Percurso Metodológico

O recorte aqui apresentado, de uma pesquisa de Doutorado em Educação Matemática, pode ser classificado como um estudo diagnóstico, com análise qualitativa dos dados.

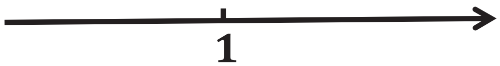
A pesquisa foi realizada em duas fases: a primeira, de caráter diagnóstico, denominada Estudo Preliminar, já está concluída e valeu-se da aplicação de dois conjuntos de questões, respondidos por 23 estudantes brasileiros da terceira série do Ensino Médio (16-18 anos de idade), um deles envolvendo conceitos sobre os números reais e o outro, intervalos reais. A segunda fase, denominada Estudo Principal, em fase de análise dos resultados, foi desenvolvida junto a alunos de primeira série do Ensino Médio, tendo como referência os resultados obtidos no Estudo Preliminar.

Neste trabalho, apresentamos alguns dos resultados obtidos com quatro questões, que fizeram parte do Estudo Preliminar e que foram analisadas com base no quadro teórico adotado. As quatro questões que apresentamos neste trabalho são

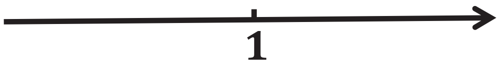
1) Qual é o número inteiro, à direita, mais próximo de: -1 ; 2 ; 1/2 ; 2,6 ; 3,444... ; $\sqrt{2}$; 0,01001... Explique.

2) Qual é o número real, à direita, mais próximo de: -1 ; 2 ; 1/2 ; 2,6 ; 3,444... ; $\sqrt{2}$; 0,01001... Explique.

3) Represente, na reta abaixo, se possível, o número inteiro maior que o número dado e que seja o mais próximo dele. Justifique sua resposta.



4) Represente, na reta abaixo, se possível, o número real maior que o número dado e que seja o mais próximo dele. Justifique sua resposta.



Com essas questões, procuramos responder alguns questionamentos: que justificativa dão ou que estratégia utilizam para indicar um número inteiro mais próximo de um número real? Que justificativa dão ou que estratégia utilizam para indicar um número real mais próximo de outro? A discretização dos números reais é atributo da *imagem de conceito* do grupo pesquisado?

No que segue, expomos nossas análises.

Alguns resultados

Tivemos como objetivo, com as duas primeiras questões, verificar se a discretização de $\mathbb{Z}$ é atributo da *imagem de conceito* em um contexto numérico e se fazem uma generalização dessa discretização para $\mathbb{R}$. Para isso, escolhemos alguns números reais representados de várias formas e que estão presentes nas duas primeiras questões, para fazermos uma comparação entre as respostas.

Primeira questão

A tabela representa a quantidade de acertos para cada número presente na questão.

Tabela 1 Quantidade de respostas corretas para a primeira questão

Números	-1	2	1/2	2,6	3,444...	$\sqrt{2}$	0,01001...
Quantidade	13	17	17	18	15	12	16

Fonte: dos autores

É sempre possível indicar um número inteiro e mais próximo de outro, somando uma unidade aos números inteiros, no caso de -1 e 2 e para os decimais indicar o número inteiro maior e mais próximo. Essa afirmação foi confirmada, visto que apenas um estudante não indicou um número mais próximo e à direita apenas para o radical. Era esperado que o menor número de acertos ou respostas em branco se desse para $\sqrt{2}$; no entanto, não esperávamos que o maior número de acertos se desse para o decimal com expansão decimal finita, 2,6 e sim para o número 2.

Era previsto que algum estudante somasse uma unidade ao numerador e/ou denominador da fração para encontrar o número à direita e mais próximo, fato que não ocorreu em nenhuma das respostas.

Nove estudantes indicaram corretamente todos os números mais próximos e à direita dos números dados, sendo que quatro não deram uma justificativa. Quatro explicaram que números inteiros não possuem casas decimais e um argumentou que os números inteiros não possuem casas decimais diferentes de zero.

A justificativa mais comum para a indicação do número, dada por 7 dos estudantes, foi de que os números inteiros não possuem casas decimais como, por exemplo, a resposta: "*número inteiro é um número não decimal*". Essa ideia pode ser um *já-encontrado* dificultador para a compreensão dos números decimais, visto que pode contribuir para a não percepção de igualdades como 1 = 1,0 = 1,000... ou 2,9 = 2,9000..., por exemplo.

Três pesquisados justificaram que números inteiros não possuem casas decimais diferentes de zero, como exemplo destacamos uma resposta que foi dada após indicar corretamente todos os números: "*Porque estes números são definidos como inteiros sem decimais diferentes de zero. A direita significa o próximo número inteiro maior que o anterior*".

Usando a ideia de arredondamento, dois estudantes expressam mais de um número como mais próximo para alguns da lista. Por exemplo, indicam que o mais próximo de ½ é 0 ou 1. Um deles explica que "*Os números inteiros mais próximo é feito através de um arredondamento, para deixar o número sem nenhuma casa decimal*". Essa ideia não é um *já-encontrado* que facilitou a resolução da questão, visto que esse mesmo estudante indicou 3 como mais próximo e à direita 3,444...

O número zero é historicamente problemático, fato aqui evidenciado por ser o erro mais recorrente. Cinco estudantes desconsideraram o zero como número mais próximo e à direita de -1, indicando como tal o número 1, sendo que dois deles claramente excluem o zero do conjunto dos números inteiros em suas justificativas.

Segunda questão.

Sabemos da impossibilidade de se indicar um número real mais próximo de outro devido à densidade de $\mathbb{R}$**;** no entanto, a totalidade de pesquisados indicou um número mais próximo dos números da lista, sendo diversas as estratégias e justificativas. Não obtivemos respostas de três alunos para $\sqrt{2}$ e de outro, para o radical e -1, número de respostas em branco bem superior em relação à primeira questão.

Somar uma unidade em algum lugar para indicar um número real como mais próximo dos números listados foi a estratégia mais utilizada, realizada por 14 dos pesquisados. Nesse caso, os estudantes parecem estender a propriedade de somar uma unidade para encontrar o sucessor, válida para os inteiros, aos reais. Consideramos essa estratégia um *já-encontrado* dificultador para a compreensão da densidade dos reais. As justificativas desses 14 pesquisados foram separadas por grupos de respostas nos quais colocamos, entre parênteses, a quantidade de pesquisados em cada grupo e uma resposta dada por um dos alunos como ilustração.

Grupo A (4): sem justificativa.

Grupo B (4): números reais podem ser decimais. "*Número real não é necessariamente inteiro, números decimais são reais.*"

Grupo C (4): números reais abrangem outros conjuntos numéricos. "*os números reais comportam todos os demais tipos de número*".

Grupo D (2): soma envolvendo um pequeno número. "*basta se determinar qualquer outro número que ao se somar ao apresentado for muito próximo deste*".

Um estudante utilizou, respectivamente, as frações -1/2; 5/2; 1; 3; 7/2; 3/2; 2/100 trazendo, na justificativa, sua *definição de conceito* para números reais: "*os números reais são tanto números inteiros, como também em formas de fração desde que sejam números exatos*". A ideia de número real ser "exato" se constitui em um *já-encontrado* dificultador para a compreensão da densidade, pois os números reais podem ter expansão decimal infinita, uma característica que imputa a impossibilidade de se encontrar um real mais próximo de outro.

Quatro pesquisados indicaram, para essa questão, com poucas alterações, os mesmos inteiros da questão anterior. Entendemos que esse grupo considera os números reais como inteiros, como o estudante que traz na justificativa sua *definição de conceito* de número real: "*Número real é um número inteiro e positivo*". A percepção dos reais apenas como inteiros também constitui um *já-encontrado* dificultador para a compreensão do conceito de densidade dos números reais, visto que para esses estudantes os números decimais parecem não fazer parte do conjunto $\mathbb{R}$.

Os quatro estudantes restantes deram respostas inconsistentes, como indicar apenas um número como mais próximo de todos da lista.

Terceira questão

Apenas dois estudantes não indicaram o número 2 como resposta, com justificativas que nos levam a inferir que não entenderam a pergunta. Dos demais, oito disseram simplesmente que seria o inteiro mais próximo; outros quatro que número inteiro não possui casa decimal; três que números inteiros não possuem casas decimais diferentes de zero; dois justificaram que número inteiro não tem vírgula, um que os números naturais estão contidos nos inteiros, um apenas indicou x > 1 x = 2 e dois não justificaram.

Quarta questão

Para essa questão, temos como resultado: quatorze participantes somaram um em algum lugar, praticamente os mesmos alunos da segunda questão (apenas três alterações), sendo a resposta mais frequente 1,1 (seis pesquisados a indicaram); quatro estudantes indicaram 2 como resposta (os mesmos quatro que indicaram números inteiros para o real mais próximo na segunda questão) e cinco deram respostas inconsistentes.

No contexto numérico, a totalidade de pesquisados indicou números, sendo que nenhuma resposta traz algum indicativo da compreensão da densidade dos números reais. No contexto geométrico, dois estudantes parecem verificar a impossibilidade de se indicar um número, porém trazem, como justificativa, a ideia de existência desse número:

"*Não posso representar um numero real maior que 1 e mais proximo dele, pois o numero que entra nessa colocação e um numero infinito. Ex* $1{,}000000000\underbrace{\ldots}_{infinito}1$ "*Não é possivel representar o numero real mais próximo a 1 deve a este ser muito pequeno*".

Em nossa opinião, apenas um estudante pinça de sua *imagem de conceito* ideias consistentes sobre a densidade dos reais no contexto geométrico: "*Impossível, por número real maior que o número 1 (um) eu entendo todo aquele que possui casas decimais após a vírgula. Sendo assim, para qualquer nº que eu escrever que seja mais próximo de zero e maior que 1 (um), sempre haverá um número mais próximo de 1 (um). Possibilidades infinitas.*" Fomos verificar sua resposta no contexto numérico. Esse estudante indicou os próprios números do rol como os mais próximos como, por exemplo, de -1 o mais próximo é 0,01001..., de 2 o 2,6; de ½ o 0,01001...; e assim por diante. Interpretamos que o estudante não compreendeu a questão. Aliás, a questão poderia ter sido melhor elaborada se tivéssemos colocado a frase "Indique um número real, caso exista, à direita e mais próximo de:" em vez de "Qual é o número real, à direita, mais próximo de:" , como deixamos claro no enunciado do contexto geométrico.

Considerações finais

O Estudo Preliminar mostrou que, para a totalidade dos estudantes pesquisados, a densidade dos números reais parece não ser um elemento presente na *imagem de conceito*, quando se trata do contexto numérico (questões 1 e 2). Todos os participantes apontaram a existência de um número real maior e o mais próximo dos números reais apresentados, geralmente somando uma unidade em algum lugar, como por exemplo, $2,\overline{0}1$ como o mais próximo de 2 e $0{,}01002$ como o mais próximo do número $0{,}01001\ldots$. No contexto geométrico (questões 3 e 4), apenas um estudante explicitou a impossibilidade de se indicar um número real à direita de 1 (um) na reta, trazendo na justificativa elementos que apontam para a densidade dos reais. Como estratégia utilizada no contexto numérico, a maioria dos estudantes soma um em algum lugar para encontrar o real mais próximo no contexto geométrico, sendo a resposta de maior freqüência 1,1. Outro equívoco que destacamos é que alguns estudantes trazem números inteiros como sendo reais, tanto no contexto numérico, quanto no contexto geométrico. Essas observações mostram que a discretização dos números reais é atributo da *imagem de conceito* para o grupo pesquisado e nos fazem concluir que a ideia de sucessor, válida para os inteiros, é um *já-encontrado* dificultador para a compreensão do conceito de densidade. Assim, essas conclusões apontam para a necessidade de un estudo sobre o assunto e da indicação de caminhos que talvez possam contribuir para a aprendizagem do conceito de densidade, que é justamente uma de nossas pretensões com nosso Estudo Principal, que se encontra em fase de análise.

Referências bibliográficas

Caraça, B. J. (1951). *Conceitos Fundamentais da Matemática.* Lisboa: Tipografia Matemática.

Fischbein, E.; Jehiam, R. e Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers in hig-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(1), 29-44.

Lima, R. N. (2007). *Equações algébricas no Ensino Médio: uma jornada por diferentes Mundos da Matemática*. Tese de doutorado não publicada. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Robinet, J. (1986). Lés reels. Quels modeles em on lês eleves? *Educational Studies in Mathematics*, *17*(4), 359-386.

Silva, B. A. e Penteado, C. B. (2009). Fundamentos dos números reais: concepções de professores e viabilidade de início do estudo da densidade no ensino médio. *Educação Matemática e Pesquisa*, *11*(2), 351-371.

Soares, E. F.; Ferreira, M. C. C. e Moreira, P. C. (1999). Números reais: concepções dos licenciandos e formação matemática na licenciatura. *Zetetiké*, *7*(12), 95-117.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: exploring the Three Worlds of Mathematics*. New York: Cambridge University Press.

Tall, D. e Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12, 151-169.

¿CÓMO EVALUAR EL POTENCIAL DE CREATIVIDAD MATEMÁTICA EN EL DISEÑO DE UNIDADES DIDÁCTICAS? PROPUESTA DE HERRAMIENTAS Y SU USO EN EL CASO DE C-UNIDADES

Berta Barquero; Vicenç Font; Mario Barajas
Facultad de Educación, Universidad de Barcelona (España)
bbarquero@ub.edu, vfont@ub.edu, ma.barajas@gmail.com

RESUMEN: Esta investigación se centra en el proceso de diseño y evaluación de propuestas didácticas que se proponen promover la creatividad matemática (CM), las denominadas c-unidades. Dicho diseño, desarrollado en el marco del proyecto europeo MCSquared y en manos de equipos mixtos de diseñadores, es seguido por la evaluación del potencial que estas c-unidades presentan en promover la CM en sus futuras experimentaciones. En este trabajo nos centramos en presentar algunas de las herramientas diseñadas por los equipos investigadores del proyecto, y cómo estas se van transformando en los ciclos consecutivos de diseño de c-unidades, así como de la interacción entre los distintos equipos de diseñadores.

Palabras clave: creatividad matemática, diseño, c-unidad, evaluación

ABSTRACT: This research focuses on the design and evaluation process of didactic proposals that are set out to promote mathematical creativity (MC), the so-called c-units. This design, developed in the framework of the MCSquared European project and by mixed teams of designers, is followed by the evaluation of the c-units potential to foster MC in their future experiments. In this paper, we focus on presenting some of the tools designed by the project research teams, and how they are being transformed in consecutive cycles of c-unit design, as well as the interaction between different teams of designers.

Key words: creativity, mathematics, design, c-unit, evaluation

Introducción

Nuestro trabajo parte del diseño colaborativo de un nuevo tipo de recurso educativo digital, las denominadas *c*-unidades (*c* en referencia a creatividad) que se han desarrollado en el contexto del proyecto europeo 'MC Squared'. Este proyecto se propone, en primer lugar, el diseño y desarrollo de un entorno digital (los *c*-libros) que pueda servir de apoyo para la interacción de distintas comunidades involucradas en la enseñanza de las matemáticas y, en segundo lugar, el diseño y evaluación de los recursos didácticos innovadores (en este caso, el de las *c*-unidades) para promover la *creatividad matemática* y el *pensamiento matemático creativo* en la enseñanza de las matemáticas en los distintos niveles educativos (Mc Squared, s.f. a). En dicho proyecto han participado cuatro equipos responsables del diseño de unidades (España, Francia, Grecia y Reino Unido), los cuales han formado localmente sus equipos de diseñadores, las denominadas *comunidades de interés* (CdI) (Fisher, 2001) que se han encargado del diseño y evaluación de las c-unidades en tres ciclos consecutivos de diseño (de Enero 2014 hasta Enero 2016) a la vez que, los equipos de investigación, han desarrollado y testado las herramientas tecnológicas y metodológicas necesarias. En términos generales, la configuración de estas CdI ha incluido miembros con distintos perfiles profesionales y de formación. En nuestro caso, unas 20 persones han formado nuestra CdI local, entre las cuales han intervenido personas con perfiles diversos: profesores de Primaria y Secundaria, investigadores en Educación Matemática o de otros ámbitos de conocimiento (análisis, investigación operativa), desarrolladores de tecnología educativa o miembros de editoriales, entre otros.

El proceso de diseño y evaluación de una *c*-unidad ha sido cíclico y compuesto por distintas fases: (1) formación del equipo mixto de diseñadores (5-7 miembros) y acuerdo del 'protodiseño' de la c-unidad y de los criterios de diseño a tomar en consideración, (2) diseño y revisión interna de la c-unidad en la plataforma del c-libro, y (3) evaluación final del potencial que tiene la c-unidad para promover la creatividad matemática y el PMC, en la cual se incorporaban miembros de la CdI no participantes de su diseño. En este trabajo nos centramos más concretamente en las etapas de evaluación de las c-unidades y en tratar el problema de investigación que puede formularse en los términos siguientes: *¿Qué herramientas de evaluación se pueden considerar para evaluar el potencial de creatividad matemática que presentan las c-unidades diseñadas?*

A continuación se presentan los fundamentos teóricos y metodológicos en los que se basa la creación y uso de las herramientas de evaluación del potencial de creatividad matemática. Mostraremos también cómo estas herramientas han ido evolucionando y transformándose a medida que se avanzaba en el diseño y evaluación de c-unidades, tanto en las producciones de una misma CdI, en nuestro caso la española, como cuando se ha colaborado con otras CdI en el co-diseño y co-evaluación de c-unidades (Barquero, Papadopoulos, Barajas & Kynigos, 2015). Nos centraremos entonces en el caso de algunas c-unidades desarrolladas en el segundo y tercer ciclo de producción de las CdI, para poder ejemplificar algunos de los criterios considerados y de las características de su proceso de diseño, del producto final generado y de los resultados de evaluación sobre su potencial creativo.

Componentes teóricas y primera propuesta de herramientas de evaluación de la CM

El análisis y la evaluación de cómo y hasta qué punto las c-unidades permitían promover la creatividad matemática y del pensamiento matemático creativo ha sido una de las tareas centrales del proyecto MCSquared. Esta evaluación se ha aproximado desde distintos niveles de actuación, aunque entre ellos complementarios.

En primer lugar, y correspondiendo a los primeros ciclos de producción de c-unidades, los equipos internos de investigación se centraron en indagar en las concepciones sobre la creatividad matemática y el PMC de los miembros de la CdI (cada CdI independientemente) y cómo estas concepciones han impactado en la consideración y definición de criterios de diseño de las c-unidades (Papadopoulos et al., 2015). En relación a la CdI española, se abordaron intensamente las tareas relativas a este primer nivel de análisis durante el primer ciclo de producción de unidades (Barquero, Richter, Font & Barajas, 2014). Más concretamente, nos centramos en identificar las concepciones de PMC que presentaban los diseñadores a partir de la elaboración de una encuesta que recogía una gran variedad de interpretaciones descritas en la literatura sobre CM y sobre la promoción del PMC (Bolden, Harries & Newton, 2010; Leikin et al., 2013; entre otros), como también confrontarlas con los criterios de diseño y de evaluación que tomaban en consideración en las dos c-unidades que se diseñaron dentro de este primer ciclo. En este primer ciclo de producción de c-unidades, se prestó especial atención en recoger los criterios de diseño que se acordaban para el diseño de cada c-unidad, así como se empezó a categorizar a qué dimensiones o procesos de la actividad matemática correspondían estos criterios. En la tabla 1 hay algunos ejemplos de los criterios de diseño que, en el caso de la c-unidad sobre el comportamiento viral de las redes sociales producida en el ciclo 1, el subgrupo de la CdI acordó para el posterior diseño de la c-unidad − ver referencias para el enlace a la versión completa de la unidad (MC Squared, s. f. *b* y *c*) −, además de la referencia a las distintas dimensiones de la actividad matemática a las que, según el equipo interno de investigación, se referían.

Tabla 1. Ejemplo de criterios de diseño acordados por el grupo de diseñadores de la c-unidad: "Comportamiento viral de las redes sociales

c-unidad del ciclo 1: Comportamiento viral de las redes sociales
1. *Partir del planteo de problemas y cuestiones 'reales' y 'verdaderas'* [problematización, conexiones extra-matemáticas] 2. *Una pregunta abierta en el punto de partida de la actividad que genere y articule toda la unidad* [problematización, articulación] 3. *Dividir o descomponer la pregunta inicial en nuevas (sub)cuestiones más concretas (de complejidad creciente) que guíen el estudio de cada fase* [análisis-síntesis] 4. *Integrar dentro de la unidad preguntas y herramientas para evaluar y validar las respuestas parciales de los estudiantes* [validación-evaluación] 5. *Integración, uso y combinación de las herramientas tecnológicas como medios de exploración y contraste* [exploración, contraste y evaluación]

Al finalizar este segundo ciclo, el equipo interno de investigación analizó las distintas unidades producidas en los dos primeros ciclos (2 en el primero, 4 en el segundo) y, más concretamente, los criterios de diseño que se habían explicitado y cómo estos se habían transformado e integrado en las c-unidades. Estos análisis pusieron de manifiesto importantes aspectos. En primer lugar, cuando los miembros de la CdI se proponen explicitar los criterios de diseño y de evaluación del potencial en promover la creatividad, raramente se refieren directamente a la CM o al PMC, si no que recurren a descomponer estos complejos conceptos en *distintas dimensiones* o *procesos de la actividad matemática* cuya integración a través del diseño de tareas ayudaría a promover la CM. Se detectan distintos procesos y dimensiones que aparecen con mucha frecuencia como, por ejemplo: (a) *problematización o formulación de cuestiones*: incorporar cuestiones que permitan problematizar el conocimiento de los estudiantes o incorporar espacios donde los estudiantes puedan plantear nuevas cuestiones); (b) *combinación de representaciones:* explorar, formalizar y combinar diferentes representaciones de los objetos o conceptos matemáticos; (c) *conexiones intra- y extra-matemáticas*: establecer conexiones extra- o intra-matemáticas entre las cuestiones planteadas o las herramientas o modelos usados; (d) *evaluación* o *validación*: ofrecer herramientas para que los estudiantes puedan evaluar o validar sus propuestas. Este propuesta de descomposición en términos de dimensiones o categorías a considerar se basó en los trabajos desarrollados en dos marcos teóricos principales, el del enfoque ontosemiótico (ver, por ejemplo, Malaspina & Font, 2010; Font, 2007; Sala, 2016) y en de la teoría antropológica de los didáctico con la consideración de los momentos didácticos (Bosch & Gascón, 2014).

En segundo lugar, hay la suposición compartida que la CM será promovida y emergerá de la rica *interacción* e *integración de las distintas dimensiones* o *procesos*. Por ello, se propone evaluar el potencial de creatividad de los recursos analizados a través de la descripción y cuantificación de las distintas dimensiones. Partiendo así de este análisis, se propusieron las primeras herramientas de evaluación (cualitativa y cuantitativa) del potencial de CM, que fueron acordadas por toda la CdI local y particularizada para cada c-unidad que se iba a diseñar y evaluar. Es decir, una vez el equipo de diseñadores de una c-unidad concreta había acordado los criterios de diseño de la c-unidad, el equipo interno de investigadores analizaba las dimensiones o procesos que se proponían integrar (normalmente unas 6-8 dimensiones) y, a partir de aquí, se acordaban las dimensiones o procesos que se iban a considerar para su evaluación, así como sus indicadores.

Una vez finalizado el diseño, se solicitaba al equipo de evaluadores, que solía involucrar miembros de la CdI que no habían participado en el diseño, valorar cada dimensión con una escala entre 1 (= integración débil de la dimensión) y 4 (= integración fuerte de la dimensión) dependiendo del grado de acuerdo sobre la integración de esta dimensión en la forma final de la unidad. La Figura 1 muestra un ejemplo de evaluación del potencial de PMC en una c-unidad producida al finalizar el segundo ciclo, a partir de su descomposición en términos de los distintos procesos o dimensiones matemáticas.

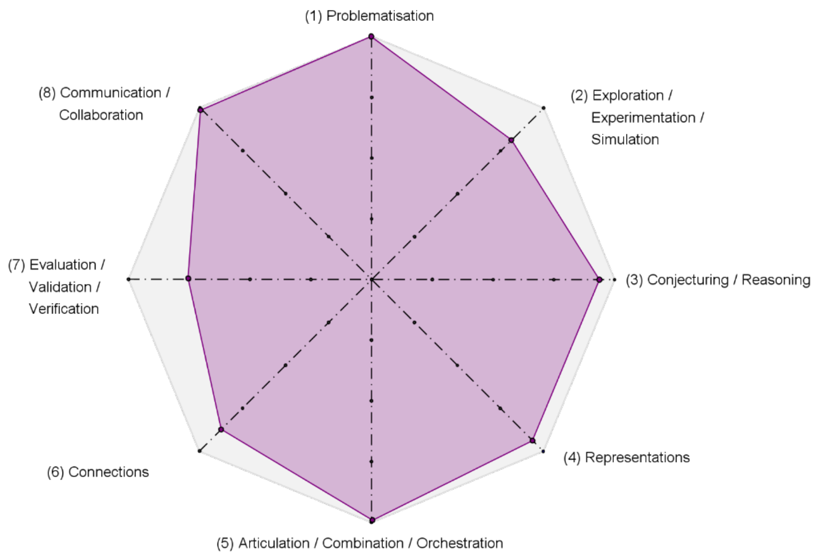


Figura 1. Dimensiones seleccionadas para la evaluación del potencial de CM de dos c-unidades y representación de su resultado cuantitativo

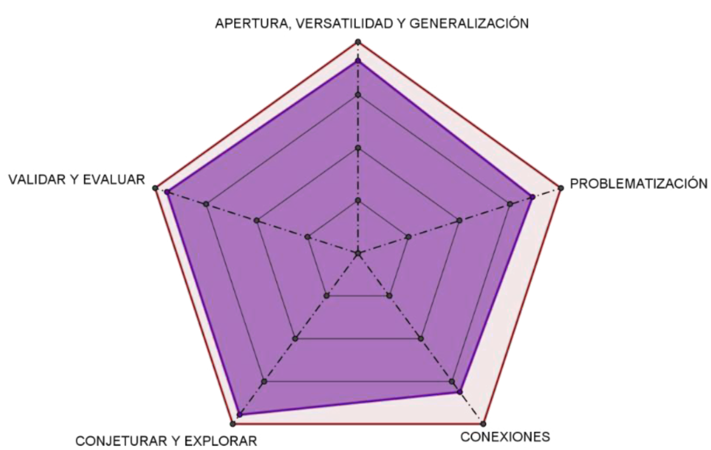
En ellas, cada vértice se obtiene a partir de la puntuación media de cada categoría (donde la puntuación mínima es el centro del polígono regular y la puntuación máxima es cada uno de sus vértices). Así, su representación nos permite fácilmente ver aquellas dimensiones que han sido mejor (o peor) integradas en el diseño final (a través de la longitud de las aristas del polígono) y la proporción del polígono interior respecto al exterior da una primera descripción gráfica-numérica del potencial del PMC de cada c-unidad. Además de esta valoración cuantitativa, se solicitaba a los evaluadores que argumentaran su valoración numérica, indicando el porqué de su decisión y situaran las actividades concretas de la c-unidad que acompañara a sus explicaciones. Estas evaluaciones aportaron información sobre, por un lado, qué caracterizaba cada una de las dimensiones, indicando nuevos puntos de mejora de las c-unidades y, por otro lado, permitía que la CdI construyera un significado e interpretación común sobre la CM y de cómo promoverla a través de diseño de tareas.

Enriquecimiento de las herramientas de evaluación de la CM

El segundo nivel de análisis y de desarrollo de las herramientas para evaluar el potencial de CM aparece ligado a otro de los objetivos del proyecto que ha sido que las CdI colaboraran dos a dos en la adopción y el rediseño de c-unidades, junto con su pre-evaluación, en el momento en el que se intercambian unidades entre los dos equipos distintos de diseñadores, y la post-evaluación, una vez terminado el rediseño de una c-unidad (para más detalles ver Barquero et al., 2016). Ante estas tareas de co-diseño y co-evaluación entre dos CdI, aparece la necesidad de confrontar y coordinar las herramientas de evaluación, propuestas independientemente por cada una de las CdI. Este segundo nivel de análisis llevó a buscar finalmente una herramienta común de evaluación del potencial de CM que tomó forma de cuestionario que combinaba, en la medida de lo posible, criterios comunes de evaluación propuestos por los cuatro equipos investigadores. El diseño de este cuestionario es una de las principales contribuciones frente a la cuestión de investigación planteada.

Este cuestionario quedó compuesto por tres secciones. La primera sección, que corresponde a la más extensa, se centra en evaluar en qué grado se integran los distintos procesos o dimensiones para la promoción de la CM y el PMC. Después de analizar cuáles eran las distintas dimensiones que las cuatro CdI destacaban e integraban en los diseños de c-unidades, se decidió integrar un total de cinco procesos o dimensiones y que se podrían etiquetar bajo las siguientes cinco categorías: una de más genérica, sobre el grado de (1) *Apertura* (de los problemas propuestos y herramientas previstas), *Versatilidad* (capacidad de adaptación de la c-unidad a distintos niveles) y *Generalización*; las otras categorías consideradas son (2) *Problematización*, (3) *Conexiones*, (4) *Conjeturar y Explorar*, y (5) *Validar y evaluar*. Cabe comentar que esta categorización reduce las dimensiones con las que el equipo español había trabajado en ciclos anteriores pero debemos destacar el importante trabajo en detectar y seleccionar aquellas que eran comunes en los cuatro equipos, eso sí que siempre permitiendo que cada equipo que usara el cuestionario de evaluación lo adaptara a la realidad de su CdI, es decir, añadiendo los indicadores que considerase o modificando la formulación de los existentes.

En la primera parte del cuestionario hay 14 ítems a valorar que corresponden a afirmaciones que definen los indicadores que caracterizan cada categoría. Por ejemplo, en relación a las (3) *Conexiones*, encontramos las siguientes ítems: “La c-unidad ofrece oportunidades a los usuarios de establecer conexiones entre contextos extra-matemáticos y las matemáticas" o "[…] establecer conexiones entre distintas representaciones de los conceptos matemáticos centrales en la unidad". O, en relación a (5) *Validar y Evaluar*, se pregunta si: "La c-unidad invita e integra herramientas a los estudiantes a sintetizar y evaluar el trabajo matemático realizado". En esta ocasión también se solicita que los miembros de la CdI que la evaluan, valoren cada ítem con una escala entre 1 (= integración débil) y 4 (= integración fuerte) dependiendo del grado de acuerdo sobre la integración de esta dimensión en la forma final de la unidad. En la siguiente figura encontramos la representación gráfica del pentágono resultante de dicha evaluación, además de las estadísticos numéricos resultantes de las respuestas obtenidas de los evaluadores. En este caso se trata de una c-unidad producida en el tercer ciclo por la CdI española (y una de los mejores valoradas por los evaluadores) sobre cómo se puedan usar las matemáticas y, en particular, la modelización geométrica, para indagar sobre a qué tipo de edificación correspondían unas ruinas romanas (ver referencias sobre la c-unidad). La segunda sección se refiere a los *aspectos sociales* con un total de tres ítems como, por ejemplo: "La c-unidad promueve la colaboración / cooperación / interacción con los otros usuarios"; o, "[…] facilita que los estudiantes desarrollen sus competencias comunicativas (escritas o orales)". Finalmente, la tercera sección se reserva para los *aspectos emocionales* que también impactan en cómo promover la CM, estos aspectos habían sido ya incluido por las otras CdI en etapas de evaluación anteriores y, en la elaboración de la herramienta común, se integraron con gran facilidad. Uno de los tres ítems aquí incluidos trata sobre si "La c-unidad integra una visión útil y funcional de las matemáticas para abordar problemas".



	Media	Mdn	IQR	Min	Max
Categoría 1	3,69	4	1	2	4
Categoría 2	3,54	4	1	3	4
Categoría 3	3,21	3	1	1	4
Categoría 4	3,83	4	0	3	4
Categoría 5	3,83	4	0	2	4

Figura 2. Potencial de CM en términos de procesos o dimensiones de la actividad matemática

Conclusiones

En este trabajo hemos mostrado dos aspectos sobre qué herramientas de evaluación se consideran para evaluar el potencial de creatividad matemática. En primer lugar, hemos destacado la progresiva construcción y transformación de estas herramientas en el marco del proyecto MCSquared, a lo largo de los procesos cíclicos de diseño de las c-unidades y de la constante interacción entre distintas CdI. En segundo lugar, hemos introducido brevemente cómo estas herramientas se han usado en la evaluación de distintas c-unidades y cómo su consideración ha permitido informar cuantitativamente y cualitativamente de aspectos muy novedosos, como es el caso de evaluar el potencial que un recurso innovador tiene en promover la creatividad matemática. Aunque debemos destacar un punto esencial que nos queda pendiente, el de comparar y contrastar la evaluación realizada en estos proceso de diseño, con la que se podría realizar cuando estas unidades llegan al aula. Este punto nos llevará en un futuro próximo a considerar nuevas y complejas cuestiones de investigación y a la necesidad de construir nuevas herramientas de evaluación de la CM que completaran el ciclo de diseño-evaluación-experimentación-evaluación esencial para entender el ámbito de validez de estos diseños y de los resultados de su evaluación.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación: MCSquared (European Union Seventh Framework Programme, FP7/2007-2013, n° 610467), EDU2015-64646-P (MINECO/FEDER, UE) y REDICE16-1520 (ICE-UB).

Referencias bibliográficas

Barquero, B., Richter, A., Barajas, M., & Font, V. (2014). Promoviendo la creatividad matemática a través del diseño colaborativo de c-unidades. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 157-166). Salamanca: SEIEM.

Barquero, B., Papadopoulos, I., Barajas, M., & Kynigos, C. (2016). Cross-case design in using digital technologies: two communities of interest designing a c-book unit. *Extended paper presented in TSG 36 Task design, ICME 12.* Hamburg (Germany).

Bolden, D., Harries, T. & Newton, D. (2010). Pre-service primary teachers' conceptions of creativity in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 73, 143–157.

Bosch, M., & Gascón, J. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). En A. Bikner-Ahsbahs, S. Prediger (Eds.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (pp. 67-83). Cham: Springer.

Fischer, G. (2001). Communities of Interest: Learning through the Interaction of Multiple Knowledge Systems. En S. Bjornestad, R. Moe, A. Morch & A. Opdahl (Eds.), *Proceedings of the 24th IRIS Conference* (pp. 1-14). August 2001, Ulvik, Department of Information Science, Bergen, Norway.

Font, V. (2007). Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular-general, representación, metáfora y contexto. *Educación Matemática*, 19(2), 95-128.

Leiken, R., Subotnik, R., Pitta-Pantazi, D., Singer, F.M., & Pelczer, I. (2013). Teachers' views on creativity in mathematics education: an international survey. *ZDM Mathematics Education*, 45, 309–324.

Malaspina, U., & Font, V. (2010). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics,* 75(1), 107-130.

MC Squared project (s. f. a). Mathematical Creativity Squared (M C Squared). Recuperado de http://www.mc2-project.eu/

MCSquared project (s. f. b). "Viral Behaviour of Social Networks" c-book unit. Recuperado de http://mc2-project.eu/index.php/technology-and-production/c-books/101-viral-behaviour-of-social-networks

MC Squared project (s. f. c). "How Mathematics can be used to support Archeology?" c-book unit. Recuperado de http://mc2-project.eu/index.php/blog/160-how-mathematics-can-be-used-to-support-archeology

Papadopoulos, I., Barquero, B., Richter, A., Daskolia, M., Barajas, M., & Kynigos, C. (2015). Representations of creative mathematical thinking in designer communities producing c-book units. In K. Krainer and N. Vondrova (Eds.), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2381-2387). Prague.

Sala, G. (2016). Competència d'Indagació matemàtica en contextos històrics a Primària i Secundària. Tesis doctoral no publicada. Universitat de Barcelona

ALGUNOS PROCESOS MATEMÁTICOS MANIFESTADOS EN LA PRÁCTICA MATEMÁTICA ARGUMENTATIVA DE ALUMNOS DE SECUNDARIA

María del Carmen Fajardo Araujo, Víctor Larios Osorio, Ángel Homero Flores Samaniego
Universidad Autónoma de Querétaro, Universidad Nacional Autónoma de México. (México)
carmulita_@hotmail.com, vil@uaq.mx, ahfs@servidor.unam.mx

RESUMEN: El objetivo de este trabajo es mostrar algunos de los procesos matemáticos manifestados en la práctica argumentativa. El análisis de los argumentos tomó en cuenta una categorización de esquemas de argumentación y los procesos matemáticos se identificaron desde la clasificación propuesta por el Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción Matemática. El experimento de enseñanza se llevó a cabo con alumnos de tercer grado de tres secundarias públicas del estado de Querétaro. Los resultados indican que los alumnos recurrieron a procesos como: la particularización, representación, entre otros, en argumentos mayormente de tipos simbólicos y empíricos-perceptuales.

Palabras clave: práctica argumentativa, procesos matemáticos, argumentos.

ABSTRACT: The aim of this paper is to show some of the mathematical processes involved in argumentative practice. The analysis of the arguments took into account a categorization of argumentation schemes, and the mathematical processes were identified from the classification proposed by the Mathematical Education Onto-semiotic Approach. The teaching experiment was carried out with third- grade students from three public secondary schools in the state of Querétaro. The outcomes show that the students resorted to processes such as: particularization, representation, among others, in arguments mainly of symbolic and empirical-perceptual types.

Key words: argumentative practice, mathematical processes, argument.

Introducción

El campo de formación de pensamiento matemático para educación básica prioriza el uso del razonamiento como herramienta fundamental para la resolución de problemas, además enfatiza la formulación de argumentos para explicar resultados. La competencia matemática de validar procedimientos y resultados también resalta la importancia de que el alumno adquiera confianza para explicar y justificar procedimientos y soluciones encontradas, mediante argumentos a su alcance que se orienten al razonamiento deductivo y la demostración formal (SEP, 2011). Los propósitos de las matemáticas para educación secundaria tendrán como resultado, entre otros, también el uso de la justificación para propiedades y fórmulas.

Dada la importancia mencionada que tiene el desarrollo del razonamiento deductivo y la elaboración de argumentos, este trabajo tiene la intencionalidad de mostrar algunos procesos matemáticos de alumnos de tercer grado de secundaria evidenciados en tipos de argumentos construidos en una "actividad de cierre" del tema Homotecia directa e inversa del eje Forma, Espacio y Medida.

Marco Teórico

Las respuestas (argumentos) de los alumnos se categorizaron, con base en la propuesta de esquemas de argumentación hecha por Flores (2007), quien define como *práctica argumentativa* al "conjunto de acciones y razonamientos que un individuo pone en juego para justificar o explicar un resultado o para validar una conjetura nacida durante el proceso de resolución de un problema" (Flores, 2007, p. 48) los siguientes tipos de esquemas se proponen:

- *Autoritarios*, donde sus argumentaciones se apoyan de las afirmaciones hechas por una autoridad (profesor, libro de texto).
- *Simbólicos*, donde se utiliza un lenguaje matemático y símbolos de manera superflua y poco consistente sin llegar realmente a las conclusiones deseadas, el sujeto puede mencionar conceptos poco claros o inventados.
- *Fácticos*, en los que se hace un recuento de lo que se hizo o se repiten hechos evidentes de una situación a manera de explicación o justificación de algún resultado, como una serie de pasos que parecen un algoritmo.
- *Empíricos*, en los cuales el apoyo está en hechos particulares (*inductivos*) o en un dibujo (*perceptuales*), donde este constituye un argumento por sí mismo y no un apoyo para visualizar el argumento.
- *Analíticos*, donde se sigue una cadena deductiva, sin que por ello se llegue forzosamente a una conclusión válida.

Respecto a la identificación de los procesos matemáticos usados en la práctica argumentativa, se ha recurrido a algunos de los que propone el Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción Matemática [EOS]. El Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción Matemática [EOS] es un modelo teórico compuesto por cinco niveles que pretenden describir, explicar y valorar los procesos de instrucción matemática (Font, Planas y Godino, 2010). El modelo tiene herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa que ayuda a responder ¿qué ha sucedido y por qué?

Los cinco niveles para el proceso de instrucción son los enlistados a continuación, pero es precioso mencionar que este estudio sólo tomó en cuenta el primero y segundo nivel.

1. Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas.
2. Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.
3. Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.
4. Identificación del sistema de normas y metanormas.
5. Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

El primer nivel pretende estudiar las prácticas matemáticas realizadas en un proceso de estudio matemático, tomando en cuenta tanto al agente que realiza la práctica, como el contexto en que se ejecuta dicha práctica. Dado que el agente realiza acciones para la resolución de situaciones problema, hay que considerar otros aspectos como valores, intenciones, objetos y procesos matemáticos.

El segundo nivel de análisis se enfoca en los objetos y procesos que intervienen en las prácticas, así como los que emergen de ellas. Este nivel de análisis describe la complejidad ontosemiótica de las prácticas matemáticas como factor explicativo de los conflictos semióticos.

Los procesos según el EOS están relacionados entre sí, agrupados por familias que tienen características en común si se comparan dos a dos, pero no hay ninguna característica común a todos ellos (Rubio, 2012). Los procesos duales son los ilustrados en el decágono:

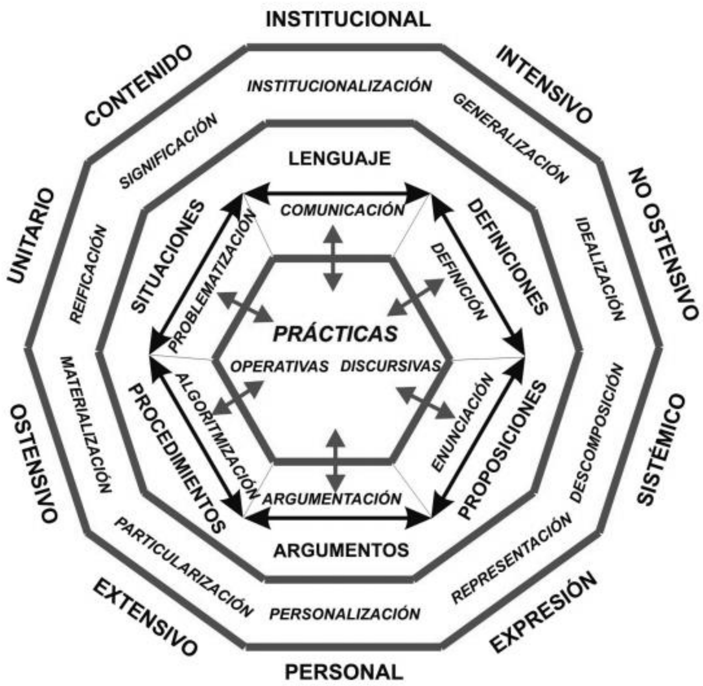


Figura1. Modelo ontosemiótico del conocimiento matemático

Los procesos que se tomaron en cuenta debido a las respuestas dadas por los alumnos son los siguientes:

- *Personalización,* significado que un sujeto atribuye a un objeto matemático y que difiere ya sea de un significado de otro sujeto o bien del significado del profesor.
- *Generalización,* abstracción que permite obtener una clase o conjunto de objetos.
- *Particularización,* objeto matemático individualizado.
- *Significación,* interpretación de todos los objetos matemáticos y de la situación problema general.
- *Representación,* expresiones gráficas o escritas de un objeto matemático.

Metodología

El experimento de enseñanza se realizó en tres secundarias públicas del estado de Querétaro en la modalidad de secundarias generales y telesecundarias, con 42 alumnos de tercer grado en el horario asignado para la clase de matemáticas, en computadoras con el software Geogebra. La información se recabó en hojas de trabajo, audios y se rescataron los archivos construidos en Geogebra por los alumnos.

El trabajo en la secundaria general se realizó de manera individual en una computadora de escritorio durante diez sesiones de 40 minutos en el horario de la clase de matemáticas en un laboratorio de cómputo. Estos alumnos no habían trabajado con algún software de matemáticas, por lo que desconocían el funcionamiento de Geogebra, así que el investigador les orientó en las construcciones requeridas en las actividades.

Los alumnos de telesecundaria del segundo grupo de aplicación habían trabajado con el software Geogebra, pero sólo para graficar funciones. El número de sesiones de trabajo fueron diez, durante el horario designado para la clase de matemáticas, en computadoras portátiles. Las construcciones de las actividades las orientó el investigador pues los alumnos manifestaron que usaban el software sólo para graficar, por lo que desconocían los elementos solicitados en las construcciones.

El tercer grupo de aplicación también fue de la modalidad de telesecundarias, donde los alumnos no habían trabajado con el software para matemáticas. Se formaron 14 parejas para elaborar las construcciones en computadoras portátiles, durante doce sesiones en el horario para la clase de matemáticas. A este grupo también se les orientó para la realización de las construcciones.

Las hojas de trabajo diseñadas, relacionaron temas del eje Forma, Espacio y Medida con la intencionalidad de que los alumnos paulatinamente fueran reforzando conocimientos para generar argumentos. Lo que se llamó "actividad de cierre" constó de dieciséis preguntas y abordó el tema de Homotecia, tanto directa como inversa, que reunió conceptos construidos en las actividades previas. Para el desarrollo de esta actividad se les proporcionó a los alumnos un archivo en Geogebra elaborado por el investigador, donde a través de movimientos y rastros dirigidos con preguntas, debían observar propiedades de figuras homotéticas cuando $k<0$, $k>0$, *k entre 0 y 1*, $k=1$ y $k=0$ para elaborar argumentos.

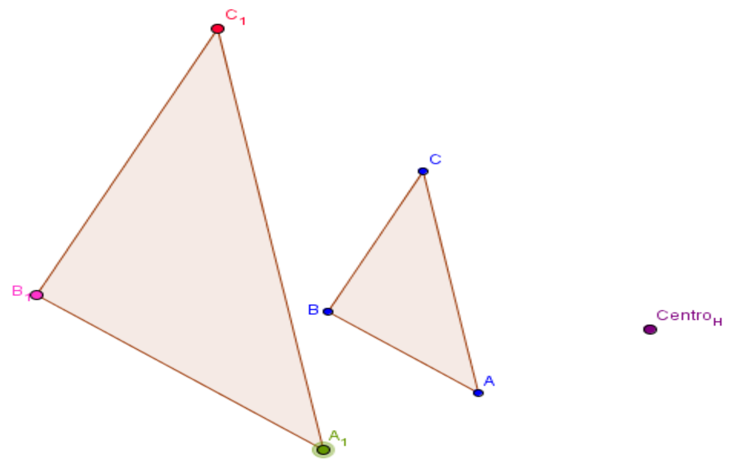


Figura 2. Construcción para actividad de Homotecia

Resultados y Discusión

El análisis de los resultados sólo se hizo a quince de las dieciséis preguntas que conformaron la actividad. Una pregunta fue omitida del análisis debido a la regularidad con que se presentó la respuesta en los alumnos, por lo que se consideró intrascendente para ser presentada en los resultados.

Las tablas muestran la frecuencia de aparición de esquemas de argumentación y de procesos matemáticos en los argumentos elaborados por los alumnos. Es importante aclarar que el objetivo de la investigación no fue encontrar argumentos válidos, sino más bien identificar qué características tienen éstos, con base en las que descritas por Flores (2007).

Tabla 1. Frecuencia de Esquemas de Argumentación

Actividad	Esquema de Argumentación
Homotecia directa e inversa	Simbólico: 47% Empírico Perceptual : 24% Analítico: 21% Autoritario: 1% Sin esquema: 7%

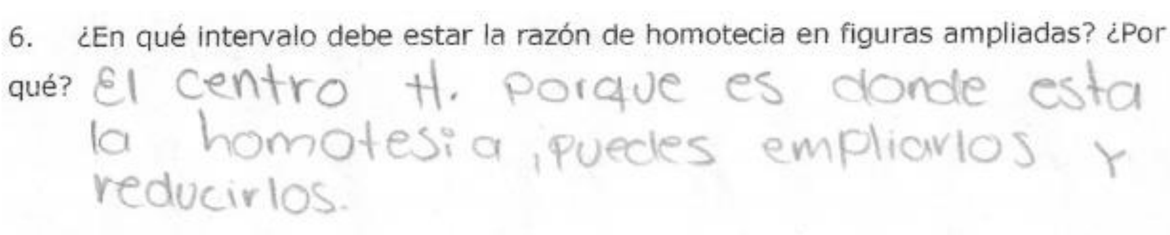

6. ¿En qué intervalo debe estar la razón de homotecia en figuras ampliadas? ¿Por qué? El centro H. porque es donde esta la homotesia, puedes empliarlos y reducirlos.

Figura 3. Ejemplo de esquema simbólico

Las figuras 3 y 4 son un ejemplo de los argumentos de los alumnos, como la tabla lo indica, la mayoría de las respuestas fue clasificada como *esquema simbólico*, la respuesta que se esperaba diera el alumno era *k>1*, sin embargo la significación que el alumno le da a la palabra intervalo, lo remite a concluir de manera errónea que el *centro H*, es donde debe estar la razón de homotecia para que pueda haber una figura homotética ampliada. En la mayoría de los casos donde se categorizaron los argumentos de los alumnos en esquemas simbólicos se observa que hay inadecuadas concepciones de los objetos matemáticos, lo que los lleva a fracasar al momento de redactar su argumento.

8. Considera las observaciones anteriores para poder responder: ¿Qué propiedades geométricas se conservan en las figuras homotéticas cuando la razón de homotecia es mayor que cero? se van ampliando y no desaparecen

Figura 4. Ejemplo de esquema empírico-perceptual

La figura 4 representa un esquema empírico perceptual, porque alude a las características del archivo que se les proporcionó, ya que el triángulo homotético se movía por el vértice A_1. Las preguntas previas a la que se muestra en la figura, tenían la intención de que el alumno identificara las características de las figuras homotéticas para *k*>1 y *k* entre 0 y 1, entonces esa pregunta reunía esos dos casos y a su vez los distinguía. Sin embargo, el alumno toma como propiedades geométricas lo que ve en la construcción, así que ésta no cumple su función de apoyo para elaborar el argumento, sino que *es* el argumento.

Tabla 2. Frecuencia de Procesos Matemáticos

Actividad	Procesos Matemáticos
Homotecia directa e inversa	Generalización: 32% Personalización: 20% Particularización: 18% Significación: 15% Representación: 7% Sin proceso: 7% Descomposición: 1%

Para ejemplificar los procesos matemáticos se tomaron los casos de las figuras 4 y 5. El proceso de generalización predominó en las respuestas de los estudiantes, parece que el alumno después de discernir entre los casos de homotecia directa e inversa, puede identificar las características de la figura homotética con k=1, se puede apreciar que usa adecuadamente la terminología requerida para establecer el argumento. El caso descrito se podría catalogar como exitoso, sin embargo es importante mencionar que aunque predominó el proceso de generalización, no significa que los demás casos tengan todas las características de éste, hay algunos en donde se aprecian conceptos poco claros, como el emplear el término *igual* como sinónimo de *congruencia.*

16.Describe las características de las figuras homotéticas cuando la razón de homotecia es igual a 1. La figura homotetica es congruente con la original

Figura 5. Ejemplo de proceso matemático de generalización

El ejemplo de la siguiente figura corresponde al proceso de personalización, las preguntas que anteceden a ésta refieren a la observación de la figura homotética cuando cruza el centro de homotecia, entonces el alumno tenía que responder qué sucedía con la figura. Una vez mencionada la característica de *inversión*, debían establecer la razón de homotecia. En este caso aunque el alumno reconoce previamente que la figura se invierte y también pudo identificar las figuras homotéticas ampliadas, el significado que le da a la razón de homotecia para figuras invertidas no corresponde al que se establece como válido.

¿Cómo es la razón de homotecia cuando las figuras presentan esta característica? Es mayor que cero

Figura 6. Ejemplo de proceso matemático de personalización

A manera de resumen, los resultados obtenidos muestran que los alumnos mayormente recurren a argumentos simbólicos y empírico-perceptuales, donde los procesos de personalización y particularización juegan un papel importante en cómo responden. La significación y la representación dependen también de las interpretaciones que los alumnos tienen construidas. Los alumnos cuando generalizan, otros procesos como la personalización, la significación y la representación, influyen para la construcción de sus argumentos, es decir que un proceso matemático no está solo, sino que hay alrededor otros que determinan el éxito o el fracaso a la tarea. En la mayoría de los casos analizados, aunque aparecen esquemas analíticos y empíricos, que en términos de Flores (2007) es posible detectar el uso de un razonamiento deductivo en estos, ello no significó que el razonamiento fuera correcto.

Comentarios finales

El introducir una herramienta tecnológica como el software Geogebra, evidenció las dificultades de los alumnos para emplear éste como un apoyo que les ayude a construir el argumento, ya que los alumnos usaron elementos lingüísticos e icónicos propios de Geogebra, Sandoval (2009) señala que esos problemas se deben al uso de una sintaxis diferente a la del lápiz y papel, a esta afirmación se extiende también a la semántica del software. Esto quiere decir que los significados personales que aluden al uso del software dependen en buena medida del significado que las instituciones (en el sentido de Godino y Font, 2007) le otorgan, de manera que si los significados institucionales cambian, es muy probable que el significado de los alumnos se reoriente a otras aplicaciones del software, no sólo al de la graficación.

Los procesos matemáticos aquí mostrados no son los únicos que pueden aparecer en la práctica argumentativa, sin embargo son los que se manifestaron mayormente en las respuestas de los alumnos con los que se trabajó. El identificar ciertos procesos matemáticos pretende aportar elementos que ayuden a reforzar aquellos que sean útiles para desarrollar la argumentación de tal manera que también los esquemas de argumentación cambien. El objetivo sería avanzar hacia los argumentos analíticos, donde la deducción se hace presente para construir el argumento, enriqueciendo a su vez la apropiación del lenguaje matemático, de tal manera que aquellos procesos presentes en el alumno como la significación, personalización o representación del objeto matemático, se vayan modificando en el caso de que tengan concepciones erróneas de éstos o ampliando para ser aplicados a nuevos conjuntos de objetos.

Referencias bibliográficas

CIAEM, G. d. (Compositor). (Mayo, 2015). Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.

Lobo da Costa, N. M., Ando, R. d., & Magni, R. J. (2015). Universidade e Escola em Colaboração para Investigar Práticas Avaliativas sobre Funções no Ensino Médio. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* .

Cury, H. N. (2015). *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos* (2 ed.). Belo Horizonte: Autêntica.

Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística.* Buenos Aires.

Denzin, N. (1988). Triangulation in educational research. En J. Keeves, *Educational research, methodology and measurement: An International handbook* (págs. 318-322). Oxford: Pergamon Press.

D'Ambrosio, U. (1999). Literacy, matheracy and technocracy: a trivium for today. *Mathematical thinking and learning , 1* (2), 131–153.

Flores, Á. (2007). *Prácticas argumentativas y esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del Bachillerato* . México.

Flores, Á. (2007). Esquemas de Argumentación en Profesores de Matemáticas de Bachillerato. *Educación Matemática* , 63-98.

Font, V., Planas, N., & Godino, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje* , 89-105.

Godino, J., & Font, V. (2007). *Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos*. Recuperado el 13 de febrero de 2016, de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/anexo1_significados%20sistemicos.pdf

Greenwood, D. J., & Levin, M. (2000). Reconstructing the relationships between universities and society through action research. En N. Denzin, & Y. Lincoln (Edits.), *Handbook of qualitative research* (2ª ed., págs. 85-106). Thousand Oaks, California: Sage Publications Inc.

Haydt, R. C. (2008). *Avaliação do Processo Ensino-Aprendizagem* (6ª ed.). São Paulo: Ática.

Imbernón, F. (2000). *Formação docente e profissional: formar-se para a mudança e a incerteza.* São Paulo: Cortez.

Imbernón, F. (2009). *Formação Permanente do Professorado: novas tendências.* São Paulo: Cortez.

INEGI. (2015). *INEGI.* Recuperado el 2015

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación México. (30 de 04 de 2015). *INEE*. Obtenido de http://www.inee.edu.mx/index.php/acerca-del-inee

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education , 18* (1), págs. 3-14.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Relime , Número Especial*, 103–129.

Rubio, N. (2012). Competencia del profesorado en el análisis didáctico de práticas, objetos y procesos matemáticos.

Sandoval, I. (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación Matemática , 21* (1), 5-27.

Secretaría de Educación Pública. (2013). *Programa Sectorial de Educación 2013-2018.* México, D. F.: Secretaría de Educación Pública.

Secretaría de Educación Pública. (Diciembre de 2013). *Secretaría de Educación Pública.* Obtenido de http://www.sep.gob.mx/es/sep1/programa_sectorial_de_educacion_13_18#.VUrnO_I_Oko

SEP. (2011). *Planes de Estudios 2011.* México D.F.: SEP.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica.* (P. Valero, Trad.) Bogotá: Una Empresa Docente (Trabajo original publicado en 1994).

CONEXIONES MATEMÁTICAS QUE ESTABLECEN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO AL RESOLVER TAREAS DE DERIVADA Y DE INTEGRAL EN EL REGISTRO ALGEBRAICO

Javier García-García, Crisólogo Dolores-Flores
Universidad Autónoma de Guerrero (México)
libra_r75@hotmail.com, cdolores2@gmail.com

RESUMEN: El presente escrito tiene por objetivo identificar las conexiones matemáticas que establecen tres estudiantes de bachillerato cuando resuelven tareas de la derivada y la integral en el registro algebraico. Para la colecta de datos realizamos entrevistas basadas en tareas, previamente validadas, y utilizamos un marco conceptual para caracterizar las conexiones matemáticas identificadas. Los resultados dan cuenta que emergen dos tipos de conexiones intramatemáticas: procedimental y el uso de representaciones diferentes. Asimismo, identificamos cinco temas: la derivada de $f(x) = ax^n$ es $f'(x) = anx^{n-1}$, la integral de $f'(x) = ax^n$ es $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$, en una integral definida al límite superior evaluado en la antiderivada de $f'(x)$ se le resta el límite inferior evaluado en la misma, el resultado de una integral definida significa área bajo una curva y, la derivada de la integral de una función (o viceversa) se obtiene siguiendo la jerarquía de las operaciones.

Palabras clave: Derivada, Integral, Conexiones Matemáticas, Bachillerato

ABSTRACT: This paper aims to identify the mathematical connections established by three high- school students when they solve tasks of the derivative and the integral in the algebraic register. To collect data we perform task-based interviews, previously validated, and use a conceptual framework to characterize the identified mathematical connections. The outcomes show that two types of intra-mathematical connections emerge: the one, and the use of different representations. We also identified five topics: the derivative of $\mathrm{f(x) = ax^n}$ is$\mathrm{f'(x) = anx^{n-1}}$, the integral $\mathrm{f'(x) = ax^n}$ is $\int \mathrm{ax^n dx} = \frac{\mathrm{ax^{n+1}}}{\mathrm{n+1}} + \mathrm{C}$ in an integral defined to the upper limit evaluated in the anti-derivative of f '(x) is subtracted the lower limit evaluated in it, The result of a definite integral means area under a curve, and the derivative of the integral of a function (or the other way around) is obtained by following the hierarchy of operations.

Key words: Derivative, Integral, Mathematical Connections, high school

Introducción

El currículum de bachillerato mexicano correspondiente a los cursos de Cálculo Diferencial e Integral plantea que en la Educación Media Superior se "debe dejar de lado la memorización sin sentido de temas desarticulados y la adquisición de habilidades relativamente mecánicas (DGB, 2013a, 2013b, p. 6)". En oposición a ello, proponen que se debe promover el trabajo interdisciplinario, similar a la forma en que se presentan los hechos en la vida cotidiana del estudiante. Por tanto, las conexiones son una demanda actual de los currículums tanto mexicano, como de otros países como: Sudáfrica (Mwakapenda, 2008) y Estados Unidos de Norteamérica (NCTM, 2014). Es en este último país donde empezaron a tomar relevancia desde que fueron incorporadas como un estándar dentro del currículum de la matemática escolar.

Las conexiones matemáticas son importantes porque permiten ver a las matemáticas como un campo integrado, y no como una colección de partes separadas (Evitts, 2004; Mwakapenda, 2008; Jaijan y Loipha, 2012). Ayudan a establecer relaciones entre las matemáticas y otras asignaturas disciplinares o con situaciones de la vida real. Deben ser desarrolladas en los estudiantes porque les permitiría mejorar su compresión matemática (Mhlolo, 2012; Eli, Mohr-Schroeder y Lee, 2011). Por ello, asumimos que el aprendizaje de las matemáticas está fuertemente ligado con las conexiones que los alumnos logren establecer entre nociones, conceptos, procedimientos y representaciones.

La literatura en nuestro campo de estudio, la Matemática Educativa, da cuenta de diversos estudios que se han realizado tomando como objeto a las conexiones matemáticas (Yoon, Dreyfus & Thomas, 2010; Haciomeroglu, Aspinwall & Presmeg, 2010; Lockwood, 2011; Mhlolo, Venkat & Schäfer, 2012; Jaijan & Loipha, 2012; Moon, Brenner, Jacob & Okamoto, 2013; Eli, Mohr-Schroeder & Lee, 2011). Por ejemplo, Mhlolo et al. (2012) y Jaijan & Loipha (2012) exploran la naturaleza y la calidad de las conexiones que promueven los profesores en álgebra; Moon et al. (2013) investigan las dificultades cognitivas de los futuros profesores cuando realizan conexiones entre representaciones; Eli et al. (2011) buscan las conexiones que los profesores hacen en la resolución de problemas en Geometría; Lockwood (2011) explora las conexiones hechas por los estudiantes universitarios en la resolución de problemas de conteo.

Por otro lado, identificamos que dos de los conceptos claves en Cálculo son la derivada y la integral. La conexión entre estos problemas como procesos inversos la descubrió Isaac Barrow (1630-1677) [Stewart, 2010]; en el plano matemático, esa relación está descrita por el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). Sin embargo, cuando son objeto de enseñanza-aprendizaje es posible que se haga o no evidente esa conexión, sobre todo cuando el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral se estudian de manera separada en bachillerato en México, incluso en el nivel superior (en algunos programas educativos).

Por lo expuesto anteriormente, identificamos la importancia de estudiar las conexiones matemáticas, por un lado, y los dos conceptos claves del Cálculo, por el otro; por considerar que son un contenido matemático que se aborda desde el bachillerato y que se formaliza en el nivel superior en México. En este escrito damos respuesta a la siguiente pregunta de investigación: ¿qué conexiones matemáticas establecen tres estudiantes de bachillerato cuando resuelven tareas de la derivada y la integral en el registro algebraico? Y como objetivo, caracterizar esas conexiones que los estudiantes establecen.

Marco conceptual

Businskas (2008) concibe a las conexiones matemáticas como aquellas relaciones sobre la base de las cuales está estructurada la matemática y son independientes del estudiante y, por otro lado, como las relaciones a través de las cuales los procesos del pensamiento construyen la matemática. Por su parte, Evitts (2004) señala que el conocimiento conectado se puede describir en términos de su construcción personal y significado, la multiplicidad de vínculos entre los conceptos y procedimientos, y el poder derivado de conocer las conexiones. De este modo los conceptos quedan constituidos por una red de definiciones y de propiedades que los relacionan (De Gamboa & Figueiras, 2014), que pueden utilizarse para vincular los temas matemáticos o bien como una relación causal, lógica o de interdependencia entre dos entidades matemáticas.

Se pueden hacer conexiones con el mundo cotidiano, con los conocimientos previos, con los contextos familiares dentro y fuera de la escuela, con diversos temas matemáticos, con otras disciplinas, con el pasado y el futuro (Begg, 2001; Presmeg, 2006; NTCM, 2014). Las conexiones matemáticas también permiten identificar y establecer relaciones entre los problemas, en cuanto a lenguaje matemático y registro de representación semiótica se refiere, y reconocer los contextos (conceptual y global) de los problemas, de manera que permita una influencia mutua dando lugar a respuestas coherentes asociadas a los problemas (Garbín, 2005).

En este trabajo entendemos a las conexiones matemáticas como un proceso cognitivo mediante el cual una persona relaciona o asocia dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con otras disciplinas o con la vida real. Éstas son funcionales en el momento de resolver situaciones intramatemáticas (que se da entre distintos dominios de las matemáticas) y extramatemáticas (emerge entre las matemáticas y otras disciplinas o con la vida real); la forma de identificarlas es mediante los argumentos verbales o mímicos que utiliza al estudiante cuando resuelve actividades concretas.

Para estudiar las conexiones matemáticas elaboramos un marco teórico preliminar, que por cuestiones de espacio no presentamos, pero que se puede consultan en García (2016). Este modelo considera dos tipos de conexiones generales: extramatemáticas e intramatemáticas. Dentro de la primera, se identifica la conexión de modelado y dentro de las intramatemáticas, reconocemos la conexión entre conceptos matemáticos, reversibilidad, uso de diferentes representaciones, la inclusión, la generalización y la procedimental. Este marco preliminar lo elaboramos considerando algunos resultados de Evitts (2004) y Businskas (2008), pero ampliado para los propósitos de un estudio más general, actualmente en curso.

Metodología

Para la colecta de datos utilizamos las entrevistas basadas en tareas, que de acuerdo a Goldin (2000), involucra mínimamente un sujeto y un entrevistador quienes interactúan en relación con uno o más tareas presentado al sujeto en una forma pre planeada. Según Assad (2015), el protocolo de la entrevista puede estar estructurado con indicaciones y las respuestas previstas de antemano por el entrevistador, o puede ser semi-estructurada, lo que permite que el entrevistador juzgue la respuesta adecuada al razonamiento matemático de los estudiantes. En este estudio, el protocolo de la entrevista fue semi-estructurada.

Los datos que se reportan en este escrito corresponden a las producciones de tres estudiantes (de 25 participantes en el proyecto general) de bachillerato del estado de Guerrero, México, referente al registro algebraico. La entrevista tuvo una duración promedio de 40 minutos, se desarrolló en un día hábil y con la participación voluntaria de los estudiantes. El único requisito fue éstos hayan cursado y aprobado previamente Cálculo (Diferencial e Integral).

Para analizar los datos utilizamos análisis temático (Braun & Clarke, 2006). El objetivo de un análisis temático es identificar patrones de significados (temas) a través de un conjunto de datos proporcionados por las respuestas a la pregunta de investigación planteada. Los patrones se identifican a través de un proceso riguroso de familiarización de datos, codificación de datos, el desarrollo del tema y revisión.

Análisis de los datos

Dado que un tema representa cierto nivel de *patrón* respuesta o significado dentro del conjunto de datos (Braun y Clarke, 2006), para nuestros propósitos lo asociamos a un patrón en las respuestas de los tres estudiantes (Ali, Juan y María), cuyas producciones analizamos para este estudio. Es decir, que las conexiones matemáticas identificadas fueran comunes en los tres. Esta convención, nos permitió identificar un total de cinco temas. Los cuales se presentan enseguida:

1. La derivada de $f(x) = ax^n$ es $f'(x) = anx^{n-1}$

Esta conexión indica que los estudiantes realizan una conexión procedimental para hallar la derivada de la función algebraica $f(x) = 3x^2$ proporcionada a ellos. Se les pidió calcular la derivada y al mismo tiempo justificar el procedimiento seguido si es que no lo declaraban (ver extracto de la entrevista a Ali):

> Entrevistador: ¿Puedes calcular la derivada de esta expresión (se le señala la función $f(x) = 3x^2$)?
>
> Ali: Sí (hace los cálculos)
>
> Entrevistador: ¿Qué hiciste para obtener la derivada?

Ali: […] multipliqué el 3 por 2 y resulta 6 como coeficiente y… al cuadrado de la equis se le resta la unidad; nos queda equis a la uno.

Si bien Ali no declara explícitamente la fórmula, su argumento permite inferir el uso de ella.

2. La integral de $f'(x) = ax^n$ es $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$

Este tema también implica una conexión procedimental. Los tres estudiantes, para encontrar la antiderivada de la función $f'(x) = 6x$ recurren a la fórmula para integrar una función algebraica polinomial (ver extracto de la entrevista). Ninguno de ellos percibe que la antiderivada es la función que se les pidió derivar previamente. En este caso, parecen no percibir la reversibilidad entre la derivada y la integral.

Entrevistador: ¿Puedes encontrar la integral de la derivada que obtuviste anteriormente? (se le indica $f'(x) = 3x^2$)

Ali: [Hace el cálculo correspondiente]

Entrevistador: ¿Podrías explicarme qué hiciste para hallar la respuesta?

Ali: para empezar, le agregué el diferencial, después este seis [señala el 6 de 6*x*] lo podemos sacar [del símbolo de integral] como coeficiente que es; después se aplica una regla que es cuando equis está elevada a cierta potencia para integrarlo se le suma la unidad al exponente que tiene [la variable], en este caso es uno más no y resulta equis cuadrada y de ahí, es dividido entre el mismo exponente que es uno más uno. Por eso resultó equis cuadrada sobre dos, pero como teníamos el seis, se multiplica y en este caso seis sobre dos es tres y, equis cuadrada y se le agrega la constante de integración.

3. En una integral definida al límite superior evaluado en la antiderivada de $f'(x)$ se le resta el límite inferior evaluado en la misma

Esta conexión es la manifestación del uso del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) intrínsecamente relacionado con el siguiente tema. En particular, los estudiantes utilizan el hecho de que si $f: [a, b] \rightarrow R$ integrable es continua en el intervalo [*a*, b] y g: [*a*, b]→R, es una antiderivada de *f*, es decir satisface $g'(x) = f(x)$, entonces: $\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a)$. Al igual que los temas anteriores, este es de tipo procedimental.

4. El resultado de una integral definida significa área bajo una curva

Los estudiantes al calcular $\int_1^x 6x\,dx$ y encontrar como resultado $3x^2 - 3$; logran asociar esto con el área bajo una curva, desde *x* = 1 hasta un valor de *x* "desconocido" (ver extracto de la entrevista a María).

Entrevistador: ¿puedes desarrollar este cálculo (se le indica $\int_1^x 6xdx$)?

María: (después de utilizar el TFC escribe como resultado $3x^2 - 3$)

Entrevistador: ¿qué crees que signifique ese resultado?

María: el área que se encuentra entre este intervalo (señala los límites 1 y x)

Entrevistador: ¿bajo qué función?

María: bajo esta (señala la función integrando: $f(x) = 6x$)

Esta asociación entre un resultado algebraico con uno geométrico; implica una conexión del tipo: representaciones diferentes. Este tema, así como el 3, dan cuenta del uso parcial del TFC.

5. La derivada de la integral de una función (o viceversa) se obtiene siguiendo la jerarquía de las operaciones

Este tema da cuenta que los tres estudiantes sólo conciben al TFC en un sentido, pero no para reconocer la reversibilidad entre la derivada y la integral. Por ello, cuando se les pide resolver $\frac{d}{dx}[\int 3x^2dx]$ y $\int \left[\frac{d}{dx}3x^2\right]dx$ optan por desarrollar primero la operación dentro del corchete y posteriormente la operación indicada fuera de ella (ver extracto de la entrevista a Juan). Esto provoca que en el primer caso obtengan que el resultado es $3x^2$, pero en el segundo $3x^2 + C$. Esta conexión también es del tipo procedimental.

Entrevistador: [...] ahí se te indica otra operación ¿entiendes la simbología (se le señala $\frac{d}{dx}[\int 3x^2dx]$)?

Juan: tengo que... primero tendría que integrar esto (señala $3x^2$) y el resultado lo tendría que derivar (señala el d/dx)

Entrevistador: bien. ¿Lo puedes resolver?

Juan: sí (integra y luego deriva correctamente)

Entrevistador: ¿crees que exista otra forma de encontrar el resultado sin necesidad de realizar esas operaciones?

Juan: no sé, primero tendría que hacer la operación que está indicada entre los corchetes, para después hacer la operación que está afuera

Entrevistador: enseguida se presenta otra operación (se le señala $\int \left[\frac{d}{dx}3x^2\right]dx$) ¿qué te indica?

Juan: que tengo que hacer lo que está entre corchetes y después sacar su integral

Entrevistador: ok. ¿Puedes encontrar el resultado?

Juan: (deriva y luego integra correctamente. Su resultado es$3x^2 + C$). Creo que sería ese el resultado

Juan refiere que ambas operaciones son distintas porque el orden en que se realizan la deriva y la integral es diferente en cada caso, por ello, en la segunda el resultado lleva una constante de integración.

Discusión y conclusión

En este escrito se reportó las conexiones que son comunes a tres estudiantes: Ali, Juan y María; quienes de manera individual mostraron realizar 16 conexiones cada uno, pero que en común sólo presentan 5. Los resultados de los tres estudiantes, indica que la conexión más común es la procedimental y en menor grado, se presenta la conexión del tipo representaciones diferentes. Estos resultados son producto del registro donde se puso énfasis en este análisis, a saber, el algebraico. Estos datos son consistentes con lo reportado por Hong & Thomas (2015), en el sentido de que hay persistencia en el uso del símbolo algebraico. Por otra parte, los resultados de los tres estudiantes dan cuenta del uso del TFC, pero sólo en un sentido, pero no para dar cuenta que perciben la reversibilidad de la derivada y la integral, la cual se cumple para las funciones algebraicas polinomiales.

Los dos tipos de conexiones identificadas son de tipo intramatemáticas porque emergen al interior de la matemática. Estas se caracterizan como sigue:

- *Representaciones diferentes:* pueden ser de dos tipos: representaciones alternas o equivalentes. A es una representación alterna de B, si ambas están expresadas en dos formas diferentes (verbal-algebraica, algebraica-geométrica, verbal-geométrica, etc.). En cambio, A es una representación equivalente de B cuando ambas están expresadas en dos formas diferentes, pero dentro de una misma representación (algebraica-algebraica, verbal-verbal, etc.) [Businskas, 2008]. En el estudio, sólo se identificó el uso de las representaciones alternas (tema 4).
- *Conexión procedimental*: A es un procedimiento usado cuando trabajamos con un objeto B (Businskas, 2008). Por ejemplo, utilizar la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es un procedimiento para encontrar la pendiente de una recta. Asimismo, una gráfica puede ser utilizada para identificar puntos máximos, mínimos, concavidades, punto de inflexión, etc. En nuestro caso, esta conexión se hizo patente en los temas 1, 2, 3 y 5.

Los resultados indican que las diversas conexiones matemáticas que un estudiante establece le permiten llegar a la solución de la actividad propuesta. Asimismo, algunas de ellas permiten o inhiben la comprensión de otros conceptos, por ejemplo, el tema “la derivada de la integral de una función (o viceversa) se obtiene siguiendo la jerarquía de las operaciones” no permite que los estudiantes establezcan y utilicen la reversibilidad entre la derivada y la integral en otros contextos. Finalmente, consideramos que es importante seguir profundizando en el estudio de las conexiones matemáticas con poblaciones más amplias (tal como lo estamos haciendo y que reportaremos en estudios posteriores).

Referencias bibliográficas

Assad, D. A. (2015). Task-Based Interviews in Mathematics: Understanding Student Strategies and Representations through Problem Solving. *International Journal of Education and Social Science, 2*(1), 17-26.

Begg, A. (2001). Ethnomathematics: Why, and What Else? *ZDM, 33*(3), 71-74.

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77–101.

Businskas, A. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections*. Unpublished doctoral dissertation. Faculty of Education-Simon Fraser University. Canada.

De Gamboa, G., & Figueiras, L. (2014). Conexiones en el conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 337-344). Salamanca: SEIEM.

DGB. (2013a). *Cálculo diferencial.* Recuperado el 10 de junio de 2015 de http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/01-programasdeestudio/cfp_5sem/calculo-diferencial.pdf

DGB. (2013b). *Cálculo Integral.* Recuperado el 10 de junio de 2015 de http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/01-programasdeestudio/cfp_6sem/CALCULO_INTEGRAL.pdf

Eli, J., Mohr-Schroeder, M., & Lee, C. (2011). Exploring mathematical connections of prospective middle-grades teachers through card-sorting tasks. *Mathematics Education Research Journal*, *23*(3), 297-319.

Evitts, T. (2004). *Investigating the mathematical connections that preservice teachers use and develop while solving problems from reform curricula.* Unpublished doctoral dissertation. Pennsylvania State University College of Education. EE.UU.

Garbín, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(2), 169-193.

García, J. (2016). *Conexión entre las ideas centrales del Cálculo en bachillerato.* Memoria predoctoral no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. pp. 517-545). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Haciomeroglu, E., Aspinwall, L., & Presmeg, N. (2010). Contrasting cases of calculus students' understanding of derivative graphs. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(2), 152-176.

Hong, Y., & Thomas, M. (2015). Graphical construction of a local perspective on differentiation and integration. *Mathematics Education Research Journal*, *27*(2), 183-200.

Jaijan, W., & Loipha, S. (2012). Making Mathematical Connections with Transformations Using Open Approach. *HRD Journal, 3*(1), 91-100.

Lockwood, E. (2011). Student connections among counting problems: an exploration using actor-oriented transfer. *Educational Studies in Mathematics, 78,* 307–322.

Mhlolo, M. (2012). Mathematical connections of a higher cognitive level: A tool we may use to identify these in practice. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *16*(2), 176-191.

Mhlolo, M., Venkat, H., y Schäfer, M. (2012). The nature and quality of the mathematical connections teachers make. *Pythagoras, 33*(1), 1-9. Recuperado de http://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v33i1.22

Moon, K., Brenner, M., Jacob, B., & Okamoto, Y. (2013). Prospective secondary mathematics teachers' understanding and cognitive difficulties in making connections among representations. *Mathematical Thinking and Learning*, *15*(3), 201-227.

Mwakapenda, W. (2008). Understanding connections in the school mathematics curriculum. *South African Journal of Education, 28*, 189–202.

NCTM. (2014). *Principles to action: Ensuring mathematical success for all*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Presmeg, N. (2006). Semiotics and the "connections" standard: significance of semiotics for teachers of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 163–182.

Stewart, J. (2010). *Cálculo de una variable: Conceptos y Contextos.* México: CENGAGE Learning.

Yoon, C., Dreyfus, T., & Thomas, M. (2010). How high is the tramping track? Mathematising and applying in a calculus model-eliciting activity. *Mathematics Education Research Journal, 22*(2), 141-157.

ALGUNOS CONFLICTOS SEMIÓTICOS IDENTIFICADOS EN LA NOCIÓN DE LÍMITE

Wilson Gordillo, Daniela Araya
Universidad Distrital (Colombia), Universidad San Sebastián (Chile)
wgordillot@udistrital.edu.co, daniela.araya@uss.cl

RESUMEN: En este trabajo se analiza las respuestas a tareas propuestas sobre la noción de límite de estudiantes de pedagogía de educación media en matemática que cursan la asignatura cálculo diferencial. Por medio de las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico (EOS), se realiza un análisis de las respuestas en relación a la respuesta institucional, lo que permitió proponer categorías cognitivas comunes para detectar algunos conflictos semióticos en la introducción de la noción de límite.

Palabras clave: límite, configuración ontosemiótica, conflicto semiótico

ABSTRACT: In this paper, we analyze the answers to tasks assigned to Education students majoring in mathematics for high school, who are doing the subject differential calculus, about the notion of limit   By means of the Onto-Semiotic Approach theoretical tools, we analyzed the answers in relation to the institutional response, which allowed proposing common cognitive categories to detect some semiotic conflicts in the introduction of the notion of limit.

Key words: Limit, onto- semiotic configuration, semiotic conflict

Introducción

El cálculo infinitesimal ha sido una de las invenciones más trascendentales en la historia de las matemáticas, gracias a éste se pudieron resolver una gran cantidad de problemas asociados a la mecánica, economía, biología, geometría, etc. siendo éste el único medio para resolver dichos problemas por más de dos siglos. Por tal razón, el estudio del cálculo infinitesimal es fundamental y trascendental para la formación de ingenieros, biólogos, físicos, químicos, economistas, arquitectos, profesores de matemática, etc.

La base del cálculo infinitesimal comienza con la noción de límite, este concepto fundamental es el soporte para el estudio de otros conceptos como lo son: la continuidad, la derivada, la integral y las series, entre otros. Varios investigadores enmarcados en la didáctica del cálculo, han indagado sobre las dificultades asociadas a esta noción y han realizado propuestas didácticas para mejorar el aprendizaje de este objeto matemático. Por ejemplo, Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas (2006) señalan que “la complejidad del aprendizaje de la noción de límite en la enseñanza se basa principalmente en dos aspectos fundamentales, la primera está relacionada con la dificultad del propio concepto y la segunda está relacionada con el tratamiento del concepto” (p. 194). Por otra parte, Cornu (1983) investiga las concepciones, los obstáculos epistemológicos y la dificultad que existe entre la transición de una aproximación cualitativa a la formal, de la misma manera Sierpinska (1985) propone una serie de obstáculos epistemológicos que presenta la noción de limite, basándose en la génesis histórica de éste concepto. Artigue (1995), enfatiza sus investigaciones en la complejidad del concepto de límite, el cual tiene otras nociones matemáticas involucradas de difícil comprensión como lo son: la función y el número real. Por otra parte, Blázquez y Ortega (2001) establecen la necesidad de utilizar distintos registros de representación tales como el algebraico, numérico, gráfico y verbal para mejorar la comprensión del concepto de límite, el cual está basado en la teoría de representaciones semióticas propuesta por Duval (1995). Por su parte Fernández (2000) señala que “en la enseñanza del tema límite de funciones de una variable real en forma tradicional, los estudiantes tienen dificultades en la identificación del concepto y en la visualización del mismo” (p. 171). Todas estas investigaciones sustentan el hecho de indagar nuevamente en la enseñanza aprendizaje de la noción de límite, destacando el hecho, de que las investigaciones propuestas no exploran las dificultades de la noción de límite analizada con las herramientas teóricas dadas por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento (Godino, 2002). Por tal razón, el propósito de nuestra investigación es iniciar este análisis con la identificación de conflictos semióticos que presentan los estudiantes de un curso de cálculo diferencial cuando se les pide resolver tareas que introducen la noción de límite. Para cumplir con este propósito, se diseña un instrumento que permite analizar las respuestas a diferentes preguntas que involucran dicha noción. El trabajo se realiza con estudiantes de la carrera de pedagogía en matemática, en donde cada respuesta dada por ellos es analizada y comparada con las respuestas dadas por el profesor experto al mismo cuestionario; esta comparación entre las respuestas de los estudiantes y el profesor (institución), va a reflejar las diferentes disparidades que se presentan en el aprendizaje de esta noción, estas diferencias permitirán identificar algunos conflictos semióticos en la noción (Godino, Batanero & Font, 2007).

Marco teórico

En este trabajo utilizamos la noción de configuración ontosemiótica (Pino-Fan & Font, 2015), proporcionada por el marco teórico conocido como *enfoque ontosemiótico* (EOS). Esta configuración puede ser de carácter epistémica o cognitiva, según se refiera a objetos y procesos matemáticos institucionales o personales, respectivamente. Se ha utilizado porque permite describir y caracterizar de manera sistemática los objetos matemáticos primarios (situaciones/problemas, elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades y argumentos) que intervienen y emergen de la práctica matemática (ver Figura 1), además, permite realizar detalladamente el análisis de los contenidos que se movilizan en las prácticas necesarias para resolver la tarea. La herramienta configuración cognitiva ayuda caracterizar las soluciones plausibles y de esta forma permite identificar posibles conflictos semióticos definidos como "disparidad o diferencia de interpretación entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones)." (Godino, Batanero & Font, 2007, p. 133).

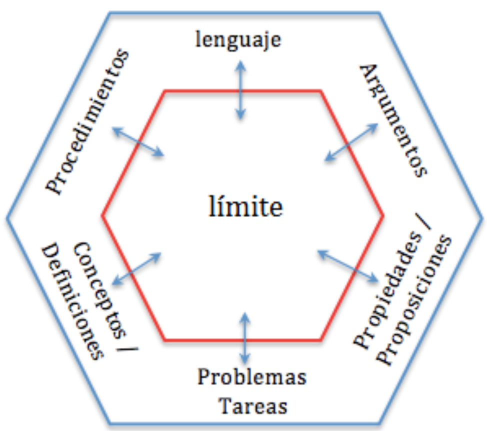


Figura 1. Configuración Semiótica de la noción de límite

Metodología

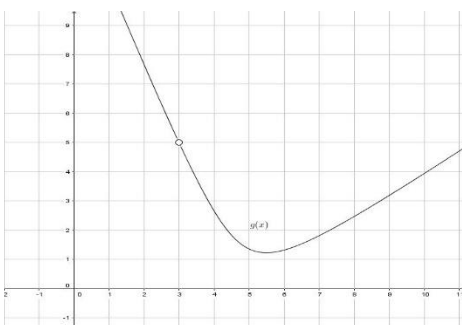
Inicialmente se diseña varios tipos de tareas en torno a la noción limite, las respuestas institucionales a las tareas dadas por el profesor experto, fueron analizadas con la herramienta configuración ontosemiótica epistémica, esta herrameinta propuesta por el EOS permite identificar los objetos matemáticos primarios. Al mismo tiempo permite dar validez de contenido de la tarea, luego de la validez de cada una de las preguntas, se aplica el cuestionario a 17 estudiantes de pedagogía media en matemáticas que conforman el curso cálculo diferencial. Cabe destacar, que el instrumento fue aplicado al finalizar el estudio de la noción de límite, el cual abarcó un mes con dos sesiones semanales de 120 minutos cada una. Las respuestas entregadas por los estudiantes se analizan con la herramienta configuración ontosemiótica, las coincidencias en el desglose de los objetos matematicos primarios identificados en las respuestas son agrupadas para configurar coginitivamente al grupo de estudiantes, estas configuraciones se contrastan con las respuestas institucionales para encontrar coincidencias o disparidades con el fin de identificar conflictos semióticos en la noción de límite.

Tareas propuestas

El cuestionario propuesto consta de 5 tareas, cada una de ellas aborda la noción de límite, partiendo del significado (personal) de limite hasta el uso de la definición de limite atribuida a Weierstrass.

Un ejemplo de respuesta institucional se presenta en la tabla 1, la cual corresponde a la tarea 3 del cuestionario.

Tabla 1. Tarea 3 y respuesta institucional

Tarea 3	Respuesta Institucional
Considere la función g, tal que $g: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{5\}$ y tenga la siguiente gráfica.  ¿Existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - 3\| < \delta$ entonces $\|g(x) - 5\| < 0{,}000004$? Justifique su respuesta.	Según la gráfica de g se tiene que existen los límites laterales de g en el punto $x = 3$, $\lim_{x \to 3^-} g(x) = 5 \quad y \quad \lim_{x \to 3^+} g(x) = 5.$ Por tanto, existe el límite en $x = 3$, $\lim_{x \to 3} g(x) = 5$ que es equivalente a afirmar $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0$ con $\delta\,(\varepsilon, 3)$ tal que si $\|x - 3\| < \delta \Rightarrow \|g(x) - 5\| < \varepsilon$. En particular para $\varepsilon = 0{,}000004$ existe $\delta > 0$ tal que cumple con la condición solicitada.

Dada la respuesta institucional se hace un análisis ontosemiotico de las tareas, como el propuesto por Gordillo y Pino-Fan (2015), para reconocer los objetos matemáticos primarios involucrados en la tarea y la respuesta dada por la institución. A continuación, se muestran algunos de los objetos identificados en la pregunta.

- Elementos lingüísticos: símbolos, notaciones y expresiones algebraicas que denotan la noción de límite.
- Situaciones/Problemas: en este caso, corresponde a las tareas propuestas.
- Conceptos/Definiciones: sería la descripción de límites, mediante símbolos y/o expresiones verbales.
- Proposiciones/Propiedades: Propiedades dadas por las desigualdades en números reales.
- Procedimientos: Solución algebraicas de desigualdades.
- Argumentos: Los argumentos se desprenden de la gráfica de la función g y la aplicación del teorema de existencia de límite..

Para la respuesta institucional:

- Elementos lingüísticos: Están dados por elementos verbales y algebraicos.
- Conceptos/Definiciones: Definición de límite propuesta por Weierstrass, es decir;

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\ con\ \delta\,(\varepsilon,\ 3)\ \ tal\ que\ si\ \ |x-3| < \delta\ \Rightarrow\ |g(x)-5| < \varepsilon.$$

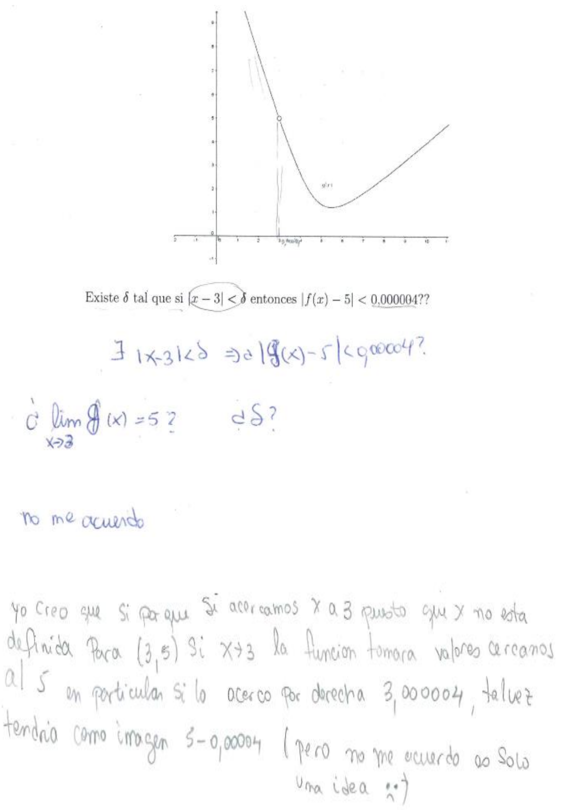
- Proposiciones/Propiedades: Teorema de existencia de límites.
- Procedimientos: Evaluación de límites laterales, solución de desigualdades
- Argumentos: Los argumentos se desprenden de la gráfica de la función g y la aplicación del teorema de existencia de límite.

Análisis de las respuestas

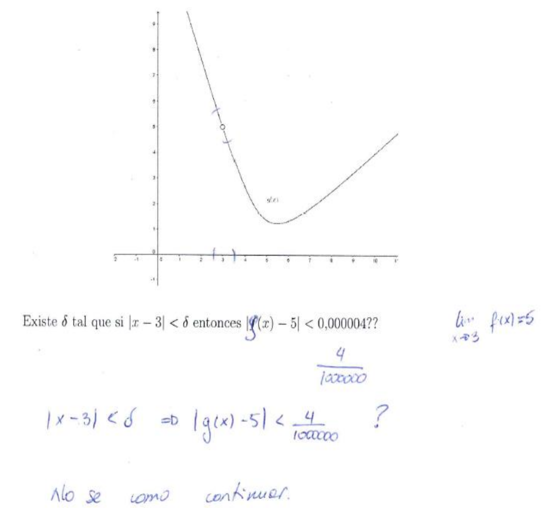
Para el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes, se hace el desglose de los objetos matemáticos primarios que emergen de cada estudiante, cada respuesta es comparada con el fin de identificar elementos comunes y de esta forma caracterizar cognitivamente las respuestas dadas.

En la Figura 2 se presenta un ejemplo de respuestas dadas por los dos estudiantes (E1 y E2).

E1



E2



No justifica.

Figura 2. Respuestas de los estudiantes E1 y E2

Para cada una de las respuestas entregadas por el estudiante (E1), se identifican elementos lingüísticos verbales y algebraicos a través de los cuales aborda los conceptos/definiciones de límite. El uso de la gráfica es primordial al señalar en la curva la posible existencia del límite en el punto dado. Las proposiciones/propiedades que utiliza están dadas por el teorema de existencia de límite, el cual es expresada de forma verbal. Sus argumentos están dados al usar verbalmente la demostración solicitada. Por último, no se identifica en la respuesta de este estudiante algún tipo de procedimiento algorítmico. Con respecto al estudiante E2, se puede inferir que los conceptos/definiciones de límite se identifican de manera gráfica, dado que identifica los intervalos y "raya" la gráfica de la función. Las proposiciones/propiedades utilizadas es el teorema de existencia de límite, que es expresada mediante el análisis de la gráfica de la función y por medio de ésta afirma la existencia del límite. Sin embargo, la respuesta no muestra argumentos que justifique sus procedimientos.

Conclusiones

El comparar los objetos matemáticos primarios de las respuestas entregadas por los estudiantes, con el desglose de los objetos matemáticos primarios de la respuesta institucional, se evidencia disparidad o diferencia entre cada uno de estos elementos, esta disparidad lleva a inferir un posible conflicto semiótico (Godino, Batanero & Font, 2007), entre la institución y los estudiantes, esto conlleva a que la noción de límite pueda estar mal comprendida por los estudiantes, a pesar que se identifica e interpreta correctamente el límite de la función propuesto en el gráfico propuesto. Sin embargo, esta concepción carece de significado dado que no pueden interpretar con la definición propuesta por Weierstrass y de esta forma resolver la tarea solicitada. Este hecho se puede deber a que la enseñanza de esta noción por parte de la institución, se basa principalmente en el cálculo de límites de forma algebraica la cual está desprovista de significado. (Fernández, 2000).

Por otra parte, se validan las herramientas propuestas por el EOS las cuales se prevén como potentes para el análisis de contenido de tareas y respuestas, este análisis ontosemiótico (Pino-Fan, Godino & Font, 2011) permitió el desglose de objetos matemáticos primarios, que con características comunes que generaron configuraciones cognitivas de la noción. La identificación de las configuraciones que se enmarcaron en respuestas parcialmente correctas o incorrectas fueron comparados con la solución plausible correcta o también llamada significado dado por la institución matemática, cada disparidad entre la pareja estudiante-institución, se categoriza para determinar algunos de los conflictos semióticos identificados.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*. (pp. 97-140) México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Blázquez, S. & Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *RELIME: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(3), 219-236.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S. & Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9(2),* 189-209.

Cornu, B. (1983). Apprentissage de la notion de limite: conpections et obstacles. (Thèse de 3ème cycle,Mathèmatiques. Universitè I de Grenoble, Grenoble, Francia.)

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne, Switzerland: Peter Lang.

Font, V. & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa ,8*(1), 67-98.

Fernández, M. (2000). Perfeccionamiento de la enseñanza-aprendizaje del tema de límite de funciones con el uso de un asistente matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3(2)*, 171-187.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Gordillo, W. & Pino-Fan, L. (2015). Un ejemplo de análisis ontosemiótico para una tarea de antiderivada. En Vásquez, C,. Rivas, H., Pincheira, N., Rojas, F., Solar, H., Chandía, E., & Parraguez, M. (Eds.), *Jornadas Nacionales de Educación Matemática XIX,* (pp. 170-175). Villarrica: SOCHIEM.

Pino- Fan, L., Godino J. & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, *13*(1), 141-178

Pino-Fan, L. & Font, V. (2015). A methodology for the design of questionnaires to explore relevant aspects of didactic-mathematical knowledge of teachers. In Beswick, K., Muir, T., & Wells, J. (Ed.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 4, pp. 25-32). Hobart, Australia: PME.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathèmatiques,* 6(1), 5-67.

ESTRATEGIA DE INGRESO AL NIVEL PROFESONAL: TALLER DE ÁLGEBRA

María Teresa Martinez Acosta, Martha Guadalupe De la Cruz Flores, Bertha Ivonne Sánchez Luján
Instituto Tecnológico de Cd. Jiménez. (México)
mtmartineztec@gmail.com, martha.delacruz.ead@hotmail.com, ivonnesanchez10@yahoo.com

RESUMEN: Se presentan el seguimiento y resultados para situar el nivel de los conocimientos algebraicos de los estudiantes de nuevo ingreso, indispensables para su rendimiento académico en las materias de matemáticas en las carreras de ingeniería dentro del Tecnológico de Cd. Jiménez. Se diseñó y aplicó un examen a los participantes al inicio y al término del curso introductorio Taller de Álgebra. El análisis de las respuestas iniciales y finales muestra un avance significativo en la resolución de los mismos, a partir de lo cual se proponen estrategias de apoyo.

Palabras clave: ingeniería, estrategia, álgebra

ABSTRACT: This paper shows the monitoring and its results aimed at establishing the first-year students' algebraic knowledge which is essential for their academic performance in mathematics subjects in the engineering studies at the Cd. Jiménez Technological School. A proof was designed and applied to the participants at the beginning and the end of the introductory course, Algebra Workshop. The analysis of the initial and final responses shows a significant advance in problem solving. It constituted a starting point to propose supporting strategies.

Key words: Engineering, strategy, algebra

Introducción

Es una línea de investigación educativa en la que se desarrolla el siguiente proyecto, partiendo que desde la niñez los conocimientos matemáticos son una necesidad para vivir los problemas del día con día, en nivel preescolar se presentan los primeros aprendizajes y luego en la primaria, y consideran principalmente la enseñanza de sumar, restar, dividir y así hasta llegar a las equivalencias, mediciones y conforme van incrementándose las capacidades y necesidades del joven para utilizar este tipo de información, tomando en cuenta las habilidades diferentes de las personas, así también las facilidades de estudio que por las posibilidades económicas de la familia, el esfuerzo o el azar, influyen en que unos o varios puedan contar con una mayor formación y continuar profesionalmente sus estudios en nivel de ingenierías, en posgrados o en otras profesiones.

El Instituto Tecnológico de Cd. Jiménez es una Institución formadora de ingenieros, atiende en seis carreras a egresados de nivel medio superior de la región sur de Chihuahua. Se imparten como materias básicas las asignaturas de matemáticas, física y química, mismas que por sus contenidos, requieren de conocimientos algebraicos.

Estos conocimientos debieron haber sido adquiridos en el bachillerato y con frecuencia se observa la deficiencia de los mismos, y debido a ello, se presentan altos niveles de reprobación al cursar las primeras asignaturas, causando desmotivación, desinterés, inasistencias, baja o abandono de estudios.

Se implementó como estrategia la impartición de un Taller de Álgebra previo al inicio del semestre, con los temas de álgebra como preparación y repaso para cursar materias básicas, a los estudiantes de ingeniería.

Para esta investigación se planteó la pregunta: ¿El taller de álgebra impartido a alumnos de nuevo ingreso al ITCdJ mejora significativamente los conocimientos de álgebra en los aspirantes a las carreras de ingeniería?

Se presentan resultados de la aplicación de un instrumento de medición, el cual fue un examen para observar los resultados de la pregunta planteada.

Indagación bibliográfica

El proyecto de Ángeles Mendoza y Silvia Macotela (2007) dentro de la UNAM, comenta la situación en la que las Instituciones de nivel superior se encuentran, al tener estudiantes caracterizados por una preparación previa deficiente, con un menor dominio de la lectura, de la expresión oral y escrita, bases matemáticas, y que no utilizaban estrategias de aprendizaje.

En una investigación del 2014, en la Universidad de Cantabria, se realizó un análisis en la coordinación que debe existir entre los conocimientos matemáticos enseñados y aprendidos en el nivel medio y los requeridos para iniciar una carrera de ingeniería, por medio de encuestas y aplicación de exámenes a los participantes, analizó la capacidad que tienen estos para interpretar el álgebra al practicar las matemáticas en sus estudios superiores (Prieto, 2014).

Considerando también que para José Ángel García en la Universidad de Costa Rica, el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas y del cálculo en particular, presentan una de las mayores dificultades para los estudiantes de nivel universitario, incluso en ingenierías. La tendencia a reducir a procesos aritméticos el álgebra que sirve de soporte al aprendizaje del cálculo puede complicar más las cosas porque lleva a una descontextualización de la disciplina (García, 2013).

En un trabajo desarrollado en la Escuela Politécnica Nacional del Ecuador, se insiste que existe un nivel de conocimiento heterogéneo entre los estudiantes que toman un curso propedéutico de fundamentos de matemáticas al ingresar a una ingeniería, además de que el desarrollo del proyecto se basa en la aplicación de encuestas (Sandoval y Burgos, 2014).

Los fundamentos epistemológicos determinados por Silvia Arguedas (2012), para el curso Introducción a las Matemáticas Universitarias, dentro de la Escuela de Ingeniería Industrial de la Universidad de Costa Rica, relaciona el paradigma de educación, la construcción del conocimiento y los métodos de enseñanza. Los jóvenes al ingresar al nivel superior en el área de ingenierías, traen consigo ideas de que las matemáticas se complican en gran escala, agregando la poca disponibilidad que presentan para conocer nuevos temas en base a los ya aprendidos en el nivel medio, complicando muchas veces que los docentes puedan darse a entender y además no generen nuevas estrategias de enseñanza. El curso está formado de tres partes:

1. examen de diagnóstico,
2. jornada de recibimiento (donde se le entregan los resultados de la prueba de diagnóstico), y
3. curso propedéutico

En el cual se consideran diversos objetos matemáticos (Godino, 2002):

- Lenguaje (términos, expresiones, notaciones o gráficos) en sus diversos registros o representaciones (escrito, oral, gestual, entre otros).
- Situaciones (problemas, aplicaciones en el entorno, ejercicios, tareas).
- Procedimientos o acciones (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos).
- Conceptos (que son introducidos mediante definiciones o descripciones).
- Propiedad o atributo de los objetos (como los enunciados sobre conceptos).
- Argumentos (por ejemplo, los que se usan para validar o explicar los enunciados por deducción o de otro tipo).

En el curso de nivelación en matemáticas para ingenierías que se ofrece en la Universidad de Talca en Chile, se realizó una revisión de los temas para incluirlos en el mismo, se seleccionaron ejercicios para aplicarlos en un exámen diagnóstico por medio de la web, al final del curso, se aplica el mismo instrumento realizado en el diagnóstico, con los mismos ejercicios, a los cuales se les cambian los datos. En ambos casos, se obtuvo una mejora de aproximadamente dos puntos en la prueba de salida, sobre el instrumento de entrada (Risco, 2016).

Alcance

Se establece de forma descriptiva al considerar el ambiente estudiantil actualmente en matemáticas, en las carreras de ingenierías, para después continuar de manera correlacional.

Método

En el semestre Agosto-diciembre 2015, el ITCdJ contó con matrícula de ingreso del CBTis #138, Telebachilleratos del Estado y la primera generación de egresados del COBACH #22.

Se realizó en dos fases, en la primera se llevó a cabo la medición de conocimientos aprendidos o recordados por el participante al inicio del taller, el cual se desarrolló en 2 semanas, 3 horas diarias de lunes a viernes, considerando los temas matemáticos cursados en el bachillerato, el instrumento se conformó por 15 ejercicios, considerando el tiempo de resolución, y siendo validado por tres profesores.

La segunda fase consistió en aplicar nuevamente el examen diagnóstico, sin considerar ningún cambio, de tal manera que el alumno pueda emplear lo recordado o aprendido por primera vez en el peor de los casos para resolver el mismo tipo de operaciones que contempla el problemario, para después realizar un comparativo en cuanto a los aciertos obtenidos por participante. Estas fases equivalen a la 1 y 3 de acuerdo con Arguedas (2012, p. 2)

Universo

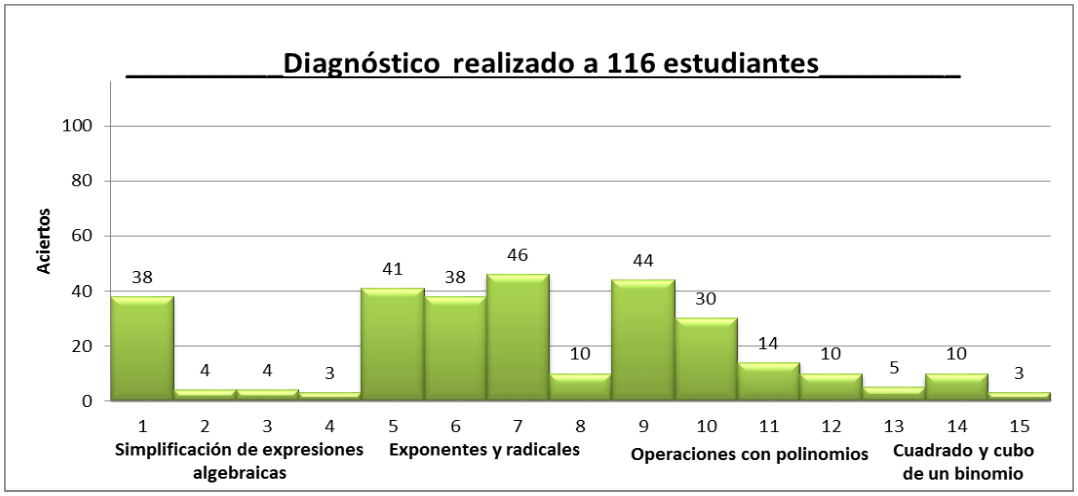


Figura 1. Representación de aciertos por pregunta del examen diagnóstico.

El Taller se impartió a 116 participantes divididos en 5 grupos, pon diferente docente, según la carrera de ingeniería seleccionada por el estudiante.

Instrumento

Un examen que consta de 4 temas sugeridos para facilitar las materias en Ciencias Básicas, estos son: simplificación de expresiones algebraicas (reactivos del 1 al 4), exponentes y radicales (del 5 al 8), operaciones con polinomios (del 9 al 12), cuadrado y cubo de un binomio (del 13 al 15).

Resultados/Avances

En la fase 1, al recolectar los datos de interés, como se observa en la gráfica 1, el total de aciertos es muy bajo de manera generalizada, como un ejemplo el ejercicio número 7 del tema exponentes y radicales, con un mayor número de aciertos se encuentra muy por debajo del total de evaluaciones aplicadas, no alcanzó el 50% de respuestas correctas, y en situación parecida se presentan los ejercicios 4 del tema simplificación de expresiones algebraicas, y el 15 del tema cuadrado y cubo de un binomio, con tan sólo 3 aciertos cada una, el resto incorrectas o no habiendo sido desarrollado el problema por parte del estudiante.

La fase dos inició cuando al concluir el taller se procede a la aplicación del mismo instrumento de evaluación a dos grupos tomados al azar de 31 estudiantes de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales y de 25 alumnos a ingresar en la carrera de Ingeniería Industrial, todas las preguntas sin cambio alguno, con el fin de compararlas con el diagnóstico. Los resultados en este sentido se observan en la gráfica 2 y gráfica 3.

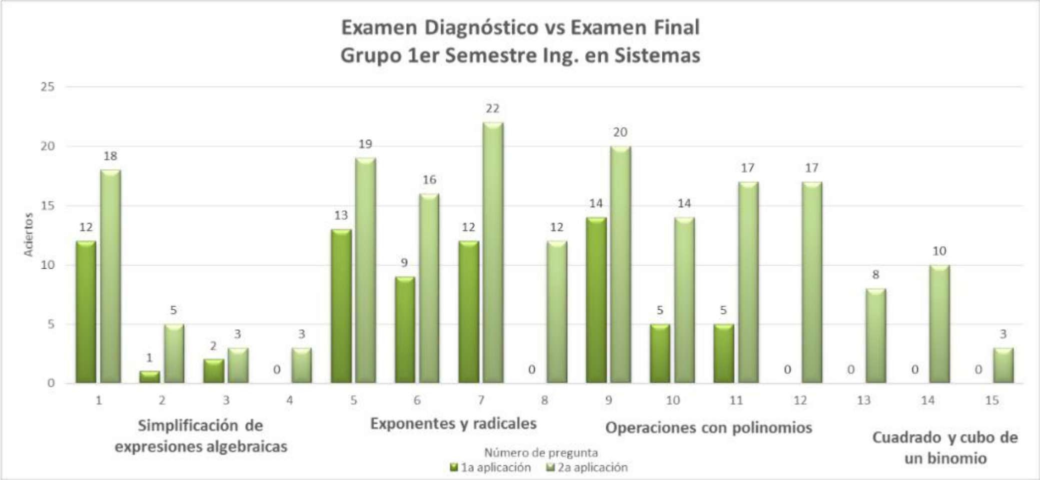


Figura 2. Aciertos del grupo de Ingeniería en Sistemas en la primera y segunda aplicación diagnóstica respectivamente.

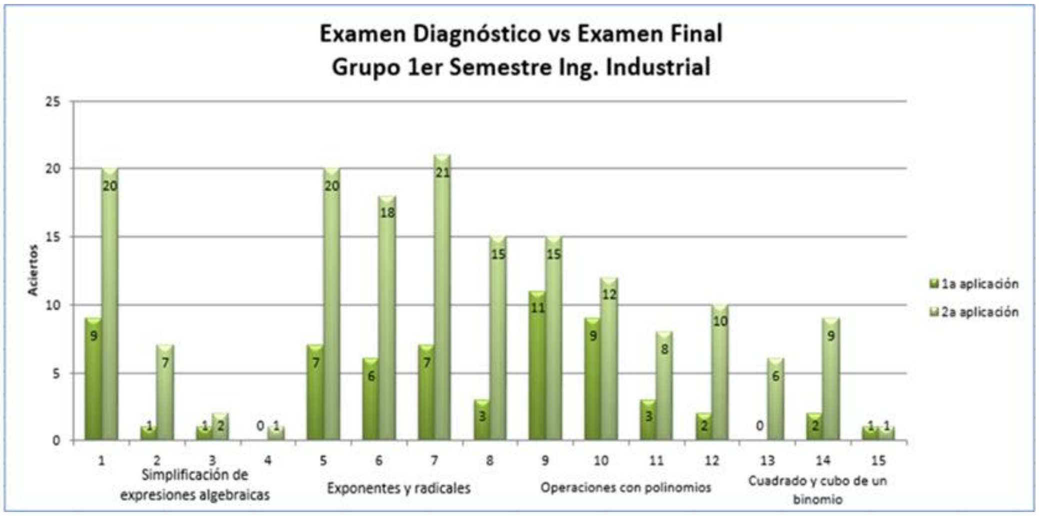


Figura 3. Aciertos del grupo de Ingeniería Industrial en la primera y segunda aplicación diagnóstica respectivamente

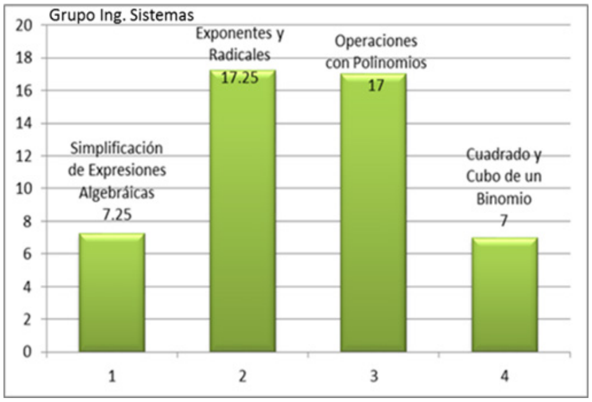
Resultados/Conclusiones

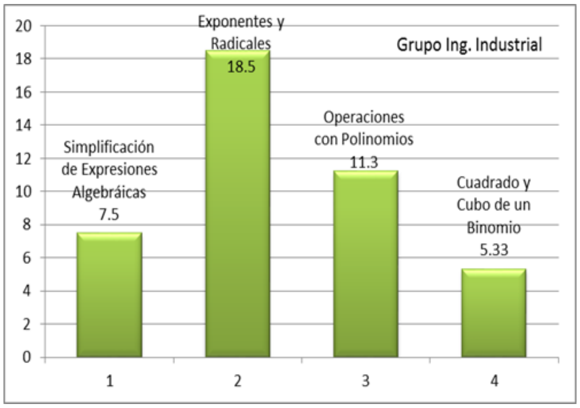
Al analizar las gráficas se observa un aumento en la cantidad de aciertos para la segunda aplicación del examen, sin embargo se siguieron presentando dificultades al resolver determinados ejercicios a evaluar.

Las respuestas con menos aciertos se encontraron de la 2 a la 4, dentro del tema simplificación de expresiones algebraicas, en la mayoría de los participantes los errores fueron en la acción de dividir entre *2x*, deficiencia al llevar a cabo la división. Seguidas de las respuestas de la 13 a la 15, del tema cuadrado y cubo de un binomio, mostrando las mismas deficiencias en la segunda aplicación.

Al verificar el tiempo que cada docente dedicó a éste cuarto tema, se observó que las horas fueron insuficientes, dado al corrimiento de temas por las condiciones de conocimientos y avance de los jóvenes, lo que nos lleva a reconsiderar el tiempo asignado a cada tema.

Conclusiones





Figuras 4 y 5. Promedio de aciertos por tema de resultados en la segunda aplicación

Las gráficas anteriores, 4 y 5 dan a conocer en promedio el alcance en desempeño según los cuatro temas evaluados en la segunda aplicación, por lo que ahora se considera el valorar otras estrategias de enseñanza en el área matemática, prestando atención extra a los tiempos de comprensión, a la situación afectiva que viven los recién ingresados a una carrera profesional, a las acciones facilitadas por el docente que pueden contribuir al proceso de aprender a pensar, ya sea por medio de herramientas tecnológicas o fortalecimiento de la seguridad del estudiante o propiciando la socialización con estudiantes que cuentan con nivel de conocimientos matemáticos más altos y con los cuales puedan realizar proyectos que los motiven, o desarrollando ejercicios integradores con compañeros de su mismo nivel de estudio de tal forma que aumenten sus habilidades matemáticas.

De acuerdo a los resultados se concluye que el taller de álgebra impartido a estudiantes de nuevo ingreso a ingeniería al ITCdJ contribuye positivamente a la generación y repaso de conocimientos en álgebra. El joven poco a poco se integra a un nivel de exigencia mayor en cuanto a estudio y práctica, mide su desempeño y es más consciente de ello, incluso anhela en la mayoría de los casos comprender mejor el tema.

Recomendaciones

Aunque los resultados son satisfactorios, es importante reforzar esta estrategia con otras, se requiere un mayor reforzamiento de los temas de álgebra para que los estudiantes puedan desenvolverse efectivamente en las materias de Ciencias Básicas. Una estrategia es vincularse con el nivel medio superior: se presentó la propuesta recientemente a las autoridades de nuestra Institución para que el departamento de Ciencias Básicas, el cual se encarga de coordinar las materias matemáticas, desarrolle un foro, invitando a profesores de matemáticas y directivos de los bachilleratos, siendo el objetivo compartir experiencias de enseñanza aprendizaje en ambos niveles y generar estrategias tendientes a mejorar el aprovechamiento en el área.

Referencias bibliográficas

Arguedas S. (2012). *Fundamentos epistemológicos: Curso Introducción a las Matemáticas.* Recuperado el 21 de Diciembre del 2016 de http://www.cientec.or.cr/archivo/matematica/2012/ponenciasVIII/Silvia-Arguedas.pdf

García, J. (2013). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Revista Educación. 37(1), 29-42.*

Godino, J.D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques. 22 (2/3), 237-284.*

Mendoza, A. y Macotela, S. (2007). Efectividad de un programa de apoyo educativo sobre la trayectoria académica de alumnos de licenciatura. *Revista Mexicana de Psicología. 24(2), 243-257.*

Prieto, A. (2014). *El Papel del Algebra Lineal en el Bachillerato y en la Universidad*. Tesis de Maestría publicada, Universidad de Cantabria. Santander, España.

Risco, I. (2016) *Propedéutico con Adelantos Temáticos.* Recuperado el 10 de Marzo del 2017 de http://revistas.utp.ac.pa/index.php/clabes/article/view/917

Sandoval, I. y Burgos, M. (2014). *Utilización de la modalidad aprendizaje combinado en el proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura Fundamentos de Matemática del curso propedéutico de la*

Escuela Politécnica Nacional. Recuperado el 30 de noviembre de 2015 de http://clabes2014-alfaguia.org.pa/

EL PAPEL DE LAS EMOCIONES EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS. UN APORTE QUE PROMUEVE EL PENSAMIENTO EFICAZ

Celia E. Villagra, Marcela E. Chorolque, José D. Mamaní
Universidad Nacional de Salta. Instituto de Formación Docente N° 6018. (Argentina)
villagracelia@gmail.com, dmamaniar@yahoo.es, marcelachorolque@gmail.com

RESUMEN: Consideramos la resolución de problemas como una oportunidad para que los alumnos aprendan a pensar mejor matemáticamente. Los aportes de la neurociencia manifiestan que pensar mejor es posible y para ello se debe reconocer que las emociones que experimentan los alumnos influyen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática y en particular en la resolución de problemas matemáticos. La implementación de un taller de resolución de problemas para alumnos desde esta perspectiva pretende que ellos experimenten con problemas y técnicas de desbloqueos y así reconozcan el papel de las emociones valorando la resolución de problemas desde el enfoque que nos interesa. Es por ello que proponemos la utilización de diferentes técnicas: frases alentadoras, mapa de humor, narrativas, “brainstormingn” para que los alumnos experimenten con este nuevo enfoque.

Palabras clave: Enseñanza Matemática, emociones, desbloqueo, problemas

ABSTRACT: Problem solving activities constitute an opportunity for the students to improve their mathematical thinking. The contributions of the neuroscience show that it’s possible to achieve a better thinking. Then it should be recognized that students’ emotions influence in mathematics teaching learning process, and particularly in mathematics problem solving. The implementation of a problem solving workshop for the students, from this perspective is aimed at allowing them to experiment with problems and clearing techniques in order to recognize the role of emotions, and to assess problem solving from the desired approach. That’s why we propose the use of different techniques such as encouraging phrases, humor maps, narratives, and brainstorming to make the students practice with the new approach.

Key words: Mathematics teaching, emotions, clearing techniques, problem solving

Introducción

Es frecuente que los alumnos de la escuela secundaria, y de cualquier otro nivel, tengan dificultades para resolver problemas mostrando en muchos casos que carecen de la capacidad para resolver los mismos. Esta capacidad implica: analizar, relacionar, sintetizar, tomar decisiones, generalizar, argumentar, entre otras.

La propuesta consiste en llevar a cabo un taller de resolución de problemas, donde la centralidad esté puesta en los procesos de desbloqueo y control de emociones, con la finalidad no sólo de enseñar a los alumnos a resolverlos, sino de que puedan mejorar su autoestima y confiar en que pueden desarrollar sus capacidades. Como lo señala Polya (1965) se pretende enseñarles a pensar matemáticamente, es decir, que sean capaces de abstraer y aplicar ideas matemáticas a un amplio rango de situaciones y, en este sentido, los propios problemas serían las herramientas que les llevarían a ello.

Si un alumno aprende a resolver problemas, entonces será un alumno que cuestiona, encuentra, investiga y explora soluciones; quien demuestra la capacidad para persistir en busca de diferentes alternativas y quien aplica las matemáticas con éxito a las situaciones en cualquier contexto.

Marco teórico de la propuesta de Taller

Resolución de problemas

La actividad de resolución de problemas ha estado en el corazón mismo de la elaboración de la ciencia matemática, de modo tal que es posible afirmar sin riesgo a equivocarse, como señala Charnay (1994) que *hacer matemática* es resolver problemas. Existen diferentes concepciones sobre un problema, para esta propuesta se asume el problema como gestor de estrategias. Rodríguez (2012) considera el enfoque de la resolución de Problemas (ABP), como una línea que tiene su origen con los desarrollos de Polya (1965) y que con el correr de los años adoptaron diversos autores. En este enfoque el énfasis está puesto en que los estudiantes se conviertan en buenos *resolutores de problemas*. Es decir que el interés está puesto en que adquieran herramientas y construyan estrategias para abordar problemas, a la vez que el foco no está puesto en la enseñanza de un contenido específico

Aportes de la Neurociencia

En la actualidad los aportes de la neurociencia son de gran interés para la educación. Guillén (2014) expresa que nuestro cerebro es plástico, es decir que puede modificarse y que podemos generar nuevas neuronas, por lo tanto la inteligencia es una capacidad maleable. Estas consideraciones constituyen una puerta abierta a la esperanza porque permite desarrollar lo que Dweck (2012) llama *mentalidad de crecimiento*, aquella que nos permite afrontar mejor los retos al creer que nuestras habilidades personales pueden desarrollarse.

Los recientes avances en neurociencia ponen de relieve las conexiones entre la emoción, el funcionamiento social, y la toma de decisiones. Estos avances afectan directamente en materia de educación. Los aspectos de la cognición están directamente relacionados y afectados positiva o negativamente por los procesos de emoción. Los aspectos emocionales, el pensamiento y la cognición guardan estrecha relación.

Desde la perspectiva educativa, que es la que nos interesa, la creencia de que es posible desarrollar nuestras capacidades personales permite a los alumnos mejorar sus resultados académicos y su aprendizaje. Y en este proceso resulta fundamental, por un lado, conocer cómo funciona el cerebro humano y, por otro, es esencial crear un clima emocional seguro en el aula donde las expectativas de los alumnos y de los profesores sean siempre positivas.

Guillén también realiza unas sugerencias a tener en cuenta como implicancias pedagógicas para favorecer la mentalidad en crecimiento: a) Enseñar cómo funciona el cerebro, b) Asumir el error con naturalidad, c) Elogiar por el esfuerzo d) No etiquetar a los alumnos e) Dar importancia al proceso f) Proporcionar retos.

Problemas y emociones

En la actualidad las investigaciones en Educación Matemática y en particular en la Didáctica de la Matemática están centrándose no solamente en el aspecto cognitivo de la ciencia, sino también en el *aspecto afectivo*, donde las emociones juegan un papel esencial.

Gómez-Chacón (2002) también estudió la dimensión afectiva en el aprendizaje, y enumeró tres factores afectivos que entran en juego en el aprendizaje de las matemáticas: *emociones, actitudes y creencias.*

Según Guzmán (2006) los bloqueos en el aprendizaje son actitudes negativas que impiden expresar el yo. Estos impedimentos imaginarios tienen que ver con “no puedo, no debo”, que muchas veces son tomadas como órdenes negativas a la mente, y que los estudiantes anteponen para no realizar una actividad.

Sobre las emociones Gómez-Chacón señala que durante el proceso de resolución de problemas en Matemática, el alumno atraviesa distintos estados emocionales, pudiendo dar lugar a bloqueos en el aprendizaje. Al respecto Gil, Blanco y Barona (2006) consideran que los bloqueos refuerzan en el alumno la creencia de que es incapaz de resolver problemas, es así que cuando vuelve a enfrentarse a una tarea matemática lo hará con niveles aún mayores de ansiedad, porque tiene más pruebas de su incompetencia. Esta situación hará que ante una nueva tarea de resolución de problemas abandone la situación una y otra vez.

Técnicas de Desbloqueo

Como un aporte al cambio de dirección de las creencias y por consiguiente del estado emocional, se proponen utilizar instrumentos que recogen información de las emociones, explicitarlas por parte del alumno, con el objetivo de tomar conciencia de ellas, determinar su dirección, realizar los cambios necesarios, regularlas y controlarlas a lo largo del proceso de resolución de problemas. La posibilidad de controlar las emociones favorece el proceso de desbloqueo.

Un instrumento adecuado para el propósito mencionado es el Mapa de Humor de los Problemas, propuesto por Gómez-Chacón. Es un instrumento icónico, que establece un código para expresar distintas reacciones emocionales experimentadas por el estudiante en el proceso de resolución de problemas. La autora lo utiliza desde 1994 en la escuela secundaria y las emociones que aparecen registradas a través de los íconos son el resultado de las reacciones más relevantes expresadas por este grupo de jóvenes.

.

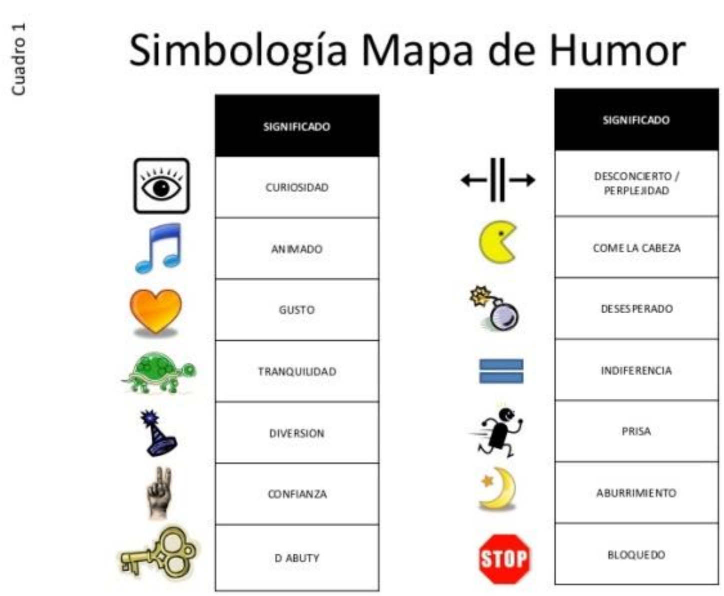


Figura 1. Simbología Mapa de Humor. Fuente: Gómez-Chacón (2002)

Guzmán también señala que los bloqueos son los que no nos permiten el uso de nuestras potencialidades. Por ello realiza sugerencias para lograr los desbloqueos en la resolución de problemas y así el progreso en nuestra actividad global podría ser realmente importante.

Tabla 1. Sugerencias para lograr los desbloqueos en la resolución de problemas (Guzmán, 2006)

Sugerencias para lograr los desbloqueos en la resolución de problemas			
Tipo de bloqueo		**Bloqueos**	**Desbloqueos**
AFECTIVOS		Apatía, falta de interés	Contextos estimulantes
		Miedo al fracaso, ansiedad	Valoración de los intentos
		Apego a las propias ideas	Autocrítica
COGNOSCITIVOS	**En la percepción del problema**	En reconocerlo	Reformular el problema
		En desglosarlo	Descomponer
	En el ataque al problema	Visión estereotipada	La pregunta como actitud
		Tendencia al juicio crítico	Trabajo en grupo
		Rigidez mental	Listas de ideas, brainstorming

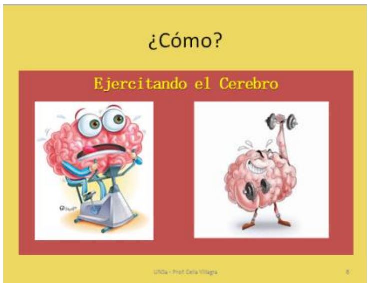
El protocolo de resolución de problemas propuesto por Guzmán, es un instrumento que propicia la metacognición por cuanto el resolutor del problema debe reflexionar sobre su tarea. El protocolo ideal de proceso debería reproducir, para su estudio, cuanto ha pasado en la mente del resolutor en lo que se refiere: a lo que ha ido realizando, a lo que ha ido pensando, a los sentimientos y situaciones afectivas por las que ha ido reflexionando. Una vez realizado el protocolo se trata de analizarlo distinguiendo las diversas etapas por las que ha transcurrido. Finalmente tras el examen de lo que el proceso ha sido en cada una de sus partes hay que compararlo con las que consideramos formas eficaces de proceder.

Metodología del Taller

Teniendo en cuenta el marco teórico expresado, las actividades que se propongan deben propiciar que los alumnos puedan en una primera instancia reconocer sus emociones. Se debe priorizar el trabajo grupal. Se utilizará cómo técnicas de desbloqueo: la valoración de los intentos, el uso de frases e imágenes motivadoras, la pregunta, la lista de ideas y el brainstorming. Progresivamente se incorporará el mapa de humor y posteriormente el protocolo de proceso. En la elaboración del protocolo de proceso se utilizará como técnica de escritura la narración, ya que promueve procesos de metacognición. En la puesta en común se hará hincapié en la explicitación de sentimientos y en la discusión de los resultados, correctos o erróneos de tal manera que todos se enriquezcan con estrategias diferentes, en algunos casos más eficientes, para la resolución del problema propuesto.

Actividades para el taller

- En el primer encuentro se trabajará con un problema disparador que permita registrar las conductas que manifiesten los alumnos e indagar posteriormente sobre las emociones que sintieron mientras resolvían el mismo.
- Luego de un tiempo prudencial se seleccionarán algunos alumnos para que socialicen sobre la producción realizada (correcta, errónea o inconclusa). Se deben realizar intervenciones oportunas que solo orientarán la discusión de los resultados y siempre iniciando con los resultados erróneos para favorecer el proceso de validación.
- Teniendo en cuenta las sugerencias de Guillén (2014) se dialogará con los alumnos sobre los aportes de la neurociencia, particularmente todo lo relativo al cerebro, a la plasticidad del mismo, haciendo énfasis en que es posible pensar mejor y que una de las maneras de lograr un pensamiento eficaz pasa por la práctica a fondo del pensamiento a través de la actividad de resolver problemas.
- Se deben seleccionar problemas secuenciándolos según el orden de complejidad y tratando de que los contextos sean variados.
- Se deben incluir momentos donde se les presenten a los alumnos imágenes motivadoras como por ejemplo:



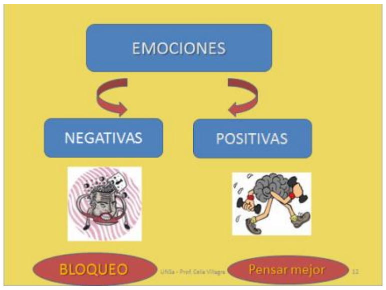


Figura 2. Ejemplos de imágenes que se pueden presentar a los alumnos

- Cada socialización de un problema, por parte de los alumnos, debe iniciar con el relato sobre los sentimientos que experimentan cuando lo resuelve.
- Ante el bloque de la mayoría de los alumnos en la resolución de algún problema se debe utilizar como técnicas de desbloqueo: la pregunta y el brainstorming.
- En los siguientes encuentros se incorporará el mapa de humor y se solicitará a los alumnos que una vez terminada la fase de resolución del problema, hayan encontrado o no la respuesta, utilicen los íconos del mapa y dibujen la secuencia de los mismos según lo que hayan sentido. Se debe dar la posibilidad de que cada uno, si considera pertinente, diseñe sus propios íconos o dibujos o utilice palabras.
- Cada vez que sea necesario, en los casos de emociones negativas, se trabajará con listas de ideas, con la reformulación del problema y con el uso de frases motivadoras para alentarlos.
- En los últimos encuentros se incorporará el protocolo de procesos, sugerido por Guzmán. Se les proporcionará a los alumnos las pautas y se explicará la importancia de realizarlo ya que permitirá reflexionar sobre lo que sintieron, pensaron e hicieron. Además de la importancia de incorporar la narrativa como técnica para propiciar aprendizaje y procesos de identificación de emociones.

Conclusiones

Es necesario que los docentes estén convencidos que es posible que sus alumnos desarrollen sus capacidades y que comprendan que se debe considerar el papel de las emociones en el aprendizaje de la matemática. Llevar a cabo una propuesta que relacione emociones y problemas matemáticos implica capacitarse para ello lo cual es y sigue siendo un desafío. Sin embargo el desarrollo de un taller de estas características, donde encuentro a encuentro se debe lograr que al menos un alumno cambie de actitud frente a los problemas es el motor para pensar en alternativas diferentes a las que se está acostumbrado en la práctica cotidiana cuando se enseña matemática.

Se ha tenido la posibilidad de compartir esta propuesta de taller a docentes del nivel medio, tratando de que experimenten las actividades propuestas para los alumnos. En general se pudo percibir por parte de los docentes un gran interés y aceptación de la propuesta como viable para ser implementada.

Finalmente se considera que la dimensión emocional debería ser trabajada en el aprendizaje de la matemática y en el aprendizaje en general porque permite desarrollar capacidades.

Referencias bibliográficas

Charnay, R. (1994). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En Parra y Saiz (comp): *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones.* Buenos Aires: Paidós.

Dweck, C. (2012). *Mindset: how you can fulfil your potential.* London: Ed.Robinson.

Gil Ignacio N., Blanco Nieto L., Guerrero Barona E. (2006). El papel de la afectividad en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación 340(1)*, 551- 569.

Gómez-Chacón I. (2002). *Afecto y aprendizaje matemático: Causas y consecuencias de la interacción emociona*l. Huelva: Editorial Universidad de Huelva.

Guillén J. (2014). *Mentalidad en crecimiento: la mejora siempre es posible*. Recuperado 5 de Abril de 2015 de https://escuelaconcerebro.wordpress.com/tag/plasticidad-cerebral/

Guzmán M. (2006*). Para pensar mejor (*Segunda edición) .Madrid: Editorial Pirámide.

Polya, G. (1965): *Cómo plantear y resolver problemas* (Julián Zagazagoita, trad.) México: Editorial Trillas). (Obra original publicada en 1945).

Rodríguez M. (2012). Resolución de Problemas. En M. Pochulu y M. Rodríguez (comp.) *Educación Matemática* (p. 153). Buenos Aires: Eduvim.

LA EVALUACIÓN: UN DESAFÍO EN EL CONTEXTO DE FORMACIÓN DOCENTE

Ibarra Lidia, Formeliano Blanca, Méndez Graciela
Universidad Nacional de Salta- Facultad de Ciencias Exactas. (Argentina)
ibarralidia2015@gmail.com, blazufor@hotmail.com, nildagramendez@yahoo.com.ar

RESUMEN: El presente trabajo surge en el marco de un Postítulo de Matemática dictado en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Salta, Argentina; el mismo se organizó en tres módulos: Didáctica de la Geometría, Didáctica de la Aritmética y del Álgebra y Formas de Evaluar en Matemática. Este trabajo hace foco en Formas de Evaluar en Matemática en las que se hace referencia a los siguientes objetivos: estudiar la importancia de la evaluación; interpretar las funciones de la misma y analizar algunos instrumentos de Evaluación en la Escuela Secundaria Obligatoria.

Palabras clave: evaluación, matemática, saberes, diagnóstico, relatos.

ABSTRACT: This work arises in the setting of a mathematics upgrading course given in the Faculty of Exact Sciences at the National University of Salta, Argentine. The course was organized in three modules: Didactics of Geometry, Didactics of Arithmetic and Algebra and Ways to evaluate Mathematics. This work focuses on the ways to evaluate in mathematics where the authors refer to the following objectives: to study the importance of evaluation; to interpret its functions and to analyze some evaluation tools in the Compulsory Secondary School.

Key words: evaluation, mathematics, knowledge, diagnosis, retailing.

Introducción

En la enseñanza de un tema de Álgebra o Geometría se proponen problemas interesantes, sin embargo, en los instrumentos de evaluación se observa que, en general, se evalúa mediante actividades que requieren de aplicaciones tradicionales. Si bien se propician tareas de construcción de conceptos en el aula, se evalúa con actividades que favorecen la habilidad de la memoria. Además, durante la enseñanza se tiene en cuenta el ritmo de aprendizaje de los estudiantes pero, en las instancias de evaluación, se aplica prueba única. En el desarrollo de las clases en el aula se organizan grupos de trabajo para algunas actividades pero sin embargo las evaluaciones grupales son infrecuentes. Es decir, las estrategias de enseñanza de los docentes y la planificación de las clases son contradictorias con los instrumentos de evaluación que se implementan en el aula.

A partir de la observación en carpetas, de las formas de enseñar que tienen los docentes y de las formas de implementar los instrumentos de evaluación nos planteamos las siguientes cuestiones: ¿Qué aspectos tienen en cuenta los docentes al diseñar un instrumento de evaluación? ¿Cómo diseñan los instrumentos de evaluación? ¿Establecen criterios de evaluación? ¿Cuál es el rol del error?

Orientaron el desarrollo del módulo “Formas de evaluar en Matemática” los siguientes objetivos:

- Estudiar la importancia de la evaluación en la Escuela Secundaria Obligatoria y caracterizar la situación actual.
- Interpretar y comprender las funciones de la Evaluación.
- Analizar y comparar algunos instrumentos de Evaluación.
- Para el desarrollo de este módulo, se le facilitó al docente una cartilla con actividades organizadas de la siguiente forma:
- Actividades de diagnóstico.
- Actividades de interpretación y discusión del marco teórico didáctico y matemático sobre un texto relacionado al módulo.
- Actividades de elaboración de instrumentos de evaluación.
- Trabajo de campo de modalidad virtual para cada encuentro.

Para dar cierre al módulo, los docentes presentaron una propuesta de evaluación sobre algún tópico de Geometría, de Aritmética o Álgebra. A partir de las producciones de los docentes intentamos dar respuesta a las cuestiones planteadas inicialmente.

Marco teórico

El tema en cuestión nos lleva a delimitar “el saber del docente” y / o “el saber del alumno”; allí hay un problema de ambigüedad semántica con respecto al conocimiento del que se trate, entonces tiene sentido plantear y analizar la relación del docente con el objeto Evaluación (Chevallard, 2010).

La noción de conocimiento como un producto histórico, no cerrado e inacabado, lleva a reflexionar acerca de la tarea de selección, organización y evaluación de contenidos de Matemática que tienen lugar todos los días en las escuelas. Esa mirada particular permite a la vez reconocer y valorar las diferentes aproximaciones que hacen los alumnos a la hora de aprender en función de su historia didáctica y su trayectoria de aprendizajes; en este sentido “Evaluar es una práctica compleja, cuya realización incluye diversas operaciones: recoger información, valorar y tomar decisiones” (Crippa, A. y Guzner, G.1998, p.144).

Teniendo en cuenta la importancia de la evaluación como parte fundamental del proceso de enseñanza y aprendizaje y la necesidad de reflexionar sobre las características de las evaluaciones que actualmente se implementan, se propusieron en este módulo distintas formas de evaluación. En relación a esto,

> … la autonomía y la responsabilidad de un profesional no se entienden sin una *gran capacidad de reflexionar en la acción y sobre la acción.* Esta capacidad está en el interior del desarrollo permanente, según la propia experiencia, las competencias y los conocimientos profesionales de cada uno”. (Perrenoud, 2011, p.12)

Desde este enfoque, en las instancias de capacitación es preciso realizar un trabajo de adaptación y de recomposición de la realidad de las prácticas sin el cual la incidencia sobre éstas puede ser nula, aun cuando el docente tenga la intención de revisarlas. Para revertir el hecho de que los actos de enseñanza y evaluación transitan caminos divergentes, en los encuentros de capacitación se focalizó en tareas que concebían varios procedimientos de resolución de los problemas de aritmética, álgebra o geometría, lo que favoreció la integración con diferentes formas de evaluar.

Teniendo en cuenta los objetivos del presente trabajo y el rol formativo de la evaluación, los docentes construyeron instrumentos de evaluación convencionales y no convencionales, por ejemplo, la evaluación a partir de relatos; éstos son producto de intercambios informales entre colegas, muestran la fortaleza y la diversidad de los modos de hacer que están aconteciendo y que, a la vez, van conformando un campo pródigo en prácticas posibles, atravesado por reflexiones de ésas que se hacen al borde de la experiencia de enseñar y se adaptan al currículum matemático de los diferentes ciclos de enseñanza constantemente.

Escribir relatos es un modo de articular teoría y práctica en el recorrido de formación inicial, en las trayectorias docentes, en la construcción de la tarea docente, en los procesos de práctica efectiva y en la observación y reflexión sobre las prácticas de enseñanza.

Los estudios sobre el contrato didáctico y sus relaciones con los procesos de aprendizaje son esenciales ya que lo que está en juego es el significado real del conocimiento construido por los alumnos y el modo en que se relaciona con la evaluación. El contrato didáctico es un conjunto de reglas -con frecuencia no enunciadas explícitamente- que organizan las relaciones entre el contenido enseñado, los alumnos y el profesor dentro de la clase de matemática (Brousseau, 1994).

Por ello, es importante imaginar otros modos de evaluar a los alumnos, aquellos de los que se infiera de qué forma producen argumentos, cómo formulan sus explicaciones, de qué manera varían sus ideas y las capacidades que son esenciales para formar a un joven pensante.

Metodología

Los veintiocho docentes que cursaron el Módulo, desempeñan su tarea en escuelas públicas a las que concurren estudiantes de nivel socio-económico medio y bajo. La población de docentes se caracteriza por su experiencia, el 50% tiene una experiencia áulica de más de quince años, 35% han trabajado durante diez años y el resto son docentes nóveles, con experiencia menor a un año. Cinco de ellos se desempeñaban en tareas áulicas desde el inicio del ciclo lectivo 2015.

Durante el proceso de capacitación se elaboraron y aplicaron instrumentos de evaluación de modo cualitativo explicitando los modos en que los docentes articulan las prácticas áulicas con las tareas de evaluación.

En el presente trabajo se analizarán las actividades de diagnóstico y los relatos que elaboraron los docentes al final de cada jornada.

Los datos recogidos a través de las actividades desarrolladas permitieron contrastar los objetivos planteados en el módulo y en particular, analizar las funciones de la evaluación.

Las Funciones de la Evaluación en Matemática durante el desarrollo del Postítulo

Se han elegido, a modo de ejemplo, dos tipos de evaluación para establecer la función formadora de la misma:

a) Diagnóstico

b) Relatos.

Ambas evaluaciones tienen la característica de ser un instrumento individual, cualitativo e integrador orientativo y reflexivo. Los criterios y los respectivos indicadores de evaluación se explicitaron en cada uno de los módulos con la finalidad de identificar los conceptos en cada situación de aprendizaje, propuesta que se integra con los objetivos planteados.

a.- Diagnóstico

La evaluación diagnóstica se implementó al inicio de cada módulo de Geometría, Aritmética y Álgebra; la misma nos permitió reconocer los contenidos matemáticos y didácticos que poseen los profesores antes

a.1. Características generales:

La evaluación diagnóstica no tuvo la intención de calificar el desempeño del profesor sino el propósito de crear puentes entre el conocimiento del docente y la tarea de capacitación.

Además permitió analizar algunos supuestos que subyacen en este grupo de docentes en relación a la enseñanza y, en particular, los referidos a la evaluación.

Analizados los diagnósticos, la devolución se constituía en la primera actividad del siguiente encuentro presencial.

Para ejemplificar lo expresado trataremos la evaluación diagnóstica correspondiente al Módulo III: Formas de Evaluar en Matemática.

Consigna para los docentes:

Situados en las prácticas de Evaluación:

Al evaluar un contenido ¿qué función cumple la evaluación? ¿Cómo construye un instrumento de evaluación?

Escriba al menos tres diferencias y tres semejanzas entre las evaluaciones de los dispositivos ONE, PISA, propuestas por el sistema educativo formal y las evaluaciones de los aprendizajes que usted realiza en su práctica docente.

Diagnóstico Módulo III

a.2. Algunas respuestas

A modo de ejemplo se seleccionan tres preguntas y las respuestas de algunos profesores.

a) Al evaluar un contenido, ¿qué función cumple la evaluación? *"...Con la evaluación puedo reflexionar y modificar mis prácticas áulicas…".*

"…*Al evaluar un contenido, la función que cumple la evaluación es doble, ya que por un lado se pretende conocer el estado de los conocimientos de los alumnos y clasificar, para responder a las exigencias de una determinada institución. Por otro lado deben servir para mirar nuestras propias prácticas docentes, de modo que podamos orientar y reorientar nuestras estrategias metodológicas."*

"…Establecer qué estrategias han sido apropiadas por el estudiante"

"Establecer posibles errores en la enseñanza del tema (esto se puede pensar como un error de enseñanza, algo que al ser explicado fue interpretado de manera errónea por los alumnos, por una mala expresión "involuntaria" del docente)…"

b) ¿Cómo construye un instrumento de evaluación?

"…*Para construir un instrumento de evaluación tengo en cuenta los siguientes aspectos:*

Contenido a evaluar - Metodología de trabajo en el aula al enseñar el contenido - A partir de los aspectos nombrados anteriormente propongo al estudiante un instrumento de evaluación similar a las situaciones que se trabajaron en el aula al momento de enseñar el contenido, esto me permite establecer si ha podido apropiarse de nuevas estrategias y conocimientos o permanece resolviendo como al iniciar el tema…"

"…*Un instrumento de evaluación se construye teniendo en cuenta varios factores como por ejemplo: Corrección de carpetas-Desempeño en la resolución de ejercicios en el pizarrón-Trabajo en grupo-Disciplina-Evaluación escrita…"*

"…Según el tema enseñado: Priorizo lo más importante-El grupo de alumnos con los que trabaja - El trato entre pares y con la docente…"

c) Escriba al menos tres diferencias y tres semejanzas entre las evaluaciones de los dispositivos ONE, PISA propuestas por el sistema educativo formal y las evaluaciones de los aprendizajes que Ud. realiza en su práctica docente.

"…*Semejanzas: Se toman ejercicios- Se toma poca teoría. Diferencias: Las consignas no se relacionan con el contexto de los alumnos-Situaciones problemáticas complejas- Opción de resultados" Observación: solo vi una sola evaluación de ONE y nunca vi una de PISA…"*

"…*ONE presenta resolución de soluciones relativamente sencillas y más bien para verificar. PISA presenta situaciones problemáticas un poco más complejas, más elaboradas con la integración de varios temas…"*

"…de las *evaluaciones PISA no realice análisis en ningún momento de mi trayectoria docente. Realizaré la comparación entre las evaluaciones de la ONE y las que realizo yo en mi práctica áulica...*"

Tabla 1. Respuesta de un docente del Diagnóstico

	Evaluaciones ONE	Mis evaluaciones
Diferencias	Establecen problemas de diferentes tipos de resolución (alto, medio, bajo). Evalúa los contenidos de manera integrada. Utiliza ítems de múltiples opciones.	No establezco diferencias de nivel. Evalúo los contenidos segmentados, a medida que los voy desarrollando Utilizo ítems de respuestas abiertas.

a.3. Devolución de la evaluación diagnóstica.

La información que nos proveyó la evaluación diagnóstica nos permitió diseñar una planificación en función de puntos de partida reales del grupo docente y la posibilidad de prever la realización de modificaciones en la planificación para atender las necesidades de los profesores.

b.- Formativa a través de “relatos”.

b.1. Características generales:

Esta actividad se realiza al final de cada encuentro presencial; ésto permite que los docentes almacenen un recorrido de lo vivido en la capacitación, por ejemplo, escribiendo libremente sus impresiones, recuerdos de lo sucedido, las preguntas que surgieron, los problemas que encontraron, lo que no estaba previsto y ocurrió, las intervenciones que resultaron fructíferas o no, entre otras cuestiones.

La escritura de las prácticas es considerada como un dispositivo para reflexionar y repensar sus modos de hacer; los textos de la práctica son escritos que permiten reconstruir la experiencia cotidiana escolar, los debates en cuanto a la apropiación del conocimiento y la mediación docente.

Estas memorias resultarán un insumo de las situaciones de evaluación que apunten a identificar posibles formas de evolución de las prácticas como la que describimos a continuación

Ejemplificamos las actividades que se solicitaron en los dos encuentros presenciales:

b.2. Ejemplos de algunos Relatos.

A continuación transcribimos las expresiones vertidas en los relatos de algunos docentes que, a nuestro criterio, son los más representativos:

Consigna para los docentes: Elabore un relato individual sobre lo trabajado en los diferentes momentos de este encuentro

Relato al finalizar primer encuentro presencial del Módulo III

"…En esta jornada se abordaron algunos de los instrumentos de evaluación que pueden ser implementados en clase de matemática, que van a demostrar más allá del manejo del contenido, en diferentes "escalas", la percepción del alumno ante dicha situación. La implementación de relatos y qué interpretar de esos relatos, las ideas claves que le fueron significativas al alumno o luego de la clase, etc. Cómo así también la escritura de textos matemáticos, como parte del quehacer matemático, ya que deben referir a los términos adecuados para la interpretación de los mismos…"

"Durante la jornada observé diferentes formas de presentar los criterios, lo que me posiciona en una situación de aprendizaje continuo".

"Sin duda la evaluación es un módulo que precisa de más tiempo y análisis".

"El constatar también que la teoría es escasa por un lado me alienta a investigar y por otro a atender los conocimientos de mis pares…"

"Por medio de la exposición de los distintos grupos se pudo apreciar los diferentes instrumentos de evaluación, aplicados a diversos temas matemáticos. Como también se estableció la distinción entre objetivo y propósito de un instrumento de evaluación; el objetivo correspondiente con la secuencia didáctica y el propósito está relacionado con nuestro quehacer docente, de manera de reelaborar nuestra práctica. Además los distintos problemas propuestos en la evaluación tienen que estar relacionados con los de la secuencia didáctica y deben estar realizados de manera de evaluar el proceso de construcción de los conocimientos"

b.1.1. Devolución del análisis realizado sobre los relatos.

Los relatos ponen en evidencia momentos de reflexión individual; coincidimos en que la práctica reflexiva es un trabajo que demanda un cierto método y una cierta formación. Se trata, paradojalmente, de instalar una rutina del cambio. (Perrenoud, 2011). En este sentido, la implementación de la escritura personal sobre las prácticas puede pensarse como un dispositivo para la formación de profesores reflexivos que articulen los saberes acumulados a lo largo de la formación inicial con el campo laboral en ámbitos escolares y más allá de la escuela.

b.2. Ejemplo y análisis de Relatos presentados una vez finalizado el dictado del postítulo.

Consigna para los docentes: "Elaborar un relato individual de algún tópico que le haya resultado especialmente interesante".

Relato al finalizar el dictado de postítulo

"Los criterios de evaluación, los indicadores, los objetivos, etc. Son conceptos que siguen siendo objeto de estudio y en los cuales necesitamos orientación y profundización…"

"…Sin duda la cuestión de seleccionar los indicadores en la planificación es lo que me genera inquietud".

La lectura de relatos permite analizar recurrencias, continuidades y discontinuidades en la memoria colectiva de las prácticas docentes, tal es el caso del siguiente relato:

"*Además los distintos problemas propuestos en la evaluación deben estar relacionados con la secuencia presentada a los alumnos".*

"Por último es gratificante discutir y analizar los trabajos expuestos y presentado por los colegas. Permitiendo evidenciar las diversas experiencias y situaciones de procesos de enseñanza y aprendizaje integrado con las evaluaciones. Al mismo tiempo, los trabajos se enriquecen con las producciones verbales y opiniones constructivistas del panel de docentes orientadores".

Conclusiones

A partir de la instancia del diagnóstico~~,~~ y de las interacciones con los docentes se realiza la siguiente caracterización en relación a la evaluación en el aula:

- Los docentes expresan que una de las principales funciones de la evaluación es la informativa pues permite tomar conocimiento de los aprendizajes, sin embargo no la conciben como una instancia formativa ya que sus expresiones están centradas en los contenidos.
- Si bien identifican errores comunes cometidos por los alumnos no expresan posibles intervenciones remediales.
- Los docentes expresan que construyen instrumentos de evaluación teniendo en cuenta varios factores: corrección de carpetas, desempeño en la resolución de ejercicios en el pizarrón y trabajo en grupo.
- Para construir un instrumento de evaluación se debe tener en cuenta el contenido abordado y la forma en que ha sido trabajado.
- En experiencias de formación, escribir un relato es un modo de reflexionar y de producir conocimiento acerca de la práctica. Estos relatos de práctica se escriben en primera persona y van dando cuenta de aquello que se va a realizar a futuro o de lo que sucedió en el aula.
- A pesar de los dos cambios curriculares del sistema educativo de la República Argentina en los últimos veinte años~~,~~ la evaluación no estaba despojada del carácter sancionador del error, expresado por los docentes en el diagnóstico; sin embargo al finalizar el módulo, los instrumentos de evaluación propuestos tenían en cuenta aspectos significativos que permitirían superar la divergencia entre la enseñanza y la evaluación

Algunas propuestas que realizaron los docentes a partir del cursado del módulo fueron:

a) Enseñar y alentar a que los alumnos escriban en sus cuadernos o carpetas y en afiches para "colgar" en el aula sus relatos sobre las tareas.
b) Diseñar dispositivos que permitan comunicar el trabajo de los alumnos al docente que asuma el nuevo ciclo lectivo.
c) Recuperar los apuntes y cuadernos del año anterior a los efectos de descubrir cómo fue enseñado un tema, cuál es la notación que usa, qué tareas propone el docente.

Finalmente, desde la capacitación se dio prioridad a cómo trabajar la resignificación de los conocimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y didácticos y cómo evaluar el proceso a través del diseño de distintos instrumentos de evaluación. Sin embargo los docentes expresaban sus dificultades para establecer criterios, indicadores y la correspondiente valoración de los ítem en las diferentes tareas propuestas. Ésto pone en evidencia la necesidad de la formación permanente para garantizar un desempeño acorde con los cambios propuestos en los diseños curriculares y las demandas de la sociedad.

Referencias bibliográficas

Brousseau,G. (1994)"Los diferentes roles del maestro", en Parra y Saiz (comps.*),Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones.* Buenos Aires. Paidós Educador.

Crippa, A. y Guzner G (1998). La Evaluación de los Aprendizajes. En Programas de Perfeccionamiento Docente. Prociencia-Conicet. Matemática. Temas de su Didáctica. Buenos Aires: Ministerio de Cultura y Educación de la Nación. CONICET.

Chevallard, Y. (2010) Conferencia *Segundo Congreso Internacional de Didácticas Específicas.* Buenos Aires. Recuperado 28/12/2014 de hhttp://www.unsam.edu.ar/escuelas/centro didácticas. html

Giménez Rodríguez, J. (1997). *Evaluación en Matemáticas*: Una Integración de Perspectivas. España: Editorial Síntesis.

Perrenoud, P. (2011) Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar. Barcelona. Editorial Grao.

LA FOTOGRAFÍA Y EL VIDEO DIGITAL COMO HERRAMIENTA PARA APRENDER EL OBJETO PARÁBOLA

Jonathan González Ortega, María Inés Ortega Arcega, David Zamora Caloca
Universidad Autónoma de Nayarit. (México)
ronaldinho_biosap@hotmail.com, maijua9@hotmail.com, dzcaloca@gmail.com

RESUMEN: El artículo es resultado de una tesis de la Licenciatura en Matemáticas, en la que participaron estudiantes de la carrera de Ingeniera Química de la Universidad Autónoma de Nayarit y se centra en la modelación de la situación problema "Lanzamiento de un chorro de agua" para el aprendizaje del objeto matemático Parábola. Se planteó que mediante la manipulación de fotografías digitales, el análisis de las distintas representaciones semióticas que el software Tracker proporciona (Tabla de datos, gráficas, la función ajustada) y la manipulación de los ejes coordenados en distintas posiciones, el alumno logrará identificar los distintos parámetros que describen al objeto Parábola. Una vez que se han revisado los instrumentos de valoración, se concluye que el estudio fue satisfactorio, porque el alumno aprendió a relacionar los parámetros de la parábola con una situación problema de la vida cotidiana y con la ecuación de segundo grado, además de propiciar motivación e interés por el aprendizaje de las matemáticas, ya sea individual o colaborativamente.

Palabras clave: modelación, fotografia, tracker, semiótica, parábola

ABSTRACT: The article shows the outcomes of a thesis in option of a Degree in Mathematics, in which Chemical Engineering students of the Autonomous University of Nayarit took part. It focuses on modeling the problem situation "Launching a water jet" for the learning of the mathematical object Parabola. It was stated that the student will be able to identify the different parameters that describe the Parabola object through the manipulation of digital photographs, the analysis of the different semiotic representations provided by the Tracker software (Data table, graphs, adjusted function), and the manipulation of the coordinated axes in different positions. Once the assessment instruments have been checked, the study was considered satisfactory, because the student learned to relate the parameters of the parabola with a problem situation of daily life, and with the second degree equation. In addition, it encourages motivation and interest in learning mathematics, either individually or collaboratively.

Key words: Modeling, Photography, Tracker, Semiotics, Parabola

Introducción

El estudio se centra sobre los elementos que intervienen en la modelación matemática (Arrieta, 2003; Arrieta y Díaz, 2015; Biembengut, 2011; Pantoja, Ulloa, Nesterova, 2013; Pantoja, Guerrero, Uloa, Nesterova, 2016), en el afán de incidir sobre la relación existente, que se pretende sea una realidad, entre las matemáticas y la vida cotidiana, contexto en el que desarrollan sus actividades, y no sólo en el aula, profesor y alumnos. El caso que se reporta es resultado de la tesis de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nayarit (UAN) intitulada “La fotografía digital y el software Tracker como mediador para propiciar el aprendizaje significativo del objeto matemático Parábola”, estudio realizado con alumnos de primer semestre de la carrera de Ingeniería Química del Área de Ciencias Básicas e Ingeniería (ACBI).

Se parte de una situación problema de la vida cotidiana, como es el lanzamiento natural de un chorro de agua desde un recipiente cerrado y con orificio en la parte superior en tres diferentes posiciones, que se fotografía para su análisis con el software Tracker. La diferencia entre lo planteado tradicionalmente con la propuesta, es que se mantiene fija la trayectoria del chorro de agua (figura 1) y es el plano cartesiano el que se desplaza vertical y horizontalmente, además de girarlo en ángulos 90º, 180º y 270º grados, con el propósito investigar el efecto que produce sobre el aprendizaje del alumno, la modelación matemática de situaciones cotidianas con el Tracker y el Geogebra e indagar si los alumnos se motivan para aprender matemáticas.

Las actividades se integraron en un cuaderno de trabajo, que se respondió en trabajo individual y colaborativo en el centro de cómputo, bajo la supervisión del tesista, director y codirector de tesis. Se incluyó en el cuaderno de trabajo, para fortalecer los conocimientos previos, una serie de actividades con ayuda del GeoGebra (Tabla 1) como recordatorio de las relaciones existentes entre los coeficientes de la ecuación de segundo grado con los parámetros de parábola: coordenadas de vértice y foco, ecuación de la directriz y el lado recto.

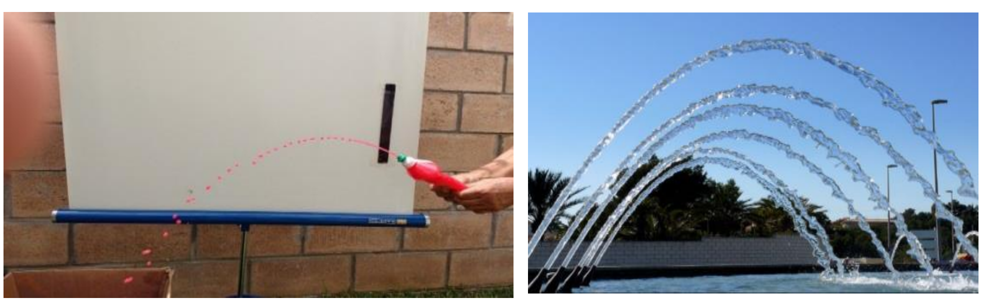
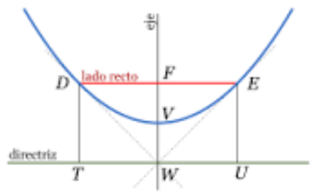


Figura 1. Fotografías de trayectorias de chorros de agua

Tabla 1. Ecuaciones de la parábola y sus parámetros

 Ecuación: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ Ecuación: $y = ax^2 + bx + c$	Coordenadas del vértice: $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ Coordenadas del foco: $F\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2+1}{4a}\right)$ Ecuación del eje principal: $x = \frac{-b}{2a}$ Ecuación de la directriz: $y = \frac{4ac-b^2-1}{4a}$

Teoría de las representaciones semióticas de Raymond Duval

La perspectiva teórica que sustentó este trabajo es la teoría de registros de representación semiótica de Duval (2004), porque bajo este marco de referencia se le da sentido a la importancia que tiene la comprensión de los acercamientos verbal, analítico, numérico, visual y gráfico, a los elementos resultantes del análisis de las fotografías digitales por los alumnos con el Tracker. Se analizaron los datos numéricos, las gráficas y la expresión analítica del polinomio de segundo grado (figura 2), en relación de la trayectoria en distintas posiciones del chorro en las que se identifique a la parábola.

Duval (2004) ubica a la semiosis como una parte fundamental de la actividad cognitiva y plantea tres tipos de tareas para propiciar la construcción de un concepto matemático: la identificación de registros de representación semiótica, el desarrollo de tratamientos en el mismo registro y la generación de conversiones entre dos registros. Durante el desarrollo de las actividades planeadas y ejecutadas, se reconocieron cinco registros de representación semiótica: visual con la fotografía, gráfico con las tres representaciones que muestra Tracker, numérico con las tablas que se generan al marcar los puntos sobre la trayectoria, verbal con la discusión colaborativa de los alumnos y analítico con el ajuste del polinomio de segundo grado; cuatro tratamientos, por ejemplo en el registro gráfico, cuando se relaciona la gráfica del chorro de agua en una posición y luego cuando se desplazan los ejes o se rotan; se detectaron al menos seis conversiones, dos de ellas se manifestaron cuando a partir del video (registro visual) se obtiene la tabla de datos (registro numérico) y la ecuación (registro analítico) o bien las tres gráficas.

Posteriormente, se le pide vincular el registro visual (fotografía) de la posición del chorro de agua, con los elementos mostrados en pantalla por el programa Tracker, una gráfica, una tabla de datos y el polinomio de segundo grado asociada a la trayectoria del chorro de agua, en los que se logran reconocer al menos seis conversiones entre los registros: visual-gráfico, visual-numérico, visual-analítico, gráfico-analítico, numérico-analítico y verbal-analítico (figura 2).

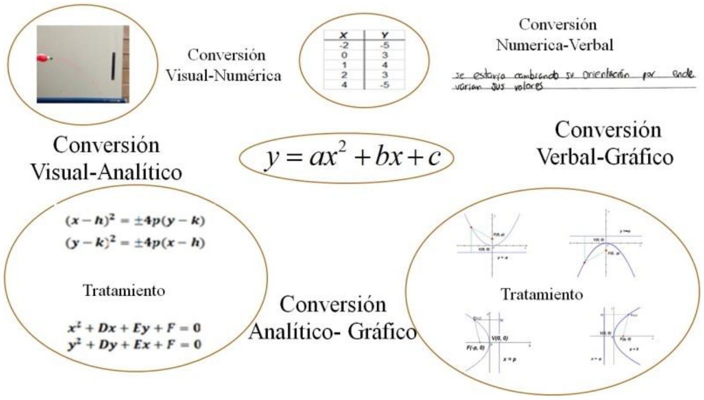


Figura 2. Registros de representación semiótica para el chorro de agua

Modelación matemática

Ezquerra, Iturrioz y Diáz (2011) menciona que el uso de la modelación matemática en situaciones reales, así como el trabajo con actividades abiertas, presentan numerosas ventajas sobre las prácticas y actividades que habitualmente se plantean al alumnado, además de mejorar las capacidades en su posterior desempeño de su vida laboral. En Pantoja, *et al* (2013) y Pantoja, *et al* (2016) se plantea a los estudiantes resolver problemas y trabajar colaborativamente en la modelación de situaciones en el contexto de la vida cotidiana y una vez analizados los reportes de los estudiantes, se considera que lograron el objetivo propuesto, que fue diseñar la fase experimental para grabar el video del llenado de recipientes y del movimiento de un ciclista y un corredor; identificaron las magnitudes involucradas y establecieron las relaciones para determinar el polinomio que mejor se ajusta a los datos tomados en tiempo real.

Así pues, con la modelación matemática se ubica al estudiante ante una situación problema, no inmediata de resolver, que la problematice y con el trabajo colaborativo, la discusión, el razonamiento y sus conocimientos matemáticos, transforme dicha situación. La modelación produce un resultado - un modelo - que es una descripción o una representación de la situación, elaborado a partir de las disciplinas matemáticas, en relación con la experiencia de la persona (Arrieta y Díaz, 2015). La elaboración de un modelo matemático requiere, por parte del modelador, conocimientos tanto matemáticos como no matemáticos, además de una buena dosis de intuición y creatividad para interpretar el contexto, percibir cuáles son las variables involucradas, para comprender la forma en cómo se relacionan con las gráficas, tablas y datos, con la situación problema (Figura 3), aspectos que se buscó desarrollarán los alumnos con la puesta en escena de la propuesta y que una vez analizados los instrumentos de valoración, resulta positivo lo logrado por los estudiantes.

Resultados

El tipo de investigación fue explorativa y cualitativa y se diseñaron actividades que se integraron en un cuaderno de trabajo y al final se aplicó una encuesta de opinión y se entrevistó a cinco estudiantes, con la finalidad de conocer su opinión sobre la propuesta.

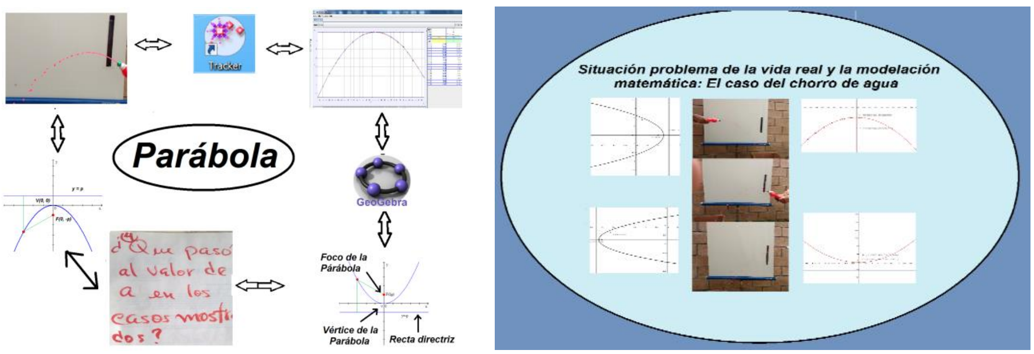


Figura 3. Representaciones semióticas del chorro de agua

El grupo de participantes se organizó en equipos de tres integrantes para el trabajo colaborativo, quienes analizaron las fotografías con el Tracker y obtuvieron una gráfica, la tabla de las coordenadas de los puntos de la trayectoria y la ecuación de la parábola, para al final discutir el modelo matemático en función de la situación problema. También se solicitó a los estudiantes tomar fotografías de situaciones problema donde se identifiquen líneas curvas que asemejen la parábola con la finalidad de hacer extensiva la propuesta didáctica a otras situaciones diferentes a la del chorro de agua.

En sesión grupal se seleccionó la fotografía digital de la parábola (figura 1), sobre la que se trabajó con dos propósitos: el primero es el manejo del Tracker y GeoGebra y dos, para desarrollar un ejemplo completo. Al final de la fase experimental se presentaron los reportes generados por cada equipo de trabajo, y algo relevante que comentar, es que la alumna que aparece en la figura 4, representa con su cuerpo el bosquejo de la parábola.

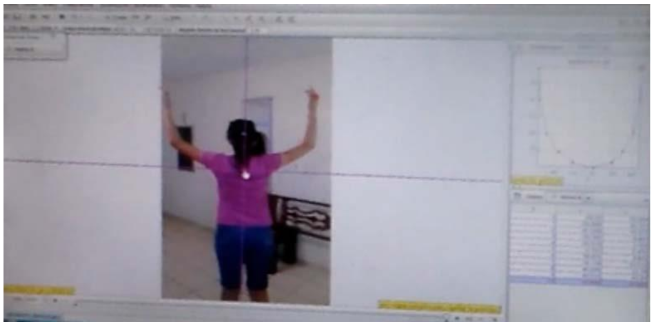


Figura 4. Expresión de una alumna al modelar la parábola

El cuaderno de trabajo.

La versión final del cuaderno de trabajo se integró de tres secciones. De la revisión de la primera sección del cuaderno de trabajo, se evidencia que los alumnos tienen un nivel aceptable de manipulación algebraica, logran identificar los parámetros y los señalan sobre la gráfica que se les pide trazar en el cuaderno (Figura 5a), aunque con sus acepciones, porque no logran identificar algunos parámetros (Figura 5b), por ejemplo en el reporte del alumno 2 actividad 1 inciso b, su desarrollo algebraico es correcto, pero en su grafica no logra colocar los parámetros de manera correcta.

Otro aspecto que se trató en esta sección fue que el alumno visualizara el efecto de los coeficientes a, b y c del polinomio $y = ax^2 + bx + c$, con la ayuda de los deslizadores de GeoGebra y no tuvieron problemas de interpretación, pero se nota un pobre dominio en la redacción de sus observaciones, pero en general logran identificar los diferentes desplazamientos de la parábola. No se manifiesta algún problema extremo sobre los conocimientos previos como para plantear actividades remediales sobre el manejo algebraico de la parábola.

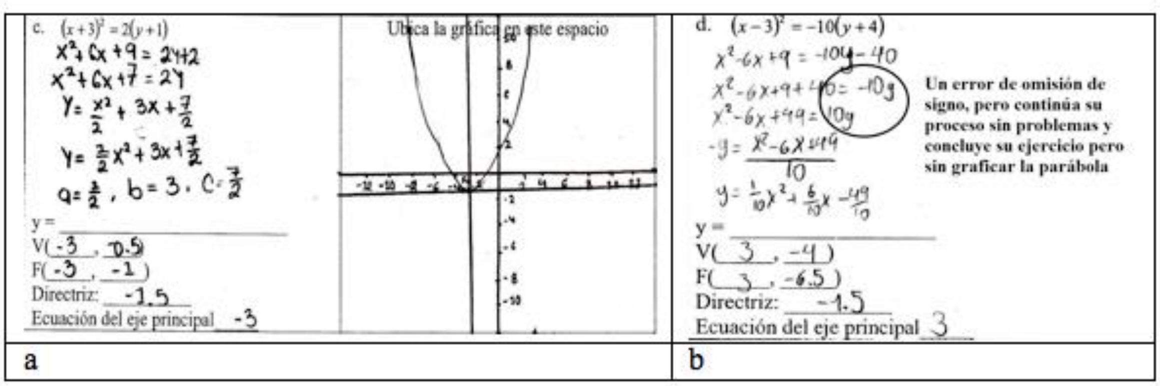


Figura 5. Extracto de la respondido por los alumnos en el cuaderno de trabajo

En la figura 6, se detecta que la redacción del reporte del alumno no es clara, pero al hacer un análisis detallado de lo escrito señala de manera correcta lo solicitado en la actividad, por ejemplo “respecto al movimiento de c, la parábola toma valores de y diferentes, si va a la izquierda es - y y la derecha + y”, se interpretó como que el valor de c hace el efecto desplazar la gráfica en el sentido negativo y positivo del eje en cuestión.

	Explica el efecto que hace sobre la ecuación los cambios de valores de los parámetros a, b y c.
$y^2 = x + by$	Al cambiarse el parámetro los sentidos se ven afectados.
$x^2 + bx = 4y + c$	Si se mueven los parámetros de b, la parábola se mueve hacia arriba y hacia abajo, al mover el parámetro de c la la parábola se mueve de izquierda a derecha.
$x^2 = -3y + b$	Los parámetros a y c no les pasa nada, el unico afectado es el sentido cuando cambia el parámetro de b.

Figura 6. Redacción no clara del estudiante con ideas correctas.

La actividad 2, página 13, de la segunda sección, consistió en que los alumnos reconocieran, en la fotografía digital el chorro de agua, la parábola y sus parámetros, que de acuerdo a lo revisado en el cuaderno de trabajo (figura 7) lo hacen satisfactoriamente pues logran identificar y graficar la parábola asociada al chorro de agua. Para la determinación de la ecuación resultante se empleó Tracker y una de las ecuaciones que encontraron fue y= -.005994x^2 + .02999x+202.6.

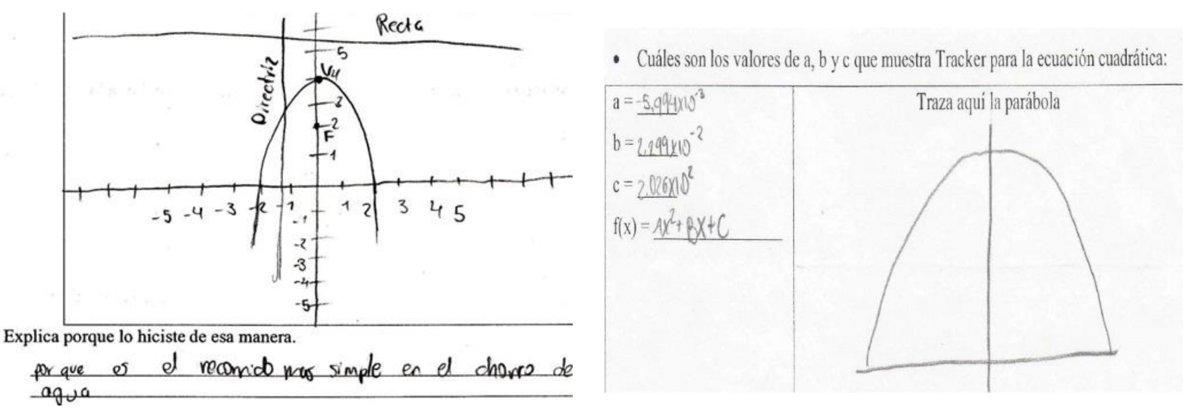


Figura 7. Representación del chorro de agua como parábola.

Análisis de la encuesta de opinión.

Una vez que se valoraron las respuestas, se comenta que no hay diferencia alguna en la opinión de los alumnos por esta alternativa didáctica, dado que todos coinciden que están de acuerdo y completamente de acuerdo con lo organizado para el curso.

Análisis de la entrevista realizada a los estudiantes

Se entrevistó a cinco estudiantes sobre aspectos cualitativos (Pantoja, Ortega, 2016) de la propuesta, con un guion integrado por ocho preguntas, de las cuales, siete fueron orientadas a conocer la opinión sobre esta alternativa didáctica para aprender, su experiencia anterior con este tipo de propuestas y el gusto y el efecto por la inclusión de las TIC en el aula; sólo una pregunta se orientó a la identificación de la trayectoria del chorro de agua con la ecuación que la describe. A continuación se presentan algunas respuestas de los estudiantes:

Profesor: ¿Cómo te pareció esta forma de aprender matemáticas?

A1: Me pareció padre porque siempre nos daban la ecuación y hacíamos la gráfica, sabíamos que era una parábola, pero no sabíamos que la podíamos aplicar a la vida real. Relacionábamos cosas que veíamos todos los días con cuestiones matemáticas.

Profesor: ¿Cómo ha sido la enseñanza de las matemáticas en tu vida escolar?

A4: Ha sido de una manera yo digo interesante, porque los maestros que he tenido de matemáticas, son buenos maestros, tienen su grado en maestría y doctorado, únicamente que entran mucho en la teoría, conceptualizan mucho, es poco atractivo la forma de aprender.

Profesor: En tu vida de estudiante ¿te habías enfrentado a este tipo de planteamientos?, es decir ¿relacionar la vida cotidiana con la matemática? ¿me puedes dar tu opinión respecto a la experiencia que acabas de vivir?

A2: Nunca me ha tocado, que la vida cotidiana y matemática, siempre fue a papel y a lápiz, a mí en lo personal me gusta más a papel y lápiz, yo siento que aprendo mejor, no lo puedo relacionar con la vida cotidiana.

Profesor: ¿Qué te pareció el proyecto? Te gustó? ¿no te gustó?, ¿qué hubieras modificado?

A1: Me gustó, lo único que hubiera modificado era que hubiera más sesiones de 45 min cada una y menos actividades por sesión.

La entrevista refleja la opinión de los alumnos que han desarrollado las distintas actividades durante la fase experimental, y se muestra una actitud positiva, un gusto por haber sido partícipes activos en esta propuesta. Otra cosa que opinaron los alumnos fue que el tiempo del taller fue muy reducido. Esta y otras observaciones se tomarán en cuenta para una réplica del estudio.

Conclusiones

De la revisión de los cuadernos de trabajo, se evidencia que los alumnos tienen un nivel aceptable de manipulación algebraica, logran identificar los parámetros y los señalan sobre la gráfica que se les pide trazar en el cuaderno, aunque con sus acepciones, porque algunos no logran identificar los parámetros.

Respecto de la modelación del chorro de agua los alumnos logran determinar la ecuación, identificar sus parámetros y ubicarlos en la gráfica. Cuando se desplazaron los ejes coordenados, lograron relacionar el movimiento con los coeficientes de la ecuación cuadrática.

Incluir *software* especializado fue una buena opción, porque el Tracker y GeoGebra les ayudó a visualizar la fotografía del chorro de agua con la parábola: su gráfica, su ecuación y sus parámetros.

De la encuesta, se considera que estadísticamente este instrumento no se puede considerar de validez para emitir un juicio que permita afirmar o negar los resultados del curso. Se sugiere modificarlo si se pretende replicar el estudio.

Donde se reflejó una falta de comprensión, fue en el momento de la rotación de los ejes coordenados y el efecto sobre los coeficientes de la ecuación de segundo grado, y una de las causas fue que al cambiar el ángulo de giro en Tracker, no se visualiza explícitamente la rotación (al pasar el ratón por encima del eje x cambia su forma) y pareciera que los ejes están donde mismo pues no se manifiesta ninguna acción, pero al ajustar el polinomio, difiere del que se calculó antes de la rotación.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN, México. Recuperado el 9 de mayo de 2017 de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/arrieta_2003.pdf.

Arrieta, J., y Díaz, M. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *RELIME*, *18*(1), 19-48. DOI: 10.12802/relime.13.1811.

Biembengut, M. (2011). Concepções e Tendências de Modelagem Matemática na Educação Brasileira. En *Acta Electrónica de la XIII Conferenciad Interamericana de Educación Matemática*. Recuperado el 9 de mayo de 2017 de http://www.revista.ufpe.br/topicoseducacionais/index.php/topicoseducacionais/article/viewFile/11/9.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo*. Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. ISBN: 958-670-329-0.

Ezquerra, Á., Iturrioz, I., Díaz, M. (2011). Análisis experimental de magnitudes físicas a través de vídeos y su aplicación al aula. Revista *Eureka* sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias Universidad de Cádiz. 9(2), 252-264. APAC-Eureka. Recuperado el 9 de mayo de 2017 de http://rodin.uca.es/xmlui/bitstream/handle/10498/14733/6-165-Ezquerra.pdf?sequence=6&isAllowed=y. ISSN: 1697-011X. DOI: 10498/14733.

Pantoja, R. Guerrero, L., Ulloa, R. Nesterova, E. (2016). Modeling in problem situations of daily life. *Journal of Education and Human Development, 5*(1), 62-76. Published by American Research Institute. Recuperado el 23 de Mayo de 2016 de http://jehdnet.com/. ISSN: 2334-2978 (Electronic Version). DOI: 10.15640/jehd.v5n1a1. Recuperado el 9 de mayo de 2017 de http://jehdnet.com/vol-5-no-1-march-2016-abstract-7-jehd.

Pantoja, R. y Ortega, M. (2016). La entrevista clínica: opción para indagar el aprendizaje de límites y continuidad*. CPU-e. Revista de Investigación Educativa 22***.** Instituto de Investigaciones en Educación. Universidad Veracruzana: Xalapa, Veracruz. ISSN 1870-5308. Recuperado el 9 de mayo de 2017 de http://revistas.uv.mx/index.php/cpue/article/view/1949/html_48.

Pantoja, R., Ulloa, R., Nesterova, E. (2013). La modelación Matemática en situaciones cotidianas con los software AVIMECA y MATHCAD. *Revista Virtual Góndola*, *Revista de Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias, 8*(1), 8-22. ISSN 2145-4981. Recuperado el 9 de mayo de 2017 de http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/GDLA/article/view/5020

ANÁLISIS DE LA VARIACIÓN DE PARÁMETROS EN SIMULACIONES DE FENÓMENOS DE PROPAGACIÓN DE EPIDEMIAS

Araceli León, Jesús Enrique Hernández-Zavaleta, Mauricio Farrugia
Facultad de Ciencias UNAM (México)
ara.9892@ciencias.unam.mx, jesus.hernandez@cinvestav.mx, farras22@hotmail.com

RESUMEN: Actualmente existen investigaciones que estudian modelos que exhiben dinámicas descentralizadas; por ejemplo, el comportamiento de las variables económicas, fenómenos ecológicos y la dinámica de ciudades, entre otros. La experiencia reportada en este escrito se llevó acabo con estudiantes entre 17 y 18 años de edad, utilizaron el software *NetLogo* para modificar los parámetros de un modelo referente a la dinámica la propagación de una epidemia con la finalidad de fomentar la discusión de nociones, que se encuentran intrínsecas en la dinámica, como son la emergencia y la estabilidad. Éstas promueven una forma integrada de pensar en el campo de las ciencias y la vida cotidiana, además de proponer otras maneras de pensar en la complejidad que nos rodea.

Palabras clave: modelación, descentralización, netlogo

ABSTRACT: Nowadays, there are researches which study models that show decentralized dynamics. For example, the behavior of economic variables, ecological phenomena and the dynamics of cities, among others. The experience reported in this paper was carried out with (17 to 18age group) students who used the NetLogo software to modify the parameters of a model concerning the dynamics of an epidemic spread in order to encourage the discussion of notions, which are intrinsic in the dynamics, such as emergency and stability. Such dynamics foster an integrated way of thinking in the field of science and everyday life. They also propose other ways of thinking about the complexity that surrounds us.

Key words: Modeling, decentralization, NetLogo

Antecedentes

Este trabajo reporta una experiencia que tuvo su génesis en el seminario de enseñanza de las matemáticas, en la facultad de ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México. Las discusiones sobre cómo se vincula el paradigma de los sistemas complejos con el fenómeno educativo llevaron a indagar sobre las explicaciones que dan las disciplinas científicas sobre los fenómenos naturales. Éstos se caracterizan por abarcar elementos que pertenecen al dominio de varias disciplinas, lo que implica que una visión integrada requiere de nuevas formas de construcción de conocimiento.

El principal propósito de esta experiencia fue fomentar la discusión sobre la emergencia y la estabilidad de patrones en un fenómeno descentralizado, utilizando el ejemplo dinámico de la propagación de una epidemia cuya regla de interacción está basada en el modelo SIR (Sano, Infectado y Recuperado) (Esteva, 2002), en un primer momento se estudió la variación de parámetros en la simulación de la biblioteca de modelos de *Netlogo* (Wilensky & Stroup,1999). Esta situación pretende ser una propuesta integradora para fomentar formas de pensar científicas que logren indagar en la complejidad que nos rodea, en estudiantes de último grado de bachillerato (de 17 a 18 años).

La interacción entre la biología y otras áreas de ciencia como la matemática, la física y las ciencias de la computación, ha guiado el intercambio de estrategias y epistemologías para la compresión de fenómenos propios de la disciplina, de esta forma, los sistemas biológicos han servido como ejemplos de sistemas complejos (Holland, 1996; Camazine, 2001; Flake 1998; Wilenski & Reisman, 2006; Solé, 1993; Sánchez & Padilla, 2002). La capacidad de estos sistemas para adaptarse a su entorno, los hace candidatos para la búsqueda de las leyes que permiten la emergencia de patrones estructurales y de modos de comportamiento (Strogatz, 2003; Kauffman 1995). Los fenómenos descentralizados, se refieren a sistemas que presentan un comportamiento, visiblemente regular, el cual carece de alguna forma de liderazgo que lo oriente; por ejemplo, los insectos sociales como las hormigas son capaces de construir estructuras, tan complejas y firmes, como sus hormigueros sin necesidad de que exista una “hormiga líder del proyecto”; en realidad, las interacciones simples a corto alcance entre ellas llevan al trabajo comunitario que tiene como consecuencia un comportamiento emergente.

Existen investigaciones que muestran que los estudiantes encuentran un reto en la comprensión de sistemas que presentan comportamientos emergentes e indagan sobre los elementos que conforman una forma de pensar descentralizada y, por otro lado, la incorporación de la Modelación Basada en Agentes (MBA) se ha mostrado pertinente para ayudar a comprender las dinámicas presentes en sistemas complejos (Santa Fe, 2012; Resnick, 1997; Hernández Zavaleta, Carrión Velázquez & Carrión Vázquez, 2015; Dickes, Sengupta, Farris & Basu, 2016;). La MBA tiene como principal objetivo la descripción y predicción del comportamiento de un sistema dinámico complejo simulando la interacción entre sus partes (llamadas agentes), a partir de reglas básicas que le permiten evolucionar en el tiempo, mostrando un comportamiento macroscópico auto-organizado y descentralizado

(Castiglione, 2006). De esta forma el software *NetLogo* es el escenario pertinente para la visualización y análisis de este tipo de dinámicas.

Desarrollo de la experiencia

Durante el desarrollo de la experiencia se pudieron evidenciar tres momentos que ayudaron a los asistentes a tener una inmersión en la situación propuesta. En el primer momento se pretende encarar el problema de las epidemias con concepciones de los participantes y la documentación de ejemplos ocurridos a lo largo de la historia. El momento dos se refiere a la dinámica de corporización de los agentes, se pretende que los participantes jueguen el papel de agentes que pueden tener tres estados Sano, Infectado o Recuperado y se haga la simulación de una epidemia mediante la interacción corporal de los asistentes.

Momento uno o de introducción, en este momento la ponente toma el papel activo a modo de conferencia y comienza haciendo las preguntas: ¿Qué es una epidemia? y ¿cómo se comporta?, las respuestas esperadas apuntan a la búsqueda de las diversas perspectivas que pudieran tener los participantes sobre la epidemia y su comportamiento. El foco del análisis se situó en las respuestas de la segunda pregunta, el contexto de cada individuo lo ha llevado a estar relacionado con algún tipo de contagio, pero raramente inmerso en una situación de epidemia, también el contexto de cambio puede llevar a respuestas relacionadas con las matemáticas como comportamiento de funciones o relaciones con el cambio de estado apegado a la derivada, estos argumentos son posibles debido a que la mayor parte de los asistentes habían cursado la asignatura de cálculo diferencial.

Posterior a la discusión sobre qué es y cómo se comporta una epidemia, se presentan 3 ejemplos de epidemias que ocurrieron en diferentes lugares geográficos y etapas históricas, el primer ejemplo se refiere a la epidemia de influenza ocurrida en 1978 en un internado en Inglaterra, el segundo a la epidemia de la peste bubónica ocurrida en Bombay en 1908, que ocasionó una gran mortandad entre la población y el tercero el caso de la influenza AH1N1 ocurrido en México durante el año 2009. En esta etapa se comienzan a hacer preguntas que orienten hacia el análisis de las diferencias existentes entre una enfermedad que se contagia y no alcanza a ser una epidemia, una epidemia y una pandemia.

Momento dos o dinámica de corporización, se realiza con el fin que los alumnos comprendan como se transmite una enfermedad y tomen el papel de los agentes que posteriormente seguirán en la simulación computacional. Esta dinámica consiste en hacer un círculo con sillas, en las cuales se sentarán los alumnos, la formación de parejas, semejará el contacto y el paso del tiempo estará dado por el cambio de lugar sincronizado. En el colectivo se encuentran algunos individuos que se saben infectados y fungirán como las condiciones iniciales del sistema. Al cambiarse de lugar se formarán parejas, siempre con la persona que se encuentre a su derecha, si alguno de los integrantes de la pareja se encuentra infectado, infectara a la otra persona, cada individuo durará infectado durante tres tiempos a partir de ser infectado, después entrara en la fase de recuperado, sin posibilidad de volver a infectarse, así llegara un momento en el que todos estarán recuperados. Cada alumno contara con una tabla en la cual registrara su estado en cada tiempo (S=susceptible, I=infectado, R=recuperado).

En este caso las condiciones iniciales definen diferentes dinámicas que deben ser reflexionadas y explicadas por los asistentes. Se propusieron tres condiciones iniciales diferentes: la primera dinámica consistió en que, al iniciar, ¾ de la población se encuentre infectada, en este caso la enfermedad se propagara rápidamente y todos los individuos se infectaran en algún momento. La segunda dinámica se comienza con 1/3 de la población infectada y la tercera consistió en que solo 1/8 de la población se encontrara infectada el principio, en ambas, pasa que existe al menos una persona que no se infecta. Al finalizar esta dinámica se debe analizar el cambio en el comportamiento de la epidemia dando importancia a las consecuencias de la elección de las condiciones iniciales.

El Momento tres o variación de parámetros, consistió en que con el apoyo de la simulación epiDEM basic, de la biblioteca de modelos de Netlogo (Wilensky & Stroup,1999), los participantes realicen diversos cambios en los valores de parámetros propuestos que están propuestos en la interfaz gráfica. El objetivo es que después del análisis de la variación y combinación de valores en los parámetros, la interpretación de las gráficas y de la representación de agentes moviéndose en el "espacio de Netlogo", se puedan hacer descripciones referentes al comportamiento de las epidemias. En la *Figura 1* se muestra la interfaz gráfica con la que trabajaron los participantes, los parámetros son controlados por barras deslizadoras y se refieren a la cantidad inicial de población, a la tasa de recuperación, tasa de infección y al promedio de tiempo de recuperación. Abajo se pueden ver las gráficas que muestran el porcentaje de infectados y recuperados y el comportamiento de las tasas de recuperación. La ventana marcada con RO se refiere al número reproductivo básico que al presentar valores mayores a 1 indica el inicio de una epidemia, el "espacio de Netlogo" se muestra a la derecha y las imágenes representan a una población que se mueve libre y aleatoriamente por todo el espacio y cambian de estado al encontrarse en el mismo lugar. La condición inicial (cantidad de individuos infectados en el tiempo cero) es elegida aleatoriamente por el programa.

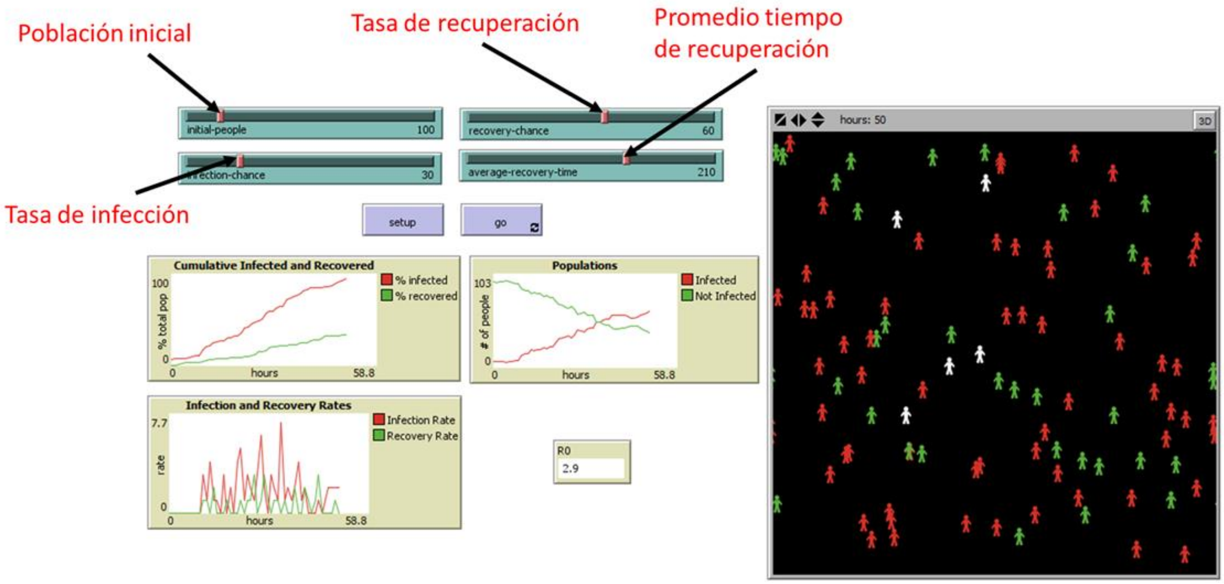


Figura 1. Interfaz gráfica con la que trabajaron los participantes en el Momento tres o de variación de parámetros

La *Tabla 1* muestra los valores de parámetros propuestos para su análisis. En cada caso se pide que elabore una descripción, por escrito, detallada con base en las siguientes preguntas: ¿Cómo se difunde a enfermedad? ¿Qué observas en el comportamiento gráfico? ¿Qué percibes en el comportamiento de los agentes por el espacio de Netlogo? En este caso se espera la descripción de un análisis profundo basado en evidencias brindadas por la simulación y su comportamiento gráfico. La combinación de valores de parámetros hace que se distingan una variedad de comportamientos que al principio parecen no tener un patrón de comportamiento regular, pero con el paso del tiempo y la selección adecuada de los parámetros es posible distinguir y predecir algunas interacciones.

Tabla 1. Se muestran los valores que se proponen para que los participantes realicen el análisis de la simulación

Población inicial	Tasa de infección	Tasa de recuperación	Tiempo promedio de recuperación
100	30	60	200
50	30	60	200
200	30	60	200
400	30	60	200
100	10	60	200
100	60	60	200
100	100	60	200
100	30	10	200
100	30	30	200
100	30	100	200
100	30	60	50
100	30	60	100
100	30	60	300

Una vez terminado el análisis de los parámetros utilizando los casos propuestos, se considera el trabajo de interpretación global del fenómeno, es decir ahora comienza un proceso de comparación de dinámicas, esta tarea es orientada por preguntas como: ¿en qué casos se produce una epidemia y en cuales no? ¿existe algo en común en los casos en los que no se presenta epidemia? ¿Cómo influye el cambio de la población inicial en el comportamiento de la enfermedad? El caso de comparación entre estados globales para diferentes valores en el sistema, es una estrategia que puede ayudar a dar cuenta de la dinámica de una epidemia, en este caso se consideran la aparición de estado periódicos, estacionarios o estados sin ningún patrón aparente.

Discusión

Durante el momento uno o de introducción, las respuestas fueron muy breves, pero expresaban opiniones sobre sus experiencias con enfermedades contagiosas propias y de familiares. La mayoría expresó su conocimiento general sobre las epidemias acertadamente. Su idea sobre el comportamiento de una epidemia era ambigua, no podía decir certeramente que significaba, algunos recurrieron a sus conocimientos de pre – cálculo argumentando un crecimiento exponencial. En el momento dos o de corporización, se observó un incremento en la compresión del comportamiento de la propagación de una enfermedad conforme se proponían nuevas dinámicas cambiando las condiciones iniciales, de tal forma que después de algunos movimientos ellos se atrevían a expresar su opinión sobre cómo se había comportado la enfermedad y la posible causa de dicho comportamiento, basándose en las condiciones iniciales y ejercicios anteriores.

En el momento tres o de variación de parámetros, se les pidió que trabajaran con los valores propuestos en la *Tabla 1,* sin embargo, la mayoría de ellos al concluir con la actividad o en el trascurso de ella hicieron cambios de parámetros que ellos mismos propusieron, basándose en sus inquietudes. Es importante mencionar que estos mismos participantes se centraron en el tiempo que tarda en propagarse la enfermedad y la relación existente entre la cantidad de infectados y recuperados, es decir cuando una enfermedad afecta a una población entera y cuando no. Algunos hacen un análisis más profundo sobre las gráficas, notando entre ellas cierta similitud a pesar de los cambios de parámetros. Muy pocos realizan una observación más minuciosa en las gráficas, logrando con esto notar lo mismo que los anteriores, pero agregando la importancia y significado del momento en que las gráficas presentan un cambio cualitativamente diferente o se intersectan. En el caso de la gráfica de infectados y recuperados dicen que alcanza un punto máximo, que es la población total, es decir cuando en una población todos los individuos pasan por la fase de infectado en algún momento para posteriormente recuperarse, lo cual hace que ambas líneas lleguen al mismo punto, pues en este primer programa no se manejó la posibilidad de que existiera reinfección y al no existir muertes o migración la población es constante, al comportamiento que presenta la gráfica de recuperados principalmente algunos de ellos lo definieron como exponencial, pues es similar a la gráfica que define una función exponencial.

Al finalizar la actividad no solo expresaban sus opiniones, formulaban preguntas sobre el modelo y el cambio de comportamiento al agregar nuevos parámetros y se referían a la semejanza o diferencia de gráficas, se preguntaban sobre la existencia de una epidemia y que tanto influía cada parámetro en el modelo.

Reflexiones finales

Algunas conclusiones relevantes de esta experiencia son: el análisis de la variación de parámetros, en la evolución del fenómeno de la propagación de una epidemia, ayuda a desarrollar una comprensión intuitiva de los conceptos e ideas tales como: la emergencia, es decir, el surgimiento de patrones con estructuras complejas que se da a partir de una serie de reglas simples; por otro lado, se fomentó la discusión de conceptos dinámicos elementales tales como condiciones iniciales, estabilidad y periodicidad al realizar una interpretación del comportamiento gráfico y a través de la observación los cambios de estados que presentaban los agentes al moverse en el “espacio de Netlogo”.

Es necesaria la propuesta de un marco metodológico que permita el análisis de los argumentos de los participantes para indagar más a fondo en la construcción de conceptos y razonamientos que se dan al interactuar con la simulación y reconocer ciertos tipos de patrones contrastándolos con la “realidad”. Un primer acercamiento a las producciones durante la experiencia, ha permitido reconocer argumentos sobre estados invariantes y estacionarios. Cuando se entienden estos conceptos, el desorden que se muestra en el “espacio de Netlogo” se vuelve más comprensible.

Para concluir, es importante mencionar que se sigue trabajando en la creación de instrumentos para la intervención y recolección de datos relacionados con modelos modificados de esta simulación, la importancia del estudio de estos fenómenos incide en el desarrollo de nociones y habilidades que permitan la configuración de estrategias para la exploración de la naturaleza, para esto, es crucial comenzar a entender el desarrollo de una forma integrada de pensar en el campo de las ciencias y la vida cotidiana, con el fin de proponer formas de pensar en la complejidad que nos rodea.

Referencias bibliográficas

Camazine, S., Deneubourg, J-L, Franks, N., Sneyd, J., Theraulaz, G. & Bonabeau, E. (2001) Self-Organization in Biological Systems. *Princeton University Press*.

Castiglione, F. (2006) Agent based modeling. *Scholarpedia, 1*.

Dickes, A., Sengupta, P., Farris, A.V., & Basu, S. (2016). Development of Mechanistic Reasoning and Multi-level Explanations in 3rdGrade Biology Using Multi-Agent Based Models. *Science Education.*

Esteva, L. (2002) El modelo de Kermack y Mc.Kendrick o como predecir el curso de una epidemia. *En Sánchez Garduño, F., Miramontes, P. & Gutiérrez, J. L. (Eds.) Los clásicos de la Biología Matemática*, Editorial Siglo XXI-UNAM, 2002.

Flake, G. W. (1998) The Computational Beauty of Nature Computer Explorations of Fractals, Chaos, Complex Systems, and Adaptation. *MIT Press*, Cambridge

Hernández Zavaleta, J.E., Carrión Velázquez, V., & Carreón Vázquez, G. (2016, May). Decentralized Simulation Phenomena to Foster Mathematical Thinking Development in the Classroom. *En M. Takeuchi, A.P. Preciado Babb, & J. Lock. IDEAS 2016: Designing for Innovation Selected Proceedings. Paper presented at IDEAS 2016: Designing for Innovation, Calgary, Canada (pg 171-181).* Calgary, Canada: Werklund School of Education, University of Calgary.

Holland, J.H. (1996) Hidden Order: How Adaptation Builds Complexity*. Perseus Books*

Kauffman, S. (1995) At Home in the Universe: The Search for the Laws of Self-Organization and Complexity. *Oxford University Press*. New York.

Resnick, M. (1997). Turtles, Termites and Traffic Jams: Explorations in Massively Parallel Microworlds*. The MIT Press*.

Sánchez, F., & Padilla, P. (2002). Emergencia y formación de patrones en biología: un enfoque matemático. En Esteva L. & Falconi, M. (Eds.), *Biología Matemática, un enfoque desde los sistemas dinámicos.* (págs. 125-157). México: Coordinación de Servicios Editoriales, Facultad de Ciencias-UNAM.

Santa Fe Institute (Producer). (2012, Agosto 7). Complexity the Future of Learning and Education [Video file]. Obtenido de *http://www.santafe.edu/research/videos/play/?id=2e4b0057-8639-407c-b4b6-8b53db267f7d*

Solé, V. (1993) Orden y Caos en Sistemas Complejos. *Universitat Politécnica de Catalunya.* España.

Strogatz, S. (2003) Sync: How Order Emerges from Chaos in the Universe, Nature, and Daily Life. *Hyperion*

Wilensky, U., & Reisman, K. (2006). Thinking like a wolf, a sheep, or a firefly: Learning biology through constructing and testing computational theories—An embodied modeling approach. *Cognition and Instruction,* 24(2), 171 – 209.

Wilensky, U. & Stroup, W., (1999). HubNet. http://ccl.northwestern.edu/netlogo/hubnet.html. *Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling*, Northwestern University, IL

CONSTRUCCIÓN Y DEDUCCIÓN DE UNA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA MEDIANTE SERIES INFINITAS

Miguel Apolonio. Herrera Miranda, Jorge Antonio Castillo Medina, Israel Herrera Miranda, Juan Villagómez Méndez
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
herrerapolo@hotmail.com, jcastillo7701@gmail.com, israel_hm@hotmail.com, villagomez2008@yahoo.com.

RESUMEN: El presente trabajo se centra en la deducción de la distribución de probabilidad geométrica a través de un problema de aplicación práctica, el cual permite determinar la función de probabilidad mediante el desarrollo de series infinitas, bajo un enfoque constructivista. La estrategia de enseñanza implica la participación de los alumnos, con la guía de los profesores de tal forma que puedan ser capaces de construir algoritmos en base a problemas concretos lo que les lleva a adquirir el conocimiento de la distribución de probabilidad. En este proceso los estudiantes tienen la oportunidad de relacionar conocimientos nuevos con los conocimientos previamente aprendidos con el fin de que logren un aprendizaje significativo. Se pretende que el alumno se acerque a la comprensión de los conceptos involucrados de forma natural e inductiva. El objetivo de esta propuesta de enseñanza es fomentar en los alumnos el desarrollo de habilidades para que construyan e interpreten de manera adecuada conceptos de probabilidad.

Palabras clave: distribución geométrica, probabilidad, series infinitas

ABSTRACT: The present work focuses on the deduction of geometric probability distribution through a problem of practical application, which allows determining the probability function through the development of infinite series, under a constructivist approach. The teaching strategy involves students' participation, with the guidance of teachers in such a way that they can be able to build algorithms based on concrete problems, what leads them to acquire the knowledge of probability distribution. In this process, students can relate new knowledge to previously learned knowledge in order to achieve meaningful learning. It is intended that the student approaches the understanding of the concepts involved in a natural and inductive manner. The aim of this teaching proposal is to encourage students to develop skills to build and correctly interpret concepts of probability.

Key words: Geometric distribution, Probability, Infinite series

Introducción

Es por demás conocido por la comunidad educativa sobre los problemas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas y en especial la Probabilidad, aunado a la repercusión que tiene en la calidad de la educación, así como la problemática social que ocasiona el bajo aprovechamiento engrosando las estadísticas de índices de reprobación y deserción de los estudiantes.

El tema propuesto nace del interés de contribuir en la enseñanza de la probabilidad de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, mediante la construcción y demostraciones de las principales funciones de distribución de probabilidad de variables aleatorias discretas y continuas. En específico, abordamos el tema de distribución de probabilidad geométrica, al igual presenta dificultades de significado, comprensión y aplicación por parte de los alumnos (Takeuchi, 1980)

Esta situación nos conduce a reflexionar tanto a los profesores como los alumnos para proponer acciones didácticas que permitan una mejor comprensión de estos temas, así como la aplicación y significación del objeto de estudio.

Metodología.

Partiendo de que el constructivismo surge como un enfoque compartido por investigaciones en psicológica y educación, basadas en trabajos de: Jean Piaget, Lev Vygotsky, David Ausubel y Jerome Bruner, siendo sus ideas y propuestas la base de esta teoría. Donde un componente importante del constructivismo es que la educación se enfoca en tareas auténticas. Estas tareas son las que tienen una relevancia y utilidad en el mundo real, donde la experiencia conduce a la creación de esquemas, los esquemas son modelos mentales que almacenamos en nuestras mentes. Estos esquemas van cambiando, agrandándose y volviéndose más sofisticados a través de dos procesos complementarios: la asimilación y el alojamiento (Piaget, 1955).

Así podemos decir que el constructivismo, es una teoría que intenta explicar cuál es la naturaleza del conocimiento humano asumiendo que nada viene de nada. Es decir que conocimiento previo da origen a conocimiento nuevo incorporándolo a sus experiencias anteriores y a sus propias estructuras mentales, donde el individuo construye su “propia comprensión en su propia mente (Payer, 2005).

Bajo este enfoque constructivista se busca ayudar a los estudiantes a interiorizar, reacomodar y transformar la información nueva. Esta transformación ocurre a través de la creación de nuevos aprendizajes y esto resulta del surgimiento de nuevas estructuras cognitivas” (Grennon y Brooks, 1999).

Por lo anterior consideramos que el constructivismo es el marco ideal para desarrollar este modelo, eligiendo el método de proyectos ya que permite interactuar en situaciones concretas y significativas, estimulando el saber, el saber hacer y el saber ser, es decir lo conceptual, lo procedimental y lo referente a las actitudes, donde los alumnos están en un proceso permanente de adquirir conocimientos en todos sus contextos, ya que para el constructivismo lo más importante no es el conocimiento nuevo en sí, si no adquirir nuevas competencias con él, lo que permite a los alumnos generalizar, es decir aplicar lo ya conocido a una situación nueva. En esta situación el docente es: moderador, coordinador, facilitador y mediador o también un participante más, este enfoque supone también un clima afectivo, armónico de mutua confianza, ayudando a que los estudiantes se vinculen positivamente con el conocimiento y por sobre todo con su proceso de adquisición, donde cada nueva información es asimilada y depositada en una red de conocimientos y experiencias que existen previamente en el sujeto, como resultado podemos decir que el aprendizaje, es un proceso subjetivo que cada persona va modificando constantemente a la luz de sus experiencias (Jonassen, 1991).

Planteamiento del problema y desarrollo del proyecto.

El reto principal se presentó a un grupo de alumnos del tercer semestre (agosto 20014-enero 2015) y maestros participantes de la Licenciatura en Matemáticas. Se dedicó un promedio de 5 horas semana-mes durante el semestre. Los recursos didácticos empleados dentro del aula fueron los siguientes: Pizarrón, cañón, libros, información en la red de internet, y computadora personal, programa *Mathematica.*

Se presenta un problema a los alumnos de nivel superior tomado del libro de Estadística Matemática con aplicaciones de los autores (Wackerly, Mendenhall y Scheaffer 2002).

Una agencia de alquiler que renta equipo pesado por días, se da cuenta de que un equipo costoso es arrendado, en promedio, solamente un día de cinco. Si el alquiler en un día es independiente del alquiler en cualquier otro día; encuentre la distribución de probabilidad para el número de días que hay entre dos alquileres.

Usaremos R para denotar *se renta*, y N para *no se renta*, y al mismo tiempo denotar la probabilidad de que el evento suceda, siendo P(R)= 0.2 y P(N)= 0.8 respectivamente.

(donde la variable de interés *Y* representa el número de días sin rentar entre dos alquileres)

0	1	2	…	n
RR				
NRR	RNR			
NNRR	NRNR	RNNR		
NNNRR	NNRNR	NRNNR	…	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
N..NRR	N…NRNR	N…NRNNR	…	RN…NR
$\mathbf{R^2\sum_{i=0}^{n} N^i}$	$\mathbf{R^2\sum_{i=1}^{n} N^i}$	$\mathbf{R^2\sum_{i=2}^{n} N^i}$	…	$\mathbf{R^2 N^n}$

La última fila representa las sumas de las probabilidades de cada columna. Cabe mencionar que estas sumas se pueden reescribir como:

$$\mathbf{R^2\sum_{i=0}^{n} N^i - R^2} = R^2\sum_{i=1}^{n} N^i$$

$$R^2\sum_{i=0}^{n} N^i - R^2 - NR^2 = \mathbf{R^2\sum_{i=1}^{n} N^i - R^2 N} = R^2\sum_{i=2}^{n} N^i$$

$$\vdots$$

$$R^2\sum_{i=0}^{n} N^i - R^2 - R^2N - R^2N^2 - \cdots - R^2N^{n-1} = \mathbf{R^2\sum_{i=n-1}^{n} N^i - R^2N^{n-1}} = R^2N^n \qquad (0.1)$$

Observemos en la tabla que cada entrada no vacía de la k-ésima fila tiene dos R y (k-1) letras N, además tiene exactamente k celdas no vacías. A saber:

1	2	3	…	k
RR	NRR, RNR	NNRR, NRNR, RNNR	…	$\underbrace{N\cdots N}_{(k-1)}RR,\ \underbrace{N\cdots N}_{(k-2)}RNR, \cdots, R\underbrace{N\cdots N}_{(k-1)}R$

Desarrollando la primera suma, substituyendo en lugar de R y N los valores de su probabilidad, respectivamente, llegamos a

$$(0.2)^2\sum_{i=0}^{n}(0.8)^i=(0.2)^2\left\{(0.8)^0+(0.8)^1+(0.8)^2+\cdots(0.8)^{n-1}+(0.8)^n\right\}$$

denotando, como antes, por S la suma

$$\begin{aligned}S=\sum_{i=0}^{n}(0.8)^i&=\left\{(0.8)^0+(0.8)^1+(0.8)^2+\cdots(0.8)^{n-1}+(0.8)^n\right\}\\&=\left\{1+(0.8)^1+(0.8)^2+\cdots(0.8)^{n-1}+(0.8)^n\right\}\end{aligned} \qquad (0.2)$$

y la multiplicamos por 0.8, obtenemos

$$\begin{aligned}(0.8)S&=(0.8)\left\{1+(0.8)^1+(0.8)^2+\cdots(0.8)^{n-1}+(0.8)^n\right\}\\&=\left\{(0.8)^1+(0.8)^2+(0.8)^3+\cdots(0.8)^n+(0.8)^{n+1}\right\}\end{aligned} \qquad (0.3)$$

Al restar (0.3) de (0.2) obtenemos

$$S-(0.8)S=S(1-0.8)=1-0.8^{n+1},$$

de donde

$$S=\frac{1-0.8^{n+1}}{1-0.8}.$$

Hagamos un par de observaciones, n a infinito, entonces dado que $\lim\limits_{n\to\infty}0.8^n=0$

$$S=\frac{1}{1-0.8}=5;$$

Segundo, para la primera suma,

$$\lim_{n\to\infty}R^2\sum_{i=0}^{n}N^i=0.2^2S=0.04(5)=0.2. \qquad (0.4)$$

Ahora estamos en posición de calcular para cada Y su probabilidad, de acuerdo a la última fila de la tabla, a (0.1) y (0.4), esta es:

$$\begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \\ P(3) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.2}\left(\mathbf{0.8^0}\right) \\ 0.2-\left(0.2^2\right)=0.2(1-0.2)=\mathbf{0.2}\left(\mathbf{0.8^1}\right) \\ 0.2(0.8)-\left(0.2^2\right)(0.8)=0.2(0.8)(1-0.2)=\mathbf{0.2}\left(\mathbf{0.8^2}\right) \\ 0.2\left(0.8^2\right)-\left(0.2^2\right)\left(0.8^2\right)=0.2\left(0.8^2\right)(1-0.2)=\mathbf{0.2}\left(\mathbf{0.8^3}\right) \\ \vdots \\ 0.2\left(0.8^{n-1}\right)-\left(0.2^2\right)\left(0.8^{n-1}\right)=0.2\left(0.8^{n-1}\right)(1-0.2)=\mathbf{0.2}\left(\mathbf{0.8^n}\right) \end{pmatrix}$$

de donde podemos observar que: $P(y)=0.2(0.8^y)=R\left(N^y\right).$

La suma de las P(Y) debe ser igual a uno (es decir, el límite cuando $n \to \infty$ de la suma de la última fila de la tabla debe ser igual a uno) y cumplir:

$$\lim_{n\to\infty} R^2 \sum_{i=0}^{n} (i+1)(N^i) = \lim_{n\to\infty} (0.2)^2 \sum_{i=0}^{n} (i+1)(0.8)^i = 1 \quad . \qquad (0.5)$$

Ahora bien, desarrollando (0.5), de manera general, obtenemos que:

$$R^2 \sum_{i=0}^{n} (i+1)\left(N^i\right) = R^2 \sum_{i=0}^{n} i\left(N^i\right) + R^2 \sum_{i=0}^{n} N^i. \qquad (0.6)$$

Recordemos que: $\lim_{n\to\infty} R^2 \sum_{i=0}^{n} N^i = 0.2,$

y dado que $R=0.2$ entonces $(1-R)=(1-0.2)=0.8=N.$

Calculemos

$$R^2 \sum_{i=0}^{n} i\left(N^i\right) = (.2)^2\left[0N^0+1N^1+2N^2+3N^3+4N^4+\cdots(n-1)N^{n-1}+nN^n\right].$$

Denotemos por W la suma

$$W=\sum_{i=0}^{n} iN^i = 0N^0+1N^1+2N^2+3N^3+4N^4+\cdots(n-1)N^{n-1}+nN^n \qquad (0.7)$$

Multiplicando (0.7) por N obtenemos

$$NW = 0N^1N^0 + 1N^1N^1 + 2N^1N^2 + \cdots(n-1)N^1N^{n-1} + nN^1N^n n$$
$$= 0 + N^2 + 2N^3 + 3N^4 + 4N^5 + \cdots(n-1)N^n + nN^{n+1}. \qquad (0.8)$$

Restando (0.8) de (0.7) llegamos a

$$\begin{aligned} W - NW &= 0N^0 + 1N^1 + 2N^2 + 3N^3 + 4N^4 + \cdots(n-1)N^{n-1} + nN^n \\ &\quad -\left(0 + N^2 + 2N^3 + 3N^4 + 4N^5 + \cdots(n-1)N^n + nN^{n+1}\right) \\ &= N^1 + N^2 + N^3 + N^4 + N^5 + \cdots N^{n-1} + N^n - nN^{n+1} \\ &= N\left(1 + N^1 + N^2 + N^3 + N^4 + N^5 + \cdots N^{n-1} - nN^n\right). \end{aligned}$$

Recordando que la suma $S = \sum_{i=0}^{n} N^i = \frac{1-N^n}{1-N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S = \frac{1}{1-N} \quad \text{si} \quad |N| < 1,$

en el caso que estamos tratando $0 < N < 1,\ R = 1-N,$ por lo que la condición $|N| < 1$ se cumple por defecto. De donde $WR = W(1-N) = N\sum_{i=0}^{n} N^i,$ por lo tanto, haciendo tender n a infinito, llegamos a que $W \to \frac{R}{1-N} = \frac{N}{(1-N)^2}.$ Ahora Regresando a (0.6)

$$\lim_{n\to\infty}\left\{R^2\sum_{i=0}^{n} i\,N^i + R^2\sum_{i=0}^{n} N^i\right\} = R^2\left[\frac{N}{(1-N)^2} + \frac{1}{1-N}\right] = (1-N)^2\left[\frac{N+1-N}{(1-N)^2}\right] = 1. \qquad (0.9)$$

Para el caso en particular que estamos tratando, sabemos que, $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} N^i = 5,$ y $N = 0.8$ donde, $W(1-N) = N\sum_{i=0}^{n} N^i,$ es calculado $W(1-0.8) = 0.8(5) \Rightarrow W = \frac{4}{1-0.8} = \frac{4}{0.2} = 20$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} 0.2^2 \sum_{i=0}^{n} i\left(0.8^i\right) = 0.04(20) = 0.8,$$

y (0.6) conduce a que: $\lim_{n\to\infty}\left\{0.2^2\sum_{i=0}^{n} i\left(0.8^i\right) + 0.2^2\sum_{i=0}^{n}\left(0.8^i\right)\right\} = 0.8 + 0.2 = 1.0$

Conclusiones

Generalizando, dado que una función de probabilidad debe satisfacer

1. $f(x) \geq 0$,
2. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) = 1,$
3. Por (1.5), (1.6) y (1.9) hemos probado el siguiente teorema

Dado que: $f(X = x_i) = p\,(1-p)^{x_i} = p\,q^{x_i}$, con $x_i = 0,1,2,3,\cdots,$ y $0 < p < 1,\, q = 1-p,$ entonces: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} p\,q^{i} = 1.$

Ejemplos de aplicación: 1.- Un explorador de petróleo perforará una serie de pozos en cierta área para encontrar un pozo productivo La probabilidad de que tenga éxito en una prueba es 0.2 (a) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer pozo productivo sea el tercer pozo perforado? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que el explorador no vaya a encontrar un pozo productivo si solamente puede perforar a lo más 10 pozos?

(a) $P(Y) = q^{y-1}\, p = (.8)^2\,(0.2) = 0.12800000000000003$

(b) $P(Y) = q^{y} = (0.8)^{10} = 0.10737418240000011$

Ejemplo 2.- Al contestar una pregunta con respecto a un tema controversial como ¿“alguna vez ha fumado mariguana"?, muchas veces la gente no quiere contestar Afirmativamente, obtenga la distribución de probabilidad para Y, el número de personas que se necesitaría entrevistar hasta obtener una sola respuesta afirmativa, sabiendo que el 80% de la población contestaría verídicamente "no" a la pregunta y que del 20 % que deberían de contestar verídicamente "sí", un 70 % miente.

Tenemos que el 80 % contestaría verídicamente "no" y del 20 % que debería de contestar verídicamente "si" un 70% de los 20 miente cuando dice "si" o sea que 14 de los 20 debería de contestar no verídicamente por lo tanto los sumamos: 80+14=94 % NO y 6 % Si. Por lo tanto, la distribución de probabilidad es:

y	1	2	3	...	n − 1	n
p (y)	$(0.94)^{1-1}$ (0.06)	$(0.94)^{2-1}$ (0.06)	$(0.94)^{3-1}$ (0.06)	...	$(0.94)^{n-1-1}$ (0.06)	$(0.94)^{n-1}$ (0.06)

y	p (y)	
1	$(0.94)^{0}$ (0.06)	0.06
2	$(0.94)^{1}$ (0.06)	0.0564
3	$(0.94)^{2}$ (0.06)	0.053016
.	.	
.	.	
n − 1	$(0.94)^{n-2}$ (0.06)	
n	$(0.94)^{n-1}$ (0.06)	

$P(Y) = (0.06)\ (0.94)^{Y-1}\ ,\ Y = 1,\ 2,\ 3\ .\ .\ .\ .\ .$

Ejemplo 3.-Dado que ya se ha lanzado una moneda normal 10 veces, y se han obtenido cero caras, ¿cuál es la probabilidad de que se tenga que lanzar al menos dos veces más para obtener la primera cara. Resultado:

$$\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\frac{1}{2} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.5$$

nota: Ya sucedió que cayeron 10 cruz, no afecta a lo que suceda después y que se tenga que lanzar al menos dos veces más implica que el primer lanzamiento tiene que ser cruz y el segundo cara

Conclusiones

La complejidad del problema requirió el entendimiento claro de lo que se persigue, para lo cual fue preciso someterlo a discusión con los alumnos, orientados por el maestro. El análisis guiado permitió bosquejar y poner en contexto el problema, identificando las expresiones algorítmicas a utilizar para poder demostrar que la aplicación planteada era una distribución de probabilidad.

Al final los alumnos, con ayuda de los profesores participantes, fueron construyendo las expresiones algorítmicas que fundamentan esta distribución de probabilidad. Donde los estudiantes relacionan los conocimientos nuevos con los anteriores con el fin de que logren un aprendizaje significativo que comprenda: Significatividad lógica material (secuencia lógica de conceptos), Significatividad psicológica del material (conexión de nuevos conocimientos con anteriores), Acomodación (ubicarlos en sus estructuras cognitivas).

Referencias bibliográficas

Brooks, M., & Grennon Brooks, J. (1999). The courage to be constructivist. *Educational Leadership, 57*(3), 18-24.

Casella, G. (2002). *Statistical inference*. México: Thomson Learning.

Hogg R. & Craig A. (1995). *Introduction to mathematical statistics*. Englewood Cliffs, CA: Prentice Hall.

Jonassen, D. H. (1991). *Evaluating constructivistic learning*. Educational Technology.

Mood, A. M. (2001). *Introduction to the theory of statistics*. New York: MacGraw-Hill.

Payer, M. (2005) Teoría del constructivismo social de Lev Vygotsky en comparación con la teoría Jean Piaget. Universidad Central de Venezuela. Facultad de Humanidades y Educación.

Piaget, J. (1985). De la lógica del niño a la lógica del adolescente. Barcelona: Paidós (original publicado en 1955).

Takeuchi, Y. (1980). *Sucesiones y series*. Tomo 1 y 2. México: Limusa

Wackerly, D., Mendenhall, W., & Scheffer R. (1998). *Estadística matemática con aplicaciones.* México: Grupo Editorial Iberoamericano.

ENRIQUECIMENTO DA IMAGEM DE CONCEITO DE DERIVADA DE ESTUDANTES DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Roberto Seidi Imafuku, Vera Helena Giusti de Souza, William Vieira
IFSP/UNIAN.(Brasil), IME-USP.(Brasil), IFSP/UNIAN.(Brasil),
robertoseidi@yahoo.com.br, verahgsouza@gmail.com,

RESUMO: Apresenta-se um recorte de uma pesquisa com a qual se busca investigar que elementos presentes na *Imagem de Conceito* de derivada são manifestados por estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática que já estudaram este conceito na disciplina Cálculo Diferencial e Integral. A investigação é de caráter diagnóstico, com análise qualitativa dos dados e, a partir dos resultados obtidos, pretende-se estruturar atividades para modificar e/ou ampliar as *Imagens de Conceito* de derivada e o entendimento da relação entre os gráficos da função e de sua primeira derivada do grupo investigado.

Palavras-chave: derivada, imagem de conceito

ABSTRACT: We present a part of a research that seeks to investigate which elements present in the image of the concept of derivative are shown by students of a degree course in Mathematics who have studied this concept in the discipline Differential and Integral Calculus. The investigation is of a diagnostic nature, with qualitative analysis of the data from the obtained results. It is intended to structure activities to modify and / or extend the images of the concept of derivative and the understanding of the relationship between the graphs of the function and its first derivative of the investigated group.

Key words: Derivative, Image of the concept

Introdução

O trabalho aqui apresentado é um estudo diagnóstico que faz parte de uma pesquisa sobre a aprendizagem do conceito de derivada para estudantes de Licenciatura em Matemática. Decidimos desenvolver esse estudo, pois, além das aplicações dentro da própria Matemática, a noção de derivada também é amplamente utilizada em outras áreas do conhecimento, como na Física, quando se estuda a velocidade e a aceleração de uma partícula ao longo do tempo ou se esboça trajetórias de partículas; nas Engenharias, no estudo de problemas de máximo ou mínimo e de taxas relacionadas; nas Ciências Médicas e Biológicas, ao analisar o crescimento de um tumor, a pressão sanguínea, a propagação de uma epidemia.

Nosso foco está em estudantes de Licenciatura em Matemática, pois estes farão parte dos processos de ensino, de aprendizagem e de formação de futuros profissionais das áreas destacadas. De acordo com Bisognin, E. e Bisognin, V. (2011), entendemos que

> o conceito de derivada é fundamental na Matemática e sua compreensão tem implicações na resolução de problemas em níveis avançados. Assim, o conhecimento que os alunos têm sobre a derivada e a exploração de suas múltiplas representações, com ênfase nas conexões entre os aspectos analíticos e gráficos, precisam ser discutidos em profundidade em cursos de formação inicial e continuada de professores e, também, nos demais cursos de graduação das áreas de ciências exatas e tecnológicas, nas disciplinas de Cálculo (Bisognin & Bisognin, 2011, p. 525).

Uma inquietação, que também nos motivou a realizar essa pesquisa, surgiu quando tivemos contato com o texto de Thurston (1994), em que o autor apresenta sete concepções de derivada: infinitesimal, simbólica, lógica, geométrica, taxa, aproximação e microscópica, o que nos deixou com uma preocupação em relação ao significado que os estudantes atribuem às derivadas, pois em nossa prática como professor de Cálculo, constatamos que grande parte deles simplesmente aplica as "regras de derivação". Também nos inquietou uma discussão que tivemos sobre a relação entre o gráfico da função e o de sua respectiva derivada uma vez que, em nossa prática, não dávamos atenção a isso e utilizávamos a derivada apenas como uma ferramenta para resolver problemas.

Entendemos que o uso das TIC pode nos auxiliar na busca de respostas para nossas inquietações, por isso decidimos incluí-las na pesquisa. Para orientar a elaboração de nossos instrumentos e a análise dos dados, nos apoiamos nas ideias de Tall e Vinner (1981) de Imagem de Conceito e Definição de Conceito e nas concepções de derivada de Thurston (1994). Nossos objetivos são: enriquecer e/ou modificar as Imagens de Conceito de derivada e a da relação entre o gráfico de uma função de uma variável real e o de sua derivada, de estudantes do Ensino Superior, que já estudaram estes conceitos e ideias.

Imagem de Conceito e Definição de Conceito

As ideias de Imagem de Conceito e de Definição de Conceito foram desenvolvidas por David Tall e Shlomo Vinner em 1981. Segundo eles, devemos distinguir entre os conceitos matemáticos definidos formalmente e os processos cognitivos pelos quais estes são desenvolvidos (Tall & Vinner, 1981), o que significa que a abordagem de um novo conceito não deve se dar apenas por sua definição formal, mas também possibilitar seu reconhecimento em situações reais e sua utilização em contextos apropriados. Esse processo requer um conjunto de ideias sobre esse novo conceito, para que se possa formar a Imagem de Conceito, que estes pesquisadores definem como

> a estrutura cognitiva total associada a um conceito, que inclui todas as imagens mentais, propriedades e processos associados. Ela é construída ao longo dos anos por meio de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece (Tall & Vinner, 1981, p. 152, tradução nossa).

Vinner (1992) diz que “a Imagem de Conceito é algo não-verbal associado em nossa mente ao nome do conceito” (p.68). Para ele, a Imagem de Conceito pode ser composta por uma representação visual do conceito, caso este tenha representações visuais; pode ser também um conjunto de impressões ou experiências adquiridas pelo sujeito.

Esse conjunto de imagens mentais, representações visuais, impressões e experiências associadas ao nome do conceito, segundo Vinner (1992), pode ser traduzido pelo sujeito em formas verbais, o que permite a comunicação, a representação e a manipulação dos objetos matemáticos.

A imagem de conceito de derivada de um indivíduo, por exemplo, pode ter elementos como formas de representação (algébrica, gráfica, tabelas), propriedades (derivada da soma, derivada do produto) e elementos da definição (limite da razão incremental).

Segundo Tall e Vinner (1981), a Imagem de Conceito não precisa ser coerente o tempo todo pois, dependendo do estímulo que é dado, um indivíduo pode ativar diferentes partes dessa Imagem, desenvolvendo-a de forma a não constituir um todo coerente. Por exemplo, no estudo das funções, os alunos podem ter na Imagem de Conceito apenas a associação de um número real do domínio a um número real do contra domínio e, ao estudarem sequências numéricas, podem não relacioná-las com a ideia de função.

Quando passam a trabalhar com as derivadas das funções reais de variável real, os estudantes têm na Imagem de Conceito de derivada, em geral, a concepção de derivada como a inclinação da reta tangente e a concepção simbólica (regras de derivação), mas muitas vezes não estabelecem relação entre elas. Somente essas concepções não são suficientes para uma Imagem de Conceito de derivada suficientemente rica, o que pode dificultar a compreensão do conceito de derivada.

Quando a imagem de conceito é pobre, isto é, tem poucos elementos relacionados ao conceito, a Imagem de conceito original precisa ser enriquecida e/ou modificada. De acordo com Tall e Vinner (1981), “[...] todos os atributos mentais associados a um conceito, sejam eles conscientes ou inconscientes, devem ser incluídos na Imagem de Conceito” (p. 152, tradução nossa).

Ao nos depararmos com uma situação em que temos que resolver um problema que envolve um conceito matemático, precisamos ativar uma parte de nossa Imagem de Conceito associada a esse objeto matemático. A essa parte ativada da Imagem de Conceito, Tall e Vinner (1981) chamam de Imagem de Conceito Evocada.

Outra ideia importante é a de Definição de Conceito, que Tall e Vinner (1981) definem como

> [...] um conjunto de palavras usadas para especificar aquele conceito. Ela pode ser aprendida por um indivíduo de uma forma mecânica ou compreendida e relacionada com um maior ou menor grau com o conceito como um todo (Tall & Vinner, 1981 p.152, tradução nossa).

Podemos entender a Definição de Conceito, segundo Tall e Vinner (1981), como o conjunto de palavras que o sujeito usa para explicar sua Imagem de Conceito Evocada. A definição de conceito pode variar de tempos em tempos, isto é, pode ser reconstruída pelo estudante, por ser algo individual. Desta forma, segundo Tall e Vinner (1981) “[...] uma definição do conceito pessoal pode diferir de uma definição formal do conceito, sendo este último uma definição de conceito que é aceita pela comunidade matemática em geral” (p.152).

Tall e Vinner (1981) dizem que a Definição de Conceito é uma porção da Imagem de Conceito do sujeito e que, dependendo do sujeito, pode ser vazia ou, até mesmo, inexistente. Em outros casos, pode, ou não, estar relacionada com outras partes da Imagem de Conceito de maneira coerente.

A Definição de Conceito de derivada em um ponto, por exemplo, pode ser apenas um conjunto de palavras que foram memorizadas por um estudante, mas que não está relacionada com nenhuma outra parte da Imagem de Conceito de derivada desse sujeito.

Tendo em vista essas ideias sobre a Definição de Conceito e Imagem de Conceito, concordamos com Giraldo (2004) que afirma que

> uma definição de conceito (mesmo uma que corresponda à definição formal) sem uma imagem de conceito rica poderia ser inútil; uma imagem de conceito rica sem uma definição de conceito adequada pode ser traiçoeira. Uma definição de conceito inconsistente com a definição formal não é necessariamente parte de uma imagem de conceito pobre ou inconsistente; nem uma imagem de conceito pobre necessariamente inclui uma definição de conceito incorreta (Giraldo, 2004, p. 10).

Além disso, Giraldo (2004) também defende que ao se abordar um conceito matemático deve-se buscar o enriquecimento da Imagem de Conceito desenvolvida pelo estudante e não apenas a compreensão da definição formal.

Isso não quer dizer que não se deva abordar a definição formal de um conceito. Entendemos que no estudo de um conceito matemático a definição formal é parte fundamental do processo de aprendizagem, uma vez que, sem ela, o estudante pode aplicar propriedades do objeto matemático em situações inadequadas. Por exemplo, se um estudante não conhece as condições para que uma função seja derivável, pode calcular a derivada da função f definida por $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto em que $x = 0$, mesmo sendo essa função não derivável nesse ponto. Outro exemplo é o caso em que o aluno conhece a definição de reta tangente a uma circunferência, dada nas aulas de geometria euclidiana e não resolve uma atividade para traçar a reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto por achar que a reta tangente só pode "tocar" a curva no ponto de tangência.

■ Percurso Metodológico

A coleta de dados será realizada em três fases. Na primeira, aplicamos um questionário diagnóstico sobre as concepções de derivada, baseado nas ideias de Thurston (1994). Na segunda, a partir dos resultados da primeira fase, elaboramos dois conjuntos de atividades nos quais exploramos o conceito de derivada, que serão aplicados em um ambiente informático, com auxílio dos softwares Geogebra e SimCalc. Na terceira fase, reformulamos e reaplicamos o questionário diagnóstico da primeira fase. A partir da comparação entre os resultados obtidos nas análises dos questionários, pretendemos verificar se houve, ou não, modificações e/ou ampliações na *Imagem de Conceito* (Tall & Vinner, 1981) de derivada dos participantes.

Neste artigo, apresentamos três questões que fazem parte do questionário da primeira fase de nossa investigação. A primeira questão aborda a concepção geométrica da derivada, como inclinação da reta tangente; a segunda, a relação entre os gráficos da função e o de sua primeira derivada e a terceira, a Definição de Conceito de derivada.

Questão 1

Suponha que a reta L é tangente ao gráfico da função f no ponto $(-1, 3)$ como indicado na

Figura **1**. Determine $f(-1)$ e $f'(-1)$.

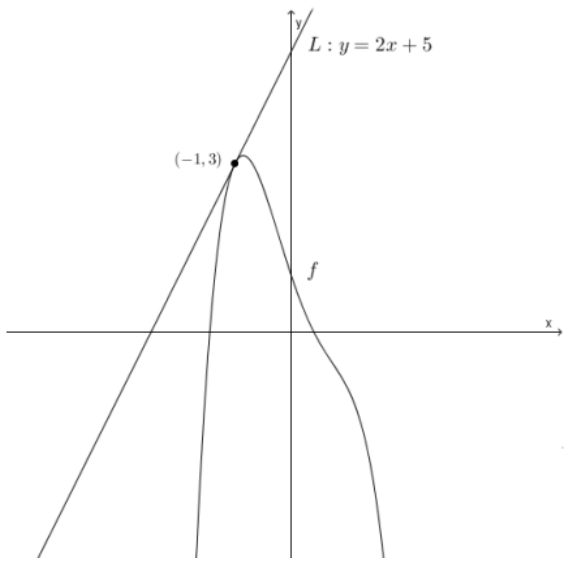


Figura 1

Nosso objetivo, com essa questão, é verificar se o participante tem, em sua Imagem de Conceito de derivada, a concepção desta como inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função no ponto de tangência. Optamos por fornecer a equação reduzida da reta tangente, para saber se os participantes têm, na Imagem de Conceito de derivada, a ideia de que o coeficiente angular que aparece destacado na equação reduzida é o valor da derivada da função no ponto de tangência.

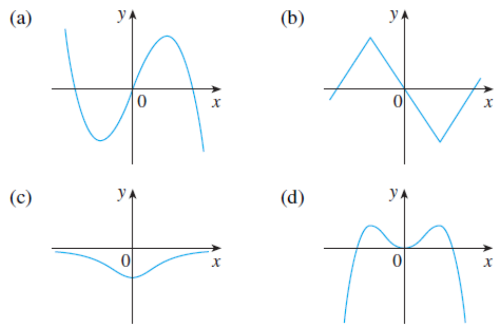
Destacamos que, para responder esta questão, é preciso que os participantes tenham, na Imagem de Conceito de reta, em Geometria Analítica, que, na equação reduzida de uma reta $y = m.x + n$, o parâmetro m é o coeficiente angular da reta, para que possam associar esse valor à derivada, vista como a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função no ponto de tangência.

Questão 2

Associe os gráficos de função apresentados nos itens a, b, c e d (

Figura 2 **a**) com os gráficos das derivadas dessas funções, apresentados em I, II, III e IV (

Figura 2 **b**) Explique suas respostas.



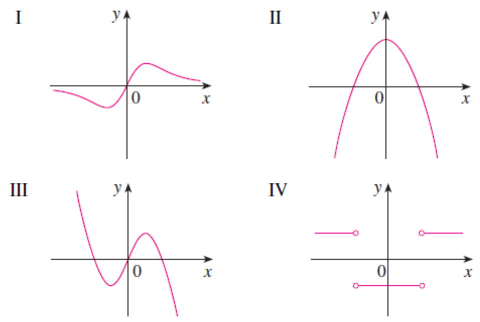


Figura 2 a **Figura 2 b**

Nosso objetivo, com essa questão, é verificar se o participante tem, em sua Imagem de Conceito de derivada, a relação entre o gráfico de uma função e o gráfico da primeira derivada dessa função, isto é, se consegue associar o comportamento do gráfico da primeira derivada de uma função com o gráfico da função.

Para relacionar o gráfico da função com o de sua primeira derivada, o participante precisa saber identificar onde a inclinação da derivada é positiva, negativa ou nula, para relacionar com o gráfico da derivada, que traz um comportamento segundo essas inclinações.

Questão 3

Descreva, com suas palavras, como você define a derivada de uma função.

Nosso objetivo, com essa questão, é verificar qual a Definição de Conceito de derivada de cada participante e se utilizam alguma concepção de derivada para apresentar a definição.

■ Considerações finais

Em nossa prática docente, por muitas vezes, nos deparamos com situações em que estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática, que já haviam estudado o conceito de derivada e as técnicas de derivação, não conseguiam resolver problemas que envolviam taxas de variação, só conseguiam resolver problemas com características simbólicas, isto é, problemas que solicitavam para calcular a derivada de algumas funções utilizando as técnicas de derivação. Fato que evidência a prevalência de uma abordagem em que se privilegiam as técnicas de cálculo, no mundo simbólico, em detrimento do estudo com a compreensão do conceito abordado com características formais.

Entendemos que a falta de características do Mundo Formal em estudantes de um curso de formação de professores de Matemática é muito preocupante, uma vez que, além da falta de um conhecimento mais sólido dos conceitos matemáticos, os estudantes podem não valorizar tais características durante a prática profissional.

Frente a essa realidade, em nossa investigação buscamos verificar quais concepções de derivada (Thurston, 1994) estão presentes na Imagem de Conceito de estudantes que já estudaram este assunto em disciplinas de Cálculo e se estes estudantes relacionam os gráficos de uma função e o de sua primeira derivada.

As atividades relacionadas ao uso da tecnologia dependem da análise dessa primeira intervenção. Essas atividades serão desenvolvidas utilizando recursos presentes nos softwares SimCalc e Geogebra e os resultados serão discutidos em artigos futuros.

■ Referências bibliográficas

Bisognin, E. e Bisognin, V. (2011). Análise do desempenho dos alunos em formação continuada sobre a interpretação gráfica das derivadas de uma função. *Educação Matemática Pesquisa 13(3)*, 509 – 526.

Giraldo, V. (2004). *Descrições e conflitos computacionais: O caso da Derivada.* Tese de Doutorado não publicada, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Brasil.

Tall, D. & Vinner, S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12*, 151-169.

Thurston, W. P. (1994). On prof and progress in Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society 30(2)*, 161-177.

SUCESIONES NUMÉRICAS: UNA ESTRATEGIA PARA SU APRENDIZAJE.

Viridiana Garcia Zaragoza, Gessure Abisaí Espino Flores y Bárbara Nayar Olvera Carballo
Universidad Autónoma de Nayarit, Centro Regional de Formación Docente e Investigación Educativa del Estado de Sonora. (México)
iriv.3898@gmail.com, gessure@gmail.com, barbara.olvera@hotmail.com.

RESUMEN: Uno de los principales problemas que existen dentro de la Matemática es la consolidación de un pensamiento matemático, es aquel pensamiento donde el individuo pone a prueba procesos más avanzados como abstracción, validación de hipótesis, visualización y estimación, los cuales permiten dar solución a diversas tareas de la vida cotidiana (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza, 2005, pp 20). La ausencia de estos procesos avanzados y la descontextualización de los contenidos centrados en el currículo, conlleva a no tener un aprendizaje significativo en las matemáticas. Dicho fenómeno se presenta en el Programa Académico de Contaduría (PAC) donde los estudiantes expresan dificultades en asignaturas vinculadas a la Matemática, lo cual se ve reflejado en los índices de aprobación. Por tal motivo el implementar una estrategia didáctica en el tópico de sucesiones numéricas en la materia de Lenguaje y Pensamiento Matemático (LPM), donde se aborden los procesos avanzados del pensamiento, así como la contextualización y permita contribuir al rendimiento académico de los estudiantes.

Palabras clave: sucesiones, pensamiento matemático, aprendizaje, lenguaje.

ABSTRACT: One of the main existing problems within Mathematics is the consolidation of a mathematical thought. It is that thought where the individual tests more advanced processes like abstraction, validation of hypotheses, visualization and estimation, which allow solving different tasks of daily life (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza, 2005, pp 20). The absence of these advanced processes and the out of context contents centered in the curriculum, entails not to have a significant learning in mathematics. This phenomenon is presented in the Academic Accounting Program where students experience difficulties in subjects related to mathematics, which is reflected in the academic performance rates. There is more than enough reason to implement a didactic strategy in the topic of numerical successions in Mathematical Language and Thought (MLT), which should address the advanced processes of thought, as well as contextualization to contribute to the students' academic performance.

Key words: successions, mathematical thinking, learning, language.

Introducción

El hablar de las matemáticas trae reflexiones sobre la necesidad de estas en la vida del ser humano, debido a que es una de las ramas de la ciencia "*incluye, por un lado, pensamientos sobre tópicos matemáticos, y otros procesos avanzados del pensamiento como abstracción, justificación, visualización, estimación o razonamiento bajo hipótesis*" (Cantoral, et al, 2005, p. 20) generando con esto un pensamiento con enfoque matemático. Es por estos problemas que esta investigación se centra en la importancia de reconstruir ese pensamiento matemático, donde se puedan presentar de manera clara todos aquellos procesos avanzados, así como contextualizar situaciones de la vida diaria, creemos que la problemática se debe a que no se estudian de manera concreta durante el aprendizaje de los contenidos curriculares tanto en nivel básico como en bachillerato provocando la reprobación en aquellas materias con contenido matemático. Estos acontecimientos se ven presentes en el PAC de la Universidad Autónoma de Nayarit (UAN) dando pie a desarrollar una estrategia didáctica que permita mejorar los niveles de aprovechamiento en unidades de aprendizaje con referente matemático.

Es la falta de comprensión de los procesos avanzados, y por lo tanto del pensamiento matemático, lógico, algebraico y la descontextualización del contenido escolar con la vida diaria, tal como lo menciona, "*los currículos de matemáticas escolares han seguido durante mucho tiempo anclados en ideas que provienen de las estructuras matemáticas formales, así como en métodos didácticos centrados en la realización de procedimientos algorítmicos y la memorización" (*Bosch, 2012, p. 27) lo que conlleva a que el alumno no tenga las bases necesarias para poder dar solución a problemas de diversos tópicos, esto debido a que todos los procesos matemáticos los realiza de manera memorística sin tener una comprensión los procesos dejando con ello lagunas mentales del cómo, para que, y el por qué realiza dichos procesos, teniendo como consecuencia que el alumno aplique los conocimientos matemáticos de manera utilitaria en su vida cotidiana.

Uno de los contenidos donde el estudiante comienza a tener sus primeras dificultades en trasladar del lenguaje ordinal al lenguaje abstracto y el uso de símbolos es en sucesiones numéricas, pues son estas

> Según Mason las que debe centrarse en la visualización; manipulación de la figura en la que se basa el proceso de generalización, facilitando de este modo la construcción de la fórmula; la formulación de una regla recursiva que muestra cómo construir los siguientes términos a las precedentes; y encontrar un patrón que conduce directamente a una fórmula (Bednardz, Kieran y Lee, 1996, p. 7).

Por lo tanto, se vuelve un primer inconveniente en el pensamiento matemático, debido a que son estás la cuales juntan todos los procesos avanzados, y así mismo se vuelven obstáculo para comenzar con un lenguaje algebraico y abstracto. Las sucesiones numéricas se pueden encontrar en las situaciones extraescolares, lo que permite estudiarlas a través de situaciones didácticas para desarrollar un nivel cognitivo apropiado, y le posibiliten afrontar situaciones extraescolares conjuntamente los cursos de su formación profesional.

Es por lo anterior que decimos que las sucesiones es el primer acercamiento al desarrollo cognitivo tomando como referencia a Spivak (citado en Cañadas y Castro, 2006, p. 2) el cual dice que una sucesión de números naturales es una aplicación que tiene por dominio el conjunto de los números naturales, la cual posee elementos vinculados tales como el término general, el término k-ésimo y el límite de la misma. El término general, se representa por a_n, donde se elige el elemento general del conjunto imagen. El término k-ésimo, conocido por a_k, con k = 1, 2,... representando al término preciso de la sucesión que está en el lugar k Guzmán y Rubio (citado en Cañadas y Castro, 2006, p.3).

Este primer obstáculo se presenta, al no comprender que es una sucesión numérica y por ende cuál es el término general que la representa. Los discentes pertenecientes al PAC señalan tener dificultades en unidades aprendizaje donde se refleja el empleo de procesos avanzados, así como la generalización de un término. Por tal motivo nos basamos en el estudio de caso de los alumnos de primer semestre que se encuentran inscritos en la unidad de aprendizaje de Lenguaje y Pensamiento Matemático (LPM), la finalidad de tomarla como base es debido a que se fundamenta en el desarrollo de competencias Matemáticas, la cual nos permite poner en práctica una propuesta didáctica para poder reconstruir y contextualizar un pensamiento matemático (Rodríguez, 2015) contribuyendo a la disminución en los índices de reprobación en aquellas unidades de aprendizaje con contenido matemático.

Antecedentes

Basándonos en el seguimiento de trayectorias escolares generadas por la coordinación institucional de trayectorias escolares de la UAN, el índice de reprobación por parte de los alumnos que cursan el PAC es alto a comparación de otras unidades de aprendizaje, principalmente la reprobación se observa en aquellas materias con contenido matemático como es el caso de LPM, la cual es una unidad de aprendizaje enfocada en la transversalidad y cuyo propósito es ayudar al estudiante a continuar desarrollando sus habilidades lógica-matemática, siendo ésta una herramienta indispensable en cualquier área de las ciencias, pues es la base del razonamiento científico.

La competencia principal es que el estudiante sea capaz de evaluar el comportamiento de un fenómeno o situación real, a través de una forma de representación del mismo, o de un modelo matemático básico, para deducir y tomar decisiones que permitan dar solución, así como el dominio de aquellas competencia que implica el fortalecimiento del pensamiento lógico, pensamiento práctico, la resolución de problemas, comunicación verbal y comunicación escrita, reunidos todos en la capacidad argumentativa.

LPM se ha convertido en un problema para los estudiantes del PAC, esto se debe a la deficiencia de algunos contenidos que constituyen a esta unidad de aprendizaje, motivo por el cual no tienen nociones claras de como trasladar los contenidos aprendidos en el aula a su vida diaria.

Dichas deficiencias se ven reflejadas en la trayectoria de las materias vinculadas a las ciencias exactas durante el periodo 2012-2015 (*Figura 1.- Datos estadísticos de reprobación de Contaduría 2012-2013, Figura 2.- Datos estadísticos de reprobación de Contaduría 2014-2015),* provocando que exista una deserción en el PAC, lo que genera tomar conciencia en el aprendizaje de dichas materias pero principalmente en la materia de LPM que es donde el alumno comienza a desarrollar las habilidades necesarias para un pensamiento matemático que contenga todos los procesos avanzados, así como formal y abstracto.

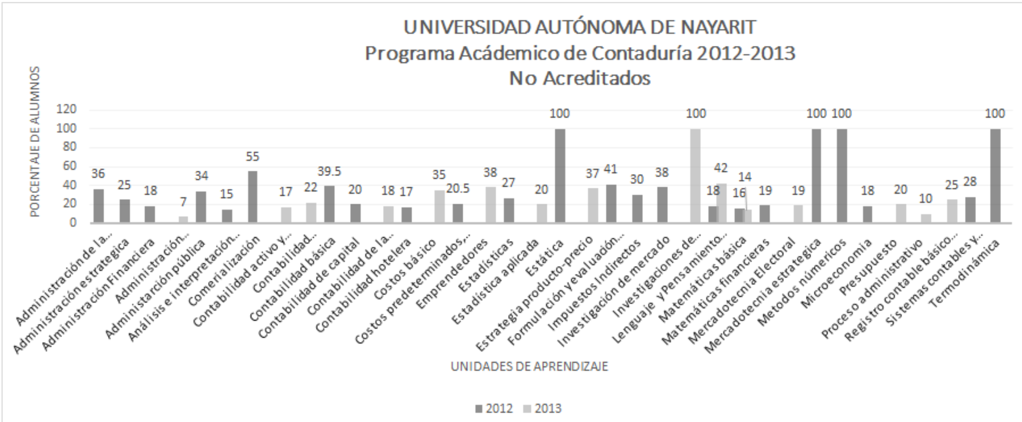


Figura 1. Datos estadísticos de Reprobación 2012-2013 del Programa Académico de Contaduría.

La *Figura 1* representa las unidades de aprendizaje referentes al año 2012 (gris) y 2013 (blanco) las cuales reflejan los índices de reprobación en el PAC, donde es claro apreciar aquellas materias que tienen una influencia tanto del lenguaje matemático, así como un razonamiento lógico-matemático.

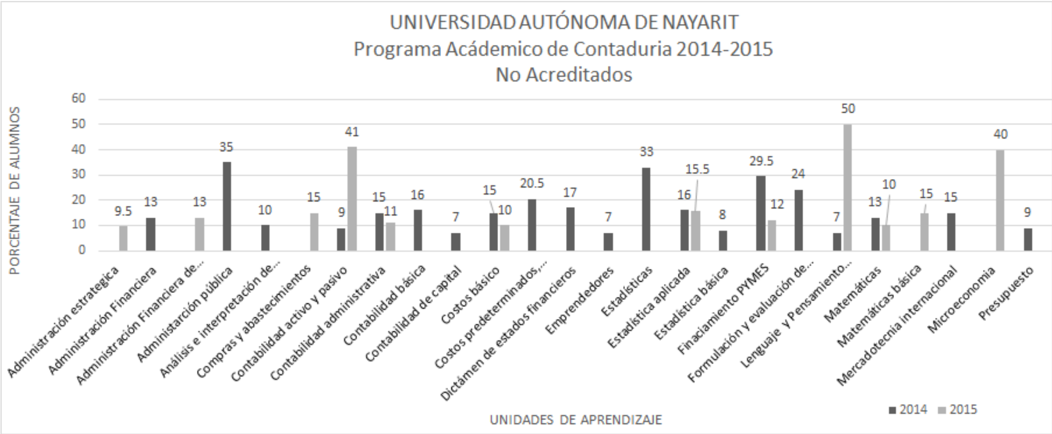


Figura 2. Datos estadísticos de Reprobación 2014-2015 del Programa Académico de Contaduría.

La *Figura 2* representa las unidades de aprendizaje referentes al año 2014 (gris) y 2015 (blanco) se ve un alto nivel de reprobación con respecto a las unidades con más influencia de la matemática formal como es el caso de LPM donde muestra que un 50% de sus alumnos inscritos en la materia la reprueba.

Es claro que para tener un verdadero aprendizaje del contexto matemático se tiene que comenzar por los conocimientos básicos que aprendemos en los primeros estudios escolares, esto con el beneficio de posteriormente poderlos utilizar de manera evolutiva en niveles más avanzados, "...*un aprendizaje significativos es reto para el alumno pues la resolución de problemas matemáticos por parte de los alumnos requiere en mucho caso el empleo de la memorización tanto de fórmulas como de teoremas"* esto propuesto por (Aranzazu 2013, p.2). Es claro que para tener este aprendizaje significativo debe de existir en un primer lugar un pensamiento matemático en el cual el alumno tiene que entender y comprender el comienzo de un lenguaje matemático que le va a permitir evolucionar del lenguaje coloquial al lenguaje formal y abstracto, de tal manera que vincule la comprensión, la contextualización y el aprendizaje matemático.

> El lenguaje matemático es, en sí mismo, un vehículo de comunicación de ideas que destaca por la precisión en sus términos y por su gran capacidad para transmitir conjeturas gracias a un léxico propio de carácter sintético, simbólico y abstracto y la incorporación de lo esencial del lenguaje matemático a la expresión habitual y la adecuada precisión en su uso Gonzales (citado en Huanca, 2015, p. 21).

Para poder lograr lo anterior es necesario la comprensión de los conocimientos y con ellos poder lograr una secuencia lógica de aprendizaje, donde se le permita adquirir soluciones a problemas de la vida diaria utilizando un sistema de manera funcional y no de carácter utilitario, siendo este uno de los grandes inconvenientes que existe debido a que se emplea las matemáticas de manera memorística por medio de fórmulas, pero no se significativo en el contexto diario. Para Arroyo, Castelo y Pueyo, el aprendizaje significativo debe de ser como los propone Ausubel el cual

> …se opone a tener un aprendizaje memorístico, por repeticiones o mecánico, donde su teoría está más enfocada en lograr en el alumno una memorización compresiva que permita al sujeto comprender lo aprendido y asegurar su funcionalidad de modo que el conocimiento adquirido pueda adaptarse a nuevas situaciones futuras, (citado en Aranzazu, 2013, p.5).

Durante este aprendizaje el alumno va creando una serie de pensamientos que le facilitan el desarrollo del entendimiento del razonamiento y el verdadero significado de la memorización, la cual ayudará para dar solución a las problemáticas del pensamiento matemático que se presenten en el contexto de la vida diaria. Uno de los fenómenos que se presenta en la vida diaria es el procesar la información cotidiana a un lenguaje tanto abstracto como matemático donde los investigadores explican que estás se interesan por caracterizar o modelar los conceptos y procesos aprendidos en su formación educacional para el uso de su vida diaria (Cantoral, 2001).

El tener un pensamiento matemático donde se encuentren contemplados todos los procesos avanzados, debe ser la unión de dichas aptitudes, la construcción social del conocimiento matemático y el de su difusión institucional para que puede permitirle al estudiante una mejor comprensión de los tópicos que se estudian en el ámbito escolar (Cantoral, 2014).

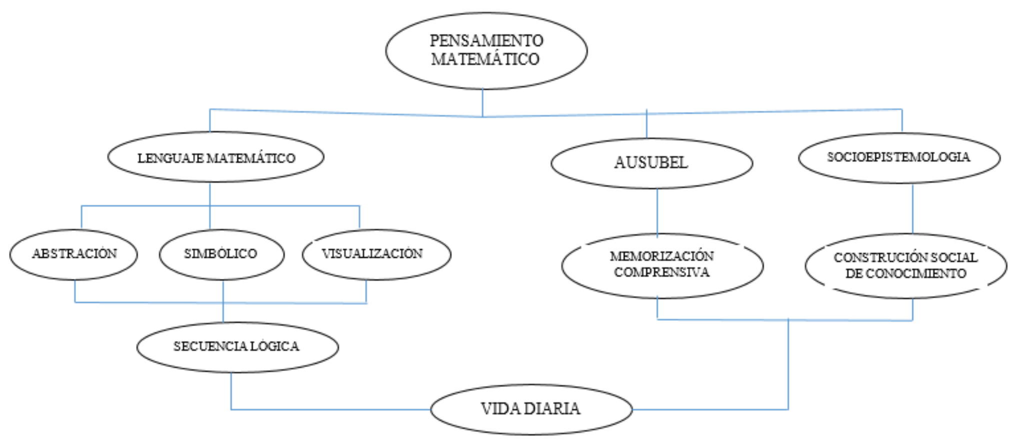


Figura 3. Diagrama de un pensamiento matemático.

El hablar de las sucesiones desde la Teoría Socioepistemología es hablar de problematizar el saber en la vida social del alumno, este tópico permite poner en práctica los aprendizajes de la abstracción de patrones de comportamiento, así como la variación y predicción para la solución de diversos tipos de secuencias tanto numéricas como de imágenes, figuras o situaciones cotidianas.

Propuesta didactica y resultados

Tomando en cuenta que el aprendizaje de las matemáticas formales por parte de los discentes de las carreras ajenas a las ciencias exactas es más complicado de comprender, motivo por el cual basamos este diseño la serie de estrategias en el método inductivo y ACODESA por sus siglas en francés de *"Aprendizaje Colaborativo, Debate Científico y Auto-reflexivo"* (Hitt y Cortés, 2009).

ACODESA consta de cinco fases en las que profesor no da un dictamen a los alumnos de lo que tiene que realizar durante las primeras etapas del proceso de aprendizaje, este dictamen solo sucede en la fase final del proceso

1. *Trabajo individual:* producción de representaciones funcionales para comprender la situación problema.
2. *Trabajo en equipo sobre una misma situación:* proceso de discusión y validación.
3. *Debate:* debate científico de procesos de discusión y validación.
4. *Regreso sobre la situación:* trabajo individual, reconstrucción de conocimientos y auto-reflexión.
5. *Institucionalizacion:* proceso de institucionalización y utilización de representaciones institucionales.

Es en esta quinta etapa donde el profesor junto con sus alumnos, llegan a un acuerdo en común para emplearlo en le procero de socialización de las ideas adquiridas durante las actividades.

Es por lo anterior que ACODESA permite que se lleve con grupos numeroso de estudiantes, siendo en este caso 50 alumnos del primer semestre de la carrera de Contaduría, el objetivo principal de esta propuesta didáctica está constituido por los siguientes puntos:

1. Aplicación de un instrumento de diagnóstico que nos ayudara para medir los conocimientos matemáticos previos que tienen los alumnos respecto al tópico de sucesiones numéricas.
2. Creación de una estrategia de aprendizaje para la adquisición de las competencias matemáticas tanto del tópico de sucesiones numéricas como le pensamiento matemático. La estrategia está diseñada en base de la compresión y adquisición de conocimientos por medio de diversas actividades donde se basa en los puntos siguientes:

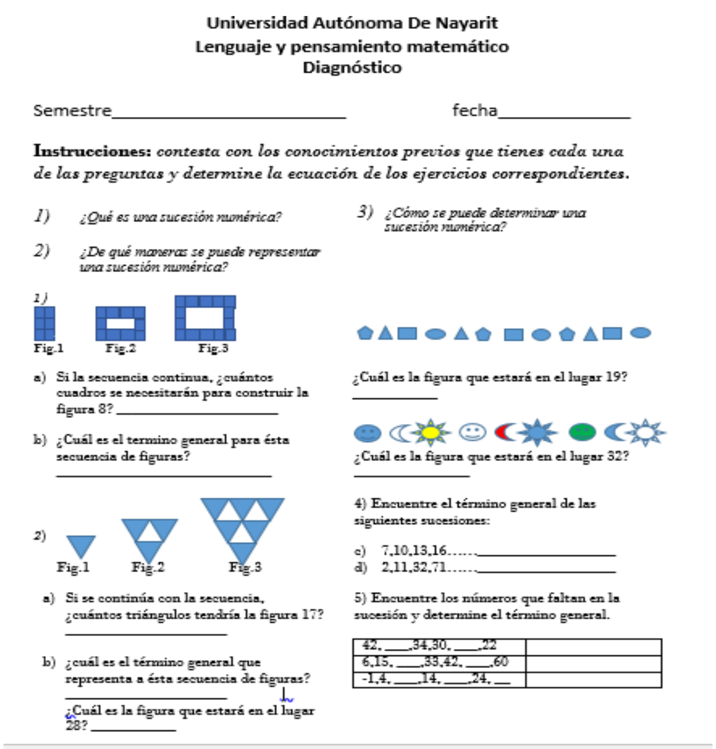
- Aprendizaje de los conceptos bases del tópico de sucesiones numéricas.
- Exámenes rápidos (examen que consta de tres preguntas los alumnos logren identificar cada uno de los conceptos aprendidos).
- Formulación práctica para la resolución de sistemas de sucesiones tanto de números, letras, figuras, imágenes, etc.

- Visualizaciones de diversas maneras de representar una sucesión numérica.
- Problematización de sucesiones numéricas en la vida diaria.

Como ACODESA lo estipula el profesor sólo será una guía para el alumno durante el proceso de la implementación de las actividades que conforman la estrategia, cabe resaltar que fungirá como moderador en el debate científico y en el proceso de institucionalización.

3. Evaluación de la estrategia de aprendizaje mediante un instrumento que nos avale los conocimientos adquiridos por los alumnos, dicho instrumento estará constituido por elementos teóricos, prácticos y contextuales a la vida diaria.

Los resultados preliminares de esta investigación es la creación y validez de un examen diagnóstico el cual consta de preguntas basadas en conceptos básicos y una serie de problemas donde el alumno plasme sus conocimientos previos acerca del apartado de sucesiones numéricas. Con base a este diagnóstico se construirá una la estrategia didáctica que permita reconstruir los conocimientos adquiridos.


Universidad Autónoma De Nayarit
Lenguaje y pensamiento matemático
Diagnóstico

Semestre________________________ fecha_____________

Instrucciones: *contesta con los conocimientos previos que tienes cada una de las preguntas y determine la ecuación de los ejercicios correspondientes.*

1) ¿Qué es una sucesión numérica?

2) ¿De qué maneras se puede representar una sucesión numérica?

3) ¿Cómo se puede determinar una sucesión numérica?

1)

Fig.1 Fig.2 Fig.3

a) Si la secuencia continua, ¿cuántos cuadros se necesitarán para construir la figura 8? ____________________

b) ¿Cuál es el termino general para ésta secuencia de figuras?
____

¿Cuál es la figura que estará en el lugar 19?
____

¿Cuál es la figura que estará en el lugar 32?
____

2)

Fig.1 Fig.2 Fig.3

a) Si se continúa con la secuencia, ¿cuántos triángulos tendría la figura 17?
____

b) ¿cuál es el término general que representa a ésta secuencia de figuras?
____

¿Cuál es la figura que estará en el lugar 28? __________

4) Encuentre el término general de las siguientes sucesiones:

c) 7,10,13,16……________________
d) 2,11,32,71……________________

5) Encuentre los números que faltan en la sucesión y determine el término general.

42, ____,34,30, ____,22	
6,15, ____,33,42, ____,60	
-1,4, ____,14, ____,24, __	

Figura 4. Examen Diagnóstico de sucesiones numéricas.

Referencias bibliográficas

Aranzazu, C.M. (2013). *Secuencia didáctica para la enseñanza de la función cuadrática.* Tesis de Magister no publicada. Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín.

Bosch, M.A. (2012). Apuntes teóricos sobre el pensamiento matemático y multiplicativo en los primeros niveles. *Edma 0-6: Educación Matemática en la infancia, 1*(1), 15-37.

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Cantoral, R. (2001). Enseñanza de la matemática en la educación superior. *Sinéctica, Revista Electrónica de Educación,* 19(1), 3-27. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=99817935002.

Cantoral, R., Farfán, R.M., Cordero, F., Alanís, J.A., Rodríguez, R.A., y Garza, A. (2005).

Desarrollo del Pensamiento Matemático. Ciudad de México, México: Universidad Virtual.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Realidad y Matemática. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(3), 91-116.

Cañadas. M.C y Castro, E. (2006). *Un procedimiento para la caracterización de estrategias en problemas de sucesiones que involucran el razonamiento inductivo.* Recuperado el 31 de abril de 2017 de http://funes.uniandes.edu.co/280/1/CannadasM06-2806.PDF.

Hitt, F., y Córtes, J. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelación matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet,* 10(1), 1-30.

Huanca, A. (2015). *Fortalecimiento de las capacidades básicas para el logro de aprendizajes significativos en el área de matemática en el quinto grado de educación secundaria de la institución educativa Telesforo Catacora de julio-2012.* Tesis de Doctorado no publicada, Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle "Alma Máter del Magisterio Nacional". Lima, Perú.

Rodríguez, S. (2015). *Uso del lenguaje y pensamiento matemático en el contexto universitario.* Tepic: Universidad Autónoma de Nayarit.

EL USO DE REDES DE APRENDIZAJE PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Claudia Flores Estrada; Adriana Gómez Reyes; José Luis Torres Guerrero
CECyT 5 IPN; CCH Sur, Ciencia Forense UNAM, CECyT 13 IPN; CECyT 7 IPN. (México)
cfloreses@ipn.mx, orodelsilencio@yahoo.com.mx, jeluistg@yahoo.com.mx

RESUMEN: El presente trabajo tiene como finalidad documentar la construcción de conocimientos a partir de una Red de Actividades de Aprendizaje en Cálculo Diferencial, específicamente del concepto de función, aplicado a estudiantes del Nivel Medio Superior tanto del IPN (CECyT) como de la UNAM (CCH). Se toma como punto de partida la planeación de las Redes de Actividades de Aprendizaje, concebidas como conjunto de actividades variadas y relacionadas con un objetivo común, como estrategia didáctica en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Palabras clave: evaluación, redes de actividades, actividades de aprendizaje, función

ABSTRACT: This work is intended to provide written documents for the construction of knowledge from a set of learning activities for differential calculus, particularly of the concept of function for senior high school students both from the National Polytechnic Institute (IPN) and from The Autonomous National University of Mexico (UNAM). The research takes as a starting point the planning of learning activity networks, which were conceived as a set of varied activities related to a common objective, as a didactic strategy in the teaching learning process.

Key words: evaluation, networks of activities, learning tasks, function

Introducción

En la investigación en matemática educativa se diseñan propuestas de situaciones didácticas, se implementan y se analiza su potencial como promotoras de ciertos aprendizajes matemáticos. Las Redes de Actividades de Aprendizaje (RAA) también llamadas Redes de Aprendizaje, están constituidas por diferentes actividades de aprendizaje, relacionadas entre sí, lo que facilita una mejor comprensión de conceptos importantes para el estudiante de Nivel Medio Superior (Flores y Gómez, 2015). Cada red de actividades se vincula desde perspectivas diferentes y se articula de diversas maneras, según el objetivo didáctico que se desea cumplir o la competencia que se quiere alcanzar. Flores, Torres, Gutiérrez, Gómez, Huerta, y Ruiz (2014) diseñaron una específica RAA para Cálculo Diferencial cuya aplicación reportamos en el presente documento.

La RAA de Cálculo tiene como intención hacer una introducción a conceptos esenciales de Cálculo, como es función, la razón de cambio y su capacidad de predicción en modelos dinámicos y para ello se retoma conceptos previos necesarios, como lo son el concepto de variable y el de constante.

Marco Teórico

El currículo formal es la planeación del proceso de enseñanza-aprendizaje basado en el programa académico. Los programas de un plan de estudio contienen objetivos generales y particulares de aprendizaje, su competencia general y competencias particulares. Suárez, Torres y Ortega (2012) mencionan que el Currículo Potencialmente Aplicado (CPA) puede comprender materiales (paquetes didácticos), planes de formación (seguimiento, capacitación y evaluación) y dispositivos organizacionales (redes y comunidades) que concretan el currículo planeado desde una perspectiva de sistema y profesional. La RAA que diseñamos forma parte del CPA de Cálculo Diferencial.

Una condición que debe cumplir cualquier Currículo Potencialmente Aplicado es el ajustarse a lo planeado. La red de actividades mencionada es acorde con el Currículo Planeado en los cursos de cálculo diferencial.

Innovar con el Currículo Potencialmente Aplicado para una materia específica en un nivel educativo específico requiere tomar en cuenta un gran conjunto de factores que den viabilidad y pertinencia a los cambios deseados. La mejora en la calidad educativa requiere de la innovación educativa en la que se implique al profesor en cambios en los materiales curriculares. Estudiosos de la Innovación Educativa como estrategia de transformación de las Instituciones Educativas (véase por ejemplo, Ortega, Ramírez, Torres, López, Servín, Suárez, y Ruiz, 2007) identifican a los resultados de la investigación como una fuente sólida de ideas y mecanismos para concretar las transformaciones que se desean.

El docente, visto como un ente reflexivo, busca y logra mejoras sustanciales en el proceso de enseñanza-aprendizaje a partir del uso de estrategias de enseñanza adecuadas.

Metodología

La Ingeniería Didáctica ha representado un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Artigue, Douady, Moreno y Gómez, 1995). Es una metodología que permite la intervención en el sistema completo del salón de clases y establece lineamientos para tomar en cuenta los resultados de la investigación en las dimensiones que corresponden a la cognición, la epistemología, la didáctica y, algunos autores adicionan, la dimensión social.

En el diseño de las RAA se ha considerado como base resultados de investigación estudiados, comentados y discutidos en el Seminario Repensar las Matemáticas.

En la elaboración del material didáctico con base en la Ingeniería Didáctica se documenta el traspaso de la planeación a profesores. Para tener evidencia de cómo, en la implementación de la actividad, los profesores se apropian de la misma, se les pedirá, antes de aplicarla con los estudiantes y después de que se les presenta, lo que en IPN (2004) se llama el modelo PER (propósito, estrategia y resultado); es decir se le pedirá a los profesores que describan cuál creen que es el propósito de esta actividad, cuál es la estrategia que se sigue para cubrir este propósito, y cuál es el resultado que espera obtener. Para evaluar esta parte utilizamos la lista de cotejo y una matriz de resultados (Flores y Gómez, 2009). Dicha matriz consiste en una tabla que incluye como primer columna el planteamiento de la situación a evaluar, en este caso ¿cuál es el propósito de la actividad? En una segunda columna lo que esperamos como respuesta, que sería el propósito que tenemos nosotros definido, en una tercera columna se presentan los resultados obtenidos, en esta columna se establecerán las respuestas presentadas por los participantes y en la última columna nos permite hacer las observaciones pertinentes.

La red de aprendizaje se aplicó a 24 estudiantes que cursan cuarto semestre del CECyT 5 y a 25 estudiantes que cursan el quinto semestre del CCH Sur, en equipos pequeños (entre dos y cinco personas) elegidos por los mismos estudiantes, todos cursaban Cálculo Diferencial. Trabajamos con 9 equipos en el CECyT 5 y 6 en el CCH Sur.

Se considera la aplicación del modelo PER (Propósito, Estrategia y Resultado), de la misma manera que se solicitó a los profesores, se le pedirá a los estudiantes que expliquen cuál creen que es el propósito de esta actividad, cuál es la estrategia que se sigue para cubrir este propósito, y cuál es el resultado que espera obtener (IPN, 2004).

Se consideran las evidencias de ambas instituciones, un profesor en cada una, con la actividad de aprendizaje titulada: *El viaje en bicicleta*, por considerarla una actividad que sirve como conclusión de la red de aprendizaje aplicada.

El viaje en bicicleta

Andrés sale con sus amigos a pasear en su bicicleta, por lo que recorren aproximadamente 1 km. de camino plano hasta llegar a una colina que tiene una altura de 30 m., después de subir la colina y bajar del lado opuesto deciden regresar para llegar a tiempo de ver su programa favorito a su casa, justo una hora después de que salieron.

1. *Bosqueja el camino recorrido por Andrés*
2. *Haz una gráfica de la distancia recorrida contra el tiempo. Observa las gráficas elaboradas por tus compañeros, ¿qué tienen en común con la tuya? ¿Cuáles son las diferencias?*
3. *Elabora una gráfica que represente la distancia a la que se encuentran de su casa en cada momento. ¿Cuál es la diferencia con respecto a la gráfica del punto anterior? ¿puede ser la misma?*
4. *¿Cuáles son las variables del problema? ¿Qué valores pueden tomar? ¿Cuál depende de cuál?*
5. *En qué momento va más rápido? ¿En qué momento va más despacio?*
6. *Haz una gráfica de la velocidad que llevan a cada momento.*

(Flores, Torres, Gutiérrez, Gómez, Huerta, y Ruiz, 2014, p. 20)

Resultados

En los siguientes párrafos se muestran las observaciones personales de los profesores con respecto a *El viaje en bicicleta*.

Profesor A. CCH-Sur, UNAM. Un poco más de la mitad de los equipo hicieron bosquejo (5/9), y aunque todos hicieron gráfica de distancia, la mayoría consideró la gráfica de la distancia recorrida y solo dos equipos trabajaron la gráfica de la distancia a la casa (punto de origen), como ningún equipo hizo ambas gráficas no hay posibilidad de que las compararan. Seis de los ocho equipos identificaron las variables, pero ninguno especificó el dominio. Casi todos indican diferentes velocidades (7 de 9) pero solo dos los grafican correctamente. Incluso dos suponen velocidad constante. En los bosquejos hay un par de equipos que redondean el trazo, pero en las gráficas todos trazan rectas. Siete de los equipos suponen los datos desconocidos, no los dejan abiertos, solo dos equipos usan una tabla para apoyarse.

Profesor B. CECyT 5, IPN. En todos los equipos hicieron bosquejo (9/9), y aunque todos hicieron gráfica de distancia, la mayoría consideró la distancia recorrida, solo dos equipos trabajaron la comparación con la gráfica de la distancia a la casa (punto de origen). Los equipos identificaron las variables, pero solo dos equipos especificaron el dominio. En los bosquejos hay un par de equipos que redondean el trazo, pero en las gráficas todos hacen rectas. Utilizan enteros según conviene.

El análisis de estos resultados se hace a través de la matriz de resultados (Tabla 2) y la rúbrica.

Para la evaluación de la red de actividades de aprendizaje se considera la lista de cotejo, como la que se muestra en la Tabla 1 y la matriz de resultados como se muestra en la Tabla 2, ambas referentes al problema de *El Viaje en bicicleta*, elaboradas como se propone en Flores, H. y Gómez, (2009). Tanto la Tabla 1 como la Tabla 2 solo muestran uno de los instrumentos a manera de ejemplo, sin contener la información completa de los equipos.

Tabla 1. Lista de cotejo del Viaje en Bicicleta. Elaboración propia

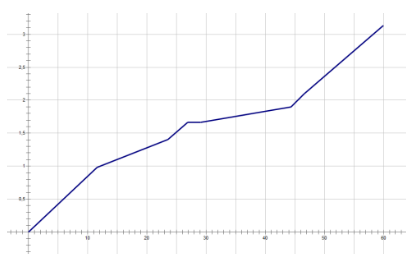
	E1	E2	E3	E4	E5	E6
Bosqueja el camino recorrido	*	*	*	*	*	*
Hace la gráfica de rla distancia recorrida contra tiempo	*	*	*	*	*	*
Hace la gráfica de la distancia de la casa	*	*	*	*	*	*
Hace una comparación entre las dos gráficas de distancia		*				*
Identifica las variables, cual es la dependiente	*	*	*	*	*	*
Identifica los dominios de las variables		*		*		*
Distingue correctamente las diferentes velocidades	*	*	*	*	*	
Grafica las velocidades		*				
Grafica correctamente las velocidades						
Características del bosquejo de la trayectoria:						
Redondea	*	*	*	*	*	*
Incluye tiempos		*				*
Incluye distancias	*	*	*	*	*	*
Características de las gráficas						
Redondea	*	*		*	*	*
Incluye tiempos	*	*	*	*	*	*
Incluye distancias	*	*	*	*	*	*
Incluye velocidad		*				
Incluye sentido		*				*
Contesta el modelo PER	*	*	*	*	*	*

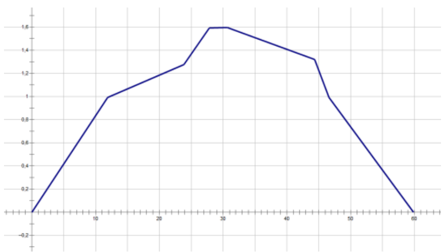
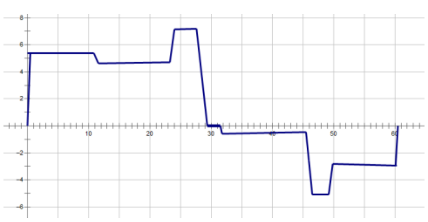
En esta lista de cotejo se puede observar que en todos los equipos hicieron bosquejo (9/9), y aunque todos hicieron gráfica de distancia, la mayoría consideró la gráfica de la distancia recorrida y solo dos equipos trabajaron la comparación de las gráficas de la distancia a la casa (punto de origen).

Los equipos identificaron las variables, pero dos equipos especificaron el dominio.

En los bosquejos hay un par de equipos que redondean el trazo, pero en las gráficas todos hacen rectas y utilizan enteros según convenga.

Tabla 2. Matriz de resultados. El viaje en bicicleta. Elaboración propia

Pregunta	Respuesta esperada	Respuesta Obtenida estudiantes	Observaciones
Bosqueja el camino recorrido por Andrés		**E1, E2, E3, E5 y E6** Considera la trayectoria plana del camino y dibujan la colina más que su trayectoria. **E4** No realiza el bosquejo.	Pedir un esbozo es muy abierto así que pueden darse por valido el dibujo de la colina
Haz una gráfica de la distancia recorrida contra el tiempo. Observa las gráficas elaboradas por tus compañeros, ¿Qué tienen en común las gráficas? ¿Qué diferencias tienen?		**E1, E3, E4, E5** Consideran la gráfica lineal **E2** Solo bosqueja la distancia, no realiza la gráfica solicitada **E6** Considera la gráfica en camino 1 lineal, en el camino 2 recta pero con una inclinación diferente a la del camino 1 en el camino 3 una curva.	Los estudiantes realizan la gráfica de la distancia recorrida contra el tiempo sin considerar la inclinación o subida y bajada de la colina.
Elabora una gráfica que represente la distancia a la que se encuentran de su casa en cada momento. ¿Cuál es la diferencia con respecto a la gráfica anterior?		**E1, E2** Solo realiza la gráfica aunque no sea la esperada. **E3, E4, E5 E6** No Realiza la gráfica de tiempo vs distancia	Logran visualizar las variables dificultándose diferenciar que la distancia recorrida por el ciclista es distinta a la distancia en que se encuentra la casa en el esbozo de la gráfica.

¿Puede ser la misma?		No logra visualizar quien es la variable independiente y dependiente.	
¿Cuáles son las variables de este problema? ¿Qué valores puede tomar? ¿Cuál depende de cuál?	En la discusión con los diferentes equipos se puede tratar las diferentes respuestas que se pueden tener a partir de las decisiones que se tomaron en cada equipo.	**E1, E3, E5 y E6** Consideran distancia y tiempo. **E2,** Consideran distancia, tiempo y velocidad. **E3,** Consideran distancia y tiempo, y que la distancia depende del tiempo.	No son explícitos para diferenciar de la velocidad y longitud cuando es cuesta arriba y cuando es cuesta abajo
¿En qué momento van más rápido? ¿En qué momento van más despacio?		**E1, E3, E5** Es más rápido cuando baja de la colina. Más despacio cuando sube la colina de regreso. **E2 y E6** No lo realizan	Los estudiantes no son tan explícitos en sus notas.
Haz una gráfica de la velocidad que llevan a cada momento.	 * Aun cuando debe considerarse cuando son más bien curvas y no esquinas.	**E1, E2, E3, E4, E5 y E6** No logran realizar la gráfica de la velocidad	Se obtiene las gráficas a partir de las decisiones de los profesores y estudiantes.

Conclusión

La RAA que incluye el viaje en bicicleta, tiene como intención hacer una introducción tanto al cálculo en sí como a la forma de trabajo, al revisar conceptos previos necesarios, en particular variables y funciones. Los instrumentos de evaluación muestran la construcción de conocimientos matemáticos lograda en los estudiantes. Con la aplicación de la Red de Aprendizaje se favorece la mejora sucesiva de la práctica docente, proporcionando una metodología. Para un profesor novato, la sugerencia en cuanto al orden y variedad de las actividades, puede orientarlo, en la medida que se va tomando experiencia, se pueden tomar decisiones en cuanto a cambios en este orden o en cuanto a quitar o aumentar actividades, pero siempre se tiene un punto de partida.

Las variables en la implementación de la RAA permiten al profesor detectar puntos de mejora de la puesta en escena de las redes para favorecer la construcción del conocimiento matemático por parte del estudiante en sucesivas puestas en escena, así el profesor puede observar cómo va afianzando el concepto de variable, en la medida en que identifica las variables dependiente e independiente en cada problema, y como habla de los cambios.

Las dificultades que presentan los estudiantes son más o menos las mismos en cada institución y son las mismas observadas con otras metodologías de trabajo (si faltan a una sesión pierden el hilo de la exposición, si no resuelven un ejercicio no tendrán las bases o la información requerida para las siguientes actividades). La red de actividades permite al estudiante adquirir un método de trabajo que puedan vincular distintos tipos de actividades, es decir un método de trabajo que les permita organizarse y sistematizar el proceso de aprendizaje.

Agradecimientos

El desarrollo es posible gracias al apoyo recibido por la Secretaría de Investigación y Posgrado (SIP) del Instituto Politécnico Nacional asignado al proyecto 20152076. *Evaluación del aprendizaje logrado con actividades del currículo potencialmente aplicado en el área de matemáticas*.

Referencias bibliográficas

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Bogotá, Grupo Editorial Iberoamericana.

Flores, C. y Gómez, A. (2015). El uso de redes de aprendizaje en el estudio del cálculo. *Segundo Congreso Internacional de Matemáticas y sus Aplicaciones*. 65-74.

Flores, C., Torres, J.L., Gutiérrez, N., Gómez, A., Huerta, J.J. y Ruiz, B.R. (2014). Redes de aprendizaje. IPN. México.

Flores, H. y Gómez, A. (2009). Aprender Matemática, Haciendo Matemática: la evaluación en el aula. *Educación Matemática*. *21*(2), 117-142.

IPN (2004). Álgebra. Libro para el estudiante. IPN. México.

Ortega, P., Ramírez, M., Torres, J., López, A., Servín, C., Suárez, L. y Ruiz, B. (2007). Modelo de innovación educativa. Un marco para la Formación y el desarrollo de una cultura de la Innovación. *Revista Iberoamericana de Educación a Distancia 10*(1), 145-173.

Suárez, L., Torres, J.L. y Ortega, P. (2012). Las matemáticas del bachillerato en el instituto politécnico nacional. En C. Dolores. (Ed.) *¿Hacia dónde reorientar el currículum de matemáticas del Bachillerato?* México: Plaza y Valdés.

DISEÑO Y ANÁLISIS DE UN TEXTO PARA LA ENSEÑANZA DE LA CIRCUNFERENCIA A TRAVÉS DE CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS

Rafael Antonio Arana Pedraza, Julia Xóchilt Peralta García, Omar Cuevas Salazar y Evaristo Trujillo Luque
Instituto Tecnológico de Sonora. (México)
rafael.arana@itson.edu.mx, julia.peralta@itson.edu.mx, omar.cuevas@itson.edu.mx, evaristo.trujillo@itson.edu.mx

RESUMEN: En el presente artículo se desarrolla una propuesta para la enseñanza de la circunferencia en el nivel superior y los elementos relacionados con ella, tomando como base los constructos teóricos del Enfoque Ontosemiótico y la Instrucción Matemática (EOS), la cual emana de las estrategias institucionales para contrarrestar los bajos logros académicos de los estudiantes en sus habilidades matemáticas. A través de un análisis del texto con la noción de configuración epistémica, se revisa la articulación de los objetos primarios que intervienen y emergen del él, así como la identificación de posibles conflictos semióticos.

Palabras clave: circunferencia, configuraciones epistémicas, e ontosemiótico (EOS)

ABSTRACT: This article provides a proposal for the teaching of circumference and its related elements at higher education. It's based on the theoretical constructs of the Onto-semiotic Approach, and Mathematical Instruction. It arises from the institutional strategies to counteract the low academic achievement of students in their mathematical skills. Through an analysis of the text with the notion of epistemic configuration, we review the connection of the primary objects that take part in, and emerge from it, as well as the identification of possible semiotic conflicts.

Key words: Circumference, epistemic configurations, onto- semiotic approach (OSA)

Introducción

En México se reconoce que aún existe un gran rezago escolar en las materias de matemáticas del nivel medio superior, esto se muestra en los resultados obtenidos de la Evaluación Nacional del Logro Académico (ENLACE) que de acuerdo a las estadísticas obtenidas del 2008 al 2014, se promedia que el 73.4 % de los estudiantes se encuentran en los niveles Insuficiente y Elemental en la parte de habilidades matemáticas. (Secretaría de Educación Pública, 2014). Como se percibe, en los resultados de los logros en educación matemática a nivel nacional (tabla 1), esta es una de las ciencias donde más deficiencia presentan los alumnos al momento de ingresar al nivel superior.

Tabla 1. Histórico de porcentajes de alumnos por nivel de domino en la prueba ENLACE 2008-2014

NIVEL DE DOMINIO	PORCENTAJE DE ALUMNOS DEL ÚLTIMO GRADO EN CADA NIVEL DE DOMINIO						
	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
INSUFICIENTE	46.5	46.1	40.6	35.1	30.1	28.3	26.6
ELEMENTAL	37.8	35.1	39.1	40.2	39.1	35.4	34.1
BUENO	12.2	13.9	15.1	16.7	19.2	20.2	20.0
EXCELENTE	3.4	4.8	5.3	8.0	11.6	16.1	19.4
TOTAL	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

Nota. Fuente: Secretaria de Educación Pública (2014).

El Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON) no difiere en esta situación, y reconociendo que no todos los alumnos aspirantes a las carreras de ingeniería tienen el nivel mínimo necesario de conocimientos en matemáticas, aplica un examen diagnostico con el fin de identificar a aquellos alumnos que requieren un curso remedial denominado Fundamentos de Matemáticas. En un estudio realizado por Peralta, Cuevas, Encinas, Ansaldo y Osorio en 2014, se puede apreciar que a través del tiempo (2010 al 2014) los índices de aprobación y el promedio de calificaciones obtenidos en el examen de diagnóstico de Matemáticas aplicado en ITSON han ido disminuyendo, de un nivel deficiente a un nivel muy deficiente. Además un análisis de la información de los índices de aprobación, reprobación y deserción en el curso remedial de los años anteriores, mostró que alrededor de 60% de la población se encuentra en los índices de deserción y reprobación (ver tabla 2).

Tabla 2. Índices de aprobación, deserción y reprobación del curso de Fundamentos de Matemáticas

	EM2015		AD2014		AD2013	
	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje
INSCRITOS	398		959		963	
BAJAS	7	1.76%	25	2.61%	27	2.80%
AUSENTES	175	43.97%	381	39.73%	370	38.42%
REPROBADOS	62	15.58%	143	14.91%	184	19.11%
APROBADOS	154	38.69%	410	42.75%	382	39.67%

Nota. Fuente: Elaboración propia

Para contrarrestar este fenómeno e incrementar los indicadores académicos, se han implementado diferentes estrategias como la acreditación y capacitación de profesores, talleres y asesoría para alumnos (Peralta, Rojas, Cuevas, Robles y Osorio, 2012). Sin embargo, existe un área de oportunidad en el estudio de los textos utilizados como bibliografía básica del curso.

Realizando un análisis global sobre el texto utilizado, se visualiza una tendencia a la repetición y mecanización de los ejercicios planteados como metodología de la enseñanza, prescindiendo de un análisis más a fondo de las situaciones que pudieran generar la utilización de dichos objetos matemáticos. Esto conduce a la necesidad de desarrollar nuevos materiales para la enseñanza del curso de Fundamentos de Matemáticas, que privilegien un mayor análisis por parte del alumnado.

Dado lo anterior, se planteó generar una propuesta para la enseñanza de cada uno de los temas que comprenden el curso remedial para generar un nuevo libro de texto, específicamente se reporta el diseño de la propuesta para la enseñanza de la circunferencia y aquellos elementos relacionados utilizando los constructos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS); así como el análisis de la misma a través de la articulación de sus configuraciones epistémicas puntuales y una configuración epistémica global.

Marco Teórico.

Según Godino, Batanero y Font (2009), al analizar la práctica matemática para resolver una situación problema, se identifica un lenguaje (verbal y simbólico) que representa la parte ostensiva de una serie de conceptos, procedimientos y proposiciones que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones realizadas en la práctica son satisfactorias para la resolver la situación que se planea. Estos se clasifican en seis tipos de objetos matemáticos primarios: (1) Situaciones, (2) Lenguaje, (3) Conceptos, (4) Proposiciones, (5) Procedimientos y (6) Argumentos.

De acuerdo a Font y Godino (2006) el análisis de los seis objetos primarios y sus relaciones (ver figura 1) permiten conocer la anatomía de un texto matemático. Las relaciones que forman los objetos primarios se articulan en lo que se denomina configuración epistémica. Una configuración epistémica es una herramienta útil al profundizar en lo que se entiende por una situación rica, donde una mayor articulación de los objetos primarios (intervinientes y emergentes) generan mejores estructuras en el texto.

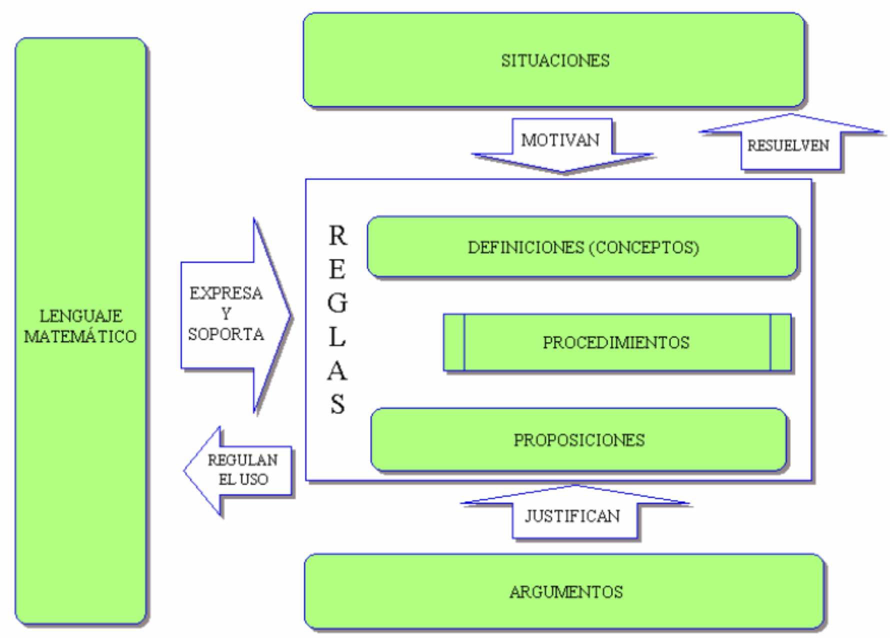


Figura 1. Relación de los objetos primarios en una configuración epistémica. Adaptado de La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores por Font y Godino, 2006.

Godino, Batanero y Font (2007) definen un conflicto semiótico como la disparidad o diferencia en la interpretación entre los significados que le asignan a un objeto o expresión por dos sujetos diferentes (personal o institucional).

Contexto

El trabajo que se reporta se realizó en el Instituto Tecnológico de Sonora, en el marco de la reestructuración de la asignatura de Fundamentos de Matemáticas. Como se mencionó con anterioridad, existía un área de oportunidad con referencia a los materiales que se utilizan como bibliografía básica (manual del curso); por lo que, se desarrolló un libro de texto (en proceso de publicación) para la bibliografía básica, específicamente en este caso, la propuesta didáctica referente a la circunferencia y los elementos que se relacionan con ella.

Procedimiento

1. Diseño de la Propuesta. En la elaboración del texto para la enseñanza de manera articulada de las nociones y elementos relacionados a la circunferencia, se tomaron en cuenta los constructos del EOS, al intentar incorporar los seis objetos primarios para el desarrollo de los ejercicios que componen cada uno de los subtemas presentes en el capítulo.
2. Identificación de los Objetos Primarios. Una vez desarrollado el texto, se dividió en unidades de análisis agrupando las situaciones que buscaban la emergencia de un mismo objeto matemático. A su vez cada una de las unidades de análisis se dividieron en secciones, que se denominaron unidades epistémicas, con el objetivo de identificar los objetos primarios que se ponen en juego en cada una de ellas.
3. Articulación de las Configuraciones Epistémicas. Identificados los objetos primarios, se estructuró para cada unidad de análisis una configuración epistémica de los elementos y sus relaciones; proceso que ayudó a identificar posibles conflictos semióticos. Una vez que se realizaron las Configuraciones Epistémicas para cada una de las unidades, se realizó una configuración epistémica global del sistema de prácticas promovidas en el texto propuesto.
4. Caracterización del Significado Institucional del Referencia. A través de las configuraciones puntuales y la configuración epistémica global, se estableció el Significado Institucional de Referencia del texto propuesto.

Análisis y resultados

Una revisión global a la bibliografía básica del curso de Fundamentos de Matemáticas, mostraba una tendencia a la mecanización de los ejercicios, realizados de manera repetitiva, prescindiendo de un significado para el alumno. Además, se enseña al alumno cada uno de los temas por separado, es decir tiene una organización fragmentada de los conceptos matemáticos que se ponen en juego.

En consideración de lo anterior, la composición del texto y los objetos matemáticos que se organizaron en la propuesta diseñada, obedecen a la articulación de aquellos conceptos que giran en torno a la circunferencia, y que a través de las situaciones planteadas se construye el significado de los mismos. La propuesta didáctica para la enseñanza de la circunferencia se divide en cuatro subtemas: (1) La distancia entre dos puntos, (2) La ecuación y los elementos de la circunferencia, (3) La recta tangente a la circunferencia y (4) La longitud de arco y el área de sector circular.

El primer subtema de la propuesta didáctica busca la emergencia del concepto de la distancia entre dos puntos, donde se presentan situaciones de las cuales a partir del teorema de Pitágoras propiciarán la construcción de una fórmula para la longitud de arco. En el segundo subtema se generan las definiciones de centro, circunferencia y centro a partir de lo estudiado de la distancia entre dos puntos, y el concepto de diámetro y cuerda. Además de lo anterior, se generan las formas estándar y general de la ecuación de la circunferencia y se estudia el tratamiento necesario para transitar de una ecuación a la otra.

En el tercer subtema se analiza el concepto de recta tangente a la circunferencia utilizando para la resolución de las situaciones planteadas la pendiente y las propiedades de las rectas perpendiculares estudiadas con anticipación en el capítulo uno del libro. Por último, se utilizan los conceptos de área y perímetro, para generar las definiciones y fórmulas de la longitud de arco y el área de sector circular. Asimismo en este subtema, se analizan las unidades de medida de ángulos (grados y radianes) y las conversiones entre ellos.

Al final de cada una se las secciones del capítulo, se presentan una serie de ejercicios con el fin de reforzar los conceptos estudiados en ese subtema.

Para realizar un estudio de la propuesta didáctica, se dividieron los subtemas en nueve unidades de análisis agrupando aquellas situaciones que propiciaran la emergencia del mismo objeto matemático; para las cuales se identificaron los objetos primarios intervinientes y emergentes y se realizó una configuración epistémica. Una vez realizadas las configuraciones epistémicas de cada una de las unidades de análisis, se realiza una descripción de las relaciones de cada una de ellas para definir una configuración global, con lo que se establece el sistema de prácticas que se desarrolla en la propuesta didáctica.

En la primera unidad de análisis, se utilizan los conceptos de desplazamientos utilizados en el primer capítulo del libro para introducir el concepto de la distancia entre dos puntos, tomando como argumento el teorema de Pitágoras; a partir de esto, se establece la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos, misma que será un concepto interviniente de importancia para propiciar la emergencia de los objetos matemáticos en la propuesta. La primera unidad termina planteando una serie de ejercicios a realizar, mismo que serán la base para los objetos que emergen en la segunda unidad.

Al inicio de la segunda unidad, se definen los conceptos de circunferencia, radio y centro; utilizando las nociones de distancia entre dos puntos para definir los dos primeros objetos matemáticos. A partir de ahí, se plantean dos situaciones donde surge la necesidad de calcular el valor del radio de una circunferencia, recurriendo a la fórmula de la distancia entre dos puntos; estableciendo así el radio como equivalente de la distancia cuando los puntos que se evalúan son el centro y un punto que pertenece a la circunferencia.

La tercera unidad de análisis, presenta una situación para cuando se asignan valores arbitrarios del centro y el punto que pertenece a la circunferencia, con la finalidad de generar la ecuación de la circunferencia en la forma estándar con centro fuera del origen a través de la fórmula para la distancia. Además, surge la situación donde la circunferencia tiene centro en el origen como un caso en particular, estableciendo una ecuación en la forma estándar con centro en el origen.

En la cuarta unidad de análisis, se utiliza a la ecuación en la forma estándar para corroborar que una ecuación dada representa una circunferencia; más adelante se generaliza la estructura de esta ecuación como la forma general de la ecuación de la circunferencia. Durante esta unidad de análisis se retoman conceptos del capítulo dos del libro para desarrollar los procedimientos de conversión entre una forma y otra de la ecuación de la circunferencia, como lo son: completar el trinomio cuadrado perfecto y el producto notable del binomio al cuadrado; y para encontrar el centro de la circunferencia al conocer dos valores extremos de un segmento de recta que la atraviesa se utiliza el concepto del punto medio. Además de la ecuación en la forma general, emergen los conceptos de diámetro y cuerda. En esta unidad se presenta, en la última situación mostrada, una ruptura en la secuencia dentro de las demás unidades donde se han enlazado cada uno de los objetos emergentes al siguiente.

La quinta unidad de análisis, utiliza los conceptos de radio y centro, en conjunto con las características de las rectas perpendiculares estudiada en el primer capítulo del libro para establecer la ecuación que toca solamente una vez a la circunferencia, emergiendo de esta situación el concepto de recta tangente y punto de tangencia.

De la sexta unidad a la novena unidad, se presentan diferentes situaciones con el objetivo de generar diferentes conceptos para desencadenar al final la emergencia de los conceptos de longitud de arco y área de sector circular.

En la sexta unidad de análisis, se presenta de manera verbal una reseña de datos que permiten conocer los conceptos de perímetro, área encerrada por la circunferencia y círculo, su relación con la constante π y la división en grados del círculo. Además se presentan dos situaciones para calcular el perímetro completo y una octava parte de una circunferencia de radio $r = 1$; dividiendo el perímetro total entre el número de partes que se divide. Este mismo procedimiento de división en partes se retoma en la unidad de análisis siete para calcular la inclinación a la que se debe colocar un radio para que se encuentre en el punto que encierra una octava parte de la circunferencia, solamente que se divide a los 360° que se encierran en el círculo.

En la unidad de análisis ocho, se retoman estos mismos procesos de división en partes utilizados en las unidades anteriores para encontrar el ángulo que se forma con el radio al tener una longitud de arco igual al radio; situación con la cual se propicia la emergencia del radián, utilizado como una segunda unidad medida de los ángulos y, a través del cual, en la novena unidad de análisis se generan las fórmulas para la longitud de arco y la fórmula y concepto del área de sector circular.

Conclusiones

De acuerdo a Font y Godino (2006) el análisis de los seis objetos primarios y sus relaciones permiten conocer la anatomía de un texto matemático, a través de las relaciones que forman los objetos primarios en una configuración epistémica, la cual resulta ser una herramienta útil al profundizar en lo que se entiende por una situación rica, donde una mayor articulación de los objetos primarios (intervinientes y emergentes) generan mejores estructuras en el texto.

Una vez realizadas la identificación de los objetos primarios y las configuraciones de cada una de las unidades de análisis, se puede observar que se pueden distinguir de manera ostensiva en la propuesta los seis objetos primarios que identifica el EOS, de manera interviniente o emergente.

De forma general en todas las unidades de análisis, se presentan procedimientos de manera ostensiva utilizando las diferentes formas del lenguaje: verbal, gráfico, numérico y en notaciones. Además, la emergencia de los objetos en cada una de las unidades tiene un orden lógico y se retoman los objetos y conceptos de las unidades anteriores para significar los nuevos conceptos que pretenden emerger en cada unidad.

La resolución de las situaciones presentadas se soporta en procedimientos, proposiciones y argumentos que aparecen de manera ostensiva en el texto, haciendo referencia a las mismas unidades de análisis anteriores y capítulos anteriores del libro de texto.

A pesar de lo anterior, se identifican en la propuesta algunos elementos que podrían generar diferentes significados sobre una misma expresión, lo cual Godino, Batanero y Font (2007) definen como conflicto semiótico. En la unidad de análisis uno emerge el concepto de distancia entre dos puntos, la cual se define mediante la fórmula $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, asignando la literal d como la notación que representa a la distancia entre dos puntos. Durante el desarrollo de la unidad cuatro emerge el concepto del diámetro de una circunferencia, sin embargo, no se asigna de manera explícita una notación que represente dicho concepto, dejando de manera *libre* la notación a utilizar para representarlo. Este posible conflicto semiótico se presenta de manera explícita en la sexta unidad de análisis, cuando al emerger el concepto de perímetro se le asocia para calcularlo una fórmula ($P = \pi * d$), utilizando a d como notación para representar el diámetro.

En la unidad de análisis cuatro, se presenta en la ecuación general de la circunferencia con coeficientes representados por a y b en los términos cuadráticos de la misma, sin embargo, para la circunferencia estos dos coeficientes deberán ser iguales. Además, se presenta una situación cuyo objetivo es la emergencia de los conceptos de diámetro y cuerda, donde se pide encontrar la forma estándar de la ecuación de la circunferencia, sin embargo el objeto matemático utilizado no corresponde al objeto emergente de la unidad de análisis el cual es la forma general de la ecuación de la circunferencia.

Con el fin de evitar los posibles conflictos semióticos detectados y mejorar la propuesta didáctica, se modificó en la unidad de análisis cuatro al eliminar las literales a y b de los coeficientes de los términos cuadráticos debido a que para estos términos es común que los coeficientes sean iguales a uno. En el caso del diámetro, se asoció una notación de manera explícita al concepto y se realizaron las modificaciones necesarias a las notaciones utilizadas en dicha unidad y en la unidad de análisis seis, específicamente en la fórmula para calcular el perímetro.

En última situación problema planteada en la unidad de análisis cuatro, se cambió el objeto matemático en cuestión por la forma general de la ecuación de la circunferencia con el objetivo de mantener una uniformidad en las situaciones presentadas, lo cual generaría una situación adicional de convertir de la forma estándar de la ecuación (forma a la que se puede llegar a partir de la información gráfica que se presenta) a la ecuación de forma general.

Referencias bibliográficas

Font, V. y Godino, J. (2006) La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. Educaço Matematica Pesquisa, 8 (1), 67-98. Recuperado de: http://webs.ono.com/vicencfont/index_archivos/EMP.pdf

Godino, J. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, Vol. 39 (1-2): 127-135. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/ontosemiotic_approach.pdf

Godino, J. Batanero, C. y Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Peralta, J., Cuevas, O., Encinas, F., Ansaldo, J. y Osorio M. (2014). *Estudio comparativo de conocimientos en Matemáticas para alumnos de nuevo ingreso a una universidad.* En Pizá R., González M., Orduño B. y Vizcarra L. (Comp.). Gestión del Aprendizaje Universitario (pp. 106-117). México: ITSON

Peralta, J., Rojas, J., Cuevas, O., Robles, A. & Osorio, M. (2012). *Diagnóstico comparativo del desempeño académico de los alumnos de bachilleratos tecnológicos.* En Pizá, R., Bojórquez, C. & González, M. (Comp.). Análisis áulico sobre el Desempeño Profesional. (pp. 122-133). México: ITSON

Secretaría de educación Pública: SEP. (2014). ENLACE: estadísticas de resultados 2008-2014. Recuperado de: http://enlace.sep.gob.mx/ms/estadisticas_de_resultados/

CONSTRUCCIÓN COGNITIVA DEL FRACTAL CURVA CERRADA DE KOCH

Ximena Gutiérrez-Figueroa, Marcela Parraguez González
Universidad de Chile, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
ximenagutierrez@u.uchile.cl, marcela.parraguez@pucv.cl

RESUMEN: La cognición referida a los fractales geométricos y la potencialidad formativa que se proyecta en su incorporación al currículum escolar, han sido los ejes conductores de esta investigación, cuya finalidad ha sido determinar las construcciones y mecanismos mentales que conforman el modelo cognitivo para la curva cerrada de Koch. Con base en una secuencia ya validada para el triángulo de Sierpinski, diseñada bajo el marco teórico APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) y sustentada en actividades desarrolladas por estudiantes de forma autónoma, que no conocían del tema, se logró evidenciar una construcción análoga para esta estructura a través del algoritmo constituido por el Iniciador y el Generador.

Palabras clave: fractal geométrico, curva de Koch, marco teórico APOE

ABSTRACT: The cognition related to the geometric fractals and the formative potentiality that is expected to be included in the school curriculum have been the guiding axes of this research, whose purpose has been to determine the constructions and mental mechanisms that make up the cognitive model for the closed curve of Koch. Based on a sequence already validated for the Sierpinski's triangle, designed under APOS(Action, Process, Object, Scheme) theoretical framework, and based on activities developed by students in an autonomous way (that they did not know about the topic) it was possible to demonstrate an analogous construction to this structure through the algorithm constituted by the Initiator and the Generator.

Key words: Geometric fractal, Koch curve, APOS theoretical framework)

Introducción

La investigación se inicia por la fuerte convicción de que la Didáctica de la Matemática (DM) o Matemática Educativa, es una disciplina que puede proveer mejores respuestas frente al problema de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, no solo en nuestro país. En este sentido, sostenemos que es la disciplina que puede aportar las mejores preguntas en torno a la observación de dicho proceso en que se pone a prueba el sistema didáctico fundamental: conocimiento-profesor-estudiante. Este estudio se centró en considerar a los fractales como un conocimiento posible de abordar en el aula y por sus características especiales, específicamente las ligadas a la iteración y autosimilitud de sus formas en distintas escalas. Sostenemos que estas estructuras pueden proyectarse como asimiladores de variados conceptos matemáticos, que por lo general son tratados fragmentadamente en la escuela, y así promover una enseñanza más integral y ligada a aspectos que se relacionan con la naturaleza, fenómenos sociales y económicos por citar algunos.

El fractal geométrico triángulo de Sierpinski (TS), fue construido a nivel de Totalidad por estudiantes de educación secundaria que no conocían sobre el tema. En base a estos resultados se proyectó una nueva secuencia de actividades que en esta oportunidad contempló otro fractal geométrico, la curva de Koch (CK). Se pudo observar algunos conocimientos que emergen asociados a su construcción y obstáculos ligados a la geometría euclidiana que emergen en el desarrollo de la secuencia. El objetivo general que guía esta investigación es la formulación de un modelo cognitivo para el aprendizaje de los fractales. En lo específico, indagar en las construcciones y mecanismos mentales comunes que caracterizan a una familia de fractales y determinar cuáles son las relaciones de significado entre sujeto-objeto, para potenciar su aprendizaje en estudiantes de nivel básico y secundario.

Algunos antecedentes

La reflexión sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría, específicamente sobre las formas geométricas, la experiencia en aula, la observación de clases, la supervisión programas de formación continua docente, y las labores desempeñadas en organismos educacionales gubernamentales permiten levantar premisas sobre la necesidad de remirar no solo las estrategias de enseñanza de los profesores que ejercen en el sistema educativo, sino también sobre los énfasis del currículum. El currículum chileno viene desarrollando modificaciones al menos, durante los últimos 10 años. La evolución de las temáticas en el eje de Geometría del currículum nacional se desarrollan desde los cursos de educación básica, inicialmente en relación a la comprensión de las formas, la caracterización y relaciones simples entre estas y su representaciones cartesianas. Continúa con la medición de perímetros, áreas y volúmenes y con movimientos rígidos de figuras en el plano (Ministerio de Educación, 2010). En el plan común de estudios del currículum chileno, los aprendizajes relacionados con Geometría se desarrollan en su mayoría en torno a la axiomática de Euclides, dejando para los cursos del plan diferenciado –estudiantes que eligen profundizar en la asignatura– del último año de educación secundaria, algunas temáticas que aluden a fractales, como las iteraciones en torno a procesos infinitos (Ministerio de Educación, 2005).

La construcción cognitiva que lograron en forma autónoma estudiantes de educación secundaria que no sabían del tema fractales, a partir de una secuencia didáctica donde se presentaron actividades formuladas a partir del iniciador y el generador del TS, motivó a las investigadoras a profundizar en los elementos que permiten la cognición de este tipo de estructuras autosemejantes. Los fractales no forman parte del currículum escolar de nuestro país, sin embargo ya tenemos evidencia de su potencial formativo, al involucrar diversos conceptos de la propia Matemática y a su vez dotar de significado intrínseco a sus representantes geométricos.

La potencialidad formativa de los fractales

Una variedad de investigaciones muestran a los fractales como elementos que se relacionan con distintas áreas de la ciencia y la cultura. En Restrepo y Velásquez (2012), se analizaron algunos comportamientos de mercados financieros concluyéndose que podían ser analizados mediante herramientas provenientes de la geometría fractal, con lo cual se podría acceder a nuevas formas de transacción en la bolsa. Por otra parte, las estructuras fractales también han dado explicaciones a ciertas propiedades de órganos humanos los que se asemejarían a estas formas dotando a los mismos de un mejor funcionamiento a nivel morfológico (Fossión, 2010) como se observa en la Figura 1.

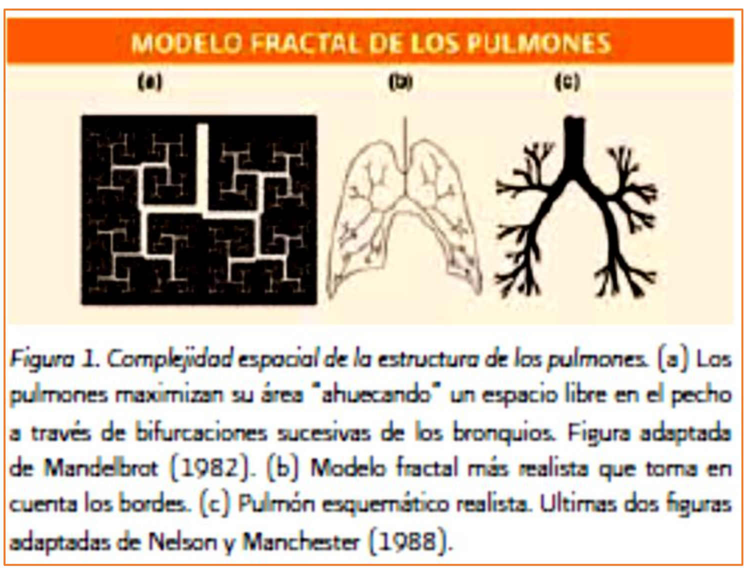


Figura 1. Complejidad espacial de la estructura de los pulmones. (a) Los pulmones maximizan su área "ahuecando" un espacio libre en el pecho a través de bifurcaciones sucesivas de los bronquios. Figura adaptada de Mandelbrot (1982). (b) Modelo fractal más realista que toma en cuenta los bordes. (c) Pulmón esquemático realista. Ultimas dos figuras adaptadas de Nelson y Manchester (1988).

Figura 1. Modelo fractal de los pulmones (Fossion, 2010, p. 173)

Otro tipo de estudios más ligados a la enseñanza presentan estrategias metodológicas para trabajar con los fractales a nivel de educación superior o de bachillerato, aportando actividades prácticas y teóricas en el aula. Algunos de estos trabajos incluyen el uso de material concreto para su compresión representando fractales mediante figuras en dos y tres dimensiones.

La noción de infinito es un tema recurrente donde los fractales son propuestos como objetos para investigar sobre esta noción no menos relevante, por ejemplo, la construcción de la curva cerrada de Koch, estaría más ligada a la noción de infinito potencial que a la de infinito actual (Oviedo, Kanashiro, Benzaquen y Gorrochategui, 2006). Otros estudios del infinito en el que se incluye el uso de la computadora, usan las características recursivas de los fractales para tales fines la herramienta resultó ser útil como verificación para modelos discretos (Moreno y Sacristán 1996). A partir de un código computacional, estos investigadores trabajaron con los estudiantes usando computadora para apoyar las relaciones entre estructuras cognitivas y la formalización. Para los estudiantes fue positivo observar cómo se construyen las primeras etapas del fractal de Koch, esto permitió la mejor comprensión de estas relaciones a partir de una estructura recursiva que puede producir distintas formas de mirar el infinito.

La naturaleza fractal es mucho más compleja de lo expresado anteriormente, sin embargo resalta la posibilidad de que a partir de algunos algoritmos muy sencillos los estudiantes puedan construir algunos de sus representantes más conocidos y a partir de sus relaciones con distintas ramas del conocimiento se potencien aprendizajes más significativos que motiven el acercamiento a las ciencias y al conocimiento. Los fractales geométricos se caracterizan por mantener su estructura a cualquier escala en que se observen, es decir su autosimilitud, los distinguen de otros objetos matemáticos (Mandelbrot, 1997). A su vez, el proceso de construcción iterativo confiere a estas estructuras un dinamismo que también puede ser descrito mediante un proceso aleatorio con resultados deterministas. Como se ha señalado, los fractales no están incorporados en el currículum obligatorio, sin embargo la potencialidad de su tratamiento en la escuela está ligada a las posibilidades de desarrollar una matemática más integrada donde diversos conceptos convergen en torno a un objeto de la Matemática que por otra parte modela diversos fenómenos ligados a la vida cotidiana, como el organismo humano, comportamientos sociales, el clima, entre otros.

Marco teórico para abordar el estudio

El modelo cognitivo que guio nuestro trabajo se desarrolló a partir de la Teoría APOE, (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) creada por Dubinsky (1991) y desarrollada por otros investigadores (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller, 2014). Los supuestos teóricos de APOE se estructuran a partir de la epistemología cognitiva de Piaget, enfocada en el individuo, que es quien reflexiona sobre un problema matemático haciendo uso de esquemas mentales en los que se construyen y reconstruyen ciertas estructuras cognitivas. Así, esta teoría permite explicitar a priori, los elementos señalados para que un estudiante, o un grupo de ellos, pueda tener acceso a tal conocimiento o a parte de este dependiendo del nivel de enseñanza al que pertenezca. Entendemos por acceso, al aprendizaje de dichos conocimientos. La teoría presenta su propia metodología de investigación en la que se incluye un ciclo de trabajo en grupo de los estudiantes que puede permitir el aprendizaje del concepto que se quiere enseñar.

Elementos metodológicos

Este proyecto se inscribe en el paradigma de la investigación cualitativa, principalmente por estar enfocado en la comprensión más profunda de los fenómenos a partir de la exploración y la experimentación en un entorno de enseñanza y aprendizaje de un concepto de la Matemática. Como ya se ha señalado la intención principal es observar cómo responden estudiantes a las actividades que se diseñaron con el objetivo de evidenciar los elementos que se pretendían interpretar a la luz de la DG. Este proceso de estudio así definido, está marcado fuertemente los las formas de interpretación y la búsqueda de significados sobre las producciones de los estudiantes (Sampieri, 2014). Estos procesos son encausados por el marco teórico puesto en acción. Se pretende, a partir de un estudio cualitativo comprender en profundidad el discurso de los informantes, de dos casos de estudio (Stake, 2010), el primero un grupo de estudiantes de educación primaria (10 a 11 años de edad) y otro de educación secundaria (16 a 17 años de edad).

Para proponer el diseño metodológico basamos nuestra postura en el convencimiento de que la actividad experimental de la Didáctica de la Matemática cobra su máximo sentido al convertirse en el eslabón entre la Matemática misma y los problemas de aprendizaje de porciones de este conocimiento que son abordados en el aula. Otorga en este sentido, respuestas eficaces a partir del estudio de elementos que interfieren o potencian el acceso al conocimiento conectando ambos polos a partir de la experimentación. En coherencia con los objetivos del estudio se levantó información teórica y empírica para determinar posibles recorridos viables en la construcción de fractales geométricos como la CK. El ciclo de investigación que provee APOE fue aplicado en este estudio considerando los objetivos del estudio, y los antecedentes que se disponen a la fecha. Las componentes del ciclo: Análisis teórico, Diseño e implementación de la instrucción y, Recolección y análisis de datos, se resumen en la sección que sigue.

Análisis teórico

Particularmente, nos acercamos a la CK, tomando algunas de las construcciones mentales propuestas en la descomposición genética (DG) que modela la construcción del fractal TS, planteada en Gutiérrez (2014), bajo la hipótesis de que habrá una construcción análoga para ambos fractales. La DG es la concreción de un análisis teórico que consistió en el estudio de los fractales a partir de diversos antecedentes, como un estudio histórico-epistemológico acerca de los fractales que revela la complejidad del concepto al punto de poder ser abordado desde distintas miradas como lo señala

Chabert (1990) aludiendo a la evolución analítica, geométrica y experimental de este concepto. La aparición de funciones continuas sin derivada propició un cambio de paradigma en torno a unos nuevos entes hacia 1856, aquellas funciones continuas sin derivada, las que se desarrollaron a partir de la actividad de algunos matemáticos connotados de la época, siendo Weierstrass quien presentó ante la comunidad científica una función continua no diferenciable (Plaza, 2000). En su evolución geométrica, Bolzano habría construido algunos años antes, un ejemplo de fractal que consistía en una secuencia de líneas poligonales y en sustituir en cada paso, los segmentos de dicha poligonal, por otras poligonales de 4 segmentos cada vez, manteniendo los extremos del segmento original. Es decir en cada paso se producen más y más puntas presentando puntos de no derivabilidad de la función. Una representación geométrica clásica fue propuesta por Von Koch hacia 1904 cuando presenta una curva continua basada en una construcción geométrica simple (Figura 2).

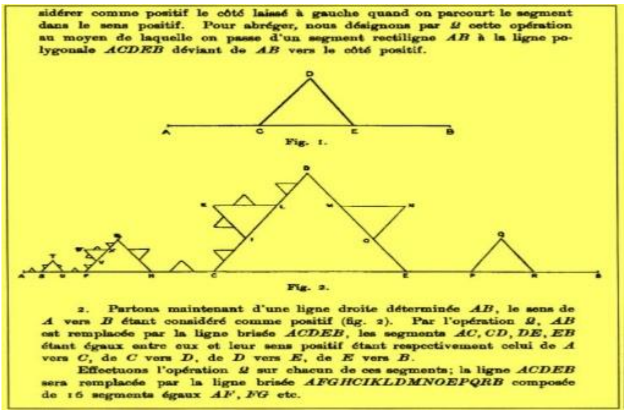

sidérer comme positif le côté laissé à gauche quand on parcourt le segment dans le sens positif. Pour abréger, nous désignons par Ω cette opération au moyen de laquelle on passe d'un segment rectiligne AB à la ligne polygonale $ACDEB$ déviant de AB vers le côté positif.

Fig. 1.

Fig. 2.

2. Partons maintenant d'une ligne droite déterminée AB, le sens de A vers B étant considéré comme positif (fig. 2). Par l'opération Ω, AB est remplacée par la ligne brisée $ACDEB$, les segments AC, CD, DE, EB étant égaux entre eux et leur sens positif étant respectivement celui de A vers C, de C vers D, de D vers E, de E vers B.

Effectuons l'opération Ω sur chacun de ces segments; la ligne $ACDEB$ sera remplacée par la ligne brisée $AFGHCIKLDMNOEPQRB$ composée de 16 segments égaux AF, FG etc.

Figura 2. Construcción original de la curva de Koch (Peitgen, Jürgen y Saupe, 2004, p. 87).

Además de este estudio se recurrió a textos especializados de Matemática y otras investigaciones ligada a los fractales donde se evidenció su potencialidad como representante de variados fenómenos de la naturaleza y otros ámbitos de las ciencias y la cultura.

Diseño e implementación de la instrucción

A partir de la DG para el TS, la que fue documentada por nueve estudiantes de educación secundaria en 2014, de diseñó un cuestionario con las mismas preguntas pero adaptando la situación problema al fractal en estudio, así de determinaron dos formas: una para la curva abierta de Koch y otra para la curva cerrada de Koch. En la Figura 3, se muestran el Iniciador (izquierda) y Generador (derecha) de cada fractal.

Figura 3. Algoritmo de la construcción geométrica para curva abierta y curva cerrada de Koch

Esta primera parte del estudio consideró las siguientes construcciones y mecanismos de la DG:

- Acciones sobre una poligonal abierta y sobre el triágulo equilátero
- Procesos Iniciador y Generador
- Proceso Iteración
- Procesos de Autosimilitud

Los cuestionarios se han aplicado a diversos estudiantes de educación secundaria (16 a 17 años) quienes han desarrollado algunas de las construcciones previstas.

Análisis de datos y conclusiones

El análisis de los datos obtenidos evidencia que la construcción de la CK ha tenido mayores dificultades que la del TS, sin embargo, algunos estudiantes pueden mostrar algunas construcciones del modelo según se presenta en las siguientes figuras. En la Tabla 1 se muestra el trabajo de estudiantes, que fue interpretado a partir de las estructuras mentales, de acciones o procesos, de algunos conceptos claves para los fractales geométricos en estudio.

Construcciones mostradas por los estudiantes.

-Acciones sobre el Iniciador:

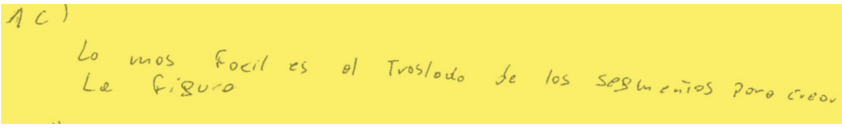


Figura 4. Caso de la CK cerrada

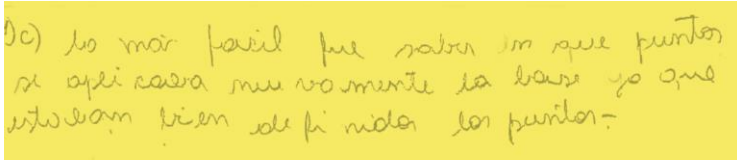


Figura 5. Caso de la CK abierta

Proceso de Iteración y Autosimilitud

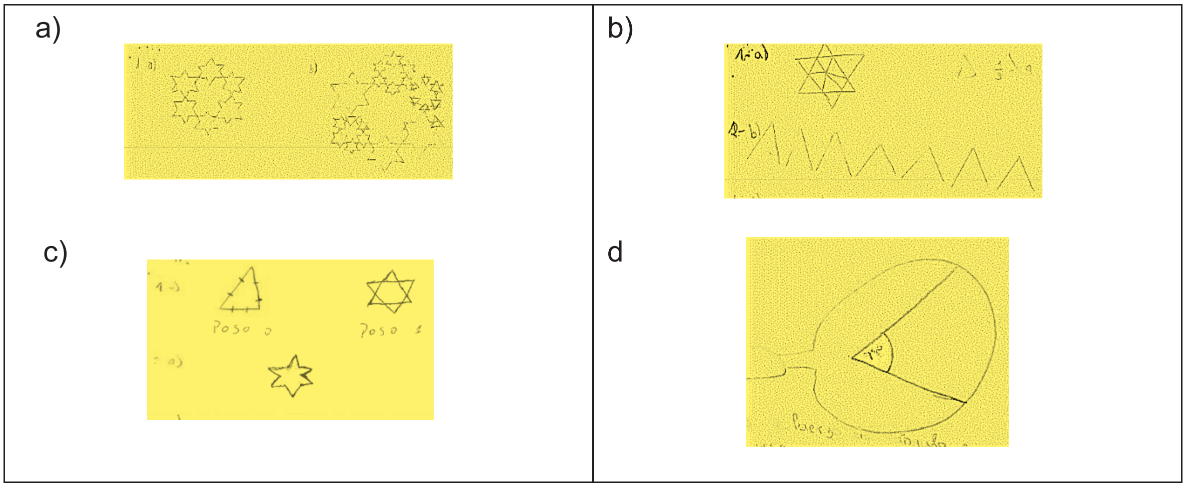


Figura 6. Caso de la CK cerrada

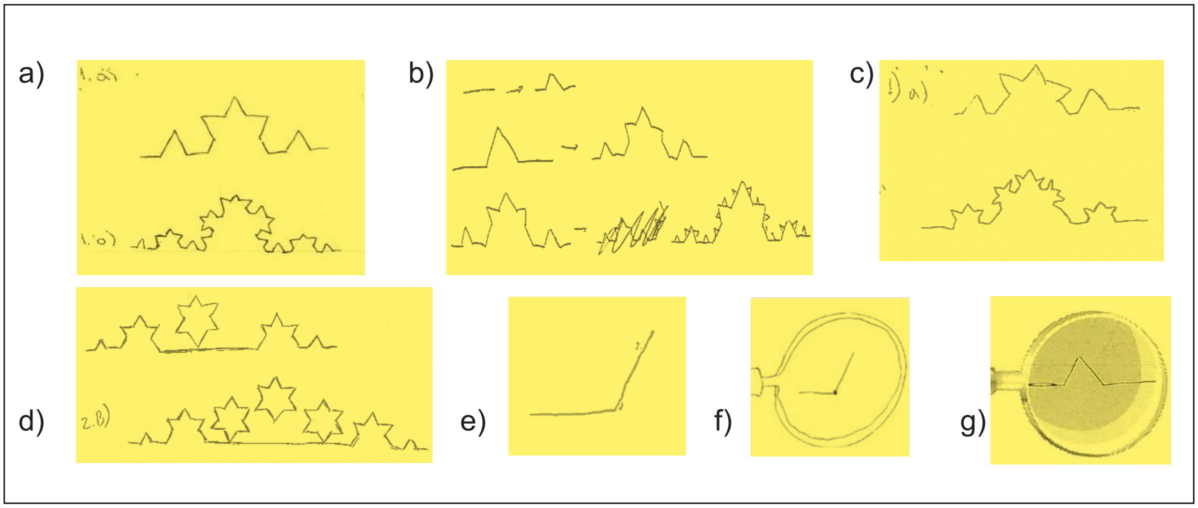


Figura 7. Caso de la CK abierta

A partir del algoritmo (Figura 3), algunos estudiantes pueden construir I2, I3 (Figura 7.a y 7.b), de la curva abierta y la Autosimilitud Figura 7.g). Las construcciones para la curva cerrada aún no se evidencian como se observa en la Figura 6.

Con base en lo recopilado en ambos casos, se sostiene que las componentes para un modelo cognitivo de los fractales geométricos serían: Acciones sobre objetos geométricos ya conocidos, como el triágulo equilátero, y poligonales abiertas, Procesos como el de la Iteración construido por la coordinación del Iniciador y el Generador, y el Proceso de Imágenes fractales. Se hace necesario levantar evidencia para sustentar el modelo cognitivo DG, para un conjunto de fractales goemétricos referido a los ámbitos geométricos y analíticos que progresen de manera similar a la evolución que se evidenció con el triángulo de Sierpisnki en Gutiérrez (2014). Las dificultades presentadas en la CK, podrían deberse a la configuración geométrica que en cada iteración exige ir eliminando los segmentos centrales y también al enfrentarse a la fraccionar segmentos en tercios (Figuras 6.b y 6.c)

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory A framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer.

Chabert, J. (1990). Un demi-siecle de fractales: 1870-1920. *Historia mathematica 17,*(4), 339-365.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Fossión. R. (2010). Una definición compleja de la fragilidad: caos, fractales y complejidad en series de tiempo biológicas. En M. López y G. Ríos (Eds.), *Envejecimiento humano. Una visión Transdisciplinaria* (pp. 171-183). México D.F.: Instituto de Geriatría.

Gutiérrez, X. (2014). *Una descomposición genética del fractal triángulo de Sierpinski* (Tesis de magíster no publicada). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Mandelbrot, B. (1997). *La geometría fractal de la naturaleza* (2a ed.). Barcelona: Tusquets Editores, S.A.

Ministerio de Educación. (2005). Matemática. Formación Diferenciada Humanístico-Científica. En *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Media. Actualización 2005* (pp. 237-240). Santiago, Chile: Autor.

Ministerio de Educación. (2010). *Mapa de progreso del aprendizaje. Sector Matemática. Mapa de Progreso de Geometría*. Santiago: Autor.

Moreno, L. y Sacristán, I. (1996). Representaciones conceptuales y procesos recursivos. *Revista EMA*, *1*(2), 83-96.

Oviedo, L., Kanashiro, A., Benzaquen, M. y Gorrochategui, M. (2006). Una aproximación a la noción de infinito a través de fractales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 19*. (1015-1020). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Peitgen, H., Jürgen, H. y Saupe, D., (2004). *Chaos and Fractals* (2 a ed.). New York: Springer.

Plaza, S. (2000). *Fractales y generación computacional de imágenes*. Perú: Instituto de Matemática y Ciencias Afines, IMCA.

Restrepo, J. y Velásquez, H. (2012). Análisis del índice general de las bolsas de valores de Colombia y sus rendimientos desde la teoría del caos 2001-2011. *Semestre Económico. Vol. 15* (31), 79-98.

Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación* (6a ed.). México: McGraw-Hill.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Morata.

COMPRENSIÓN DE LA ALEATORIEDAD EN MEDICIONES DIRECTAS Y EL TRATAMIENTO DE LAS MEDIDAS EN BACHILLERATO TECNOLÓGICO

Rogelio Martínez García, Ana María Ojeda Salazar, Héctor Santiago Chávez Rivera
CECyT No 4 “Lázaro Cárdenas”, DME-Cinvestav Instituto Politécnico Nacional (México)
rogeliomartinez@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx, hchavez@cinvestav.mx

RESUMEN: La investigación se desarrolló en condiciones reales e institucionales de enseñanza con 32 estudiantes del sexto semestre del Bachillerato Tecnológico, durante la unidad de aprendizaje de *Probabilidad y Estadística*. Los docentes de Física y de Matemáticas pusieron en juego la estrategia de enseñanza con la práctica de *mediciones directas y calibrador lineal*, en el laboratorio de Física. El interés fue si la propuesta en la enseñanza de una situación experimental en la que interviene el azar promovería la aplicación por el estudiante del enfoque frecuencial de la probabilidad, para compensar la prevalencia del enfoque clásico prescrito en el programa de estudios (DEMS, 2008). De las respuestas de los estudiantes a un cuestionario incluido en el guion de la práctica, de su desempeño durante la enseñanza y en una entrevista semiestructurada a uno de ellos, resultó que no consideraron la intervención del azar en las mediciones y para estimar el valor más probable del conjunto de ellas sólo el 6% lo atribuyó a la media aritmética.

Palabras clave: variación, mediciones experimentales, enfoque frecuencial de probabilidad

ABSTRACT: The research was carried out under real and institutional teaching conditions with a sample of 32 students from the sixth semester of the Technological high school, within the learning unit of probability and statistics. Physics and Mathematics teachers put into practice the teaching strategy by practicing direct measurements and linear calibrator in the Physics laboratory. It focused on whether the proposal related to the teaching of a random experimental situation would make the students apply the frequency approach of probability, to be in a par with the predominance of the classic approach prescribed in the syllabus (DEMS, 2008) From the students' responses to a questionnaire included in the script of the practice, with respect to their performance during the teaching process, and in a semi-structured interview to one of them, we found that they did not consider the random approach in the measurements, and to estimate their most probable value on the whole , only six percent attributed it to the arithmetic mean.

Key words: Variation, experimental measurements, frequency probability approach

Introducción

La actividad tradicional de enseñanza *Mediciones directas y calibrador lineal* devino un ejercicio de docencia interdisciplinaria e investigación. El interés se centró en promover el enfoque frecuencial de la probabilidad y caracterizar la comprensión de los estudiantes de algunas ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975), implicadas al realizar un conjunto de mediciones de una misma magnitud y encontrar el mejor valor de esa magnitud. Se aspiraba a que los estudiantes dieran sentido a los datos experimentales de acuerdo a los contenidos enseñados en el aula de *Probabilidad y Estadística*, al considerar los errores aleatorios en las mediciones, derivados de las múltiples fluctuaciones incontrolables. La investigación fue del orden cualitativo (Vasilachis, 2006).

Marco de referencia

A diferencia de propuestas actuales para el curriculum, el cual enfoca la formación en Estadística (por ejemplo, Burril y Biehler, 2013), Heitele (1975) propuso diez ideas fundamentales para la enseñanza tanto de Probabilidad como de Estadística, es decir, de estocásticos, con una perspectiva epistemológica: 1) Medida de probabilidad, 2) Espacio muestra, 3) Adición de probabilidades, 4) Regla del producto e Independencia, 5) Equiprobabilidad y Simetría, 6) Combinatoria, 7) Modelo de urna y Simulación, 8) Variable estocástica, 9) Ley de los grandes números, 10) Muestra. El autor también subrayó la trascendencia de vincular esa enseñanza a experiencias intuitivas. En particular, la enseñanza de la ley de los grandes números favorece que los estudiantes desarrollen experiencias concretas de la regularidad estadística creciente de repeticiones de un fenómeno aleatorio bajo las mismas condiciones. La red conceptual en esa ley incluye medida de probabilidad, espacio muestra, independencia, variable estocástica y muestra. Shaughnessy y Ciancetta (2002) han ahondado en las concepciones de variabilidad en fenómenos observados por estudiantes de Estadística y destacan la importancia de que ellos la consideren para dar sentido a los posibles resultados y predecir el rango de variación probable durante la repetición de ensayos. La conexión entre distribuciones de datos y medidas de variabilidad está estrechamente relacionada con el concepto de espacio muestra. Steinbring (1991) subraya la adopción de una perspectiva dinámica en la enseñanza de la probabilidad para que el estudiante asocie la experiencia con la teoría, en lugar de presentar los conceptos de probabilidad ya hechos. El triángulo epistemológico propuesto por el autor es un instrumento central de descripción y análisis de la interacción en la construcción del conocimiento matemático, e indica que no se puede deducir el significado del conocimiento de uno de los vértices, del concepto formal, del objeto o del signo, sino que siempre se requiere de un balance entre los tres vértices del triángulo. Por ejemplo, la Figura 1 presenta un caso de la media de un conjunto de valores de mediciones de un mismo objeto.

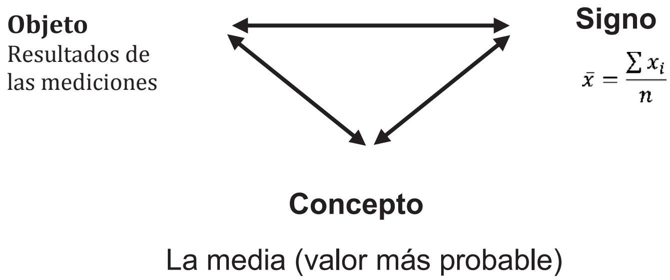


Figura 1. Triángulo epistemológico para el valor más probable de un conjunto de medidas de un mismo objeto.

Método e instrumentos

En la *Docencia Interdisciplinaria* (Martínez y Garnica, 2015), los docentes de disciplinas distintas instrumentan y desarrollan conjuntamente estrategias de enseñanza a partir de contenidos vinculantes. Una estrategia tal ha vinculado la enseñanza de matemáticas con la enseñanza de Física. En el laboratorio de *Física I* se recopilaron datos de 32 estudiantes de 6o. semestre de bachillerato tecnológico acerca de su comprensión de conceptos de estocásticos al aplicarlos a situaciones experimentales de otras disciplinas. Al final del guion habitual de la práctica *Mediciones directas y calibrador Vernier,* los estudiantes contestaron individualmente un cuestionario con cinco preguntas abiertas (véase la Tabla 2), referentes a la variación de los resultados de dos conjuntos de mediciones que ellos efectuaron con un vernier, un flexómetro y una regla métrica, de las dimensiones de dos tipos de objetos. Las medidas obtenidas por todos los estudiantes se concentraron en el pizarrón en una tabla de frecuencias y se calcularon la media aritmética y la desviación estándar, para estimar las magnitudes medidas. Algunos episodios de las sesión del laboratorio se videograbaron y transcribieron para su análisis.

Para obtener más datos de la comprensión de los estudiantes del enfoque frecuencial de la probabilidad, se entrevistó en formato semiestructurado (Zazkis y Hazzan, 1999) a uno de ellos de estrato académico alto, al concluir su bachillerato. Los datos recopilados en la sesión de laboratorio se caracterizaron según la célula de análisis de la enseñanza (Ojeda, 2006): Ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos, recursos semióticos, términos empleados y referentes (véase la Tabla 1).

Tabla 1. Contenido de estocásticos de la estrategia de enseñanza en el Laboratorio de Física

Criterio de análisis	Práctica: Mediciones directas y errores
Ideas fundamentales de estocásticos	Variable estocástica, muestra, ley de los grandes números, medida de probabilidad.
Otros conceptos matemáticos	Número, valor posicional, operaciones aritméticas, números racionales, fracciones equivalentes, proporcionalidad.
Recursos semióticos	Notación matemática simbólica, lengua natural escrita, tabla de distribución de frecuencias, recta numérica, figuras trazadas en el pizarrón de los objetos medidos.
Términos empleados	Posible, cierta certeza, con certeza, incertidumbre, tendencia central, dispersión, error, error sistemático, error de paralaje, error aleatorio; probabilísticos, fortuitos o casuales. Puede ocurrir o no, fluctuaciones, variación, valor más probable, desviación estándar, análisis estadístico, valor verdadero, valor medido o de la medición, incontrolable e independiente, marca de clase, frecuencia absoluta, frecuencia relativa, frecuencia acumulada, media aritmética, desviación estándar, rango.
Situaciones referentes	En laboratorio de *Física I*, efectuar 32 mediciones directas de: el largo de un tornillo y de monedas con vernier, de la mesa de trabajo con regla métrica y flexómetro. Concentración de los datos en una tabla de distribución de frecuencias y su descripción estadística.

Resultados

En general, no se consiguió que los estudiantes otorgaran sentido a la media de un conjunto de medidas como una estimación más probable de ellas, ni que consideraran la frecuencia relativa de los valores de las mediciones para estimar su probabilidad, de acuerdo con el enfoque frecuencial de la probabilidad, fundamentado por la ley de los grandes números.

Sesión de enseñanza en el laboratorio. Al principio de la práctica de laboratorio, el docente de Física (D_f) se refirió al rol de la percepción del sujeto que efectuaba la medición con el vernier y que ocasionaría variación en las medidas obtenidas:

D_f	Por ejemplo, aquí sería que está pasadito del 27 más una fracción. Entonces, para mí coincidiría en 27 y el 2 *exacto*, entonces sería 27.2.
	Si fuera entre el 2 y el 3, entonces sería 27.25, pero para mí sería 27.2.
	Si yo *se lo pasara a otra persona, a lo mejor vuelve a hacer la medición y dice: "para mí es otra medida", y de hecho va a ser otra medida.*

En consecuencia, D_f se refirió a un factor que puede ocurrir y ocasionar variación, que afecta al valor de la medida por exceso o por defecto; en este sentido, se puede identificar la idea fundamental de variable estocástica (Heitele, 1975). Las mediciones variaron, conforme a lo esperado, puesto que los estudiantes, por ejemplo al medir el largo de la mesa de trabajo que tenía más de dos metros, usaron una regla de madera con longitud de un metro, pero descuidaron la coincidencia del extremo superior de la medición anterior con el extremo inferior de la siguiente, ya que colocaron su lápiz apuntando con la goma como referencia para medir la siguiente parte, lo que ocasionó valores distintos en las medidas de las magnitudes. Conforme se avanzó en el desarrollo de la práctica, no obstante haber indicado a los estudiantes que cada quien anotara el valor que hubiera obtenido de su medición, se acercaban para a ver el resultado del compañero; algunos advirtieron que al no tener el mismo ángulo de lectura del instrumento de medición el resultado no era el mismo, por ello consideramos indicios del reconocimiento de los errores de paralaje y aleatorios, descritos en el guion de la práctica. Después de que los estudiantes realizaran las mediciones, el docente de matemáticas (D_m) presentó en el pizarrón una tabla de frecuencias (véase la Figura 2) para concentrar los valores de las 32 mediciones. Cada estudiante calculó los valores de la media aritmética y la desviación estándar. A pesar de ello, un estudiante (E) preguntó a I por la última, pues debería responder la pregunta 3 del cuestionario al final de la práctica:

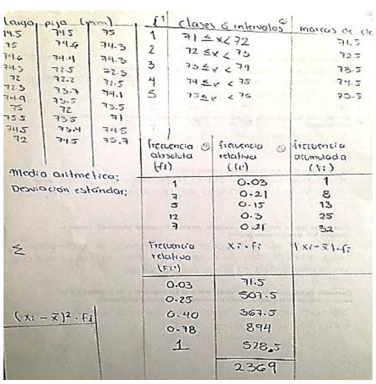


Figura 2. Tabla de frecuencias presentada en el pizarrón por D_m.

E	¿Qué es la desviación estándar?
I	¿Cómo que no sabes que es la desviación estándar? De tus clases de estadística ….

E	¿La variación?
I	¡Desviación!
E	Bueno, pero a ver usted …
I	El nombre desviación, ¿a qué o de qué …..?
E	Pues que se va desviando, es comooo ……
I	¿Se desvía de qué? ¿Cuál es la referencia?
E	¿Pues de algo que ya está fijo?
I	Piénsalo bien. Pon lo que entiendes pero escríbelo. Esto [no borres lo escrito] déjalo.
E	Pero esto que varía, así como lo que a uno le dio …

El cuestionario

La Tabla 2 resume los resultados de la aplicación del cuestionario al final de la práctica.

Tabla 2. Porcentajes de tipos de respuestas de 32 estudiantes al cuestionario en Laboratorio de Física.

Preguntas	Porcentajes de respuestas		
1. ¿A qué atribuyes la variación en los resultados obtenidos en las mediciones?	A la persona 56%	A instrumentos 41%	Otros factores 3%
2. En una serie de mediciones, ¿cómo encontramos el valor más confiable o con mayor certidumbre?	El que más se repite: 66%	Al promedio 6%	Otros 28%
3. ¿Qué significa el valor de la desviación estándar para ti?	Con argumento 1%	Sin argumento 99%	
4. ¿Consideras que en este experimento están presentes los errores aleatorios? Explica tu respuesta lo más ampliamente posible:	Sí 97%	No 3%	
5. Considerando los resultados de tus mediciones y de tus respuestas a las preguntas y a las tareas solicitadas en la práctica, escribe a continuación tus propias conclusiones:	Referencia a la aleatoriedad 88%	Referencia a instrumentos 12%	

En la primera pregunta, 97% atribuyeron la variación en las medidas a la diferente percepción de cada quien o a los instrumentos; es decir, no consideraron de forma explícita a la intervención del azar. Aunque para la cuarta pregunta también 97% de los participantes asintieron a la presencia de errores aleatorios en las mediciones de las dimensiones de las mesas de trabajo con una regla métrica de madera y con un flexómetro, y de seis tornillos, aparentemente iguales, con el calibrador vernier, no lograron explicar en qué consistía la desviación estándar. La Figura 3 muestra la respuesta de un estudiante a la pregunta 4 del cuestionario, que pareció haber reconocido la influencia de errores aleatorios.

¿Consideras que en este experimento están presentes los errores aleatorios?, explica tu respuesta lo más ampliamente posible:

Si, por que cada persona mide distinto a cada otro y al comparar las mediciones varean

Figura 3. Respuesta con respecto a la presencia de los errores aleatorios en las mediciones.

Veintiún estudiantes (66%) se refirieron a la moda como el valor más probable de los valores de las mediciones y sólo dos a la media aritmética, el otro 28% se refirió a otros factores como usar mejores instrumentos de medición (véase la Tabla 2).

Únicamente dos estudiantes respondieron a la pregunta 3. La Figura 4 presenta la respuesta y el argumento de un estudiante en consideración a la desviación estándar.

¿Qué significa el valor de la desviación estándar para ti?

Es una medida de dispersion, que nos indica cuanto pueden alejarse los valores respecto al promedio, es util para buscar probabilidades

Figura 4. Respuesta respecto al significado de la desviación estándar.

En sus respuestas, los estudiantes usaron como sinónimos “exactitud” y “precisión”, por lo que es necesario que en la enseñanza se les distinga en casos concretos de conjuntos de datos de mediciones.

La entrevista

Dos investigadores (I_1, I_2) solicitaron al entrevistado (E) que ampliara su respuesta a la primera pregunta del cuestionario (véase la Tabla 1), ya que él admitió la variación en los valores obtenidos pero por incorrección en la medición; sin embargo, inadvirtió la presencia de errores aleatorios en las mediciones que efectuó en el laboratorio:

E Bueno, yo pienso que si el tornillo se elabora por medio de una máquina, bueno, sí es de la misma medida, pero en sí **la lógica te dice** que si los tornillos son de la misma medida tiene que salir lo mismo. A lo que me refiero yo es que **a lo mejor** el alumno no ha utilizado el vernier y el profesor lo ocupa seguido.

Se pidió a E que midiera la longitud, el diámetro de la cuerda y de la cabeza, de seis tornillos de los mismos que se utilizaron en la práctica. Para ello se le proporcionaron un vernier, una cinta métrica y tres reglas: la primera metálica de 10 cm, la segunda metálica de 15 cm y la tercera plástica de 30 cm, todas ellas graduadas en centímetros y en pulgadas. E eligió la regla metálica de 15 cm para medir la longitud de los tornillos porque el cero coincidía con la orilla de la regla. Por tanto, no consideró para las dimensiones de los objetos a medir la sensibilidad de los instrumentos a su disposición, ya que la sensibilidad (o módulo) de la regla plástica de 15 cm era de 1 mm, y la del vernier era de .05 mm, de modo que la variación en los valores de las medidas para los tornillos podía ser menor de 5 centésimas de milímetro usando el vernier. Cuando E midió el largo del tornillo, lo colocó verticalmente sobre la mesa frente a donde estaba sentado, acercaba la regla quedando paralela al tornillo y al hacer la lectura giraba su cabeza. En el siguiente pasaje de la entrevista, E argumentó la variación en las medidas obtenidas y reconoció el error de paralaje:

I_1	¿Tu posición desde la pupila hasta el punto que estabas midiendo varió o no?
E	Bueno, yo ocupé esta regla porque el origen empieza desde la orilla y tuve este grado de visión; algunas veces inclinaba la cabeza para tener un mejor ángulo….
I_1	¿Y esas variaciones a qué las atribuyes?
E	Sí, no tuve una posición fija….
I_1	¿Se puede?
E	Yo pienso que sólo que fuera una máquina…
I_1	Y una máquina inclusive puede tener fallas.

E	¡Tiene errores! [sostiene dos tornillos y muestra que en la cabeza de uno se nota una pequeña inclinación]
I_1	Pero piensa en el lote.
E	¡Sí, claro que no todos van a ser iguales!

Al preguntarle cómo encontrar la mejor estimación dada una serie de mediciones respondió que la moda era el valor más probable y atribuyó la variación en las medidas de tornillos, en apariencia iguales, a que pudieron ser producidos por máquinas distintas. A la pregunta de por qué comúnmente se le pedía la media aritmética de sus calificaciones y no la moda, contestó "para ver cómo vas… como una estabilidad". La desviación estándar, recordada como fórmula para realizar un cálculo, obstaculizó que el entrevistado advirtiera su carácter funcional de medida de variación de los datos respecto a la media e indagara para qué valor sería mínima; aún la confundió con la desviación media. Aunque en la práctica E calculó la media aritmética y la desviación estándar para cada conjunto de medidas obtenidas, no explicó en la entrevista su significado para cada conjunto. Hacia el final del interrogatorio, E distinguió entre errores aleatorios y de paralaje; y por último reconoció la intervención del azar como una fuente de la variación de las medidas obtenidas.

Se preguntó a E para qué le habían pedido que calculara la media de las medidas obtenidas, en el laboratorio, a lo que contestó que eso estaba en las indicaciones de la práctica, que "el docente no nos dijo". Esta respuesta muestra que E considera a las expresiones matemáticas (fórmulas) como mero cálculo, sin preguntarse por los conceptos subyacentes.

Como lo ha señalado Steinbring (1991), la articulación entre la experiencia empírica (resultados de las mediciones) con el aspecto formal, de cálculo e interpretación del contexto para consolidar el concepto (véase la Figura 1), requiere de una retroalimentación interactiva para verificar, mejorar y modificar la concepción de los conceptos matemáticos.

Conclusiones

La actividad de enseñanza puesta en juego fue planteada bajo la consideración de que la enseñanza de estocásticos debe vincularse a experiencias intuitivas (Heitele, 1975). Los eventos de azar no ocurren con absoluta certeza de acuerdo a las leyes deterministas de la Física, las predicciones se elaboran dentro de la teoría, los fenómenos reales y resultados experimentales se pueden observar en situaciones prácticas (Steinbring, 1991). En este sentido, consideramos que la implementación de actividades de enseñanza, como la práctica de mediciones directas y errores, coadyuva a la comprensión de conceptos probabilísticos y estadísticos implicados en el tratamiento de los resultados de las mediciones.

En el laboratorio, cada estudiante elaboró una tabla de distribución de frecuencias con los 32 valores de las medidas que se concentraron en el pizarrón, sin dificultad aparente. A pesar de ello, sólo dos estudiantes pudieron explicar el significado de la desviación estándar, lo que sugiere que el sentido que otorgaron los estudiantes a la actividad fue medir y realizar operaciones, pero para ellos el objetivo no fue explícito. Por tanto, la revisión de esta práctica al regreso al aula de *Probabilidad y Estadística* sería una oportunidad para retroalimentar y revertir algunas de las dificultades de los estudiantes acerca de la concepción e interpretación que confieren a los conceptos matemáticos en cuestión, como por ejemplo: media aritmética, moda, desviación estándar, muestra, frecuencia relativa, medida de probabilidad. De igual manera, es necesario tratar el concepto de precisión, que se puede referir a las medidas de dispersión y depende de la distribución de los resultados; y distinguirlo del concepto de exactitud que, aunque cualitativo, refiere a la mayor diferencia entre los valores medidos y el valor más probable (verdadero) de la magnitud en cuestión.

Heitele (1975) ha propuesto las diez ideas fundamentales de estocásticos como una guía continua para preparar en ellos al estudiante, desde un nivel intuitivo hasta uno formal. En el bachillerato tecnológico se propone el estudio de los estocásticos hasta el sexto y último semestre, luego de dos años y medio de su acercamiento a esos contenidos en secundaria. A la unidad *Probabilidad y Estadística* (DEMS, 2008) le anteceden cinco cursos semestrales de matemáticas: *Álgebra*, *Geometría y Trigonometría*, *Geometría Analítica*, *Cálculo Diferencial*, *Cálculo Integral*. La enseñanza de estas unidades de aprendizaje ha presentado a los estudiantes de manera predominante el razonamiento determinista. Aunque la unidad de estocásticos inicia con Estadística Descriptiva, para la enseñanza de probabilidad no es categórico el enfoque frecuencial, sino el enfoque clásico acompañado de los axiomas de la probabilidad. No obstante, tanto en las ciencias como en nuestra vida cotidiana, enfrentamos sucesos que no son susceptibles de la aplicación de la equiprobabilidad, por lo que no es suficiente emplear el enfoque clásico de la probabilidad. Pero para fenómenos que son susceptibles de repetición, se puede recurrir al enfoque frecuencial de la probabilidad, fundamentado por la ley de los grandes números.

Referencias bibliográficas

Burrill, G., Biehler, R. (2013). Les idées statistiques fondamentales dans le curriculum scolaire. *Statistique et Enseignement*, *4*(1), 5-24.

Dirección de Educación Media Superior (DEMS) (2008). *Programa de Estudios de Probabilidad y Estadística*. México: IPN.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas*. Educational Studies in Mathematics*, *6*(2), 187-205.

Martínez, R., Garnica, I. (2015). El laboratorio de Física I para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales en el Bachillerato Tecnológico. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 29, 619-626. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: Un ensayo en la enseñanza de estocásticos. *Matemática educativa, treinta años*, pp. 195-214. México: Santillana-Cinvestav.

Shaughnessy, M., Ciancetta, M. (2002). Students' understanding of variability in a probability environment. *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics,* (pp. 295-312).

Steinbring, H. (1991). The Concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowledge. *Educational Studies in Mathematics* 22: 503-522. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Vasilachis, I. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa.* Barcelona: Gedisa.

Zazkis, R., Hazzan, O. (1999). Interviewing in Mathematics Education Research: Choosing the Questions*. Journal of Mathematical Behavior*, 17(4), 429-439.

MATICES EN LA TEMATIZACIÓN DEL ESQUEMA CONCEPTOS BÁSICOS DEL ÁLGEBRA LINEAL

Marcela Parraguez, Raúl Jiménez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Universidad Católica del Norte. (Chile)
marcela.parraguez@pucv.cl, rjimen@ucn.cl

RESUMEN: La presente investigación se centra en el análisis de la construcción mental de los conceptos básicos del álgebra lineal, una vez finalizado un proceso de instrucción a estudiantes universitarios chilenos. Por una parte, consideramos los elementos teóricos y analíticos propuestos por la teoría APOE en relación a la tematización de un esquema y por otra, la configuración de los conceptos caracterizada por elementos matemáticos. Los resultados indican que tematizar el esquema conceptos básicos del álgebra lineal es difícil de lograr, porque las conexiones entre las componentes que están formando el esquema del estudiante no son correctas o adecuadas.

Palabras clave: álgebra lineal, teoría APOE, tematización

ABSTRACT: This research focuses on the analysis of the mental construction of the basic concepts of linear algebra, once a process of education to Chilean university students has been completed. On the one hand, we consider the theoretical and analytical elements proposed by the action, process, object, and scheme (APOS) theory in relation to the thematic arrangement of a scheme and; on the other hand, the layout of the concepts characterized by mathematical elements. The results indicate that the thematic arrangement of the scheme of linear algebra basic concepts is difficult to achieve because the connections between the components that are taking part of the student's scheme are not correct or adequate.

Key words: **:** Linear Algebra, APOS Theory, thematic arrangement

Introducción

El álgebra lineal, es sin lugar a duda, uno de los elementos fundamentales y estructurantes de la formación matemática de un profesional –nadie discute su importancia– y es por ello que está incluido en los currículos tanto de matemáticas como del área científica. Sin embargo, a pesar de la importancia del álgebra lineal, hay un problema aún sin solución y es cómo lograr el aprendizaje por parte de los estudiantes de los conceptos básicos del álgebra lineal. Esta complejidad presente en la comprensión de los conceptos básicos del álgebra lineal –espacio vectorial, combinación lineal, dependencia e Independencia lineal, subespacio generado, base, dimensión, transformación lineal, valores y vectores propios– ha motivado a varios investigadores a abordar la problemática desde diversos planteamientos teóricos aportando información que sin duda, ha tenido consecuencias positivas en el desarrollo del currículo de álgebra lineal y específicamente sobre los conceptos básicos. Sin embargo, se hace necesario ahondar aún más en la compresión que los estudiantes logran construir de los conceptos básicos del álgebra lineal, una vez acabado un proceso de instrucción, considerando la abstracción que configura a estos tópicos.

La Teoría APOE

El presente trabajo considera los aportes teóricos y analíticos planteados por la Teoría APOE (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros, & Weller, 2014), los cuales nos han permitido describir tanto el camino como la construcción de las estructuras cognitivas lógico-matemáticas realizadas por un estudiante durante el proceso de aprendizaje de un concepto matemático.

La teoría APOE (acrónimo de las construcciones mentales Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), toma como punto de partida el mecanismo de abstracción reflexiva propuesto por Piaget, para describir la construcción de objetos mentales relacionados con objetos matemáticos específicos.

Consideremos un concepto matemático. Un estudiante muestra una construcción acción de dicho concepto, si las transformaciones que hace sobre él se realizan paso a paso, obedeciendo a estímulos que son y percibe como externos. Esto último en el sentido de que cada paso de la transformación requiere realizarse de forma explícita y guiados por instrucciones externas que le entregan indicaciones precisas sobre qué debe hacer. Cuando las acciones se repiten y el estudiante reflexiona sobre ellas y deja de depender de las instrucciones externas adquiriendo control interno sobre lo que hace (o imagina), decimos que el estudiante ha interiorizado la acción en un proceso. La construcción mental proceso se caracteriza por la capacidad del estudiante para imaginar la ejecución de los pasos a seguir en una actividad matemática, sin tener necesariamente que llevar a cabo cada uno de ellos explícitamente, pudiendo incluso prescindir de alguno de ellos; más aún él realiza transformaciones a un objeto matemático totalmente en la mente, sin la necesidad de ir a través de cada paso. Por otra parte, dos o más procesos pueden coordinarse para construir un nuevo proceso y un proceso puede revertirse o generalizarse. Si el estudiante rigidiza el dinamismo propio de un proceso en un estado sobre el cual puede aplicar acciones sin que éste se derrumbe, y se logre entender el proceso como un todo ligado, de modo que él mismo puede construir transformaciones sobre el objeto matemático, entonces se dice que el estudiante ha encapsulado el proceso en un objeto cognitivo. Además, si él necesita volver desde el objeto al proceso que le dio origen, se dice que ha desencapsulado el objeto en un proceso (las dificultades del estudiante con el simbolismo matemático provienen de tratar de realizar acciones sobre procesos que no han sido encapsulados). Un esquema de un concepto matemático, es una colección de acciones, procesos, objetos y esquemas de otros conceptos, relacionados en la mente del estudiante como una estructura cognitiva coherente. Es importante hacer notar que la coherencia es entendida como la capacidad del estudiante para reconocer relaciones al interior del esquema y establecer si este permite solucionar una situación matemática particular y usarlo en tal caso. Al tratar un problema matemático, el estudiante evoca un esquema y lo desenvuelve (destematizarlo) para tener acceso a sus componentes, utiliza relaciones sobre ellas, y trabaja con el conjunto. Ahora bien, dependiendo de la exigencia conceptual que posea un problema o actividad matemática, es posible que un sujeto se vea en la necesidad de hacer modificaciones a sus esquemas, para así responder satisfactoriamente. Esto implica que los esquemas no son estáticos y que están en constante reestructuración (tematización).

Para el objetivo de nuestro estudio se han considerado los aportes de la teoría relacionados con la tematización de un esquema, la cual según Cooley, Trigueros y Baker (2007) implica la coherencia del esquema, es decir, la posibilidad de que el sujeto reconozca las relaciones que están incluidas en el esquema y sea capaz de decidir qué problema puede resolverse utilizando el esquema y cuál no. En este mismo sentido y en relación a la tematización del esquema conceptos básicos del álgebra lineal se consideran, por una parte, los aportes realizados por Baker, Cooley y Trigueros (2000) que indican que la tematización puede observarse cuando un estudiante es capaz de movilizar las relaciones lógicas entre los elementos matemáticos a una situación nueva (modificación de condiciones de las actividades del cuestionario) y, por otra, los resultados de García, Llinares y Sánchez-Matamoros (2011) que mencionan que la tematización del esquema puede observarse cuando un estudiante es capaz de establecer correctamente conexiones entre las componentes que están conformando su esquema conceptos básicos del álgebra lineal. Desde esta perspectiva entran en juego la tríada de Piaget y García (1989): Intra, Inter y Trans. Estos tres niveles de esquema corresponden al nivel de coherencia o conexión que se establecen entre las acciones, procesos y objetos del esquema. En el nivel Intra, un estudiante posee las construcciones mentales de un concepto sin establecer relaciones entre ellas. En segundo nivel, Inter, ya se han formado tales relaciones y algunas de ellas son coherentes. En el nivel Trans las relaciones son totalmente coherentes y el estudiante piensa en un concepto matemático como un todo integrado.

Objetivos de investigación

La presente investigación se propuso los siguientes objetivos generales: (1) Indagar en las construcciones mentales que puede utilizar un aprendiz como una estrategia cognitiva para construir el esquema de conceptos básicos del álgebra lineal; y, (2) Describir y caracterizar los niveles del esquema conceptos básicos del álgebra lineal en pro de su tematización.

Sobre la metodología de investigación

Metodológicamente la investigación se ha sustentado en un estudio de caso (Stake, 2010) que lo conformaron 25 estudiantes universitarios trabajados como casos, de los cuales, 17 eran estudiantes de segundo año de Ingeniería y los otros 8 pertenecían al tercer año de Licenciatura en Matemáticas. Es importante destacar que todos los estudiantes poseían instrucción previa en álgebra lineal.

Sobre los instrumentos aplicados

El primer instrumento aplicado al caso de estudio correspondió a un cuestionario en el cual se planteaban tres actividades, con la intensión de recopilar evidencias sobre la comprensión de los conceptos básicos del álgebra lineal, a través de la resolución de tareas que la actividad matemática demanda al resolutor, interpretadas éstas como el uso de los elementos matemáticos que configuran el esquema de los conceptos básicos en cuestión, tales como: los elementos matemáticos, las relaciones lógicas y los modos de representación. Presentamos a modo de ejemplo la actividad 2, pues en ella se reflejan varios de los conceptos básicos del álgebra lineal y porque además desprovee a los estudiantes de las algoritmias propias que ellos vienen utilizando para dar respuesta a otras actividades de su proceso de instrucción y por sobre todo impulsa al resolutor a hacer uso de las estructuras generales propias del álgebra lineal.

Actividad 2

Sea $V=\{(x,y,z)\epsilon\mathbb{R}^3 /\ x,y,z>0\}$ un espacio vectorial con las operaciones:

SUMA : $u\oplus v=(xa,yb,zc)$ con $u=(x,y,z)$, $v=\ (a,b,c)$ en *V*

PONDERACIÓN: $\lambda\odot u=\left(x^\lambda,y^\lambda,z^\lambda\right)$ con $u=(x,y,z)$ y $\lambda\in\mathbb{R}$.

Sea *W* el subespacio de los puntos de *V* situados sobre el plano $Z=1$.

¿El conjunto $\left\{(3,3,1),\left(\frac{1}{3},3,1\right)\right\}$ es base para *W*?

Sobre el análisis de los datos

Como primer paso se realizó un análisis de las respuestas de los 25 estudiantes a cada una de las actividades propuestas en el cuestionario, considerando como criterio de valoración, la completitud de cada una de las actividades y de la secuencia en general. A partir de este análisis se redujo el número de sujetos de estudio a nueve casos los que clasificamos en los distintos niveles comprensión del esquema. Posteriormente, nos centramos en el análisis de tres estudiantes que denominamos E1, E3 y E4 los cuales fueron clasificados en un nivel de comprensión distinto del esquema y manifestaban características que nos permitían inferir una posible tematización del mismo, a ellos les aplicamos las entrevistas clínicas. Con la información obtenida por medio del cuestionario y las entrevistas clínicas logramos mostrar que los estudiantes que habían tematizado el esquema conceptos básicos del álgebra lineal mostraban coherencia y flexibilidad al responder y argumentar correctamente a las modificaciones de las condiciones de las tareas en las distintas actividades planteadas, sin embargo, se observaron discrepancias en el uso que los estudiantes hacían de los conceptos básicos, mostrando diferencias en la forma de establecer y argumentar dichas relaciones, lo cual nos permitió definir tres tipos de conexiones que hemos denominado como conexiones: *inicial, indirecta y directa.*

Específicamente con relación a la actividad 2, en la figura 1 se observa, en la respuesta del estudiante E3, que éste determina por simple inspección (conexión directa operación binaria y su elemento neutro) el elemento neutro para la suma no usual en $\mathbb{R}^3$, lo que evidencia una concepción *esquema inter* de espacio vectorial, tematizado en el objeto subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, a través de las propiedades algebraicas de las operaciones que están definiendo al espacio vectorial dado.

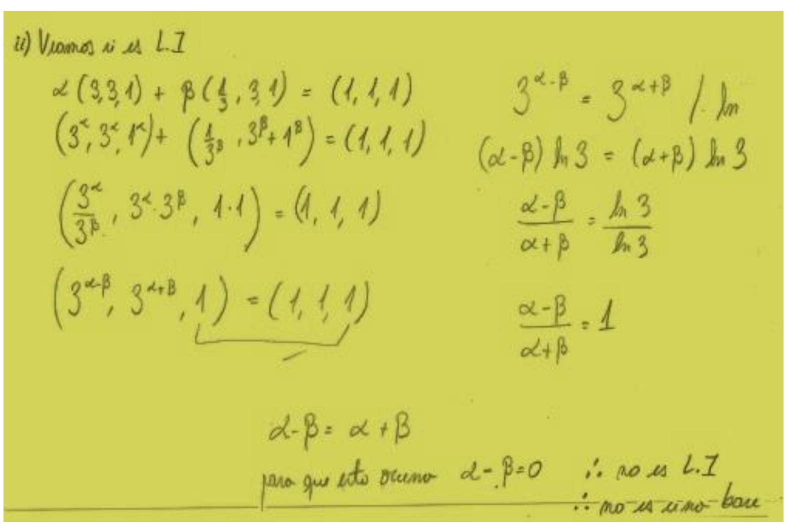


Figura 1*.* E3 verificando si un conjunto dado es una base del espacio vectorial W con operaciones no usuales

Por otro lado, dado que E3 no plantea correctamente el sistema de ecuaciones concluye erradamente que el conjunto no es linealmente independiente, esto evidencia una concepción proceso de sistema de ecuaciones lineales. Por otro lado no logra establecer que un punto cualquiera del plano *Z =1* tiene forma (*x, y,* 1) y que se puede descomponer como (*x,y,*1) = *ln(x)*(*e,*1,1) + *ln(y)*(1,*e,*1). Luego los vectores (*e,* 1, 1) y (1*, e,* 1) son linealmente independiente y generan al plano Z = 1.

En la figura 2 se aprecia la respuesta de otro estudiante, E4, que intenta establecer si los vectores específicos generan al subespacio *W*. Si bien no lo explicita, se apoya en la forma del vector generado, pero no muestra alguna propiedad (conexión inicial entre espacio generado y vectores generadores) que haga ver como la primera y segunda componente de dicho vector considera a todo $\mathbb{R}^+$. Por otro lado E4 asume que el plano Z = 1 tiene dimensión 2, lo que le hace establecer finalmente que el conjunto de los dos vectores específicos de *W* lo generan. Esto evidencia que el *esquema intra* conceptos básicos del álgebra lineal se ha tematizado en el objeto conjunto generador de un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

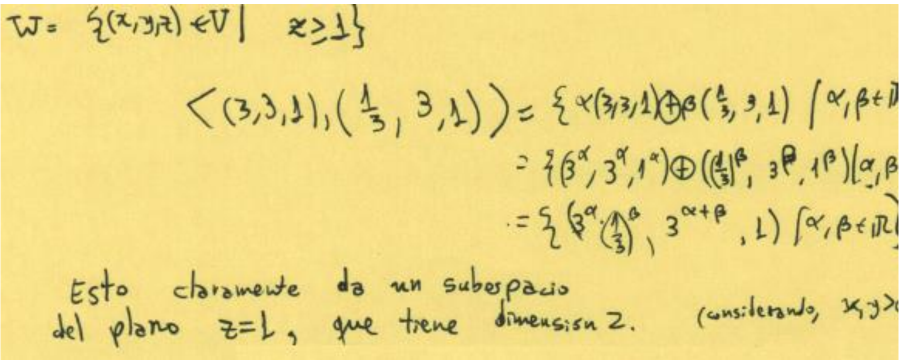


Figura 2. Respuesta de E4 con base en vectores generadores

En la figura 3, se aprecia una variante que realizó el estudiante E1 respecto de los procedimientos anteriores, para determinar si el conjunto de los dos vectores es una base de *W*. E1 trata de ver si un vector es la ponderación escalar del otro vector. Al respecto se refiere *“no son múltiplos”*, esto evidencia la importancia del concepto múltiplo escalar en la concepción objeto ponderación por escalar, como operación externa y un aspecto clave en la conexión directa de la operación interna (suma) y externa (ponderación) en la tematización del *esquema trans* de los conceptos básicos del álgebra lineal en el objeto subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

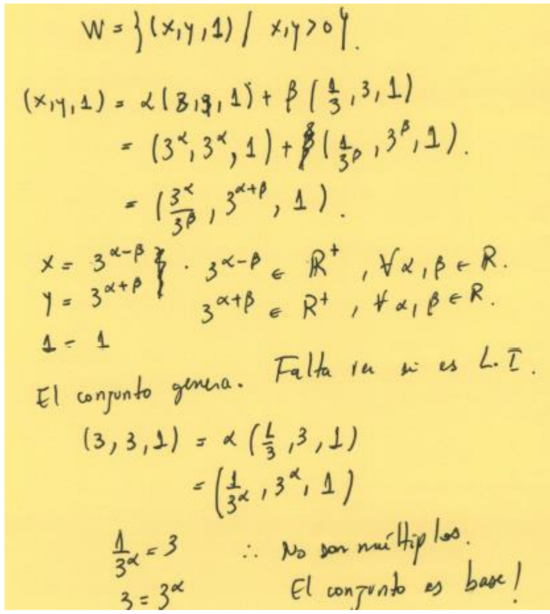


Figura 3. Procedimientos que utiliza el estudiante E1 para establecer que el conjunto de los dos vectores es una base de W bajo operaciones no usuales

En la figura 4 se aprecia como otro de los estudiantes, E5, al escribir la combinación lineal de vectores, pone de manifiesto operaciones usuales del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, que no se corresponden con las operaciones definidas en la actividad 2. Esto evidencia que no hay una concepción esquema espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, aunque hay indicios de una concepción proceso espacio vectorial $\mathbb{R}^3$para operaciones usuales.

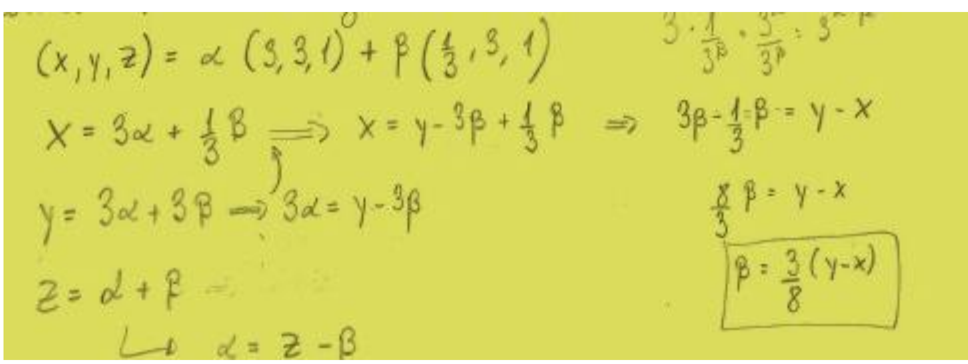


Figura 4. E5 trabaja la actividad 2 con otras operaciones de $\mathbb{R}^3$

Por otro lado el estudiante E5 recurre a procedimientos que están basados en una definición y una estrategia de ensayo y error, al establecer si un elemento cualquiera de *W* se puede escribir como combinación lineal, evidenciado una concepción proceso base de un espacio vectorial y proceso de sistema de ecuaciones lineales, al no relacionar la combinación lineal con la solución del sistema de ecuaciones.

Los resultados indican que lograr tematizar el esquema conceptos básicos del álgebra lineal en una construcción objeto luego de finalizado un proceso de instrucción, no es fácil, lo cual queda de manifiesto en que de un total de 25 estudiantes con instrucción previa en álgebra lineal, solo tres pudieron lograrlo.

A modo de conclusión

Los resultados indican que los matices de la tematización de los conceptos básicos del álgebra lineal, en el concepto espacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, lucen como en la Tabla 1.

Tabla 1. *Matices de la tematización de los conceptos básicos del álgebra lineal en el objeto espacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.*

Etapa Intra-EV de $\mathbb{R}^3$	*Etapa Inter-EV de $\mathbb{R}^3$*	*Etapa Trans-EV de $\mathbb{R}^3$*
El cero vector es la n-upla (0,0,0) de $\mathbb{R}^3$. **Proceso**	*El cero vector no necesariamente es el (0,0,0) de $\mathbb{R}^3$.* **Objeto**	*Reconoce cuando un conjunto con dos operaciones es un EV de $\mathbb{R}^3$ y cuando no, recurriendo a estructuras subyacentes.* **Objeto**
Para chequear si dos vectores de $\mathbb{R}^3$ son Linealmente independiente/dependiente se iguala la Combinación Lineal a (0,0,0). **Proceso**	*Para chequear si dos vectores de $\mathbb{R}^3$ son Linealmente independiente/dependiente se iguala la Combinación Lineal al neutro de la operación suma.* **Objeto**	*Construye ejemplos de espacios vectoriales que satisfacen condiciones dadas, haciendo uso de la estructura subyacente.* **Objeto**
Las operaciones suma y multiplicación por escalar son consideradas las usuales. **Proceso**	*Las operaciones suma y multiplicación por escalar no siempre son las usuales.* **Objeto**	*Las operaciones suma y multiplicación por escalar no siempre son las usuales.* **Objeto**

Reconocimientos

Este trabajo ha sido subvencionado parcialmente por el proyecto Fondecyt 1140801. Los autores agradecen la buena disposición a los participantes en la investigación.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education.* New York: Springer.

Baker, B., Cooley, L., y Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(5), 557-578.

Cooley, L., Trigueros, M., & Baker, B. (2007). Schema thematization: a framework and an example. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(4), 370-392.

García, M., Llinares, S., y Sánchez-Matamoros, G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International journal of science and mathematics education*, *9*(5), 1023-1045.

Piaget, J. y García, R. (1989). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Madrid: Siglo XXI.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ABIERTOS EN EL TRASPASO DEL PENSAMIENTO NUMÉRICO AL ALGEBRAICO BAJO UNA SECUENCIA NEURODIDÁCTICA

Priscilla Olivares Pérez
Universidad San Sebastián (Chile)
Priscilla.olivares.perez@gmail.com

RESUMEN: La resolución de problemas que involucra el traspaso de la aritmética al álgebra genera en los estudiantes dificultades y un proceso de mecanización. La siguiente investigación tiene como objetivo aplicar una secuencia a un grupo de alumnos (15-18 años) de educación media para adultos en Chile. La secuencia es construida en tres niveles utilizando la resolución de problemas abiertos como un medio para el desarrollo del pensamiento numérico y algebraico. Se utilizan elementos de la neurodidáctica, específicamente el uso de las funciones ejecutivas. Esto contribuye a la mejora de los procesos cognitivos de este grupo al resolver este tipo de problemas matemáticos.

Palabras clave: resolución de problemas, neurodidáctica, pensamiento numérico-algebraico

ABSTRACT: Problem solving which involves the transfer of arithmetic to algebra makes students' experience difficulties and use a mechanical process. This research aims to apply a sequence to a group of students (15-18 years) of adult education in Chile. The sequence is structured in three levels by using open problem solving as a means to develop numerical and algebraic thinking. Elements of neuro-didactics are used, specifically, executive functions. It contributes to the improvement of the cognitive processes of this group when solving this type of mathematical problems.

Key words: Problem solving; Neuro-didactics; Numerical-algebraic thinking

Introducción

Los estudiantes de educación media de adultos de un colegio de Chile presentaban dificultades en la comprensión y resolución de problemas matemáticos cuando debían realizar traspasos de lo numérico a lo algebraico. Según lo planteado por Kieran (2004), los estudiantes tienen dificultades cuando deben realizar estos ajustes. La gran mayoría de estos alumnos no se adaptaba al sistema de enseñanza tradicional impartida por los colegios chilenos y como consecuencia repetían niveles. El método de enseñanza utilizado en ese momento por el docente a cargo de la asignatura de matemática no presentaba efectividad. Es por esto que se busca aplicar una nueva propuesta de enseñanza-aprendizaje que ayudará a los estudiantes a generar sus propios conocimientos. De esta manera surge la pregunta: ¿Qué efectos produce la resolución de problemas abiertos en el desarrollo del pensamiento numérico-algebraico considerando una secuencia neurodidáctica? Para responder a esta pregunta de investigación se genera una propuesta neurodidáctica fundamentada en los trabajos expuestos por Meléndez (2009).

Se consideran las funciones ejecutivas como parte principal para la creación de cuestionarios, utilizando los problemas abiertos como un medio para conectar elementos numéricos y algebraicos. El presente estudio relaciona dos corrientes de la matemática educativa, la resolución de problemas y el pensamiento numérico-algebraico, que se incorporan en una propuesta de tipo neurodidáctico. Surge la necesidad de aplicar una nueva propuesta de enseñanza que permita ver los resultados que tendría un grupo de estudiantes que presentaban problemas en la resolución de problemas algebraicos.

Marco teórico y Metodología

En esta investigación se elabora un Marco Teórico basado en la literatura de concepciones de pensamiento numérico y algebraico, además de los conceptos de neurodidáctica que permiten confeccionar los cuestionarios de problemas abiertos. Para los conceptos numéricos-algebraicos se trabaja con definiciones de (Ortíz, 2009; Kilpatrick, 2001; Gascón, 2012), resolución de problemas (Poyla, 1962; Schoenfeld, 1992; Díaz & Poblete, 1994) y elementos neurodidácticos (Meléndez, 2009; Fernández, 2010). Se define la neurodidáctica como una disciplina que conecta la didáctica con la psicología y la neurociencia, cuyo propósito principal es mejorar las prácticas docentes y el aprendizaje de los estudiantes. Desde esta perspectiva, el aprendizaje es visto como un cambio en el proceso interno cerebral, produciendo que las conexiones sinápticas que generan los cambios de pensamiento y comportamiento se realicen por medio de una intervención teórica, dadas ciertas prácticas o experiencias de vida (Valdez, 2008).

Las funciones ejecutivas mejoran los procesos cerebrales de aprendizaje y ordenan las acciones cognitivas y de comportamiento. Son necesarias para realizar acciones que dependen de los sistemas de atención y memoria, y se definen como un conjunto de capacidades que hacen que el pensamiento se transforme en las diversas acciones requeridas para funcionar de forma organizada, flexible y eficaz, encargándose de adaptar al individuo a diferentes situaciones y de permitirle la solución de problemas de manera exitosa y aceptable (Punset, 2007, citado en Meléndez, 2009). Desde una perspectiva educacional las funciones cognitivas de Meléndez (2009) requieren de un alto nivel cognitivo.

Estas se definen como:

- Observación: es la habilidad de concentrar eficientemente todos los canales de percepción en el fenómeno de análisis, con el fin de identificar todos los posibles componentes del objeto y sus relaciones;
- Anticipación-predicción-flexibilidad: es la habilidad de plantear hipótesis y especulaciones de resultados y predispone para cambios seguros, con lo que se logra el pensamiento flexible;
- Orden-organización-planificación: es la habilidad de organizar la información (datos o componentes), siguiendo criterios o secuencias preestablecidas o que se encuentran bajo prueba de ensayo y error mientras se intenta la resolución de problemas;
- Resolución de problemas: se refiere a la habilidad de identificar claramente un problema fundamental de los problemas derivados, así como de los paralelos, y de la determinación de las causas y consecuencias de cada uno de éstos, antes de ensayar las soluciones;
- Toma de decisiones: se refiere a seleccionar la mejor solución según las circunstancias dadas o sus posibles cambios;
- Comunicación asertiva: se refiere a ser persuasivos en el momento de comunicar nuestra propuesta, cuya exposición obliga a una interpretación de la intencionalidad de los destinatarios y a la utilización de un lenguaje apropiado.

Estas habilidades se relacionan directamente con los procesos internos de la resolución de problemas y pueden ayudar a los docentes a diseñar situaciones que activen estas funciones para un desarrollo cognitivo.

Esta investigación tiene un enfoque cualitativo de tipo diseño emergente, en el que se establecen cuatro fases para llevar a cabo un estudio. En la primera fase se realiza un análisis preliminar del contexto educativo donde es aplicada la propuesta, en la segunda fase se presenta la construcción de la propuesta, en la tercera fase se presenta la aplicación de la propuesta y en la fase final se presentan las respuestas y los tipos de análisis efectuados.

Propuesta

Para definir la propuesta se confeccionaron quince situaciones de problemas abiertos que tenían como base elementos aritméticos-algebraicos y las funciones ejecutivas del trabajo de Meléndez (2009). Los elementos aritméticos-algebraicos se establecieron como el estudio de las variables de los problemas que los estudiantes, en algunos casos, debían definir y, en otros, identificar. Para la validación de las problemáticas abiertas se adaptó la lista de cotejo que Meléndez propone en su investigación, donde se plantea como criterios a evaluar: la motivación, la atención, la elaboración de ideas, procesos de entrada y salida, procesos complejos, uso de las funciones ejecutivas, y formas de razonamiento. Se realizó la validación de éstas a juicio de expertos del área, los cuales entregaron observaciones oportunas para su respectiva mejora y posterior aplicación.

Las situaciones problemas que se seleccionaron para la construcción de la propuesta neurodidáctica tuvieron la mayor escala numérica de la rúbrica y se relacionaron con las experiencias de los estudiantes involucrados en la sala de clases. Se plantearon tres cuestionarios de dos preguntas abiertas como se aprecia en la figura 1.

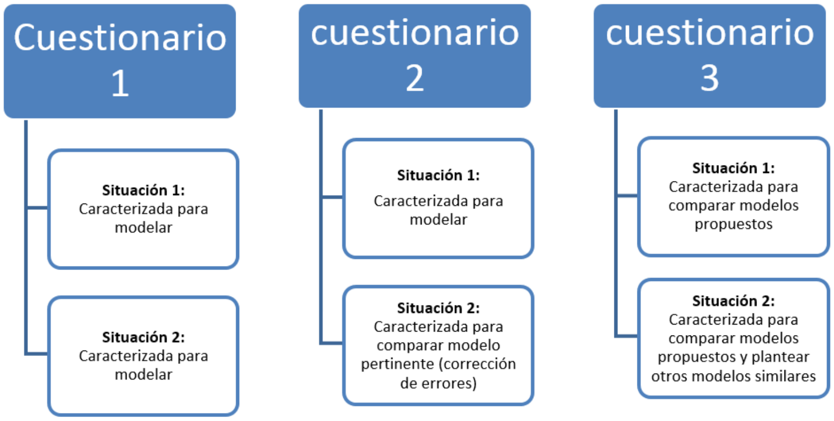


Figura 1. Esquema de Aplicación de cuestionarios de secuencia neurodidáctica.

Los problemas seleccionados se dividieron en dos tipos: planteamiento y comparación. Los problemas del tipo planteamiento se enfocaban en la modelación algebraica de la situación planteada, mientras que en los problemas de tipo comparación se pretendía entregar un modelo algebraico para que los estudiantes decidieran la pertinencia del modelo más adecuado.

La aplicación de la secuencia neurodidáctica se aplicó en un periodo de cuatro semanas. El primer cuestionario contenía dos problemas del tipo planteamiento, el segundo cuestionario dos problemas mixtos y, finalmente, el tercer cuestionario dos problemas de tipo comparación. Antes de la aplicación del primer y segundo cuestionario, se activaron los conocimientos de los estudiantes con juegos de lógica matemática para despertar el interés, la participación y la motivación para el aprendizaje.

A continuación, se muestran tres preguntas de cada cuestionario. En el primer cuestionario se presenta una situación caracterizada para modelar (ver figura 2). En ella se señala una conversación que tienen dos estudiantes del curso cuando conversan de monedas. En la problemática se les solicita dar respuesta a las preguntas planteadas donde la argumentación para explicar los procedimientos es una instancia para que los estudiantes comiencen a formular hipótesis.

Shai tiene en su monedero la cantidad de 200 pesos pero distribuidos en monedas de \$10 y \$5, en total tiene 22 monedas. Sebastián le pregunta. ¿Cuántas son de \$10 y cuántas de \$5? A lo que Shai responde "¿Por qué me preguntas eso?". Sebastián le dice "pues porque quiero saber". Con tu compañero de puesto comenta lo sucedido y respondan individualmente:

a) ¿Cómo le podrías ayudar a Shai a responder la pregunta de Sebastián?

b) ¿Cómo podrías encontrar el número de monedas de \$10 y \$5?

c) Ahora observa lo que hizo tu compañero de banco al responder las preguntas anteriores. ¿Pensaron de la misma manera? ¿Por qué?

d) ¿Cómo podrías explicar tu procedimiento en el curso para que se entienda de la mejor forma este problema?

Figura 2. Problema abierto, primer cuestionario secuencia neurodidáctica.

En la segunda situación problema (ver figura 3) los estudiantes deben identificar las variables involucradas y verificar si lo planteado como respuesta es la adecuada o deben realizar adecuaciones.

En un trabajo grupal se pide que revises el desarrollo de una actividad a un compañero de curso. Se planteó el siguiente problema: *"En una tienda de muebles, se ofrece un sueldo de \$ 250.000 más \$ 5.000 por cada mueble terminado. ¿Cuál es la expresión que modela esta situación?"* **y la respuesta que se obtuvo fue la siguiente:** "$sueldo = 250.000 \cdot n + 5.000$" n es el número de muebles."

a) ¿Consideras correcto el desarrollo efectuado por tu compañero? ¿Por qué?

b) ¿Cuáles condiciones facilitan la comprensión del problema? Explica.

c) ¿Cómo lo guiarías para que desarrollara el problema?

d) ¿Cuáles elementos del problema te permiten encontrar una respuesta? Explica.

e) ¿Cómo encuentras la solución del problema? Explica.

Figura 3. Problema abierto, segundo cuestionario secuencia neurodidáctica

En la tercera situación los estudiantes deben analizar las variables de las expresiones algebraicas y decidir cómo influyen en la resolución del problema, además deben realizan una comparación de los modelos algebraicos seleccionando y argumentando su elección.

Para la fiesta de fin de año, se realizan cotizaciones en dos lugares diferentes con capacidad máxima para 100 personas. Daniel junto a Gabriela cotizan cuáles son los valores más adecuados y se los presentan en la reunión del curso.

Primera oferta:	**Segunda oferta:**
"HOTEL GAGA"	"HOTEL l'OGGINS"
P= números de personas	**P=número de personas**
R= costo por bar abierto	**R= costo por bar abierto**
Costo total= P*R+1.500	**Costo total= p*1.500+R**
Importante: el costo de bar abierto corresponde a $10.000	***Importante. El costo de bar abierto*** **corresponde a $100.000**

a) Observa las dos propuestas y sin realizar cálculos. ¿Cuál de las dos ofertas es más conveniente? ¿Por qué cree eso? Explica

b) Si acuden más de 50 asistentes ¿Qué sucede con el valor que deben pagar por persona a medida que aumenta el número de asistentes en cada oferta?

c) ¿Qué significado tiene para este problema el uso de variables?

d) Si modificamos los valores de las variables, ¿Qué sucede con los costos totales de cada oferta?

Figura 5. Problema abierto, tercer cuestionario secuencia neurodidáctica.

Conclusiones

El estudio de los procesos cognitivos de los estudiantes, tiene un rol primordial para el aprendizaje de las matemáticas. Se considera necesario para la enseñanza de esta disciplina conocer nuevas herramientas cognitivas que permitan mejorar y modificar la enseñanza tradicional, para que los estudiantes la puedan comprender de una mejor manera y formar un pensamiento matemático sustentado en los procesos cognitivos internos de cada individuo.

Bajo esta perspectiva, la neuroeducación juega un papel primordial, considerándose una de las teorías más recientes y que puede entregar elementos claves para la mejora de las propuestas de enseñanza de las matemáticas. Es por esto que el objetivo de esta investigación consistió en generar una propuesta neurodidáctica que relacione el pensamiento numérico algebraico y la resolución de problemas abiertos. La elección de estas dos líneas de investigación se fundamenta en las dificultades que tienen los estudiantes cuando deben resolver problemas que involucren elementos algebraicos. La necesidad de comunicar la forma en que ellos logran resolver estas problemáticas, son manifestadas con el uso de problemas abiertos, pues se considera la libertad que presenta el alumnado cuando plantea sus respuestas.

La construcción del pensamiento numérico-algebraico se realiza a través de los niveles de enseñanza. En el periodo básico se construye el pensamiento numérico por medio del descubrimiento y exploración a través del conjunto de números pequeños que se van prolongando a medida que se implementan estrategias de cálculos mentales. En el desarrollo del pensamiento algebraico, los estudiantes deben encontrar relaciones entre números, formas, conceptos y objetos. Utilizan los patrones para lograr predecir y fundamentar los tipos de razonamientos involucrados en los problemas planteados por el sistema escolar chileno. El uso de problemas contribuye a ciertas habilidades que proponen las competencias matemáticas de Prueba PISA y que son fundamentales para el aprendizaje de conceptos matemáticos. De esta manera se presentan niveles de desarrollo que fomentan la capacidad de abstracción, comunicación, generalización, entre otras y que contribuyen al desarrollo de estos pensamientos.

Por lo que se busca una relación entre el pensamiento numérico-algebraico, la resolución de problemas abiertos y la neurociencia para tener una referencia y establecer la generación de actividades presentes en los cuestionarios. Lo que se demostró es que en las investigaciones existentes con estas temáticas no se evidenciaba una conexión tan directa, pues se relacionan las problemáticas con conceptos algebraicos, pero no con el uso de la neurodidáctica. De esta manera es importante destacar que al establecer este tipo de relaciones se puede contribuir a la exploración del desarrollo del álgebra bajo otras miradas más significativas para el estudiante, por lo que la consideración de propuestas que conecten estos tópicos puede contribuir a la mejora de la enseñanza-aprendizaje de contenidos matemáticos.

Finalmente, las evidencias que se lograron en la aplicación de las situaciones problemas propuestas revelan la importancia de continuar con la investigación, identificando la manera en que los estudiantes razonan en las distintas áreas de la matemática. Este inicio de la aplicación de la neurodidáctica en la enseñanza media puede contribuir a la mejora de los procesos educacionales apoyando a los docentes en su quehacer profesional y planteando nuevas inquietudes acerca de los métodos tradicionales de enseñanza.

Referencias bibliográficas

Angulo, F., Díaz, L., Joglar, C., Labarrente, A. & Ravanal, E. (2012). *Las competencias de pensamiento científico desde las voces del aula. Volumen 1*: (47-82). Chile: PROYECTO FONDECYT.

Díaz, V. & Poblete, A. (1994). *Evaluación de los aprendizajes matemáticos en la enseñanza secundaria en el marco de la reforma educacional*. Chile: CONICYT. Fondecyt 1990558

Fernández, J. (2009). Neurociencias y Enseñanza de la Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*. ISSN:1681-5653. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3116473

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 13(3), 295-332.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Eds.) (2011). Adding it up. Helping children learn mathematics. Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.

Meléndez, L. (2009). Neurodidáctica y el desarrollo de las funciones ejecutivas. *VIII Congreso Educativo: El sentido de la Educación en un Mundo en Crisis*. Universidad Interamericana de Costa Rica, Costa Rica.

Ortiz, A. (2009). Lógica y pensamiento aritmético. *PNA*, 3(2), 51-72.

Polya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving*. New York: John Wiley.

Radford, L. (2009). Cerebro, Cognición y matemáticas. *Relime*. 12(2), 215-250. Disponible en http://www.clame.org.mx/relime.htm

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*: (334-370). New York: MacMillan.

Valdez, H. (2008). Introducción a la Neurodidáctica. Curso de Capacitación docente. AE. Disponible en http://www.asociacioneducar.com/monografias-docente-neurociencias/h.veloz.pdf

¿CÓMO INTRODUCIR LA NOCIÓN DE FRACTAL? UNA PROPUESTA DIDÁCTICA

Daysi Julissa García Cuéllar, Jesús Victoria Flores Salazar
Pontificia Universidad Católica del Perú (Perú). Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas, IREM-PUCP (Perú).
garcia.daysi@pucp.pe, jvflores@pucp.pe.

RESUMEN: Fractales, es un concepto con cierto grado de complejidad. Sin embargo, se pueden introducir esta noción de una manera sencilla en el aula de matemática en el nivel de secundaria. El presente artículo es un reporte de un taller realizado en la RELME 30. Su propósito fue desarrollar actividades sobre los fractales para el aprendizaje de esta noción. Algunas actividades presentadas fueron deducir progresiones que resultan a partir de su construcción, construir fractales con la técnica del kirigami, así como actividades en entornos de geometría dinámica como es el Geogebra. Se presentaron fractales como el conjunto de Cantor, la construcción del triángulo de Sierpinski y la curva de Koch.

Palabras clave: geometría, fractales, progresiones

ABSTRACT: Fractals, is a concept with a certain degree of complexity. However, this notion can be introduced in a simple way in the math classroom at the secondary school. This article is a report of a workshop held at the 30th RELME. Its purpose was to develop activities on fractals to learn this notion. Some of the activities were to deduce progressions that result from their construction; to construct fractals with the kirigami technique, as well as activities in of dynamic geometry environments such as GeoGebra. Fractals such as the Cantor set, the construction of the Sierpinski triangle and the Koch curve were presented.

Key words: Geometry, fractals, progressions

Introducción

Los investigadores Oviedo, Kanashiro y Colombini (2004) explican que, “El término Fractal está relacionado con la palabra Fractus que significa roto o no entero. Este término es atribuible a Benoit Mandelbrot quien lo empleó para definir ciertos conjuntos de números que describen objetos con dimensión fraccionaria” (p. 11).

Así mismo, los investigadores mencionan que los fractales son formaciones gráficas que muestran procesos iterativos que tienen una característica en común: repiten procesos infinitos. Por tanto, podemos concebir una construcción fractal como una figura auto- semejante, es decir, todas sus partes tienen repetición a diferentes escalas. Los fractales tienen propiedades específicas de alto valor matemático:

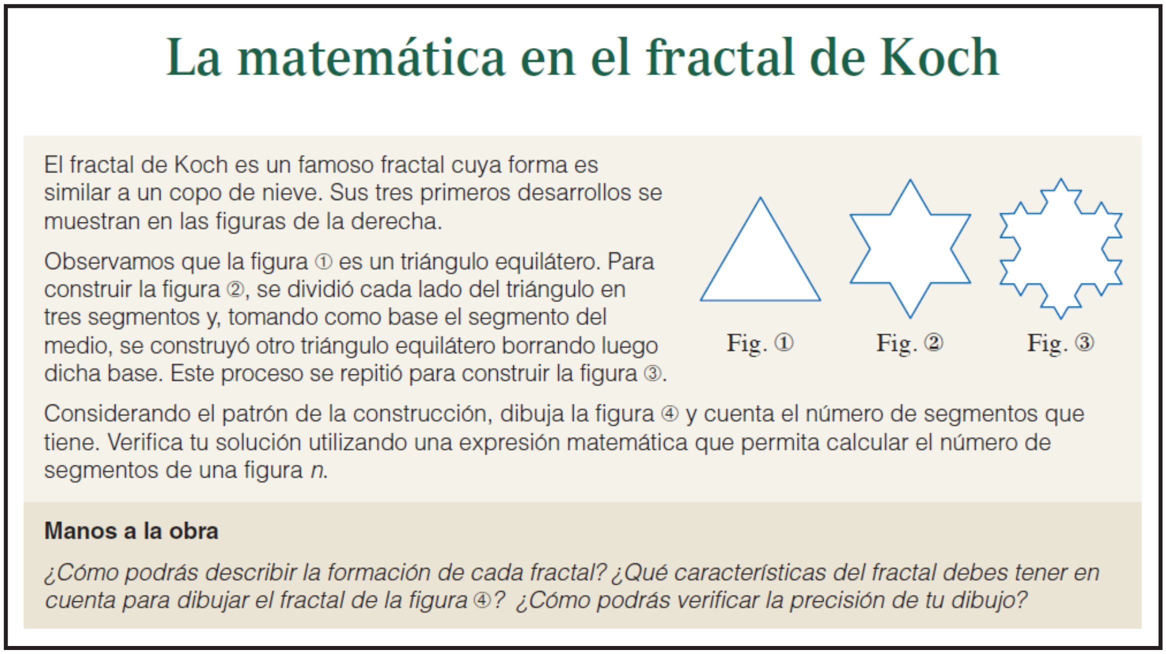
Los fractales son construcciones que se generan a través de iteraciones sucesivas, la construcción de un fractal implica la ejecución de un algoritmo que se repite indefinidamente. Son objetos que se identifican gráficamente y brindan un acercamiento analítico que posibilita explicar sus comportamientos y tienen dimensión fraccionaria.

Acerca de los Fractales

Consideramos que al trabajar con modelos fractales que son finitos nos dará idea del fractal genuino que es infinito. Los fractales son importantes porque tienen diversas y destacables aplicaciones, como por ejemplo en la medicina, en la meteorología, la economía e incluso en la misma naturaleza, como mostramos en la Figura 1.

Figura 1. Aplicación de los fractales en diversas áreas. Fuente: recuperado de: goo.gl/MUI7Wp

La noción de fractal se ha ido introduciendo en el currículo de matemática de diferentes países de Latinoamérica y específicamente en el Perú. Tal es así que en el texto del área de matemática del VII ciclo de Educación Básica Regular del Ministerio de Educación del Perú-MINEDU, texto para estudiantes de 13 a 14 años de edad, muestra actividades relacionadas a la noción de Fractal, como se muestra la Figura 2.



La matemática en el fractal de Koch

El fractal de Koch es un famoso fractal cuya forma es similar a un copo de nieve. Sus tres primeros desarrollos se muestran en las figuras de la derecha.

Observamos que la figura ① es un triángulo equilátero. Para construir la figura ②, se dividió cada lado del triángulo en tres segmentos y, tomando como base el segmento del medio, se construyó otro triángulo equilátero borrando luego dicha base. Este proceso se repitió para construir la figura ③.

Fig. ① Fig. ② Fig. ③

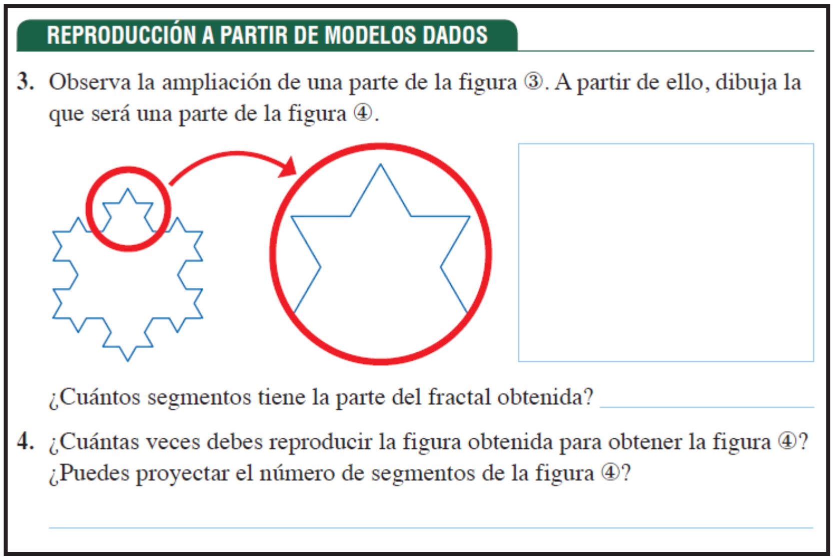
Considerando el patrón de la construcción, dibuja la figura ④ y cuenta el número de segmentos que tiene. Verifica tu solución utilizando una expresión matemática que permita calcular el número de segmentos de una figura *n*.

Manos a la obra

¿Cómo podrás describir la formación de cada fractal? ¿Qué características del fractal debes tener en cuenta para dibujar el fractal de la figura ④? ¿Cómo podrás verificar la precisión de tu dibujo?

Figura 2. Actividad extraída del Libro matemática 3 del MINEDU. Fuente: Perú (2016, p.140)

Como se evidencia, en la figura anterior, se presenta el fractal de Koch donde los estudiantes deben describir la formación de cada fractal, identificar sus características, así como la reproducción de un modelo dado. Sin embargo, no se menciona qué es un fractal. Ello se puede observar también en la siguiente actividad que muestra la Figura 3.


REPRODUCCIÓN A PARTIR DE MODELOS DADOS

3. Observa la ampliación de una parte de la figura ③. A partir de ello, dibuja la que será una parte de la figura ④.

¿Cuántos segmentos tiene la parte del fractal obtenida? ____________

4. ¿Cuántas veces debes reproducir la figura obtenida para obtener la figura ④? ¿Puedes proyectar el número de segmentos de la figura ④?

Figura 3. Actividad extraída del Libro matemática 3 del MINEDU. Fuente: Perú (2016, p.140)

Por lo anterior, el taller tuvo tres objetivos fundamentales: Realizar actividades que permitan introducir la noción intuitiva de recursividad e infinito que son características de los fractales, reflexionar sobre cómo esta noción compleja se puede trabajar en el aula con estudiantes de educación secundaria y mostrar cómo otros contenidos se pueden abordar a partir de las características de los fractales como progresiones geométricas, área, perímetro y operaciones con fracciones, como se muestran en las figuras 5; 7 y 10.

Desarrollo del taller

El taller tuvo tres tipos de actividades:

a) *Actividades introductorias*, en las cuales se presentaron la manera introducir intuitivamente la noción de fractal, cómo se presenta en los libros de texto de secundaria y cómo este tópico es evaluado en los exámenes de ingreso de algunas universidades. Cabe resaltar que estas actividades toman como base las actividades del trabajo de Estrada (2004).
b) *Actividades con la técnica de Kirigami* (doblado y corte de papel), en las cuales se construyeron el triángulo de Sierpinski y el conjunto de cantor, entre otros.
c) *Actividades con Geogebra:* Se propusieron actividades para inducir la noción de intuitiva de la recursividad y el infinito.

Las actividades se desarrollaron en dos sesiones de 90 minutos cada una. En la primera sesión se desarrollaron actividades de introducción a la noción de fractales y las primeras construcciones de fractales con la técnica de Kirigami. En la segunda sesión, continuamos con la actividad de construcción de fractales con las técnicas del Kirigami y con el uso de Geogebra.

Las actividades

A continuación se presentará una actividad por cada tipo, mencionado anteriormente, que se desarrollaron en el taller.

Actividad introductoria

Tuvo como objetivo introducir la noción de fractales. Dado que Fractal está relacionado con la palabra Fractus que significa roto o no entero.

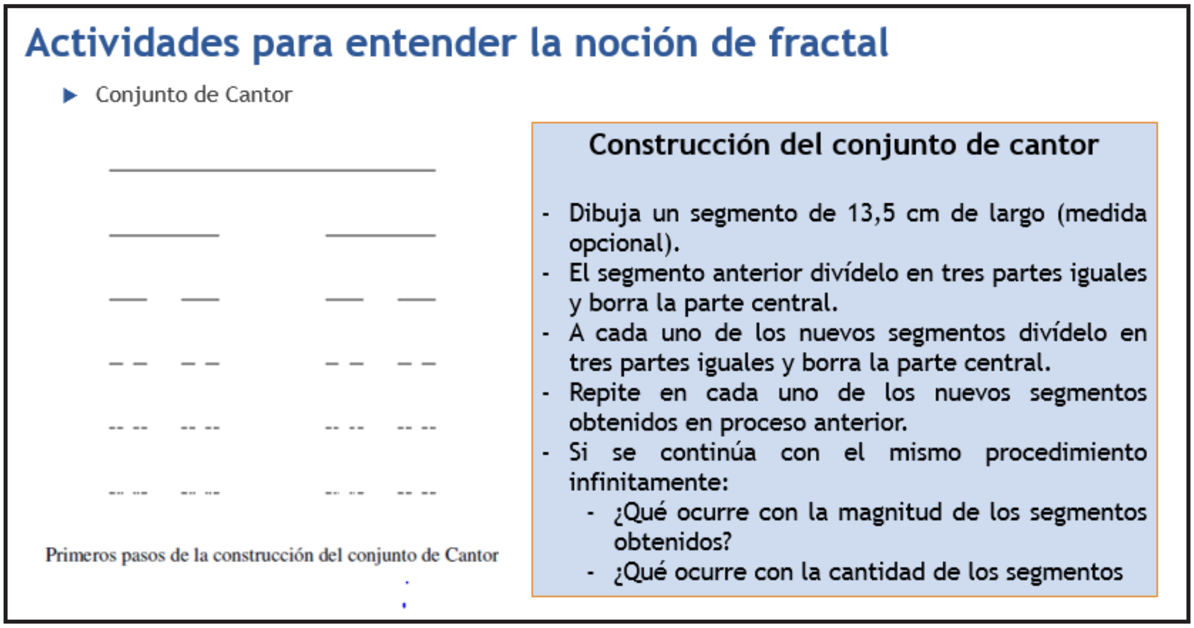


Figura 4. Actividad introductoria presentada a los participantes.

Se deseaba que los docentes participantes reconocieran cada parte de los segmentos que se dividió el segmento inicial reconociéndolo como la unidad, como se muestra en la siguiente figura:

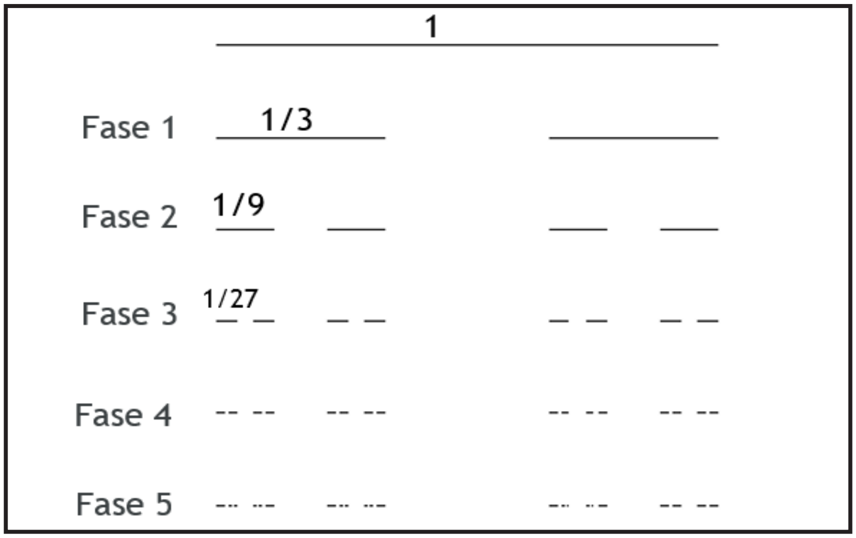


Figura 5. Reconociendo la medida de cada segmento dividido

Los docentes realizaron la división del segmento dado inicialmente, con el uso de compás, reglas y una docente hizo las divisiones utilizando el teorema de Thales, ya que el segmento no era de medida exacta para cada partición que se solicitaba del segmento. Esto último se muestra en la siguiente figura:

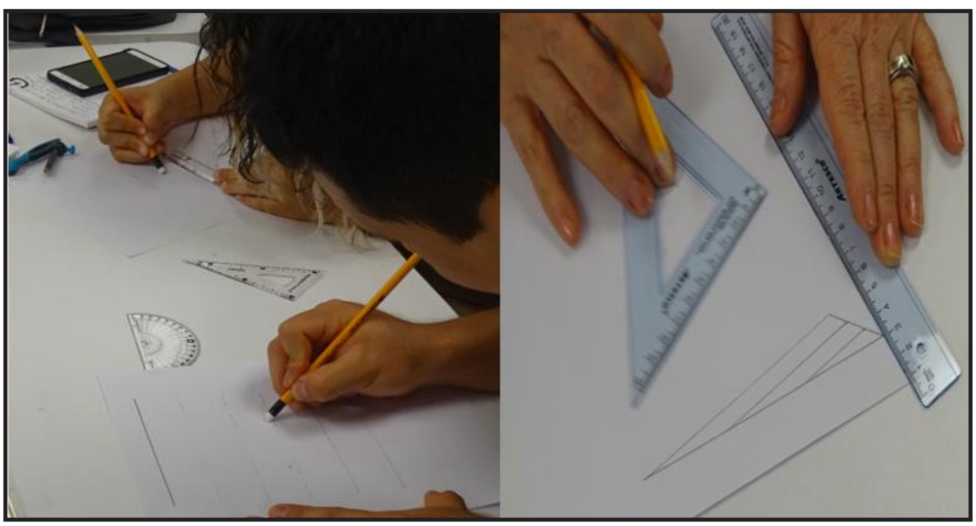


Figura 6. Docentes participantes realizando la primera actividad.

Para finalizar esta actividad los docentes participantes, completaron un cuadro a partir de sus observaciones y dedujeron patrones, como se muestra a continuación:

Actividades para entender la noción de fractal

- Conjunto de Cantor

Completar la siguiente tabla

Fase	1	2	3	4	...	k	Conjunto de Cantor $k \to \infty$
Números de segmentos	2	4	8	16	...	2^k	
Longitud de cada segmentos	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	...	$\frac{1}{3^k}$	
Longitud total	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{16}{81}$	...	$\frac{2^k}{3^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k$	0

Figura 7. Los docentes participantes buscan progresiones.

Actividad con material manipulativo

En este tipo de actividad, se realizaron las construcciones de los fractales conocidos como escalera de cantor, pirámide se Sierpinski, el libro fractal, entre otros.

Figura 8. Fractales elaborados por los docentes participantes.

El libro fractal fue la construcción más elaborada, pues cuenta con mayor número de pasos, pero para los docentes fue un reto que al final lograron realizar. En un primer momento hicieron las construcciones con una plantilla, después de reconocer la secuencia de la construcción pudieron realizar un libro fractal de la pirámide de Sierpinski.

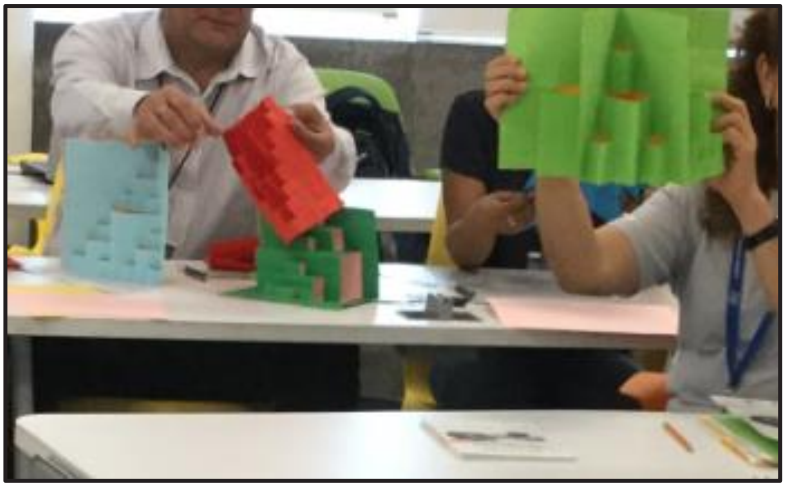


Figura 9. Docente presentando su libro fractal de la pirámide de Sierpinski.

Actividad con Geogebra

Esta actividad se basó en la presentación del triángulo de Sierpinski elaborado con Geogebra donde los docentes tenían que movilizar un deslizador, según ello se cambiaba de fase (cantidad de triángulos). Luego, tenían que responder a las preguntas que se muestran en la Figura 10. Tomando en cuenta que a partir de la segunda pregunta, se debía responder en relación a la medida del triángulo con mayor longitud de lado.

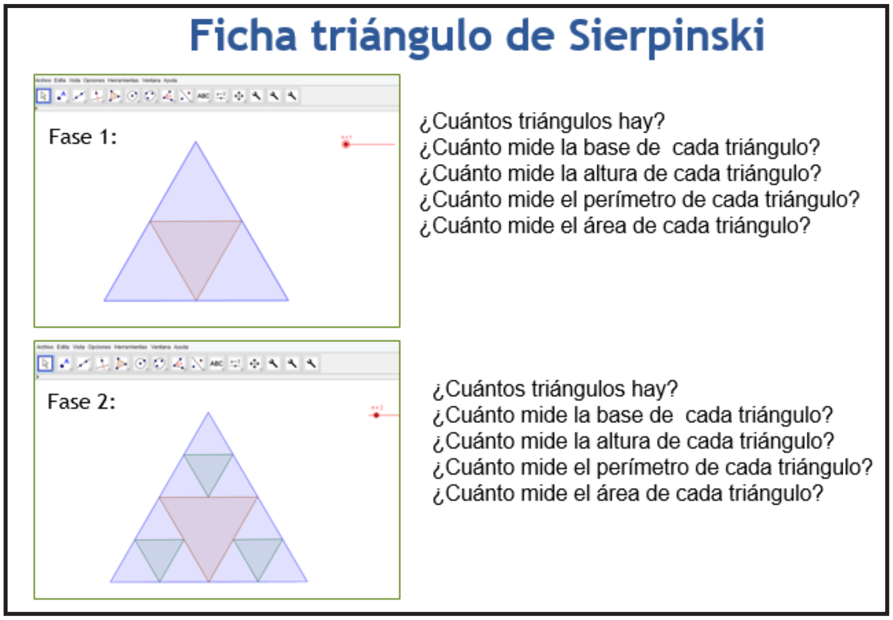


Figura 10. Actividad de triángulo de Sierpinski con Geogebra.

Consideraciones Finales

Consideramos que al concluir el taller los docentes participantes cuentan con herramientas para introducir, de manera sencilla, la noción intuitiva de recursividad e infinito que son características de los fractales, para llevarlos al aula con estudiantes de educación secundaria. Han podido vivenciar que las características de los fractales, permiten trabajar otras nociones matemáticas como progresión geométrica, área, perímetro y operaciones con fracciones.

Referencias bibliográficas

Estrada, F. (2004). *Geometria fractal: conceptos y procedimientos para la construcción de fractales*. Bogota: Editorial Magisterio.

Perú (2016). Ministerio de Educación del Perú. *Matemática 3*. Lima: Santillana.

Ovideo, L.; Kanashiro, A. y Colombini, M. (2004). *Fractales: un universo poco frecuentado*. Santa fe: Ediciones UNL.

Sabogal, S y Arenas, G. (2011). *Una introducción a la geometría fractal.* Bucaramanga: Ediciones UIS.

PROPUESTA PARA EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LA INTEGRAL DE UNA FUNCION DE VARIAS VARIABLES MEDIANTE ACTIVIDADES DE VISUALIZACION

Alejandra Quintero García, Juan Martín Casillas González, Marisol Radillo Enríquez
Universidad de Guadalajara. (México)
funnyale@hotmail.com, martin.casillas70@hotmail.com, marisolradillo@yahoo.com.mx

RESUMEN: Se propone una serie de actividades para el aprendizaje del concepto de integración múltiple como una estrategia para el cálculo de área entre dos curvas y posteriormente en el cálculo de volumen. La propuesta se apoya en un enfoque constructivista y en el uso de la computadora para que el estudiante realice la construcción de integrales múltiples y manipule límites de integración de acuerdo a la geométrica de los problemas que se presentan.

Palabras clave: cálculo, integrales, representaciones semióticas, visualización

ABSTRACT: This research proposes a set of activities to learn concept of multiple integration as a strategy for the calculus of area between two curves and later in the calculus of volume. The proposal is based on a constructivist approach and the use of computer so that the student develops the construction of multiple integrals and manipulates limits of integration according to the geometric situations of the problems that are presented.

Key words: Calculus, integrals, semiotic representations, visualization.

Introducción

Usualmente la enseñanza del Cálculo parte de enunciados, teoremas y problemas tipo, que ejemplifican los conceptos asociados y se apoya fundamentalmente, en el conocimiento algebraico del estudiante y poco en la intuición geométrica y visual (Cuevas & Pluvinage, 2009).

Aprender Cálculo va más allá de memorizar un conjunto de definiciones, algoritmos y técnicas para resolver actividades rutinarias (Benítez y Londoño, 2009). Adicionalmente, debe propiciarse en el aula un ambiente donde los estudiantes puedan comunicar sus ideas, hacer preguntas, usar múltiples representaciones, hacer conjeturas, formular contraejemplos, hacer predicciones y construir modelos.

El uso de la tecnología, a favor del aprendizaje, debe incluir dimensiones de desarrollo como interacción, intercambio, comunicación, colaboración y cooperación ya que con esto se pueden diseñar actividades de aprendizaje para los estudiantes, que les permita relacionar definiciones y conceptos matemáticos con el uso de software, así como la discusión de las actividades en clase con los compañeros y profesores (Nesterova, Añove y Puga, 2010).

Ante esto, se propone una serie de actividades para el aprendizaje del Cálculo de áreas y volúmenes mediante la descripción geométrica de regiones planas y sólidos empleando integrales múltiples; estas actividades diseñadas con un enfoque constructivista, proporcionará al estudiante herramientas para que él mismo logre la manipulación de los límites de integración de integrales múltiples de acuerdo a la geometría que se le presenta.

Marco teórico

En diversas investigaciones que se han realizado sobre problemas en el aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral de funciones reales, se ha concluido que la mayor parte de los mismos, tiene su origen, en primera instancia, en una incomprensión de conceptos básicos y fundamentales del Cálculo (Cuevas, 2007).

El aprendizaje de los objetos matemáticos opera a nivel conceptual, pero la actividad del estudiante sobre dichos objetos solo es posible a través de sus representaciones semióticas (Hitt, 2003) y cada una de esas formas de representación (gráfica, verbal, analítica, numérica) proporciona solamente una parte del mismo, por lo que se recomienda incorporar varias de ellas en la construcción de significados.

Por lo anterior, se propone una secuencia de actividades, apoyadas en la visualización matemática de las distintas representaciones (gráfica, verbal, numérica y simbólica) de las integrales dobles y triples involucradas, de tal manera que los estudiantes construyan su aprendizaje a través de la manipulación de las diversas formas de representación de los objetos matemáticos, ya sea a lápiz y papel o con apoyo de la computadora. Se pretende que, al desarrollar estas actividades, el estudiante tenga la oportunidad de explorar por su cuenta el significado las integrales múltiples, a partir de los conceptos básicos involucrados en cada planteamiento.

El programa de computación elegido es el Matlab, ya que con éste es posible construir modelos tridimensionales dinámicos, con facilidad. Por otra parte, los estudiantes ya están familiarizados con este programa, ya que es utilizado en otros cursos. Desde esta perspectiva, resulta razonable investigar los efectos que el diseño de actividades didácticas y el *software* pueden provocar en ambientes de aprendizaje como el cálculo de volumen en la intersección de superficies y en la búsqueda de fortalecer los conceptos de las integrales dobles y triples involucrados.

Metodología

Los sujetos de investigación se eligieron de los dos grupos de estudiantes de la materia de Teoría del Cálculo II, la cual se estudia en conjunto con Taller de Teoría del Cálculo II, en la Licenciatura en Matemáticas del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara. Dado que los grupos considerados para la investigación estaban previamente formados, no fue posible tomar una muestra aleatoria de los alumnos para la investigación. Los alumnos de uno de los grupos integraron el grupo experimental (conformado por 8 alumnos) y el grupo restante se consideró el grupo control (también conformado por 8 alumnos).

La primera etapa del trabajo consistió en determinar si los dos grupos, experimental y de control, eran equivalentes, para lo cual se diseñó un pretest, cuyos temas centrales son prerrequisito para estudiar las integrales múltiples: sumas finitas, cálculo de área, integrales mediante sumas de Riemann y área entre curvas por integral definida. Los resultados del pretest se analizaron mediante un procedimiento de comparación de medias, como se muestra en el apartado de resultados.

Una vez que se constató la igualdad pre experimental de los grupos participantes, se procedió a la implementación de la propuesta didáctica, a lo largo de 3 sesiones de dos horas cada una, dentro del horario de clases.

Actividades de aprendizaje

Los materiales de la experimentación consistieron en 2 prácticas apoyadas por computadora y un trabajo en equipo. A continuación se describen las prácticas:

El objetivo de la llamada “Práctica 1”, es que el alumno relacione el volumen bajo la superficie con integrales dobles, a partir de situaciones de la vida cotidiana. La práctica se inicia con el planteamiento de un problema de volumen (Figura 1), el cual se le pide que resuelva sin indicar un procedimiento específico para resolverlo. Posteriormente se explica el concepto de las integrales dobles para el cálculo de volumen bajo una superficie.

A continuación (ver figura 2), y con el uso del programa *Matlab*, se induce a que el alumno concluya que existen diferentes formas de integrar para encontrar el volumen, es decir, llegue a la conclusión que se puede determinar diferente orden de integración, pero esto no influye en el resultado final (el volumen es el mismo en ambos casos).

También, se aplica el Teorema de Fubini pero sin enunciarse, esto es, se continúa con el problema de la cantidad de agua que se utiliza para la alberca, pero ahora se desea que la base de la alberca no sea cuadrada o rectangular. Esto implica que los límites de integración de la primera integral a resolver sean funciones que dependan de la otra variable a integrar, y ya no solo de las constantes o bien funciones constantes.

Para finalizar esta práctica se incluyó un ejercicio en el cual el alumno debe resolver integrales y además graficar la región "base" y el sólido, lo cual puede hacerse a lápiz y papel o con el uso del *Matlab*.

Practica 1

Volumen bajo la superficie

Josué tiene una alberca rectangular en el patio de su casa, la cual mide 6mts de largo, 3mts de ancho y 2mts de profundidad.

1.1. ¿Cuantos litros de agua necesita para llenar la alberca? Describe tu procedimiento.

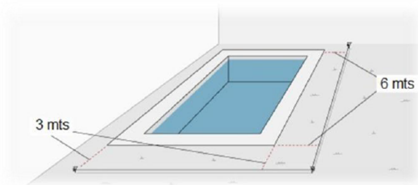


Figura 1. Problema integrador de la Práctica 1.

Una vez relacionado el cálculo de volumen utilizando integrales dobles, se procede con la llamada "Práctica 2", en la que el alumno relaciona el volumen entre superficies con integrales triples definidas, y además, interprete y calcule el área mediante sumas de Riemann.

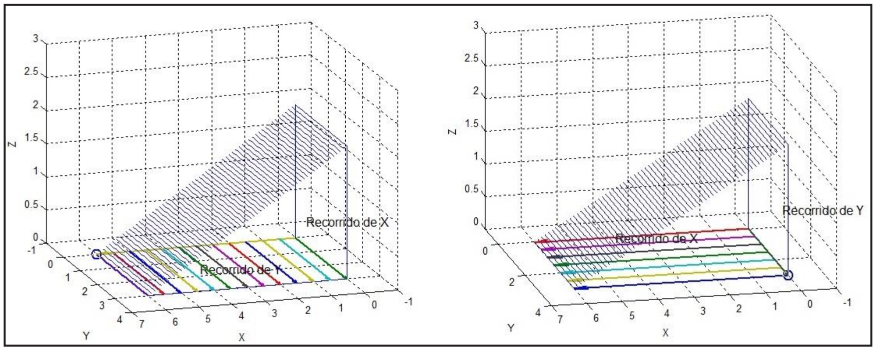


Figura 2. Gráficas en *Matlab* de los recorridos de acuerdo al orden de integración.

Al realizar esta actividad el alumno retoma en el primer ejercicio lo visto en la práctica 1 (determinar la integral doble que corresponde al volumen de diferentes primas). Se utiliza el mismo planteamiento del problema de volumen de la práctica 1, pero ahora se muestra la solución por medio de integrales triples.

A continuación, y con el apoyo del programa *Matlab*, se induce a que el alumno se familiarice con las integrales triples y la forma de determinar los límites de integración así como identificar los límites de integración, así como identificar los límites de las integrales para calcular el volumen entre dos o más superficies.

Por último, se recuerda la definición de integral por suma de Riemann, para esto se realiza la suma de particiones, donde se comparan las sumas con diferentes particiones y se lleva al estudiante al análisis y reflexión de acuerdo a sus conocimientos previos sobre integrales por sumas de Riemann (ver figura 3).

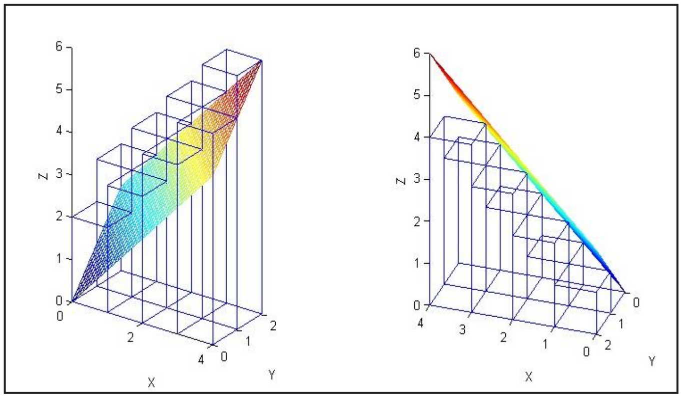


Figura 3. Particiones para obtener la Suma superior y suma inferior de $f(x,y) = x + y$.

Durante la tercera sesión, los estudiantes se dividieron en tres equipos (dos equipos de tres estudiantes y uno de dos estudiantes) para resolver, mediante integración, uno de los siguientes problemas, los cuales se les proporcionaron en hojas impresas y en idioma extranjero (inglés):

1. Determinar el volumen de un cráter, y graficar el cráter con apoyo de la computadora.
2. Resolver una integral doble, por sumas de Riemann.
3. Encontrar el centro de masa de un triángulo en el plano, realizar con cartón o algún material grueso el triángulo y comparar por medio de un procedimiento empírico (utilizando hilo).

Una vez terminada la fase experimental, el curso continuó de forma habitual y una semana después se aplicó el postest, tanto al grupo experimental como al grupo de control, con el propósito de evaluar el aprendizaje de los conceptos de integración múltiple.

Como parte del análisis cuantitativo: (1) se analizaron los resultados del postest, y (2) se realizó un análisis factorial exploratorio al postest con el fin de determinar si existen factores asociados con algún conjunto de variables y que no son visibles a simple vista en los resultados obtenidos.

Los rasgos cualitativos del proceso experimental fueron registrados por los investigadores, durante cada sesión, en una bitácora que incluyó: la asistencia y puntualidad de los participantes; el tiempo empleado en la realización de las actividades; notas de corrección respecto a la redacción de las prácticas, así como una recopilación de opiniones y observaciones específicas para cada una de las prácticas, escritas por parte de los alumnos al final de cada sesión.

Con el objetivo de conocer la opinión de los estudiantes del grupo experimental sobre la calidad del material, se les entregó un cuestionario con 10 preguntas; 6 para valorar del 1 al 10 la medida en que las afirmaciones del cuestionario definen su caso en particular, acompañada de una breve justificación de su evaluación, y 4 preguntas abiertas para externar su opinión.

Análisis de resultados

A continuación se presentan los resultados cuantitativos (pretest y postest), como cualitativos (encuesta de opinión y bitácora del investigador).

Pretest.

Como se mencionó anteriormente las condiciones iniciales de los grupos se determinaron mediante el análisis del pretest. La hipótesis nula supone medias poblacionales iguales ($\mu_1 = \mu_2$) y la hipótesis alternativa plantea medias poblacionales diferentes ($\mu_1 \neq \mu_2$).

La hipótesis alternativa fue seleccionada como bilateral con el fin de reconocer si existe alguna diferencia entre los dos grupos formados. El estadístico de prueba en este caso es $t_c = \frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = 0.972062$

Para los datos del pretest y con un nivel de significancia $\alpha = 0.05$ la región de rechazo se encuentra a partir de $t_{\alpha/2,\nu} = 2.131$.

Como $t_{\alpha/2,\nu} > t_c$ se concluye que no es posible rechazar la hipótesis nula, en consecuencia los datos no muestran evidencia para suponer que los promedios globales en los resultados del pretest sean diferentes.

La figura 4 muestra una gráfica de caja y bigote que muestra la forma en que se comportaron los grupos en el pretest.

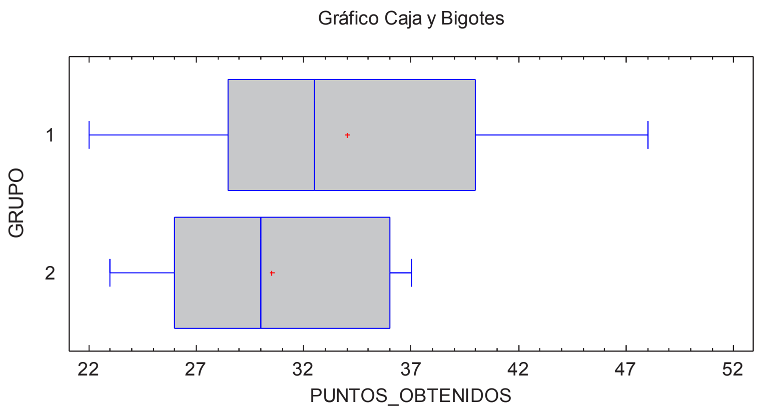


Figura 4. Resultados del pretest en gráfica de caja y bigote.

Postest.

Se propuso como hipótesis nula la igualdad de medias poblacionales ($\mu_1 = \mu_2$), mientras que la hipótesis alternativa se consideró como $\mu_1 > \mu_2$, de una sola cola con el fin de reconocer si las actividades realizadas por los estudiantes influye en la evaluación postest.

El estadístico de prueba utilizado es $t_c = \frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = 3.37373$

Al contrastar el estadístico calculado $t_c = 1.761$ con el estadístico de prueba para los datos del postest $t_{\alpha/2,\nu} = 2.145$. Como $t_{\alpha/2,\nu} < t_c$ se concluye que no es posible aceptar la hipótesis nula, en consecuencia, los datos muestran evidencia para suponer que el promedio global de los estudiantes que realizaron la actividad son mayores al promedio de los estudiantes que no la hicieron.

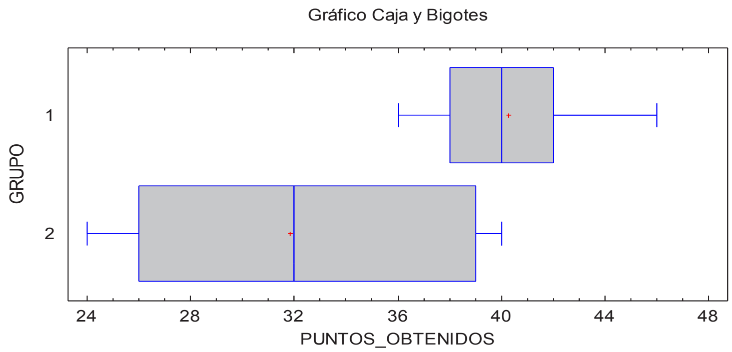


Figura 5. Resultados del postest en gráfica de caja y bigote.

En la figura 5 se muestra una gráfica de caja y bigote que muestra la forma en que se comportaron los grupos en el postest.

Análisis Factorial del Postest

Se usaron varios métodos para determinar cuántos factores extraer. La extracción inicial obtuvo 4 factores con autovalor mayor que 1, que explicaron el 87.963% de la varianza total. También se siguió la sugerencia de Peña (2002) de que el número máximo de factores a extraer ha de ser menor a la mitad del número inicial de variables menos 1.

El primer factor explica un 35.363% de la varianza, mientras que los siguientes explican entre el 24 y el 12 por ciento, cada uno, lo que indica la importancia relativa del primer factor. Este porcentaje proporciona una evidencia de validez del constructo.

Con el objetivo de obtener una estructura más simple se realizó una rotación Varimax, que maximiza la varianza de los coeficientes que definen los efectos de cada factor sobre las variables observadas (Peña, 2002). Tras la rotación, la estructura se clarifica, ya que las variables con correlaciones negativas prácticamente desaparecen.

a) Factor Primero: agrupa con altas puntuaciones los ítems (preguntas 1c, 2b, 3c, 4b y 4c) que piden interpretar la geometría expresada por integrales dobles y tripes cuando las regiones de integración son triangulares en el plano o en el espacio (segmentos de planos).
b) Factor Segundo: Este factor agrupa los problemas (preguntas 2d y 3a) que demandan la interpretación y construcción de integrales con regiones espaciales más complejas.
c) Factor Tercero: agrupa variables (pregunta 1d y 3b) que demandan el análisis de regiones relativamente sencillas en el plano y en el espacio.
d) Factor Cuarto: Agrupa variables (pregunta 4c) que demandan el cambio del orden de integración.

El análisis factorial en el postest, agrupa preguntas con varianza similar. Esta variabilidad caracteriza condiciones que muchas veces no son observables a primera vista. En este caso, permitió caracterizar reactivos con condiciones similares en la geometría involucrada en los ejercicios.

Análisis Cualitativo

En cuanto al aprendizaje de las integrales múltiples para el cálculo de volumen, los alumnos comentan que fueron dinámicas y que al usar Matlab este les ayudó mucho a visualizar los problemas (gráficamente) que se les planteaban, que era calcular el volumen de una diversidad de albercas, lo cual se refleja en el cuestionario de opinión (en la parte de manejo de diversas representaciones semióticas). Ellos concuerdan que es sería muy útil si se implementaran más actividades de este tipo en los diferentes cursos que llevan.

Conclusiones

Con los resultados del postest, se puede afirmar que el uso de diferentes representaciones semióticas influye de manera positiva en el aprendizaje. El análisis cuantitativo muestra que los estudiantes que realizaron la propuesta didáctica obtuvieron un mejor desempeño en comparación al grupo de control.

Se observó que los alumnos del grupo experimental, presentaron mejoras en la descripción de regiones planas y de regiones sólidas para la construcción de integrales dobles y triples, de acuerdo con el registro cualitativo de la investigación.

Además, es posible utilizar *software* de distribución gratuita como *Octave* o *GeoGebra* 5.0.250.0-3D, aunque en este último se tomaría más tiempo la realización de las actividades porque sería necesario que los estudiantes vayan creando gráficas.

Para futuras investigaciones, se podría aplicar esta propuesta a una muestra mayor de estudiantes, en otro contexto, y no necesariamente de una Licenciatura en Matemáticas, pues también se sabe que este problema se tiene por ejemplo en asignaturas de ingenierías que son compatibles con el programa de Teoría de Cálculo II.

Es importante resaltar que existen diversas herramientas estadísticas multivariadas para el análisis de resultados. Estas herramientas ayudan a entender la forma en que se relacionan individuos e incluso variables, como el análisis factorial que se presenta en este trabajo.

Referencias bibliográficas

Benítez, D.; Londoño, N. (2009). Situaciones problemáticas en contexto en el aprendizaje del Cálculo. *El Cálculo y su Enseñanza, 1,* 34-43

Cuevas, C. A.; Pluvinage, F. (2009). Cálculo y Tecnología. *El Cálculo y su Enseñanza, 1,* 45-59

Cuevas, C. A. (2007). Seminario Enseñanza del Cálculo, en Cuevas, A., Pluvinage, F., 23-28 Martínez, S., Cornejo, M. (Coord.) *Memorias del primer Encuentro Nacional sobre la Enseñanza del Cálculo*. México.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X(2),* 213-222

Nesterova, E.; Añorve, E. G. y Puga, K. L. (2010). Aplicación de Winplot para el estudio del comportamiento de Funciones de una variable, en Pantoja, R. Añorve, E., Nesterova, E., 46-52

Ulloa, R. y Cortés J. C. (Coord). *La enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas Progreso y evolución de ambientes de aprendizaj*e. México: Amaya Editores, 52-59

Peña, D. (2002). *Análisis de datos multivariables.* Madrid: McGraw-Hill.

LA CONSTRUCCIÓN DE LA IDEA DE ÁREA A TRAVÉS DE TRATAMIENTOS CUALITATIVOS Y CUANTITATIVOS: EL CASO DE ALUMNOS DE BACHILLERATO

Jorge Alonso Santos Mellado, Claudia Margarita Acuña Soto
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados IPN. (México)
lonchoboy@yahoo.com.mx, claudiamargarita_as@hotmail.com

RESUMEN: El presente trabajo de investigación, parte de la necesidad de considerar la naturaleza cualitativa y cuantitativa del área para su adecuado aprendizaje. Comúnmente se aborda el tema sin considerar sus aspectos cualitativos y cuantitativos simultáneamente. Es necesario que los alumnos integren aspectos de conservación de área, de medición de áreas y de fórmulas en un solo proceso más elaborado y esencial tanto para estudiantes de grados iniciales como para los de grados más avanzados. En educación básica, los estudiantes trabajan inmediatamente con operaciones y fórmulas para calcular áreas. Esto ocasiona que sus principales dificultades, con respecto a la noción de área, estén relacionadas con la incapacidad para cerrar la brecha entre la aproximación tradicional (expresada en el uso de fórmulas) y la aproximación cualitativa que manipula áreas sin el uso de números.

Palabras clave: visualización, área, conservación, manipulables.

ABSTRACT: The present research work, starts from the need to consider the area qualitative and quantitative nature for its adequate learning. The topic is usually focused without considering its qualitative and quantitative aspects simultaneously. Students need to integrate aspects of area conservation, area measurement, and formulas of a more elaborate and essential single process for both initial and advanced grade students. In basic education, students work immediately with operations and formulas to calculate areas. It causes that its main difficulties, with respect to the notion of area, are related to the inability to close the gap between the traditional approach (expressed in the use of formulas) and the qualitative approach that manage areas without using numbers.

Key words: visualization, area, conservation, manageable.

Introducción

Para llevar acabo nuestra investigación, partimos de una revisión de las investigaciones que se han hecho en torno al concepto de área. Hacemos un breve recorrido cronológico, así como una clasificación de los tipos de investigaciones realizadas. Dado que trabajamos con estudiantes del Instituto de Educación Media Superior del Distrito Federal (IEMS-DF), hacemos una descripción de la institución y revisamos sus libros de texto en lo referente al tema que nos interesa. A partir de los elementos teóricos anteriores establecemos como objetivo para nuestra investigación el cerrar la brecha entre el enfoque cualitativo y el cuantitativo del concepto de área. Partimos de la hipótesis de investigación de que los estudiantes requieren desarrollar habilidades específicas para tratar figuralmente las representaciones gráficas de los objetos geométricos.

Además, proponemos como hipótesis de trabajo que una propuesta, para un adecuado aprendizaje del concepto de área, debe tomar en cuenta tanto elementos cualitativos como cuantitativos y debe integrar aspectos de transformación-conservación de área (comparación); de cálculo y medición de áreas y de deducción-utilización de fórmulas de áreas.

Diseñamos un instrumento de investigación que, inicialmente, ofrece diversas estrategias (cuantitativas y cualitativas) para cuantificar y comparar el área de figuras a partir de tres estrategias básicas. Posteriormente propone el problema de comparar el área de dos figuras. Dicho problema de comparación gradualmente se transforma en un problema de medición de áreas. La actividad muestra cómo el medir es un refinamiento del comparar y que puntos cruciales para poder transitar de la una a la otra son: el establecer una unidad de área y el desarrollar estrategias que permitan comparar la unidad de área con el área de una figura dada.

Planteamos como preguntas de investigación: (1) ¿Cuál es la idea de área que tienen nuestros estudiantes al iniciar el proceso de trabajo?; (2) ¿Cómo conciben los estudiantes la relación área-unidad de área? y (3) ¿Qué tipo de generalizaciones realizan los estudiantes al trabajar con las estrategias básicas de comparación de áreas? Como consecuencia de la puesta en marcha de las actividades diseñadas y de los datos recolectados, hacemos algunas consideraciones, establecemos nuestras conclusiones y respondemos las preguntas de investigación: (1) La mayoría de los estudiantes tienen una idea cuantitativa, asociada a fórmulas, mediciones, perímetro. (2) Los alumnos tienen una concepción del área de una figura como el número de unidades completas de área que caben en ella y no sólo eso, sino que persisten en tal concepción. (3) Los alumnos hacen generalizaciones incorrectas, basadas en casos particulares, al aplicar las estrategias básicas de comparación de áreas.

Marco teórico

Debido al enfoque cuantitativo y cualitativo de la investigación, un punto fundamental fue indagar sobre los elementos que podrían posibilitar a los estudiantes un adecuado aprendizaje del área. Dentro de los elementos teóricos, que dan sustento a nuestra investigación, está la visualización. Ella es la base de un adecuado entendimiento de la noción de área. Un aspecto con especial interés con relación al área, es el de la visualización debido a las dificultades perceptuales que entraña (Kospentaris et al, 2011).

Damos un panorama general de la visualización de figuras geométricas en el sentido establecido por Duval (2003). Esta postura nos permite explicarla a partir de diferentes tipos de aprehensión.

Aprehensión perceptiva

Es la más elemental, la primera en ser usada en el transcurso de la etapa educativa y la primera que se desarrolla en la evolución cognitiva. Se refiere a la capacidad de reconocer formas ya sea en dos o en tres dimensiones. Este tipo de aprehensión, implica la capacidad de nombrar las figuras y de reconocer en una figura algunas de sus subfiguras (Deliyianni, Gagatsis, Monoyiou, Michael, Kalogirou y Kuzniak, 2009). También es llamada aprehensión icónica

Aprehensión discursiva

Es el proceso de relacionar las figuras geométricas con sus discursos y propiedades matemáticos e inversamente. Está relacionada con el hecho de que las propiedades matemáticas representadas en una figura no pueden ser determinadas a través de la aprehensión perceptiva, por ejemplo, al aprehender discursivamente el dibujo de un triángulo no sólo se le reconoce por su forma y se es capaz de nombrarlo, sino que también se perciben todas sus propiedades y se puede establecer un discurso con ellas. Este tipo de aprehensión implica conocer las propiedades de las figuras y saber que el aspecto perceptible de una figura depende de sus propiedades matemáticas (Deliyianni et al, 2009).

Aprehensión operatoria

Se produce cuando el sujeto es capaz de llevar a cabo alguna modificación, a la configuración inicial, para resolver un problema geométrico. Se añaden o quitan elementos, se manipulan la figura y sus componentes. Elia et al (2009) mencionan diversas modificaciones posibles. Por ejemplo, cuando a la figura inicial se le añaden trazos, cuando la figura se divide en partes y éstas se reconfiguran (modificación mereológica), cuando se hace una figura de mayor o menor tamaño (modificación óptica), cuando la figura se rota o se cambia de orientación (modificación de lugar). Todo esto, conservando las propiedades de la figura. Todas estas modificaciones pueden ser llevadas a cabo mental o físicamente a través de varias operaciones.

Aprehensión secuencial

Se produce cuando el sujeto es capaz de elaborar una secuencia de instrucciones relativas al uso de instrumentos que permitan construir (o explicar cómo se construyó) una figura desde su inicio y no sólo secuenciar instrucciones para modificar una figura ya existente. En otras palabras, se produce cuando se tiene la capacidad de crear y no sólo de modificar.

El siguiente elemento teórico que discutimos es el de los conceptos figurales, dibujo y figura. Definimos conceptos figurales a partir de los componentes figurales y conceptuales que poseen las figuras geométricas y establecemos la diferencia entre dibujo y figura en el sentido establecido por Laborde y Capponi (1994), esta manera nos permite enfocarnos en los procedimientos que podrían construir aproximaciones cualitativas y cuantitativas del área. Posteriormente, hacemos ver que el saber reconocer los elementos o propiedades relevantes de las figuras es un proceso que se aprende y se enriquece con la mediación de artefactos y manipulables (Clements et al, 1999). Esto a su vez nos permite hablar de los manipulables como instrumentos de mediación semiótica que permiten formular y resolver problemas, es decir, no como meros medios de expresión, sino que son instrumentos para el trabajo matemático.

Método

El taller se llevó cabo en cuatro sesiones durante la semana del 12 al 16 de diciembre de 2011. Cada sesión tuvo una duración de 90 minutos. En el taller se hizo uso del geoplano. Los alumnos lo manipularon al realizar las actividades de tipo cuantitativo. Además, tuvieron el apoyo de un programa computacional que simula un geoplano. Al realizar las actividades con enfoque cualitativo, se trabajó con el recortado de papel, como una forma de recomposición y conservación del área, con el apoyo del *software* geométrico GeoGebra.

Nuestra investigación la realizamos en el plantel Iztapalapa III del Instituto de Educación Media Superior del Distrito Federal (IEMS-DF), ubicado en la Colonia Miravalle de la delegación Iztapalapa del Distrito Federal. Trabajamos con un grupo de primer semestre de preparatoria. Dicho grupo cursaba en ese momento la asignatura de Matemáticas I. Tuvimos a disposición el horario destinado a la asignatura mencionada para implementar nuestro instrumento de investigación. Trabajamos con un grupo de entre diez y quince estudiantes por sesión, con edades entre los 15 y los 17 años.

Nuestro instrumento de investigación consistió de un taller expresamente diseñado, el cual se llevó a cabo en cuatro sesiones durante una semana. Cada sesión tuvo una duración de 90 minutos. Durante la implementación del taller participaron el profesor asignado al curso, un asistente y el investigador encargado.

El instrumento de investigación incluyó actividades, previamente diseñadas, que involucran tanto aspectos cualitativos como cuantitativos del concepto de área. Esto con el fin de cerrar la brecha entre el enfoque cualitativo y el cuantitativo con los que comúnmente se aborda el tema. Según hemos reportado en nuestro marco teórico y a través de nuestra hipótesis de investigación, una propuesta que tome en cuenta tanto elementos cualitativos como cuantitativos debe integrar aspectos de transformación-conservación de área (comparación); de cálculo y medición de áreas y de deducción-utilización de fórmulas de áreas.

Ahora bien, según una de nuestras hipótesis de trabajo, si los alumnos tienen las herramientas necesarias, es decir, si previamente han desarrollado la visualización (en su modalidad de aprehensión operatoria) de la figuras, a través de actividades expresamente diseñadas que involucran fuertemente el uso de artefactos como mediadores semióticos (software geométrico, geoplano, cortado de papel) y son capaces de reconocer los elementos o propiedades relevantes y significativos de las figuras, entonces están en condiciones de incorporar en un solo concepto de área tanto sus aspectos cualitativos como los cuantitativos.

El hecho de que nuestra hipótesis de trabajo requiera de actividades previas está respaldado por el marco teórico, pues con respecto a la visualización, tenemos que visualizar figuras en geometría es algo que se aprende a través de desarrollar habilidades específicas que permiten aprehender las figuras de diversas maneras (Duval, 1999). Por otra parte, es necesario que las personas construyan de manera consciente los componentes y propiedades relevantes de las figuras geométricas como objetos cognitivos. Este proceso requiere la mediación de artefactos y manipulables en las tareas de construcción física. Es importante aprender a hacer clasificaciones de figuras de acuerdo con sus atributos relevantes y, por lo tanto, un punto esencial de la educación es crear actividades que resalten los atributos relevantes de las figuras, lo cual será el inicio de una adecuada visualización matemática de dichas figuras (Clements et al, 1999). Este tipo de aprendizaje debió haberse construido en la infancia, aun así, debe ser reactivado para dar paso a un tratamiento figural.

Dado lo anterior, dividimos nuestro taller en dos etapas. En la primera, se involucra a los estudiantes en actividades geométricas en donde desarrollen la aprehensión operatoria y aprendan a reconocer los elementos relevantes de las figuras con respecto a su área. En tales actividades están presentes, en todo momento, los manipulables como elementos de mediación semiótica. La segunda etapa, basada en las habilidades y estrategias desarrolladas en la primera, integra tanto elementos cualitativos como cuantitativos en un solo concepto de área. La primera etapa consiste en actividades en las cuales los alumnos aprenden a calcular el área de figuras a través de familiarizarse con dos métodos distintos, los cuales están basados en las estrategias básicas de comparación y medición de áreas.

En el primer método o estrategia para calcular áreas los alumnos cuantifican el área de un triángulo, en términos de la unidad cuadrada, a partir de inscribirlo en un rectángulo y aplicar las estrategias básicas de comparación de áreas. Se inicia con triángulos rectángulos en los cuales es posible calcular directamente su área con sólo aplicar las estrategias básicas y posteriormente se cuantifica el área de un triángulo cualquiera de forma indirecta, al inscribirlo en un rectángulo y aplicar varias veces la estrategia básica.

En el segundo método, los alumnos calculan el área de un triángulo. Primero obtienen a partir del triángulo, un paralelogramo con el doble de área. Luego el paralelogramo se transforma las veces que sea necesario en otro que conserva la base y la altura, y por lo tanto el área, del original. Posteriormente, el paralelogramo se transforma en un rectángulo de igual área, en el cual es posible cuantificar directamente su área en términos de la unidad de área. Finalmente, para obtener el área del triángulo original, se divide por dos el área obtenida del rectángulo.

En ambos métodos, en todo momento se discuten las dificultades que los alumnos enfrentan. En la figura 1, se presenta una descripción general de ambos métodos. La parte final de esta primera etapa consiste en aplicar un cuestionario con preguntas relacionadas con las estrategias desarrolladas y problemas donde requieren visualizar figuras geométricas para lograr responder adecuadamente.

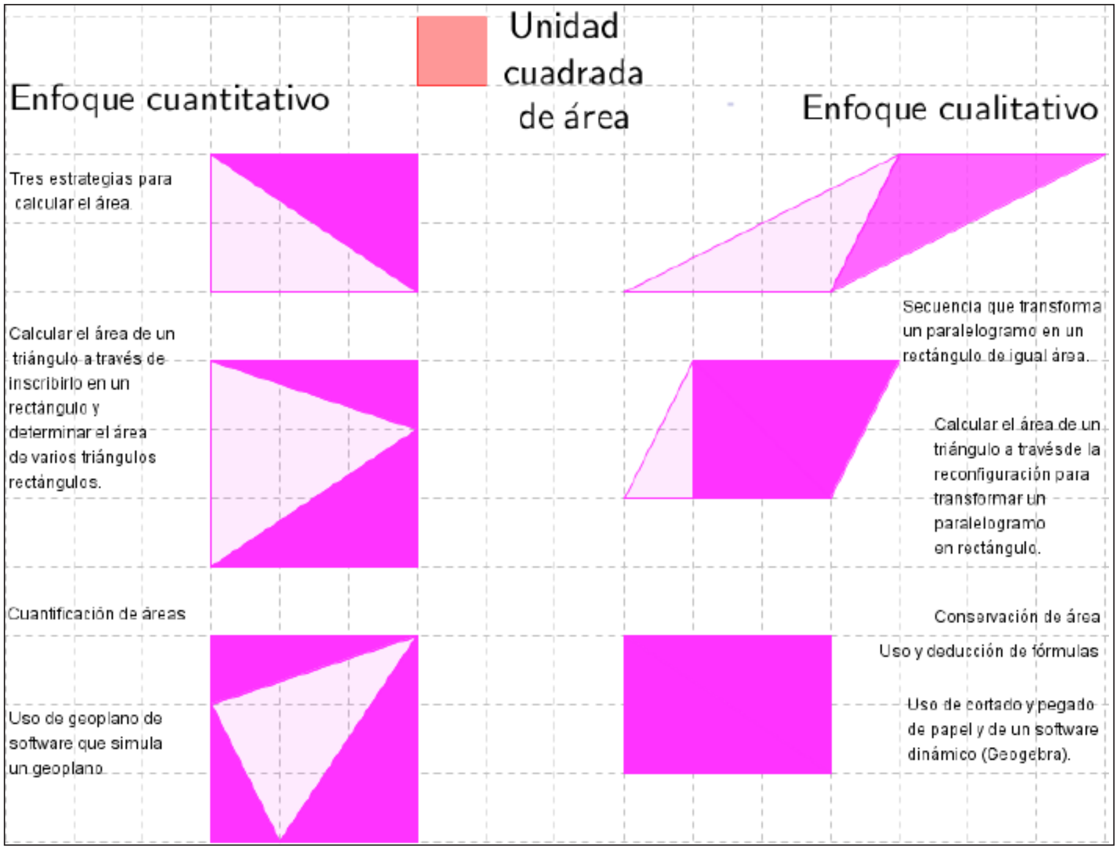


Figura 1. Descripción general de las dos estrategias empleadas. Fuente: Elaboración propia.

Esta segunda etapa consiste en una actividad que inicia con un problema concreto de comparar el área de dos figuras geométricas (dos triángulos). Gradualmente este problema motiva la necesidad de medir el área de una figura en términos de una unidad. Este problema, a su vez, conduce a la aplicación de las estrategias desarrolladas en la primera etapa, lo cual simplifica la medición del área de una figura en términos de la unidad. Finalmente se hace ver que el medir áreas es consecuencia del comparar áreas a través de una unidad y que la fórmula para calcular el área de determinado tipo de figuras, es consecuencia de que todas las figuras de ese tipo tienen propiedades o elementos en común. Se hace explícito que el comparar y medir áreas son procesos que están íntimamente relacionados y que dos elementos que están fuertemente involucrados en esa relación son la unidad y la conservación de área. Con esto se integran tanto aspectos cualitativos como cuantitativos del área en esta actividad. Es importante mencionar que esta actividad supone que los alumnos están familiarizados con diversos elementos que fueron presentados y desarrollados en la primera etapa.

Resultados

- Dotar a los estudiantes de diversas técnicas de comparación y de cálculo de áreas, permite una mejor comprensión de la noción del área de las figuras geométricas tanto en sus aspectos cuantitativos como en los cualitativos.
- Establecer de manera clara cuál es la función, utilidad y finalidad de una unidad de área es un elemento clave que favorece cierre la brecha entre el enfoque cuantitativo y el cualitativo de la noción de área.
- Un elemento que permite articular aspectos cualitativos con aspectos cuantitativos del concepto de área, es el utilizar estrategia de conservación de área no sólo para hacer ver que dos figuras de distinta forma pueden tener igual área, sino como una estrategia que permite transformar una figura en otra en la cual se simplifica el cálculo de su área. Es decir, la conservación de área también es una estrategia de cálculo de áreas.
- Las estrategias cuantitativas desarrolladas promueven la aprehensión operatoria de las figuras y son un buen instrumento que permite que los alumnos desarrollen y ejerciten la visualización de figuras geométricas. Es por esto que pensamos que actividades que involucran estrategias de este tipo son necesarias pues activan y estimulan mecanismos cognitivos que posteriormente permiten un mejor desempeño en tareas de visualización de figuras geométricas. Cabe aclarar que si bien en términos de estricto cálculo de áreas, este tipo de estrategia es menos eficiente que las cualitativas, su valor radica, como ya dijimos, en la visualización de figuras geométricas que propicia y estimula.
- Las estrategias cualitativas desarrolladas permiten no sólo calcular el área de figuras de forma eficiente, sino que permiten justificar el uso de fórmulas para calcular áreas pues muestran, por ejemplo, en caso de los triángulos, que las variables que aparecen en determinada fórmula son precisamente los elementos relevantes y que permanecen constantes al transformar la figura.

- Los alumnos descubren que, en cuanto a comparar o medir áreas, una cualidad o propiedad relevante de las figuras es el ángulo recto. Ellos descubren que conviene transformar la figura en otra que conserva el área pero que tiene propiedades en común con la unidad de área (un ángulo recto), pues esto permite medirlo muy fácilmente en términos de ella. Asimismo, se percatan que es fácil medir el área de una figura cuando comparte una propiedad o elemento (el ángulo recto) con la unidad de área. Los alumnos incorporan la conservación de área como una estrategia de comparación y medición de áreas. De esta manera, para determinar un elemento cuantitativo de una figura (su área, expresada en unidades cuadradas), recurren a propiedades cualitativas de la figura (la transforman en otra con igual área y con un ángulo recto). Esto se muestra en la figura 2.

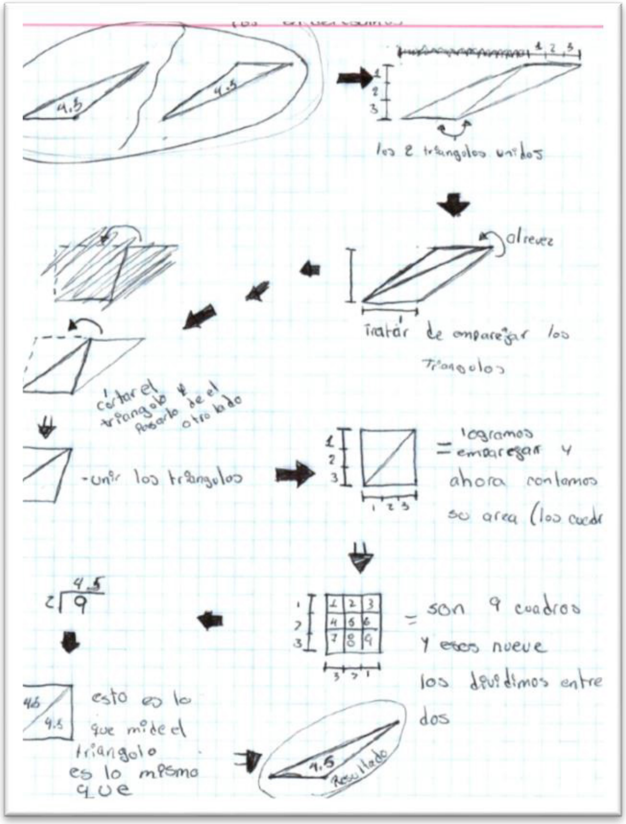


Figura 2. Cálculo del área haciendo uso de estrategias cualitativas y cuantitativas. Fuente: Elaboración de un estudiante.

- Manipulables poco dinámicos les permiten a los alumnos comprender adecuadamente aspectos cuantitativos del concepto de área. Con el uso de este tipo de manipulables, como el geoplano y un *software* que simula un geoplano, es posible calcular el área de figuras geométricas con estrategias cuantitativas. Estas estrategias se llevaron a cabo en la primera sesión de trabajo con los alumnos. Consisten en obtener el área de una figura a partir de obtener el área de algunos triángulos rectángulos y de un rectángulo y operar con ellas.

- Los manipulables dinámicos permiten comprender adecuadamente aspectos cualitativos del concepto de área. Con manipulables dinámicos, como el cortado y pegado de papel y un *software* dinámico como Geogebra, es posible calcular el área de figuras geométricas con estrategias cualitativas. Este tipo de estrategias se desarrollaron en la segunda sesión. Consisten en obtener el área de una figura a partir de transformarla en otra al reconfigurarla y trasladar sus subfiguras.
- Los alumnos fueron capaces de reconfigurar la unidad de área a través de manipular con el geoplano. No lo habían logrado hacer cuando sólo veían y escuchaban en el *software* geométrico. Esto pone de manifiesto lo reportado en el marco teórico: los manipulables tangibles, junto con el lenguaje ordinario y los símbolos matemáticos, permiten formular y resolver problemas. Por lo tanto, podemos decir que, efectivamente, los manipulables no son meros medios de expresión, sino que son instrumentos para el trabajo matemático y que utilizados en la situación adecuada, permiten percibir elementos que a su vez, posibilitan resolver determinados problemas.

Conclusiones

- La unión de materiales manipulables y tareas problemáticas pueden proveer ricas estructuras de validación a los estudiantes. El geoplano aunado a la tarea de calcular el área de un triángulo permiten crear argumentos para validar que no siempre que un triángulo esté inscrito en un rectángulo, tendrá la mitad de su área. El cortado de papel aunado a la tarea de calcular el área de un paralelogramo permiten validar la idea de que un paralelogramo tiene exactamente la misma área que un rectángulo de igual base e igual altura.
- Las estrategias básicas de comparación de áreas proveen, a los estudiantes, herramientas que les permiten abordar satisfactoriamente las tareas propuestas en el taller. Como ya se reportó en la sección anterior, los alumnos fueron capaces de determinar el área de las figuras (cuantitativa y cualitativamente) a través de aplicar las estrategias básicas. Si bien, en algunos casos, inicialmente se presentaron dificultades relacionadas con su adecuado uso (punto a tratar en la siguiente conclusión), se lograron superar. Es así que las estrategias básicas de comparación de áreas, pueden ser una herramienta útil para abordar el concepto del área, tanto en sus aspectos cuantitativos como en los cualitativos.
- El proceso de idealización de las estrategias básicas de comparación de áreas puede derivar en consideraciones equivocadas, como la realizada por algunos de nuestros estudiantes: “El área de un triángulo inscrito en un rectángulo es la mitad de la de éste.”

- Es posible cerrar la brecha entre el enfoque cuantitativo y el cualitativo e incorporarlos en un solo concepto de área. Esto, a través, de fomentar diversos procedimientos (unos enfatizan los aspectos cuantitativos y otros los cualitativos) que permiten calcular el área de figuras en términos de la unidad de área. Evidencia de esto son algunas de las respuestas (mostradas en las imágenes de la sección anterior) que los alumnos dieron cuando se les pidió que explicaran cómo calcularían el área de un triángulo. En ellas se puede apreciar que los alumnos integran tanto elementos cuantitativos como cualitativos.

Referencias bibliográficas

Clements, D. H. y Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420–464). New York: Macmillan.

Clements, D. H.; Swaminathan, S.; Zeitler, M. A. y Sarama, J. (1999). Young Children's Concepts of Shape. *Journal for Research in Mathematics Education* 30(2), 192–212

Deliyianni, E.; Elia, I.; Gagatsis, A.; Monoyiou, A. y Panaoura, A. (2009). A theoretical model of students geometrical figure understanding. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Ed.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 696-705). Lyon, France.

Duval, R. (2003). Voir en mathématiques. En E. Filloy. (Ed.), *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual*. (pp. 41-76.) Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México.

Elia, I.; Gagatsis, A.; Deliyianni, E.; Monoyiou, A. y Michael, S. (2009). A structural model of primary school students' operative apprehension of geometrical figures. En M. Tzekaki, M.; Kaldrimidou, y C. Sakonidis (Ed.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 3 (pp. 1-8). Thessaloniki, Greece: PME.

Kordaki, M. (2003). The effect of tools of a computer microworld on students' strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 177–209

Kospentaris, G.; Spyrou, P. y Lappas, D. (2011). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 77, 105–127

Laborde, C. y Capponi, B. (1994). Cabri Géomètre constituant d'un milieu pour l' apprentinssage de la notion de figure géomètrique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14 (1), 165-210.

EVOLUCIÓN DEL SIGNIFICADO DE ÁNGULO DE ESTUDIANTES DE 4° DE PRIMARIA

Sandra Milena Jiménez Ardila, Viviana Paola Salazar Fino, Leonor Camargo Uribe
Universidad Pedagógica Nacional. (Colombia)
mdma_smjimeneza903@pedagogica.edu.co, mdma_vpsalazarf298@pedagogica.edu.co, lcamargo@pedagogica.edu.co

RESUMEN: Proponemos un análisis de la evolución del significado de atributo medible de un ángulo, a la luz de una teoría de mediación semiótica del profesor que recurre a elementos de la teoría del Signo tríadico de Peirce. La propuesta de análisis se ejemplifica con nueve aproximaciones obtenidas de fragmentos de una clase de geometría con 40 estudiantes colombianos de 4° grado de Educación Básica Primaria.

Palabras clave: semiótica, evolución de significado, ángulo

ABSTRACT: We propose an analysis about evolution of the meaning of an angle measurable attribute, in the light of a theory of semiotic mediation of the teacher that resorts to elements of the theory of the triad Sign of Peirce. The proposed analysis is exemplified by nine approximations obtained from fragments of a geometry class with 40 Colombian students of 4th -grade Primary Basic Education.

Key words: semiotics, evolution of meaning, angle.

Introducción

En el sistema educativo colombiano el objeto ángulo se introduce desde los primeros años de Educación Básica Primaria (1° a 3°), haciendo una aproximación al mismo mediante situaciones de giro; luego, en grados siguientes (4° y 5°) se estudia haciendo referencia a aberturas, inclinaciones, puntas, esquinas, entre otros; en algunos casos, se hace referencia a su atributo medible. El acercamiento se lleva a cabo a través de situaciones estáticas y/o dinámicas, no siempre manteniendo una coherencia en el significado y la situación particular en la que se enmarca, y en ocasiones confundiendo el ángulo con su medida. El ángulo es uno de los objetos de la geometría cuyo significado causa mayor número de dificultades en la construcción de su significado, como lo referencian diferentes autores (Saa, Carrillo, Alarcón, Pelegrín, Sanchéz y Carrillo, 1990; Mitchelmore & White, 1998, 2000; Rotaeche, 2008; D'Amore, Fandiño e Iori, 2014). Esto es debido a la multiplicidad de definiciones de dicho objeto y a que cada representación que hay del mismo, evidencia unos determinados aspectos del objeto, pero no todos.

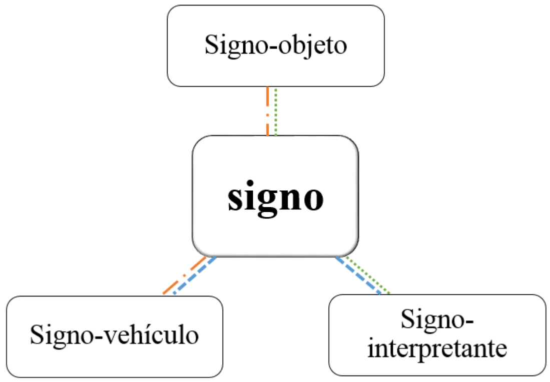
Como parte de una investigación en curso, que se centra en la caracterización de la evolución de significados del objeto ángulo que desarrollan estudiantes de cuarto grado de Educación Básica Primaria de un colegio en Bogotá, Colombia, nos enfocamos en el análisis de los cambios de significado del atributo medible de un ángulo que se hacen evidentes en la interacción comunicativa en clase de geometría. En este artículo queremos destacar la importancia de hacer esfuerzos para que estudiantes de Básica Primaria construyan el significado del atributo medible de un ángulo, a través de diferentes interacciones comunicativas, que impulsan la discusión sobre diferentes aspectos de la definición de ángulo y diferencian el ángulo de su medida.

Marco de referencia

En el marco de la investigación de la cual se realiza el presente análisis, concebimos la clase de matemáticas desde una perspectiva sociocultural como un espacio de interacción social, en el cual, como menciona Camargo (2010), el aprendizaje se da de forma colectiva cuando los individuos participan en actividades comunicativas. En tales actividades se dan interacciones comunicativas que suceden a través de signos. Concordamos con Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012) al pensar la clase como un complejo sistema semiótico mediado por notaciones, simbologías, representaciones gráficas y verbales. El interés por la variedad de signos producidos en la clase de matemáticas vuelca nuestra mirada hacia la semiótica.

Entendemos significado como la compatibilidad entre significados personales –integración de significados personales parciales y provisionales constituidos de forma colectiva en la clase– y matemáticos –la integración de consensos de significados que han sido construidos históricamente por la comunidad matemática–. El 'signo' lo entendemos como el componente primario de los sistemas semióticos –que tienen lugar en la interacción comunicativa– que permiten desarrollar procesos de pensamiento y expresarlos. El 'signo' es una relación triádica resultado de la integración de tres relaciones diádicas entre los siguientes componentes que particularizamos para la comunicación matemática:

- Signo-objeto: objeto matemático al que se alude en la comunicación.
- Signo-vehículo: expresiones verbales o escritas con las que se refiere alguien acerca del objeto matemático. Pueden ser gráficos, gestos, frases, exclamaciones, íconos, entre otros.
- Signo-interpretante: lo producido por el signo vehículo en la mente de quien lo percibe y lo interpreta.



Debido a la multiplicidad de interpretaciones que pueden surgir de un mismo signo-objeto en el aula, Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012) establecen una clasificación para los signo-objeto:

- El signo-Objeto Matemático Real (OMR) es el constructo histórico y cultural; un acuerdo establecido por la comunidad matemática y que sirve de referencia a la comunidad de profesores de matemáticas (Perry, Camargo, Samper, Sáenz-Ludlow y Molina, 2014).
- El signo-objeto inmediato (oi) es un aspecto específico del OMR al que se refiere el estudiante o profesor de manera explícita en la comunicación y que intenta representar con un signo vehículo.
- El signo-objeto dinámico (od) es el aspecto que el receptor infiere del objeto inmediato. El adjetivo dinámico sugiere su naturaleza susceptible a diferentes interpretaciones y experiencias que lo modifican.

En el esfuerzo que hace el profesor en la comunicación para que suceda la evolución de significado, este toma los objetos inmediatos de los estudiantes que considera pertinentes y reajusta, con fines didácticos, los propios. Dada la naturaleza dinámica y adaptable del objeto dinámico del profesor, éste ha sido denominado objeto dinámico didáctico del profesor (odd) (Perry et al., 2014).

Metodología

La información se obtuvo de videograbaciones de 5 sesiones de clase de geometría, con 40 estudiantes de grado cuarto de Educación Básica Primaria (edades entre 9 y 11 años), en las que se puso en juego una trayectoria hipotética de aprendizaje del objeto ángulo. En la investigación participaron: la profesora-investigadora y otras dos profesoras que rediseñaban las sesiones de clase en reuniones de discusión que tenían lugar después de observar los videos de la clase transcurrida. El equipo se reunía para discutir el efecto de las sesiones planeadas y determinar si se necesitaban cambios en la secuencia formulada para ser aplicados antes de la siguiente sesión.

El tipo de estudio corresponde a un experimento de enseñanza (Cobb, 2000), que se llevó a cabo a través de sesiones de práctica, análisis y re diseño de situaciones de enseñanza y aprendizaje, dirigidas a promover la evolución de significados que exhibían los estudiantes. El experimento tuvo como base una trayectoria hipotética de aprendizaje del objeto ángulo que cuenta con cuatro aspectos fundamentales: elementos constitutivos, representación, atributo medible y definición. Consideramos que el aprendizaje del objeto ángulo implica, primero, identificar los elementos que lo determinan (punto, rayo); posteriormente hacer uso de diferentes representaciones simbólicas y gráficas para referirse al ángulo, y establecer la diferencia entre ellas; luego, determinar el factor que diferencia un ángulo de otro (su atributo medible) para construir la unidad de medida y para usar herramientas de medición. La imagen conceptual (no reducida a la definición) se trabajó de forma continua durante las 5 sesiones de clase, de manera que cada vez los estudiantes añadían características más precisas a la imagen conceptual.

El conjunto de datos se construyó identificando, en los videos, momentos en los cuales los estudiantes exhibían significados acerca de alguno de los aspectos mencionados del ángulo, y se transcribieron para su posterior análisis. Para el propósito de este artículo, escogimos algunos fragmentos de la sesión 3, donde se genera una amplia y rica discusión sobre aquello que diferencia a dos ángulos.

Análisis

En la Tabla 1 presentamos la herramienta analítica con la cual se hizo el análisis de los datos. Posteriormente, la organización de los datos relacionados con el atributo medible. El análisis del atributo medible se dividió en dos secciones que ilustran: a) lo que se mide a un ángulo es su amplitud, b) unidad de medida.

Tabla 1. Categorías de análisis

Categorías	Codificación	Descripción
Signos vehículo (estudiante)	*sv-e*	Expresiones verbales, gesticulaciones, diferentes representaciones escritas, acerca del atributo medible.
Objeto inmediato (estudiante)	*oi-e*	Aspecto al que se refieren los estudiantes explícitamente en sus sv con relación al atributo medible
Objeto dinámico (estudiante)	*od-e*	Aspecto del atributo medible de un ángulo que los estudiantes incluyen en sus interpretaciones y que no necesariamente corresponde al oi.
Signos vehículo	*sv-p*	Expresiones verbales, gesticulaciones, dibujos o escritos acerca del

(profesor)		atributo medible.
Objeto dinámico didáctico (profesor)	*odd-p*	Aspecto del atributo medible de un ángulo que el profesor incluye en su interpretación acerca de lo que interpretaron los estudiantes.
Objeto inmediato (profesor)	oi-p	Aspecto al que se refiere explícitamente el profesor en sus sv con relación al atributo medible.

Debido a las observaciones generales realizadas sobre los datos, se crearon dos tablas que organizan el análisis:

a) Lo que se mide a un ángulo es su amplitud

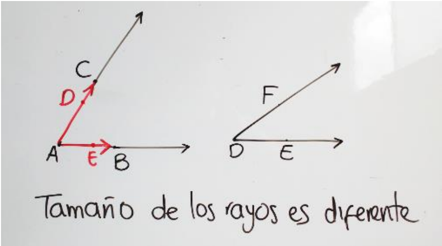
	Observaciones
Sesión 3	Discusión sobre factor diferenciador de ángulos: **tamaño.**
	Discusión alrededor de cuándo un ángulo es más **grande** a otro: longitud de rayos.
	Diferencias entre ángulos. Aparición del término **abierto.**
	Aparición del término **abertura**. La abertura es lo que diferencia a dos ángulos y es lo que se mide.

b) Unidad de medida

	Observaciones
Sesión 3	El grado es **1/360 parte** de la circunferencia
	Discusión acerca del grado para medir magnitudes
	Introducción de la herramienta transportador para medir grados
	Se pueden formar un ángulo nuevo a partir de otros dos

Para ilustrar el uso de la herramienta analítica, a continuación se presenta el análisis de un fragmento de la sesión 3 que corresponde a un momento donde se discute alrededor de cuándo un ángulo es más grande a otro.

22 Profesora: Mi pregunta es: yo tengo este ángulo ABC (refiriéndose a $\angle CAB$) que es el de color negro, y coloreé… e hice otro ángulo DAE (en color rojo). Esos dos ángulos, ¿son iguales?



23 Varios: Sí

24 Profesora: ¿Por qué? Pero miren… ustedes me dicen “son iguales”; pero (…) ustedes acá (señala la frase “Tamaño de los rayos es diferente”) me dijeron: estos dos (señalando los dos ángulos negros) son diferentes porque (vuelve a señalar la frase anterior) el tamaño de los rayos es diferente. Acá el tamaño de los rayos es diferente (señala los ángulos negro y rojo superpuestos). Entonces si dejo esta (refiriéndose a la frase en cuestión) tengo que decir entonces que los ángulos son diferentes.

25 Mateo: Es que acá no estamos hablando de (no se entiende). (…) acá [el rayo] tiene comienzo pero no tiene fin, entonces no se puede decir que el tamaño del rayo…

26 Profesora: Esperen. Alguien que me diga si dejamos esta [frase] o la quitamos.

27 (…)

28 Mateo: Yo digo que se quita. Porque no puede confundir el tamaño de un rayo. Porque puede tener comienzo pero no tiene fin.

29 Profesora: Alguien que explique mejor la idea de Mateo.

30 Mabel: O sea, tú puedes tener así: esa flecha significa que puedes seguir (no se entiende) y no puedes decir exactamente cuál es el tamaño de los rayos.

31 Profesora: (Se dirige a Mabel) Entonces, ¿esos dos ángulos son diferentes?

32 Varios: No.

33 Profesora: ¿Son iguales?

34 Varios: Sí.

35 Profesora: Entonces dejo o quito esta… (Refiriéndose a la frase: “Tamaño de los rayos es diferente”).

36 Varios: Quitas.

En el interpretante de la profesora está la idea mencionada por Mateo, Stephanie y Manuela, relacionada con comparar el tamaño de los ángulos por la longitud de las líneas que representan los rayos. Retoma lo discutido sobre rayo para promover una discusión al respecto. Interviene con la pregunta [22P] y una representación gráfica en la que dos ángulos coinciden pero la representación de los rayos difiere en su longitud. Esto constituye el primer signo vehículo de la profesora (sv-p1). Con este, la profesora introduce como objeto inmediato la comparación de dos ángulos superpuestos cuya representación de los rayos difiere (oi-p1). Como objeto dinámico didáctico (odd-1) inferimos el cuestionamiento a que el atributo medible de un ángulo sea la longitud de la representación de los rayos. Posiblemente la profesora considera que dos ángulos superpuestos con representaciones de rayos de diferente longitud, permiten identificar que el atributo medible de un ángulo no es la longitud de dichas representaciones de los rayos.

El sv-p1 tiene un efecto directo en la interpretación que tienen Mateo y Mabel sobre el atributo medible. En las intervenciones [28M] y [30Mb] (que constituyen el sv-M-Mb1), los estudiantes mencionan una característica de los rayos que componen un ángulo: no es posible determinar su longitud porque son infinitos (oi-M-Mb1). Estas intervenciones permiten suponer que para ellos la longitud de los rayos no es factor diferenciador del tamaño de dos ángulos (od-MMb1), pues aunque los rayos se representan con líneas de longitud diferente, los ángulos superpuestos son de igual tamaño.

Resultados y discusión

Debido al ejercicio de análisis pudimos identificar nueve aproximaciones al atributo medible del ángulo, lo cual entendemos como un conjunto de interacciones en las cuales se exhibe un cambio de significado. Las aproximaciones determinadas son las siguientes:

Atributo medible
Dos ángulos se diferencian por su tamaño
Un ángulo es más “grande” que otro por la longitud de la representación de sus rayos
Dos ángulos superpuestos son iguales
Un ángulo se diferencia de otro por su amplitud
Un ángulo es más abierto que otro

Unidad de medida
El grado es una de las 360 partes iguales de un círculo
El grado como una cantidad de magnitud
Grado como unidad que se mide con un transportador
Grado como cantidad de magnitud que cumple la aditividad

Por cuestiones de espacio no colocamos el análisis de las nueve aproximaciones. Sin embargo, el análisis completo reveló que, en el proceso de aprendizaje de ángulo referido a su atributo medible, los estudiantes pasan por estos momentos de interpretación de forma gradual, lo que representa una invitación a los docentes a vigilar en cuál de ellos se encuentra un estudiante, y si efectivamente su significado evoluciona. Así, es posible observar que al comienzo de las interacciones comunicativas los estudiantes consideran que el atributo medible de un ángulo es el espacio ocupado por su representación gráfica –lo cual es una creencia frecuente en estudiantes de diferentes niveles educativos–. Con el fin de lograr una evolución de significados matemáticos, la profesora recurrió a tareas que permiten visualizar no ejemplos, y centrar la atención hacia la abertura de los ángulos. Posteriormente, estableció la unidad de medida grado y la propiedad aditiva de las medidas de ángulos. Consideramos que este último propósito es un elemento destacado de la secuencia, pues, según Saa et al (1990), generalmente, la enseñanza de la composición de medidas de ángulo en primaria, se hace solo llevando a cabo la suma de números y no teniendo en cuenta sus amplitudes. Posteriormente avanzan hasta hacer referencia a la abertura. Este avance es un propósito del docente al implementar la secuencia de forma premeditada y poner en juego la trayectoria hipotética de aprendizaje.

Tanguay (2016) afirma que la mayoría de estudiantes al finalizar primaria consideran que el ángulo es “algo que se mide en grados”. Para que este significado evolucione hacia un significado matemático, él propone la creación del grado como división de la circunferencia. En nuestra secuencia de enseñanza, retomamos esta idea y se encontró que los estudiantes asociaron el grado con un sector circular, lo que promovió la asociación entre el atributo medible de un ángulo con un sector circular y no con la longitud de los lados de la representación del rayo.

Gracias al diseño de clases participativas que promueven la producción de signos por parte de los estudiantes y tienen en cuenta los significados otorgados a los mismos, el profesor puede conducir la clase a través de discusiones en las que las interpretaciones de los estudiantes convergen hacia aquellas que admite la comunidad matemática de referencia.

Referencias bibliográficas

Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria.* Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Valencia. España.

Camargo, L., Perry, P., Samper, C., Saenz-Ludlow, A. y Molina, O. (2015). Mediación semiótica en pro la construcción de significado de rayo al operacionalizar su definición. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, *33(3)*, 99-116.

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. En Kelly, A. & Lesh, R. (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307–333). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

D'Amore, B., Fandiño, M. e Iori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática*. Bogotá: Editorial Magisterio.

Mitchelmore M.C., White P. (1998). Development of angle concepts: a framework for research. *Mathematics Education Research Journal*. 10(3), 4-27

Mitchelmore M.C., White P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 209-238

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., Sáenz-Ludlow, A. y Molina, Ó. (2014). Teacher semiotic mediation and student meaning-making: A Peircean perspective. En P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol y D. Allan (Eds.) (2014) *Proc. 38th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conf. of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 409-416). Vancouver, Canada: PME.

Rotaeche, R. (2008). *La construcción del concepto de ángulo en estudiantes de secundaria.* Tesis de doctorado no publicada, Instituto Politécnico Nacional. México, D.F.

Saa, M., Carrillo, D., Alarcón, J., Pelegrín, M., Sanchéz, E. y Carrillo, E. (1990). *Los ángulos: recursos para su aprendizaje*. Murcia: Ediciones de la Universidad de Murcia.

Sáenz-Ludlow, A. y Zellweger, S. (2012). The teaching-learning of mathematics as a double process of intra- and inter-interpretation: A Peircean perspective. En Pre-proceedings of the 12th ICME. Recuperado en mayo de 2015 de http://www.icme12.org/data/ICME12_Pre-proceedings.zip

Tanguay, D. y Venant, F. (2016). The semiotic and conceptual genesis of angle. ZDM Mathematics Education, 48, 1–12. dx.doi.org/10.1007/s11858-016-0789-5

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES A TRAVÉS DE LA VISUALIZACIÓN

Beatriz Adriana Vega Herrera, José David Zaldívar Rojas, Noelia Londoño Millan
Universidad Autónoma de Coahuila (México)
betyvega@gmail.com, david.zaldivar@uadec.edu.mx, noelialondono@uadec.edu.mx

RESUMEN: Cuando se inicia el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales en Secundaria (13-15 años), comúnmente se enfatizan los métodos algebraicos, con poca atención al gráfico y nula relación con el estudio de la función lineal. Más aún, existen dificultades y confusiones por parte de los estudiantes para interpretar la *solución de un sistema* (Ochoviet, 2009). La investigación que proponemos implica un acercamiento didáctico alternativo que considera a la visualización y la variación de parámetros como elementos indispensables para introducir al estudio de los Sistemas de Ecuaciones en nivel Secundaria y su relación con el estudio de la función lineal y posteriormente la identificación del tipo de solución del sistema según los parámetros involucrados en el modelo lineal. Se reportan los avances relativos a la primera parte de dicha propuesta.

Palabras clave: visualización, sistemas de ecuaciones lineales, Secundaria.

ABSTRACT: When the study of linear equations systems is started in secondary school (13-15 year-old students) , the algebraic methods are commonly emphasized, with little attention to the graph and no relation with the study of the linear function. Moreover, the students experience difficulties and mistakes to interpret the solution of a system (Ochoviet, 2009). The research we propose involves an alternative didactic approach that considers parameter visualization and variation as essential elements to introduce the study of the systems of equations in secondary school, as well as, its relation with the study of the linear function, and later, the identification of the type of answer of the system according to the parameters involved in the linear model. Progresses related to the first part of this proposal are reported.

Key words: visualization, systems of linear equations, Secondary school.

Introducción

Cuando hablamos de la palabra solución en nuestra vida cotidiana pensamos en muchas cosas: ya está resuelta nuestra vida, el bienestar emocional, poder dormir en paz, me quité un peso de encima, etcétera, pero cuando hablamos matemáticamente, los estudiantes están familiarizados en llegar a un resultado: el valor de una incógnita, el perímetro de cinta que necesita una caja, las raíces que se obtienen usando la fórmula general, entre otras. Pero, cuando se habla en el tema de Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas de que *"el sistema no tiene solución"*, la situación no es tan trivial. Como profesores, nos podemos encontrar con reacciones de los estudiantes como las siguientes: ¿por qué no?, ¿para qué se nos enseña si no hay "respuesta"? Y en pocas ocasiones se lleva a reflexionar al estudiante del porqué de esta afirmación. No damos una explicación amplia sobre tal hecho, solamente nos concretamos a decir: *la raíz negativa, si las rectas son paralelas, la división por cero no tienen solución*, etcétera.

El estudio de los sistemas de ecuaciones lineales da inicio en el segundo grado dentro del bloque 5 de los programas de estudio de nivel Secundaria en México, este tema se ubica en el eje de Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico (SEP, 2011). De manera tradicional, los estudiantes comienzan con el aprendizaje de la resolución de problemas que implican el planteamiento de un sistema de ecuaciones de 2x2 utilizando principalmente, los métodos analíticos (métodos de Suma y Resta, Igualación y Sustitución). En ocasiones, no se concluye con buen detalle este tema, y mucho menos se pone atención a la representación gráfica donde se reconozca significados del punto de intersección de las gráficas como la solución simultánea del sistema (Ochoviet y Octak, 2011) y sobre todo existe una nula relación con los temas de función lineal, es decir, los sistemas de ecuaciones son vistos como un trabajo con ecuaciones, pero sin ninguna reflexión sobre la función lineal involucrada o de los parámetros involucrados. Incluso, la enseñanza del tema se hace de forma similar en diferentes países (Ochoviet, 2009). Como se puede apreciar, la inclusión del tema de Sistemas de Ecuaciones Lineales dentro del currículo se realiza sin importantes cambios, ni cuestionando su importancia o inclusión.

En una investigación relativa a la noción de solución de un sistema de ecuaciones lineales, Ochoviet (2009) reporta que los estudiantes de bachillerato ante la pregunta que se presenta en la figura 1, asocian la "solución de un sistema" como el punto de corte de dos rectas.

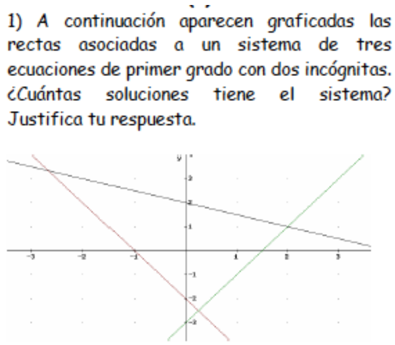


Figura 1. Pregunta realizada a estudiantes (tomado de Ochoviet, 2009, p. 20)

Ante la pregunta, varios de los estudiantes mencionan que *"hay tres soluciones porque hay tres puntos de corte" o "si se cortan una sola vez es una solución si se cortan dos veces o más, hay más soluciones"*(Ochoviet, 2009, p. 21). Aunado a la dificultad anterior, en la misma investigación mencionada, algunos estudiantes consideran a un sistema de ecuaciones como algo con lo que se puede hacer algo, es decir, resolverlo, de manera, que las reflexiones de los estudiantes giran en torno a un método para obtener una solución y no sobre las condiciones que debe cumplir el sistema para que exista solución. Lo anterior posiblemente se debe a la importancia que se les da en la enseñanza a los métodos de solución por sobre la comprensión de las características de los tipos de solución y su relación con la naturaleza del sistema en sí mismo.

Es así que consideramos en la presente investigación atender a las dificultades anteriormente mencionadas en cuanto a la noción de solución de un sistema de ecuaciones lineales, proponiendo una alternativa didáctica donde se considere a la visualización como elemento central que permita al estudiante desarrollar una alternativa de solución de un sistema de ecuaciones basada en la variación de los parámetros involucrados en las ecuaciones lineales que componen al sistema. De esta manera, se asume como hipótesis de investigación que *la visualización de las relaciones lineales involucradas en el sistema a través de la variación de parámetros permitiría generar nuevos significados asociados a la solución del sistema que permitirá caracterizar el tipo de solución.* Lo anterior permite modificar la enseñanza empleando en primer lugar la visualización para enseñar un método gráfico alternativo para posteriormente trabajar con los métodos analíticos.

El objetivo de este artículo es mostrar avances sobre una propuesta didáctica que pretende potencializar dos conceptos importantes: la visualización y los significados que se pueden generar con respecto a la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, y con ello, aportar a la mejora de los procesos de enseñanza-aprendizaje de dicho concepto matemático.

Marco conceptual: la visualización en el aprendizaje de las matemáticas

Este trabajo describe la importancia que tiene la visualización en el aprendizaje de las matemáticas. Generalmente, se considera que la visualización solo es importante en el estudio de la geometría, sin embargo, se demuestra que también lo es en otras disciplinas tales como el álgebra; por ejemplo, cuando los estudiantes interpretan el comportamiento de una relación lineal. De hecho, el estudio de la visualización ha recibido mucha atención como tema de numerosas investigaciones en Matemática Educativa desde hace algunos años (ver por ejemplo: Hitt, 1997; Cantoral y Montiel, 2001). Duval (1988) señala que la conversión del sistema algebraico al gráfico es más fácil que el inverso; es decir, del gráfico al algebraico. Se sabe que en general, la enseñanza de la matemática se inclina hacia el desarrollo de algoritmos y de lo algebraico. Los profesores de matemáticas enfatizan el trabajo sobre los procesos algebraicos restándole importancia a los procesos visuales.

Zimmermann y Cunningham (1990) citados por Cantoral y Montiel (2001) mencionan:

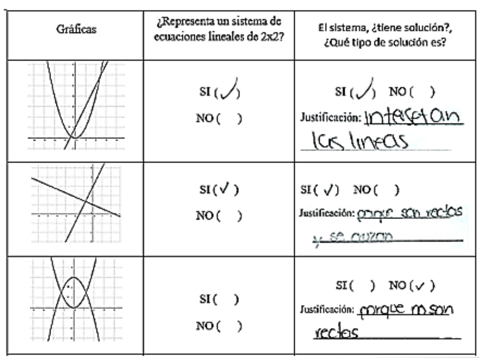
> *en la visualización matemática lo que interesa es precisamente la habilidad del estudiante para dibujar un diagrama apropiado (con lápiz o papel o en algunos casos con computadora) para representar un concepto matemático o problema como una ayuda en la resolución del problema*. Dentro de nuestra investigación, se considera a la Visualización como *la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende. De modo que al realizar la actividad de visualización se requiere de la utilización de nociones matemáticas asociadas a los ámbitos numéricos, gráficos, algebraicos o verbales, pero exige también del uso de un lenguaje común para explicar ciertos fenómenos e incluso para describir experiencias vivenciales* (Cantoral y Montiel, 2001).

Aspectos metodológicos y avances de resultados

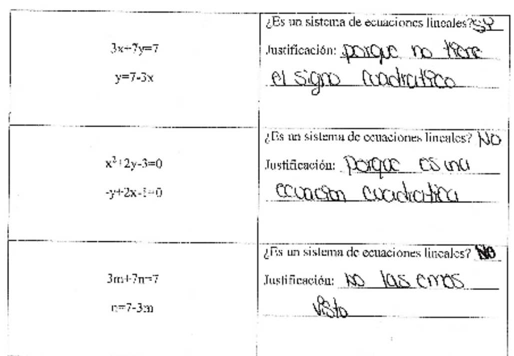
Se pretende mostrar avances sobre el tratamiento didáctico-metodológico que se implementó con un grupo de 25 estudiantes de segundo grado de nivel Secundaria en Saltillo, Coahuila, México, con respecto al aprendizaje del tema de solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas. Cabe mencionar que para este grupo de estudiantes se trataba del primer contacto con el tema de sistemas de ecuaciones, por lo que se decidió proponer una propuesta alternativa durante el curso, a manera de un experimento de enseñanza, donde en un primer momento del curso se trabajaría con los estudiantes la variación de los parámetros A y B del modelo lineal $Y=Ax+B$, para posteriormente involucrar una pareja de funciones lineales a manera de sistema de ecuaciones y caracterizar de manera gráfica y por medio de las características de los parámetros y sus relaciones, los tipos de solución que el sistema pudiera tener según la naturaleza de las ecuaciones involucradas. En nuestra propuesta, se usa en algunos casos la tecnología (Geogebra) y normalmente las herramientas básicas de cualquier estudiante: lápiz y papel. Todos los diseños que se trabajaron fueron tomando el plano cartesiano como base, observando en cada uno las representaciones generadas, las respuestas documentadas que se iban obteniendo por parte de los estudiantes con respecto a la información visual que se iba generando en cada una de los diseños que conformaron a la propuesta. De manera que nos basamos en los trabajos de Cantoral y Montiel (2001) para realizar una alternativa didáctica dentro del aula de clases, haciendo uso de la variación de los parámetros para caracterizar el comportamiento de una recta a través de los mismos.

Como ya se mencionó, en algunas de estas fases se aplicaron secuencias didácticas que privilegian la visualización de los parámetros de un modelo lineal, con la finalidad de que el estudiante al momento de llegar al sistema de ecuaciones lineales sea capaz de identificar el tipo de solución del sistema, empleando un análisis de la variación de parámetros para caracterizar el tipo de solución del sistema. A continuación se presentan las fases de la investigación, que incluye una fase de diagnóstico a estudiantes de tercer grado y la propuesta de intervención de enseñanza que se implementó al grupo de estudiantes de segundo grado de secundaria. Durante las fases, la mayoría del trabajo realizado por los estudiantes se realizó a papel y lápiz. Las implementaciones se realizaron durante la sesión regular de clases del grupo que consistía en sesiones de clase de alrededor de 50 minutos por clase. Sólo durante una de las tareas en la última fase se utilizó un recurso tecnológico que consistió en el uso del Geogebra.

1. Fase 1. Examen diagnóstico. En esta fase se realizó un examen diagnóstico a 60 estudiantes de tercer grado de secundaria para observar las dificultades que ellos tienen al momento de identificar la solución de un sistema de ecuaciones lineales en el plano cartesiano. El análisis de las respuestas de dicho diagnóstico confirma lo mencionado por Ochoviet (2009) en cuanto a que los estudiantes presentan dificultades para identificar sistemas de ecuaciones lineales de los que no lo son y sobre los significados de solución gráfica y analítica de un sistema. Aquí presentamos algunas evidencias que se obtuvieron de dicho examen diagnóstico (Ver figura 2).



Gráficas	¿Representa un sistema de ecuaciones lineales de 2x2?	El sistema, ¿tiene solución?, ¿Qué tipo de solución es?
	SI (✓) NO ( )	SI (✓) NO ( ) Justificación: intersetan las lineas
	SI (✓) NO ( )	SI (✓) NO ( ) Justificación: porque son rectas y se cruzan
	SI ( ) NO ( )	SI ( ) NO (✓) Justificación: porque no son rectas



$3x+7y=7$ $y=7-3x$	¿Es un sistema de ecuaciones lineales? Si Justificación: porque no tiene el signo cuadratico
$x^2+2y-3=0$ $-y+2x-1=0$	¿Es un sistema de ecuaciones lineales? NO Justificación: porque es una ecuacion cuadratica
$3m+7n=7$ $n=7-3m$	¿Es un sistema de ecuaciones lineales? NO Justificación: no las emos visto

Figura 2. Algunas respuesta del examen de diagnóstico (tercer grado)

De acuerdo con las respuestas se puede mencionar que los estudiantes de tercer grado tienen dificultades al momento de identificar algebraica y gráficamente un sistema de ecuaciones, además, que algunos son capaces de identificar un polinomio lineal de uno cuadrático, sin embargo, no pueden identificar el tipo de polinomio de manera gráfica, es decir, existen dificultades en el registro gráfico.

A partir de la confirmación de las dificultades con el tema obtenidas en el examen diagnóstico, es que se realiza una intervención con un grupo de estudiantes de segundo grado quienes iban a tener un primer contacto con el tema de sistemas de ecuaciones lineales. Para ello, se consideraron dos fases en la intervención: la fase de la variación de parámetros en la función lineal y la fase de alternativa para la enseñanza de un sistema de ecuaciones basada en la variación de parámetros. Nuestra propuesta se basa en la visualización de los parámetros de una función lineal y los efectos que tienen dichos parámetros en el comportamiento de la misma, de manera que cuando se conjunten dos funciones, a manera de sistema en un mismo plano cartesiano, se puedan realizar caracterizaciones del tipo de solución a partir de los parámetros de las funciones lineales y de sus comportamientos gráficos en conjunto. A continuación mostramos la manera en la que se desarrollaron las siguientes dos fases y algunos resultados preliminares del análisis de las producciones de los estudiantes. Cabe mencionar que nuestros análisis se basan únicamente en las producciones escritas de los estudiantes cuando éstos respondieron a hojas de trabajo que se les aplicaba en cada sesión mientras duró la implementación de la alternativa didáctica que propone nuestro trabajo.

2. Fase 2. La variación de parámetros. Esta fase consistió en dar un enfoque alternativo a la función lineal, trabajando más en la visualización y la variación de los parámetros del modelo lineal $Y = Ax + B$. Durante ocho sesiones de clases repartidas en dos semanas de clases, se trabajó con el grupo completo de segundo grado de nivel Secundaria en Saltillo. Durante las sesiones se introdujeron los conceptos de pendiente y ordenada al origen como parámetros del modelo lineal. De manera que la pendiente tendrá que ver con la forma con la cual la inclinación de la recta se controla, mientras que el parámetro B se refiere a la traslación de la recta sobre el eje vertical (Ver Figura 3). Se trata de una forma particular de entender a la visualización de las funciones. Dicha alternativa didáctica se dividió en seis hojas de trabajo, presentando aquí alguna parte de ellas.

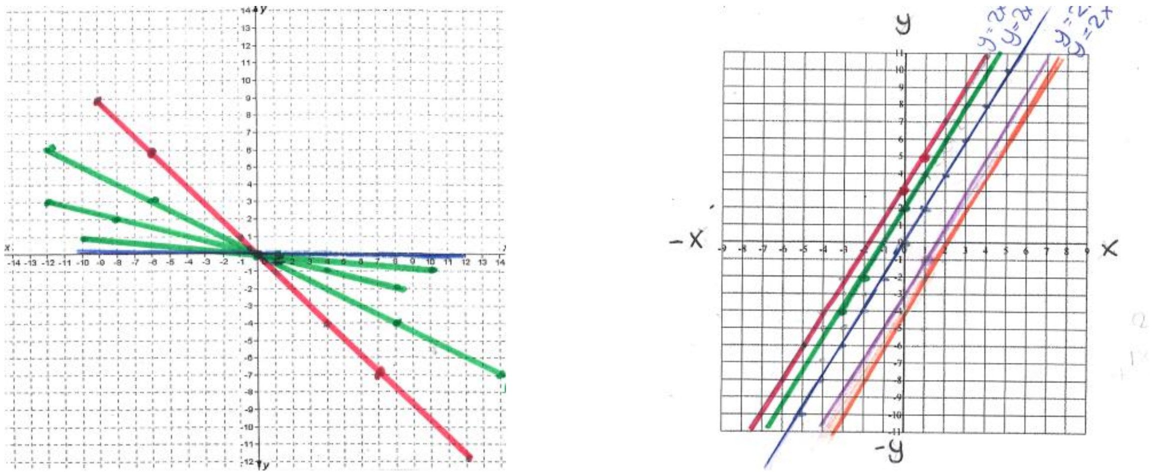
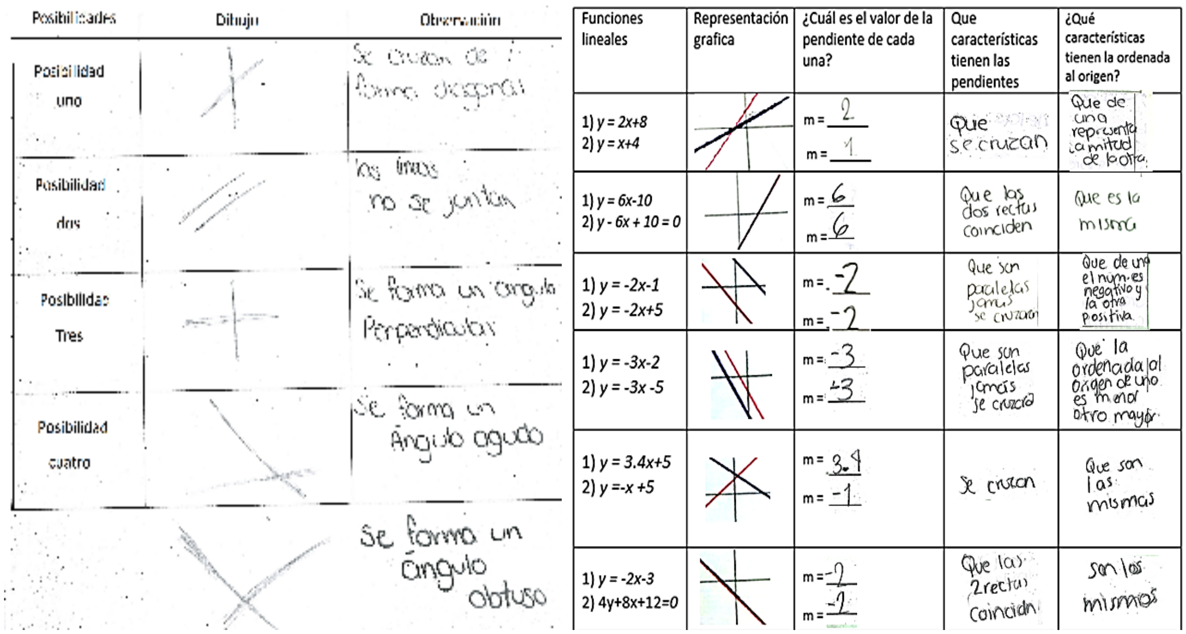


Figura 3. La Visualización de los parámetros A y B en el modelo Lineal. Algunas respuestas de estudiantes de segundo grado

De nuestros resultados preliminares durante esta fase de acuerdo a las producciones escritas de los estudiantes, podemos ver que entre las dificultades de los estudiantes se encuentra que un porcentaje de estudiantes consideran a gráfica de la recta sólo como un segmento determinado por la tabla de valores que los estudiantes debían completar para formar la gráfica, y no como una recta infinita. Esto se debe probablemente a que los estudiantes consideran solamente como la gráfica dentro del intervalo dado en la tabla. Sin embargo, los estudiantes son capaces de identificar el comportamiento de las gráficas a partir de las características de la pendiente y de la ordenada al origen.

3. Fase 3. Sistema de Ecuaciones con variación de parámetros. En esta tercera fase, implementada unas semanas posteriores a la fase dos, para ir de acuerdo al plan de estudios de los estudiantes, se trabajaron con diseños planteados para que los estudiantes, por medio de la visualización y la variación de parámetros, sean capaces de identificar el tipo de solución de un sistema de ecuaciones lineales. Esta etapa, que se desarrolló durante una semana, consistió en discutir con los estudiantes a partir de los parámetros involucrados, una pareja de líneas rectas y encontrar un patrón en los parámetros de manera que se caracterizara un tipo de solución. Por ejemplo, si un par de líneas rectas tenían la misma pendiente pero diferentes ordenadas al origen, entonces la pareja de rectas nunca se intersecan, con lo cual, se podría caracterizar al sistema como *sin solución.* Mientras que si las rectas tenían diferentes pendientes, podían tener un solo corte, lo cual caracterizaría al sistema como con una *única solución.*

   El tratamiento didáctico que se llevó a cabo con los estudiantes consistió en una serie de actividades donde ellos tenían que realizar tareas de *construcción* o de *interpretación,* según Leinhardt, Zaslavsky y Stein, (1990) (Ver figura 4).



Posibilidades	Dibujo	Observación
Posibilidad uno		Se cruzan de forma diagonal
Posibilidad dos		las lineas no se juntan
Posibilidad Tres		Se forma un angulo Perpendicular
Posibilidad cuatro		Se forma un Angulo agudo
		Se forma un angulo obtuso

Funciones lineales	Representación grafica	¿Cuál es el valor de la pendiente de cada una?	Que características tienen las pendientes	¿Qué características tienen la ordenada al origen?
1) $y = 2x+8$ 2) $y = x+4$		m = 2 m = 1	Que se cruzan	Que de una representa la mitud de la otra
1) $y = 6x-10$ 2) $y - 6x + 10 = 0$		m = 6 m = 6	Que las dos rectas coinciden	Que es la misma
1) $y = -2x-1$ 2) $y = -2x+5$		m = -2 m = -2	Que son paralelas jamas se cruzaran	Que de una el num. es negativo y la otra positiva
1) $y = -3x-2$ 2) $y = -3x -5$		m = -3 m = -3	Que son paralelas jamas se cruzara	Que la ordenada al origen de uno es menor otro mayor
1) $y = 3.4x+5$ 2) $y = -x +5$		m = 3.4 m = -1	Se cruzan	Que son las mismas
1) $y = -2x-3$ 2) $4y+8x+12=0$		m = -2 m = -2	Que las 2 rectas coincidn	son los mismos

Figura 4. Tareas de Construcción e Interpretación implementadas a los estudiantes

Es importante mencionar que al momento de la escritura de este reporte, los investigadores se encuentran en el análisis de las producciones de los estudiantes en esta fase de la alternativa propuesta por la investigación. Se espera aportar elementos que puedan caracterizar la forma en la cual los estudiantes visualizan durante estas tareas de interpretación y de construcción la solución de un sistema de ecuaciones lineales cuando se implementa una alternativa basada en la variación de los parámetros de una función lineal y sus características gráficas.

Comentarios finales

La propuesta que se presentó en apartados anteriores y los resultados preliminares durante las fases 1 y 2, busca, en síntesis, aportar experiencias vividas en el aula de clase al implementar una alternativa visual para el tema de sistemas de ecuaciones lineales de tal manera que se permita al estudiante resignificar la noción de solución de un sistema de ecuaciones por medio de la variación de parámetros. Esperamos aportar a la comunidad de profesores evidencias de las habilidades y dificultades que los estudiantes tuvieron en la transición de la función lineal al tema de sistemas de ecuaciones, para que en un futuro se considere nuestra alternativa didáctica como una forma plausible para introducir al estudio de sistemas de ecuaciones lineales relacionándolo con el tema de funciones lineales, contenidos que no deberían parecer desconectados.

De acuerdo a un análisis preliminar de los datos y evidencias con las que se cuentan, hemos notado diversas dificultades en el tema de graficación con los estudiantes y algunas dificultades con la noción de función lineal, tal y como Leinhardt, et al. (1990) han reportado.

Nuestros análisis se están encaminando a caracterizar los tipos de tareas que se le presentaron a los estudiantes y qué elementos visuales utilizan, las representaciones que emplean y el tipo de formulaciones que ponen en juego los estudiantes al momento de discutir sobre la noción de solución de un sistema de ecuaciones lineales. Esperamos aportar con ello una propuesta de intervención didáctica en dicho tema que considere el rol de la graficación y la visualización en la construcción de ideas matemáticas en estudiantes de Secundaria (Ver figura 5).

Figura 5. Trabajo con Geogebra

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. &Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático.* Prentice Hall & Pearson Educación: México.

Hitt, F. (1997). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Educación Matemática,* 10(2), pp. 23-45.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. &Stein, M. (1990). Functions Graphs and Graphing: tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research 60*(1), 1-64.

SEP (2011). *Programa de Estudios 2011, Guía para el maestro*, Educación Básica Secundaria, Matemáticas.

Ochoviet, C. (2009). *Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.* Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Ochoviet, C. & Oktac, A. (2011). Comprender los resultados de investigación: La función docente de investigador en la enseñanza de la matemática educativa. En G. Buendía Ábalos (Coord.): *Reflexión e investigación en Matemática Educativa* (pp. 53-80) México: Editorial Lectorum.

MATEMÁTICA FORENSE: GÉNESIS DE UNA ASIGNATURA

Adriana Gómez Reyes, Ángel Homero Flores Samaniego
Universidad Autónoma de Coahuila (México)
betyvega@gmail.com, david.zaldivar@uadec.edu.mx, noelialondono@uadec.edu.mx

RESUMEN: El trabajo de un científico forense consiste en la reconstrucción de hechos, la elaboración de hipótesis plausibles que lleven a descubrir la verdad sobre tales hechos y sus causas; debe tener argumentos y evidencias que prueben la veracidad de sus hipótesis; poseer una forma de razonamiento que le permita hacer inferencias que le lleven a conclusiones razonables. En este reporte se darán los pormenores de un proceso que llevó a la implantación de una asignatura de matemática como materia optativa en Licenciatura en Ciencia Forense de la UNAM; y algunos resultados de la aplicación piloto del curso a estudiantes de la tercera generación de la licenciatura.

Palabras clave: ciencia forense, multidisciplinariedad

ABSTRACT: The work of a forensic scientist consists in the reconstruction of facts, the elaboration of plausible hypotheses that lead to discover the truth about such facts and their causes; it must have arguments and tests that prove the veracity of their hypotheses; it must have a form of reasoning that allows him to make inferences that lead him to reasonable conclusions. In this report will be given the details of a process that led to the implementation of a subject of mathematics as an elective subject in the Forensic Science degree at the Mexican National Autonomous University (UNAM); and some results of the experimental implementation of the course to students of the third generation of the degree.

Key words: Forensic Science, multidisciplinary

Introducción

La ciencia forense amalgama una serie de disciplinas, desde la jurisprudencia, hasta la química, pasando por la física y las ciencias sociales. El trabajo de un científico forense, ya sea en una escena de crimen o en un laboratorio, es básicamente el de la reconstrucción de hechos, la elaboración de hipótesis plausibles que lleven a descubrir evidencias y, finalmente, la verdad sobre tales hechos y sus causas; se deben tener los argumentos y las evidencias que prueben la veracidad de sus hipótesis; debe poseer una forma de razonamiento que le permita hacer una concatenación lógica de ideas que le lleven al esclarecimiento de los hechos (Facultad de Medicina, 2013).

Por su parte, consideramos la matemática como un cuerpo de conocimiento sobre entes abstractos, como números, figuras geométricas y símbolos, con un lenguaje único que sirve para expresar y comunicar ideas sobre los objetos matemáticos y las relaciones entre ellos. Se considera una ciencia, en cuanto a que hace una explicación de la realidad a través de la matematización (abstracción a través de objetos matemáticos) de los fenómenos sometidos a estudio. Es una herramienta que sirve para plantear y resolver problemas en todos los ámbitos del conocimiento. Asimismo, se considera meta-ciencia, en tanto que estudia los entes matemáticos abstractos por sí mismos sin buscarles conexión alguna con la realidad (SUMEM, 2014).

En el presente reporte de investigación se darán los pormenores de un proceso que llevó a la implantación de la asignatura *La Matemática en Ciencia Forense* como una materia optativa del primer semestre de la Licenciatura en Ciencia Forense, carrera multidisciplinaria, de reciente creación en la UNAM; y los resultados de la impartición de un curso piloto a estudiantes de la tercera generación de la licenciatura.

Esta investigación forma parte de una más extensa encaminada a definir lo que hemos llamado Matemática Forense, cómo este cuerpo de conocimientos puede influir en la actividad y la forma de pensar de un científico forense; y sus implicaciones en la formación de científicos forenses.

Desarrollo

En la instrumentación de la Licenciatura en Ciencia Forense se plantea como parte del perfil de ingreso que el estudiante debe poseer “Conocimientos básicos de matemáticas...” y “Razonamiento lógico”. Mientras que en el perfil intermedio se dice que el alumno, al finalizar el cuarto semestre: “Analiza las diferencias de los distintos tipos de investigación entre las áreas de química, física, matemáticas, biología y medicina”. “Utiliza el razonamiento matemático para comprender la física y la química.” Finalmente, se dice que el egresado utiliza “los métodos estadísticos para el análisis de datos y los de probabilidad de ocurrencia de los hechos.”

En el Plan de Estudios se incluyen las materias Estadística Forense I, en el segundo semestre, y Estadística Forense II, en el quinto. En éstas se contemplan temas de matemática como lógica matemática y temas básicos de álgebra lineal, funciones matemáticas y trigonometría. Pero es posible observar que las materias no responden cabalmente con lo planteado dicho plan con respecto a los perfiles de sus estudiantes. Parece ser que la intención de los diseñadores de los programas fue incluir en las dos materias todos los temas de matemática que se pudieran utilizar en la carrera. En la práctica se observa que los profesores de estadística no se conciben a sí mismos como profesores de matemática, por lo que concentran su trabajo en los temas de estadística.

Durante la instrumentación inicial de la carrera se observó que los estudiantes tenían fallas en el conocimiento matemático necesario para entender los contenidos de asignaturas como Física Mecánica o Química General. Por consiguiente, se decidió impartir un taller de matemática en el segundo semestre cuyo objetivo era solventar las fallas encontradas en los estudiantes.

Debido al carácter remedial de dicho taller, no se consiguieron buenos resultados pues el curso tuvo un enfoque tradicional en el que se vio lo que los estudiantes ya deberían saber, sin mejores resultados de los obtenidos previamente.

A partir de esta experiencia se planteó un proyecto de investigación con el propósito de fundamentar la necesidad de reestructurar la enseñanza de la matemática en la Licenciatura en Ciencia Forense de la UNAM, y proponer asignaturas con un enfoque de enseñanza-aprendizaje acorde con los objetivos y las características de la carrera. Para esto se diseñó el proyecto con dos perspectivas: la influencia en el Plan de Estudio de la Licenciatura en Ciencia Forense; y la formación de profesores-investigadores de matemática en Ciencia Forense.

El proyecto está pensado para un periodo de tres años escolares (agosto de 2014-julio de 2017). La primera parte de este proyecto se enfoca en el estudio sobre la competencia matemática y las competencias docentes para fomentar la matemática forense en estudiantes de la licenciatura; para lo que se busca responder a las siguientes preguntas:

¿La matemática en Ciencia Forense es sólo una herramienta que ayuda a resolver problemas o tiene otro carácter?

¿Qué papel juega la matemática en la investigación forense?

¿Cómo se definiría la Matemática Forense como una rama de la matemática aplicada?

¿Qué características debe tener un curso introductorio de matemática en la licenciatura en Ciencia Forense?

En un análisis de las competencias que requiere desarrollar la Licenciatura en Ciencia Forense concluimos que la Matemática Forense influye en el desarrollo de las siguientes competencias:

1. Actuación con bases científicas y desarrollo del pensamiento crítico.

En el desarrollo del pensamiento matemático, utiliza información para analizar distintos tipos de investigación y así identificar los métodos y procesos para la resolución de problemas, matemáticos, físicos, químicos y específicamente de las Ciencias Forenses. Desarrolla la capacidad de discernir y disentir sobre la información que recolectada.

3. Elaboración de protocolos de análisis.

Los conocimientos matemáticos adquiridos dotan al estudiante de herramientas de análisis de datos y le permite aplicar este análisis a la resolución de problemas.

6. Integración de la información y emisión de dictámenes.

La matemática, como lenguaje, permite la comunicación clara y precisa en los dictámenes, peritajes y argumentos (del sistema acusatorio) con base en el análisis de la información.

7. Trabajo en equipo y ejercicio del liderazgo.

La modelación matemática favorece en el estudiante el trabajo interdisciplinario y el trabajo con distintos profesionales del área forense. Asumiendo el liderazgo correspondiente.

En relación con lo anterior las competencias disciplinarias a desarrollar son la *resolución de problemas*, principalmente a través de la modelación matemática; y el *pensamiento matemático* que incluye el razonamiento lógico-inductivo-deductivo.

A partir de esto se diseñó un taller de matemática en ciencia forense siguiendo un enfoque centrado en el estudiante y con la resolución de problemas como metodología de aprendizaje.

Su aplicación piloto se llevó a cabo entre septiembre y noviembre de 2014. El curso fue voluntario y asistieron a él 13 estudiantes, de los cuales 6 lo hicieron manera constante.

El enfoque que se le dio al taller permitió que el estudiante se diera cuenta de que la matemática es mucho más que aplicar algoritmos y aprender definiciones y procedimientos de memoria.

Algunas de las opiniones de los estudiantes fueron las siguientes:

Estudiante 1. *Me he dado cuenta de que necesito aprender a razonar las matemáticas en vez de usarlas de forma mecánica como me han enseñado siempre, pues todos los ejercicios los trato de resolver utilizando una fórmula dada en vez de analizar qué datos tengo y cómo puedo obtener el resultado. Espero aprender más sobre razonamiento matemático pues sé que es una de mis carencias como estudiante y necesito erradicar dicha deficiencia para poder aplicarla en el futuro.*

Estudiante 2. *Me he sentido algunas veces desesperada al ya no recordar ciertos temas de geometría, me gusta realmente el tiempo tan prolongado que nos da para razonar y sin dar exactamente las respuestas porque me permite deducir y buscar caminos alternos para la solución.*

Estudiante 3. *Honestamente no tengo mucho gusto por las matemáticas, pero los ejercicios que hacemos me gustan porque como dijo una de mis compañeras, no los vemos como un instructivo sino que razonamos para llegar al resultado. Esta clase en particular fue interesante porque me mostró otras formas de comprobar algo en lugar de sólo medir que es lo único que pasaba por mi mente.*

El taller de matemática forense

A partir de los resultados de la aplicación piloto, se diseñó el programa de una asignatura obligatoria para el primer semestre de la carrera, *Matemática en la Ciencia* Forense, cuyos objetivos son los siguientes:

Objetivo general:

Al término del semestre el estudiante tendrá las habilidades y el conocimiento relativo al uso de la modelación matemática en investigación forense y habrá desarrollado los elementos básicos del razonamiento lógico-inductivo-deductivo a través de la argumentación en la validación de resultados de la resolución de problemas.

Objetivos específicos

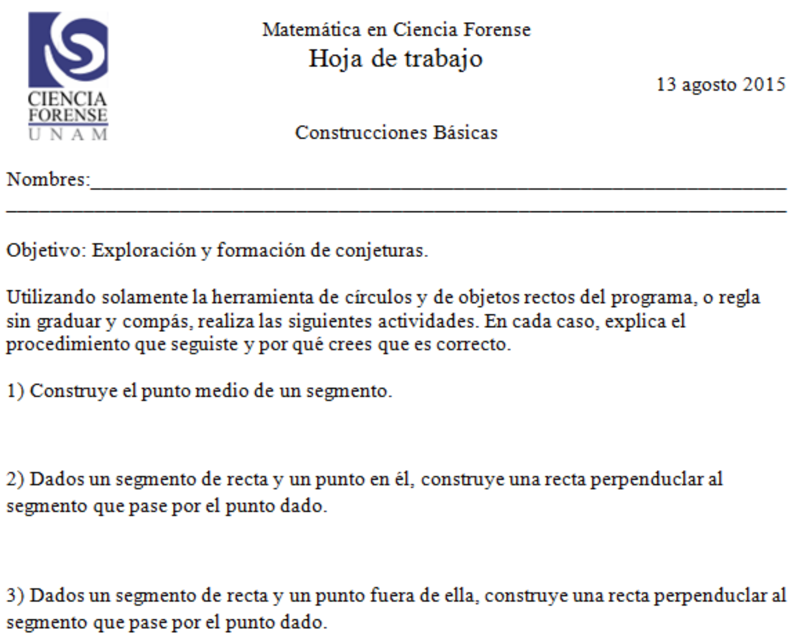
- Comprenderá el significado de Matemática Forense y el papel que juega en la Ciencia Forense.
- Tendrá una panorámica de los conceptos matemáticos que se necesitan en Ciencia Forense.
- Usará el pensamiento matemático para argumentar en favor de los resultados obtenidos en un proceso de resolución de problemas.
- Desarrollará la habilidad de utilizar modelos matemáticos para explicar fenómenos, en particular aquellos que se presentan en el contexto de una investigación forense.

El programa del curso se presentó ante el Comité Académico de la Licenciatura, integrado por los directores de las facultades participantes y algunos investigadores. Entre las entidades que conforman dicho comité están las Facultades de Medicina, Psicología, Derecho, Química, Ciencias y Filosofía y Letras, y el Instituto de Investigaciones Antropológicas. En dicha presentación el comité decidió aprobar por consenso la inclusión de la materia en el plan de estudios de la licenciatura.

La petición de inclusión se llevó como propuesta al Consejo Técnico de la Facultad de Medicina quién la aprobó como materia optativa del primer semestre, esto a principios de 2015.

El curso de impartió de manera oficial por primera vez, en el semestre comprendido entre agosto y diciembre de 2015.

La primera parte del curso se dedica a la exploración y la formación de conjeturas. Se considera de suma importancia destacar el enfoque axiomático y constructivista de la matemática. Por lo que la secuencia de actividades y problemas de exploración se hace de modo que los resultados de una sirvan para obtener los de la siguiente, como se muestra en la hoja de trabajo de la Figura 1.



CIENCIA FORENSE UNAM

Matemática en Ciencia Forense

Hoja de trabajo

13 agosto 2015

Construcciones Básicas

Nombres:____

Objetivo: Exploración y formación de conjeturas.

Utilizando solamente la herramienta de círculos y de objetos rectos del programa, o regla sin graduar y compás, realiza las siguientes actividades. En cada caso, explica el procedimiento que seguiste y por qué crees que es correcto.

1) Construye el punto medio de un segmento.

2) Dados un segmento de recta y un punto en él, construye una recta perpenduclar al segmento que pase por el punto dado.

3) Dados un segmento de recta y un punto fuera de ella, construye una recta perpenduclar al segmento que pase por el punto dado.

Figura 1. Ejemplo de hoja de trabajo.

En la segunda parte se trabaja la relación de la Modelación Matemática y la Ciencia Forense, donde se debe poner el énfasis en la construcción de los modelos, mediante la prueba de funciones conocidas (como en la Figura 2), el ajuste de una curva a una serie de datos o la resolución de una ecuación diferencial.

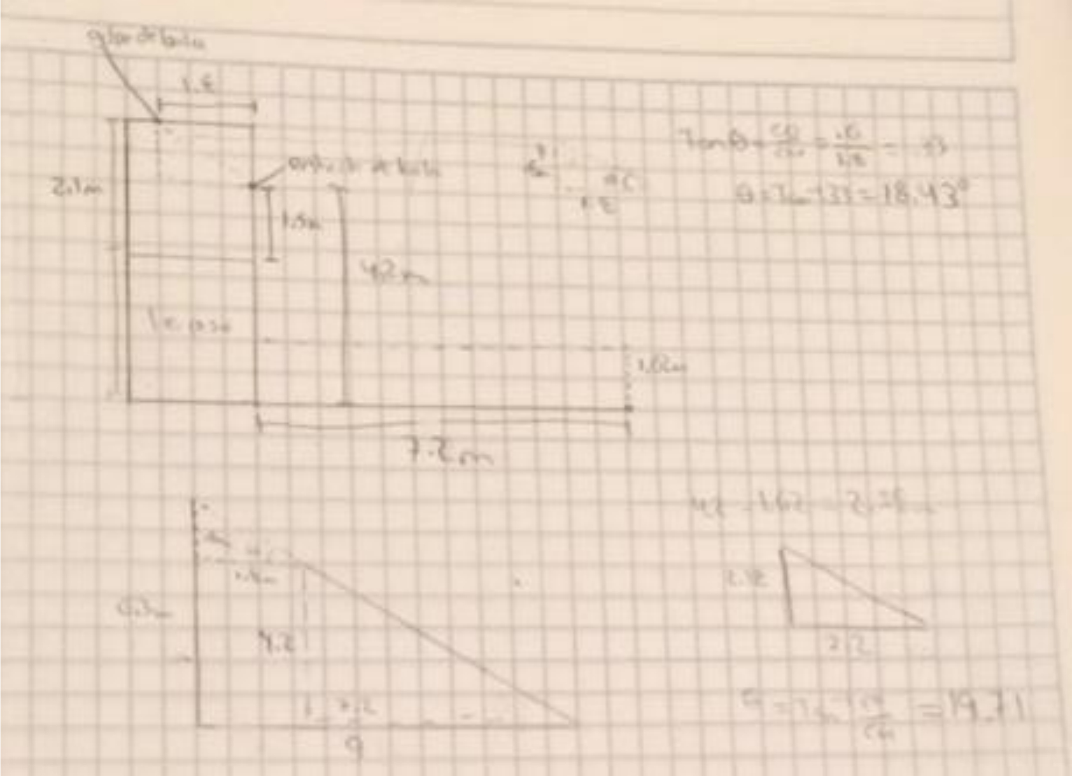


Figura 2. Planteamiento de un modelo por parte de los estudiantes.

Para cerrar el curso, la tercera parte se enfoca en la búsqueda del uso de la Matemática en la Ciencia Forense a partir de algunos artículos académicos y científicos de modo que se refuercen los temas discutidos en la segunda parte: La variedad de las temáticas, el origen de los artículos y su análisis a manera de seminario, permitirá a los estudiantes familiarizarse con las investigaciones realizadas en distintos temas y países. Se sugiere dar a los estudiantes libertad de proponer ellos mismos algunos artículos, dependiendo de su interés y el grado de involucramiento.

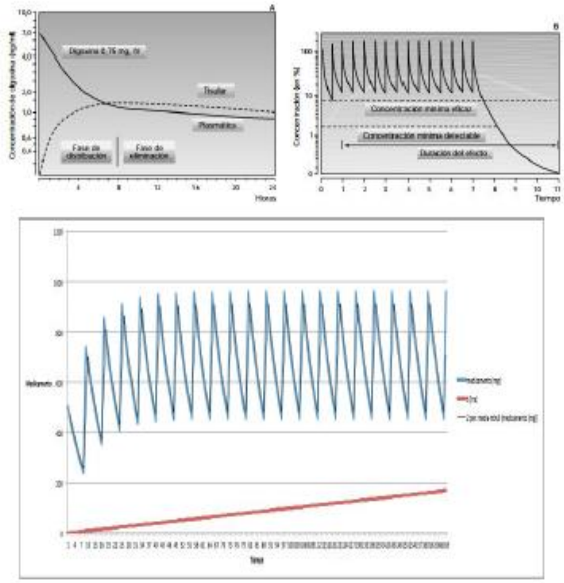


Figura 3. Extracto de artículo.

Conclusiones

Durante el desarrollo del curso se ha logrado que los estudiantes sean conscientes de la necesidad de desarrollo de la Matemática en la Ciencia Forense. También se desarrollaron actividades acordes a este programa, pero se observa la necesidad de desarrollar materiales que tomen en cuenta la necesidad que se está generando, pues la bibliografía disponible es poca y enfocada principalmente a la estadística y a la probabilidad.

Para el futuro, queda pendiente de desarrollo el resto del proyecto, cuya planeación incluye:

- *Análisis curricular y vínculos con otras materias y con el Bachillerato***.** Análisis de los programas de las materias de la Licenciatura en Ciencia Forense con el propósito de encontrar vínculos con la matemática forense; análisis de los programas de Bachillerato de la UNAM para tener una visión más amplia de la competencia matemática de los estudiantes que ingresan.
- *Diseño de materiales de apoyo.* Elaboración de un texto de matemática forense en el que se recojan los hallazgos y los resultados que se tuvieron tanto en la aplicación piloto de las actividades como en la impartición oficial del curso, y en las posteriores investigación sobre el tema.
- *Diseño de un programa de formación de profesores en Matemática Forense.* De este programa ya se cuenta con el diseño y la impartición de un primer curso: Introducción a la Matemática Forense y se está trabajando en la estructuración completa del programa.

Apoyo

Parte de este proyecto está patrocinado por el Programa de Apoyo a Proyectos para la Innovación y Mejoramiento de la Enseñanza (PAPIME, proyecto PE105616).

Referencias bibliográficas

Facultad de Medicina (2013). *Plan de Estudios de la Licenciatura en Ciencia Forense*. UNAM.

SUMEM (2014). *Consideraciones para la Mejora de la Educación Matemática en la UNAM.* México: Secretaría de Desarrollo Institucional, UNAM.

SITUACIONES DIDÁCTICAS PARA EL DESARROLLO DEL ANÁLISIS CRÍTICO Y REFLEXIVO EN GEOMETRÍA

Myrian Luz Ricaldi Echevarria, Isabel Zoraida Torres Céspedes
Universidad Peruana Cayetano Heredia, Universidad de Lima. Perú
myrianluz@hotmail.com, isabeltz50@hotmail.com

RESUMEN: En el aprendizaje de la geometría a nivel escolar se debe enfatizar en el planteamiento de actividades de reflexión y análisis para promover el desarrollo de la competencia relacionada con la forma, el movimiento y la localización. Por ello, el presente taller tiene como objetivo desarrollar diversas actividades que involucren el análisis crítico y el uso de recursos y materiales. Finalmente, se plantearán situaciones problemáticas que permitan reconocer estrategias útiles para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Se tomó como marco teórico la teoría de situaciones didácticas de Brousseau.

Palabras clave: tareas de demostración, investigación y conceptualización.

ABSTRACT: In geometry school learning emphasis should be placed on the development of reflection and analysis activities to promote the development of competence related to form, movement and location. Therefore, this workshop aims to develop various activities that involve critical analysis and the use of resources and materials. Finally, problem situations will arise that allow recognizing useful strategies for geometry teaching and learning. Brousseau's theory of didactic situations was taken as the theoretical framework.

Key words: demonstration tasks, research and conceptualization.

Introducción

A lo largo de los años, se ha visto diferentes posturas en el aprendizaje de la matemática. Hoy en día, en el Perú, hemos comprendido que los aprendizajes en nuestros estudiantes, se desarrollarán si logramos mejorar, aún más, la educación matemática. En tal sentido, el Ministerio de Educación a través del Nuevo Sistema Curricular, y principalmente de las Rutas de Aprendizaje, ha trazado, como objetivo nacional en matemática, "desarrollar las competencias y capacidades matemáticas en su relación con la vida cotidiana" desde el Enfoque por Resolución de Problemas.

Frente a esta perspectiva, poco a poco, se pretende dejar de lado, el trabajar, en las escuelas peruanas, una matemática que solo busque enseñar artificios, trucos para resolver "problemas tipo", cuyo único objetivo es entrenar a los alumnos para que puedan enfrentarse a determinados exámenes de admisión universitaria. Por el contrario estamos convencidos que debe aplicarse en las sesiones de clase una matemática contextualizada a diferentes situaciones Por otro lado, es claro que, este reto, no es fácil para muchos docentes peruanos, que piensan que, solo con el simple hecho de incorporar tecnología en las aulas lograrán responder a las nuevas demandas de aprendizaje.

No se trata, entonces, de introducir nuevos instrumentos, sino por el contrario, es necesario cambiar nuestra forma de pensar. Tenemos que integrar diversas actividades, nuevos ideas y conceptos, tecnología, de modo tal, que podamos hacer que los estudiantes hagan cosas nuevas, de nuevas maneras, con múltiples estrategias de solución y que logren tener una educación diferente.

Problemática y objetivos

La propuesta parte de la siguiente pregunta de investigación: ¿En qué medida las situaciones problemáticas que propician un análisis crítico facilitan el aprendizaje de la geometría? Para responder a lo anterior nos planteamos los siguientes objetivos:

Objetivo general

Desarrollar diversas tareas de demostración, investigación y conceptualización que involucren el análisis crítico y el uso de recursos y materiales para el aprendizaje de la geometría.

Al mismo tiempo, se proponen como objetivos específicos los siguientes:

- Realizar actividades que involucren visualización y medición de situaciones geométricas.
- Expresar ideas y conceptos con respecto a nociones geométricas y sus características.
- Usar herramientas y recursos TIC para la comprensión y construcción de conceptos geométricos.
- Identificar posibles dificultades en el aprendizaje de situaciones geométricas.
- Formular procesos para solucionar un problema proponiendo orientaciones didácticas específicas.

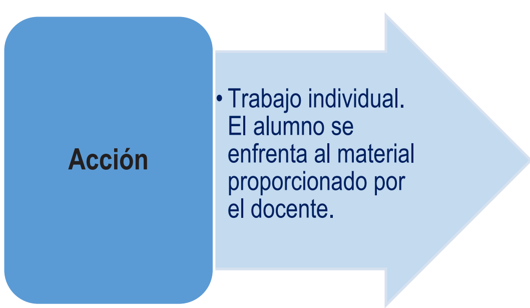
A continuación el detalle de los marcos teóricos referentes para el presente estudio.

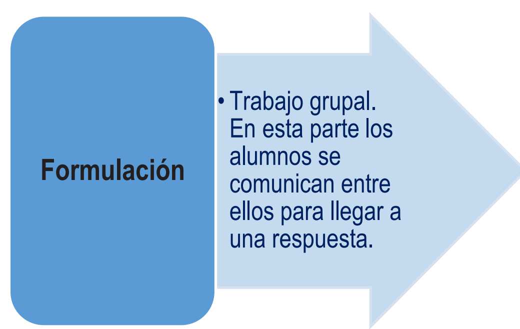
Marco teórico

La realización de la actividad tuvo como marco teórico la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1999). Esta teoría analiza el sistema didáctico formado por el profesor, el saber y el alumno. Las situaciones didácticas son un conjunto de relaciones explícita o implícitamente establecidas entre uno o varios estudiantes, un entorno de aprendizaje (que puede incluir instrumentos de matemática) y un profesor reunidos con la finalidad de construir un conocimiento. Según Brousseau (1999), una situación didáctica es considerada como una situación problema que necesita una adaptación por parte del sujeto, una respuesta del alumno.

En consecuencia, cuando se habla de una situación didáctica se refiere al conjunto de interrelaciones entre tres sujetos: profesor, estudiante y medio didáctico, donde se manifiesta directa o indirectamente la voluntad de enseñar. Por otro lado, una situación es a-didáctica cuando el maestro logra que el alumno asuma el problema planteado como propio y empiece un proceso de búsqueda autónomo, es decir, sin la intervención del profesor. Toda situación didáctica debe tener como objetivo generar una situación a- didáctica. A continuación se presenta la secuencia de la teoría de situaciones didácticas:

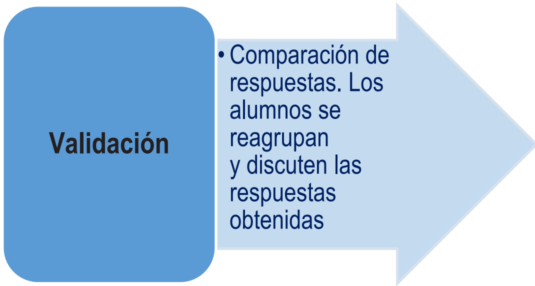
Acción: consiste en que el estudiante trabaje individualmente con un problema, aplique sus conocimientos previos y desarrolle un determinado saber.	**Formulación:** consiste en un trabajo de grupo, donde se requiere la comunicación de los estudiantes, compartir experiencias para la construcción del conocimiento.





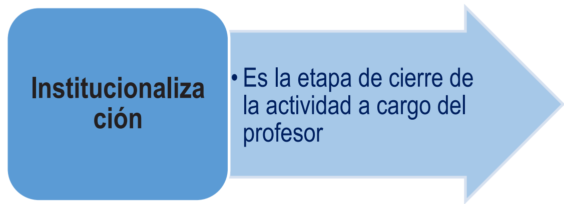
<table>
<tr>
<td>

Validación: consiste en poner a juicio de un interlocutor el producto obtenido de esta interacción.



</td>
<td>

Institucionalización: Tienen por finalidad dar un Status oficial a algún conocimiento aparecido durante la actividad de la clase.



</td>
</tr>
</table>

Figura 1. Secuencia de la TSD

La Teoría de Situaciones Didácticas, constituye una teoría de la enseñanza que busca las condiciones para la generación de los conocimientos matemáticos bajo la hipótesis de que los mismos no se construyen de manera espontánea. Esta producción supone establecer nuevas relaciones, trasformar y reorganizar otras, e implica la validación según las normas y los procedimientos aceptados por la comunidad matemática, tanto de estos conocimientos como de las relaciones y formas de representación que se utilizan (Sadovsky, 2005)

Definiciones previas

Actividades de conceptualización, están relacionadas a la construcción de conceptos y relaciones geométricas.

Actividades de visualización, estimulan la observación y la representación gráfica para percibir formas geométricas naturales y artificiales del entorno con gran contenido geométrico y conceptual.

Actividades de construcción, promueven la manipulación a través del dibujo y el uso de recursos o materiales concretos para descubrir propiedades y relaciones geométricas.

Actividades de demostración, elaboran conjeturas o procedimientos para la resolución de un problema, que posteriormente explicará, probará o demostrará a partir de argumentos. Este tipo de tarea permite socializar el conocimiento geométrico.

Actividades de investigación, indagan sobre las características, las propiedades y las relaciones entre objetos geométricos para dotarlos de significado.

Metodología

La experiencia se desarrolló con docentes representantes de diversas unidades de gestión educativa de la ciudad de Lima durante los meses de verano del 2016. El tiempo dedicado a la ejecución de las situaciones didácticas fue aproximadamente de 1 mes con una frecuencia de 15 horas semanales. Las actividades consistieron en analizar, resolver y socializar diversas situaciones geométricas propuestas en el módulo 3 (Collanqui, P. Soto, J., & Gutiérrez, K., 2016).

El trabajo que se tuvo con los docentes fue siguiendo la secuencia de la Teoría de situaciones didácticas, es decir, la situación propuesta fue analizada de forma individual, en una primera instancia (acción), luego se pasa a un trabajo grupal utilizando en cada caso papelógrafos, hojas de papel de diferentes colores (papel arco iris), tijeras y goma. En esta etapa el grupo discute para llegar a una respuesta (formulación).

El resultado obtenido por el grupo es socializado con los otros grupos (validación), recibiendo en esta etapa observaciones y sugerencias de los procesos y resultados obtenidos. Finalmente, el docente interviene para dar el status de conocimiento a las conclusiones obtenidas de la discusión. Durante el desarrollo del taller se hizo evidente, tal como luego registran los propios participantes, el interés y la valoración positiva a las actividades propuestas, las mismas que consideraron pertinentes para ser reproducidas con sus alumnos en sus aulas de clase.

Actividades propuestas

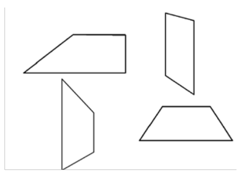
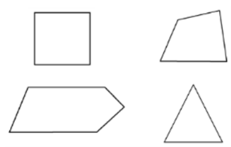
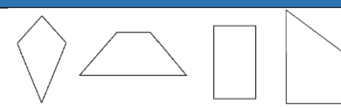
Como parte del taller se desarrollaron 7 actividades clasificadas como actividades de conceptualización (1), actividades de visualización (2), actividades de construcción (2) y actividades de demostración (2). A continuación una tabla que indica en nombre de las actividades según su clasificación.

Tabla 1. Actividades propuestas

Actividad de conceptualización	Conociendo a los trapecios
Actividad de visualización	Visualizando polígonos con el libro de los espejos. Cubriendo el plano con mosaicos.
Actividad de construcción	Jugando con el tangram chino. Construcción del rombo.
Actividad de demostración	Desarrollo de sólidos. La elipse doblando el papel.

En las siguientes líneas la descripción de los diferentes tipos de actividades.

Actividad 1: Conociendo a los trapecios

Estos son trapecios	Estos no son trapecios	¿Cuáles de estos son trapecios?
		

¿Cuáles son las características de esta tarea? ¿Qué aspectos de la geometría desarrolla?

Actividad 2: Visualizando polígonos con el libro de los espejos

Sitúe los espejos usando la línea, de forma que se obtenga un cuadrado. Aparecen dibujados dos ángulos: el ángulo A, que se denomina central, y el ángulo B, que se denomina interior. Podrá calcular fácilmente la suma de los cuatro ángulos centrales del cuadrado y, en consecuencia, el valor de cada uno de ellos. Complete la siguiente tabla:

Número de lados del polígono obtenido	4	5	6	7		8	9
Valor del ángulo central							
Valor del ángulo interior							

Actividad 3: Cubriendo el plano con mosaicos

Para cubrir el plano con mosaicos sin superponerlos ni dejar huecos se debe partir de un polígono con características especiales. Vamos a realizar y analizar una posibilidad, para ello, seguimos las siguientes instrucciones:

1. Corte varios cuadrados de las mismas medidas.
2. Recorte una parte del cuadrado, considerando que el corte sea paralelo a la diagonal del cuadrado.
3. Desplace la figura recortada al lado opuesto al que fue cortada, de tal forma que uno de los lados de la figura recortada coincida con el vértice y con el lado del cuadrado de referencia.
4. Repita este proceso con el recorte en otra esquina del cuadrado, siguiendo las condiciones 2 y 3.
5. Una vez que haya obtenido una figura, utilícela como molde para copiarla en una hoja las veces que quiera de manera que las líneas de los bordes estén en contacto, es decir, sin dejar huecos y sin superposiciones.

Después de crear el teselado, puedes colorear cada figura para que parezcan pájaros, peces, gente o cualquier otra cosa imaginable.

¿Cuáles son las características de esta tarea?
¿A diferencia de la tarea anterior, qué requiere esta situación?

Actividad 4: Jugando con el tangram chino

Compare los lados de las piezas y determine cuántas longitudes distintas hay. Registre las medidas.

Piezas del tangram	T	T	M	P	P	C	R
Medida de los lados							
Medida de los ángulos							

¿Cuáles son las características de esta tarea?
¿A diferencia de las otras tareas, qué requiere esta situación?

Actividad 5: Construcción del rombo

Construye un rombo cuyo lado mida 8,5 cm, y uno de sus ángulos 50°

1. Con la regla trazamos un lado del rombo, el segmento AB de 8,5 cm de longitud.
2. Colocamos el transportador de ángulos de forma que el centro del transportador coincida con el punto A, medimos el ángulo de 50°.

3. Trazamos una semirrecta r con origen en el punto A. Con el compás, haciendo centro en el punto A, y tomando como radio el segmento AB trazamos un arco hasta que corte a la semirrecta r en el punto C.
4. Este punto C es otro vértice del rombo. Con el compás, hacemos centro en el punto B y, con la misma abertura, trazamos un nuevo arco aproximadamente en la zona en la que supuestamente estará el cuarto vértice del rombo.
5. Hacemos centro en el punto C y, de nuevo con la misma abertura AB, trazamos otro arco que corte al anterior. Marcamos el punto D que es punto de corte de los dos arcos. Este punto es el otro vértice del rombo, por lo que, para construir el mismo, solamente hemos de unir los vértices ABDC.

Actividad 6: Desarrollo de sólidos

¿A qué sólido geométrico corresponde la plantilla recibida? En base a la plantilla plantea otro desarrollo para el mismo poliedro.

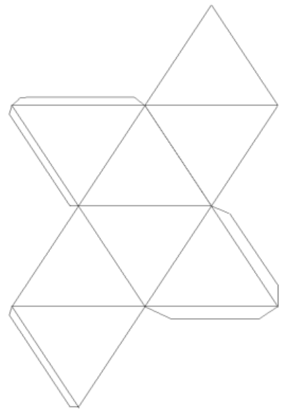


Figura 1. Desarrollo de sólido geométrico

Actividad 7: La elipse doblando el papel

Se recorta un círculo y se señala un punto P interior que no sea el centro. Se dobla el círculo de manera que algún punto del borde coincida con el punto P.

Se repite este procedimiento hasta que se pueda ver una elipse.

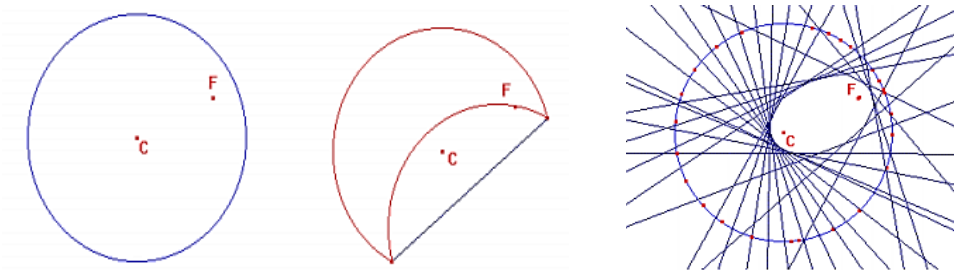


Figura 2. Secuencia de acciones para la generación de la elipse doblando el papel.

Conclusiones

Durante las clases de geometría se deben incluirse actividades de conceptualización, investigación y demostración. Al mismo tiempo se debe promover la utilización de materiales ya que permiten pasar del plano concreto al abstracto, como proceso natural para la comprensión de nociones matemáticas relacionadas a la geometría.

Muchos de los errores que tienen los alumnos en geometría se deben a que tienen imágenes conceptuales pobres, así, por ejemplo, creen que la base de un rectángulo siempre es horizontal. Godino y Font (2003) coinciden en la necesidad de identificar los errores de los estudiantes en el proceso de aprendizaje, determinar sus causas y organizar la enseñanza teniendo en cuenta esa información. Es decir, se parte de la identificación de los errores como medios para aprender y corregir.

Por otro lado, se cree conveniente la inclusión de programas de geometría dinámica como complemento al uso de material manipulable, debido a que permiten la exploración y la visualización de propiedades y relaciones geométricas de manera más rápida con la ventaja del dinamismo y la posibilidad de dar más tiempo al análisis de relaciones, propiedades y al establecimiento y comprobación de conjeturas.

Consideraciones de los participantes

1. ¿Qué expectativas tenías del taller antes de empezar?

   "Conocer nuevas estrategias para aplicar en clase y hacer algo diferente para que los alumnos se sientan interesados por el tema". "Como me podía ayudar en mi práctica pedagógica"

2. ¿Qué te parecieron las actividades y qué aprendiste del taller?

   Las actividades me parecieron: creativas, dinámicas, interesantes, divertidas, enriquecedoras.

3. ¿Qué sugerencias podrías dar para mejorar las actividades aprendidas en el taller?

   Usar más tecnología. Que el maestro lo ponga en práctica.

Referencias bibliográficas

Brousseau G. (1999). Educación y Didáctica de las matemáticas. En *Educación Matemática*. México: Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática.

Collanqui, P. Soto, J., & Gutiérrez, K. (2016). Módulo 3: Aspectos didácticos curriculares. Dirección Regional de Educación de Lima Metropolitana.

Godino, J. D., & Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática. Recuperado el 10 de mayo de 2015 de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy: Miradas, sentidos y desafíos.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

MATERIAL DIDÁCTICO DIRIGIDO A DOCENTES PARA LA ENSEÑANZA EN EDUCACIÓN ESCOLARIZADA DE NIVEL MEDIO SUPERIOR, PARA EL TEMA DE LA RECTA EN EL PLANO

Elisa Lizeth Salazar Ricarte, Manuel Alfredo Urrea Bernal
Universidad de Sonora. (México)
elisa.sari@gmail.com, maurr@mat.uson.mx

RESUMEN: En este trabajo se presenta el diseño de un material para profesores que imparten el curso de Matemáticas 3, correspondiente al tema de la recta. Pretende enriquecer tanto el proceso de enseñanza como el de aprendizaje en el marco del Enfoque basado en Competencias. Los elementos teóricos considerados en esta propuesta fueron la configuración de los objetos matemáticos (intervinientes y emergentes) del sistema de prácticas y los criterios de idoneidad que corresponden al Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), ya que dichas herramientas permitieron hacer el análisis, valoración y también el diseño de nuestro material propuesto.

Palabras clave: matemática educativa, configuración epistémica, idoneidad didáctica

ABSTRACT: In this paper we present the design of a material for teachers who teach the course of Mathematics III, corresponding to the theme of the line. It attempts to enrich both the teaching and learning process within the framework of the Competence-based Approach. The theoretical elements considered in this proposal were the configuration of the mathematical objects (involved and emerged) of the system of practices and the suitability criteria that correspond to the Onto semiotic Approach to Knowledge and Mathematical Instruction (OSA), since these tools allowed making the analysis, valuation and also the design of our proposed material.

Key words: Educational Mathematics, Epistemic Configuration, Didactic Suitability

Introducción

Con el fin de mejorar la calidad educativa en México, en el 2008 se implementó la Reforma Integral de Educación Media superior (RIEMS) que desde la matemática educativa, ésta se concreta en el paradigma constructivista (SEMS, 2011, p.17) cuyo máximo representante es L.S. Vigotsky." (SEMS, 2011, p.14), en otras palabras, con la implementación de dicha reforma se pretende mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje con base en el enfoque por competencias.

Ante la implementación de la RIEMS el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora (COBACH-SON) se plantea el problema de concretar en el aula dicha reforma, para ello se propone contar con un cuaderno de trabajo para los estudiantes cuyo diseño plasmará lo que señala la reforma, en este contexto es que en 2014 se diseñó el Módulo de Aprendizaje de Matemáticas 3 (Geometría Analítica) (Soto, García, Rodríguez, Vargas, y Urrea, 2014) que se propone como libro de texto para los estudiantes del COBACH-SON.

Los procesos de enseñanza y aprendizaje funcionan como un conjunto de componentes interactivos que se complementan tales como los planes y programas de estudio, las reformas, el modo de enseñanza, la organización comunicativa de la clase, el modo de presentar los contenidos, las tareas, los objetivos (propósitos) y expectativas, la relación entre materiales y actividades, y por supuesto la participación del docente, donde éste debe orientar la construcción de conocimientos a partir de materiales adecuados y ser factibles de desarrollarse en el tiempo planificado.

Sin embargo, dada la característica de libertad de acción por parte del profesor sobre las metodologías de enseñanza que aplica en el aula, existen investigaciones que permiten asumir que no se le da la importancia adecuada a ésta, especialmente aplicando el nuevo modelo propuesto en la RIEMS (Escalante y Fonseca, 2011; López y Tinajero, 2009; Macías, 2013; Zaragoza, 2013; López, C. s.f.), el cual influye en el rendimiento de los estudiantes y condiciona de una forma clara el tipo de aprendizaje al que van a ser capaces de llegar (Zabalza y Zabalza, 2010, Pp.177-178)

Es en este contexto, que nuestro objetivo de este proyecto fue el diseño de un material didáctico ligado al Módulo de Aprendizaje de Matemáticas 3 para el tema de la recta, en el que se aportan sugerencias y/o recomendaciones (acciones metodológicas) con el fin de apoyar al profesor en la metodología de enseñanza que aplica en el aula con base en el enfoque por competencias y que finalmente intervendrá directamente en el rendimiento de los estudiantes.

Consideraciones teóricas y metodológicas

El marco que sustenta este trabajo es el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), ya que permite atender desde distintas perspectivas los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, permitiendo realizar diferentes tipos de análisis aplicables a un proceso de estudio matemático planificado o implementado (Godino, Font, y Wilhelmi, 2007).

Primero, se analizó el proceso de estudio presentado en el libro de texto (Módulo de Aprendizaje de Matemáticas 3) para el tema de la línea recta con el fin de describir y estudiar la configuración epistémica global (previa y emergente) que determina las prácticas planificadas en dicho texto; posteriormente se identificó el significado institucional pretendido lo cual apoyo a conformar algunas secciones del material didáctico propuesto, tales como "Conocimientos previos", "Propósitos de la actividad"; después, se realizó un análisis de idoneidad didáctica del proceso de estudio considerando las seis dimensiones, con lo cual:

a) Se evaluó el grado de representatividad de los significados institucionales promovidos en las actividades del Bloque 2: La recta del Módulo de Aprendizaje de Matemáticas 3, respecto al significado de referencia que se identificó de los planes y programas de la dirección General de Bachillerato (DGB), según los indicadores de idoneidad epistémica, lo que permitió valorar y proponer actividades complementarias que apoyaran a enriquecer el significado institucional promovido para alcanzar el significado institucional de referencia.

b) Se identificó si el significado pretendido en el módulo de aprendizaje está en la zona de desarrollo potencial de los alumnos (objetos primarios emergentes), así como del grado de proximidad de los significados personales (objetos primarios previos) desde el punto de vista del indicador cognitivo, lo que llevó a proponer actividades complementarias que estuvieran en la zona de desarrollo próxima y que apoyaran al desarrollo potencial de los alumnos.

c) Se valoró la elección de los procesos de enseñanza y aprendizaje (interacción), de los medios, el interés de las tareas (afectivo) y la proximidad de la correspondencia de los contenidos con los fines que señala la DGB (ecológica), con dicha valoración es que se diseñaron algunos materiales complementarios, tales como hojas de trabajo o applets para enriquecer las actividades, con la intención de incrementar o mantener los indicadores de la idoneidad didáctica en sus diferentes fases, además fue de utilidad para diseñar las sugerencias propuestas en la sección "Orientaciones didácticas".

Resultados del análisis con el EOS

Resultados de la configuración epistémica del sistema de prácticas y objetos matemáticos del Bloque 2: La recta

Al finalizar el análisis de la Configuración Epistémica de las 18 actividades del Bloque 2 del Módulo de Aprendizaje de Matemáticas 3 del COBACH-SON, se puede decir que, en su mayoría las situaciones problema promovidas parecieran ser ejercicios de aplicación de fórmulas o procedimientos algorítmicos, sin embargo, después de los ejercicios se presentan preguntas en las que se evidencia la intención por parte de los autores para que el estudiante reflexione sobre las acciones que realizó (práctica matemática) y los resultados obtenidos.

Por otro lado, en las diferentes configuraciones se observa que las actividades contextualizadas en aplicaciones o en el entorno social son escasas, sin embargo, se enfatiza el tránsito entre diferentes lenguajes de representación, tales como el lenguaje simbólico (algebraico), gráfico, verbal, por lo que se puede decir, que en este aspecto se procura enriquecer los significados de un objeto matemático desde sus diferentes representaciones.

En cada una de las configuraciones realizadas en las 18 actividades del Bloque 2 fueron identificados los objetos intervinientes y emergentes, los cuales permitieron establecer el significado institucional pretendido, así como los objetos intervinientes (conocimientos previos) para abordar estas actividades, mismos que fueron integrados en las orientaciones didácticas, puesto que es importante que el docente conozca los conocimientos que requieren los estudiantes para llevar a cabo las actividades, así como los objetivos de dichas actividades..

Las definiciones presentadas, son precisas en su mayoría, aunque, cabe mencionar que se presentan algunos errores de redacción los cuales pueden ocasionar un conflicto en la construcción del significado personal, por lo que se considera conveniente notificar al docente sobre dichos errores.

Resultados del análisis de los criterios de idoneidad

Después del análisis de los criterios de idoneidad para las tres secuencias didácticas del Bloque 2: La recta, se identificó que los criterios que resultaron con un grado de idoneidad bajo, medio o alto fueron el mediacional y el ecológico. Es importante señalar que según el significado institucional de referencia señalado en la DGB y la manera en que se presenta la información en el Módulo de Aprendizaje de Matemáticas 3, el número máximo de indicadores en la idoneidad epistémica varía en cada Secuencia Didáctica, dependiendo de las componentes que aplican o no, según las características del tratamiento didáctico en cada una. En la siguiente tabla se muestra someramente el resultado obtenido por cada Secuencia didáctica.

Tabla 1. Resumen resultados del análisis de idoneidad

Secuencia Didáctica	Idoneidad epistémica	Idoneidad cognitiva	Idoneidad afectiva	Idoneidad interaccional	Idoneidad mediacional	Idoneidad ecológica
1	17/19 alto	7.5/8 alto	5.5/6 alto	8/9 alto	3/8 bajo	5/8 medio alto
2	15/17 alto	7.5/8 alto	5/6 alto	7.5/9 alto	3/8 bajo	3.5/8 bajo
3	15/18 alto	8/8 alto	5.5/6 alto	8/9 alto	4/8 medio	6/8 medio alto

A partir de la valoración que se hace a posteriori, se sugiere aportar actividades complementarias que apoyen a la mejora del grado de idoneidad.

Con relación a la idoneidad epistémica, en los indicadores de la componente “Reglas (Definiciones, proposiciones y procedimientos)”, se encontraron errores de redacción en enunciados, procedimientos, definiciones, por lo que también es importante hacer estos señalamientos en la sección correspondiente para evitar posibles conflictos semióticos.

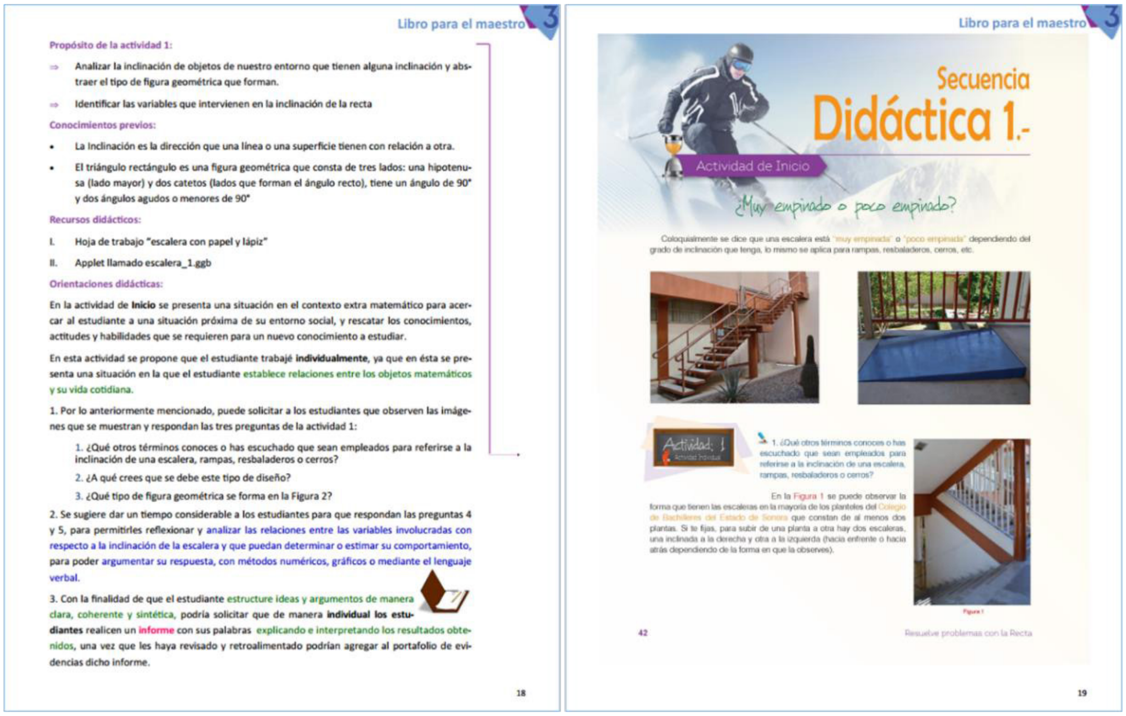
Con relación a la idoneidad interaccional en el indicador “Reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.)” se sugiere indicar al docente posibles errores y/o dificultades con el propósito de apoyar su práctica docente.

Específicamente en la idoneidad mediacional, en el indicador “Uso de materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido” se proponen applets que apoyen a enriquecer la construcción de significados.

Por otra parte, en cuanto a la idoneidad ecológica en el indicador de “Los contenidos pretendidos e implementados de la recta y su contextualización, contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes” se sugieren actividades complementarias en el contexto extra matemático, entre otras cosas para que el estudiante vea la relación que tienen las matemáticas escolares con problemas de la vida fuera de la escuela.

Descripción de la propuesta

Como resultado de la configuración epistémica se incorporaron diferentes secciones al apartado de la orientación por cada actividad, como se muestra en la siguiente Figura.



Libro para el maestro 3

Propósito de la actividad 1:

⇒ Analizar la inclinación de objetos de nuestro entorno que tienen alguna inclinación y abstraer el tipo de figura geométrica que forman.

⇒ Identificar las variables que intervienen en la inclinación de la recta

Conocimientos previos:

- La Inclinación es la dirección que una línea o una superficie tienen con relación a otra.
- El triángulo rectángulo es una figura geométrica que consta de tres lados: una hipotenusa (lado mayor) y dos catetos (lados que forman el ángulo recto), tiene un ángulo de 90° y dos ángulos agudos o menores de 90°

Recursos didácticos:

I. Hoja de trabajo "escalera con papel y lápiz"

II. Applet llamado escalera_1.ggb

Orientaciones didácticas:

En la actividad de **Inicio** se presenta una situación en el contexto extra matemático para acercar al estudiante a una situación próxima de su entorno social, y rescatar los conocimientos, actitudes y habilidades que se requieren para un nuevo conocimiento a estudiar.

En esta actividad se propone que el estudiante trabajé **individualmente**, ya que en ésta se presenta una situación en la que el estudiante establece relaciones entre los objetos matemáticos y su vida cotidiana.

1. Por lo anteriormente mencionado, puede solicitar a los estudiantes que observen las imágenes que se muestran y respondan las tres preguntas de la actividad 1:

   1. ¿Qué otros términos conoces o has escuchado que sean empleados para referirse a la inclinación de una escalera, rampas, resbaladeros o cerros?
   2. ¿A qué crees que se debe este tipo de diseño?
   3. ¿Qué tipo de figura geométrica se forma en la Figura 2?

2. Se sugiere dar un tiempo considerable a los estudiantes para que respondan las preguntas 4 y 5, para permitirles reflexionar y analizar las relaciones entre las variables involucradas con respecto a la inclinación de la escalera y que puedan determinar o estimar su comportamiento, para poder argumentar su respuesta, con métodos numéricos, gráficos o mediante el lenguaje verbal.

3. Con la finalidad de que el estudiante estructure ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética, podría solicitar que de manera **individual los estudiantes** realicen un informe con sus palabras explicando e interpretando los resultados obtenidos, una vez que les haya revisado y retroalimentado podrían agregar al portafolio de evidencias dicho informe.

18

Libro para el maestro 3

Secuencia Didáctica 1.-

Actividad de Inicio

¿Muy empinado o poco empinado?

Coloquialmente se dice que una escalera está "muy empinada" o "poco empinada" dependiendo del grado de inclinación que tenga, lo mismo se aplica para rampas, resbaladeros, cerros, etc.

Actividad: 1

Actividad Individual

1. ¿Qué otros términos conoces o has escuchado que sean empleados para referirse a la inclinación de una escalera, rampas, resbaladeros o cerros?

En la Figura 1 se puede observar la forma que tienen las escaleras en la mayoría de los planteles del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora que constan de al menos dos plantas. Si te fijas, para subir de una planta a otra hay dos escaleras, una inclinada a la derecha y otra a la izquierda (hacia enfrente o hacia atrás dependiendo de la forma en que la observes).

Figura 1

42 Resuelve problemas con la Recta

19

Figura 1 Secciones del apartado de orientaciones por actividad

De manera general el material didáctico está compuesto por una "presentación" para informar al docente las intenciones de ésta, el índice, una "estructura metodológica" en donde se muestran ciertas figuras que indican si en la actividad se sugiere el uso de un recurso informático, una hoja de trabajo, en el apartado de las orientaciones por cada actividad se diseñó un formato en hoja doble para que el profesor pueda consultar de manera simultánea las diferentes secciones (propósitos de la actividad, conocimientos previos, recursos didácticos, posibles dificultades y/o errores, posibles respuestas) asociadas a las actividades del texto, y finalmente se agrega un anexo al final del material propuesto con las actividades complementarias, en la siguiente Figura se muestra una estructura general del material propuesto.

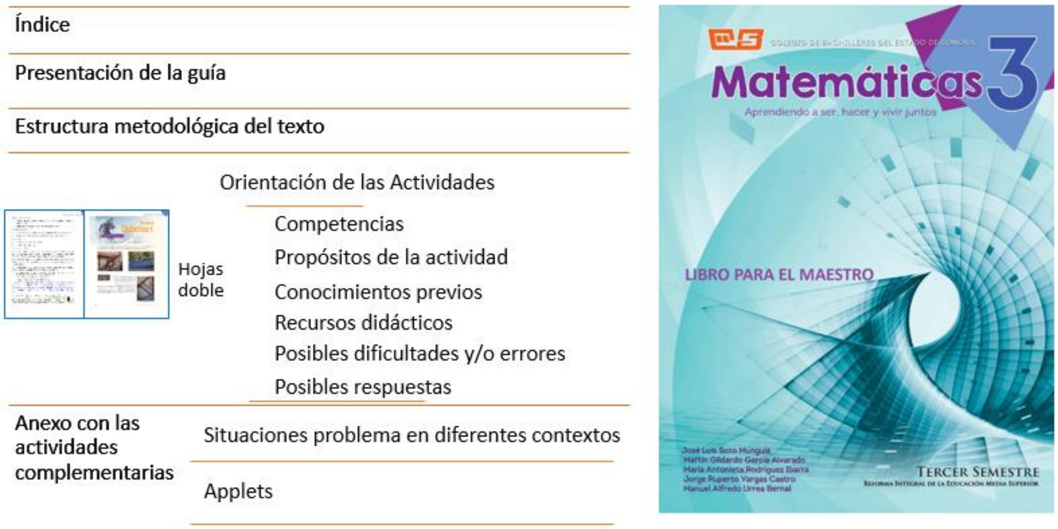


Figura 2. Estructura general de la propuesta

Dentro de las orientaciones, se proponen estrategias para abordar las actividades, y se sugiere el uso de las diferentes actividades complementarias propuestas, en total se propusieron ocho actividades complementarias, de las cuales dos actividades requieren materiales como papel, lápiz y regla (Hoja de trabajo “escalera con papel y lápiz”, Hoja de trabajo "Tramos de la escalera"), tres actividades más se proponen utilizando recursos informáticos (Hoja de trabajo para el applet escalera_1.ggb, Hoja de trabajo para el applet rectas_G_1.ggb, Hoja de trabajo para el applet piramide_1.ggb), y también se diseñaron cuatro actividades complementarias en el contexto social (Hoja de trabajo "Reinstalación de tubería", Hoja de trabajo "Rampa de la escuela", Hoja de trabajo "El cine de mi ciudad", Hoja de trabajo "Las escaleras eléctricas").

Posteriormente, después del diseño del material propuesto se llevaron a cabo dos cursos/ talleres para recolectar información de los posibles profesores usuarios del material, para valorar la pertinencia del material propuesto.

Conclusiones

Con base en la información obtenida en los dos cursos/talleres se podría suponer que el material propuesto para el profesor y los elementos que la componen, es una herramienta a la que podrían recurrir los profesores para apoyar su trabajo docente, ya que en ambos talleres se logró identificar la necesidad de contar con este tipo de material, pues los profesores expresaron la necesidad de agregar actividades complementarias que les ayudarán a enriquecer la construcción de los significados institucionales promovidos en el Bloque 2: La recta.

También se identificó la necesidad de declarar los objetivos de las actividades ya que como estos no se señalan en el Módulo de Aprendizaje de Matemáticas 3, la interpretación de ellos propósitos podría ser diferentes, tal como sucedió en el curso taller cuando se les pidió que identificaran los objetivos de algunas actividades, se obtuvieron cosas diferentes entre los profesores, ya que cada uno de ellos entendieron cosas diferentes..

Referencias bibliográficas

Escalante, E.; Fonseca, C. (2011). La Reforma Integral de la Educación Media Superior: Obstáculos para su implementación en una experiencia local. *XI Congreso Nacional de Investigación Educativa*. Recuperado en febrero de 2016 de http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v11/docs/area_02/0484.pdf

Godino, J., Font, V., & Wilhelmi, M. (2007). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque Ontosemiótico. *Congreso Internacional de Ensino da Matemática*. ULBRAM Brasil.

López, C. (s.f.). Evaluación y Propuesta para la mejora de la Implementación de la Reforma Integral de Educación Media Superior en el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, a partir de la percepción de los docentes. Hermosillo, Sonora, México. p. 11. Recuperado en febrero de 2016 de http://registromodeloeducativo.sep.gob.mx/Archivo;jsessionid=3bbfd4717ca4c4471ceb56f9d69b?nombre=971-Foro+de+consulta+modelo+educativo.doc

López, G. y Tinajero, G. (2009). Los Docentes ante la Reforma del Bachillerato. p.1194. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 14(43). Recuperado en febrero de 2016 de http://www.scielo.org.mx/pdf/rmie/v14n43/v14n43a9.pdf

Macías, C. (2013). *Reconstrucción del rol docente de la EMS: De enseñante tradicional a enseñante mediador*. Tesis que para obtener el grado de Doctora en Educación. Departamento de Educación y Valores. Guadalajara, Jalisco. Pp. 157-158.

Soto, M., García, M., Rodríguez, M., Vargas, J., y Urrea, M. (2014). *Módulo de Aprendizaje de Matemáticas 3*, Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora. Hermosillo.

SEMS. (2011). *Subsecretaría de Educación Media Superior. Dirección General del Bachillerato*. Documento Base del Bachillerato General. Recuperado en febrero de 2016 de http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/01-programasdeestudio/documentobase/doc_base_032012_rev01.pdf

Zaragoza, O. (2013). *La Reforma Integral de Educación Media Superior (RIEMS) y su relación con el desempeño laboral de los docentes del Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica (CONALEP) plantel Ixtapaluca, ciclo escolar 2009-2010.* Tesis de Licenciada en Pedagogía. Secretaría de Educación Pública. Universidad Pedagógica Nacional. Unidad 098 D.F. Recuperado en febrero de 2016 de https://drive.google.com/file/d/0B8od14uglEc6bWd2Y29HSTlhTEthQzNXTUoxd3ZhRzlOb1FZ/view?usp=sharing

Zavalza, M., & Zabalza, M. (2010). *Planificación de la docencia en la universidad: Elaboración de las guías Docentes de las Materias*. Madrid, España: Narcea, S.A. de Ediciones. Obtenido de https://books.google.com.mx/books?id=wnnUWwy4OQIC&lpg=PA177&dq=%22La%20metodolog%C3%ADa%20docente%20constituye%20un%20elemento%22&pg=PA8#v=onepage&q=condicionar&f=false

EL SIGNIFICADO DE LA INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN A PARTIR DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ACUMULACIÓN

Ramiro Ávila Godoy, Jorge Ávila Soria
Universidad de Sonora(México)
ravilag@mat.uson.mx, javilas9@gmail.com

RESUMEN: El propósito de la presente comunicación es mostrar un proyecto de investigación que empieza a desarrollarse, en el que se pretende poner a prueba un modelo de enseñanza de la integral de una función, basado en la resolución de problemas de acumulación que permitan generar un *significado semántico* del objeto matemático *Función Integral* apoyados en las premisas teóricas de los modelos teóricos locales de E. Filloy y colaboradores.

Palabras clave: significado semántico, función integral

ABSTRACT: The purpose of this paper is to show a research project that in its initial stage. It is intended to test a teaching model of the integral of a function, based on accumulation-problem-solving that allow to generate a semantic meaning of the mathematical object Integral Function supported by the theoretical premises of the local theoretical models of E. Filloy et al.

Key words: Semantic Meaning, Integral Function

Introducción

El propósito de la presente comunicación es mostrar un proyecto de enseñanza que hemos diseñado (y empezado a desarrollar) para investigar los procesos cognitivos que se desarrollan al construir el significado de un objeto (y/o proceso) matemático.

Específicamente hablaremos sobre la manera en que estamos investigando los procesos de construcción del significado del objeto matemático *integral de una función* desarrollados por un grupo de estudiantes de ingeniería al tratar de resolver una serie *de* problemas de acumulación.

Consideraciones teóricas en las que se basa el proyecto.

En el diseño y desarrollo de este proyecto se asume la validez de las premisas teóricas del Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y la Cognición Matemática (EOS) de Juan D. Godino, en especial las relativas al carácter sistémico de los significados de los objetos matemáticos que parten de concebirlos de naturaleza pragmática antropológica y, en consecuencia, de carácter contextual, es decir, partimos de que dichos significados son esencialmente, los sistemas de prácticas que se utilizan para analizar, interpretar y resolver un cierto tipo de situaciones problemáticas; que estos sistemas de prácticas son discursivas y operativas y que los elementos que los constituyen son los medios utilizados en dichas prácticas, tales como *el lenguaje*, constituido a su vez, por las diversas formas de representación de los objetos matemáticos (como son la tabular, la gráfica, la analítica, la verbal y otras), *los procedimientos, los conceptos, las propiedades, los argumentos* (utilizados para justificar las propiedades y los procesos que se desarrollan) y *los medios tecnológicos*.

También asumimos que la modelación matemática de situaciones problémicas concretas en un Sistema Matemático de Signos (SMS) origina, por una parte, el surgimiento de problemas matemáticos y por otra, la construcción de significados semánticos asociados a la situación que les dio origen.

Por otra parte, asumimos que el proceso de modelación tiene dos etapas fundamentales, en la primera denominada de traducción, a los nuevos objetos y operaciones que se introducen se les dota de sentido y significado semántico y concreto, por ser de naturaleza contextual.

En la segunda etapa del modelaje, los nuevos objetos y operaciones, esto es, los que surgieron de los significados '*concretos*' que permitieron que fueran creados; en otro momento el proceso de modelaje, pretenden desprenderse de la semántica del modelo '*concreto*', como resultado de que lo que se quiere lograr, no es resolver una situación que ya se sabe que se puede resolver, sino encontrar las maneras de resolver situaciones más abstractas, vía operaciones más abstractas. Esta segunda componente es un principio motor que orienta la función del modelaje hacia la construcción de una sintaxis extra modelo. Los procesos de abstracción y generalización forman parte muy importante de esta etapa del proceso en la que los objetos matemáticos generan el significado sintáctico de los objetos matemáticos.

El diseño de las actividades didácticas

El diseño de las actividades que forman las secuencias, se llevó a cabo utilizando una metodología que tiene las siguientes etapas:

a) Elección de la situación problémica que será objeto de estudio a través de la secuencia.
b) Determinación de los propósitos del estudio (generales y específicos)
c) Formulación y organización de las interrogantes y tareas (problémicas) que servirán para provocar y conducir el proceso de estudio que permita crear, utilizando un SMS, nuevos objetos y procesos matemáticos que tengan, en su origen, un significado semántico para luego, ya creados los objetos con significado semántico, generar un significado sintáctico del objeto creado.

Para ilustrar este proceso, a continuación, se comentan algunas de las actividades diseñadas que forman parte de las secuencias y se explica la razón de su diseño y uso. Las actividades que conforman una secuencia didáctica son de tres tipos: de Inicio, de Desarrollo y de Cierre y se plantean para que cada estudiante las resuelva de manera personal, luego comenten sus respuestas en equipo y, finalmente, comenten lo aprendido y las dudas que les hayan quedado a nivel de todo el grupo. Las secuencias que vemos a comentar se diseñaron para estudiar el proceso de resolución de problemas sobre movimiento; proceso que constituye una parte fundamental de lo que se está investigando en este proyecto:

La situación problémica elegida para el diseño de la primera secuencia:

El cálculo de la distancia recorrida por un móvil que se desplaza por una trayectoria recta durante un cierto intervalo de tiempo.

Los propósitos de la primera secuencia:

Crear el objeto matemático *integral de una función* con significado semántico a partir de la situación problémica elegida.

La actividad de inicio de esta secuencia:

En esta primera secuencia sólo se diseñó una actividad de inicio cuyo propósito general es crear un ambiente propicio para el estudio de la situación problémica elegida. Este objetivo general se podrá alcanzar si se logran los siguientes tres objetivos específicos: a) Que los estudiantes tengan claro los propósitos del estudio de la situación problémica general de la secuencia, b) Que se interesen en realizarlo y c) Que estén en condiciones adecuadas para llevarlo a cabo.

La Actividad diseñada consiste en el análisis y resolución de dos problemas, el primero de ellos fue el determinar cómo se puede calcular la distancia que recorre un móvil en un cierto intervalo de tiempo cuando se mueve con velocidad constante que, como puede verse es un problema sumamente elemental que se decidió incluir sólo para iniciar el proceso de ambientación que favorezca el desarrollo de las actividades de la secuencia.

El segundo problema que se planteó en esta actividad de inicio, fue el determinar cómo se puede calcular la distancia recorrida por un móvil en un cierto intervalo de tiempo cuando se mueve por una trayectoria recta con velocidad variable y la aceleración constante. Este problema se espera que también resulte familiar para los estudiantes y que la mayoría o todos puedan resolverlo sin grandes dificultades. Su inclusión en la actividad de inicio fue por razones similares a las ya expuestas.

Las actividades de desarrollo:

El problema general de estas actividades es el determinar una o más maneras de calcular la distancia recorrida por un móvil que se desplaza por una trayectoria recta, cuando la velocidad con que se mueve y también la aceleración, son variables.

El problema específico que se plantea a los estudiantes es el siguiente:

Determinar al menos un procedimiento que permita calcular la distancia que recorrerá una partícula que se está moviendo por una trayectoria recta durante el tiempo transcurrido entre los instantes t_0 *y* t_1 *sabiendo que* la velocidad con que se está moviendo puede calcularse con la expresión $v(t) = t^2$, en la que t representa el tiempo (medido en segundos) y $v(t)$ representa la velocidad *(medida en* $\frac{m}{seg}$ *)*

Como apoyo a los estudiantes en el intento de resolver el problema se diseñaron varias actividades cuya realización ayudará a analizar el problema e ir entendiéndolo cada vez más. En la primera de estas actividades se pide a los alumnos que calculen los valores de la velocidad de la partícula para los siguientes valores de t: 1, 2, 3, 4 y 5 segundos y que los anoten en una tabla. Luego se pide que observen y analicen lo que sucede con la velocidad a medida que transcurre el tiempo y para conducir el proceso de análisis se les formulan otras preguntas tales como, ¿Cuántas velocidades diferentes tiene la partícula en los primeros cinco segundos de su recorrido? Y en el primer segundo del recorrido ¿Cuántas velocidades diferentes tuvo la partícula?

Se espera que al realizar el análisis lógico de la situación descrita los estudiantes hagan las siguientes deducciones:

a) Dado que la velocidad es continuamente variable, la partícula tendrá un número infinito de velocidades en cualquier intervalo de tiempo y de ahí se infiere que la distancia recorrida no puede calcularse multiplicando la velocidad por el tiempo que dura el movimiento, salvo que pudiera determinarse la velocidad promedio, la cual no puede determinarse sumando todas las velocidades y dividiendo entre el número de velocidades por tratarse de un número infinito de velocidades.

De las respuestas a las preguntas que se formulan en las actividades de desarrollo 2, 3 y 4 se espera que los estudiantes hagan las siguientes deducciones:

b) La distancia recorrida es menor que el producto de la mayor de las velocidades del intervalo por el tamaño del intervalo, y mayor que el producto de la menor de las velocidades por el tamaño del intervalo.

c) Si el intervalo de tiempo se divide en un cierto número de subintervalos y en cada caso se toma la mayor y la menor de las velocidades y se multiplica, cada una de ellas, por el tamaño del subintervalo, se obtendrá en cada uno de los subintervalos una distancia mayor que la que realmente se recorre cuando se haya tomado la velocidad mayor del subintervalo y cuando la velocidad que se tome sea la menor del subintervalo, se obtendrá una distancia menor que la que realmente se recorre; si luego se suman todas las distancias mayores calculadas el resultado obtenido será mayor que la distancia realmente recorrida en todo el intervalo; si por otra parte se suman las distancias recorridas en cada subintervalo al multiplicar la menor de las velocidades del subintervalo por el tamaño del subintervalo el resultado que se obtenga será menor que la distancia realmente recorrida.

d) La suma de las distancias mayores por subintervalo irá decreciendo en la medida que se aumente el número de subintervalos; mientras que la suma de las distancias menores por subintervalo irá creciendo, aunque siempre la suma será mayor que la distancia realmente recorrida en el primer caso y menor en el segundo caso e inferir que si el intervalo de tiempo se divide en subintervalos la distancia que recorre en puede calcularse multiplicando es posible

e) Para una función continua y acotada en un determinado intervalo, si el número de subintervalos de igual longitud es cada vez más grande, la diferencia entre la velocidad máxima y la velocidad mínima en cada subintervalo se irá acercando a cero y, en consecuencia la diferencia entre la suma de las distancias mayores y la suma de las distancias menores también se irá acercando a cero; de donde se sigue que si el intervalo se divide en un número infinito de subintervalos (todos de igual tamaño) las velocidades mayor y menor en cada subintervalo serán también iguales y la suma de las distancias mayores por subintervalo será igual a la suma de las distancias menores por cada subintervalo y, por tanto estas sumas serán iguales a la distancia recorrida en el intervalo.

f) Si llamamos *diferencial* de tiempo a la medida infinitamente pequeña de cada uno del número infinito de subintervalos en que se divide el intervalo y representamos esa medida con ***dt*** entonces, la distancia recorrida en cada uno de esos subintervalos será infinitamente pequeña y ser representará por medio del producto ***v(t)dt*** que llamaremos diferencial de distancia y su suma será igual a la distancia recorrida en todo el intervalo y lo representaremos de la siguiente manera

$$\boldsymbol{d = \int_{t_o}^{t_1} v(t)dt}$$

Donde el símbolo $\int$ indicará que se trata de una suma y los términos $\boldsymbol{t}_{\mathrm{o}}$ y $\boldsymbol{t}_1$ representan el instante inicial y el instante final del intervalos y escritos donde están indican que se están sumando todas las distancias diferenciales desde el instante inicial $\boldsymbol{t}_{\mathrm{o}}$ hasta el instante final $\boldsymbol{t}_1$ **y** desde luego que la $\boldsymbol{d}$ representa la distancia total recorrida.

El significado contextual (semántico) de: $\int_{\boldsymbol{t}_{\mathrm{o}}}^{\boldsymbol{t}_1} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}$ considerando los significados contextuales (semánticos) de

v(t), ***dt***, $\int$, $\boldsymbol{t}_{\mathrm{o}}$, $\boldsymbol{t}_1$, ***v(t)dt***

La formulación de las deducciones que hemos enlistado constituye la actividad decierre de la secuencia pues constituye una síntesis del avance logrado en la pretensión de resolver el problema más general.

Cuando se ha construido el objeto matemático *integral de una función* con el significado semántico que hemos enunciado y que está íntimamente asociado con los significados semánticos de los elementos intervinientes en la construcción del objeto integral de una función, surge de manera natural un nuevo problema:

La necesidad de un procedimiento para efectuar la suma representada por $\int_{\boldsymbol{t}_{\mathrm{o}}}^{\boldsymbol{t}_1} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt},$ dado que se trata de una suma que tiene un número infinito de sumandos y que dichos sumandos son cantidades diferenciales (infinitamente pequeñas), es decir, que no tienen valor numérico.

La nueva situación problémica formulada dio lugar al diseño de la Secuencia Didáctica 2, que a su vez está conformada por Actividades de inicio, de desarrollo y de cierre.

Actividad de inicio

Esta actividad se diseñó para responder la pregunta ¿Cómo se calcula la distancia recorrida por un móvil que se desplaza por una trayectoria recta cuando se conoce la expresión analítica que permite calcular la posición de la partícula en función del tiempo?

Desde luego se trata de un problema resuelto en el curso de Cálculo Diferencial y seguramente en los cursos de Física, al estudiar cinemática y la respuesta es que puede calcularse restándole a la posición en el instante final, la posición en el instante inicial. En términos analíticos la respuesta es

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}_1) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}_{\mathrm{o}})$$

Expresión en la que dice que la distancia que recorre restándole a la posición final, la posición inicial.

En esta segunda secuencia también, como en la primera, hay una sola actividad de inicio. Vienen enseguida las actividades de desarrollo que en la Actividad 1 pretende que los estudiantes puedan formular la pregunta de ¿Cómo puede, a partir de la expresión analítica de la velocidad, obtenerse la expresión analítica de la posición? Desde luego que esta actividad está diseñada para conducir, a base de cuestionamientos, a los estudiantes a formular la pregunta y a recordar la relación existente entre la expresión analítica de la posición y la de la velocidad, esto es, las preguntas de esta actividad están diseñadas para tratar de que los estudiantes puedan llegar al siguiente cuestionamiento; si yo se que la expresión analítica de la velocidad es la derivada de la expresión analítica de la posición, ¿Cómo puedo obtener esta última?

La actividad 3 de desarrollo se diseñó para ayudar a los estudiantes a que se planteen la pregunta ¿Cuál es la función cuya derivada es t^2? Y para que además de formular la pregunta puedan contestarla y que obtenida la función posición la utilicen para calcular la distancia que recorrió.

Después de esas tres actividades de desarrollo viene la Actividad de Cierre donde se hace una síntesis de lo aprendido en la secuencia que equivale a establecer que ahora se tiene un procedimiento para calcular la distancia recorrida por un móvil que se desplaza por una trayectoria recta, cuando la velocidad con que se mueve, y también la aceleración, son variables.

Lo cual significa haber aprendido que cuando conozco la expresión analítica de la velocidad, dado que sé que es la derivada de la posición, el procedimiento para calcular la distancia recorrida consiste en recuperar la función que al derivarla se obtiene la función velocidad y luego utilizar la función posición para calcular la distancia recorrida restándole a la posición al final del intervalo, la posición al inicio del mismo y que lo dicho en este párrafo en el lenguaje matemático se escribe

$$\boldsymbol{d} = \int_{\boldsymbol{t}_{\text{o}}}^{\boldsymbol{t}_1} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}_1) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}_{\text{o}})$$

donde ***P(t)*** es la función cuya derivada es la función ***v(t)***.

La Secuencia didáctica 4 está destinada a reflexionar sobre la interpretación geométrica de la distancia recorrida al representar gráficamente la velocidad

1) Cuando la velocidad es constante:
2) Cuando la velocidad es variable, pero la aceleración es constante.
3) Cuando la velocidad y la aceleración son variables

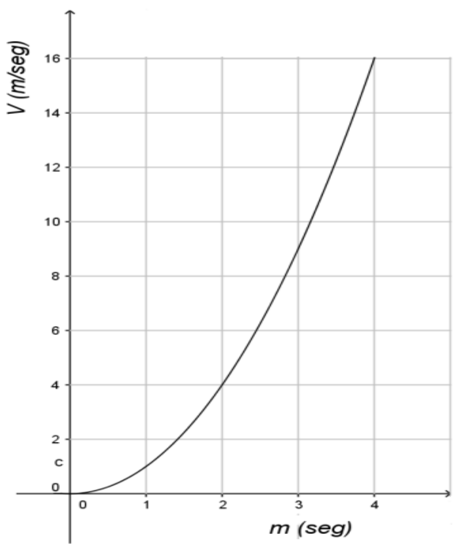


Figura 1

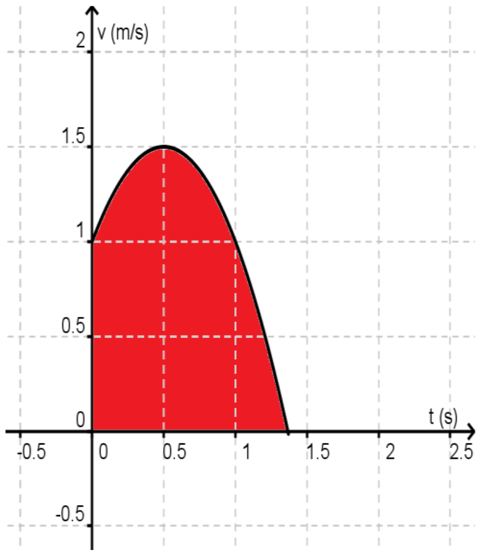


Figura 2

Otras situaciones problémicas

a) El cálculo de áreas de figuras geométricas que tienen al menos un lado curvo
b) El cálculo del volumen de sólidos de revolución
c) El cálculo de la longitud de una curva.

Los significados semánticos de los objetos y procesos matemáticos generados en estos nuevos contextos.

Los procesos de generalización y los significados sintácticos de

$$\boldsymbol{f(x)},\ \boldsymbol{dx},\ \int,\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{f(x)dx}$$

$$\int_a^b f(x)dx\ ,\ \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\ \text{ y }\ F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Referencias bibliográfcas

Filloy, E., Rojano, T. y Solares A. (2010). Problems Dealing Whit UnKnown Quantities and Two Different Levels of Representing UnKnowns. *Journal for Research in Mathematics Education*. Number 1 vol 41 52-80 NCTM.

Filloy, E. (1990). PME Algebra Research. A Working Perspective. En Booker, G.; Coob, O. y Mendicutti, T. N. (eds.). *Proceedings of the XIV- Conference for the Psychology of Mathematics Education* Oaxtepec, México.

Filloy, E. (1999) *Aspectos teóricos del álgebra educativa.* México: Grupo Editorial Iberoamericana,

Filloy, E. y Hoyos, V. (1993). A theory of the production of mathematical sign systems the case of algebraic representations of basic geometrical variation notions. En Joanne, R. y Barbara, J. (eds.) *Proceedings of the xv- Conference for the Psychology of Mathematics Education -North American Chapter,* vol. I Pacific Grove, CA, USA.

Font, V. (2007). *Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas.* La gaceta de la RSME, volumen 10.2

Font, V.; Godino, J.; D´Amore, B. (2007). *Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática*. (Consultado el 12-02-2015 de http://www.ugr.es/loc)

Godino, J. (2010). *Perspectiva de la didáctica de la matemática como disciplina tecnocientífica.* (Consultado el 12-02-2015 de http://www.ugr.es/local/jgodino)

Godino, J. (2010). *Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático.* (Consultado el 12-02-2015 de http://www.ugr.es/local/jgodino)

Ímaz, C.; Moreno, L. (2010). *La génesis y la enseñanza del Cálculo. Las trampas del rigor.* México: Trillas.

LA PLANEACIÓN Y EL DISEÑO DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS EN MATEMÁTICAS: UNA APROXIMACIÓN AL ESTADO DEL ARTE

Silvia Elena Ibarra Olmos, Agustín Grijalva Monteverde
Universidad de Sonora. (México)
sibarra@mat.uson.mx, guty@mat.uson.mx

RESUMEN: En este trabajo se presentan los avances de una investigación documental, cuyo propósito es construir una aproximación al estado del arte sobre las aportaciones que algunos de los principales enfoques teóricos en matemática educativa, han hecho con relación a una actividad central en el desempeño de los profesores: la planeación y el diseño de actividades didácticas en matemáticas. Se concluye con algunas reflexiones sobre qué tan cercanas se encuentran estas aportaciones al mundo cotidiano del profesor de matemáticas.

Palabras clave: diseño actividades didácticas

ABSTRACT: This paper presents the advances of a documentary research, whose purpose is to build an approach to the state of the art about the contributions that some of the main theoretical approaches in educational mathematics have made in relation to a central activity in the performance of teachers: the planning and design of didactic activities in mathematics. It concludes with some reflections on how close these contributions are to the everyday world of the mathematics teacher.

Key words: design of didactic activities

Introducción

Una de las tareas insuficientemente abordada en el ámbito de la Matemática Educativa es cómo hacer llegar los resultados de las investigaciones y teorizaciones, que en el terreno de esta disciplina se han desarrollado, al escenario escolar. Particularmente en el caso del escenario escolar mexicano, las modificaciones curriculares que van del nivel básico hasta el bachillerato plantean, entre otras cosas, modificaciones en las funciones y formas de trabajo del profesorado. En este sentido, una de las funciones más demandadas a los profesores es la planeación, el diseño y la ejecución de actividades o secuencias de actividades didácticas.

Como señala Díaz-Barriga (2013): “El debate didáctico contemporáneo enfatiza la responsabilidad del docente para proponer a sus alumnos actividades secuenciadas que permitan establecer un clima de aprendizaje, …”.

Exigencias como la anterior, hacen que algunas comunidades de profesores dirijan su mirada hacia los grupos de investigadores, en búsqueda de respuestas y sugerencias que contribuyan a mejorar su práctica docente en el ámbito ya mencionado. En este contexto nos planteamos realizar una investigación documental, con miras a la construcción de un estado del arte sobre la cuestión, declarando como pregunta central: ¿Cuáles son las aportaciones de la Matemática Educativa, como disciplina científica, respecto a la planeación y diseño de actividades didácticas?

La indagación bibliográfica sobre cómo algunos de los enfoques teóricos (globales o puntuales) más reconocidos en el campo de la Matemática Educativa abordan las tareas señaladas, nos muestra que si bien éstos surgieron mayoritariamente a partir del interés que los distintos grupos de trabajo que los desarrollaron pusieron en el estudio de la fenomenología concomitante a los salones de clase, los ulteriores procesos de investigación se centraron en tratar de comprender y explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Esto es, el énfasis de las investigaciones, con matices propios de cada comunidad, se ubicó en la búsqueda de explicaciones a diferentes cuestionamientos relativos al cómo se enseña y cómo se da el aprendizaje de las matemáticas, además de estudiar algunas características y las relaciones de los actores en ellos inmersos (profesores, alumnos y conocimiento matemático). Cabe aclarar que, aunque siempre fue una preocupación latente, podría considerarse como relativamente reciente lo que llamaríamos “el regreso hacia el escenario de origen”.

> The design and use of tasks for pedagogic purposes is at the core of mathematics education (Artigue & Perrin-Glorian, 1991). Tasks generate activity which affords opportunity to encounter mathematical concepts, ideas, strategies, and also to use and develop mathematical thinking and modes of enquiry. Teaching includes the selection, modification, design, sequencing, installation, observation and evaluation of tasks. This work is often undertaken by using a textbook and/or other resources designed by outsiders. (Margolinas, 2013, p. 12)

Consideraciones metodológicas

Para alcanzar el objetivo propuesto se llevaron a cabo las etapas siguientes:

Etapa 1. Se planteó la interrogante que guiaría el proceso de construcción del estado del arte.

Etapa 2. Se seleccionaron los enfoques teóricos y las correspondientes fuentes que permitirían dar respuesta a la pregunta formulada.

Etapa 3. Se analizó la información seleccionada.

Etapa 4. Se establecieron las conclusiones.

Etapa 5. Se dieron a conocer los resultados.

Resultados

Los enfoques teóricos que fueron seleccionados para este trabajo, junto con la descripción sintetizada de cada uno de ellos en el tema de interés son:

a) La ingeniería didáctica. De acuerdo con las fuentes revisadas, la ingeniería didáctica apareció en la corriente francesa conocida como Didactique des Mathématiques a inicios de los años ochenta, con una doble personalidad. Por un lado, se declaraba como una metodología de investigación, con fases claramente definidas: los análisis preliminares, las concepciones y análisis a priori de las situaciones didácticas contempladas en la ingeniería, la experimentación y por último la fase de análisis a posteriori y su evaluación. Por otro lado, se declaraba también como “un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un profesor-ingeniero, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumno”. (Douady, 1995, p.62).

En este caso, el primer paso en la elaboración de una ingeniería didáctica es la elaboración de un problema. De hecho, una característica muy importante en las ingenierías didácticas es que están diseñadas y organizadas alrededor de problemas por medio de los cuales de dotará de sentido a las nociones matemáticas que están involucradas en su desarrollo. Debido a su relación estrecha con la Teoría de las Situaciones de Brousseau, los procesos descritos en esta última teoría, como son la contextualización, cambio de contexto, reformulación de problemas, etc., tienen un lugar preponderante.

Los primeros reportes sobre diseño e implementación de ingenierías didácticas señalan que se requieren equipos de trabajo integrados por profesores habilitados para su apropiada realización didáctica, así como de los investigadores que las crearon.

b) La Teoría Antropológica de lo Didáctico, comúnmente conocida como TAD, por sus siglas, propone a las llamadas praxeologías u organizaciones didácticas como respuesta a preguntas del tipo ¿cómo estudiar la cuestión?, o ¿cómo estudiar la obra matemática? Ha sido desarrollada aproximadamente a lo largo de los últimos 30 años, surgiendo a partir de la reconceptualización que hace Chevallard (1999) de la matemática como una actividad humana, lo que le da el carácter de antropológica a su teoría.

La praxeología, según los autores, permite capturar las componentes esenciales de cualquier actividad matemática: las tareas, las técnicas, las tecnologías y las teorías. Las tareas y las técnicas constituyen el saber hacer, en tanto que las tecnologías y las teorías concretan el conocimiento que permite explicar y justificar las técnicas utilizadas para enfrentar a las tareas.

Para sus diseños, la “ruta crítica” seguida por la TAD es la siguiente:

Se habla de los llamados recorridos de estudio e investigación, que consisten en un conjunto de actividades de estudio relacionadas entre sí por una cuestión generatriz; en ellos se integran praxeologías puntuales (técnicas construidas en torno en torno a un único tipo de pre problemas) en praxeologías locales. Estos recorridos se trabajan con base en momentos (del encuentro, de la exploración, del trabajo de la técnica, de la constitución del entorno tecnológico, de la evaluación, de la institucionalización). Metodológicamente, los momentos están claramente definidos y con intencionalidades didácticas bien especificadas.

c) La metodología ACODESA (Hitt, 2009), denominada así por sus siglas, que significan Aprendizaje en colaboración, Debate científico, y Auto reflexión.

Esta aportación metodológica se soporta teóricamente en una teoría del aprendizaje, la cual se considera ligada a la construcción de esquemas cognitivos. La pregunta es entonces, cómo se construyen estos esquemas. El autor parte de un análisis del trabajo de Duval quien, de acuerdo con Hitt, no considera a la resolución de problemas, a las situaciones problema ni a la evolución de representaciones.

Esta aseveración tiene sentido, si tomamos en consideración que las explicaciones de la teoría de Duval son de carácter cognitivo, es decir, no están centradas en intereses didácticos. Abundando sobre el tema, Hitt señala que las representaciones de los objetos matemáticos que Duval menciona son representaciones de carácter institucional, las cuales no coinciden con las que son generadas por los individuos cuando son enfrentados a un problema. Estas primeras representaciones son llamadas representaciones funcionales; el problema del profesor consiste entonces en hacer evolucionar las representaciones funcionales hacia las institucionales, y para lograr esto se requiere de diseños instruccionales bien organizados, los cuales integran a las nociones de problema, situación problema y ejercicio.

Éstos son caracterizados así:

- Situación problema: La situación no debe haber sido previamente presentada. Para resolverla satisfactoriamente se requiere del uso de reglas o principios que no hayan sido aprendidos con anterioridad. De igual manera, el producto o su forma esperada, no ha sido presentada anteriormente. La función de una situación problema es promover la generación de las representaciones funcionales.
- Problema: Se considerará que se está enfrentado a un problema si al encarar un enunciado matemático, no contamos con un procedimiento específico y requerimos de construcciones particulares de representaciones (representaciones funcionales), que se conecten con otras representaciones internas, promoviendo la producción de representaciones externas que nos ayuden en la resolución de la tarea en cuestión. Su papel es permitir la evolución de las representaciones funcionales a las institucionales.
- Ejercicio: Si dado un enunciado matemático, inmediatamente viene a la mente un procedimiento conocido, podemos clasificar este enunciado como un ejercicio. S papel consiste en favorecer la consolidación del conocimiento.

ACODESA distingue 5 fases para el trabajo a desarrollar en el aula:

- Trabajo individual, donde se pretende que el estudiante comprenda la situación problema y pueda emprender las tareas señaladas.
- Trabajo en equipo sobre la misma tarea, donde se promoverán procesos de discusión y validación.
- Debate, cuyo propósito es generar procesos de discusión y validación sobre las tareas emprendidas.
- Auto – reflexión, trabajo individual de reconstrucción en casa, fuera del escenario escolar.
- Institucionalización del conocimiento, etapa que corre a cargo del profesor.

Como puede advertirse, en esta propuesta hay una influencia de las corrientes socioculturales. Otro aspecto importante a resaltar aquí, es el papel que se concede a las tecnologías: en las primeras etapas se señala la conveniencia de incorporar manipulables, dejando la participación de las tecnologías de cómputo para los momentos finales.

En este caso el diseño de actividades no es trivial. Se hace necesario un trabajo muy completo y bien articulado para poder desarrollar una actividad.

d) La socioepistemología y sus propuestas sobre rediseño del discurso matemático escolar Esta corriente teórica fue desarrollada en sus inicios por investigadores mexicanos, quienes plantean que la evolución de la problemática de la matemática educativa ha ido transitando a lo largo de las siguientes fases:

- Una didáctica sin alumnos.- Se tenían planteamientos ingenuos sobre la problemática, pues el tema central era cómo diseñar situaciones de aprendizaje “más accesibles” para la mayoría de los estudiantes.
- Una didáctica sin escuela.- El énfasis estaba puesto en responder dos preguntas:

  a) Cómo aprenden las personas

  b) Cómo aprender a observar procesos de aprendizaje
- Una didáctica en la escuela, pero sin escenarios.- Lo que dio origen a las aproximaciones sistémicas.
- Una didáctica en escenarios socioculturales.- La matemática escolar está al servicio de otros dominios científicos y de otros prácticas de referencia, de donde toma sentido y significado. (Farfán, 2012).

En esta corriente teórica se advierte, al menos en sus inicios, una fuerte influencia de la escuela francesa, fundamentalmente de los planteamientos de Brosseau; por eso retoman como método de investigación a la ingeniería didáctica, pero poniendo como eje rector un constructo teórico denominado prácticas sociales. En consecuencia, se requiere un rediseño del discurso matemático escolar que ya no esté centrado en los objetos, sino precisamente en las prácticas sociales.

Los profesores, de acuerdo con la socioepistemología, deben reconocer al menos tres tipos de epistemologías matemáticas: la del saber sabio, la del profesor y la del estudiante. Además, señala que los estudiantes deben enfrentar situaciones que no sean ficticias ni aisladas de las otras ciencias y ramas del saber.

En sus diseños proponen situaciones de aprendizaje en las cuales “se profundiza en discusiones que permiten reflexionar sobre la matemática escolar, como herramienta y como objeto, la actividad del profesor, sus intervenciones durante la implementación de la situación, el desempeño del estudiante, la anticipación de posibles respuestas…” (Farfán, 2012, p.50), por citar algunos aspectos.

e) El Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (Godino, Batanero y Font, 2019), el cual asegura haber construido una serie de nociones teóricas que permiten operativizar la planeación y ejecución de un proceso de instrucción matemática. Una de las declaraciones primeras de este enfoque es sobre la triple acepción de la matemática: como una actividad de resolución de problemas, como un lenguaje simbólico y como un sistema conceptual bien organizado.

La base del trabajo matemático es el desarrollo de las prácticas matemáticas, esto es, de las acciones que se realizan para resolver situaciones problema y comunicar resultados matemáticos. El profesor debe entonces reconocer las prácticas matemáticas que se desea promover, identificándolas como la referencia a partir de las cuales se desarrollarán las actividades docentes.

Para que el desarrollo de esas prácticas sea adecuado, es necesario considerar varios aspectos, entre otros los siguientes:

- Las trayectorias epistémicas y cognitivas que se implementarán en el salón de clases para la construcción de conocimiento por parte de los alumnos.
- Una serie de consideraciones que conduzcan a que los procesos de enseñanza y de aprendizaje resulten lo más idóneos posibles, tomando en cuenta criterios de idoneidad epistémica, cognitiva, interaccional, ecológica, mediacional y emocional. (Godino, 2013).

A manera de conclusión

Los resultados de la revisión que se ha reseñado en el apartado anterior, arrojan algunas coincidencias. Entre ellas podemos señalar:

- El reconocimiento de la complejidad de la tarea, por lo cual se empieza a poner interés en una serie de aspectos no contemplados anteriormente.
- La necesidad de crear escenarios de construcción social del conocimiento.
- La importancia de las situaciones problemáticas como detonantes de la actividad matemática.
- La solución de problemas como fuente de construcción de la matemática.
- El papel activo del estudiante.
- El papel del profesor como conductor de la actividad de aprendizaje.

A pesar de que estas coincidencias podrían considerarse como señales optimistas de que poco a poco se va convergiendo en los resultados de la investigación, una preocupación latente es la lejanía que todavía se advierte entre las diferentes propuestas y el ejercicio cotidiano de los profesores en lo que es una de sus tareas cotidianas más importantes: el diseño y planeación de sus actividades de enseñanza.

Referencias bibliográficas

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En Gómez, P. (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol 19, nº 2, pp. 221-266.

Díaz Barriga, A. (2013). Guía para la elaboración de una secuencia didáctica. Recuperado de: http://www.setse.org.mx/ReformaEducativa/Rumbo%20a%20la%20Primera%20Evaluaci%C3%B3n/Factores%20de%20Evaluaci%C3%B3n/Pr%C3%A1ctica%20Profesional/Gu%C3%ADa-secuencias-didacticas_Angel%20D%C3%ADaz.pdf

Farfán, R.M. (2012). *El desarrollo del pensamiento Matemático y la actividad docente.* México: Editorial Gedisa,

Hitt, F. (2009). Artículo Invitado. *Revista digital Matemática*, *Educación e Internet* (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/). Vol. 10, No 1.

Godino, J., Batanero, C. y Font (2009). Un Enfoque Onto-Semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Recuperado el 21 de Mayo de 2014 en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (11), 111-132.

Margolinas, Claire. (2013). Task Design in Mathematics Education. *Proceedings of ICMI Study 22. Proceedings of ICMI Study 22*. 2013. <hal-00834054v2>

LA EVALUACIÓN A CARGO DE LOS ESTUDIANTES, UN CAMBIO DE PARADIGMA PARA LOS PROFESORES: DE EXÁMENES A RÚBRICAS

Isabel Cristina Elizondo Ordóñez, María Dhelma Rendón Saldívar, Norma Patricia Salinas Martínez
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Monterrey. (México)
isabel.cristina.elizondo@itesm.mx, maria.dhelma.rendon@itesm.mx, npsalinas@itesm.mx

RESUMEN: Se comparte la experiencia de trabajo colegiado realizada por siete profesores comprometidos con su participación en un proyecto de innovación educativa. El proyecto consiste en el desarrollo de un curso híbrido y de aula invertida apoyado en un MOOC (Massive Open Online Course) con el que se propuso un cambio de paradigma para la evaluación de los estudiantes. El reto de elaboración de rúbricas adecuadas para las diferentes actividades en el aula, y el continuo monitoreo de los estudiantes en su proceso de autoevaluación, permitieron a los profesores transferir la responsabilidad a los estudiantes y motivarlos a comprometerse con su propio aprendizaje.

Palabras clave: innovación didáctica, autoevaluación, rúbricas

ABSTRACT: This paper shares the experience of joint work carried out by seven teachers who are included in an educational innovation project. The project consists of developing a hybrid course with an inverted classroom, supported by a MOOC (Massive Open Online Course) which proposed a paradigm change for students' evaluation. The challenge of elaborating appropriate rubrics for the different activities in the classroom and the continuous monitoring of the students in their self-evaluation process allowed teachers to transfer responsibility to the students and motivate them to commit themselves to their own learning.

Key words: didactic innovation, self-evaluation, rubrics

El Tecnológico de Monterrey (ITESM) es una universidad privada que se encuentra al norte de México, cuya misión es "Desarrollar líderes con espíritu emprendedor, sentido humano y competitivos internacionalmente". La institución ha ido transformando su perspectiva sobre la educación considerando que la formación de estudiantes va más allá de los conocimientos impartidos en las aulas, canalizando así sus esfuerzos a también desarrollar actitudes éticas, emprendedoras, innovadoras, con un amplio sentido de la responsabilidad social y el respeto al medio ambiente para impulsar un desarrollo sano del país.

En el mundo actual los grandes avances tecnológicos han permitido que hoy en día se tenga acceso a diversas fuentes de conocimiento y así se amplíen las oportunidades de aprender. Esto conlleva un cambio en la Educación, desde el cómo estructurar los contenidos de un curso, la forma de enseñarlos, y hasta la forma de evaluarlos.

El ITESM tiene gran interés en la innovación y actualización continua del currículo, atendiendo a las demandas no sólo de nuestra sociedad local y del país sino de la sociedad globalizada. Por ello se han abierto nuevos espacios de aprendizaje, en los que el tiempo y la ubicación física no son limitantes para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Así mismo los dispositivos electrónicos móviles, han permitido que tanto docentes como estudiantes tengan acceso continuo a recursos educativos y/o contenidos dentro y fuera del aula.

Todo lo anterior señala la importante oportunidad de crear nuevos ambientes de aprendizajes en donde los estudiantes se enfrenten a situaciones en contexto, que les permitan construir su propio conocimiento, y esto mediante el trabajo colaborativo llevado a cabo en el aula. Actualmente no se trata de reproducir lo transmitido por el profesor, sino aprovechar el acceso al conocimiento gracias a la tecnología, ahí el rol del profesor cambia y es necesario el continuo desarrollo profesional de los profesores, como se propone en Marginson et al. (2013) y Burden et al. (2016).

En particular los MOOC (Massive Open Online Course) son una fuente accesible de aprendizaje para aquellos que cuentan con recursos y acceso a internet (Johnson et al., 2016). Con base en las necesidades institucionales y de una sociedad globalizada, y la investigación documentada sobre la problemática inherente al aprendizaje del Cálculo, hemos llegado a reflexionar sobre la práctica y la forma de evaluar los aprendizajes. De este modo, el departamento de Investigación Educativa, Tec Virtual en conjunto con el Departamento de Matemáticas del Campus Monterrey, emprenden un proyecto de innovación didáctica al diseñar un MOOC en la plataforma Coursera, el cual se titula "Matemáticas y Movimiento". Considerando esta acción institucional, se generó la oportunidad de desarrollar el curso de "Introducción a las Matemáticas" en un formato innovador. Este curso se ofrece en el ITESM a nivel superior y está dirigido para atender a los estudiantes que provienen de preparatorias externas a la institución que no adquieren el puntaje necesario para acreditar el examen de ubicación (los estudiantes de preparatorias del ITESM tienen pase automático a las carreras profesionales).

En el curso de Introducción a las Matemáticas se pretende que el estudiante adquiera los conocimientos matemáticos necesarios para su mejor desempeño en sus estudios profesionales. No basta hacer un recordatorio de diferentes ramas de la Matemática Elemental, como es el Álgebra, Geometría Analítica, Trigonometría, e incluso Aritmética, sino más bien reconsiderar el servicio de estos conocimientos para la Introducción al Cálculo; esto se logra a través de analizar *el cambio* que experimentan diversas magnitudes (posición, velocidad, tiempo, etc.) en diferentes contextos reales, utilizando para ello las representaciones algebraica, numérica y gráfica.

En el curso MOOC Matemáticas y Movimiento, se ha realizado una innovación al introducir significado real en el proceso de aprender y al utilizar tecnologías digitales para interactuar con y entre las diferentes representaciones matemáticas. El curso de Introducción a las Matemáticas se apoya en el MOOC para replantearlo en el formato de curso híbrido y de aula invertida. Se lleva a cabo por primera vez en el semestre de agosto-diciembre de 2013 de esta manera, y es importante señalar que a la fecha se está implementando la sexta edición del mismo. Los cursos híbridos combinan componentes presenciales como componentes en línea, esto en diferentes proporciones, a su vez, el formato de aula invertida propone que los videos “los estudiantes los vean en casa antes de la siguiente clase, y durante la clase los estudiantes discuten e interactúan con sus profesores considerando dudas, aprendizajes y otros aspectos relevantes de los videos que vieron” (Salinas, 2015, p.4).

Este curso se lleva a cabo en 4 sesiones de 90 minutos por semana, durante 14 semanas, mediante la siguiente tónica: Los estudiantes realizan el estudio de los videos a través del MOOC en donde pueden acceder a los contenidos del curso y elaboran un resumen en su cuaderno, que hace la función de los apuntes de un curso tradicional, esta actividad la realizan fuera del aula y se revisa el primer día de la semana, teniendo un valor de hasta el 20% de su calificación semanal, siendo éstos los Conocimientos Teóricos, es decir el Saber Puro.

Y dentro del aula se realiza el primer día de la semana un examen rápido para evaluar de una manera concreta los conceptos previamente estudiados, dicho examen se realiza a través de la plataforma tecnológica Blackboard, mediante cualquier dispositivo electrónico conectado a internet, de manera sincrónica, lo que permite que el estudiante obtenga su retroalimentación de forma inmediata y le permita conocer sus áreas de oportunidad; para esta actividad se tiene contemplado un 10% como máximo de la calificación semanal. Cabe mencionar que sin los dispositivos electrónicos y el acceso a internet esto no sería posible llevarlo a cabo.

Posteriormente se realiza una actividad individual, cuya calificación máxima corresponde al 20% de la nota semanal (segunda sesión de la semana), una actividad colaborativa o con uso de tecnología, también con un 20% de la calificación semanal (tercera sesión de la semana), donde el estudiante desarrolla ejercicios de aplicación que cubren los temas vistos en los videos. Con estas actividades se pretende que el estudiante desarrolle habilidades, actitudes y valores, es decir el Saber Hacer. Además consideramos que está presente el Saber Estar ya que realizan actividades en forma colaborativa, aprendiendo con ello a convivir y compartir conocimientos adquiridos.

El profesor interactúa de forma continua con los estudiantes, aclarando dudas y guiándolos para la obtención del objetivo planteado o realizando un cierre de la sesión, para asegurar que se haya logrado la adquisición del conocimiento, así como la adquisición de habilidades.

Al finalizar la semana se realiza una evaluación de contenidos con preguntas y/o problemas de múltiples respuestas, cuyo resultado puede mejorarse en tres oportunidades, en el aula, con un 30% de la calificación semanal. La calificación del curso se conforma por el promedio de la calificación de las 14 semanas.

En este artículo compartiremos la experiencia de siete profesores que han impartido el curso de Introducción a las Matemáticas, a lo largo de estas seis ediciones en las que se ha impartido del mismo. Hablaremos de la experiencia de los profesores en relación a una de las innovaciones de gran peso en el curso, el cambio de paradigma en la evaluación a cargo de los estudiantes. Este cambio propuesto, discutido y aceptado desde la primera edición, ha ido avanzado a la vez que nos ha proporcionado la oportunidad de desarrollar nuestra práctica educativa de una manera más consciente de los nuevos formatos de cursos y con ello, nuevos formatos de evaluación.

El trabajo colegiado de estos siete profesores inicia en el verano del 2013, en donde se tuvieron reuniones semanales, se revisaron los videos (realizados por la Dra. Patricia Salinas) que los estudiantes tienen acceso a través del MOOC, se organizaron los materiales para el diseño de las actividades que se realizan en el aula, se analizó y reflexionó sobre la mejor manera de lograr el aprendizaje de las matemáticas en nuestros estudiantes, así como la estrategia de evaluación mediante rúbrica específica por actividad y/o evaluación en línea. Con respecto a la estrategia de evaluación, la metodología que hemos estado desarrollando a través del tiempo consiste en la elaboración de rúbricas para la evaluación de cada una de las diferentes actividades que se llevan a cabo en el aula, cuando interactuamos con los estudiantes. Dichas rúbricas se muestran en las siguientes tablas.

Tabla 1. Rúbrica para evaluar la actividad del Estudio de Videos

ACTIVIDAD ESTUDIO DE VIDEOS					
TU DESEMPEÑO	No estudié los vídeos.	Si vi los vídeos pero no realicé reporte de ninguno.	Vi los vídeos y realicé un reporte medianamente satisfactorio de M de ellos.	Vi los vídeos y realicé un reporte satisfactorio de N de ellos y medianamente satisfactorio	Vi los vídeos y realicé un reporte satisfactorio de N de ellos.

				de M de ellos.	
TU EVALUACIÓN	**0**	**0**	Multimplicamos M por 0.05	Multiplico N por 0.1 y agrego la multiplicación de M por 0.05	Multiplico N por 0.1

Tabla 2. Rúbrica para evaluar la actividad individual

ACTIVIDAD INDIVIDUAL						
TU DESEMPEÑO	No vine, o bien, no hice nada.	Trabajé pero no lo hice individual (me copié).	Hice prácticamente la mitad de la actividad pero estuve preguntando.	Hice la mitad o un poco más pero sin ayuda (individual).	La hice completa pero estuve preguntando a compañeros.	La hice completamente en forma individual, si acaso pregunté algo al profesor.
TU EVALUACIÓN	**0**	**.2**	**.4**	**.6**	**.8**	**1**

Tabla 3. Rúbrica para evaluar la actividad colaborativa

ACTIVIDAD COLABORATIVA						
TU DESEMPEÑO	No vine, o no participé con mi equipo.	Prácticamente nos la copiamos de otro(s) equipo(s).	Hicimos un poco menos de la mitad, pero en equipo.	Hicimos la mitad o un poco más, y en equipo.	La hicimos casi completa, como un 80%, y como equipo.	La hicimos completa y colaborativamente, como un buen equipo.
TU EVALUACIÓN	**0**	**.2**	**.4**	**.6**	**.8**	**1**

Tabla 4. Rúbrica para evaluar la actividad con uso de tecnología

ACTIVIDAD CON TECNOLOGÍA						
TU DESEMPEÑO	No vine, o no hice nada, o no usé tecnología	Trabajé pero copiando de lo que hacían los compañeros.	Hice menos de la mitad, con tecnología.	Hice la mitad o un poco más de la mitad, con tecnología.	Hice como un 80% de la actividad con tecnología, pero no la entregué a tiempo en BB.	La hice completa usando la tecnología, y la entregué a tiempo en BB.
TU EVALUACIÓN	**0**	**.2**	**.4**	**.6**	**.8**	**1**

Desde la primera implementación en agosto de 2013 sesionamos semanalmente y en estas sesiones se tomaron decisiones acerca de la dinámica semanal que se llevaría en el curso, tanto fuera como dentro del aula, la cual ya mencionamos anteriormente.

Cabe mencionar que un reto, tanto para los profesores como para los estudiantes, fue practicar la autoevaluación por parte de los estudiantes, la cual le permitiría mejorar la responsabilidad sobre sus acciones como estudiante, valorar la oportunidad de educación en el nivel universitario, reflexionar sobre su participación en el desarrollo del curso, ejercitar su honestidad y la autogestión del aprendizaje, apreciar el aprendizaje de las Matemáticas sin exámenes, entre otras cosas.

Si bien es cierto que para los estudiantes representó un cambio innovador el formato de aula invertida, también fue innovadora la forma de ser evaluados. A través de un proceso de autoevaluación, el estudiante tiene la responsabilidad de evaluar su propio proceso de aprendizaje durante las 14 semanas que dura el curso. Este ha sido un cambio de paradigma importante, tanto para los profesores como para los estudiantes, primeramente porque se tienen calificaciones semanales en lugar de exámenes parciales escritos, y porque es ahora el estudiante quien se evalúa, a través de un registro de evaluaciones de sus actividades semanales.

Tabla 5. Registro de evaluaciones de actividades semanales

REGISTRO DE EVALUACIONES DE ACTIVIDADES CURSO 1: MODELO LINEAL											
NOMBRE:									**No.**	**LISTA**	
ACTIVIDADES MÓDULO 1	**LU**	**MA**	**JU**	**VI**	**CM1**	**ACTIVIDADES MÓDULO 2**	**LU**	**MA**	**JU**	**VI**	**CM2**
Actividad Estudio de Videos y Reporte en Libreta (20)						Actividad Estudio de Videos y Reporte en Libreta (20)					
Calificación del Quiz en Aula (0.1)						Calificación del Quiz en Aula (0.1)					
Actividad Individual en Aula (20)						Actividad Individual en Aula (20)					
Actividad Colaborativa o Tecnológica en Aula (20)						Actividad Colaborativa o Tecnológica en Aula (20)					
Evaluación Coursera (0.3)	1	2	3			Evaluación Coursera (0.3)	1	2	3		
FIRMA:				**CM1**		**FIRMA :**				**CM2**	
ACTIVIDADES MÓDULO 3	**LU**	**MA**	**JU**	**VI**	**CM3**	**ACTIVIDADES MÓDULO 4**	**LU**	**MA**	**JU**	**VI**	**CM4**
Actividad Estudio de Videos y Reporte en Libreta (20)						Actividad Estudio de Videos y Reporte en Libreta (20)					
Calificación del Quiz en Aula (0.1)						Calificación del Quiz en Aula (0.1)					
Actividad Individual en Aula (20)						Actividad Individual en Aula (20)					
Actividad Colaborativa o Tecnológica en Aula (20)						Actividad Colaborativa o Tecnológica en Aula (20)					
Evaluación Coursera (0.3)	1	2	3			Evaluación Coursera (0.3)	1	2	3		
FIRMA:				**CM3**		**FIRMA :**				**CM4**	
Calificación Curso 1 =	CM1 + CM2 + CM3 + CM4 =										
Modelo Lineal			4								
Calificación Curso 1 =	____+____+____+____=										
Modelo Lineal			4								

Al inicio fue difícil para el profesor mantener una postura imparcial para no influir en la calificación registrada por el alumno para cada actividad. Se insistía en la importancia de ser honesto de acuerdo a la rúbrica, sin embargo puede mencionarse que aproximadamente a mitad del curso, antes la semana 7 u 8, algunos estudiantes modificaron su actitud con respecto a la sobreevaluación que ellos mismos habían realizado.

En las seis ediciones que se ha ofrecido el curso, los profesores han realizado al menos tres rediseños de rúbricas para cada actividad, que intentan describir minuciosamente el desempeño del estudiante, tratando con ello de tener un mejor control del proceso de autoevaluación.

Podemos concluir que la evaluación en el curso ha sido una innovación por involucrar al estudiante en el proceso de auto-evaluarse y darle la oportunidad de actuar con responsabilidad. Los profesores concedimos un voto de confianza en los estudiantes, y ellos se involucraron más en su proceso de aprendizaje. Consideramos que con esto se fortalecieron además valores como responsabilidad, honestidad y justicia.

Con la transformación de este proceso educativo reafirmamos, como menciona Morin (1999), que el conocimiento se logra cuando se integran los saberes, el saber puro, el saber hacer, el saber estar y el saber vivir juntos; grandes pilares en donde se sostiene la educación y hace a ésta un transformador del ser.

Referencias bibliográficas

Burden,K., Aubusson, P., Brindley, S. & Schuck, S. (2016): Changing knowledge, changing technology: implications for teacher education futures, Journal of Education for Teaching, DOI: 10.1080/02607476.2015.1125432

Johnson, L., Adams Becker, S., Cummins, M., Estrada, V., Freeman, A., and Hall, C. (2016). NMC Horizon Report: 2016 Higher Education Edition. Austin, Texas: The New Media Consortium.

Marginson, S, Tytler, R, Freeman, B and Roberts, K (2013). STEM: Country comparisons. Report for the Australian Council of Learned Academies, Retrieved from http://www.acola.org.au.

Morin, E. (1999). *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro*. Recuperado el 18 de enero de 2016, de http://www.rsu.uninter.edu.mx/doc/EdagarMorin.pdf

Salinas, P., Quintero, E., Rodríguez-Arroyo, J. (2015) *“Curso híbrido y de aula invertida apoyado en MOOC: experiencia de autoevaluación”* Apertura, vol 7, núm 1, abril-septiembre. Universidad de Guadalajara, México.

Otey, C. (2007). *Alcances al concepto de Educación.* Recuperado el 24 de febrero de 2016. de http://oteyaguila.blogspot.mx/2007/06/alcances-al-concepto-de-educacin.html

Unesco E., (2015). *Replantear la educación ¿Hacia un bien común mundial?* Recuperado el 18 de enero de 2016, de http://unesdoc.unesco.org/images/0023/002326/232697s.pdf

USANDO EL CÁLCULO DE VOLUMENES DE RECIPIENTES PARA CONSTRUIR SIGNIFICADOS EN LA FACTORIZACIÓN DE EXPRESIONES CÚBICAS

Jorge Ávila Soria
Universidad de Sonora. (México)
javilas9@gmail.com

RESUMEN: Decidimos investigar el problema de la factorización de polinomios debido a nuestra propia experiencia, así como los reportados por otros investigadores. Observamos que el número de estudiantes que sabe cómo factorizar un polinomio notable, demuestra que la factorización de expresiones algebraicas es difícil de dominar para un alto porcentaje de estudiantes que entran en carreras de ingeniería. Creemos que uno de los principales factores de este fenómeno es el enfoque mecánico, simplista y memorista con el que fueron presentados después del sexto grado. Con esta investigación queremos demostrar que la construcción de significados por parte de los estudiantes, para la factorización en un contexto dado, les permite aprender a identificar la importancia de la estructura del factor y reconocer elementos relacionados con el problema estudiado. Por esta razón, la propuesta de secuencia didáctica fue diseñada para que los estudiantes generen sus propias representaciones funcionales y significativas de los objetos matemáticos involucrados.

Palabras clave: factorización, significados contextuales, resolución de problemas

ABSTRACT: We decided to investigate the problem of factorization of polynomials due to our own experience, as well as those reported by other researchers. We observe that the number of students, who knows how to factorize a remarkable polynomial, shows that the factorization of algebraic expressions is difficult to master for a high percentage of students entering engineering degree courses. We believe that one of the main factors of this phenomenon is the mechanical, simplistic and memoirist approach with which they were taught after the sixth grade. With this research we want to demonstrate that the construction of meanings by students, for factorization in a given context, allows them to learn to identify the importance of factor structure and to recognize elements related to the problem studied. That’s why, the didactic sequence we proposed was designed so that the students generate their own functional and significant representations of the mathematical objects involved.

Key words: factorization, contextual meanings, problem solving

Introducción

La factorización de expresiones algebraicas es difícil de dominar para un alto porcentaje de estudiantes, esto a pesar o quizás por el enfoque memorista con que se enseñan los productos y factores notables. La enseñanza del tema se convierte en un dolor de cabeza en el nivel superior, pues los estudiantes en los buenos casos sólo saben factorizar las expresiones más sencillas y en la mayoría de los casos, los estudiantes recuerdan muy poco a nada de eso que se les dio en la escuela secundaria y de nuevo en el bachillerato. Creemos que esto se debe a las pobres significaciones que la factorización les dejó. Pensamos que, en muchos casos, sólo llegaron a memorizar los métodos por poco tiempo, sin entender realmente y sin tener alguna razón para hacer y aprender cómo factorizar. Es por esto que decimos que la construcción de significados para la factorización en un contexto dado, permite que los estudiantes identifiquen la estructura del factor y reconozcan elementos relacionados con el problema estudiado.

Tras algunos años de impartir las materias de matemáticas a estudiantes de las diversas ingenierías, se que la mayoría de quienes ingresan a estas carreras, tienen un significado muy pobre de la factorización; a pesar de haber estudiado el tema desde el nivel básico (secundaria) y haberlo abordado varias ocasiones más en el nivel medio superior, los significados que los alumnos adquieren de los factores son demasiado reducidos y casi nunca van éstos asociados a algún contexto que les permita relacionar dichos factores con éste, bien puede decirse que su manejo depende fundamentalmente de su memorización, esto es, de recordar o no los métodos de factorización.

A pesar de ser un problema bien identificado y latente en todo el continente, por no decir que en el mundo, parece ser que la atención que se le presta a la factorización por parte de la comunidad de matemática educativa es poca. Como muestra de esto, basta decir que en las ediciones del ALME del año 2004 al 2014, sólo 49 artículos mencionan términos asociados con la factorización y la mitad de ellos sólo los listan junto con otras palabras asociadas a las matemáticas. La palabra factorización aparece en promedio una vez cada 86 páginas de texto publicado y con los dedos de una mano se pueden contar los artículos que tratan el proceso de factorización y su enseñanza en el aula.

Metodología de diseño y marco teórico

La metodología y el marco teórico que utilizamos para el diseño de la secuencia didáctica que aquí presentamos, están fundamentados en ACODESA (aprendizaje en colaboración, debate científico, y auto reflexión), propuesta por Hitt (2009), con la cual se busca que con el uso de manipulables se promueva la producción de representaciones funcionales por los estudiantes, lo cual creemos es fundamental para que estos tengan una mejor retención de las construcciones matemáticas estudiadas. De acuerdo con Hitt y Cortés (2009), entre los diversos marcos teóricos que soportan ACODESA, están el de campos conceptuales de Vergnaud, el de representaciones semióticas de Duval, y el de situaciones didácticas de Brousseau, los cuales vienen a fortalecer la propuesta de diseño de situaciones didácticas de acuerdo con la metodología aquí usada.

ACODESA está acorde con el uso de las diversas tecnologías digitales que proponemos (software de geometría dinámica, hoja electrónica, y calculadora simbólica), ya que sirve al estudiante para manipular lo que se programa en ella. Por otra parte, también buscamos detonar el aprendizaje colaborativo por medio del debate científico de las ideas planteadas durante los procesos de modelación, implementación y resolución del problema, además de la auto-reflexión sobre los problemas tratados y los temas estudiados. Queremos que los estudiantes reflexionen sobre las diferentes representaciones tratadas, así como sobre las diversas herramientas utilizadas en la resolución de los diversos problemas.

Nosotros diseñamos una secuencia didáctica acorde con ACODESA, donde buscamos detonar el aprendizaje colaborativo por medio del debate científico de las ideas planteadas y la auto-reflexión de los temas estudiados, siempre con el uso de manipulables que permitan al estudiante formar su propio vínculo con el contexto de la construcción y diseño de recipientes, cuyo cálculo de sus volúmenes está dado por expresiones cúbicas. Queremos que los estudiantes reflexionen sobre las diferentes formas de factorización que se usan en este contexto y el significado que éstas tienen con relación a las diversas representaciones tratadas.

Antecedentes para la definición de la secuencia didáctica

Piloteamos dos veces la secuencia didáctica, en ambas ocasiones con grupos de 6 estudiantes. El primer pilotaje nos permitió afinar los elementos que debían permanecer como parte de las tareas a desarrollar o preguntas a contestar. Esta primera aplicación también nos permitió definir con mayor precisión la duración específica de la secuencia y apegarnos a ella.

Para evitar perder detalles al recabar la información, utilizamos medios visuales, auditivos, impresos y digitales, lo cual nos permitió tener una visión más nítida de lo que estábamos interpretando y con la posibilidad de contrastar varias fuentes antes de concluir algo o eliminar algún elemento de la secuencia. Para proteger la información recabada, una vez recogida y para que no fuera modificada por los estudiantes de forma que alterara lo antes contestado, el trabajo hecho por ellos era recogido diariamente y la autoevaluación se hizo por medios digitales en la nube, con restricción de acceso una vez terminada.

Después del análisis del primer pilotaje, decidimos que la secuencia se desarrollara en 10 sesiones de trabajo de 50 minutos cada una y el contenido constara de 8 bloques conformados de varias tareas, donde cada tarea contiene una o varias instrucciones o preguntas que deberían ser contestadas por los estudiantes trabajando de forma colaborativa e individual. Acorde con Hitt (2009), las etapas necesarias para cumplir con la metodología ACODESA, cada estudiante interviene en un proceso que incluye: a) el debate de las ideas en equipo con sus pares, b) el debate interaccional entre el equipo y el instructor, c) el debate grupal con toda la clase y finalmente d) la auto-reflexión (individual) después de cada sesión, respecto al contenido abordado en ella.

Secuencia didáctica

En la secuencia didáctica, al estudiante se le presentan varias formas de representar el recipiente, buscando que esta diversidad de representaciones lo haga enriquecer su significación de los objetos matemáticos utilizados en este contexto y especialmente de la factorización.

Primero se le enfrenta con una representación escrita que tiene que interpretar, donde se describe cómo construir el recipiente con una hoja de papel tamaño carta en forma de prisma rectangular y sin especificar las dimensiones de éste. Como segunda y tercera representaciones, se le pide al estudiante que dibuje las representaciones en 2D y 3D del prototipo de recipiente construido, según lo observa y de acuerdo a las instrucciones que siguió para construir ese prototipo del recipiente sin tapa.

Un segundo tipo de recipiente se presenta al estudiante en una representación en 2D con un dibujo y se le pide interpretarlo para construir ahora un prototipo de recipiente con tapa, el cual también deberá dibujar en su representación 3D.

Posteriormente, ambos tipos de recipientes son representados a partir de sus expresiones algebraicas para el cálculo del volumen en su forma factorizada. Al desarrollar cada factorización, se obtiene un polinomio cúbico cuya representación es equivalente al tipo de recipiente correspondiente. Estas representaciones algebraicas de tercer grado pueden ser caracterizadas como recipientes que no tienen grosor en sus paredes y más adelante en la secuencia también para recipientes con grosor. La siguiente representación se da en forma de gráfica, donde los estudiantes pueden visualizar los factores y las dimensiones del material de construcción, entre otras características.

En la Figura 1 se muestran representaciones gráficas como las utilizadas en la secuencia didáctica, donde los estudiantes pueden observar que todas las gráficas cortan tres veces el eje x y que por lo tanto, es una condición necesaria para todos los recipientes de estos tipos el tener tres raíces reales. Otra de las cosas observables y distintivas en estas gráficas es su forma, pues deben tener orientación positiva, tener un máximo y un mínimo y que al menos dos de sus raíces sean positivas.

En la primera parte de la secuencia didáctica, se estudian las gráficas que se presentan en la parte izquierda de la Figura 1, donde los estudiantes observan que dichas gráficas pasan por el origen de coordenadas, lo cual significa que las paredes del recipiente no tienen grosor. Además, las otras dos raíces son positivas siempre y el doble de cada una de estas raíces representa las dimensiones del material utilizado para construir el recipiente.

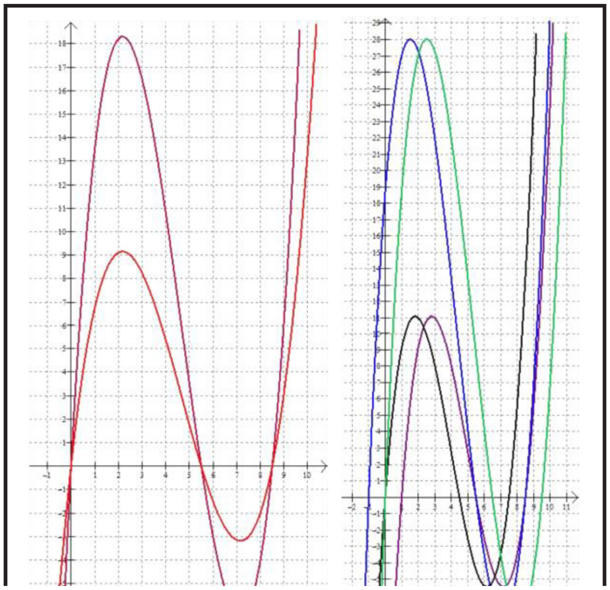


Figura 1. A la izquierda se muestra la representación gráfica de recipientes donde el grosor del material no es tomado en cuenta, mientras que a la derecha se muestra la representación gráfica de recipientes con grosor.

La gráfica también permite observar que la parte positiva de ésta, la cual va del origen a la siguiente raíz, representa los únicos volúmenes válidos, lo que significa que la función está acotada entre el origen y esta raíz, o para decirlo de otra manera, matemáticamente cualquier recipiente que pueda ser construido tendrá una altura no mayor al valor de esa raíz. Esto significa que esa raíz es la que restringe la máxima altura que puede tener un recipiente construido con un material de ese tamaño. Adicionalmente, los estudiantes pueden observar que, para recipientes de la misma altura, uno con tapa y el otro sin esta, el volumen del primero siempre será la mitad del volumen del segundo.

Con el uso de la geometría dinámica queremos que los estudiantes observen las diferentes formas y representaciones en un mismo momento, para así enriquecer sus significados matemáticos en este contexto. La Figura 2 presenta uno de los escenarios de la Aplicación con Geogebra para el propósito antes mencionado, donde los estudiantes pueden manipular las opciones y los deslizadores para observar todas las representaciones de los recipientes sin grosor a un mismo tiempo o por tipo de recipiente.

Finalmente pasamos a la última representación de recipientes de la secuencia didáctica, la representación de recipientes con grosor, donde se usa un dibujo mostrado en la Figura 3 y maderas ya recortadas para permitir al estudiante no sólo ver e imaginar los prototipos de recipientes con grosor, sino permitirle también manipular las maderas, de forma que pueda visualizar de mejor manera los prototipos de recipientes en 3D, con y sin tapa.

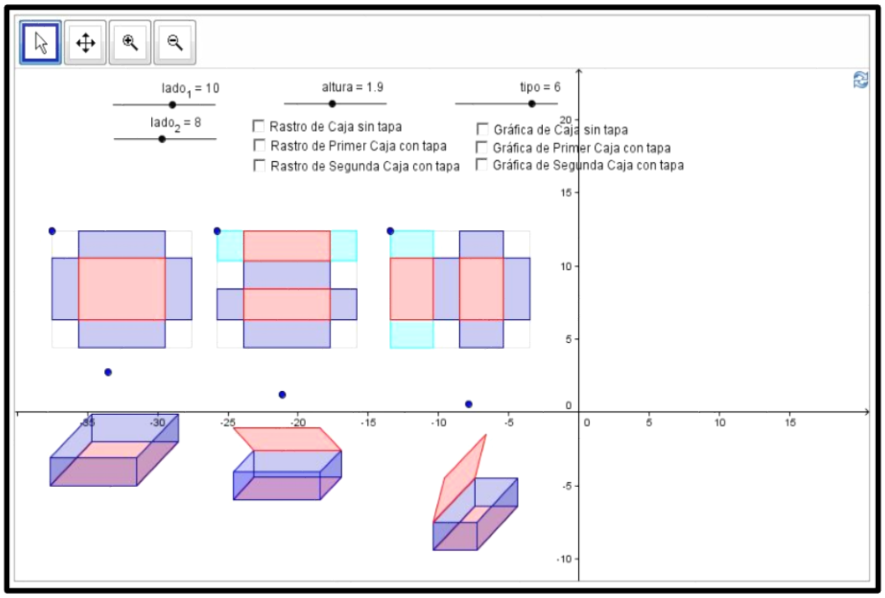


Figura 2. Representación dinámica hecha con Geogebra de los recipientes sin grosor.

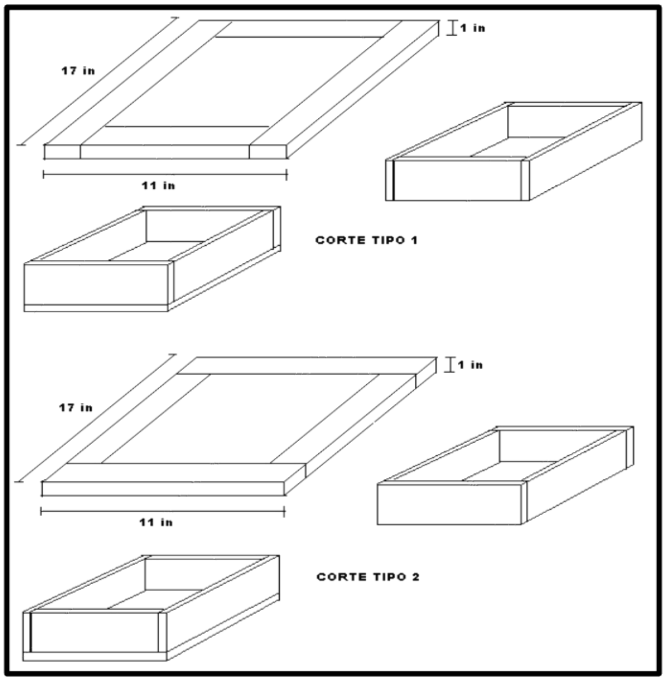


Figura 3. Representación de dos tipos de corte en materiales de dimensiones iguales, donde se muestra que pueden construir sólo dos tipos de recipiente sin tapa y con grosor en sus paredes.

Luego de analizar los prototipos de recipientes con grosor, enfocamos la secuencia a la representación algebraica para los dos tipos de volumen para cada uno de los dos tipos de recipiente con grosor y sin tapa que se presentan en la Figura 3. Sólo posteriormente llevamos al estudiante a estudiar la representación gráfica de éstos, como se muestra en el lado derecho de la Figura 1, donde éste puede advertir que el tipo de gráfico no cambia y que ahora pueden tenerse tres raíces positivas en el caso de querer representar el volumen que mide la capacidad del recipiente de configuración tipo A, esto es, su volumen interior (volumen contenido). También se puede observar que una de las gráficas muestra una raíz negativa para el volumen que calcula el espacio que ocupa el recipiente de configuración tipo B, o sea su volumen exterior (volumen ocupado). Estos dos tipos de volumen son los únicos que son polinomios con cuatro términos.

Otra observación que los estudiantes hacen es que también hay trinomios entre los volúmenes de recipientes con grosor y estos pueden pasar por volúmenes de recipientes sin grosor, sin embargo, en los casos de los volúmenes de recipientes con grosor, las raíces nos dicen cosas diferentes dependiendo del grosor del recipiente. Todos estos elementos y otros más, permiten que se puedan caracterizar los volúmenes según el número de términos del polinomio y según los signos de sus términos y que también se puedan factorizar apropiadamente los polinomios para así determinar las dimensiones del material con el que se pueden construir dichos recipientes.

Después de institucionalizar lo observado en la secuencia didáctica, como la riqueza de las múltiples representaciones, los elementos con significado, presentes en la gráfica del volumen del recipiente y especialmente en la caracterización de los polinomios cúbicos que representan volúmenes de los tipos de recipientes estudiados, así como la estructura de la factorización de estos polinomios y los significados que se leen en ellos.

Finalmente y para terminar el proceso de investigación sobre la adquisición, por parte de los estudiantes, de significados de la factorización en el contexto de los volúmenes de recipientes, aplicamos una evaluación digital final para tratar de medir y entender lo comprendido respecto a la caracterización de recipientes. Al estudiante se le proporciona una aplicación para factorizar polinomios en forma tradicional, donde los factores no tienen un significado para él, con el propósito de observar si pueden transformarla en una factorización equivalente que sí tenga sentido, de manera que le muestre la información que guarda la expresión algebraica con respecto a los tipos de recipientes que representa.

Caracterización analítica de los volumenes estudiados

Las Figuras 4, 5, y 6 muestran algunos ejemplos ilustrativos del tipo de caracterización que se busca sean capaces de implementar los estudiantes. La Figura 4 muestra algunas transformaciones posibles para el ejemplo donde el material de construcción es de 13x9x1. La Figura 5 muestra cinco posibles factorizaciones de un mismo trinomio al cubo que representa el mismo número de recipientes distintos. Por último, la Figura 6 muestra diferentes expresiones algebraicas representando recipientes construidos con la misma cantidad de material, pero con factores diferentes en cada caso y raíces diferentes en algunos de ellos. Debemos decir que sería ingenuo pensar que los estudiantes puedan lograr este grado de interiorización del contexto de los volúmenes de recipientes en tan corto tiempo, sin embargo, éstas son las caracterizaciones que busca institucionalizar la secuencia didáctica y buscamos que los estudiantes logren grados de dominio variables, mas estaremos satisfechos, si éstos pueden lograr algún tipo de transformación de una expresión factorizada de la forma tradicional a una expresión que les de algún tipo de información dentro de las diversas caracterizaciones mostradas en las Figuras 4, 5, o 6.

Conclusiones

Luego de trabajar en la secuencia didáctica, esperamos que los estudiantes sean capaces de transformar cualquier expresión algebraica que cumpla con la caracterización estudiada a su forma correcta, de manera que pueda definir el tipo o los tipos de recipiente(s) y las dimensiones del material usado o necesario para su construcción.

Con base en los resultados obtenidos en los dos pilotajes de la secuencia didáctica y a las observaciones hechas de los materiales recopilados de ambas aplicaciones, creemos que 4 de los 12 estudiantes que participaron en las secuencias lograron efectuar al menos algunas de las transformaciones esperadas de ellos luego de terminar la secuencia didáctica, sin embargo, creemos que el dominio mostrado es el apropiado y está dentro de lo esperado. Por otra parte, la totalidad de los estudiantes lograron obtener las dimensiones del material luego de conocer las raíces con la aplicación. Esto nos parece suficiente para concluir que los estudiantes lograron enriquecer sus significaciones personales sobre la factorización, además de otros objetos matemáticos en juego.

Expresión Cúbica
$$V(x) = 4x^3 - 40x^2 + 73x \quad + 117$$
Factorización de la Expresión Cúbica
$$V(x) = 4(x+1)(x-6.5)(x-4.5)$$
Factorización para el primer recipiente con tapa
$$V(x) = 2(x+1)(6.5-x)(9-2x)$$
Factorización para el segundo recipiente con tapa
$$V(x) = 2(x+1)(13-2x)(4.5-x)$$
Factorización para el recipiente sin tapa
$$V(x) = (x+1)(13-2x)(9-2x)$$

Figura 4. Transformación de la factorización de una expresión cúbica para representar un recipiente.

Expresión Cúbica
$$V(x) = 2x^3 - 20x^2 + 48x$$
Recipiente sin tapa y media altura, material de 12x8
Interior de recipiente sin tapa y media altura, material de 14x10x1
Exterior de recipiente sin tapa y media altura, material de 10x6x1
$$V(x) = \frac{1}{2}x(12-2x)(8-2x)$$
Primer recipiente con tapa, material de 12x8
$$V(x) = x(6-x)(8-2x)$$
Segundo recipiente con tapa, material de 12x8
$$V(x) = x(12-2x)(4-x)$$

Figura 5. Múltiples factorizaciones de un mismo polinomio cúbico que representan diferentes tipos de recipientes y materiales con los que se construyen estos.

Recipientes sin grosor hecho de un material de dimensiones 17x11

Recipiente sin tapa

$$V(x) = 4x^3 - 56x^2 + 187x \quad = x(17-2x)(11-2x)$$

Recipientes con tapa

$$V(x) = 2x^3 - 28x^2 + 93.5x \quad = x(8.5-x)(11-2x)$$
$$V(x) = 2x^3 - 28x^2 + 93.5x \quad = x(17-2x)(5.5-x)$$

Recipientes con grosor hecho de un material de dimensiones 17x11x1

Volumen interior del Recipiente sin tapa de configuración A

$$V(x) = 4x^3 - 60x^2 + 243x \quad - 187 = (x-1)(17-2x)(11-2x)$$

Volumen interior de los Recipientes con tapa de configuración A

$$V(x) = 2x^3 - 30x^2 + 121.5x \quad - 93.5 = (x-1)(8.5-x)(11-2x)$$
$$V(x) = 2x^3 - 30x^2 + 121.5x \quad - 93.5 = (x-1)(17-2x)(5.5-x)$$

Volumen interior del Recipiente sin tapa de configuración B

$$V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 135x \quad = x(15-2x)(9-2x)$$

Volumen interior de los Recipientes con tapa de configuración B

$$V(x) = 2x^3 - 24x^2 + 67.5x \quad = x(7.5-x)(9-2x)$$
$$V(x) = 2x^3 - 24x^2 + 67.5x \quad = x(15-2x)(4.5-x)$$

Volumen interior del Recipiente sin tapa de configuración A

$$V(x) = 4x^3 - 64x^2 + 247x \quad = x(19-2x)(13-2x)$$

Volumen interior de los Recipientes con tapa de configuración A

$$V(x) = 2x^3 - 32x^2 + 123.5x \quad = x(9.5-x)(13-2x)$$
$$V(x) = 2x^3 - 32x^2 + 123.5x \quad = x(19-2x)(6.5-x)$$

Volumen exterior del Recipiente sin tapa de configuración B

$$V(x) = 4x^3 - 52x^2 + 131x \quad + 187 = (x+1)(17-2x)(11-2x)$$

Volumen exterior de los Recipientes con tapa de configuración B

$$V(x) = 2x^3 - 26x^2 + 65.5x \quad + 93.5 = (x+1)(8.5-x)(11-2x)$$
$$V(x) = 2x^3 - 26x^2 + 65.5x \quad + 93.5 = (x+1)(17-2x)(5.5-x)$$

Figura 6. Diferentes tipos de factorizaciones que muestran recipientes hechos del mismo tamaño de material representados por sus expresiones de volumen.

Referencias bibligráficas

Hitt, F. (2009). Resolución de situaciones problema y desarrollo de competencias matemáticas en ambientes de aprendizaje en colaboración, debate científico y auto-reflexión (ACODESA). *Primer Seminario sobre Resolución de Problemas y el Uso de la Tecnología Computacional*, 1, pp. 9-21.

Hitt, F. & Cortés, J. (2009). *Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas.* mayo 04, 2017, de Revista Digital Matemática, Educación e Internet, Sitio web: http://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/1977

EVALUACIÓN DEL RENDIMIENTO ACADÉMICO EN BIOESTADÍSTICA

Christiane Ponteville, Myriam Núñez, Hugo Granchetti
Facultad de Farmacia y Bioquímica, Universidad de Buenos Aires. (Argentina)
chponteville@gmail.com myr1710@yahoo.com hgranchetti@hotmail.com

RESUMEN: Este trabajo busca realizar un análisis del rendimiento académico de los alumnos que cursaron la asignatura Bioestadística durante el año 2014 en la Facultad de Farmacia y Bioquímica de la Universidad de Buenos Aires, en relación con los exámenes promocionales y finales. Se tienen en cuenta diversas características asociadas al dictado de la asignatura y la aprobación de exámenes. El objetivo central es relevar información de los alumnos en su trayecto académico con el fin de incidir favorablemente en sus recorridos.

Palabras clave: rendimiento académico, enseñanza de la Bioestadística, evaluación de aprendizajes.

ABSTRACT: This work seeks to analyze the academic performance of students who took the subject Biostatistics in the year 2014, in the School of Pharmacy and Biochemistry, at the University of Buenos Aires, in relation with end-of-term and end-of-year exams. Some distinctive characteristics associated to both biostatistics teaching and exam passing are taken into account. It’s mainly aimed at changing students’ information in their curriculum in order to favorably influence on their academic performance.

Key words: academic performance, biostatistics teaching, learning evaluation

Introducción

El rendimiento académico puede caracterizarse como el análisis de las capacidades y las caracterizaciones de los estudiantes desarrolladas y actualizadas a lo largo de ciertos períodos de su formación, logrando un nivel de desempeño académico, que se sintetiza en un calificativo final, evaluador del nivel alcanzado (Gonzáles, 2015). De esta forma, expresa los cambios que se han producido en el alumno, en relación con lo que se propuso. Los cambios se refieren a diversos aspectos, involucrando al conjunto de hábitos, destrezas, habilidades, actitudes, entre otros, que el alumno debe adquirir y que se evalúan en los diversos exámenes.

En este trabajo se busca analizar el rendimiento académico de los alumnos de la asignatura Bioestadística del año 2014, de la Facultad de Farmacia y Bioquímica de la Universidad de Buenos Aires.

Este análisis se realizó teniendo en cuenta los resultados de los exámenes promocionales y finales, y buscó dar un panorama de la evolución del rendimiento académico de los alumnos a lo largo de su pasaje por la asignatura (Ponteville, Núñez, Fernicola y Castro, 2016).

La organización de la estructura curricular de las carreras de Bioquímica y Farmacia se divide en tres ciclos:

1. Ciclo Básico Común (CBC): correspondiente al primer año y común a otras carreras de la Universidad de Buenos Aires
2. Ciclo Común: común a ambas carreras, correspondiente al segundo y tercer año
3. Ciclo Superior: asignaturas específicas de cada carrera, cuarto y quinto año

En los diseños curriculares de las carreras que se imparten en dicha facultad, se incluyen dos asignaturas correspondientes a la Cátedra de Matemática: Matemática y Bioestadística.

Bioestadística es una asignatura obligatoria con elección del momento de la cursada. Sus requisitos de inscripción son: estar en condiciones de cursar alguna materia del quinto cuatrimestre de la carrera y haber aprobado los trabajos prácticos de Matemática. De esta forma, la materia está destinada a alumnos que han cursado el Ciclo Común del plan de estudios. Su importancia queda evidenciada en las expectativas de logro profesionales que incluyen el desarrollo de competencias y actitudes relacionadas con el análisis crítico de resultados, diseño de experimentos, y reflexión epistemológica (Ponteville, Núñez, 2010).

Como parte de la toma de decisiones en la enseñanza, resulta de gran importancia contar con un relevamiento sistemático de la información demográfica y del rendimiento académico, si se pretende que la educación se mantenga a la altura de las necesidades de la sociedad del conocimiento actual (Gundlach, Richard, Nelson y Levesque- Bristol, 2015).

Objetivos

El objetivo central del presente trabajo fue relevar información de los alumnos en su trayecto académico, con el fin de incidir favorablemente en sus recorridos, focalizándonos en el análisis de las diferencias halladas entre ambos cuatrimestres del año 2014, y las características que resaltan respecto de los tiempos que demoran en aprobar la asignatura y los resultados obtenidos. Así como también para la toma de decisiones de tipo didácticas, institucionales y epistemológicas (Shotwell y Apigian, 2015).

Los objetivos específicos se centran en la búsqueda de patrones que permitan diagnosticar el estado de situación y a partir de ellos tomar decisiones organizativas (por ejemplo, tiempo destinado a la explicación de un determinado contenido), pedagógicas (nuevas estrategias de enseñanza, utilizando, por ejemplo, paquetes estadísticos) e institucionales (por ejemplo, modificación del plan de estudios, en relación con las correlatividades necesarias) (Ponteville, Núñez, Granchetti, Reynoso y Seifert, 2014).

Materiales y métodos

Para llevar adelante el presente trabajo, se realizó un análisis retrospectivo de datos institucionales sobre información demográfica y de rendimiento académico de los estudiantes de Bioestadística del año 2014. Se tuvieron en cuenta diversas variables asociadas al dictado de la asignatura y la aprobación de exámenes finales, incluyendo, proporción de alumnos Regulares, Promovidos y Desaprobados, calificaciones de Exámenes Promocionales y Finales, fechas en las que rindieron los alumnos y cantidad de instancias necesarias para la aprobación de la asignatura.

La cantidad de alumnos que cursaron la asignatura en el primer cuatrimestre fue 306 mientras que en el segundo cuatrimestre fueron 201.

Los exámenes se realizan en forma escrita. Para regularizar la materia el alumno debe asistir por lo menos al 75% de las actividades obligatorias (en las que se toma asistencia) y además aprobar al menos tres de los cuatro exámenes parciales. Para promocionar tiene que aprobar los parciales promocionales con notas que promedien al menos 7 puntos. Aquel estudiante que aprueba dos parciales puede rendir exámenes recuperatorios para alcanzar la regularización. Por último, el alumno que no alcance la regularidad con los exámenes recuperatorios o que, sin haberlos rendido, haya aprobado por lo menos un examen parcial podrá rendir el examen de regularización que consiste en una prueba que abarca todos los temas de la guía de trabajos prácticos desarrollados a lo largo del cuatrimestre.

Los estudiantes que sólo regularizaron las materias tendrán que ser evaluados en un Examen Final que abarca todos los contenidos teórico-prácticos impartidos.

Los alumnos que rinden el primer parcial o asistieron a menos de 25% de las clases son categorizados como No Cursantes. Los alumnos que aprobaron a lo sumo dos exámenes (en cualquiera de las instancias antes mencionadas), se los califica como Desaprobados. De la misma manera se considera desaprobados a los que asistieron a más del 25% pero menos del 75% de las clases.

En esta ocasión, para evaluar este rendimiento, se analizaron las diferencias entre ambos cuatrimestres del año 2014; los resultados de los exámenes promocionales y finales y los tiempos que demoran los alumnos en aprobar la asignatura, además de los resultados obtenidos.

Se realizó un análisis retrospectivo de los datos, referentes a información demográfica y de rendimiento académico de los estudiantes de Bioestadística del año 2014.

Para el análisis de los datos se utilizaron pruebas estadísticas no paramétricas (Chi cuadrado, Mann-Whitney), con el objetivo de buscar patrones que permitan diagnosticar el estado de situación. Se utilizó un nivel de significación del 5%.

Resultados

En ambos cuatrimestres la proporción de alumnos que promocionaron la asignatura fue la misma (en relación con la condición final de cursada por cuatrimestre). En el segundo cuatrimestre la cantidad de alumnos que regularizaron la asignatura se incrementó en un 8% (Ver Gráfico 1).

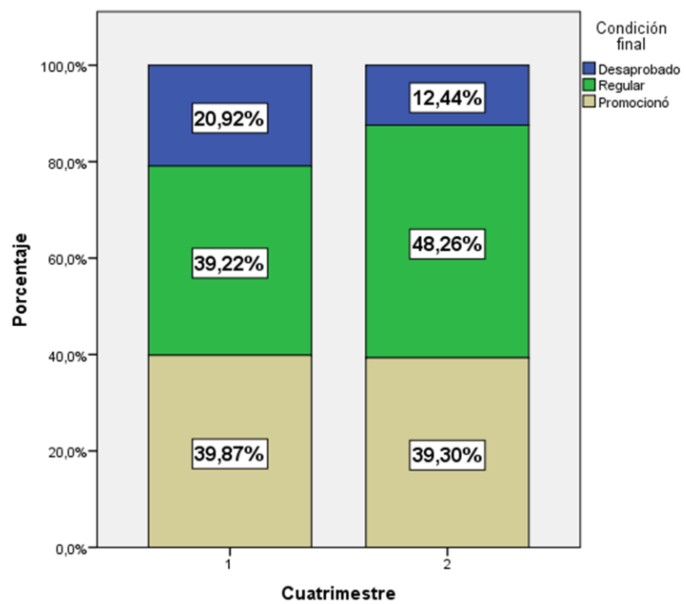


Gráfico 1. Condición Final de Cursada por Cuatrimestre

Se comprobó que no hay independencia entre las variables de cuatrimestre de cursada y condición final (p = 0,026).

Si analizamos las calificaciones obtenidas en la instancia de promoción por cuatrimestre de cursada, hubo un rendimiento menor en el segundo cuatrimestre. Estos resultados se pueden apreciar aun cuando los porcentajes de promoción son iguales, el tipo de instrumento de evaluación es el mismo en ambos cuatrimestres, se abordan los mismos temas y los exámenes son confeccionados por el mismo cuerpo docente.

Al comparar entre cuatrimestres, se hallaron diferencias significativas entre las calificaciones en exámenes promocionales (p << 0,001) (Ver Gráfico 2).

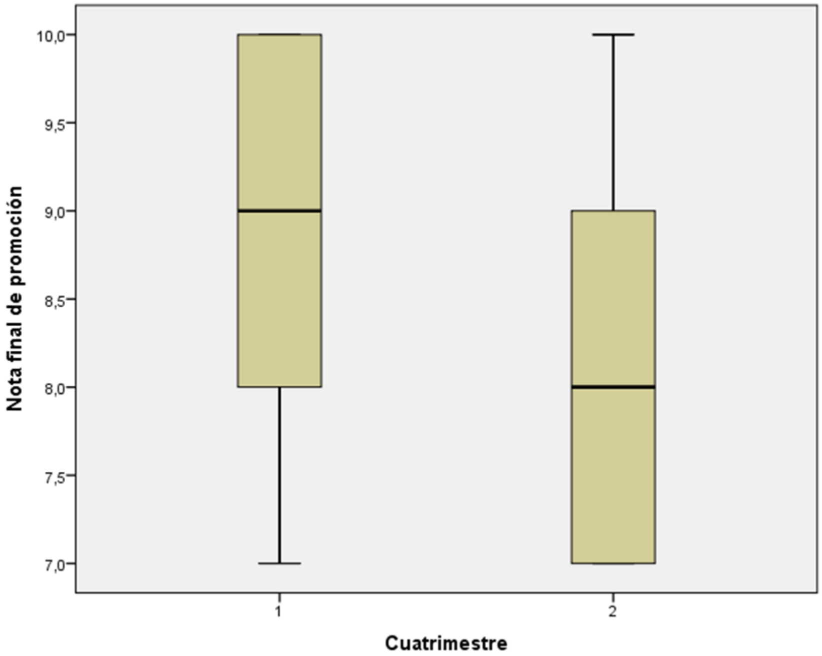


Gráfico 2. Box-Plot-Calificaciones de los Exámenes Promocionales por Cuatrimestre

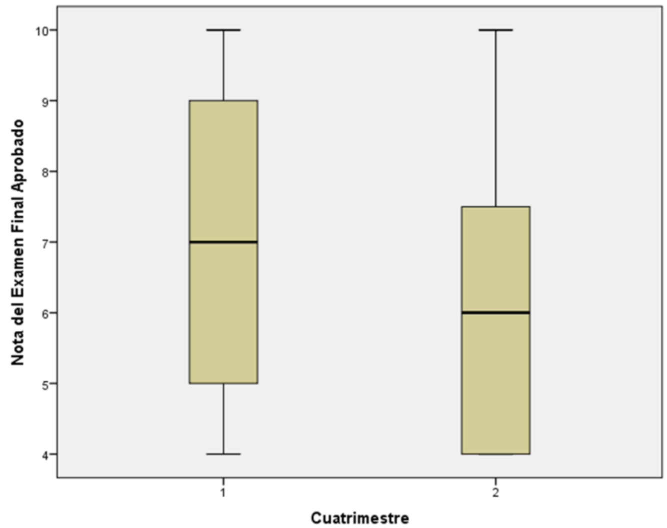


Gráfico 3. Box-Plot- Calificaciones de los Exámenes Finales por Cuatrimestre

Si analizamos las calificaciones obtenidas en los exámenes finales podemos ver que los alumnos que rinden final no obtienen mejores calificaciones que los que promocionan.

Al comparar entre cuatrimestres, se hallaron diferencias significativas entre las calificaciones en exámenes finales ($p = 0{,}007$) (Ver Gráfico 3).

De los alumnos cursantes que aprobaron el Examen Final, el 75,9% ya lo tenía aprobado a finales de 2014; y el 99,1% a finales de 2015.

Los gráficos 4 y 5 muestran la proporción de las calificaciones obtenidas por los alumnos y la cantidad de veces que se rindió el examen final hasta aprobarlo.

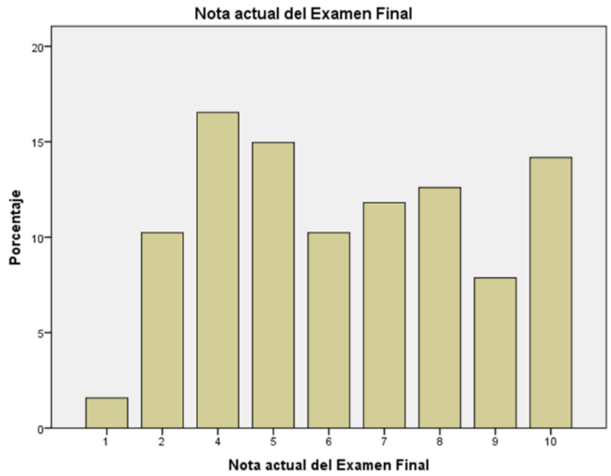


Gráfico 4. Calificaciones obtenidas en los Exámenes Finales

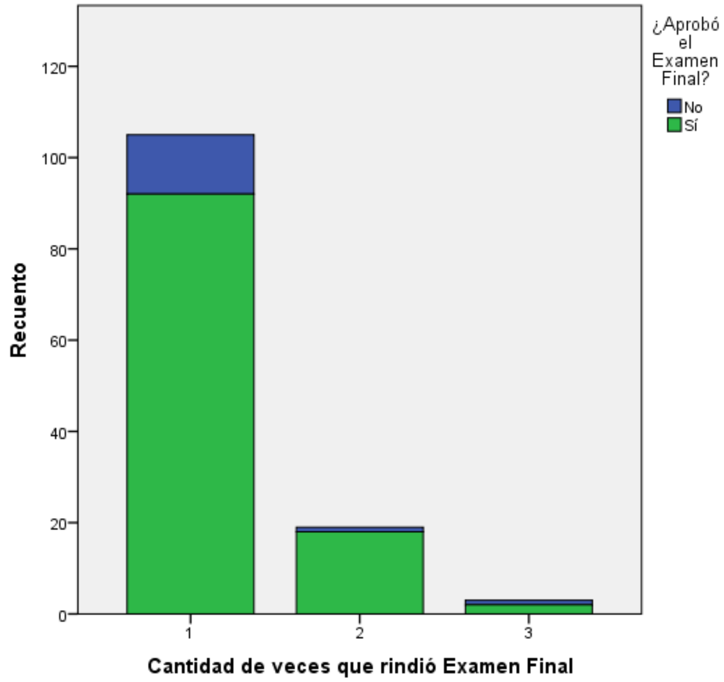


Gráfico 5. Cantidad de veces que rindió Examen Final

Reflexiones finales

Los resultados obtenidos nos permiten diagnosticar patrones de rendimiento académico, como, por ejemplo, el número de alumnos que promocionan la materia en ambos cuatrimestres es la misma; las diferencias significativas que se presentan entre las calificaciones obtenidas en exámenes finales y en exámenes promocionales, las diferencias existentes en el rendimiento tanto de exámenes promocionales como finales en los dos cuatrimestres. Esto permite tomar decisiones de índole organizativa, pedagógica e institucional. Por ejemplo, en los cursos de apoyo que se dictan para la preparación de exámenes finales, cuya implementación ha logrado disminuir el tiempo que los alumnos tardan en presentarse a las instancias de Examen Final, se han incorporado estrategias de trabajo vinculadas al análisis de la propia producción al momento de la resolución de problemas propios de los exámenes finales.

De la misma manera, este tipo de diagnóstico abre nuevas perspectivas para detectar otros patrones, como por ejemplo las diferencias entre comisiones de trabajos prácticos que utilizan diferentes estrategias de enseñanza en el aula, aun trabajando sobre los mismos contenidos.

Referencias bibliográficas

Gonzáles, D. (2015). *Relación entre el rendimiento académico en matemáticas y variables afectivas y cognitivas en estudiantes preuniversitarios de la Universidad Católica Santo Toribio de Mogrovejo.* Tesis de Doctorado no publicada. Universidad de Málaga, España.

Gundlach, E., Richards, K., Nelson, D. y Levesque-Bristol, Ch. (2015). A Comparison of Student Attitudes, Statistical Reasoning, Performance, and Perceptions for Web-augmented Traditional, Fully Online, and Flipped Sections of a Statistical Literacy Class. *Journal of Statistics Education*. *23*, (1). Disponible en www.amstat.org/publications/jse/v23n1/gundlach.pdf

Ponteville, Ch. y Núñez, M. (2010). La demostración y la enseñanza de la estadística. En H. Blanco (Ed). *Acta de la VIII Conferencia Argentina de Educación Matemática,* (pp. 346-350). Buenos Aires: Sociedad Argentina de Educación Matemática.

Ponteville, Ch., Nuñez, Granchetti, H., Reynoso, M., y Seifert, E. (2014). Enseñar Bioestadística en carreras de ciencias de la salud. En P. Lestón (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27,* 1265-1271. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ponteville, Ch, Núñez, M., Fernicola, M. y Castro, M. (2016). Análisis estadístico de resultados académicos. En D. Veiga (Ed). *Acta del XI Congreso Argentino de Educación Matemática*, (pp. 10-19). Ciudad de Buenos Aires: SOAREM. Sociedad Argentina de Educación Matemática.

Shotwell, M. y Apigian, Ch. (2015). Student Performance and Success Factors in Learning Business Statistics in Online vs. On-ground Classes using a Web-Based Assessment Platform. *Journal of*

Statistics Education. Volume 23, Number 1. Disponible en www.amstat.org/publications/jse/v23n1/shotwell.pdf

NOCIÓN DE RAZÓN DE CAMBIO EXPLORADA A TRAVÉS DE FENÓMENOS FÍSICOS QUE MODELAN UNA FUNCIÓN LINEAL

Ana Leonor Ávila Alvarado, Noelia Londoño Millán, José David Zaldívar Rojas
Universidad Autónoma de Coahuila México
anle_av@hotmail.com, noelialondono@uadec.edu.mx, david.zaldivar@uadec.edu.mx

RESUMEN: Este artículo tiene por objeto evidenciar resultados parciales de una investigación sobre la puesta en práctica de una propuesta metodológica para abordar el tema de razón de cambio, con alumnos de secundaria, a través de la experimentación y manipulación de leyes físicas y el uso de distintos registros de representación. En general se pudo constatar la posibilidad de integrar un concepto matemático relacionando dos área del conocimiento, pero también se observó que hubo dificultades al representar modelos lineales, en tablas, gráficas y expresiones algebraicas, estas dificultades pueden resumirse en el mal uso unidades y la medición, la conversión a representaciones gráficas, máxime si se incluían números decimales, el análisis y la dificultad en encontrar patrones, etc. Aunque el estudio total incluye otros experimentos en este documento solo se consideró el caso de la ley de Hooke.

Palabras clave: representaciones, razón, cambio, fenómenos físicos.

ABSTRACT: This article aims to show partial results of a research on the implementation of a methodological proposal to address the topic of change reason, with secondary students, through experimentation and manipulation of physical laws and the use of different registers of representation. In general, it was possible to verify the possibility of integrating a mathematical concept by relating two areas of knowledge, but it was also observed that there were difficulties when representing linear models, in tables, graphs and algebraic expressions. Such difficulties can be summarized: in the misuse of units and the measurement, the conversion to graphical representations (mainly if decimal numbers were included), the analysis and the difficulty in finding patterns, and so on. Although the overall study includes other experiments, in this paper, only the case of Hooke's law was considered.

Key words: representations, reason, change, physical phenomena.

Introducción

El concepto de razón de cambio se constituye en una parte crucial en el proceso de aprendizaje de todo estudiante, particularmente cuando lo debe asociar con funciones y su derivada en escolaridad avanzada. En la educación básica secundaria está indicado como uno de los contenidos que se estudian en el tema de proporcionalidad y funciones e implica “Calcular y analizar la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Así como Identificar de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa” (SEP, 2011, p. 50). El objetivo central de esta investigación lo constituye el interés en abordar este tema de una manera diferente por lo cual se presenta una propuesta didáctica que permita al alumno relacionarlo con variables físicas de la realidad, además de insistir en el uso de múltiples representaciones (Duval, 1999; Janvier, 1987; Hitt, 1998) del mismo objeto matemático.

En este sentido la (NCTM, 2000) indica que los estudiantes pueden desarrollar y profundizar la comprensión de conceptos y relaciones matemáticas a medida que crean, comparan y utilizan diversas representaciones, entendiendo éstas como gráficas, tablas, relaciones, símbolos, etc.

Metodología

Durante la investigación se diseñaron y aplicaron tres experimentos a saber: llenado de recipientes, el movimiento circular uniforme y la ley Hooke. En este documento solamente se consideró el último de ellos, el cual se llevó a cabo con 42 estudiantes de tercer grado de secundaria pública, cuyas edades oscilan entre los 14 y 15 años.

La Ley de Hooke establece que “una fuerza que actúa sobre un resorte produce un alargamiento o elongación que es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza” (Tippens, 1992 p. 254). Esta ley fue usada para diseñar y aplicar la propuesta didáctica, para el estudio de la razón de cambio. Para realizar el experimento, se organizó a todo el grupo en equipos de 4 integrantes, se entregó a los estudiantes, el material a utilizar (soporte universal, pinzas, resortes de extensión, porta pesas, pesas de diferente masa, regla, balanza para medir la masa) y la hoja de trabajo con las indicaciones. Seguidamente se les orientó en el armado del dispositivo, como se muestra en la figura1. Esta imagen también se incluyó en la hoja de trabajo.

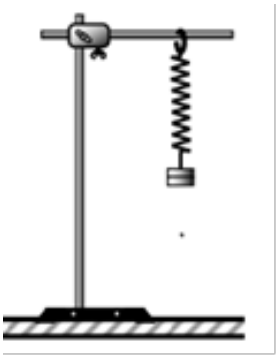


Figura 1. Dispositivo para explorar la ley de Hooke

Se les indicó medir la longitud original del resorte y escribirla en el espacio indicado en la hoja de trabajo, al agregar cada masa se les pidió que volvieran a medir la longitud del resorte y anotaran en la tabla los datos correspondientes a la masa, la longitud actual del resorte y el estiramiento generado, los resortes utilizados para esta actividad son pequeños y con cierto límite de elasticidad, entendiendo ésta como la propiedad que tiene el material para recuperar su forma original después de ser comprimo o estirado. Seguido de esto, los estudiantes debieron realizar una gráfica con los datos de masa y estiramiento, para lo cual se incluyó en la hoja de trabajo una figura con los ejes cartesianos sin más datos, para darles total libertad de ubicar las variables a su gusto y poder diagnosticarlos acerca del conocimientos respecto al tema análisis y representación de datos (SEP, 2011).

Para guiarles en el análisis se les plantean los siguientes cuestionamientos: ¿Existe cambio en los datos registrados en la tabla? Aunque la pregunta parece ser obvia, lo que se pretende es guiar al alumno a visualizar del cambio que experimenta el resorte, mediante la observación de la tabla y la gráfica.

(Cualquiera que haya sido tu respuesta explica que hiciste). Con esta indicación se pretendió obtener información sobre las observaciones de los estudiantes.

Se les indicó también que describieran ¿Qué tipo de gráfica se obtiene al dibujar los datos? En este punto se esperaba que los alumnos visualicen en su gráfica una recta y que esto les condujera a deducir que la gráfica representa una función lineal.

Posteriormente se les indicó: Observar la gráfica y explicar cómo se puede calcular la variación en la longitud y la variación de la masa.

También se les planteó la siguiente situación: Si se suspendiera una masa de 5000 g, en el resorte ¿cuál sería la longitud que alcanzaría? Explica ¿cómo lo obtuviste?

Y por último solicitamos una representación algebraica enunciando la pregunta siguiente: ¿Qué necesitas conocer para determinar la longitud del resorte, sin medirlo al suspenderle una masa de m gramos? Escribe una regla general que te permita calcular la longitud del resorte sin medirlo.

Resultados

A continuación se muestran los resultados que surgieron luego de aplicar la actividade de los resortes, haciendo énfasis en el uso y asimilación de los distintos registro de representación.

En lo que respecta al registro tabular, los resultados reflejaron que el 80% de los estudiantes comprendió las indicaciones dadas por escrito.

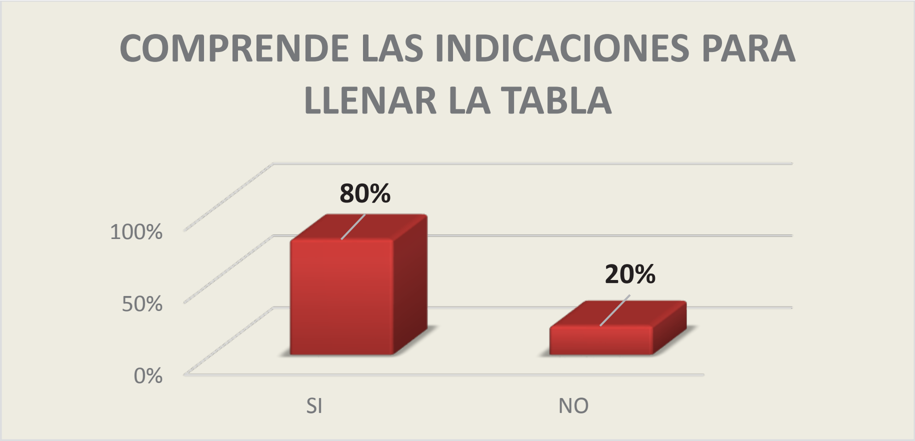


Figura 1. Resultados sobre la comprensión de las indicaciones.

El 20% tuvo dificultades para determinar el estiramiento generado en el resorte, ya que se les pedía lo indicaran en cm, sin embargo, indicaron la medida en milímetros, mostrando dificultad para representar en la unidad solicitada. Para lograr visualizar la relación que se establece entre las dos variables involucradas, era necesario observar el comportamiento de la variable estiramiento, por lo se requería realizar el cálculo correcto, debiendo restar a la longitud original, la longitud alcanzada por cada vez que se agregara una masa. Así mismo se encontró que el 80% de los equipos calculó correctamente el estiramiento de acuerdo a lo indicado, un 10% no entendió la indicación y otro 10% falló al realizar la operación.

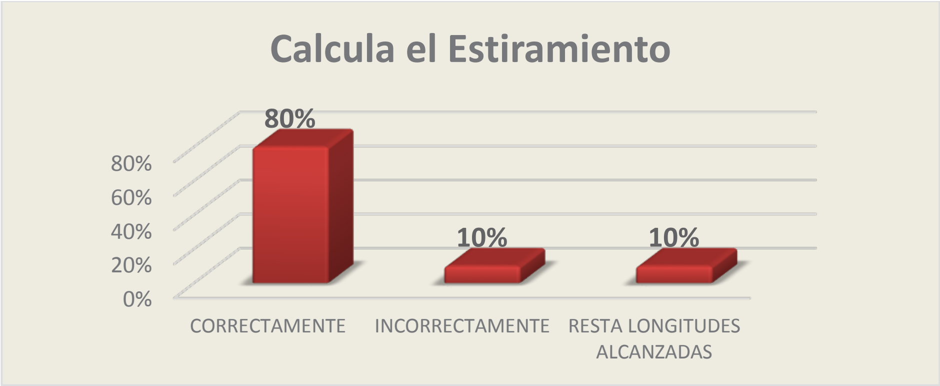


Figura 2. Resultados sobre el cálculo correcto del estiramiento.

También se les indicó graficar los datos de las columnas de masa y estiramiento, los resultados reflejaron que el 60% atendió la indicación, el resto en vez de estiramiento graficó los valores correspondientes a la longitud total del resorte.

Figura 3. Resultados sobre la ubicación de las variables en los ejes cartesianos.

Para la elaboración de la gráfica se incluyó en la hoja de trabajo la imagen de los ejes cartesianos, dándoles total libertad de ubicar las variables, en este punto de la actividad. Del 60% de estudiantes que graficaron los valores de masa y estiramiento, el 66.7% ubicó los valores de masa en el eje de la abscisas, de lo cual se pudiera concluir que identifica la masa como la variable independiente.

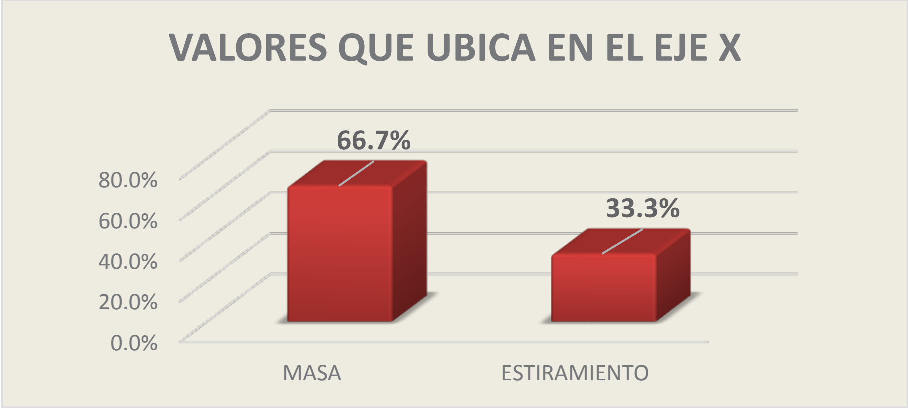


Figura 4. Resultados de la forma en que los estudiantes ubicaron los valores de masa y estiramiento en los ejes cartesianos.

A partir de las gráficas elaboradas, se les indicó que definieran el tipo de gráfica dibujada,

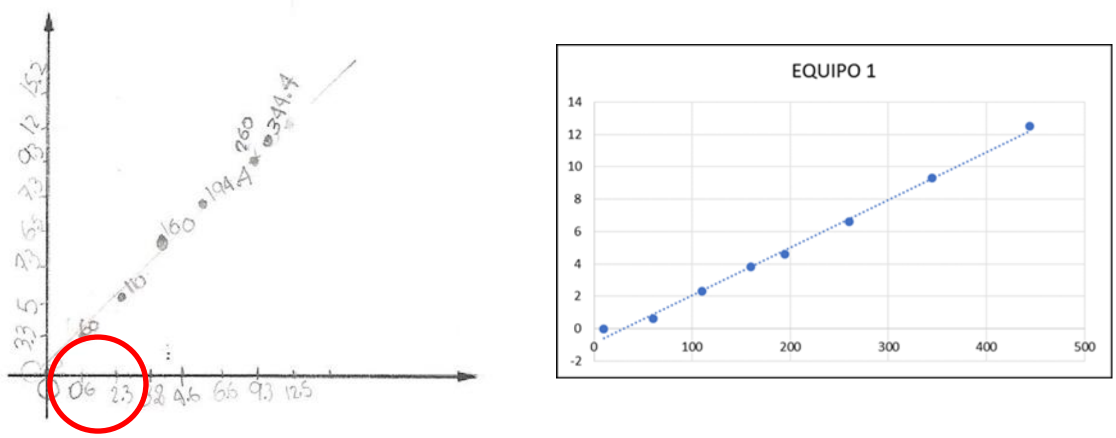
Figura 5. Tipos de gráficas construidas

Los resultados reflejan de forma generalizada dificultades para identificar el tipo de gráfica, mostrando una tendencia a dibujar graficas de barras. Se esperaba que sus gráficas tendieran a dibujar una línea recta, y aunque sus gráficas muestran esa propensión, no se puede visualizar una línea recta, debido a que tuvieron dificultades para establecer las escalas de la magnitudes a graficar, es decir, establecieron cada separación como unidad de medida generalizada. Como puede verse en la gráfica de figura 7a.

Longitud original: 2.7

Masa +porta pesas gr.	Longitud cm	Estiramiento cm
10	0	0
60	3.3cm	0.6
110	5 cm	2.3
194.4	7.3	4.6
160	6.5	3.8
260	9.3	6.6
344.4	12	9.3
444.4	15.2	12.5

Figura 6. Tabla de datos construida por uno de los equipos



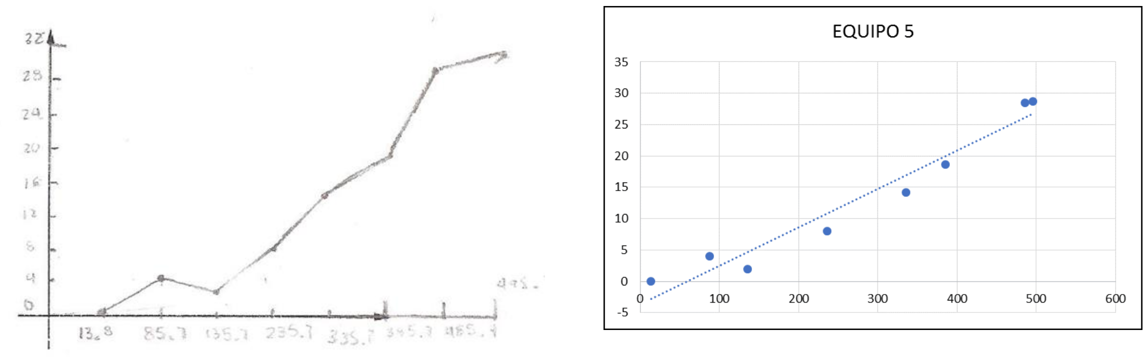
a) b)

Figura 7. Representación gráfica de los datos de figura 6. a) Elaborada por los alumnos. b) Elaborada en Excel.

Longitud original: 5cm

Masa +porta pesas gr.	Longitud cm	Estiramiento cm
13.8g.	5cm	0 cm
95.7g	5.4cm	4mm
135.7g	7 cm	2 cm
235.7g	13cm	8 cm
335.7g	19.2cm	14.2cm
385.7g	23.7cm	18.7cm
485.7g	33.5cm	28.5cm
495.7g	33.7cm	28.7cm

Figura 8. Tabla de datos construida por uno de los equipos.



a) b)

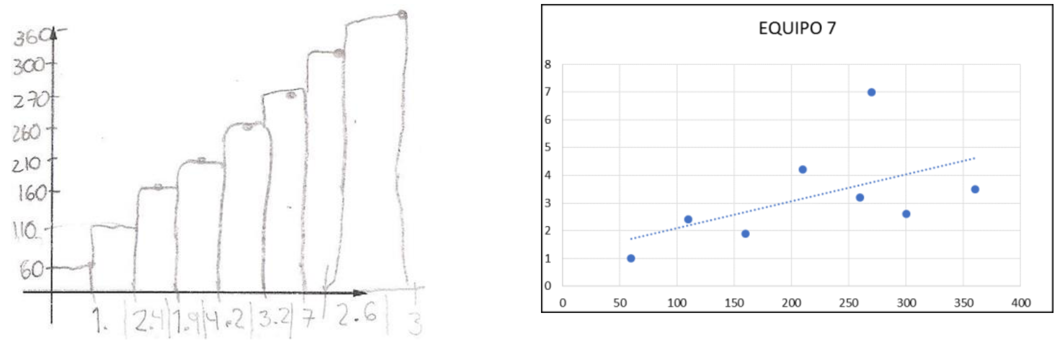
Figura 9. Representación gráfica de los datos de la figura 8. a) Elaborada por los alumnos. b) Elaborada en Excel.

Otra dificultad que se pudo observar tiene que ver con la representación de unidades, ya que en sus mediciones describían longitudes en milímetros, pero al momento de graficar las representaban en cm, como se pude ver en la figura 8.

Longitud original: 4.9

Masa +porta pesas gr.	Longitud cm	Estiramiento cm
60	5cm	1mm
110	7.4	2.4cm
160	9.3	1.9cm
210	13.5	4.2cm
260	16.7cm	3.2cm
270	17.4	7mm
300	20cm	2.6cm
360	23.5cm	3.5cm

Figura 10. Tabla de datos construida por uno de los equipos.



a) b)

Figura 11. Representación gráfica de los datos de la figura 10. a) Elaborada por los alumnos. b) Elaborada en Excel.

En la gráfica anterior, la ubicación de los puntos graficados, parece mostrar la tendencia a una línea recta, sin embargo, como se puede ver en el contraste con la gráfica de Excel, hay muchas disparidades entre los datos, esto debido a que el cálculo de estiramiento lo obtuvieron restando la longitud alcanzada a la longitud anterior, en lugar de restar la longitud alcanzada a la longitud original del resorte. Los resultados arrojaron un 40% en la graficas de otros tipos, de ellas se pueden entresacar aquellas en forma ascendente por sectores rectilíneos, rectas verticales, etc. pero una vez más permanece manifiesta la dificultad para ubicar los puntos en el plano cartesiano, además de imprecisiones en la medición, pues como se puede ver los datos distan mucho de dibujar una línea recta.

En general se puede observar que las dificultades que se presentaron para lograr modelar una función lineal mediante la experimentación de fenómenos físicos, se precisa en que muestran problemas para representar diferentes tipos de unidades, en el plano cartesiano, lo cual tiene que ver con el dominio de representación de números fraccionarios y decimales en la recta numérica y con el dominio de equivalencias entre unidades, es decir, al pasar del registro tabular al gráfico.

Cabe precisar que algunos temas señalados antes los empiezan a estudiar desde el sexto grado de primaria, en el sistema mexicano, por lo que se esperaría que al plantear situaciones que implican su aplicación, los estudiantes deberían tener un dominio adecuado, sin embargo, se observaron deficiencias en el dominio de estos temas básicos.

Referencias bibliográficas

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Colombia: Artes gráficas.

Janvier, C. (Ed.) (1987). Problems of representations in the teaching and learning of mathematics. Hillsdale. NJ: Lawrence Erlbaum Associeted.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Educación Matemática, 10*(2), 23-45.

SEP. (2011). *Programas de Estudio 2011, Guía para el maestro educación básica secundaria matemática*s. México: SEP.

The National Council of Teachers of Mathematics. NCTM. (2000). *Principios y estándares curriculares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Tippens, P. (1992). *Física conceptos y aplicaciones*. México: McGraw-Hill.

TRABALHANDO O RACIOCÍNIO LÓGICO NO PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO: UMA CONTRIBUIÇÃO PARA A ORGANIZAÇÃO DO PENSAMENTO

Talita Daniele Vieira Negreiros, Dimas Felipe de Miranda
Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais - PUC MINAS. (Brasil)
ta.daniele@yahoo.com.br, dimasfm48@yahoo.com.br

RESUMO: A pesquisa realizou-se por meio de uma sequência didática, (Zabala, 1998), com o objetivo de contribuir no desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos e analisar suas estratégias de resolução. Tal estímulo justifica-se pela sua importância e anseio de tantos educadores de que os alunos compreendam e raciocinem sobre o que é proposto na sala de aula e não somente reproduzam conceitos. (Mortari, 2001). Foram aplicadas três atividades, que foram classificadas em raciocínio lógico-numérico e quantitativo, raciocínio lógico-matemático e argumentativo e raciocínio lógico-analítico. A partir delas, foi observado e analisado a maneira como os alunos organizavam as informações para solução dos problemas. Após aplicação e análise das atividades, foram verificados avanços nas formas de registros e criatividade nas estratégias de resolução, bem como a necessidade de um trabalho contínuo para melhores resultados.

Palavras-chave: raciocínio lógico; atividades de lógica; organização do pensamento

ABSTRACT: The research was carried out through a didactic sequence, (Zabala, 1998), with the aim of contributing to the development of students' logical reasoning and analyzing their strategies of resolution. Such encouragement is justified by its importance and wishes of so many educators of making their students understand and reason about what is proposed in the classroom and not only reproduce concepts, (Mortari, 2001). Three activities were applied, which were classified in logical-numerical and quantitative reasoning, logical-mathematical and argumentative reasoning and logical-analytical reasoning. From them, the way in which students organized information for solving problems, was observed and analyzed. After the implementation and analysis of the activities, there were advances in the forms of records and creativity in the solution strategies and the need for continuous work for better results is obvious.

Key words: logical reasoning; logic activities; thought organization

Introdução

O ensino de Matemática, em muitos ambientes educacionais, ainda priva os alunos de desenvolverem o raciocínio lógico e a criatividade. (Machado, 2005). Nesses ambientes, os conteúdos são apresentados, através da imposição de regras e de maneira limitada, impedindo assim que os alunos construam seus conhecimentos, o que os tornam desmotivados, passivos e incapazes de desenvolverem competências e habilidades exigidas ao fim da Educação Básica.

O raciocínio lógico abrange conceitos relacionados à capacidade de organizar e resolver situações cotidianas, fazendo assim parte da vida de todos. Na busca por livros, vídeos e atividades de raciocínio lógico que pudessem contribuir em algumas aulas do ensino médio, observa-se que é muito raro encontrar um material ideal para se trabalhar os conceitos de lógica ou atividades do tipo investigativas, que permitam explorar melhor o raciocínio. Geralmente, encontram-se apenas materiais destinados a candidatos em preparação para concursos públicos, nos quais, há pouca teoria a respeito do assunto e diversas questões de lógica e de múltipla escolha para se resolver.

Surgiu então, a questão: *Que tipo de atividades pode auxiliar no desenvolvimento do raciocínio lógico e matemático em alunos do Ensino Médio e quais suas contribuições?*

Diante disso, realizou-se um estudo a partir da necessidade de estimular o desenvolvimento do raciocínio lógico em alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

Sobre o desenvolvimento do raciocínio

De acordo com Vasconcelos (2002), o raciocinar é uma característica humana, uma resposta a algo que nos é proposto, e no âmbito educativo, este parte de um diálogo existente entre tudo o que está envolvido no processo de ensino e aprendizagem.

Nesse contexto, os alunos se deparam dia a dia com um conjunto de ações cognitivas que fazem parte do raciocinar, como por exemplo: reconhecer que algo está sendo questionado; relacionar uma informação com conhecimentos pré-existentes; elaborar uma conjectura; argumentar; generalizar; validar; refletir e reinterpretar, ou seja, uma reação do pensamento de natureza complexa.

De acordo com Machado (2005), o ponto essencial no trabalho de desenvolvimento do raciocínio dos estudantes não se trata unicamente do que se deve trabalhar, de qual tema, mas como tal assunto é trabalhado, sendo possível assim, trabalhar diferentes assuntos no desenvolvimento do raciocínio.

Observa-se um engano, quando profissionais da Educação acreditam que a repetição, memorização e mecanização de exercícios é a única chave para o sucesso de seus alunos. Engana-se também quem acredita que o raciocínio lógico possa ser trabalhado apenas em aulas isoladas, próprias para isso, e impossível em outras. Estimular o desenvolvimento do raciocínio lógico pode ser inserido em qualquer contexto e em momentos diferenciados para os alunos, como em aulas do tipo investigativas, como sugere Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) e ainda, como afirma Lanna (2013, p. 32), “os padrões de raciocínio lógico são aplicáveis a qualquer área de estudo, em que o argumento seja empregado”.

O raciocinar consiste em fazer inferências, deduções, conjecturar e manipular informações, fazer conexões com informações pré-existentes, ou seja, estruturar a ordem dos pensamentos e criar linhas de informações. Para isso, é necessário tempo, preparação do professor e autonomia dos estudantes. Permitir que um indivíduo raciocine é contribuir para que este construa um conhecimento e crie significado para aquilo o que está aprendendo.

O problema está presente, quando o raciocinar do aluno é pouco explorado e, por consequência, é pouco desenvolvido. Os alunos que se encontram no Ensino Médio tão logo irão se deparar com situações em seu dia a dia que exigirão deles um raciocínio preciso, correto e rápido. Segundo Vasconcelos (2002), suas ocupações desenvolver-se-ão, ao tempo em que se modificarão, fazendo-se necessário aplicar os seus conhecimentos a novas situações, comunicarem-se com clareza e administrarem a própria aprendizagem ao longo da vida. Por isso, a importância em se promover uma prática educativa, que se conhece o sentido final, do que ali se faz (Zabala, 1998).

Ensino e aprendizagem de lógica e matemática

Historicamente, os educadores na Idade Média, faziam com que a lógica fosse a primeira disciplina a ser estudada, depois da gramática. Afirmavam que o intelecto de uma pessoa só estaria completo, no momento em que esta fosse capaz de dominar o processo silogístico. A lógica constituiu-se, durante toda a Idade Média, como matéria principal, ao lado da Teologia e da Filosofia. (Teles, 1989).

Atualmente, há poucas escolas que abordam o estudo da lógica em seus currículos da Educação Básica. Geralmente, observa-se esse estudo com maior frequência no Ensino Superior, como nos cursos de Filosofia ou Ciência da Computação, por exemplo.

Em contrapartida, vê-se uma crescente busca por aulas de Raciocínio Lógico. Em alguns casos, essas aulas acontecem e aparecem em cursos preparatórios para concursos públicos ou como aulas diversificadas da grade curricular em algumas escolas, sendo mais comum em colégios particulares.

Sabe-se que, nos últimos anos, em diversos tipos de exames de seleção, como vestibulares, processos seletivos de emprego, concursos públicos, dentre outros, cobram-se questões de lógica, que exigem dos candidatos capacidade de interpretar situações do cotidiano e elaborar uma proposta de resolução, mas isso, muitas vezes, não é trabalhado ao longo da vida escolar dos estudantes.

De acordo com Mortari (2001), a lógica procura identificar se a conclusão está adequadamente justificada, em vista da informação disponível, ou seja, se a conclusão pode ser afirmada a partir da informação dada. Por falta desse pensamento lógico, observa-se que muitos alunos possuem a dificuldade de, ao final da resolução de um exercício, por exemplo, verificar se essa satisfaz a condição inicial que foi pedida, ou seja, se a conclusão ou solução está realmente correta.

O uso de variáveis, nas ciências exatas, em sentenças abertas, é comum e observa-se que muitos alunos apresentam dificuldades com a utilização da linguagem matemática, principalmente, em transformar linguagem verbal em linguagem simbólica, bem como, com a interpretação e sistematização de ideias em resolução de problemas.

Neste ponto, identifica-se que nem todos se interessam pelas demonstrações, pelo caminho que se percorreu para atingir o ponto final, preocupando-se apenas, com o resultado final. Desse modo, o estudo da lógica apresenta também esse papel de contribuir no entendimento de como a Matemática é desenvolvida, pois a lógica contribui na organização do pensamento e auxilia no desenvolvimento do raciocínio.

Por isso, espera-se que ao trabalhar atividades de raciocínio lógico, os alunos possam compreender que não se trata de estudar o conteúdo "lógica" em si; apenas símbolos, conectivos e diagramas. Mas que seu estudo possa acontecer de forma diferenciada ajudando-os a perceberem a existência da construção de uma estrutura lógica do pensamento matemático, melhorando sua capacidade para resolver diversos tipos de problemas.

As avaliações do PISA - *Programme for International Student Assessment* - Programa Internacional de Avaliação de Estudantes é uma iniciativa internacional de avaliação comparada, que acontece a cada três anos, aplicada a estudantes na faixa dos 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica, obrigatória na maioria dos países. Aborda questões de leitura, Matemática e Ciências, focando a cada ano, em uma dessas áreas. Esta avaliação busca produzir indicadores que contribuam para a discussão e para a melhoria da qualidade da educação dos países participantes.

No ano de 2012, a edição teve foco em Matemática, contando com questões de raciocínio lógico. Tais questões buscaram identificar quanto os estudantes conseguem interpretar situações, aplicar alguns conhecimentos básicos de matemática e formular conclusões. Nesse ano, participaram 65 países, 34 membros da OCDE - Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômicos - entidade que congrega 34 países e desenvolve o PISA e outros convidados. O Brasil ficou na 58ª posição em Matemática, no ranking educacional, com 391 pontos. A média para Matemática, estipulada pela OCDE, é de *494 pontos*. Ou seja, apesar do avanço, o Brasil se encontra muito abaixo da média internacional.

Os resultados evidenciam que muitos alunos brasileiros não sabiam interpretar situações que exigem deduções diretas das informações, raciocinar logicamente e resolver problemas contextualizados.

Aplicação e Análise das atividades

Aplicou-se uma Sequência Didática (Zabala, 1998), que segundo o autor, trata-se de um conjunto de atividades estruturadas para a realização de certos objetivos educacionais que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor quanto pelos alunos. As atividades foram aplicadas a dezesseis alunos do primeiro ano do Ensino Médio, de uma escola particular, com atividades de raciocínio lógico, algumas elaboradas pela pesquisadora, outras selecionadas de alguns autores, como Sérates (1997) e Morgado (2008).

Objetivava-se observar e analisar como os alunos desenvolveriam estratégias e organizariam o seu pensamento para a resolução das atividades, em três diferentes linhas de raciocínio, nominalmente: lógico numérico e quantitativo; lógico matemático e argumentativo; e lógico analítico.

A primeira atividade teve como objetivo estimular o raciocínio lógico-numérico e quantitativo. As questões exigiram a observação de sequências numéricas ou de figuras para a construção de padrões gerais e determinação do próximo elemento da sequência, bem como o domínio das operações aritméticas básicas.

A lógica dedutiva permite construir argumentos corretos e chegar a certa conclusão lógica, a partir de uma ou mais afirmações dadas inicialmente. Se estas forem verdadeiras, a conclusão, necessariamente, também será verdadeira, como no caso de uma sequencia numérica.

Os alunos foram estimulados a encontrarem uma solução para as questões e orientados a desenvolver a atividade individualmente. Também, solicitou-se que colocassem a regra observada em cada sequência, ou seja, que escrevessem o que os levaram a concluir que seria aquele determinado número como resposta.

Foi observado que os alunos apresentavam muita dificuldade para expressar e registrar suas ideias, importando-se, muitas vezes, apenas com a resposta final. Dos dezesseis alunos que realizaram a atividade, apenas quatro deixavam registrados os raciocínios utilizados para determinar o próximo elemento da sequência, ou seja, 75% dos alunos não conseguiam estabelecer uma estratégia de resolução e registrá-la.

A segunda atividade aplicada teve como objetivo desenvolver o raciocínio lógico, por meio da interpretação de situações apresentadas em modelos físicos, a fim de construir e abstrair noções básicas de lógica matemática.

Trata-se de uma atividade para introduzir os conceitos de tabela verdade. Para isso, pensou-se na construção de imagens que representassem circuitos elétricos, em paralelo e em série, como ponto de partida para análise de situações que, posteriormente, seriam chamadas de proposições compostas envolvendo os conectivos “e” e “ou”.

Os alunos interpretaram as figuras e em seguida, registraram suas conclusões de forma escrita. Após isto, pediu-se que preenchessem uma tabela, traduzindo suas interpretações, ou seja, transformando a linguagem gramatical em símbolos matemáticos. A simbologia adotada foi a da lógica moderna, muito comum na lógica digital, uma linguagem utilizada para operacionalizar máquinas, onde os impulsos elétricos representam os valores lógicos: “Ligado” – “1” ou “Desligado” – “0”, que na lógica matemática são representados por V (verdadeiro) ou F (falso).

Ao final, foi possível socializar uma conclusão geral da atividade. Os alunos falaram sobre suas impressões e o quanto acharam a atividade interessante, pois visualizaram uma situação que, para eles, houve significado e aplicação. A participação dos alunos foi muito satisfatória, pois 87,5% deles compreenderam a atividade e alcançaram o objetivo proposto, ao interpretarem os modelos físicos e conseguirem construir a ideia de conjunção e disjunção inclusiva. 12,5% dos alunos apresentaram dificuldades para transformar a linguagem escrita verbal em linguagem simbólica.

A terceira atividade teve como objetivo trabalhar o raciocínio lógico-analítico, por meio de questões que desenvolvessem a capacidade de raciocinar, através da percepção, organização, dedução e interpretação de informações, a fim de se estabelecer conclusões. A leitura e a interpretação dos elementos do problema fizeram parte dos objetivos para compreensão e realização da atividade.

Uma das questões trata-se de um problema em que são fornecidas algumas informações e condições, para que o aluno descubra a resposta que se pede. Foi acrescentada na atividade, uma tabela para auxiliar os alunos na resolução e organização do pensamento. Grande parte dos alunos apresentaram dificuldades para organizar os dados na mesma. Quatro alunos, o que correspondem a 25% da turma, conseguiram organizar os dados na tabela e solucionar o problema, de forma correta.

Foram propostas novas questões, contendo problemas variados, em que se deveriam interpretar, analisar a situação proposta e pensar em uma solução que satisfizesse cada problema. Os alunos foram incentivados a discutirem cada problema, e se necessário, gerar uma discussão em grupo antes de responderem às questões, para que, através da comunicação e verbalização das ideias, chegassem a um consenso e ao aprendizado. (Brasil, 1999, p. 52).

A pesquisadora fez o papel de professora mediadora na atividade, não interferindo nas respostas ou limitando as possibilidades de fazê-lo, mas conduzindo os alunos a terem um raciocínio correto, prestando o apoio necessário. Uma das questões propostas para os alunos foi a seguinte: *"Aline, Bianca e Camila são três amigas que têm os carros, não necessariamente, nesta ordem: um Gol, um Uno e um Pálio. Um dos carros é prata, o outro, vermelho e o terceiro, preto. O carro de Aline é o prata; O carro de Camila é o pálio; O carro de Bianca não é vermelho e não é o Gol. Quais são as cores do Gol, do Uno e do Pálio?* (Sérates, 1997, p. 102). Notou-se, através dos registros, espontaneamente feitos pelos alunos, que procuraram registrar de forma mais organizada suas conjecturas usando tabelas, esquemas ou desenhos, como é possível ver abaixo no registro de dois alunos:

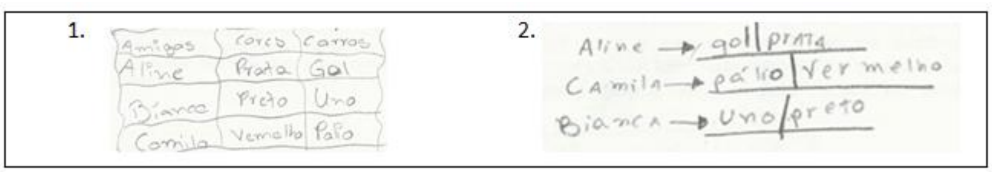


Figura 1. Respostas de dois alunos à questão proposta para resolução. Elaboração dos autores.

A Atividade 3, última da sequência didática aplicada, permitiu uma melhor compreensão e valoração sobre o processo seguido. De acordo com Zabala (1998), essa atividade constituiu-se como uma avaliação integradora, pois fornece um informe de todo o percurso do aluno e estabelece as novas propostas de intervenção por parte da professora-pesquisadora, como por exemplo, a adequação das atividades ao tempo disponível.

Observou-se que, nas atividades finais da sequência didática aplicada, os alunos se preocuparam em registrar seus pensamentos, de alguma maneira, demonstrando o raciocínio seguido. Os meios utilizados foram esquemas, verbalizações de suas opiniões ou registros escritos, indicando, dessa maneira, estarem mais organizados e autônomos durante a resolução das atividades.

Entretanto, o estudo indicou que ainda há necessidade de um trabalho continuo, com atividades que explorem o raciocínio lógico e matemático, em que os alunos necessitem interpretar situações comuns do dia a dia e criar estratégias de resolução.

Considerações finais

Após estudo sobre o assunto e análise dos resultados, evidenciou-se a importância de atividades que permitam a exploração de situações, formulações de hipóteses, além de condições para testá-las e avaliá-las, diante da influência desses instrumentos, no desenvolvimento do raciocínio lógico e organização do pensamento dos alunos.

A pesquisa apontou que após seis meses de trabalho com atividades que possibilitam manipular as informações e criar estratégias de resolução, os alunos se tornaram mais hábeis em sistematizar seus pensamentos, evidenciando isso, no modo de organizar suas ideias, comparando com o processo de resolução utilizado nas primeiras atividades que foram executadas, em que se preocupavam apenas com a resposta final. Na última atividade, a média de compreensão e realização satisfatória da atividade foi de 85,9% dos alunos (13 alunos).

Os resultados mostraram que as atividades, de forma alguma, determinaram o fim de um trabalho. Houve avanços de aprendizagem, porém muito ainda pode e deve ser feito, para que haja uma contribuição eficaz e que, efetivamente, faça diferença na formação dos estudantes, sendo este, portanto, um trabalho contínuo a ser desenvolvido e aprimorado.

As atividades aplicadas, bem como outras que foram elaboradas ou selecionadas, resultaram na elaboração do "*Caderno de Atividades – Raciocínio Lógico: Uma contribuição para a organização do pensamento*", que surge como um suporte aos docentes e discentes para se trabalhar o raciocínio lógico no Ensino Médio, de forma que contribua na exploração de diferentes linhas de raciocínio e na organização do pensamento dos estudantes.

Referências bibliograficas

Brasil, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. (1999). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.* Brasília: MEC. Recuperado em 16 de março de 2016 de http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf

Machado, N. J.; Cunha, M. O. (2005). *Lógica e Linguagem cotidiana: Verdade, coerência, comunicação, argumentação.* Belo Horizonte: Autêntica.

Morgado, A.C. & Cesar, B. (2008). *Raciocínio Lógico-Quantitativo.* (3a ed.). Rio de Janeiro: Elsevier.

Mortari, C. A. (2001). *Introdução à lógica*. São Paulo: UNESP.

Ponte, P. J.; Brocardo, J.; Oliveira, H. (2009). *Investigações Matemáticas na sala de aula.* Belo Horizonte: Autêntica.

Sérates, J. (1997). *Raciocínio lógico: lógico matemático, lógico quantitativo, lógico numérico, lógico analítico, lógico crítico.* (5a. ed.). Brasília: Gráfica e Olímpica Ltda.

Teles, A. X. (1989). *Introdução ao Estudo de Filosofia.* São Paulo: Ática.

Vasconcelos, M. C. (2002). *Um estudo sobre o incentivo e desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos, através da estratégia de resolução de problemas.* (Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis). Recuperado em 23 de março de 2016 de https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/82419/195597.pdf?sequence=1

Zabala, A. (1998). *A prática educativa: Como ensinar.* Porto Alegre: Artmed.

EXPLORANDO EL USO DE ORACIONES CONDICIONALES EN LA LENGUA DE SEÑAS MEXICANA

Elizabeth Becerra Ramos, Ricardo Quintero Zazueta
Departamento de matemática educativa Cinvestav-IPN. (México)
ebecerra@cinvestav.mx, quintero@cinvestav.mx.

RESUMEN: El propósito de este trabajo es investigar las distintas formas de expresar enunciados condicionales en la Lengua de Señas Mexicana (LSM) y cuando estas corresponden a una implicación lógica. Las leyes lógicas se abstraen de y actúan en el campo de las formas del lenguaje, nos interesa entonces estudiar cómo funcionan estas leyes en las lenguas de señas. Primero exploramos las formas habituales de expresar el condicional en LSM, tanto con intérpretes profesionales como con informantes sordos, personalmente o en medios de distribución masiva como diccionarios, artículos y videos. Posteriormente, solicitamos una interpretación a vista de oraciones que expresan la relación condicional de diversas formas. Hemos encontrado que, aunque la mayoría de las formas habituales de expresar condicional en LSM tienen recursos para distinguir antecedente y consecuente, estas son muy ambiguas con respecto a la necesidad lógica. No obstante, hay algunas formas que pueden expresar adecuadamente la implicación lógica.

Palabras clave: sordos, lógica, necesidad lógica, lengua de señas

ABSTRACT: The aim of this work is to investigate the different ways of expressing conditional statements in the Mexican Sign Language (MSL) and to establish when they correspond to a logical implication. Logical laws are abstracted from and act in the field of language forms. Then we are interested in studying how these laws work in sign languages. First, we explore the usual ways of expressing the conditional in MSL, both, with professional interpreters and with deaf informants, either personally or in mass distribution media such as dictionaries, articles and videos. Subsequently, we request an interpretation viewing statements that express the conditional relationship in various ways. We have found that, although most of the usual forms of expressing conditional in MSL have resources to distinguish antecedent and consequent, they are very ambiguous with respect to logical necessity. However, there are some forms that can properly express logical implication.

Key words: The deaf, logic, logical necessity, Sign Language

Introducción

Partiendo del reconocimiento de los lenguajes de señas como lenguas naturales, y de una cultura sorda, trabajamos desde una perspectiva sociocultural, abordamos los problemas del Sordo como los problemas de una minoría lingüística y cultural, no desde una perspectiva médica.

El razonamiento matemático no se lleva acabo enteramente en una lengua natural, sino que utiliza sus propias representaciones y sistemas de signos. La lengua natural se utiliza como metalenguaje para el quehacer matemático y en principio cualquier lengua natural podría desempeñar esta función, inclusive las lenguas de señas.

Una de las principales dificultades que enfrentan las personas sordas es el aprendizaje de la lengua escrita, pero su avance en áreas como las matemáticas no tendría que estar directamente subordinado a su avance en el español escrito. Pensamos que podrían desarrollarse instrumentos culturales para acceder a sistemas de signos y al conocimiento matemático, mediados con la LSM, que a su vez es el principal instrumento cultural de la comunidad sorda.

Por otra parte, siendo la lógica un soporte fundamental de la actividad matemática, existen numerosos estudios sobre la comprensión y aprendizaje de la lógica en la matemática educativa. Los cuales señalan que los estudiantes experimentan serias dificultades con ella. Y que una cultura lógica y su utilización podrían mejorar el desempeño en diferentes especialidades o incluso en la vida cotidiana.

Dado que el lenguaje constituye la base empírica de la lógica formal, y la relación que la lógica formal guarda con la realidad esta mediada por el lenguaje. Se necesita investigación para una mejor comprensión de las formas lógicas de la LSM y su utilización en la comunidad de sordos. Conjeturamos que analizar la LSM desde la lógica matemática, por ejemplo, la manera en que se manejan conectivos e implicaciones lógicas en la LSM, puede darnos las pautas para construir los instrumentos antes descritos y entender cómo se da el conocimiento racional mediado por una Lengua de Señas.

Hasta el momento hemos explorado las formas habituales de expresar oraciones condicionales en LSM. Posteriormente analizamos una traducción a vista en LSM. Encontramos que si bien existen señas o componentes gramaticales que parecen diferenciar el antecedente del consecuente, expresan ambigüedad lógica, mientras que la utilización de algunas señas parece denotar más una necesidad lógica de la conclusión.

Marco teórico

Vygostki (1997) señala que el desarrollo de funciones psicológicas superiores requiere mediación de instrumentos culturales; el instrumento cultural más importante es el lenguaje. Si bien el niño sordo tiene acceso limitado a la lengua oral y escrita, puede lograr en el desarrollo lo mismo que el oyente, pero lo logran de distinto modo. La clave será la compensación: el uso de instrumentos culturales alternativos. Algunos de estos instrumentos culturales pueden ser mediados por la lengua de señas, que a su vez es el principal instrumento cultural de la comunidad Sorda.

Por su parte, las lenguas de señas constituyen sistemas lingüísticos no solo por las funciones que realizan, sino también por sus propiedades y principios de organización estructural. Son lenguas naturales, en el sentido de que han emergido y evolucionado en el seno de las diferentes comunidades de usuarios – personas sordas y oyentes – con independencia de las lenguas habladas en las comunidades lingüísticas de la misma región o país (Jarque, 2012). En México la Lengua de Señas Mexicana (LSM) es reconocida como lengua nacional y se acepta la existencia de una cultura sorda, sin embargo, pocas personas sordas tienen acceso a una educación de calidad que considere su lengua, su cultura y su forma de conocer y percibir el mundo. Lo cual les genera un retraso escolar, les impide una adquisición óptima de las competencias lingüísticas de la lengua de señas y les priva de herramientas para una mejor calidad de vida.

La base empírica de la lógica es el lenguaje. Las leyes lógicas se abstraen de y actúan en el campo de las formas del lenguaje, concretamente de las formas lógicas del lenguaje (Sánchez, 1989).

Siendo la lógica un soporte fundamental de la actividad matemática, existen numerosos estudios sobre la comprensión y aprendizaje de la lógica en la matemática educativa. Por ejemplo: Durand-Guerrier (2003) señala que la implicación está en el corazón mismo del razonamiento matemático y que los estudiantes experimentan serias dificultades para usarla de manera adecuada. Considera que dichas dificultades están relacionadas con la complejidad de la noción. Sánchez (1989) señala la falta de una cultura lógico-metodológica, en la mayoría de las personas, lo cual se deriva principalmente de dos razones; la propia dificultad de la enseñanza y el aprendizaje de la lógica formal, y el desconocimiento de la necesidad y utilidad de una cultura lógico-formal con una finalidad metodológica. Inglis y Simpson (2008) en su investigación concluyen que el estudio de matemáticas avanzadas no está estrechamente relacionado de manera simple en la manera en que los estudiantes realizan inferencias utilizando el condicional.

Dado que en la cultura oyente el conocimiento matemático se conserva, comunica y disemina socialmente a través de lenguajes orales, escritos y simbólicos especializados, la mayoría de las investigaciones, como las descritas anteriormente, se refieren específicamente a las lenguas orales y a las escritas. Por otro lado, a pesar de que las pesquisas en lingüística de las lenguas de señas muestran una tendencia a mostrar nuevas perspectivas de la formación y estructura de las lenguas, las lenguas de señas no tienen aún un sistema de escritura que permita fijar, guardar y transmitir conocimiento.

Por tanto, las dificultades de entender y manejar las estructuras lógicas utilizadas en las lenguas de señas se multiplican, es necesario investigar cómo se abstraen y actúan las leyes lógicas en el campo de las lenguas de señas, para poder entender las formas de uso y como lo entienden las personas sordas y finalmente poder generar una cultura lógico- metodológica que dote a la comunidad sorda de herramientas para resolver de manera asertiva problemas incluso de la vida cotidiana.

Método

Para indagar cuales son y cómo se utilizan las estructuras gramaticales dentro de la LSM que expresan oraciones condicionales. Primero indagamos de manera informal en cursos de lengua de señas, con intérpretes de LSM y con personas sordas, analizamos diccionarios y revisamos investigaciones de lingüística de la LSM. Posteriormente elegimos diez oraciones condicionales de un curso previo de lógica, combinando el orden entre el consecuente y el antecedente, variando además las formas de expresión (Si... entonces…; Cuando…; Solo si…; Es suficiente que; Es necesario que; Si..., ...). Solicitamos a un intérprete profesional que realizara una interpretación a vista, es decir leyera las oraciones en español escrito e interpretara en LSM en el momento. Fue video-grabado, posteriormente analizamos el video.

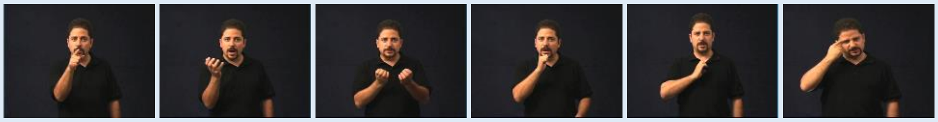
Resultados y análisis

En los cursos de señas con intérpretes de LSM y personas sordas, los profesores coinciden en el uso de la seña QUIZÁ para oraciones de la forma *Si… entonces*, sin embargo, algunos la señan antes del antecedente y otros antes del consecuente. Algunos intérpretes señalan el ascenso de las cejas en el antecedente y el descenso en el consecuente. Un intérprete nos advirtió que la seña de QUIZÁ es opcional antes del antecedente, que es marcado con ascenso de las cejas, se bajan barbilla y hombros. Además, expuso que no había visto señar oraciones condicionales invertidas es decir primero señar el consecuente y después el antecedente. Cuando preguntamos por la seña de ENTONCES respondieron que no hay para las oraciones condicionales, existe una seña que es copia del inglés señado y es utilizada en el español señado. Asimismo, existe otra seña que es utilizada como pregunta donde hay dos opciones (*¿Entonces?)* pero, no es una oración condicional.

En el diccionario de LSM en video, DIELSEME I, encontramos dos oraciones condicionales en forma elíptica (Si…, …) Ver figura 1. En estos casos no encontramos una seña que indique un condicional, pero, notamos una sutil inclinación hacia enfrente cuando señan el antecedente, regresando hacia atrás en el consecuente.

Español: Si no haces ejercicio el entrenador se enoja

Glosa: TU HACER EJERCICIO NADA ENTRENADOR ENOJAR



Español: Si confiesas toda la verdad, tu castigo serán menos años de cárcel.

CONFIANZA VERDAD HUMILDAD TU CASTIGO AÑOS CÁRCEL MENOS

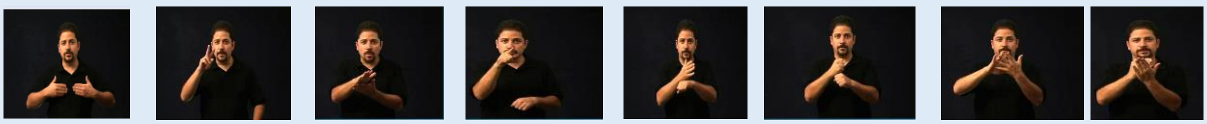


Figura 1. Ejemplos tomados del DIELSEME I, 2004.

Cruz (2008), en su tesis "Gramática de la Lengua de Señas Mexicana" hace una diferencia entre la expresión del modo condicional e hipotético y la oración subordinada condicional. En la primera señala que se requiere que al inicio de la oración se utilice la seña IMAGINAR además de acompañarla con los ojos abiertos y un ligero movimiento del cuerpo y de la cabeza hacia al frente. En la segunda, el antecedente precede al consecuente, son marcadas por un rápido ascenso y descenso de las cejas, opcionalmente se utiliza la seña IMAGINAR al comienzo de la oración condicional. Asimismo, puede utilizarse la seña QUIZÁ al inicio del consecuente. La figura 2 muestra dos ejemplos tomados del trabajo de Cruz (2008), han sido modificadas las glosas para una mejor comprensión.

Español: Si no te pones suéter te puedes enfermar

Glosa: FUTURO IMAGINAR/SI TU NADA CALOR-SACO TU PODER ENFERMO

Español: Si me acompañas tal vez te compre un dulce

Glosa: IMAGINAR TU YO ACOMPAÑAR QUIZÁ PODER YO COMPRAR DAR DULCE

Figura 2. Ejemplos tomados de Cruz, 2008.

En cuanto a la interpretación a vista de enunciados condicionales, mostramos dos ejemplos. En el primer ejemplo (figura 3), podemos observar que al inicio de la oración utiliza las señas de QUIZA EJEMPLO y nuevamente QUIZA antes del antecedente. También notamos las cejas hacia arriba en el inicio de la oración y una leve inclinación hacia el frente, dado que en el discurso en LSM también existen elementos que lo acompañan pero que no aportan elementos gramaticales, que son llamados signos paralingüísticos o paralenguaje, puede ser que pareciera una inclinación, pero, en realidad quizá solo estaba leyendo.

	Oración: *Si n^2 es par entonces n también lo es.* P: n^2 es par Q: n es par Forma lógica: $P \rightarrow Q$			
Español	Si	n^2 es par	Entonces	*n* también lo es.
Gesto	Ceja levantada			Cambia ceja a neutral
Comentarios		1. Marca la disyunción con cabeceo y labios, boca de o. 2. Con la mano izquierda hace la seña de N y con la derecha el 2 dibujando en el espacio n^2.		3.Junta ambos dedos índices como para indicar que es igual.
Glosa	QUIZA EJEMPLO QUIZA	N 2 [O][1] [N-2][2] QUE-SIGNIFICA EN DOS DOBLE P-A-R COMO QUE-SIGNIFICA CONVERTIR		[IGUAL][3] N MISMO IGUAL PARECIDO N N-2 IGUAL

Figura 3

En el siguiente ejemplo (figura 4), podemos observar que al inicio de la oración utiliza las señas de EJEMPLO y QUIZA antes del antecedente, las cejas hacia arriba durante el antecedente, al igual que el ejemplo anterior, pero en este caso utiliza la seña de SEGURO casi al inicio del consecuente y la seña de AFUERZA al final.

	Oración: *Si un animal es vertebrado entonces es mamífero.* P: *un animal es vertebrado* Q: *un animal es mamífero* Forma lógica: $P \rightarrow Q$			
Español	Si	Un animal es vertebrado	entonces	es mamífero
Gesto	Ceja levantada		Cambia ceja a neutral	
Comentarios		1. Utiliza dos señas diferentes para *huesos*.		2. La seña ADENTRO también significa *en*.
Glosa	EJEMPLO QUIZA	ANIMAL ADENTRO HAY [HUESOS HUESOS][1]		[ADENTRO][2] SEGURO MAMIFERO NACER MAMIFERO AFUERZA

Figura 4

En general las señas de QUIZA y/o EJEMPLO prevalecen en las oraciones que comienzan en *si*. También en la oración que comienza en *solo si*. En todas las oraciones aparecen las cejas levantadas en el antecedente, al menos al comienzo de la oración.

Notamos que la estructura de la oración en LSM cambia de acuerdo al contexto y a la forma de expresión empleada, observamos la seña de PODER al final del consecuente en una oración, y la seña de AFUERZA al inicio o al final del consecuente en almenos tres oraciones. Y en el ejemplo anterior la seña de SEGURO en el consecuente.

En este caso notamos que siempre se interpretó primero el antecedente y después el consecuente aun en las oraciones condicionales invertidas.

No existe una forma única de expresar una oración condicional debido a la riqueza lingüística de la lengua de señas, de la misma forma que las lenguas orales y escritas que permiten una gran variedad de expresiones de una oración con la misma forma lógica.

Aunque la seña de QUIZA muestran la idea de verdad o falsedad, las señas de QUIZA, IMAGINA Y EJEMPLO, la inclinación de la cabeza y el movimiento de las cejas, marcan las diferencias entre el antecedente y el consecuente en oraciones condicionales, pero son muy ambiguas con respecto a la implicación lógica. Además, existe confusión en los signantes (sordos u oyentes) de si debe utilizarse en el antecedente o en el consecuente, podemos conjeturar que se debe a una falta de cultura lógico metodológica o falta en la reflexión lingüística de la lengua de señas. Esto se confirma en las oraciones que no son de la forma *si… entonces*.

Sin embargo, las señas de AFUERZA, SEGURO, PODER pueden expresar mejor la necesidad lógica. No obstante, no aparecen en la literatura ni en los cursos de señas. Necesitamos investigar a profundidad para confirmar el uso de señas que expresen mejor la implicación lógica.

También notamos mayor dificultad para interpretar oraciones que se refieren a temas de matemáticas. Esto se debe en parte a que no existen señas para diversos conceptos en matemáticas, por la falta de acceso a la educación matemática de las personas sordas.

Esta variedad de señar una oración condicional muestra la necesidad de investigar afondo como se utiliza y como las personas sordas la entienden. Quizá la manera de interpretarla se refleje en la capacidad de hacer inferencias lógicas.

Conclusiones

De la misma forma que las lenguas orales y escritas que permiten una gran variedad de expresiones de una oración condicional con la misma forma lógica, comprobamos la riqueza lingüística de la lengua de señas, al no tener una única estructura gramatical para señar una oración condicional.

La confusión de utilizar la seña de QUIZA en el consecuente o en el antecedente, muestra una posible falta de cultura lógica en los signantes (sordos u oyentes) y muestra la complejidad para comprender dicha materia.

La estructura gramatical empleada depende de los ejemplos utilizados, notamos dificultad en enunciados con temas de matemáticas. El uso de señas como AFUERZA reflejan la necesidad lógica, y una comprensión por parte del intérprete de la implicación lógica.

Es necesario investigar con profundidad cómo las personas sordas entienden y usan el condicional y cómo es que realizan inferencias, para poder construir las herramientas que los doten de una cultura lógica, además debemos asegurarnos del uso correcto de las estructuras gramaticales en la LSM para transmitirlas de manera fidedigna.

Preguntarnos la relación de las estructuras lógicas y la LSM, Nos da grandes posibilidades de investigación. Aquí apenas tenemos el inicio.

Referencias bibliográficas

Cruz, M. (2008). *Gramática de la lengua de señas mexicana*. Tesis de doctorado no publicada, Colégio de México. México.

Diccionario español- lengua de señas mexicana I. DIELSEME I. (2004). Estúdio introductorio al léxico de la LSM. México: Secretaria de Educación Pública.

Duran-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in Mathematics.* Kluwer Academic publishers. Netherlands. 53, 5-34.

Inglis M. y Simpson, A. (2008). Conditional inference and advanced mathematical study. *Educational Studies in Mathematic*. Springer Science. 67, 187-204.

Jarque, M. (2012). Las lenguas de signos: Su estudio científico y reconocimiento legal. *Anuari de Filologia. Estudis de Lingüística.* Universidad de Barcelona, España. 2, 33- 48.

Sánchez, J. (1989). Importancia y Generalidad Metodológica de la Lógica Formal. *Ensayos*. Universidad Autonoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, México, 47, 14-26.

Sánchez, J. (1993). Forma Lógica Aspectos Metodológicos, *CONTACTOS*. 10, 50-61.

Vygotski, L. (1997). *Obras Escogidas III.* Madrid. Visor.

CAPÍTULO 3

ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Daniela Reyes-Gasperini
dreyes@cinvestav.mx

La reflexión sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, sin caer en la costumbre de buscar fallas o aciertos en los actores de la educación, personificados en estudiantes o profesores, nos lleva a poner la mirada en el discurso Matemático Escolar (dME). Este proceso lleva más de treinta años. En sus inicios, Carlos Ímaz lo llamaba *discurso matemático para la escuela* (1987), para que, tiempo después, se reformulara hacia el *discurso Matemático Escolar* (Cantoral, 1987).

Las primeras reflexiones al respecto versaban sobre lo siguiente:

> … la mayoría de estos cursos son bastante irrelevantes, sobre todo por suponer por parte de los alumnos una motivación que es totalmente inexistente, en ocasiones esa motivación se pretende con base en procedimientos totalmente fuera de contexto de esos alumnos. (…) Lo que debe preocuparnos, para ser coherentes con nuestro punto de vista de la Matemática como problema de comunicación, es el rediseñar el discurso matemático en la enseñanza de manera tal que enfrente realmente el problema de la masificación y no que lo soslaye. (Ímaz, 1987, p. 272)

Desde sus inicios, el rediseño del, hoy, *discurso Matemático Escolar* buscaba que la matemática escolar sea contextual y funcional para los estudiantes. Hace un tiempo, solía confundirse al dME con el discurso hablado del profesorado, o bien, con los propios libros de texto. Sin embargo, de a poco, el constructo teórico que fungiría como elemento fundamental de análisis y cuestionamientos, se fue articulando de modo tal que permitió hacer explícita la diferencia entre sus estructuras objetivables (libros de texto y discurso hablado, por ejemplo) y los fundamentos, la ideología y la concepción de la propia matemática escolar que sobre ellas regía. A esto último es a lo que denominamos discurso Matemático Escolar.

En la actualidad, las innovaciones apuestan a la problematización de saberes matemáticos que permitan evidenciar la normatividad y carencia de significación mediante el uso por parte del discurso Matemático Escolar vigente, a la vez que buscan elementos característicos, es decir su anidación de prácticas, que encaminen hacia un rediseño.

La pregunta que nos hacemos desde el título ¿por qué nos interesa el dME?, se va respondiendo en cada uno de los escritos que nos comparten los colegas latinoamericanos de Colombia, Chile y México. Una mirada integradora de la postura para el rediseño es considerar que la matemática escolar, normada por el discurso Matemático Escolar actual, no reconoce el contexto en el cual viven los estudiantes, su *aula extendida*, por lo cual, no dan lugar al valor de uso del conocimiento matemático escolar. Es aquí donde la construcción social del conocimiento matemático queda soslayada. La dimensión social que incorpora de manera sistémica la Teoría Socioepistemológica al análisis cognitivo, didáctico y epistemológica, es lo que la diferencia de las otras.

Mendoza Higuera y Cordero; Cen Che; Tuyub y Buendía; Lara Medina y Morales Soto, con sus diferentes contribuciones dan evidencia de la búsqueda de la funcionalidad de la matemática a partir del estudio de las gráficas y sus usos en distintas prácticas de referencia. Bajo la misma lógica, León Salinas y Maldonado Rico, desarrollando un estudio relativo a la optimización, dan evidencia de que la manipulación directa del concepto no asegura su resignificación, sino que es necesario que se use dicho conocimiento, y proponen, para finalizar, una alternativa para ello.

El análisis del discurso Matemático Escolar nos permite repensar, por ejemplo, el uso que los profesores le dan a la matemática escolar en sus aulas y con base en ello, como dicen Vargas Herrera y Soto Soto, buscar la identidad disciplinar del profesor de Matemáticas a partir de su problematización. Asuntos similares son abordados por Opazo, Cordero y Silva.

Con base en la reflexión del discurso Matemático Escolar y desde una postura propositiva, Moreno y Cantoral, postulan que su investigación busca los elementos para el rediseño del dME, con base en la evolución de prácticas que signifiquen a los objetos matemáticos empleados en el estudio del cambio. De la misma manera, López y Montiel, realizan una propuesta para reflexionar el discurso matemático algebraico, considerando que "la predicción es una práctica que puede aportar al desarrollo del Pensamiento Algebraico pues la necesidad de predecir organiza el proceso de generalización de comportamientos". Por su parte, Romero y Farfán Márquez, proponen una anidación de prácticas preliminar que acompaña la construcción social de la Serie Trigonométrica de Fourier.

En síntesis, en este capítulo el lector o la lectora encontrará investigaciones que buscan las prácticas asociadas a los objetos con el fin de proponer un rediseño del dME –algunos que se fueron mencionando en esta introducción– como así también, investigaciones que parten de la exclusión provocada por el dME (Soto y Cantoral, 2014) para realizar reflexiones teóricas al respecto, hasta llegar a investigaciones que dan cuenta de nuevas causas como es el caso de las cuestiones de género, cuya línea de investigación continúa fortaleciéndose, a cargo de Farfán Cera y Farfán Márquez.

Referencias

Cantoral, R. (1987). Historia del Cálculo y su Enseñanza: El concepto de límite a través de los textos y de su historia. En F. Hitt, E. Bonilla y O. Figueras (Eds.), *Memorias de la Primera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa* (pp. 231–235). México: Universidad Autónoma de Yucatán.

Ímaz, C. (1987). ¿Qué es la Matemática Educativa? En F. Hitt, E. Bonilla y O. Figueras (Eds.), *Memorias de la Primera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa* (pp. 267–272). México: Universidad Autónoma de Yucatán.

CONSTRUCCIÓN SOCIAL DE LA SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER

Fabián Wilfrido Romero Fonseca, Rosa María Farfán Márquez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. (México)
fwromero@cinvestav.mx, rfarfan@cinvestav.mx

RESUMEN: Desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (*TSME*) se busca construir un esquema de *prácticas anidadas* preliminar para la Serie Trigonométrica de Fourier (*STF*), con el fin de diseñar situaciones de aprendizaje basada en la *construcción social* del conocimiento matemático (*CSCM*). Para esto se realiza una *problematización del saber matemático* que dé cuenta de su construcción social, mediante el estudio integrado de cuatro componentes: epistemológica, didáctica, cognitiva y socio-cultural, para determinar las *prácticas* que permiten la apropiación del saber matemático involucrado.

Palabras clave: series de fourier, prácticas sociales, socioepistemología

ABSTRACT: From the Socio-epistemological Theory of Educational Mathematics (STEM), this research work is intended to elaborate a schedule of *nested practices* preliminary to the Trigonometric Series of Fourier (TSF), in order to design learning situations based on the social building of mathematical knowledge (SBMK). A *problem-solving based- mathematical knowledge,* that show its social building, is carried out through the integrated study of epistemological, didactic, cognitive and socio-cultural components to determine the practices that allow the acquisition of the involved mathematical knowledge.

Key words: fourier's series, social practices, socio- epistemology

Introducción

Dentro del Cálculo, la Serie Trigonométrica de Fourier (*STF*) es uno de los temas primordiales, pues epistemológicamente fue un punto de quiebre en el desarrollo del análisis matemático, así como parte importante en la evolución del concepto de función tal como lo conocemos hoy en día. Por esta razón, ha sido motivo de múltiples investigaciones en Matemática Educativa, las cuales se han preocupado por diferentes aspectos relacionados con la serie. Por mencionar algunos: el problema de la cuerda vibrante como antecedente de la *STF*, la determinación del estado estacionario como fenomenología intrínseca a la serie, la visualización en el trabajo de Fourier y algunas nociones físicas y matemáticas relacionadas con la misma como lo son las nociones de calor y periodicidad.

De acuerdo con Montiel (2005) la *STF* es el estadio más avanzado de las funciones trigonométricas, pero el *discurso matemático escolar* predominante produce la exclusión de su construcción social, ya que impone argumentaciones y significados alrededor de la serie, sin considerar la *práctica de referencia* de quien aprende, es por esto que esta investigación se preocupa por contribuir al rediseño del discurso en el que se promueva la construcción social de este conocimiento.

Se pretende, a partir de la *problematización* de la *STF*, determinar las prácticas sociales que acompañan la construcción social de este saber matemático en su contexto histórico-social de surgimiento, con el fin de dar un esquema de *prácticas anidadas* preliminar que funcione como fundamento para proponer situaciones de aprendizaje que contribuyan al rediseño del *discurso matemático escolar* predominante alrededor de la serie.

El escrito está estructurado de la siguiente manera: en primer lugar, algunas consideraciones teóricas, seguido de la metodología utilizada para realizar la problematización del saber alrededor de la *STF*, luego la construcción social de la *STF*, para cerrar con algunas reflexiones finales.

Marco Teórico

Al final de la década de los 80's en la escuela mexicana de Matemática Educativa surgió una perspectiva teórica que se preocupaba por la construcción social del conocimiento y su difusión institucional; hoy en día, esta perspectiva teórica es llamada Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (*TSME*) y sostiene que el conocimiento matemático no fue creado para la escuela, mucho menos para ser enseñado, por lo que su introducción en los sistemas de enseñanza provoca que el conocimiento cambie su estructura y su funcionalidad (Cantoral, 2013).

Cuando el conocimiento llega a la escuela se producen diferentes discursos, la *TSME* los ha llamado con el término *discurso Matemático Escolar* (*dME*). De manera que es importante hacer un estudio sistémico del *dME* para conocer el rol que juega en el sistema de enseñanza, así se podrá proponer su rediseño, a través de una construcción social del conocimiento matemático (*CSCM*) (Soto y Cantoral, 2014).

Es importante resaltar que, en la *TSME*, a diferencia de otras teorías, se considera que el conocimiento matemático se genera socialmente a través de *prácticas* situadas (Soto y Cantoral, 2014), ya que, al ser las Matemáticas una producción del ser humano, está situada cultural, histórica e institucionalmente (Cantoral, 2013). La *TSME* utiliza la noción de *práctica social* como reguladora de toda actividad humana, esto es, la práctica social no es lo que las personas hacen, es lo que las hace hacer lo que hacen, aun cuando no sean conscientes de sus propias acciones (Cantoral y Farfán, 2004). La *CSCM* inicia con la *acción* directa del sujeto (individual, colectivo o histórico) en algún medio, el cual es organizado como una *actividad* humana (situada socioculturalmente), esto para guiar una *práctica* (interacción deliberada de sujeto y regulada por el contexto), esta práctica es regulada por una *práctica de referencia* que es la expresión ideológica de un paradigma, el cual a su vez es regulado por una *práctica social* (Cantoral, 2013).

La Aproximación Sistémica de la TSME como Metodología de la Investigación

La investigación en *TSME* tiene naturaleza sistémica, estudia las relaciones entre epistemología, procesos cognitivos, procesos de institucionalización vía la enseñanza y la dimensión sociocultural. Para esto se hace una problematización del saber matemático a través del estudio integrado de cuatro dimensiones:

La dimensión epistemológica: esta dimensión estudia “las circunstancias que hicieron posible la construcción del conocimiento matemático” (Cantoral, 2013, p. 147). Para este análisis se estudian diferentes momentos históricos: la discusión alrededor del problema de la cuerda vibrante, el problema de la propagación de calor; además del surgimiento de la Ingeniería como ciencia, que regula el trabajo matemático del tiempo de Fourier; un análisis epistemológico a profundidad se encuentra en el trabajo de Farfán (2012).

La dimensión didáctica: en esta dimensión se estudia cómo vive el saber en el sistema didáctico, es decir, su intencionalidad a la hora de enseñarlo, para determinar cómo ha evolucionado ese saber en los entornos escolares y no escolares. Con este propósito se estudian libros de texto, planes y programas de estudio.

La dimensión cognitiva: aquí se analizan las formas de apropiación y significación progresiva del conocimiento que vivencian los partícipes en una situación de aprendizaje con fines de construir conocimiento matemático; un ejemplo de esto es la investigación de Farfán (2012) sobre la noción de estado estacionario.

La *TSME* agrega la dimensión social y cultural, pero esta no se observa separada de las demás, está inmersa en cada análisis, con el fin de identificar aquellas prácticas humanas que propician la apropiación del objeto.

El análisis realizado da cuenta de los resultados obtenidos por toda una línea de investigaciones acerca de las nociones alrededor de la *STF*, su contexto histórico-cultural de origen, los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza y los procesos cognitivos asociados a tareas en las que se pone en funcionamiento este conocimiento, un análisis detallado lo puede encontrar en Romero (2016), a partir de este análisis se logró dilucidar un modelo preliminar de construcción social para la *STF*, lo que se conoce en la teoría como esquema de anidación de prácticas.

Construcción Social de la STF

Según Montiel (2005), al analizar la evolución del conocimiento e ideas en la historia que permitan encontrar las circunstancias, los escenarios y los medios, que posibilitaron la emergencia del conocimiento matemático, es posible plantear su *construcción social*, en este caso dicho conocimiento se corresponde con la *STF*. Para ello se analizó su contexto de origen, lo que permitió reconocer los escenarios, los contextos, las problemáticas y las prácticas de referencia asociadas a la *STF* y que se consideran fundamentales para significar al concepto en escenario escolar. Además, a partir de la dimensión didáctica, se considera el estado del *dME* predominante y como este influye en la didáctica; con la componente cognitiva se analizaron las construcciones mentales de estudiantes y profesores y cómo este afecta la manera en que conciben la *STF* y los conceptos relacionados con la misma.

En lo que sigue se hará evidente, en forma general, la presencia de Práctica de Referencia **-** Práctica Socialmente Compartida **-** Actividad **-** Acciones, en su escenario histórico, institucional y cultural, y su relación con el estado actual del sistema de enseñanza y las nociones mentales de profesores y estudiantes acerca de la *STF*. El análisis a profundidad para proponer la construcción social de la *STF* se encuentra en Romero (2016), aquí sólo se resumen los aspectos que se consideran centrales.

El problema de la cuerda vibrante

Al estudiar las circunstancias que posibilitaron la emergencia de la noción de convergencia, ambiente en el cual se dio el surgimiento de la *STF*, la investigación de Farfán (2012) muestra cómo la discusión alrededor del problema de la cuerda vibrante enunciado por B. Taylor en 1715 es antecedente del trabajo de Fourier. La solución física propuesta por D. Bernoulli, a partir de sus conocimientos musicales sobre la superposición de armónicos, asegura que la forma inicial de la cuerda se puede representar en serie de sinusoidales, lo cual fue punto de controversia entre los matemáticos de la época. Por ejemplo, Euler sostenía que de ser cierta la solución planteada por D. Bernoulli, se debía cumplir que la forma inicial de la cuerda fuese una función periódica e impar (por las propiedades de los términos de la serie), lo cual era una restricción innecesaria, sin embargo D. Bernoulli se mantuvo firme en su postura pues argumentaba que había suficientes coeficientes (infinitos) para seleccionarlos de manera que la igualdad se cumpla, por lo que para él esta era la solución general del problema de la cuerda vibrante.

La solución propuesta por D. Bernoulli permite vislumbrar que la comprensión a profundidad de la superposición de ondas (sumas parciales) permite *predecir* ciertas propiedades del comportamiento general de la serie (convergencia). Sin embargo, los matemáticos de la época, aunque no se preguntaron por la convergencia de la serie, generalizaron las propiedades de los términos de la serie a la función que ésta representaba (su valor de convergencia), lo cual está reportado sucede hoy día en las aulas con profesores y estudiantes (Farfán, 2012; Moreno, 1999).

El contexto del trabajo de Fourier

Aunado al trabajo de Fourier y en su contexto local, la Francia del siglo XVIII, se produce el surgimiento de la Ingeniería Matemática, para lo cual la Escuela Politécnica, de la cual Fourier fue profesor, juega un rol protagónico en el proceso, pues poseía las condiciones para la creación de un ambiente de la Ingeniería como ciencia, ya que el propósito de su creación fue el de imponer la uniformización y un nivel avanzado de conocimientos en Matemáticas en toda Francia.

Asimismo, los profesores de esta institución tenían la obligación de escribir materiales para sus cursos, lo que provocó un incremento notable en la producción de textos de Matemáticas, contribuyendo a la matematización del mundo científico, en un periodo en el que las Matemáticas no lograron tantos avances como lo hicieron otras ciencias, pues los libros de texto de Matemática no se preocupaban por la investigación, sino en reforzar la creación de ingenieros, militares e industriales (Farfán, 2012).

Así, el análisis de Fourier sobre la propagación de calor "se da en el marco de la profesionalización de una *práctica de referencia*, la práctica de la Ingeniería y por ende en el seno de la comunidad politécnica" (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez-Sierra, 2006, p. 90, el subrayado es nuestro). Por lo que el problema de propagación del calor nace ligado a la práctica de la Ingeniería, en un momento en que se está consolidando la Ingeniería como ciencia.

La ecuación de propagación del calor

Con el trabajo de Biot se establece la primera ecuación diferencial que modela el fenómeno de propagación del calor, lo hace a través de la noción de calórico y de mediciones con un termómetro, lo que provoca que no se estudie el fenómeno en sí, los cálculos están basados en la empírica, además no explica la naturaleza de los coeficientes de la ecuación diferencial, lo que es propio del material y lo que no (conductividad, densidad, entre otros). Es con el trabajo de Fourier, en la *Théorie Analytique de la Chaleur* (1822), donde se analiza el problema de la propagación del calor en los sólidos.

La variación está presente y se significa en la ecuación general que modela el fenómeno, donde $v(x, y, z, t)$ es la temperatura del sólido en el punto (x, y, z) en el tiempo t y K, C y D son constantes que dependen del sólido:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{C \cdot D}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

Se puede decir que esta es la ecuación que modela completamente el fenómeno, pues se corresponde con la que Biot había obtenido de forma empírica. La discusión siguiente gira en torno de la solución de la ecuación diferencial, para lo cual Fourier da ejemplos de su aplicación.

Es así como el estudio del ambiente fenomenológico de la transferencia del calor propicia la construcción de la ecuación diferencial que modela el problema, pero la solución de esta ecuación en los casos particulares está inserta en la Matemática misma, sin hacer alusión a la situación física, y es aquí en donde surge la serie trigonométrica.

La serie trigonométrica y su convergencia

J. Fourier al estudiar la propagación del calor, en su libro *Théorie analytique de la chaleur* (1822), establece la ecuación general que modela el fenómeno en cuerpos sólidos. Luego presenta una serie de problemas de uso de la misma, entre ellos el problema de la propagación de calor en una lámina infinita, el cual es un **modelo** de la transferencia de calor en la Tierra (Romero, 2016). Al obtener la solución de dicho problema y considerar sus condiciones iniciales llega a la ecuación:

$$1 = a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + \cdots$$

Esta solución, al igual que la dada por D. Bernoulli en el problema de la cuerda vibrante, es una representación en serie trigonométrica de una constante. Lo que logró hacer Fourier, que no hizo D. Bernoulli, fue proporcionar el cálculo de los coeficientes. Pero antes de esto vio necesario justificar dicha solución físicamente, lo que permite ver que tanto Fourier, como la comunidad de la Escuela Politécnica, están interesados en "*anticipar* el comportamiento de la naturaleza, en *modelarla*" (Cantoral et al., 2006, p. 94).

Para Fourier, a diferencia de D. Bernoulli que presenta argumentos físicos como demostración, es importante comprobar que la solución matemática es coherente con la situación física (*modelar* e *interpretar*), pero la demostración se inserta en la matemática misma, sin hacer alusión a los argumentos físicos, se da así en inicio de la separación entre física y matemática que siempre iban de la mano (Farfán, 2012). De esta manera, en palabras de Fourier, la característica principal del problema de la propagación del calor es presentar un estado inicial y uno final fijo, es decir, es un problema que inicia en un estado transitorio y con el paso del tiempo llega a su estado estable o estacionario, para el cual la serie representa el estado estable del fenómeno, donde el paso del tiempo ya no provoca cambios en la temperatura. Surge la cuestión, al no afectar el flujo de tiempo el estado estable ¿cómo se observa dicha estabilidad en la solución? Esta estabilidad se vislumbra en *la convergencia de la serie.*

Luego de estas consideraciones físicas y matemáticas acerca de la convergencia, Fourier procede al cálculo de los coeficientes de la serie y generaliza sus procedimientos para resolver lo que generó la controversia en el problema de la cuerda vibrante, representar una función arbitraria por serie trigonométrica.

Es importante resaltar cómo Fourier utiliza razonamientos geométricos como argumento para demostrar sus ideas Matemáticas, visualiza en la gráfica todos los pasos necesarios al lado de la operatoria aritmética que le permite calcular los coeficientes para la *STF*, esto hoy día no es un recurso metodológico para demostrar un teorema, pues en el actual *dME* alrededor de la *STF* predomina el contexto algebraico. Se puede asegurar entonces que, en la forma de trabajo de Fourier, la manera de construir el conocimiento matemático relativo al cálculo de los coeficientes está ligada a la coordinación y articulación de diferentes miradas del objeto, una geométrica-gráfica y la otra algebraica-analítica, para validar la segunda en la primera.

Reflexiones Finales

El análisis Socioepistemológico presentado hasta ahora, basado en una problematización del saber alrededor de la *STF*, evidenció la presencia de la *predicción* como práctica socialmente compartida, la cual está regulada por el *surgimiento de la Ingeniería como ciencia* como un paradigma imperante alrededor del trabajo de Fourier (la práctica de referencia). Es dentro de ésta donde Fourier hace el estudio de la propagación del calor, en la cual la actividad que permite la formación de funciones psicológicas superiores es el *estudio de la convergencia* de series trigonométrica particulares.

El problema inicial de Fourier consiste en conocer el estado ulterior (estable) de un sistema, en particular el fenómeno de propagación del calor cuyas variaciones son periódicas y acotadas, y del cual se conocen sus condiciones iniciales y de frontera. Se requiere, entonces, conocer el valor que tomará la temperatura cuando el flujo de tiempo ya no sea una variable que modifique el comportamiento del sistema (estado estacionario).

La *STF* se presenta entonces como resultado de una situación que precisa de la predicción, cuya fenomenología intrínseca es la *determinación del estado estacionario* (Farfán, 2012). Es así como “la *predicción* en tanto que no es un objeto matemático, tiene que entrar en la problemática teórica no como noción, o representación, sino como expresión de una *práctica social* […]: el *Prædiciere*” (Cantoral, 2013, p. 93).

La *predicción* (práctica socialmente compartida), que es regulada por el *surgimiento de la Ingeniería como ciencia* (práctica de referencia), va a significar la *STF* como un modelo de predicción para fenómenos estables con variación periódica y acotada, en el cual, la estabilidad se vislumbra en la *convergencia de la serie trigonométrica*; para lo que es necesario la intervención de las acciones de *predecir, modelar e interpretar*.

En resumen, se pueden identificar las prácticas asociadas a la *STF*, donde predecir*, modelar e interpretar* corresponden a las *acciones* directas del sujeto sobre el medio; estas acciones se organizan para el *estudio de la convergencia* de series trigonométricas como *actividad* que provoca el surgimiento de funciones psicológicas superiores, para perfilar a la *predicción* como *práctica socialmente compartida*; dicha práctica cae bajo la regulación de una *práctica de referencia*, la cual es el *surgimiento de la Ingeniería como ciencia*; la que a su vez es normada por la *Prædiciere* como *práctica social* (ver Ilustración 1).

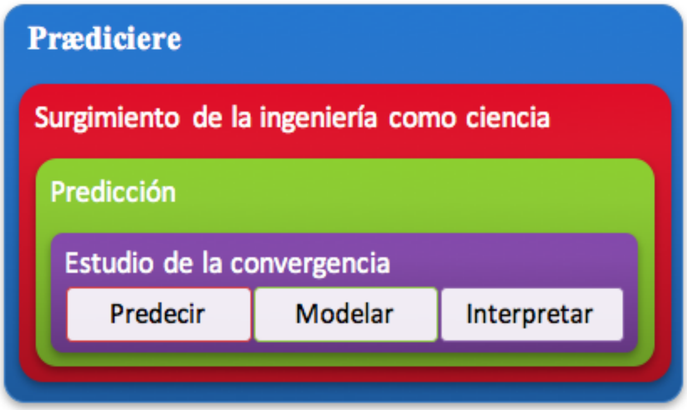


Ilustración 1. Epistemología de prácticas preliminar de la *STF*.

La problematización del saber permite asegurar que un ambiente de significación para la *STF* requiere de *modelar un fenómeno estable con variación periódica y acotada en el paso del tiempo, en el cual, la estabilidad se vislumbra en la convergencia de la serie, es decir, en el estudio del límite de la sucesión de sumas parciales*.

Para finalizar, cabe resaltar que la epistemología de prácticas propuesta es un modelo preliminar de construcción social de la *STF* que se vislumbra a partir de un estudio teórico de la misma, tomando en cuenta los resultados de investigación reportados hasta la fecha, se debe ahora comprobar mediante el diseño de situaciones de aprendizaje con fundamento socioepistemológico que permitan comprobar y fortalecer dicho modelo propuesto a la luz de los datos empíricos.

Referencias Bibliográficas

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 137-168.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, especial, 83-102.

Farfán, R. M. (2012). *Socioepistemología y ciencia. El caso del estado estacionario y su matematización*. Barcelona: Gedisa.

Fourier, J. (1822). *Théorie analytique de la chaleur*. París: Chez Firmin Didot, père et fils.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis doctoral no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Moreno, J. A. (1999). *Estudio de la noción de convergencia de series trigonométricas en un ambiente de simulación*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Romero, F. (2016). *Construcción social de la serie trigonométrica de Fourier. Pautas para un diseño de intervención en el aula*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México, México.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión socioepistemológica. *Boletim de Educação Matemática*, *28 (50)*, 1525-1544.

EL PRINCIPIO DE MÍNIMA ACCIÓN COMO ESCENARIO PARA RESIGNIFICAR LA OPTIMIZACIÓN MATEMÁTICA

Carlos Eduardo Leon Salinas, David Maldonado Rico
Universidad La Gran Colombia. (Colombia)
carlos.leon@ugc.edu.co, davidc75814@hotmail.com

RESUMEN: Esta propuesta de investigación presenta el diseño de un escenario configurado a partir del principio de mínima acción, para mostrar, a través de diferentes etapas, la interpretación física del concepto de optimización. El diseño responde a la ausencia de marcos de referencia, que posibiliten un nuevo significado del conocimiento matemático. Se plantea un problema de investigación alrededor de las formas en que el principio de mínima acción puede llegar a resignificar la optimización matemática El marco teórico al que se acoge esta propuesta es la teoría socioepistemológica, la cual permite abordar el problema desde una práctica de referencia, en este caso, la experimentación física. La metodología de la propuesta se basa en un diseño de aprendizaje basado en cuatro estaciones que especifican el uso del principio de mínima acción para resignificar la optimización matemática. Los resultados se enfocan principalmente en el análisis de conceptos matemáticos como los de área y perímetro, lo cuales surgen en proceso de resinificación.

Palabras clave: principio de mínima acción, optimización, medición, teoria Socioepistemológica

ABSTRACT: This research work deals with the design of a teaching setting made up from the minimum action principle, to show the physical understanding of optimization concept, through different stages. The design corresponds to the lack of reference frameworks that make possible a new meaning of mathematical knowledge. The research problem is related to the ways in which the minimum action principle could be able to provide a new meaning to mathematical optimization. The socio-epistemological theory constitutes the theoretical framework to this proposal, which allows focusing the problem from a reference practice, in this case, the physical experimentation. The research methodology is in correspondence with a learning design base on four stages which specify the use of minimum action principle to provide a new meaning to mathematical optimization. The results are focused mainly on mathematical concepts such as area and perimeter, both of which arise in the process of providing a new meaning.

Key words: minimum action principle, optimization, measurement, socio- epistemological theory

Introducción

En la actualidad, no es un secreto para la comunidad educativa el desinterés y la falta de motivación presente en los estudiantes para aprender Matemáticas. Esto debido, a la falta de metodologías que permitan generar espacios en los que se pueda evidenciar un significado de los conceptos matemáticos en un plano distinto del analítico. Si bien, el carácter abstracto de las Matemáticas es lo que ha permitido diferenciarla de otras ciencias, también es cierto que una saturación de la abstracción en la enseñanza de la matemática, puede ocasionar una falta de significado del conocimiento matemático por ser carente de un determinado contexto. Esta falta de significación, es reportada por Cordero y Martínez (2001) a raíz de privilegiar argumentos de corte analítico que toman a los conceptos matemáticos como objetos elaborados, alejados totalmente de argumentos situacionales. Según Jiménez (1992), nuestros actuales programas llevan a impartir una matemática carente de significado, ahistórica y acultural. El estudiante está obligado a trabajar de forma rutinaria y memorística y sobre todo, de forma aislada.

Atendiendo a esta dificultad la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, analiza las prácticas sociales que permitan generar la construcción y reconstrucción social del conocimiento matemático, a partir de las vivencias cotidianas de los individuos, en un sentido teórico y filosófico, la práctica social es un constructo teórico que pretende establecer la intención transformadora, a la vez que ubica a la actividad humana como un acto social, (Cantoral, 2013). De esta manera, se modifica la idea que se tiene del conocimiento matemático y su aprendizaje, los cuales han estado enmarcados desde hace bastante tiempo como elementos fijos y prestablecidos.

Para este trabajo en particular, el principio de mínima acción permitirá contextualizar desde una perspectiva histórica y experimental la optimización matemática. A su vez, al ser un principio físico ayuda a generar prácticas para la constitución de un espacio, en donde se puede difundir, las situaciones y nociones básicas de este principio. De esta manera, se constituirá lo que se ha denominado un laboratorio de Matemáticas fundamentado en el principio físico de mínima acción. El laboratorio de Matemáticas es descrito como un espacio que permite la enseñanza y aprendizaje de la matemática desde un punto de vista experimental y al respecto Jiménez(1992) aclara que el laboratorio es, antes que nada, una estructura para la enseñanza y el aprendizaje en la que se concreta la enseñanza experimental. A partir de lo anterior se plantea el siguiente problema de investigación:

¿De qué forma el principio de mínima acción puede llegar a resignificar la optimización matemática?

Para dar respuesta a este interrogante se diseñó un laboratorio aplicado a 6 estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad La Gran Colombia. Se programaron dos sesiones de dos horas cada una para el desarrollo de las actividades propuestas. El laboratorio de Matemáticas fundamentado en el principio de mínima acción como escenario para resignificar la optimización matemática, está constituido por cuatro actividades que se han denominado estaciones debido a que conforman un recorrido:

Primera estación: historia de la reina Dido

Debido a su importancia histórica y didáctica, el problema de la reina Dido se ha convertido en un punto referente para la mayoría de trabajos que tiene como objetivo abordar el cálculo de variaciones y las implicaciones que éste tiene en la formulación del principio de mínima acción. En esta estación los estudiantes deben responder al interrogante: ¿cuál es la figura que encierra la mayor área a partir de un perímetro dado? La recreación del problema de la reina de Dido se realiza utilizando un material diseñado para esta parte del laboratorio, que consiste en una tabla similar a un geoplano y en cuya superficie contiene arena para simular la situación en el desierto y en donde se presta mejor realizar los diseños de las figuras y con los cuadrados, hacer una aproximación de las áreas calculadas en cada intento.

Segunda estación: la esfera

Las burbujas que se obtienen al soplar por un contorno cualquiera es simplemente aire atrapado en una solución jabonosa. Mientras no se sople el contorno, se formará una pompa de jabón, que tiene la propiedad de adherirse al contorno independientemente del que sea, ocupando en la superficie. Esta propiedad elástica que permite a la pompa de jabón adoptar la superficie limitada por el contorno es denominada tensión superficial, que obliga a su vez a la pompa de jabón a tomar la menor superficie posible, cuando no existe contorno alguno la pompa de jabón se adhiere a sí misma y en este caso la forma o superficie más pequeña para que suceda es la esfera.

Tercera estación: aplicaciones del principio de mínima acción a partir de experimentos con pompas de jabón

En esta estación, se plantea una actividad en la cual se dispondrá de un dispositivo conformado por dos vidrios colocados de forma paralela entre los que se podrán ubicar fragmentos de madera que simularán los puntos a ser unidos. Una vez dispuestos estos pedazos de madera, se sumergirá en la solución jabonosa y los estudiantes podrán evidenciar el camino que minimiza la longitud total.

Cuarta estación: superficies minimales en bastidores poliédricos

En esta estación del laboratorio, los estudiantes construirán los tetraedros utilizando hilo y pitillos y teniendo como medidas de sus lados de uno a veinte centímetros. Antes de sumergir el tetraedro se les preguntará a los estudiantes que hagan una aproximación de la forma de la pompa de jabón que se formará dentro del sólido. Una vez sumergido el tetraedro, se les pedirá que comparen la pompa que se formó con la que creían que se podía formar. La pompa de jabón que se configura dentro del tetraedro está conformada por seis triángulos isósceles. Si se quiere calcular el área de esta pompa de jabón, solo tendríamos que calcular el área de uno de ellos y multiplicarla por seis. Ahora se les preguntará a los estudiantes qué relación hay entre el área de la pompa de jabón con respecto al área del tetraedro.

Análisis de los resultados

A la luz de la Teoría Socioepistemológica, se plantea un análisis cualitativo de los resultados obtenidos en cada una de las estaciones:

En el desarrollo de la actividad de la reina Dido, se realizó la medición del área que se configuraba a partir del segmento de cuerda de longitud de 60 cm. En primer lugar, los estudiantes lograron concluir que era necesario modificar la forma del contorno para generar un área mayor. A continuación, se muestran las gráficas realizadas por los estudiantes cuando el perímetro permaneció fijo:

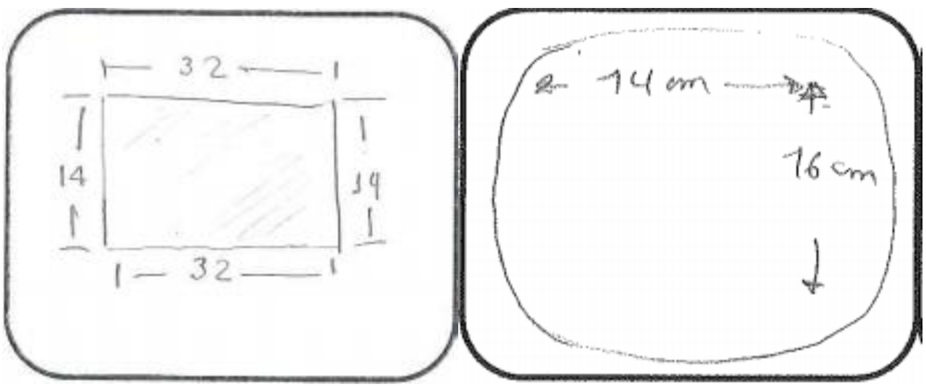


Figura 1. Soluciones gráficas de los estudiantes al problema de la reina de Dido.

Las dos figuras mostradas anteriormente presentan características distintas. La figura de la izquierda formada por segmentos rectilíneos facilita en grado sumo la relación matemática que permite encontrar el área de la figura, mientras que la figura de la derecha está bosquejada por medio de una línea curva, lo que dificulta, en cierta medida, calcular su área. Aunque las dos soluciones dadas por los estudiantes son viables e igualmente válidas, una de ellas reviste mayor grado de importancia: la figura constituida por la línea curva, esto debido a la dificultad que presenta en el geoplano el cálculo de áreas de sectores circulares. Los estudiantes trabajaron a partir de aproximaciones que evidenciaban una práctica de medición que buscaba maximizar el área. En este caso se interpreta la medición como una práctica social la cual determina las acciones del sujeto y que plantea un uso del conocimiento atendiendo al contexto, por lo que la optimización del área se interpreta como saber que resulta de un proceso de resignificación desde lo experimental.

La esfera

En la segunda estación, la esfera, se intentaba evidenciar la propiedad óptima de estas superficies. La primera actividad consistía en dibujar las burbujas que ellos creían se formaban antes de soplar por los diferentes contornos construidos con alambre (contornos triangular, cuadrado, circular y pentagonal). A partir de los contornos circular, pentagonal y cuadrado, el estudiante comprende que el resultado es siempre una burbuja esférica. La intención de la pregunta era establecer qué elementos del contorno debían considerarse para establecer una relación entre la superficie o área del contorno, es decir, la *posible área de la burbuja*, con su volumen. Si bien la medición no se establece directamente con instrumentos de medida, inferir qué elementos del contorno se deben considerar para su hipotética medición es una fase abstracta de esta práctica. Esta estación confronta un comportamiento físico conocido por todos (la formación de una burbuja de jabón) con la manera en que se puede conseguir otra forma para la burbuja. A pesar de que los estudiantes creían que la forma de la burbuja cambiaba con el cambio del contorno, su percepción física les decía que no era posible hacer una burbuja no esférica, lo que presenta una racionalidad que depende del contexto (Principio de la racionalidad contextualizada), y supera a la lógica que maneja el estudiante a partir de los requerimientos del laboratorio.

Conexiones mínimas

En la tercera estación: conexiones mínimas, se proponía mostrar una de las aplicaciones del principio de mínima acción por medio de las pompas de jabón para dar solución al problema propuesto por Jakob Steiner. Al igual que en el problema de la reina Dido, para obtener la solución óptima al problema de Jakob Steiner, era necesario que los estudiantes que participaron de la actividad, se aproximaran a esta respuesta por medio de la medición realizada por ellos, antes de evidenciar la solución dada por la pompa de jabón y formalizar la respectiva comparación.

Al realizar la comparación de sus soluciones, con las obtenidas después de sumergir las estructuras de vidrio en la solución jabonosa, indican las diferencias en cuanto a forma, más no en cuanto a su medición. Evidencian físicamente la solución a un problema de optimización, por medio de las pompas de jabón. El uso que se da al concepto matemático evidenciado en una solución física, proporcionada por la pompa, discrepa completamente con su intuición y quizás por esto se da mayor importancia a la forma. Se usa el concepto, se explica físicamente, y genera en los estudiantes interés debido a que los métodos para encontrar la solución no habían sido comprobados con anterioridad, o simplemente solo conocían una manera de aproximarse al problema, el obtenido desde su intuición y su forma particular de medir y no probados en una actividad experimental. Esta estación del laboratorio busca confrontar las formas que tiene el estudiante para encontrar las distancias mínimas en un caso particular. El concepto en juego es de nuevo la optimización, esta vez, haciendo uso de la distancia y mediados por la práctica de la medición. A medida que el estudiante intenta encontrar grafos con la distancia mínima, se va resignificando el concepto de distancia mínima en un plano, atendiendo a la condición impuesta por la actividad. Cada posible solución se argumenta y se cuestiona al presentarla como la distancia mínima, con lo cual se logra establecer un uso del concepto de distancia, a través de una complejización que se va dando (resignificación progresiva)

Superficies minimales en bastidores poliédricos

Con respecto a la última estación se realizó, en primer lugar, una discusión con respecto a los conceptos matemáticos de variable dependiente y variable independiente de una función, la cual se presentó debido a uno de los objetivos de la actividad el cual era: determinar una función que relacione el área del tetraedro y el área minimal como también el volumen del tetraedro y el área minimal. En segundo lugar se realizó el análisis del comportamiento de las funciones obtenidas por medio del programa de geometría dinámica GeoGebra. Más allá de determinar con precisión la naturaleza de la función obtenida, se enfatiza el análisis en el comportamiento de los puntos graficados y las posibles interpolaciones que se pueden realizar a partir de la curva obtenida.

En las respuestas se infiere que todos los estudiantes determinaron que la variable dependiente era el área minimal, aunque también se aprecia que algunos estudiantes, como segunda opción eligieron el área del tetraedro. La decisión correcta dependía del proceso que se quería analizar, en este caso la magnitud a considerar en la toma de datos era el área minimal que a su vez dependía del perímetro, área o volumen del tetraedro. Una vez realizada la discusión se continuó con el ajuste de los datos en GeoGebra. Una vez dispuestos los datos en una hoja de cálculo y su posterior análisis en regresión de dos variables, se realiza el análisis del comportamiento de la disposición de los datos y la curva obtenida

Reflexiones finales

Como se indicó inicialmente, en este planteamiento de investigación se aborda por medio de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa y, uno de sus objetivos, según Cantoral (2013), es la posibilidad de rediseñar el discurso matemático escolar con el fin de facilitar el aprendizaje de la Matemática por medio de prácticas en las cuales el ser humano y su cotidianidad permiten dar funcionalidad a los constructos teóricos propios de cada individuo. Con la intención de construir escenarios que permitan a los estudiantes comprender conceptos matemáticos en planos distintos al abstracto, esta investigación centra su interés en el diseño de un laboratorio matemático fundamentado en el principio físico de mínima acción, para evidenciar físicamente la optimización matemática.

Con la implementación del laboratorio de Matemáticas basado en el principio físico de mínima acción, se logró evidenciar uno de los fundamentos de la Socioepistemología: el relativismo epistemológico; debido a que, si bien el instrumento de recolección de datos estaba diseñado para que los estudiantes participaran de forma individual, como consecuencia de la planificación de la actividad, ellos recrearon un espacio para compartir sus soluciones y de esta forma compararlas con la de sus demás compañeros. Si en un principio habían identificado una solución particular (objetivismo), una vez compartida y comparada, se dan cuenta que sus resultados son subjetivos (relativismo), concepto que sostiene que los puntos de vista no tienen verdad o validez universal, sino que, en todo caso, solo poseen una verdad subjetiva y relativa a los diferentes marcos de referencia" (Cantoral, 2013, p. 159).

Se tiene, entonces, al laboratorio como comunidad de aprendizaje, donde es posible la construcción social del conocimiento al valorar las ideas y resultados de los individuos que participan de la actividad, con la correspondiente aclaración que no se está diciendo que existan en todo momento diversidad de opiniones, ante los mismos hechos, esto es un hecho conocido, se dice algo más: que el valor de verdad para el relativismo asume que dichas opiniones son verdaderas para esas personas, no hay una verdad única" (Cantoral, 2013, pág. 159)

Además en cada una de las estaciones se pudo analizar la medición como una práctica social que norma dos acciones fundamentales en las producciones de los estudiantes. En primera instancia los estudiantes argumentan a partir de las mediciones que obtienen, utilizando métodos propios que se relacionan más con su cotidianidad que con un saber escolar. Cada situación del laboratorio presentaba un problema cuya solución estaba normada por las formas de medición y a partir de estas hacían predicciones sobre las formas o sobre los comportamientos de la variación de las áreas. De esta manera es posible determinar que la medición cumple con la noción de practica social, de la forma como es concebida por la Socioepistemología, es decir "*no es lo que hacemos, sino lo que nos hace hacer los que hacemos"* (Cantoral, 2013, p. 109), debido a que es por medio de la medición que es posible idear un resultado.

En esta propuesta de investigación se preguntaba: ¿de qué forma el principio de mínima acción puede llegar a resignificar la optimización matemática en estudiantes de primer semestre de licenciatura en Matemáticas de la Universidad la Gran Colombia? Se evidencia que mediante la manipulación directa con los instrumentos del laboratorio de Matemáticas, fundamentado en el principio físico de mínima acción, los estudiantes comprenden, a la vez que debaten, conjeturan y proponen soluciones a cada uno de los problemas propuestos en el marco de las actividades a realizar. El uso que se da del concepto matemático, en este caso de la optimización matemática, para interpretar las situaciones propuestas en cada estación, permitió generar en los estudiantes criterios propios, unos derivados de su experiencia, con la manipulación previa de los conceptos evidenciados en las prácticas, como también, otros derivados al momento de la realización de la actividad, lo que permitió que se diera un contraste entre ambos criterios. Los estudiantes tenían un significado de la optimización matemática muy relacionado con sus prácticas escolares, vinculando fórmulas geométricas de áreas que validaban sus métodos. La experimentación resignificó la idea que tenían de optimizar a partir de las características físicas de las pompas de jabón, como ocurrió con el problema de Steiner o con los bastidores.

De esta manera se logra que los estudiantes, a partir del uso que se da de la optimización matemática, evidenciada en el principio mínima acción por medio de cada actividad propuesta, resignifiquen este concepto debido a que como lo plantea la Teoría Socioepistemológica, es mediante este uso del concepto matemático, y no propiamente mediante la manipulación directa del concepto, que se logra resignificar. Asimilar el principio de mínima acción para construir un laboratorio de Matemáticas, fue asimilar un concepto que no está presente en los lineamientos curriculares, pero que sí lo está en fenómenos de naturaleza, físicos e incluso fenómenos presentes en la cotidianidad de los individuos.

De esta forma, el laboratorio fundamentado en este principio, se propone como discurso a partir del cual, el docente de Matemáticas puede aproximar nociones que explican fenómenos que hacen parte de la realidad de los individuos.

Referencias bibliográficas

Abarca, A. (2012). *Técnicas cualitativas de investigación*. San José: Editorial Universidad de Costa Rica.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona: Gedisa.

Cordero, F. y Martínez, J. (2001). La comprensión de la periodicidad en los contextos discreto y continuo. En G. Beitía (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 14* (pp. 422–431). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Jiménez, A. P. (1992). Matemáticas experimentales. *Suma*, (11-12), 27-41.

BREVE RECORRIDO POR EL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR DE LA SERIE DE FOURIER EN EL CONTEXTO DEL INGENIERO EN ELECTRÓNICA

Jesús Eduardo Hinojos Ramos, Rosa María Farfán Márquez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (México)
jesus.hinojos@cinvestav.mx, rfarfan@cinvestav.mx

RESUMEN: La serie de Fourier se presenta en diversas asignaturas durante la formación del ingeniero en electrónica. Dicho conocimiento matemático es una herramienta esencial en su quehacer profesional, pero ¿qué dice la institución universitaria acerca de este conocimiento? Para el presente escrito y con base en el análisis del plan curricular de ingeniería en electrónica de una institución educativa mexicana, se describe brevemente el discurso matemático escolar alrededor de este conocimiento en asignaturas de ciencias de ingeniería e ingeniería aplicada.

Palabras clave: socioepistemología, ingeniería, series de fourier, matemática escolar

ABSTRACT: Fourier’s series is used in different subjects during the training of engineers in Electronics. Such mathematical knowledge is an essential tool in their professional work, but what does the university states about such knowledge?. This report briefly describes the school mathematical discourse about mathematical knowledge in subjects of engineering sciences and applied engineering, all of which is based on the analysis of the electronics engineering curriculum in a Mexican educational institution.

Key words: socio-epistemology, engineering, fourier´s series, school mathematics

Introducción

Desde el marco de la Socioepistemología, es de interés el estudio de las prácticas de una comunidad cuando llevan a cabo tareas propias de su disciplina, dichas prácticas se asocian con objetos matemáticos. Para inferir las prácticas, la teoría hace referencia al discurso Matemático Escolar (dME), el cual puede analizarse a través de los libros de texto, que son referentes escolares que presentan de forma organizada los contenidos curriculares institucionalizados y legitimizados (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015a).

El dME es la introducción del saber matemático al aula, a través de adaptaciones y modificaciones que lo estructuran y otorgan una cierta funcionalidad. Este discurso tiene la finalidad de facilitar la comunicación entre el contenido y los actores (profesor y alumno) de los procedimientos y conceptos propios de la matemática, sin embargo, estos procesos de adaptación (intencionales o no), despersonalizan y descontextualizan el saber matemático, otorgándole características propias como lo son: la atomización de los conceptos, la concepción de la matemática como un conocimiento acabado, el carácter utilitario del conocimiento y la falta de marcos de referencia para significar la matemática, provocando la exclusión de los actores de la construcción del conocimiento matemático (Soto y Cantoral, 2014).

En Socioepistemológica, el conocimiento matemático debe problematizarse y situarse en la vida y contexto de aquel que aprende Matemáticas, esto exige un cambio o rediseño del dME con base en las prácticas sociales; buscando la descentración del objeto matemático a través de la simultaneidad y transversalidad del currículo, de manera que las prácticas sociales con fundamentos en la teoría formal y teorías formales comprobables con base en las prácticas sociales de los profesionistas sean enlazadas (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015b).

Según Dolores (2000), en el nivel superior, específicamente en ingeniería, las investigaciones en Matemática Educativa han mostrado que la didáctica de los cursos de Matemáticas superiores, utilizan metáforas del aprendizaje, como lo son:

- La abstracción de un fenómeno y su simplificación o idealización.
- La anteposición de las abstracciones al análisis de la realidad física de los fenómenos.
- La imposición de trabajos algorítmicos.

Lo mencionado anteriormente puede observarse en los libros de texto utilizados en las diferentes instituciones educativas. A continuación, se muestra un ejemplo, analizando el dME alrededor de la serie de Fourier en las ciencias de la ingeniería y en ingeniería aplicada en el contexto de la electrónica, en particular en Sistemas Electrónicos de Potencia.

El discurso matemático escolar alrededor de la serie de Fourier en ingeniería electrónica

La forma de realizar el análisis del dME, se basa en el método propuesto por Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini (2015a), que consiste en dos fases: 1) una descriptiva donde se contextualiza y sitúa el tema de estudio y 2) un análisis cualitativo de la actividad matemática propuesta en el libro de Hart sobre electrónica de potencia en el apartado de *a manera de ejemplo*.

Analizando el programa curricular de ingeniería en electrónica de una institución universitaria del norte de México, se presenta el dME relacionado con la serie de Fourier, considerando los bloques de asignaturas propias de ciencias de la ingeniería e ingeniería aplicada. En la figura 1 se muestra un diagrama de la seriación curricular del programa analizado. Las asignaturas de ciencias básicas se mencionan, pero no serán consideradas para el análisis en el presente escrito.

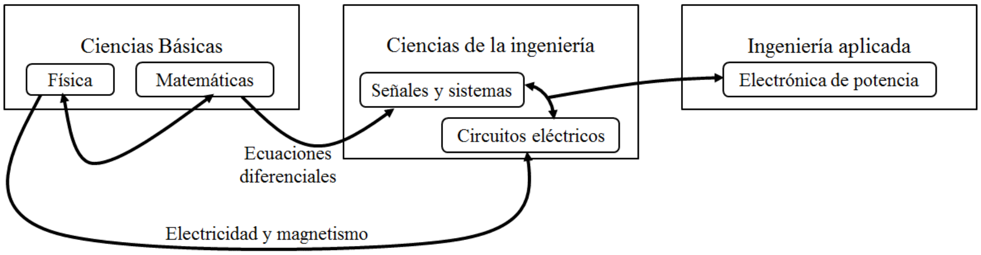


Figura 1. Diagrama de seriación curricular.

Algunas asignaturas donde se presenta la serie de Fourier en forma explícita para los bloques de ciencias de la ingeniería e ingeniería aplicada son: Señales y Sistemas (SS), Circuitos Eléctricos II (CEII) y Sistemas Electrónicos de Potencia (SEP). Dichas asignaturas se toman como base para realizar el análisis del dME alrededor de la serie de Fourier en el contexto de la electrónica de potencia.

La asignatura de SS perteneciente al bloque académico de ciencias de la ingeniería, tiene como único requisito para cursarla el curso de *Ecuaciones Diferenciales*; analizando el programa de curso (Instituto Tecnológico de Sonora, 2010a), la quinta unidad de competencia tiene como objetivo "Representar señales en tiempo continuo mediante la utilización de la serie de Fourier".

El programa de curso menciona la bibliografía recomendada del curso, donde uno de los principales referentes es el libro *Señales y Sistemas* de Oppenheim, Willsky y Nahab (1998), el cual presenta a la serie de Fourier como una *herramienta* que permite descomponer una señal (o función) en términos de una suma infinita de senos y cosenos o en su defecto a través de una función exponencial compleja. La intención de este texto, según lo mencionado por los autores es "la representación de señales periódicas continuas y discretas conocidas como la Serie de Fourier, pues estas representaciones proporcionan uno de los más poderosos e importantes conjuntos de herramientas, así como las bases para analizar, diseñar y entender señales y sistemas lineales e invariante en el tiempo" (Oppenheim et al., 1998, p. 177). La serie de Fourier se presenta en el capítulo 3 del libro y se divide en los siguientes apartados (se enlistan los analizados): *Representación en Series de Fourier de Señales Periódicas*, *Convergencia de las Series de Fourier*, *Serie de Fourier y Sistemas LTI* y *Filtrado*.

El apartado referente a la *Representación en Series de Fourier de Señales Periódicas* describe cómo realizar el desarrollo de las series de Fourier como una suma de exponenciales complejas para representar una función periódica continua, mostrando las fórmulas para calcular los coeficientes, propiedades de la función exponencial y ejemplos. Por otro lado el referente a la *Convergencia de las Series de Fourier* menciona que existe un conjunto de señales que pueden representarse mediante una serie de Fourier, haciendo especial énfasis en que los coeficientes que se encuentran, al ser sustituidos, pueden dar como resultado una representación que no necesariamente converge en la señal original, definiendo entonces criterios de error de aproximación para la expresión obtenida; se enumeran además los criterios de Dirichlet para indicar cuándo existe la convergencia.

En los apartados *Serie de Fourier y Sistemas LTI*, los autores mencionan que es posible representar en serie de Fourier virtualmente cualquier señal y explican cómo encontrar matemáticamente la respuesta de un sistema LTI en términos del desarrollo de una Serie de Fourier, mientras que, en *Filtrado*, se muestra la aplicación de la serie de Fourier para el análisis de frecuencias y diferentes técnicas para filtrado de señales.

Es importante resaltar que lo abordado por el libro de Oppenheim y otros (1998) se enfoca principalmente en el uso de la serie de Fourier en forma exponencial, mostrando el desarrollo matemático formal de la serie, sus propiedades y demostraciones, dedicando un menor interés a sus aplicaciones, aun cuando existen apartados de ejercicios donde su uso se contextualiza mediante una situación problema relacionada con circuitos eléctricos.

La serie trigonométrica, en sus formas completa y compacta, son mostradas en la página 189, sin embargo, los autores mencionan: “aunque las dos últimas son formas comunes para la serie de Fourier, la forma exponencial compleja de la ecuación es en particular conveniente para nuestros propósitos, de modo que usaremos dicha forma casi exclusivamente” (Oppenheim et al., 1998, p. 190).

Continuando con el bloque de ciencias de la ingeniería, se toma como base el programa de curso para CEII (Instituto Tecnológico de Sonora, 2010b). Uno de los principales libros mencionados en el programa de curso es *Fundamentos de Circuitos Eléctricos* de Alexander y Sadiku (2006), este libro contempla el análisis de Fourier como parte de su contenido.

Alexander y Sadiku (2006) exponen a la serie de Fourier en el capítulo 17, enfatizando en la definición de la serie como una *técnica o herramienta* que permite expresar una función periódica en términos de senoides, para posteriormente obtener la respuesta del circuito eléctrico aplicando técnicas de análisis fasorial, principalmente el principio de superposición; los apartados presentes en el libro son los siguientes (se enlistan los analizados): *Series trigonométricas de Fourier*, *Consideraciones de simetría*, *Aplicaciones en circuitos* y *Aplicaciones*.

Los autores comienzan el apartado de *Series Trigonométricas de Fourier*, mencionando el descubrimiento de Fourier sobre la representación de una función periódica no senoidal como una suma infinita de funciones senoidales. Se menciona la propiedad de la periodicidad de una función en términos matemáticos ($f(t) = f(t + nT)$ con n entero y T el periodo) y la relación del *teorema de Fourier* “toda función periódica práctica de frecuencia w_0 puede expresarse como una suma infinita de funciones seno o coseno que son múltiplos enteros de w_0” (Alexander y Sadiku, 2006, p. 757), mostrando la ecuación de la serie trigonométrica de Fourier, haciendo la relación de los elementos de la serie con los componentes de corriente directa y alterna de una señal eléctrica y mencionan los criterios de convergencia de Dirichlet para la serie.

Posteriormente se muestra el proceso que denominan *análisis de Fourier*, que consiste en resolver las integrales que permiten determinar los coeficientes a_0, a_n y b_n de la serie trigonométrica de Fourier. Se muestra la ecuación de la forma compacta de la serie y el concepto de *espectro de frecuencias* como la gráfica de amplitud y fase de cada armónico obtenido de la descomposición de la señal.

En el apartado referente a *Consideraciones de simetría*, se estudian las propiedades de la serie de Fourier, en concreto las referentes a la simetría de las funciones, mencionando que estas propiedades permiten “conocer con anticipación que algunos de los coeficientes de Fourier serían cero y evitar así el trabajo innecesario de calcularlos” (Alexander y Sadiku, 2006, p. 764). Las propiedades que se muestran son: simetría par, simetría impar y simetría de media onda, condensadas en una tabla.

En el apartado de *Aplicaciones en circuitos*, Alexander y Sadiku (2006), mencionan un hecho clave para justificar el uso de las series de Fourier en el análisis de circuitos: “Para determinar la respuesta en estado estable de un circuito a una excitación periódica no senoidal se requiere la aplicación de una serie de Fourier, al análisis fasorial de corriente alterna (CA) y el principio de superposición” (Alexander y Sadiku, 2006, p. 744).

En este apartado, se presentan diversos problemas y ejercicios relacionados con la aplicación de la serie trigonométrica de Fourier para analizar un circuito eléctrico alimentado con una fuente determinada por la serie de Fourier $\mathrm{F(t)}$ o bien por una función $f(t)$ para encontrar la respuesta del circuito, donde las funciones $F(t)$ y $f(t)$ pueden representar señales eléctricas de corriente o voltaje.

El apartado de *Aplicaciones* de Alexander y Sadiku (2006), menciona que el análisis de Fourier es utilizado en diversas aplicaciones prácticas, centrando el desarrollo en dos aplicaciones principales: analizadores de espectro y circuitos de filtrado. El tipo de ejemplos y ejercicios que se presentan en este apartado son relacionados al uso de la serie de Fourier para analizar el comportamiento de un filtro cuando se alimenta con una señal eléctrica determinada.

El programa de curso de SEP (Instituto Tecnológico de Sonora, 2011), no menciona de manera explícita el uso de la serie de Fourier, sin embargo, la bibliografía recomendada por el programa y las prácticas de laboratorio del mismo contemplan el uso de este conocimiento como herramienta para realizar el análisis y diseño de circuitos electrónicos. El uso de este conocimiento, de acuerdo con Rashid (1993), se justifica, puesto que:

> “Bajo condiciones de régimen permanente, el voltaje y la salida de los convertidores de frecuencia es una función periódica del tiempo… El teorema de Fourier declara que una función periódica se puede describir mediante un término constante más una suma infinita de términos senoidales y cosenoidales”. (Rashid, 1993, p. 643)

A manera de ejemplo

Uno de los principales referentes bibliográficos para SEP es *Electrónica de Potencia* de Hart (2001). El autor, en el capítulo 8 presenta un apartado titulado *Análisis mediante series de Fourier* (apartado 8.4, p. 321-323), donde alude que el *análisis de Fourier* aparece al analizar los inversores de corriente y realizar estudios de calidad de la conversión de electricidad, pues deben encontrarse y analizarse los armónicos en la corriente eléctrica que provoca la carga conectada al sistema y sus efectos en la entrada de la red eléctrica.

La serie de Fourier es mostrada en el libro de texto como un *conjunto de fórmulas* que permiten obtener distintos parámetros de un circuito, tales como voltajes, corrientes, impedancias y potencias, expresados para cada armónico de la frecuencia, donde cada uno corresponde a un término de la serie de Fourier para dicho parámetro. Esto se muestra en un ejemplo contenido en el apartado 8.4 de Hart (2001, p. 322), donde se dan valores de parámetros eléctricos y se solicita encontrar los valores correspondientes a cada armónico de la serie de Fourier, dada por el conjunto de fórmulas (ver figuras 2 y 3):

Voltajes

$$v_o(t) = \sum_{n,\ \text{odd}} \frac{4V_{cc}}{n\pi} (\text{sen}\, n\omega_0 t)$$

Impedancias

$$Z_n = \sqrt{R^2 + (n\omega_0 L)^2}$$

Corrientes

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} I^2_{n,\ \text{rms}}} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{I_n}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$I_n = \frac{V_n}{Z_n} \qquad I_{n,\ \text{rms}} \text{ es } I_n/\sqrt{2}$$

Potencias

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} P_n = \sum_{n=1}^{\infty} I^2_{n,\ \text{rms}} R$$

$$P_n = I^2_{n,\ \text{rms}} R = \left(\frac{I_n}{\sqrt{2}}\right)^2 R$$

Figura 2. Fórmulas para el análisis de Fourier, (adaptación de Hart, 2001, pp. 322-323)

Ejemplo 8.2. Solución mediante series de Fourier para un inversor de onda cuadrada

Para el inversor del Ejemplo 8.1 (V_{cc} = 100 V, R = 10 Ω, L = 25 mH, f = 60 Hz), calcular las amplitudes de los términos de las series de Fourier tanto para la tensión de onda cuadrada de la carga, como para la corriente de la carga, y la potencia absorbida por la carga.

Solución. La tensión de la carga se representa como serie de Fourier en la Ecuación 8.16.

$$V_n = \frac{4V_{cc}}{n\pi} = \frac{4(100)}{n\pi}$$

La amplitud de cada uno de los términos de la corriente se calcula a partir de la Ecuación 8.14:

$$I_n = \frac{V_n}{Z_n} = \frac{V_n}{\sqrt{R^2 + (n\omega_0 L)^2}} = \frac{4(100)/n\pi}{\sqrt{10^2 + [n(2\pi 60)(0,25)]^2}}$$

La potencia para cada frecuencia se calcula a partir de la Ecuación 8.15:

$$P_n = I_{n,\,\text{rms}}^2 R = \left(\frac{I_n}{\sqrt{2}}\right)^2 R$$

La potencia absorbida por la carga se calcula a partir de la Ecuación 8.15:

$$P = \Sigma\, P_n = 429,3 + 10,0 + 1,40 + 0,37 + 0,14 + \cdots \approx 441 \text{ W}$$

lo que coincide con el resultado del Ejemplo 8.1.

Figura 3. Ejemplo del uso de series de Fourier en un circuito electrónico, (adaptación de Hart, 2001, p. 322-323)

Posterior a la resolución del problema, el autor muestra una tabla, indicando que ésta corresponde a las magnitudes de los armónicos de la frecuencia fundamental para cada parámetro solicitado (voltaje, impedancia, corriente y potencia), concluyendo que como la magnitud de las componentes de voltaje y corriente disminuyen (y en consecuencia la potencia también lo hace) mientras que la impedancia aumenta, los efectos de los armónicos de orden superior son despreciables por lo que sólo interesan los primeros términos, la tabla mencionada se presenta en la figura 4.

Tabla 8.1. Componentes de las series de Fourier para el Ejemplo 8.2

n	f_n(Hz)	V_n(V)	Z_n(Ω)	I_n(A)	P_n(W)
1	60	127,3	13,7	9,27	429,3
3	180	42,4	30,0	1,42	10,0
5	300	25,5	48,2	0,53	1,40
7	420	18,2	66,7	0,27	0,37
9	540	14,1	85,4	0,17	0,14

Figura 4. Tabla de parámetros de potencia en términos de la serie de Fourier (Hart, 2001, p. 323)

Lo anterior muestra que el uso de la serie de Fourier se reduce a aplicar fórmulas y realizar un tratamiento algebraico-numérico para obtener los parámetros solicitados de un circuito. Esto da evidencia de que el tratamiento que se le da a la serie es despersonalizado y descontextualizado, puesto que no es necesario el uso de las integrales para obtener las expresiones de los parámetros eléctricos, pues las mismas expresiones son dadas como fórmulas por *motivos de simplicidad*, lo cual corresponde a proporcionar un conocimiento acabado e incuestionable, lo que provoca la exclusión de la construcción social del conocimiento. Así mismo, el texto no incentiva a la reflexión acerca del porqué de las fórmulas y expresiones utilizadas.

Conclusiones

El breve recorrido por el dME del ingeniero en electrónica descrito, permite observar que la bibliografía recomendada por los programas de curso (SS, CEII y SEP) en los bloques de ciencias de la ingeniería e ingeniería aplicada, coinciden en que el análisis de Fourier es importante para estudios de calidad de la energía eléctrica, análisis de circuitos, desarrollo, verificación de proyectos electrónicos y representación de señales eléctricas. Todas ellas tareas propias del quehacer del ingeniero en electrónica, sin embargo, como se mostró en el ejemplo del libro de Hart, la serie se expone como un conocimiento acabado y reducido a la aplicación de fórmulas para obtener valores numéricos de parámetros eléctricos a través de un procedimiento algorítmico, como lo menciona Dolores (2000). Esto nos permite concluir que el dME en torno a la serie de Fourier provoca la exclusión de la construcción social del conocimiento, como lo indican Soto y Cantoral (2014).

Referencias Bibliográficas

Alexander, C. y Sadiku, M. (2006). *Fundamentos de Circuitos Eléctricos* (3era Ed.). México: McGraw Hill.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015a). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepestemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *8*, 9-28.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes, D. (2015b). El programa Socioepistemológico de Investigación en Matemática Educativa: El caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 5-17.

Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. En R. Cantoral (Ed.), *El futuro del Cálculo Infinitesimal. Capítulo V*, 155-181. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hart, W. (2001). *Electrónica de Potencia. Primera Edición*. España: Prentice Hall.

Instituto Tecnológico de Sonora (2010a). *Programa de Curso oficial de la asignatura Señales y Sistemas*, plan 2009 de los programas Ingeniero Electromecánico, Ingeniero en Mecatrónica e Ingeniero en Electrónica. ITSON: Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica.

Instituto Tecnológico de Sonora (2010b). *Programa de Curso oficial de la asignatura Circuitos Eléctricos II c/lab*, plan 2009 de los programas Ingeniero Electromecánico, Ingeniero en Mecatrónica e Ingeniero en Electrónica. ITSON: Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica.

Instituto Tecnológico de Sonora (2011). Programa de Curso oficial de la asignatura *Sistemas Electrónicos de Potencia*, plan 2009 del programa Ingeniero en Electrónica. ITSON: Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica.

Oppenheim, A., Willsky, A. y Nawab, S. (1998). *Señales y Sistemas* (2da Ed.). México: Prentice Hall.

Rashid, M. (1993). *Electrónica de Potencia. Circuitos, dispositivos y aplicaciones. Segunda Edición*. México: Prentice Hall.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso Matemático Escolar y Exclusión. Una visión Socioepistemológica. *Boletim de Educação Matemática, 28*(50), 1525-1544.

DIÁLOGO ENTRE LOS DIFERENTES CAMPOS DISCIPLINARES DE LA FORMACIÓN DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS. EN BÚSQUEDA DE UNA IDENTIDAD DISCIPLINAR A PARTIR DE LA INCLUSIÓN EN LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL DEL CONOCIMIENTO

Juan Pablo Vargas Herrera, Daniela Soto Soto
Universidad de Santiago de Chile. (Chile)
Juan.vargas.h@usach.cl, Daniela.Soto.s@usach.cl

RESUMEN: La presente investigación analiza y caracteriza el discurso matemático escolar presente en la formación docente del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Chile. A partir de ello, se identifican los campos en los que un estudiante de Pedagogía se encuentra inmerso y que aportan a la formación de su identidad disciplinar. Gracias a los resultados obtenidos, el análisis crítico y la confrontación de los discursos de seis docentes representantes de cada una de las disciplinas identificadas, se desarrolla un modelo que permite incluir elementos de innovación curricular como impacto y producto de la investigación.

Palabras clave: socioepistemología, identidad disciplinar, diálogo, campos

ABSTRACT: This research analyses and characterizes the school mathematical language which is included in the teaching training of Math’s Department at the University of Santiago De Chile. Taking this analysis as a starting point, the teaching training students’ fields are identified, as well as such fields’ contribution to the training of their disciplinary identity. Based on the critical analysis and the comparison of six speeches of teachers who represented each identified discipline, a model that allows including curricular innovation elements is developed, which constitutes a result and impact of this research work.

Key words: socio-epistemology, disciplinary identity, dialog, frames

Contextualización y delimitación del problema

Desde la teoría de los campos, el *habitus* y el capital de Pierre Bourdieu, se entenderá un campo como un sistema de posiciones sociales que se definen unas en relación con otras, Moreno y Ramírez (2013) señalan que un campo es: "un sistema particular de relaciones objetivas que pueden ser de alianza o conflicto, de concurrencia o de cooperación entre posiciones diferentes, socialmente definidas e instituidas, independientes de la existencia física de los agentes que la ocupan."(p. 16). Por lo tanto, bajo esta perspectiva, se entiende al programa de Pedagogía en Educación Matemática y Ciencias de la Computación (PEMC), de la Universidad de Santiago de Chile (USACH), como un espacio socialmente situado en el cual confluyen diversos campos de formación académica, y donde a diario los estudiantes que allí se forman, interactúan con los elementos constituyentes de cada una de las disciplinas.

El foco de atención de esta investigación, tiene definidas como mínimo cuatro disciplinas: la Matemática, la Pedagogía, la Matemática Educativa y las Ciencias de la Computación, cada una con sus objetos de estudio, técnicas y teorías fundamentales en la formación del futuro docente, las cuales, a su vez, delimitan los campos en los cuales el estudiante se ve inmerso a diario.

De acuerdo con lo anterior, cada uno de estos campos, define estructuras mentales, adopción de prácticas y consolidación de un *habitus* que determina una identidad profesional indefinida en el estudiante, un reconocimiento como ser socialmente responsable y, además, lo hacen vulnerable a los diferentes tipos de violencia que resultan de la lucha entre éstos por ser dominante y lograr la consolidación de un discurso hegemónico y prioritario. Siguiendo esta línea Bourdieu (2003) indica: "(…) el interés que los dominantes tienen es la perpetuación de un sistema conforme a sus intereses" (p.14). Lo cual es fácil de reconocer en las prácticas propias de cada campo y en la forma de su consolidación histórica como disciplina universalmente aprobada.

Desde esta perspectiva se consolidó este proyecto entendiendo que: (a) el discurso matemático escolar (dME) genera exclusión dentro de las aulas, y por consiguiente requiere de un rediseño. Soto y Cantoral (2014) al hablar del dME lo reconocen "como impositivo, donde el conocimiento matemático aparece en forma estática, no susceptible de construcción o modificación de parte del individuo." (p.10); por lo tanto, el primer foco de la investigación se centró en el análisis crítico de los discursos que conviven en cada uno de los campos de formación docente, para detectar sus características y las implicaciones que traen las mismas dentro del proceso actual de formación. (b) La noción de identidad disciplinar se entiende como un momento de construcción y definición de la fuente de sentido que regula e indica los pasos a seguir para un quehacer disciplinar; constituyéndose en un tipo de *carta de navegación*. Silva-Crocci y Cordero (2014) proponen que: "la fuente de sentido implica entre los miembros de una comunidad compartir y articular de manera sistémica una posición epistemológica." (p.1453), por lo tanto no es extraño preguntarse sobre cuál es el sentido y la posición epistemológica que lleva la comunidad educativa, PEMC-USACH, desde el Departamento de Matemáticas; esta determinación de una posición epistemológica entonces orienta a los estudiantes sobre el sentido de las discusiones que, entre los campos, a diario se viven y que además contribuyen a la formación de la identidad disciplinar propia, en la que el estudiante es quien decide aquellos elementos que le interesan y considera relevantes para su futuro profesional.

Por lo tanto, al reconocer los focos de la investigación y entendiendo al estudiante como un ser situado dentro de una comunidad, el presente estudio buscó responder a las siguientes preguntas: ¿qué elementos constituyen la identidad disciplinar del profesor de matemáticas y cuáles son las características del discurso matemático escolar que pueden potenciar o estancar su desarrollo dentro de la formación docente? Y, ¿cuáles son los paradigmas dominantes que viven dentro de la formación docente de un estudiante de la PEMC?

La respuesta a estas preguntas se consolidó con el desarrollo de esta investigación, la cual, estuvo enmarcada en un proyecto de innovación docente financiado por la Universidad de Santiago de Chile; en ella, se reunieron docentes de cada uno de los campos de formación (matemáticos, pedagogos y matemáticos educativos) con quienes se desarrolló el “seminario diálogos”, allí se indagó sobre el rol del docente, las estrategias metodológicas relacionadas con su práctica docente /enseñanza y la solución que plantearían a situaciones del cálculo en una aproximación socioepistemológica, enfatizando en entender el comportamiento tendencial de las funciones (CTF) como argumento forjador de conocimiento, y estudiando cada uno de los datos recolectados desde el análisis crítico del discurso de Van Dijk. De igual forma se caracterizó el dME de cada uno de los participantes, dando como resultado algunos elementos de los campos dominantes y ciertas características presentes en la formación de docentes de matemáticas.

Metodología

Esta investigación tuvo una primera etapa de recopilación de información sobre la Teoría Socioepistemológica, haciendo un recorrido por las bases de la Matemática Educativa como disciplina, para proceder a una etapa de construcción del marco teórico y de planteamiento de los objetivos de la investigación, priorizando y detectando el problema de la identidad disciplinar como eje fundamental para el desarrollo de todo el trabajo. Posteriormente se desarrolló el seminario “diálogos entre los campos de formación del profesor de matemáticas”, en el que se propusieron tres situaciones de aprendizaje, y se incluyeron seis profesores del Departamento de Matemáticas, que forman a los estudiantes de la PEMC. Es de destacar que las situaciones propuestas tenían al CTF como argumento de construcción de conocimientos.

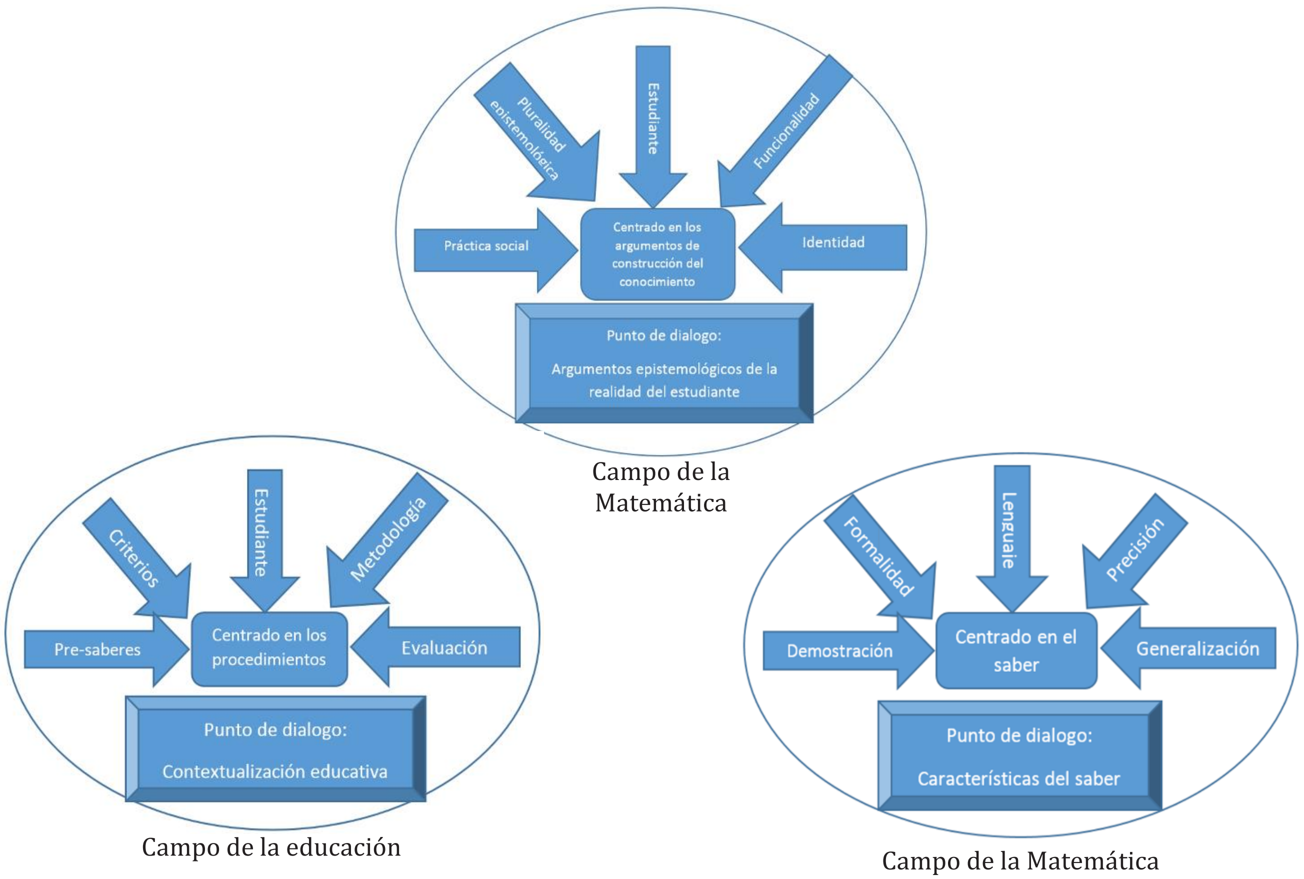
La recolección de los datos se basó en un compendio de grabaciones de cada una de las sesiones y un sumario realizado por una socióloga en donde se examinaron elementos como el discurso, la disposición, la teoría, las características de cada campo y las principales estrategias metodológicas y teóricas utilizadas por los participantes al realizar las actividades propuestas. Posteriormente, se analizaron los productos obtenidos desde la teoría de Tier Van Dijk (2003) “análisis crítico del discurso”, el cual define elementos de particular interés como los significados locales y globales, el contexto y los procedimientos realizados, entendiendo que como discurso se define todo aquel proceso de comunicación, bien sea verbal, gestual, escrito entre otros.

Finalmente se concluyó con una etapa de revisión del curso: “Didáctica del Álgebra y el Cálculo”, perteneciente al programa PEMC, en donde se comparó la propuesta de la anterior malla curricular y la actual, para luego construir una propuesta de rediseño en el aula en la que se incluyeron los elementos resultantes de todo el proceso de observación y experimentación que se llevó a cabo.

Resultados

En esta investigación se desarrolló entonces una propuesta para incluir ciertos elementos en la formación del profesor de Matemáticas, reconociendo la riqueza que existe en el diálogo entre cada uno de los campos disciplinares, los cuales entregan características, estrategias y recursos para el desarrollo y evolución de la identidad disciplinar de un docente de matemáticas. Se considera que el diseño de situaciones que se estructuren desde estas ideas, hace frente a los fenómenos del discurso matemático escolar que han estado presentes en la educación tradicional, y se aporta a la identificación del profesor de Matemáticas como agente problematizador del saber.

Desde esta perspectiva, la investigación caracterizó cada uno de los campos de formación docente de la USACH, mediante la definición de sus elementos más destacados. Algunos de los aspectos más relevantes se presentan en el siguiente esquema:



Esquema 1. Caracterización de los campos de formación del profesor de matemáticas en la Pedagogía en Educación Matemática de la Universidad de Santiago de Chile. Diseño Propio.

Desde este análisis se entiende, que el campo de la Matemática se centra en el saber-objeto y da una importancia significativa a la formalidad y la exactitud del lenguaje, reconociendo que sus procesos son mayormente cognitivos y susceptibles a ser demostrados; por otra parte, el campo de la Educación centra su análisis en el estudiante y los procedimientos, esto es: enfatiza en los criterios, objetivos de aprendizaje y metodologías del proceso de enseñanza, así como en los elementos que son organizacionales dentro de un aula regular; finalmente el campo de la Matemática Educativa ubica su estudio en el problema de la construcción social del conocimiento matemático, definiendo de esta forma los argumentos que permiten al estudiante centrarse en la actividad docente como problematizador del saber e identificarse, desde la disciplina de la Matemática Educativa, como agente de formación, brindando una mirada crítica sobre los problemas y fenómenos propios del dME.

Ahora bien, luego del análisis que se realizó del “seminario diálogos” y con la caracterización realizada, se reconoce que hay un punto de diálogo y convergencia entre cada uno de los campos ya mencionados, el cual deja en evidencia la necesidad de desligar, el discurso de los profesores, del tradicional; puesto que presenta una matemática finalizada y detenida en el tiempo. Esto se vio reflejado en una de las situaciones planteadas en el seminario, la cual se titula “situación de la asintoticidad”, mediante su desarrollo y discusión se llegó al consenso de que tradicionalmente se han presentado las asíntotas desde la idea de un problema entre las rectas que intervienen en su definición, lo cual se observa en los libros de texto, los materiales educativos y las mismas clases de los profesores, en donde se ha priorizado un tipo de asintoticidad llamado “usual” convirtiéndolo en un problema de cercanía entre las funciones que intervienen en su definición a una recta fija, lo cual, si bien no es incorrecto, desconoce por completo el trabajo que se ha realizado también con aquellas funciones que, por ejemplo, cortan a la función original o que no precisamente son lineales. Todas estas ideas se hacen evidentes con las actividades propuestas.

Siguiendo esta línea se entendió finalmente que el eje de la discusión se hallaba en la identidad disciplinar del profesor de Matemáticas, por lo tanto se definió la disciplina del profesor de Matemáticas como un compartir y equilibrio entre los campos presentes en su formación, esto es: que el profesor de Matemáticas debería tener conocimiento de los objetos matemáticos que está problematizando en su labor (saber), además de conocer las metodologías y procedimientos que deberá realizar dependiendo de su contexto (procedimientos) y finalmente el entendimiento y propio reconocimiento como agente problematizador del saber, es decir un representante del campo de la Matemática Educativa (argumentos).

Desde esta idea se pretende entonces que el profesor de Matemáticas sea un miembro de la disciplina de la Matemática Educativa y desde ésta, haga una mirada crítica a los conceptos que se enseñan, así como a los procedimientos que se requieren para sus labores académicas; de acá que el modelo que se quiso instituir consiste en formar y potenciar a un estudiante de Pedagogía en Matemáticas a partir de los siguientes elementos:

- De tipo cognitivo (saber): Proveniente del campo de la Matemática se reconoce que la formalidad y la exactitud son elementos fundamentales a la hora de hablar de Matemáticas en el aula, se hace evidente que en la medida en que se dote a las situaciones de un leguaje adecuado y se dé el carácter demostrativo a las actividades, el desarrollo de conocimientos será más claro para los estudiantes y se darán luces sobre el real objetivo de cada actividad; además, se incluye dentro de los elementos del saber todo el complejo histórico que ha permitido el desarrollo de un objeto matemático en particular, del cual se busca rescatar aquellos elementos como necesidades y argumentos que permitieron a la humanidad en un momento establecido trabajar sobre el mismo.
- De tipo procedimental (procedimientos): Provenientes éstos del campo de la Educación en los que se incluyen todos aquellos elementos del contexto educativo en el que se desarrolla la labor docente, entendiendo que los procesos educativos se encuentran normados y enmarcados en una sociedad ante la cual deben responder, acá se incluyen los elementos como criterios de aprendizaje, la forma de evaluación y las metodologías mediante las cuales se logra construir el conocimiento; haciendo la acotación que, sin embargo, no se cierra el

marco del procedimiento al aula, sino que, por el contrario, se debe abrir una perspectiva a la inclusión de nuevos argumentos en los que se evidencie la experiencia de los estudiantes y los diferentes campos de acción del conocimiento, lugares en los que vive la matemática en la realidad del estudiante y actividades cotidianas mediante las cuales también se pueda por ejemplo evaluar y aprender.

- De tipo argumentativo (argumentos): Propios del campo de la Matemática Educativa, los cuales orientan el proceso y realizan el enlace entre lo que se quiere saber y la forma en la que se hace, incluyendo los elementos de la cultura, la historia, las vivencias y la funcionalidad del conocimiento que se está estudiando, dependiendo de las personas que sean agentes del proceso constructivo; son estos elementos los que permiten que el docente se convierta realmente en un agente problematizador y muestre al estudiante las estrategias de resignificación de los conocimientos; los argumentos de los que acá se habla tienen un fuerte enlace con los elementos que se describieron anteriormente en la medida en que se adecuan a la práctica pedagógica, reconstruyen los conocimientos pre-existentes, activan los pre-saberes y norman los procesos de construcción del conocimiento, son elementos de carácter sugestivo y no de tipo impositivo pues rompen con la idea de priorizar un conocimiento por encima del otro y no presentan una matemática terminada sino que, por el contrario, una matemática que se puede enriquecer desde la mirada práctica de cada uno de los agentes participantes.

Discusión y conclusiones

Con el desarrollo de los elementos anteriormente enunciados, se cree desde esta investigación que se llega a un consenso entre los campos y se da un elemento de identificación para el profesor de Matemáticas, quien se siente situado dentro de una comunidad, responsable de la resignificación de ciertos conocimientos y además con la libertad de responder a un sistema educativo sin la necesidad de coartar sus prácticas o repetir un discurso que por demás se ha demostrado que genera exclusión y demás fenómenos detectados en el dME. Se deja abierta la discusión sobre el posicionamiento del profesor de Matemáticas como un representante del campo de la Matemática Educativa desde la cual se considera que se hace más fácil la detección y la obtención de los elementos anteriormente descritos.

Consideramos además, que la identidad disciplinar del profesor de Matemáticas debe entenderse como un programa de formación permanente y un espacio de equilibrio y diálogo entre los diferentes campos disciplinares, de forma que al intentar brindar elementos a los futuros profesionales de la educación las universidades entreguen a éstos, algunos de carácter *cognitivo* que fortalezcan su mirada particular sobre un objeto matemático, además de otros de tipo *procedimental* que lo sitúen en su práctica dentro de un sistema y le permitan discernir sobre los procesos que realmente significan en la formación de sus estudiantes y, finalmente de carácter *argumentativo* que brinden a los profesores una mirada crítica de la realidad, lo desliguen de las prácticas tradicionales y le permitan entender la construcción de la matemática escolar como un problema de contexto y sociedad.

De igual forma se considera que el diseño de propuestas de renovación curricular en el aula a asignaturas propias de la Didáctica, desarrolla en los estudiantes capacidades que hasta el momento no han sido incluidas en los procesos de formación, esto es: la identificación de una disciplina para el profesor de Matemáticas y el desarrollo de una mirada crítica sobre la realidad de los docentes y su responsabilidad como agentes transformadores de los discursos tradicionales para el mejoramiento de los aprendizajes; además, de la determinación del profesor de Matemáticas como agente incluyente de los estudiantes en el proceso de construcción de sus conocimientos.

Por lo tanto, el diseño de situaciones de aprendizaje debe hacerse desde el convencimiento que solo con el diálogo entre los campos de formación del profesor de Matemáticas se generarán procesos de construcción permanente que aporten a la definición de la disciplina del docente y le brinden una mirada general del problema de la construcción del conocimiento matemático, además de las herramientas necesarias para implementarlo en su futuro profesional.

Referencias Bibliográficas

Bourdieu, P. (2003). *Los usos Sociales de la ciencia*. Argentina: Nueva Visión.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar: Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10(1),* 07-38.

Cordero, F., Gómez K., Silva-Crocci, H. y Soto, D. (2015) *El discurso matemático escolar: La adherencia, la exclusión y la opacidad.* Ciudad de México: Gedisa

Moreno, A. y Ramírez, J. (2003). *Pierre Bourdieu. Introducción elemental*. Bogotá. Colombia: Estrategias Educativas.

Silva-Crocci, H., Cordero, F. (2014). Matemática educativa: Latinoamérica, adherencia e identidad. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27*, 1449-1456. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). *Discurso Matemático Escolar y Exclusión. Una Visión Socioepistemología*. Recuperado el 20 de febrero de 2016 de: Boletim de Educação Matemática https://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a25

Van Dijk, T. (2003). La multidisciplinariedad del análisis crítico del discurso: un alegato en favor de la diversidad. En: Ruth Wodak & Michael Meyer, *Métodos de análisis crítico del discurso.* (pp. 143 – 177), Barcelona: Gedisa

ANÁLISIS SOCIOEPISTEMOLÓGICO EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE TIPO MULTIPLICATIVO, NUEVOS RETOS

Cynthi Anaí Farfán Cera, Rosa María Farfán Márquez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. (México)
cynthi.farfan@cinvestav.mx, rfarfan@cinvestav.mx

RESUMEN: Este escrito tiene como objetivo presentar un análisis de la literatura existente en Matemática Educativa sobre la resolución de problemas de tipo multiplicativo en la Educación Básica. Incluimos de forma transversal la categoría de género. Nuestros hallazgos permiten considerar la parte didáctica y cognitiva, sin embargo, son escasas las indagaciones en torno a la construcción social del conocimiento y a la democratización del saber matemático.

Palabras clave: problemas multiplicativos, género, construcción social

ABSTRACT: This paper is aimed at showing an analysis of the existing literature in educational mathematics concerning multiplication problem solving at basic education. We include gender category in a transverse way. Our findings allow considering didactic and cognitive elements; however, the inquiries related to the construction of social knowledge and to mathematical knowledge democratization are insufficient.

Key words: multiplication problems, gender, social construction

Introducción

El presente trabajo aborda desde la Matemática Educativa la construcción social del conocimiento matemático (CSCM) en la resolución de problemas. Es importante no sólo analizar la enseñanza o el aprendizaje sino la CSCM, donde el discurso Matemático Escolar (dME) excluye de manera simbólica (Soto y Cantoral, 2014), es decir, es arbitrario y hegemónico, así desde esta lógica se plantea que la construcción del conocimiento ha sido androcéntrica hasta ahora y falta mirar la construcción que hacen las mujeres del conocimiento, como lo menciona Bourdieu (2000) y Harding (1987). El marco teórico que sustenta nuestra investigación es la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, los campos multiplicativos de Gerard Vergnaud y la perspectiva de género.

Planteamiento del problema

Las ideas presentadas en este trabajo versan en ¿cómo se ha caracterizado a la fecha la resolución de problemas de tipo multiplicativo en el alumnado de primaria?

Objetivo de investigación. Realizar una investigación a partir de la literatura en la resolución de problemas de tipo multiplicativo y su categorización.

Objetivo específico. Categorizar las investigaciones en torno a resolución de problemas de tipo multiplicativo. Reconocer avances y retos.

Lo anterior forma parte de una investigación basada en la CSCM, cuyo objetivo es realizar una investigación descriptiva que caracterice cómo construyen socialmente el conocimiento matemático en la resolución de problemas de tipo multiplicativo estudiantes de sexto grado de primaria, desde el enfoque socioepistemológico y la perspectiva de género. Muestra la caracterización de cuatro estudiantes en la resolución de problemas de tipo multiplicativo (RPTM), y cómo influye la categoría transversal de género como parte de la dimensión sociocultural en la Construcción Social del Conocimiento Matemático (CSCM). Dado que el dME (Soto, 2010) excluye a estudiantes de la CSCM, en esta investigación se analiza que no es sólo éste, sino que a través del género se pueden percibir categorías naturalizadas que impactan, no sólo en el aprendizaje, sino en las relaciones que se establecen dentro y fuera del aula, lo cual genera desigualdad en las condiciones. Por ello es necesario comprender y caracterizar elementos socioculturales que reproducen estereotipos y generan diferencias en la participación y CSCM en la RPTM. En pro del empoderamiento de las niñas en las Matemáticas.

Indagación bibliográfica

En los últimos años la Matemática Educativa ha estudiado a la aritmética, nos. abocaremos a la resolución de problemas de tipo multiplicativo. Identificamos 4 categorías macro: 1) Didáctica, 2) Cognitivo, 3) Género (social-cultural) y 4) Obstáculo epistemológico de la multiplicación.

Didáctica

Es importante mirar a la educación tradicional en la enseñanza de las Matemáticas, pese al cambio de currículo, sigue la responsabilidad sólo en la escuela, cuando debe ir más allá de ésta, las operaciones básicas siguen sin ser aprehendidas, y descontextualizadas, no son significativas, se basan en algoritmos no familiares, dando prioridad al mismo (Block,1995). Estudios situados en la enseñanza o sólo en el aprendizaje, siguen hablando de un proceso separado. Se estudian experiencias en formación para docentes de forma semipresencial, estudiando cuatro temas, uno de los cuáles es la división euclidiana (Block, Martínez, Mendoza y Ramírez, 2013); cómo enseñan los docentes y la construcción de estudiantes en la resolución de problemas de división (Brousseau, 1997). Si bien en un apartado de la didáctica, también incluimos a los Planes y Programas de la SEP (2011), donde el enfoque de las Matemáticas es resolución de problemas y está articulado el currículo en educación preescolar, primaria y secundaria, con un perfil de egreso, diseñado por especialistas, entonces ¿qué pasa si seguimos con bajo desempeño?,¿por qué hay menor desempeño en niñas? Pese a la Reforma Integral de la Educación Básica (RIEB) que comenzó en 2004 en preescolar, 2006 en secundaria y en 2010 en primaria. Aunado a esto, si los libros de texto desarrollan el pensamiento matemático e involucran desafíos matemáticos, la prueba estandarizada internacional PISA (Programme for International Student Assessment, 2015), en estudiantes de 15 años, como referente cuantitativo, menciona el desempeño de México, se encuentra por debajo del promedio en Ciencias con 416 puntos, en Lectura 423 puntos y en Matemáticas 408 puntos, donde sólo el 1% de estudiantes logran alcanzar niveles de competencia de excelencia. A nivel nacional, el Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA, 2015) para sexto grado de primaria y tercero de secundaria, se aplicó a 104,204 estudiantes de sexto grado en 3,446 escuelas y 144,517 en secundaria en 3,529 escuelas. Hablaremos del caso de sexto grado de primaria, donde hay 147 reactivos para Matemáticas, 143 para Lenguaje y Comunicación. En el caso de Matemáticas sólo el 44% fueron contestados correctamente. Al analizar estos rubros es pertinente mencionar que no podemos culpar al profesorado, porque es una falla del sistema educativo nacional, así como de la falta de políticas públicas y educativas interdisciplinarias, asociado al bajo presupuesto destinado a educación, así como a ciencia y tecnología. Donde es importante cuestionar la falta de un currículo vigente en la formación inicial docente en Matemática Educativa con perspectiva de género, y la inversión en el desarrollo profesional docente en Matemática Educativa con expertos y con el profesorado, no para el profesorado, de forma nacional.

Cognitivo

En este rubro existe evidencia empírica de que el uso de algoritmos tiene la función de favorecer la solución a problemas de forma eficaz, sin embargo cuando esto no ocurre, es posible que haya una concepción equivocada del mismo (Harris,1999); errores de los estudiantes con el algoritmo de la división, al usar una galera, implica una falta de comprensión, errores en las operaciones involucradas, organización de pasos a seguir o en la forma de acomodar datos (Block, Martínez y Mendoza, 2013); omisión y poco entendimiento de relaciones entre datos del problema y el vínculo con otros conocimientos no matemáticos (Flores-Macias,2005). Estudios que retoman la gran diversidad de población como García, Rodríguez y Navarro (2015) encuentran estrategias utilizadas por niños TEE SAVI, en la resolución de problemas aritméticos formales y prácticos, en un estudio de casos múltiples, enfatizan que los niños TEE SAVI, van olvidando su sistema de numeración vigesimal, privilegiando el sistema decimal incluso en su vida y en la comunidad, no comprenden cuando se les habla en ese sistema, piden que se les traduzca la cantidad en sistema decimal. Las estrategias usadas por los niños TEE SAVI son ingeniosas, pero son desaprovechadas o ignoradas por sus docentes. Aunado a este tipo de estudios Nolasco y Jiménez (2016) reportan la resolución de problemas aritméticos en una escuela intercultural en México.

Estructuras multiplicativas

Otro problema detectado, es desde los campos conceptuales pues se entiende a los algoritmos como esquemas de organización de conducta, para actuar en una situación, donde aún no se consolida la relación entre dividendo y divisor, cociente y residuo (Brun,1996); una problemática en los sistemas de representación de estructuras multiplicativas en estudiantes de 6° de primaria y de 3° de secundaria, los más favorecidos son los varones, explican dificultades, donde invierten el divisor y el dividendo o modifican la interpretación del resultado, consideran que hay tres posibilidades para que resuelvan o inviertan los datos: 1) coordinan sistema de representación de la escritura alfabética, en orden de izquierda a derecha y 2) operan bajo el teorema-en-acto, el número mayor en la división toma el rol del dividendo, y el número menor el de divisor (Bustamante y Vaca, 2014). Ivars y Fernández (2016) consideran niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años, encontrando en estudiantes de 6 a 8 años, uso de estrategias de modelación y conteo, a partir del tercer curso la estrategia empleada es algoritmo, lo cual no implicó una disminución de estrategias incorrectas, el uso del algoritmo inverso, es decir, a partir de la introducción del algoritmo disminuye el uso de otras estrategias, sin embargo, no hay comprensión en dichas situaciones.

Otra investigación en estudiantes de quinto grado de educación básica, analizan la estructura de isomorfismo encontrando dos categorías, relaciones ternarias y cuaternarias. En las relaciones ternarias: a) multiplicación, b) división y c) suma repetida; dentro de la cuaternaria identificaron procedimientos categorizados: a) funcionales, b) escalares y c) un procedimiento de interación de unidades. Mencionan que un tipo de representación verbal-tabular favoreció el procedimiento funcional, el cual consiste en establecer correspondencia entre cantidades de ambos espacios de medida. La iteración permite llegar al concepto de uniticidad para avanzar de la suma o resta a una más compleja como lo es la multiplicación. Así la representación verbal-icónica favorece ese proceso, mientras la verbal-tabular no presenta ese procedimiento. Reafirmando que la representación en forma de dibujos facilita los procedimientos de emparejamiento de espacios de medida. Dentro de los problemas solucionados usan una relación ternaria, a través de procedimientos categorizados como multiplicación o suma repetida. Así encontraron que los problemas de isomorfismo de medida a través del uso de representaciones verbal-icónica y verbal-tabular son de fácil comprensión para estudiantes y mayor éxito en la resolución (García y Suárez, 2010). Bustamante-Santos y Flores-Macías (2017) describen los cambios en las significaciones en la representación escrita de la división con un problema de partición en una estudiante de sexto grado de primaria de una escuela pública. Analizan teoremas y conceptos-en-acto, en una entrevista clínica, encontrado inicialmente, escrito el algoritmo, guiada la participante por la idea "el número mayor va adentro", sin existir relación conceptual, plantea la relación entre dividendo y divisor, este estudio tiene como antecedente la investigación de Bustamante y Vaca (2014). Otras estrategias de solución ante problemas multiplicativos, se analizan en las particularidades de niños, de los tres primeros grados de educación básica para resolver problemas de agrupamientos, arreglos rectangulares, razón y precio, se detectan habilidades y se privilegia el conteo como herramienta para solucionar situaciones planteadas sin que el grado implique el uso de estrategias más elaboradas (García, 2004). Con el análisis en este rubro se reconoce la importancia de la teoría de los campos conceptuales, pero falta mirar cómo se da la CSCM, en el tema de la división con perspectiva de género.

Género (social-cultural)

Las interacciones en la escuela están cargadas de estereotipos que dificultan el aprendizaje de niños, niñas y jóvenes, desde la Educación Básica hasta la Educación Superior. En diversas partes del mundo hay un debate, llama la atención el género y las Matemáticas en diversas direcciones, en Estados Unidos y Europa, como pioneros en la década de los 70´s (Singapur, Australia, España, Reino Unido, Gran Bretaña), recientemente en Latinoamérica Chile, México (Farfán y Simón, 2016; Espinoza, 2010; Ursini, 2010, 2012), estudios comparativos entre países como EUA y México, y otros países como China, Italia, Finlandia, etc., que se han sumado. En un inicio se visibiliza la matemática como un conocimiento androcéntrico, desde una visión biologista, pero con el paso del tiempo, estudios recientes muestran que esta diferencia se debe a la construcción social, lo que permite visibilizar nuevas formas de CSCM y las variables que intervienen en ésta como la perspectiva de género. Esta reciente línea de investigacion género y matemáticas, toma en cuenta el impacto de lo social y cultural en la CSCM.

Las pruebas estandarizadas favorecen a los hombres, donde las percepciones sociales del contexto acerca del aprendizaje de las Matemáticas hacen evidentes los estereotipos de género (Forgasz y Leder, 2011); análisis de los libros de texto de Matemáticas donde se encuentran estereotipos de género (Norén y Bjöklund, 2016); estudios en adolescente talento, en el Distrito Federal, desde el enfoque socioepistemológico pues propone trastocar a la matemática donde el problema educativo no son objetos abstractos sino la democratización del saber, determinan rasgos particulares de este grupo en relación con la matemática funcional, cómo se apropian de ella y los aspectos socioculturales (género) y su influencia, encuentran que las mujeres resuelven de forma funcional y los hombres de forma algorítmica (Simón, 2015); diferencias entre hombres y mujeres en las actitudes hacia las Matemáticas, los varones tienen mayor interés que las mujeres (Páez, 2009); representaciones de género de profesores y profesoras de Matemática y su incidencia en resultados académicos de alumnos y alumnas (Flores, 2007); diferencia entre sexos en la resolución de problemas aritméticos, controversia entre factores que intervienen en la superioridad del género en Matemáticas (Betancourt, 1987); análisis documental, histórico y cultural, en estudios de dificultades de aprendizaje en el cálculo aritmético como dificultad (Coronado-Hijón, 2014). En el caso de México se han abordado estudios en secundaria en temas de variable algebraica (Real-Ortega, 2008); comparación de resultados de estudiantes de sexto grado de primaria y de 3º de secundaria, donde las niñas de primaria tenían una actitud positiva poco mayor a la de varones y en el caso de secundaria el resultado se invertía (Campos, 2006); homogeneidad en estudiantes de 3ª de secundaria, en la percepción de habilidades intelectuales, cognitivas para tener éxito o fracaso en la materia (Ursini, 2010).

Dado lo anterior hay avances significativos en Matemática Educativa con perspectiva de género, pero en el caso de México no se ha abordado el problema de la construcción social del conocimiento matemático en la resolución de problemas multiplicativos desde la Socioepistemología y la perspectiva de género, para conocer acerca del proceso y de la democratización del saber.

Obstáculo epistemológico de la multiplicación

Actualmente se comienza a investigar en torno a las obras originales, y con ello, una comprensión de cómo se construyó en esa época el conocimiento. Existe una generalización acerca de la multiplicación, como una suma abreviada, sin embargo, no es correcto, a la larga esto representa problemas epistemológicos en los estudiantes acerca del fenómeno. Schubring (2005) hace un análisis epistemológico, retoma obras de Euclides, Ampére, Bézout, las matemáticas babilónicas, Euclides y Grecia, Europa y la era moderna; para explicarnos la generalización de la multiplicación, de la suma abreviada como un error, el caso de la aritmética de Bézout, criticado por Ampére, muestra que el problema en la práctica era multiplicar diferentes magnitudes, un problema que no ha sido estudiado en absoluto por los historiadores. Es notable ver la noción de no conmutatividad emergiendo a través de intentos para generalizar la noción de multiplicación. Por otro lado, estos esfuerzos, agravaron el problema. La solución final se logró mediante una algebraización radical, separando los números desde magnitudes geométricas y otras. Otro acercamiento es de Veiga (2014) quien categoriza obstáculos y dificultades asociadas a la división de cero:1) al concepto de división, idea arraigada de que el reparto es equitativo;2) dificultades asociadas al concepto de infinito, como un número, o algo que no tiene solución; 3) dificultad asociada al concepto de función; y 4) a las características de situaciones planteadas. Identifica tres tipos de obstáculos: 1) didácticos, ausencia de tratamiento específico de la división por cero, se oculta el trabajo dinámico lo que dificulta el abordaje de nociones de cálculo infinitesimal;2) epistemológicos, en la concepción de división por cero, infinito y las funciones; y 3) ontogenéticos, imposibilidad de concebir el carácter infinitesimal que lo diferencia de la división aritmética. Es de vital importancia este rubro de lo epistemológico por tanto es una pieza clave para comprender el fenómeno de estudio. Así pues, no se puede comprender un tema de estudio sin estas cuatro piezas clave, lo didáctico, cognitivo, social-cultural y epistemológico.

Marco teórico

Los problemas de tipo multiplicativo son estudiados y explicados por Vergnaud (1996) con la teoría de campos conceptuales y los problemas de tipo multiplicativo, existen diferentes clases, sin embargo, nos avocaremos al isomorfismo. Se plantea la división de búsqueda de valor unitario, búsqueda de la cantidad de unidades, en la subclase de números enteros pequeños y grandes, una de las dificultades que se aprecia es la de producto continuo-continuo. La Teoría Socioepistemológica con base en Cantoral (2013), permite analizar y estudiar el saber matemático, donde éste, se ocupe de la historización y dialectización como dos mecanismos fundamentales de constitución, y es concebido como una construcción social del conocimiento basada en prácticas, basado en cuatro principios que son: principio normativo de la práctica social, de la racionalidad contextualizada, relativismo epistemológico, resignificación progresiva, con una anidación de prácticas progresivas (Montiel, 2005). Por lo tanto, el rediseño del discurso Matemático escolar (RdME) se logra con la característica de una construcción social del conocimiento matemático, donde los actores sean parte del rediseño. Es decir, es sistémico, porque la CSCM, está compuesta de la tesitura sociocultural, naturaleza epistemológica, los modos de transmisión vía la enseñanza y el plano de lo cognitivo. La perspectiva de género es una categoría teórica de la teoría feminista y se encarga de estudiar la construcción social del género (Buquet, 2016). Entendiendo el género como “un conjunto de prácticas, creencias, representaciones y prescripciones sociales que surgen entre los integrantes de un grupo humano en función de una simbolización de la diferencia anatómica entre hombres y mujeres” (Lamas, 2000, p.3). Además, desde esta postura la CSCM permite la democratización del saber, donde no sólo el dME excluye, sino que a través de la categoría de género se visibilizan todos estos elementos.

Método. Es una investigación cualitativa, con estudios de casos.

Avances de investigación

Se ha analizado el estado del arte, lo cual permite tener un referente empírico y teórico de éstas, para la construcción del tema de investigación. Dado lo cual, se abre un abanico de posibilidades para abordar la CSCM, en la solución de problemas desde la Socioepistemología y la categoría de género transversal y nos permite mirar algo que ha sido invisible por años en las investigaciones y nos obliga a revisar los estudios y supuestos en las investigaciones como diferencias biológicas, o intelectuales, cuando en realidad son construcciones sociales, para dar respuesta a ¿por qué hay una diferencia en la solución a problemas entre niños y niñas?, ¿qué es lo que no permite acceder con equidad a la educación?, ¿por qué hay bajo desempeño en la resolución de problemas? En este sentido hemos logrado aplicar instrumentos y seleccionar una muestra de cuatro participantes, 2 varones y 2 mujeres, donde hemos encontrado que la categoría transversal de género impacta en la CSCM, provocando inequidad en esa construcción y se reafirma la postura de Farfán y Simón (2016) donde es necesario transformar el orden social de género establecido en la sociedad para el rediseño de todo el aparato político.

Reflexión

Este avance da muestra de los escasos trabajos en Matemática Educativa y perspectiva de género, lo cual marca la pertinencia y relevancia de estos temas, en el caso de México, en Educación Primaria, en la CSCM en problemas de tipo multiplicativo, permite seguir con la investigación dando pie a la elaboración de instrumentos de toma de datos y validarlos para su aplicación, lo cual permitirá conocer cómo es ese proceso de democratización del saber para lograr la igualdad en las condiciones para acceder a la educación y ejercer ese derecho. No solo dentro de la institución educativa.

Referencias Bibliográficas

Block, D. (1995). *La matemática expulsada de la escuela. En SEP, La enseñanza de las MATEMÁTICAS en la escuela primaria.* Lecturas, SEP Programa Nacional de actualización Permanente (pp.1-25). SEP, México.

Block, D., Martínez P., Mendoza T. y Ramírez M. (2013). La observación y el análisis de las prácticas de enseñar matemáticas como recursos para la formación continua de maestros de primaria. Reflexiones sobre una experiencia. *Revista Educación Matemática, 25*(2), pp. 31-59.

Block, D., Martínez, P. y Mendoza, T. (2013). Repartir y comparar, SM, México.

Bourdieu, P. (2000). *La dominación masculina*. (Traducido por Joaquín Jordá). España: Anagrama.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht, Netherlands : Kluwer Academic Publishers.

Brun, J. (1996). The theory of conceptual fields and its application to the study of systematic errors in written calculation. En Mansfield H., Pateman N., Bednarz N. *Mathematics for Tomorrow´s Young Children* (pp.120-134). Netherland: Kluwer Academic Publishers.

Buquet, A. (2016). *Seminario de posgrado. Seminario de investigación con perspectiva de género: Herramientas para un análisis crítico*. PUEG-UNAM.

Bustamante, A. y Vaca, J. (2014**).** El papel de los sistemas de representación en las dificultades experimentadas por los estudiantes al resolver un problema del campo conceptual de las estructuras multiplicativas. *Revista de Investigación Educativa, 18*, pp. 25-57.

Bustamante-Santos A.J. y Flores-Macías R.C. (2017). Las reflexiones de Andrea: un análisis micro genético de la comprensión de la división en el contexto de un problema. *Revista Educación Matemática, 29*(1), pp. 91-116.

Campos, C. (2006). *Actitud hacia las matemáticas: diferencias de género entre estudiantes de sexto de primaria y tercer grado de secundaria* (Tesis de maestría no publicada). Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, D.F., México.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Coronado-Hijón (2014**).** Estudio de prevalencia de dificultades de aprendizaje en el cálculo aritmético. *Bordón Revista de pedagogía, 66* (3), pp.39-60.

Espinosa, C. (2010). Diferencias entre hombres y mujeres en educación matemática: ¿Qué pasa en México? *Investigación y Ciencia de la Universidad Autónoma de Aguascalientes*, *46*, pp.28-35, marzo.

Farfán, R. y Simón, G. (2016). *Construcción Social del Conocimiento. El caso de género y matemáticas.* México: Gedisa.

Flores, B. (2007). Representaciones de género de profesores y profesoras de matemática, y su incidencia en los resultados académicos de alumnos y alumnas. *Revista Iberoamericana de Educación, 43*(1), pp. 103–118.

Flores-Macías, R. (2005). El significado del algoritmo de la sustracción en la solución de problemas. *Educación Matemática, 17*(2), pp. 7-34.

Forgasz, H. y Leder, G. (2011). Mathematics, computer in mathematics and Gender: public perceptions in context. *PNA*, *6*, pp. 29-39.

García, J., Rodríguez, M. y Navarro, C. (2015). Las estrategias utilizadas por los niños TEE SAVI en la resolución de problemas aritméticos*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18* (2), 213-244.

García, L. (2004). Estrategias de solución ante problemas multiplicativos: estudio exploratorio. En L. Díaz (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17,* 69-74. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

García, R. M. A. y Suárez, O. A. (2010). Memoria 11º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.

Harding, S. (1987). *Is there a Feminist Method? Feminist and Methodology,* Bloomington Indianapolis, Indiana University Press.

Harris, R. (1999). *Los signos de la escritura.* Barcelona: Gedisa.

Ivars, P. y Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. *Revista Educación Matemática*, *28*(1), pp. 9-38.

Lamas, M. (2000). Diferencias de sexo, género y diferencia sexual. *Revista Cuicuilco, 7*(18).

Montiel, G. (2005). Interacciones en un escenario en línea. El papel de la socioepistemología en la resignificación del concepto de derivada. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 8(2) pp. 219-325.

Nolasco y Jiménez (2016). La resolución de problemas aritméticos en la escuela intercultural, en XXX *Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa,* realizada del 11 al 15 de julio de 2016 en *Monterrey*, Nuevo León, México.

Norén y Bjöklund (2016). Gender Stereotypes in Mathematics Textbooks en *13th International Congress on Mathematical Education,* Hamburg, Germany, 24-31 July 2016.

OCDE (2016). *Programme for International Student Assessment 2015*. Recuperado en https://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus-ESP.pdf.

Páez, M. (2009). *Actitudes, tecnología y rendimiento en matemáticas: diferencias entre sexo y género*. Tesis de licenciatura no publicada en la Facultad de Estudios Superiores (FES) Zaragoza, Universidad Nacional Autónoma de México, D.F. México.

Real-Ortega, C.R. (2008). *Diferencias de género en alumnos de 3º al trabajar con 3UV.* Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, D.F. México.

Schubring (2005). A case study in generalisation en Hoffmann, H.G. M, Lenhard, J. y Seeger, F. *Activity and Sign Grounding Mathematics Education* (pp. 270-285). Springer Science, United States of América.

SEP-PUEG-UNAM (2010). *Equidad de género y prevención de la violencia en primaria*. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública (2011). *Programa de estudio 2011. Guía para el maestro*. Educación Básica Primaria Sexto Grado, SEP, México.

(2015) *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno*. Sexto grado, SEP, México.

(2011) *Plan y Programas de Educación Primaria*, SEP, México.

(2015) *Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes* (Planea, 2015), SEP, México. Recuperado en http://planea.sep.gob.mx/ba/prueba_en_linea/

Simón, G. (2015). *El talento en matemáticas de mujeres adolescentes. Una caracterización desde el enfoque socioepistemológico y la perspectiva de género* (Tesis doctoral no publicada) Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, D.F., México.

Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una visión Socioepistemológica* (Tesis de Maestría no publicada). Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, D.F., México.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión socioepistemológica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 28*(50), 1525-1544.

Ursini, S. (2010). Diferencias de género en la representación social de las matemáticas: Un estudio con alumnos y alumnas de secundaria, en Blázquez, N., Flores F., Ríos M. (Coordinadores) *Investigación feminista epistemología, metodología y representaciones sociales,* Colección Debate y Reflexión, pp.379-398. México: UNAM- CEIICH.

Veiga, D. (2014). Análisis socioepistemológico de los obstáculos asociados a la división por cero. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27*, (pp. 1655-1663). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Vergnaud, G. (1996). *El niño, las matemáticas y la realidad: Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas.

LA IDENTIDAD DISCIPLINAR DESDE LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO. UN PROGRAMA PERMANENTE DE LA FORMACIÓN DEL DOCENTE

Claudio Enrique Opazo Arellano, Francisco Cordero Osorio, Héctor Alejandro Silva Crocci
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN y Universidad Santiago de Chile. (México-Chile).
copazo@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx, hector.silva.c@usach.cl

RESUMEN: Investigaciones previas han evidenciado la ausencia de los usos del conocimiento matemático de la gente en la enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar. Como consecuencia, se ha generado un discurso Matemático Escolar; marco de referencia normativo y hegemónico que ha transformado los usos del conocimiento matemático del que aprende en un sujeto olvidado. Con este panorama, la identidad disciplinar del docente de matemáticas funge como el instrumento de recuperación de los usos del conocimiento matemáticos del docente de matemáticas, por una parte. Y, por otra, como el responsable de definir simultáneamente la función del docente de matemáticas.

Palabras clave: discurso matemático escolar, fenómeno de adherencia

ABSTRACT: Previous researches have shown the lack of mathematical knowledge uses in the teaching learning process of school Mathematics .Consequently, a school mathematical discourse has emerged, which is a normative and hegemonic reference framework that has changed the learner' uses of mathematical knowledge into a forgotten subject. With this view, the disciplinary identity of the Mathematics teacher constitutes an instrument for recovering his own mathematical knowledge on one hand. And, on the other hand, it has the responsibility to simultaneously define the Mathematics teacher's function.

Key words: school mathematical discourse, adherence phenomenon

Introducción

Investigaciones como (Del Valle, 2015; Opazo-Arellano y Cordero, 2016; Terrones, 2012), entre otras, han permitido evidenciar la ausencia de los usos del conocimiento matemático de la gente en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar. Por tal motivo, se ha provocado un discurso Matemático Escolar; el cual al paso del tiempo se ha convertido en un marco de referencia normativo y hegemónico. Transformando a los usos del conocimiento matemático del que aprende, desde nuestra perspectiva, en un sujeto olvidado (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015).

Con este panorama, desde el Programa Socioepistemológico llamado Sujeto Olvidado y la Transversalidad de Saberes; buscamos recuperar los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones en las comunidades de conocimiento matemático de la gente, es decir: en la escuela, en el trabajo o la profesión y en sus realidades (Cordero, 2016).

Nuestro trabajo, busca -por lo tanto- recuperar los usos del conocimiento matemáticos del docente en formación con el objetivo de hacer visible el uso del conocimiento matemático que no está presente en la escuela. Ahora bien, por la necesidad de recuperar los usos del conocimiento matemático del docente en formación, creemos necesario contar con un instrumento de recuperación.

Para esta tarea proponemos a: la identidad disciplinar del docente de matemáticas. Quien, -simultáneamente- desde nuestra perspectiva definirá la función del docente de matemáticas.

Específicamente, atenderemos la realidad del docente en formación de Chile; país que se ha impuesto mejorar la calidad de la educación a partir de transformar y trastocar la realidad del docente.

Un aspecto a considerar, en este sentido, es que para recuperar los usos del conocimiento matemático del docente en formación es necesario conocer las características de esta comunidad de conocimiento matemático -es decir, su cotidiano disciplinar-, por una parte. Y, por otra, promover entornos donde ocurra una reciprocidad entre la matemática escolar y los usos del conocimiento matemático del que aprende a partir de identificar cómo la comunidad de docentes en formación legitimidad, resiste y promueve un proyecto en torno al conocimiento matemático (Cordero y Silva-Crocci, 2012).

El discurso Matemático Escolar en la formación del docente de matemáticas

Un primer acercamiento a dimensionar la realidad del docente en formación, es el trabajo de Soto (2013). Investigación que identificó la permanencia de tres campos disciplinares en la formación del docente de matemáticas de un programa específico en Chile, a saber: la Matemática, la Educación y la Matemática Educativa más recientemente. Estos campos disciplinares permanentemente se esfuerzan por articularse, sin embargo, no es claro o evidente este proceso; ya que se evidencian constantes tensiones entre estas disciplinas.

Ahora bien, Soto (2013) identifica de esta articulación un discurso Matemático Escolar; el que tiene un carácter hegemónico, homogéneo y utilitario (Soto y Cantoral, 2014).

El discurso Matemático Escolar de acuerdo a Soto y Cantoral (2014), tiene un carácter nocivo; ya que rompe con la naturaleza del hombre (Soto, 2010), lo cual implica desconocer la construcción de conocimiento producto de su realidad (Cordero, 2001).

Lo nocivo del discurso Matemático Escolar, se expresa en la enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar; donde prevalece una epistemología dominante, que provoca una opacidad de los usos del conocimiento matemático de la gente. De esta forma, se excluye al que aprende de la Construcción Social del Conocimiento Matemático, es decir: de la construcción de conocimiento matemático con el otro dada una situación específica.

La matemática escolar -como epistemología dominante- impone a la gente una centración al objeto matemático. Por lo cual, el que aprende se debe someter -permanentemente- a las repeticiones y procedimientos que impulsa la matemática escolar -cuyo objetivo es: universalizar el conocimiento matemático-; opacando los funcionamientos y formas de los usos del conocimiento matemático de la gente. Es decir, donde existe una pluralidad epistemológica (Gómez, 2015).

En consecuencia, al opacar y excluir los usos del conocimiento matemático de la gente se provoca una adherencia del que aprende a las normas que impone el discurso Matemático Escolar (Cordero et al., 2015). Y, a la vez, la opacidad de la pluralidad epistemológica.

En este sentido, desde nuestra perspectiva, el docente de matemáticas es un sujeto olvidado, ya que en su proceso de formación sólo se privilegian los argumentos que impone el discurso Matemático Escolar; opacando las argumentaciones funcionales de él.

Un ejemplo es el trabajo de Opazo-Arellano (2014), investigación que estudió el uso de las gráficas a partir de una situación de transformación -esto es, donde se significan patrones gráficos, se varían parámetros y la gráfica es un modelo que guía comportamiento- en la comunidad de docentes en formación de Chile.

Así se presentó un diseño de situación donde se discutieron aspectos variacionales, poniendo atención a cómo y cuánto algo cambia. En ese contexto, las intervenciones de los participantes -estudiantes de la carrera de pedagogía de la matemática- permitieron evidenciar el papel del discurso Matemático Escolar en la formación del docente de matemáticas.

El discurso Matemático Escolar, favorece la opacidad de los usos del conocimiento matemático y la exclusión de la Construcción Social del Conocimiento Matemático; ya que al imponer los argumentos de la matemática escolar los docentes en formación se adhieren a una centración en el objeto matemático. Lo que opaca el conocimiento matemático que es producto de su actividad humana, como, por ejemplo: la Predicción, el Comportamiento Tendencial, la Analiticidad de las funciones y la Optimización (Cordero, 2008).

Si pensamos, por ejemplo, en la derivada; el discurso Matemático Escolar -desde la centración al objeto matemático- promueve reconocer a ésta como un proceso de iteración, donde la gráfica es la representación de una iteración específica. En este sentido, nos preguntamos: ¿Cómo usa el conocimiento matemático el docente en formación de matemáticas cuando debe bosquejar la gráfica de la primera derivada? En este escenario, las respuestas de los participantes permiten evidenciar los significados, los procedimientos y argumentos que impone el discurso Matemático Escolar. Esto es, busca puntos específicos, construye la expresión algebraica de la función y luego aplica la primera derivada. Como resultado de lo anterior, el estudiante posteriormente, construye la gráfica solicitada (ver figura 1).

En esta situación específica, se percibe una adherencia al discurso Matemático Escolar. Esto es, no reflexionar o cuestionar cómo se constituye el conocimiento matemático (Cordero y Silva-Crocci, 2012). Ya que el docente en formación es normado por una epistemología que excluye los usos del conocimiento matemático del que aprende, en este caso, de él.

Por ende, el marco de referencia que tiene el docente en formación para su función -desarrollar usos del conocimiento matemático- (Terrones, 2012) es el discurso Matemático Escolar; dicho con otras palabras, la epistemología que niega la pluralidad epistemológica.

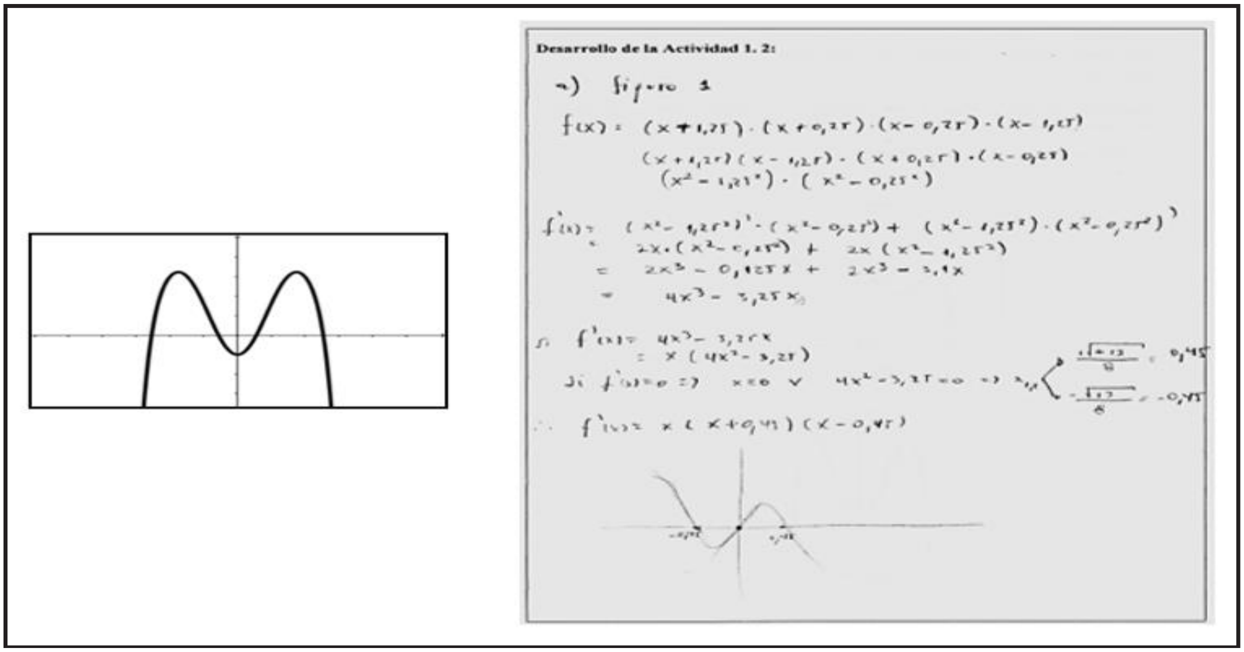


Figura 1. Actividad del uso de la gráfica (Opazo-Arellano, 2014)

Un instrumento de recuperación: la identidad disciplinar del docente de matemáticas

Al estar excluidos los usos del conocimiento matemático del docente en formación, será necesario recuperarlos de tal forma de que el docente en formación haga una inmersión en la Construcción Social del Conocimiento Matemático. Para ello, será fundamental la matemática funcional, es decir: una pluralidad epistemológica, la transversalidad y resignificación del conocimiento matemático.

Destacamos que la identidad disciplinar tendrá que estar dotada de una fuente de sentido, la cual creemos será: la Construcción Social del Conocimiento Matemático; es decir, donde están presentes los usos del conocimiento matemático de la gente.

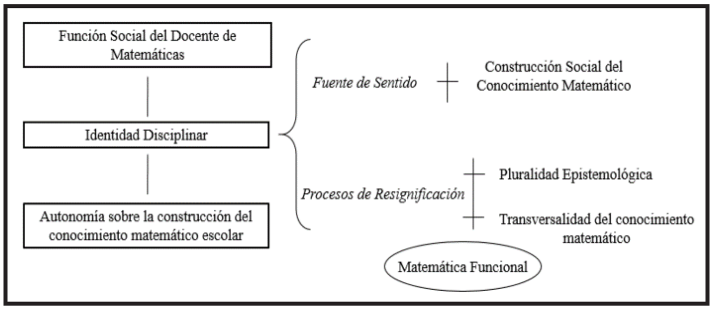


Figura 2. Identidad Disciplinar desde la CSCM

Así la identidad disciplinar, buscará una autonomía sobre el conocimiento matemático (ver figura 2). Esto en nuestro trabajo lo hemos transformado en el constructo procesos de autonomía. Donde viven momentos de legitimidad, resistencia y proyecto sobre el conocimiento matemático (Cordero y Silva-Crocci, 2012).

Actualmente, nos hemos enfrentado a aclarar esta triada. La que creemos tendrá una naturaleza dialéctica, ya que habrá momentos donde el docente en formación esté fuertemente permeado por el discurso Matemático Escolar, pero, también existirán momentos donde el docente en formación esté inmerso en la matemática funcional.

En este sentido, destacamos dos aspectos. El primero es que existe la posibilidad de abordar la noción de autonomía desde diferentes visiones, por ejemplo, una de ellas es la de Freire (2012); la cual apela a la noción de libertad, principio que en términos generales se ha buscado permanentemente en la práctica del docente. Sin embargo, nuestro señalamiento atiende una visión centrada en el conocimiento matemático; principalmente con el objetivo de hacer visible los usos del conocimiento matemático y simultáneamente la descentración del objeto matemático. Logrando así, trastocar el discurso Matemático Escolar que norma la formación del docente de matemáticas.

En este sentido, la función del docente tendrá un papel fundamental. Ya que será la responsable de promover permanentemente una reciprocidad entre la matemática escolar y la realidad del que aprende. Es decir, entre una epistemología dominante -cuyo eje es la centración al objeto matemático- y el sujeto olvidado -es decir, los usos del conocimiento matemático de la gente- (Cordero, 2016). Empero, ¿Cómo hacemos para que el docente en formación viva una matemática funcional?; dado que es necesario mantener entornos donde exista reciprocidad entre ambas epistemología, hemos formulado con base en los objetivos del Programa Socioepistemológico Sujeto Olvidado y la Transversalidad de Saberes un nuevo constructo: la situación escolar de socialización.

Es importante aclarar lo siguiente. Entendemos la noción de socialización desde una perspectiva contemporánea, esto es: donde se discute el papel que juega el conocimiento matemático que se pretende socializar. Cuyo núcleo es la relación entre una comunidad y su conocimiento (Gómez, 2015). Por ende, la situación escolar de socialización nos permitirá -en nuestro trabajo- recuperar el conocimiento matemático que construye una comunidad de conocimiento bajo una situación específica.

Para sustentar la situación escolar de socialización, vamos a poner en juego las Categorías del Conocimiento Matemático; las que expresan al humano haciendo conocimiento. Las Categorías son el resultado de un conjunto de trabajos que han abordado el Rediseño del discurso Matemático Escolar (RdME). En este sentido, Cordero (2008) formuló un cuadro resumen que permite evidenciar las significaciones, los procedimientos, la utilidad al humano y las argumentaciones que están presentes en: la Predicción, el Comportamiento con Tendencia, la Analiticidad de las Funciones y la Optimización. La última, responde al trabajo colaborativo que desarrolló Del Valle (2015) al proponer la situación de selección. Destacamos que el cuadro propuesto por Cordero (2008) expresa a nuestro entender, una base epistemológica cuya naturaleza tiene como núcleo los usos del conocimiento matemático de la gente.

Finalmente, destacamos lo siguiente. Existe la necesidad de estudiar comunidades de conocimiento matemático específicas, donde se desarrollan usos del conocimiento matemático bajo una situación de la misma naturaleza. Lo anterior, permitirá recuperar el uso del conocimiento matemático de, por ejemplo, los docentes en formación de matemáticas de una comunidad específica de Chile.

Así pues, la identidad disciplinar será un instrumento de recuperación de los usos del conocimiento matemático del docente de matemáticas, y a la vez, quien defina su función. En este sentido, la situación escolar de socialización cumplirá una tarea fundamental; ya que permitirá conocer y recuperar cómo usa el conocimiento matemático el docente en formación de matemáticas. Promoviendo una amplitud del marco de referencia que norma el proceso dinámico de la formación del docente en Chile.

A manera de cierre

La usencia de los usos del conocimiento matemático en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar ha provocado un marco de referencia normativo y hegemónico, este es: el discurso Matemático Escolar; el cual tiene una centración a los objetos matemáticos, provocando por ello una opacidad de los usos del conocimiento matemático de la gente (Cordero, 2016). Es decir, la pluralidad epistemológica.

Ante este panorama, es importante recuperar los usos del conocimiento matemático del que aprende, por una parte. Y, por otra, articularlos de manera recíproca con la matemática escolar. Para tal fin, la situación escolar de socialización será fundamental ya que permitirá en otras cosas la transversalidad del conocimiento matemático; esto es, la resignificación del conocimiento matemático de la gente.

Para recuperar los usos del conocimiento matemático del docente en formación, es necesario un instrumento de recuperación. Desde el programa Socioepistemológico el Sujeto Olvidado y la Transversalidad de Saberes, proponemos a la identidad disciplinar para esta tarea. Destacando que la identidad disciplinar, es un constructo teórico cuya fuente de sentido es la Construcción Social del Conocimiento Matemático.

Finalmente, es importante decir lo siguiente. La recuperación y la articulación de los usos del conocimiento matemático de la gente con la matemática escolar, debe ser un proceso permanente; por ello nos hemos referido a un RdME; caso contrario, no se logrará trastocar y transformar la formación del docente de matemáticas. Esto implica, no contrarrestar desde los usos del conocimiento matemático del que aprende la adherencia al discurso Matemático Escolar en la que está inmerso el docente de matemáticas.

Referencias bibliográficas

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2), 103-128.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama & A. Romo (Eds), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 285-309). México, D. F.: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Cordero, F. y Silva-Crocci, H. (2012). Matemática Educativa, Identidad y Latinoamérica: El quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 15 (3), 295-318.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H., y Soto, D. (2015). *El Discurso Matemático Escolar: la Adherencia, la Exclusión y la Opacidad*. Barcelona, España: Gedisa.

Cordero, F. (2016). La función social del docente de matemáticas: pluralidad, transversalidad y reciprocidad. En S. Estrella, M. Goizueta, Guerrero, A. Mena, J. Mena, E. Montoya, A. Morales, M. Parraguez, E. Ramos, P. Vásquez, y D. Zakaryan (Eds). XX *Actas Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (23-30), ISSN 0719-8159. Valparaíso, Chile: SOCHIEM, IMA-PUCV. Recuperado de http://ima.ucv.cl/xxjnem.

Del Valle, T. (2015). Los Usos de la Optimización: Un Marco de Referencia y la Teoría Socioepistemológica. Tesis de Doctorado no publicada. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso-Chile.

Freire, P. (2012). *Pedagogía de la autonomía: saberes necesarios para la práctica educativa*. Distrito Federal, México: Siglo XXI.

Gómez, K. (2015). *El fenómeno de opacidad y la socialización del conocimiento*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Opazo-Arellano, C. (2014). *El uso de las gráficas y el fenómeno de opacidad. El caso del concepto de derivada en los estudiantes de pedagogía en matemáticas en Chile*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Opazo-Arellano, C., y Cordero, F. (2016). La fuente de sentido en la formación docente en Chile. En F. Rodríguez, R. Rodríguez, y L. Sosa (Eds), *Investigación e Innovación en Matemática Educativa* 1 (1), 346-354. Oaxaca, México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A.C.

Soto, D. (2010). *El discurso matemático escolar y la exclusión. Una visión Socioepistemologíca.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Soto, D. (2013). El campo de la formación del profesor de matemáticas y la exclusión de la construcción social del conocimiento matemático. El caso de un programa específico. En Dolores, C; Socorro, M; Hernández, J y Sosa, L. *Matemática Educativa: La formación de profesores* (121-139). México, D.F: Díaz Santos.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). El discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una visión Socioepistemológica. *Bolema- Boletim de Educação matemática,* 28(50), 1525-1544.

Terrones, M. (2012). La dimensión de profesionalidad de la función docente en matemáticas. Una mirada Socioepistemológica. Tesis de Maestría no publicada. Centro de investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

FUNCIONALIDAD DEL USO DE LAS GRÁFICAS EN UNA COMUNIDAD DE FÍSICOS, DESDE UNA PERSPECTIVA SOCIOEPISTEMOLÓGICA

Alba Gabriela Lara Medina, Astrid Morales Soto
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
g.laramedina@gmail.com, ammorale@ucv.cl

RESUMEN: La investigación se desarrolla con un enfoque socioepistemológico, esta perspectiva considera que son las prácticas que dan sentido al conocimiento puesto en uso, nos centramos en una comunidad de conocimiento: los físicos. Presentamos algunos resultados de la investigación realizada respecto al uso de las gráficas en dicha comunidad de una universidad chilena en particular. Postulamos que en esta comunidad se usa la gráfica de manera funcional, y que desempeña un rol trascendente en el trabajo del mismo. Lo anterior aporta elementos para un rediseño del discurso matemático escolar. El enfoque a usar en la metodología es cualitativo.

Palabras clave: matemática escolar, cotidiano, uso de las gráficas, socioepistemología

ABSTRACT: This research has been developed with a socio- epistemological approach. It considers that the practices give a sense to the knowledge being used. The work is focused on a knowledge community: the physicists. We show some research results with respect to the graph´s used by the physicists' community in a Chilean University. We state that in this university the graph is used in a functional way and it plays an essential role. This statement provides elements for a new design of the school mathematics discourse. The methodology uses a qualitative approach.

Key words: school mathematics, daily, use of graphs, socioepistemology

Problemática

Las bases curriculares de la Educación Básica y Media enfatizan el cotidiano como un elemento que ayuda a formar ciudadanos críticos; de igual manera el rol que desempeña la universidad aporta a la formación de los ciudadanos que desempeñan una profesión (Mineduc, 2012, 2013).

En la educación universitaria, las Matemáticas aportan en el desarrollo de un juicio racional y crítico que son necesarios al momento de ejercer cualquier profesión. Es la universidad una institución encargada de formar científicos y profesionales, entonces debemos reflexionar

respecto la forma de trabajar para alcanzar los objetivos de enseñanza.

Los conocimientos matemáticos tienen sentido y significado tanto dentro del aula escolar como fuera de ésta, sin embargo, el discurso matemático escolar (dME) que se encuentra hoy día no ayuda a alcanzar un conocimiento que transforme su realidad, es decir, que sea funcional, sino que por el contrario muestra un conocimiento estático y carente de sentido y significado.

De lo anterior podemos decir que existe una falta de conexión entre el conocimiento matemático escolar y el cotidiano, en otras palabras, “lo que se enseña en la escuela no responde a las situaciones del cotidiano, y peor aún el conocimiento del cotidiano no se parece nada al de la escuela” (Cordero, 2013, p. 6). Esta investigación propone abordar este aspecto desde una mirada de la Matemática Educativa trabajando con una comunidad de físicos, analizando el uso de las gráficas que ellos tienen tanto en el ámbito profesional en investigación como el de docencia. De esta manera nos proponemos recurrir a las gráficas como argumentación en situaciones concretas, que provocan que se genere conocimiento (Morales, Mena, Vera & Rivera, 2012). Reportamos el caso de un investigador de la disciplina de la Física.

Marco Teórico: Socioepistemología

Nuestra investigación se aborda desde la teoría de la Socioepistemología, cuya postura toma en cuenta el hecho de la falta de marcos de referencia para resignificar el conocimiento matemático y el objetivo de rediseñar el discurso matemático escolar. La importancia se enfoca en que el conocimiento sea funcional, por ello nos centraremos en los usos de conocimiento.

Los conocimientos matemáticos tienen sentido y significado tanto dentro del aula escolar como fuera de ésta, sin embargo, el dME que se encuentra hoy día no ayuda a alcanzar un conocimiento que transforme su realidad, es decir, que sea funcional, sino que por el contrario muestra un conocimiento utilitario. Con lo anterior podemos decir que existe una falta de conexión entre el conocimiento matemático escolar y el cotidiano, en otras palabras, *lo que se enseña en la escuela no responde a las situaciones del cotidiano, y peor aún el conocimiento del cotidiano no se parece nada al de la escuela* (Cordero, 2013). Es necesario aclarar que cuando se menciona conocimiento escolar nos referimos a todos los niveles escolares (básica, media, universitaria) y cuando se dice cotidiano nos referimos a una comunidad específica.

En la investigación se destacan dos fenómenos del dME: *la exclusión y la opacidad*.

Algunos autores mencionan la existencia de dos epistemologías: la de la vida y la de la matemática escolar. La sociedad ha legitimado la de la escuela, sin embargo, esto no quiere decir que la epistemología de la vida no tenga importancia, ¿cómo hacerlas dialogar? En otras palabras, "la matemática escolar opaca la vida cotidiana y por consiguiente, el conocimiento del cotidiano se encuentra opaco en los marcos de referencia de la matemática (MR) escolar" (Cordero, Gómez, Silva-Crocci &Soto, 2015).

La opacidad, se encuentra ligada a no considerar la matemática del cotidiano en los MR para la matemática escolar, es decir, el actual dME opaca los argumentos del cotidiano a pesar de ser éstos más cercanos al conocimiento matemático funcional (Gómez y Cordero, 2013).

Asumimos como hipótesis que la argumentación gráfica genera conocimiento matemático, sabemos que la argumentación gráfica no se entiende como un concepto, pero sí como un saber matemático por lo que requiere de cierto estatus en el discurso matemático escolar, que hoy no lo tiene porque está opaco, la epistemología que predomina no permite mostrar este saber. Desde esta postura es que se pretende dar evidencia que la argumentación gráfica habita en diferentes comunidades de conocimiento a nivel funcional, y la importancia de tener presente aquello, pues podemos encontrar elementos importantes para ser incorporados en el objetivo del rediseño del dME. Nuestro objetivo es el uso de gráficas, lo que nos llevaría a sus argumentaciones gráficas. Es decir, queremos generar una epistemología de la matemática funcional donde el núcleo sean los usos.

Lo anterior lleva a la necesidad de reflexionar en la pluralidad epistemológica, es decir, la obra matemática, la matemática escolar, la matemática de otras disciplinas, e inclusive la matemática del cotidiano no disciplinar, sino de la gente. Para ello hemos decidido centrarnos en una disciplina específica: la Física. El fenómeno de la exclusión tiene que ver con "la imposibilidad de participar en la construcción del conocimiento matemático y la negación de la pluralidad epistemológica*"* (Cordero, 2016).

Incorporar al físico como individuo permite mirarlo como parte de una comunidad donde puede desempeñar distintos roles. En nuestro caso, el físico desempeñándose como investigador y como docente, es decir, en el trabajo y en la escuela. Mirar al individuo desde estas posturas nos permite preguntarnos lo siguiente, ¿qué práctica o conocimiento usa en el rol de investigador que fomenta el uso de las gráficas en la sala de clase?, ¿existen elementos de la práctica del físico respecto al uso de las gráficas que se puedan incorporar al discurso matemático escolar (dME)? En términos teóricos, nuestro *objeto de estudio es la transversalidad de los usos del conocimiento matemático: del trabajo a la escuela*.

Antecedentes del rol de la gráfica en la disciplina de Física

Algunos artículos han llamado la atención por la relevancia de las gráficas en la Física, declarando que, desde el punto de vista desde esta disciplina, la gráfica cumple un rol fundamental y el hecho de que los estudiantes no comprendan su vinculación con los modelos físicos arroja ciertas dificultades (McDermott, Rosenquist y van Zee, 1987; Hale, 2000; Laverty & Kortemeyer, 2012).

McDermott *et al* (1987) señala la relevancia de las gráficas en el estudio de la física, destacando ésta como una de las habilidades a desarrollar más importantes. Los autores mencionan que existen dificultades al momento de conectar las gráficas con conceptos físicos y con el mundo real.

McDermott *et al* (1987) y Hale (2000) mencionan que los estudiantes pueden comprender los conceptos físicos pero no logran hacer conexiones necesarias entre los conceptos matemáticos con sus respectivas gráficas que son importantes para relacionarlos con tópicos de la Física, por ejemplo con la cinemática. En esta misma dirección, Hale (2000) destaca en la cinemática dos aspectos, la relación entre las gráficas de variables cinemáticas (posición, velocidad y aceleración) ya que son esenciales en los cursos de Física, y que en Cálculo Diferencial, la cinemática es el ambiente natural para explicar el concepto tasa de cambio.

Por su parte, Laverty y Kortemeyer (2012) indican que aun cuando los estudiantes son eficientes al momento de graficar con funciones dadas o interpretar los valores de la misma, eso no significa que sean hábiles para construir gráficas e interactuar con ellas. A lo que se refieren los autores, es que graficar un par de valores o una función particular es diferente a construir la gráfica de *posición vs. tiempo* para un auto moviéndose hacia atrás o construir la gráfica *aceleración vs tiempo* para un auto que alcanza su máxima velocidad en cierto tiempo. Los autores también indican que la habilidad de trabajar con gráficas puede aprovecharse en el aula y más aún si además de interpretar se interactúa con ellas, por eso la relevancia que no solo sepan gráficas sino también construir gráficas.

Con lo anterior, se puede concluir que éstos dan evidencia de que las gráficas han sido y son importantes en el área de la Física y que a pesar del paso del tiempo existen elementos que no se han logrado aprovechar en el aula, por ejemplo: conectar los conocimientos de Cálculo a la Física, promover la construcción de gráficas e interactuar con las mismas. Lo anterior nos hace cuestionarnos respecto a ¿cómo conectar con la matemática escolar para así lograr un rediseño del discurso matemático escolar?, y darle un nuevo estatus a las gráficas.

Método

Se trabajó en un enfoque cualitativo. El tipo de investigación será con estudio de caso (Stake 2007). La población fue de dos doctores en Física que investigan en su disciplina y además realizan docencia en las carreras de Licenciatura y Pedagogía en Física de universidades chilenas, en particular presentaremos el caso de uno de ellos.

Uno de los instrumentos realizados para la investigación fueron analizar el material que los investigadores generan, tanto en docencia como en investigación (publicaciones), como también grabaciones de clases y posteriormente entrevistas. Las actividades fueron grabadas con el propósito de profundizar algunos temas. Se analizaron las grabaciones con el propósito de observar cómo es que el investigador posiciona la gráfica en su quehacer tanto de investigación como en su rol de docente para analizar en qué contexto las gráficas se usan de manera funcional.

Datos y análisis

La toma de datos se realizó con físicos investigadores en dos momentos: ($M_{1)}$ enfocado al uso de las gráficas en la labor en el aula del Físico (F) como profesor universitario: se ha revisado material de docencia como guías, pruebas y clases teóricas y de laboratorio, y (M2) referente a las investigaciones: analizando el uso de las gráficas en artículos, material de difusión y entrevistas. En este reporte se presentan extractos de una de las entrevistas realizadas y de una clase del laboratorio observada a un doctor en Física de la PUCV, quien dicta clases a la carrera de Licenciatura en Física de esta misma universidad.

Entrevista

La elaboración de la entrevista fue llevada a cabo con el fin de situar al experto en los dos momentos antes mencionados. La validación de la misma fue realizada por expertos en el área. Se adoptó el formato semi-estructurado para la entrevista, ya que nuestro interés fue el de explorar la postura del entrevistado, dando así la posibilidad de instalar un diálogo fluido con el entrevistado, quien puede agregar los comentarios que considere adecuados. La entrevista se llevó a cabo en el laboratorio en el cual trabaja el experto y fue grabada en audio y video.

Las transcripciones de la entrevista especialmente diseñada para este trabajo recogen información del rol de la gráfica asignado en la construcción del conocimiento relacionado a la Física y de las experiencias personales del entrevistado en torno de este tema.

En este apartado se muestran extractos de algunas de las respuestas dadas al Entrevistador (E) que evidencian el rol de las gráficas al momento de impartir clases.

El profesor expresa que una de las dificultades encontradas al graficar está relacionada con las variables:

> F: […] Lo que pasa es que uno sabe lo que hay que graficar, pero ellos no. Por ejemplo: la definición de pendiente, […], entonces toman una posición y la dividen por el tiempo y eso no es, y es difícil sacarles eso.
>
> E: ¿Tú supones que ellos vienen con eso?

F: Vienen con unas variables que entienden, pero las entienden mal.

Para abordar el problema relacionado a las variables, el profesor usa las gráficas. Un punto que el profesor destaca es que él no interviene de manera inmediata, sino que son los estudiantes quienes discuten los datos que tienen y llegan a ciertas conclusiones; él interviene en el momento que analizan la gráfica más profundamente, pero resalta que para entender y graficar se requiere más que sólo identificar y leer las variables.

F: Lo que hacemos es que hagan todo, que calculen de las dos maneras y que vean que es distinto […]. La idea es que ellos discutan […] el profesor entra en la discusión una vez que ellos hayan discutido […].

Les hacemos construir gráficos cualitativos, […] pedimos que construyan el gráfico Posición vs Tiempo, entonces aparentemente es difícil porque no es el típico gráfico de una parábola o línea recta. Les decimos ustedes ven el gráfico y grafican las variables, pero después tiene que afinar el ojo, tiene que hacer el gráfico, pero ahora van viendo las pendientes: Entonces el mismo gráfico (posición vs tiempo) van viendo que pasa con las velocidades y eso es de un grado de abstracción un poquito más allá. Entonces una vez que llegan a entender el gráfico y además entender las pendientes que se comportan de tal manera realmente están aprendiendo a leer el gráfico y poder hacer el gráfico. […]. Los alumnos saben pasar los datos a un gráfico, les pedimos que entiendan por qué están pasando las diversas cosas.

El M2 permite ver al físico como investigador, algunos de sus artículos se encuentran relacionados con problemas que se encuentran mal resueltos en los libros, ligados a experimentos de la vida diaria. Uno de los objetivos de sus investigaciones es motivar al aprendizaje de la Física a través de la comprensión de conceptos basales de Mecánica.

F: Lo que hicimos antes es desarrollar material para el curso de Mecánica […], Mi colega ahora se extendió a Electromagnetismo y yo me fui por experimentos impactantes. Lo que estoy haciendo es buscar motivar a los alumnos, que se motiven por la ciencia mostrándoles experimentos de verdad pero que sean sorprendentes. […]. Desarrollar experimentos para empezar la clase y que la clase gire en torno al experimento.

El foco está en la enseñanza, hay un problema general en educación, no se motiva en la ciencia. Nuestro foco es que llegue a Media y Básica pero el proyecto lo centramos en Superior con los profesores de Física en formación.

El entrevistado destaca que para los físicos en general, la gráfica aporta mucho en su disciplina, ya que ésta permite ver más que solo datos, y también ayudan a reconocer errores.

> F: Tú siempre tienes un modelo, algo está pasando y tú representas tus variables en un gráfico y ves mucho mejor las tendencias […] Ciertos tipos de gráficos te iluminan. […] Por ejemplo: Kepler a través de los gráficos se dio cuenta que los planetas giran alrededor del sol, eso fue un gran avance […]. Además, está el caso de Newton. […]. El gráfico es una tremenda herramienta para que entiendan lo que está pasando.

La entrevista permite reconocer que la gráfica no es sólo una representación de datos, o que para entenderla basta con una lectura simple. En palabras del profesor, la comunidad de físicos la usa de manera significativa, y en particular en la comunidad a la que pertenece la usan para formar profesores de la misma disciplina.

Clase observada: Laboratorio

El laboratorio cuenta con mesas redondas para promover la discusión entre los alumnos, con computadores como herramientas para graficar y obtener datos de un experimento. En ese ambiente se desarrollan experimentos; en lo que se refiere a Mecánica implementaron los computadores en red con cámara web para grabar videos y con éstos hacer análisis de movimiento.

La sesión duró 3 horas, con grupos de 4 o 5 personas (32 estudiantes en total), formándose 7 equipos, los cuales trabajaron con una guía proporcionada por el profesor. El tema era la Segunda Ley de Newton. La guía consta de cuatro actividades, con 3, 7, 5 y 6 preguntas respectivamente. Durante la sesión los grupos sólo alcanzaron a responder las dos primeras actividades, así que sólo nos enfocaremos a ellas en el presente reporte.

El profesor elabora una guía cuyo objetivo es entender cómo aplicar correctamente la Segunda Ley de Newton, para ello se analiza el movimiento de dos masas unidas por un cordel que pasa por una polea con poco roce. La guía es entregada a los estudiantes para que respondan de manera grupal, con el fin de generar discusiones entre ellos; el profesor interviene para generar un análisis más profundo de la gráfica: comparando datos con la gráfica obtenida, reflexionando en el fenómeno y el comportamiento de la gráfica, repensando en los posibles errores cometidos por los estudiantes y la gráfica del fenómeno.

La actividad 1 pide a) representar a través de un diagrama el experimento indicando las fuerzas que actúan sobre las masas. Además, deben proponer dos gráficas, b) la primera debe relacionar la coordenada y de la masa que baja en función del tiempo inicialmente con el sistema en reposo y c) la segunda gráfica con la coordenada v_y de la masa que baja en función del tiempo (Figura 1).

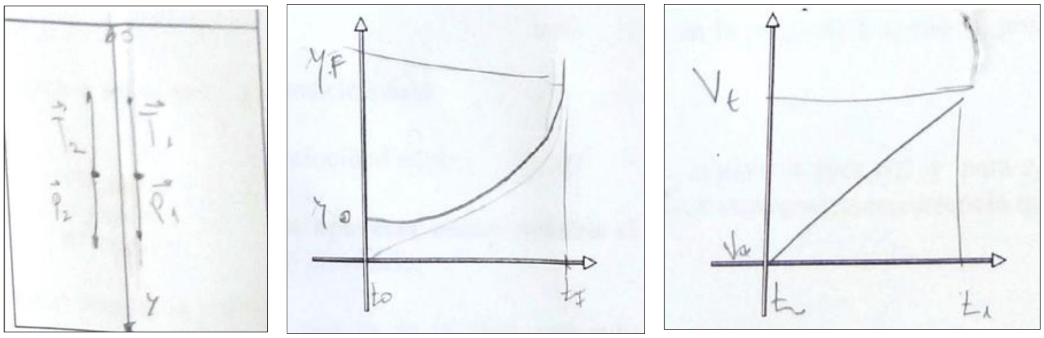


Figura 1. Diagrama y gráficas b y c propuestas

Para realizar la actividad 2, los estudiantes tienen que realizar y grabar el experimento, con ayuda de las cámaras acceden a un software donde se ingresan los datos y éste arroja una gráfica. El grupo tiene que predecir respecto a la aceleración de la masa y la aceleración de la gravedad, para posteriormente comparar con los datos que da el software (Figura 2). También las gráficas de la actividad anterior deben coincidir con las del software.

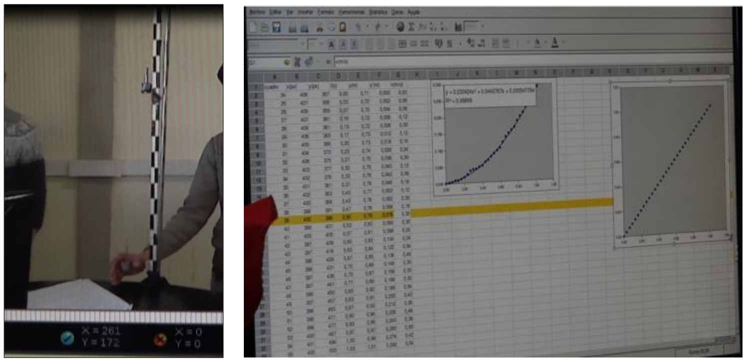


Figura 2. Grabando el experimento y usando el software

El desarrollo de las actividades 1 y 2, otorga un rol trascendente a la gráfica. Iniciar la actividad con el hecho de proponer una gráfica del fenómeno, no sólo ayuda a comprender cuales son las condiciones necesarias para que ocurra dicho fenómeno, además permite predecir. El profesor hace énfasis en el uso de la gráfica, tanto al inicio de la actividad como al momento de emplear el software, acentuando que la forma de ésta ayuda a reconocer errores ya sea en los datos o en la interpretación de éstos, la gráfica es un medio de análisis y argumentación. La mayoría de las gráficas propuestas (6 de 7 equipos), coinciden con las que ofrece el software.

Conclusiones

Algunas conclusiones obtenidas con los datos recopilados es que el caso estudiado deja en evidencia que en la disciplina de la Física el uso de la gráfica es fundamental, pues desempeña un rol predictivo, pero no es el único aporte a la disciplina.

Los datos obtenidos en la entrevista dan evidencia que existen dificultades relacionadas en los estudiantes con las variables al momento de graficar. Por otra parte, se reconoce que los estudiantes pueden comprender ciertos conceptos y, sin embargo, esto no implica que puedan relacionarlos con sus gráficas. Lo anterior coincide con lo mencionado por McDermott y otros (1987), Hale (2000) y Laverty y Kortemeyer (2012).

Otro aspecto relevante, es el énfasis que se da en la entrevista y en el laboratorio cuando se lleva a cabo un experimento, el cómo la gráfica ayuda a comprender de manera más clara el fenómeno estudiado. En el laboratorio se inicia con la elaboración de una gráfica que posteriormente se compara con la que arroja el software; dicha comparación muestra al profesor el grado de comprensión del fenómeno físico, pero al mismo tiempo ayuda a detectar errores en el análisis del mismo.

Las gráficas aportan a comprender fenómenos y dar sentido a distintos conceptos (matemáticos, físicos, entre otros); lo obtenido con el estudio de esta comunidad aporta elementos que evidencian la necesidad de resignificar el conocimiento matemático teniendo como objetivo rediseñar el discurso matemático escolar: las gráficas deben cambiar de estatus, deben ser atendidas con mayor profundidad en clase. Se reconoce que las gráficas en el aula reflejan los datos, pero no necesariamente la comprensión de ellos. Por lo tanto, al rediseñar el discurso matemático escolar se enfoca en que el conocimiento sea funcional y no utilitario.

Referencias Bibliográficas

Cordero, F. (2013). Matemáticas y el Cotidiano. Diplomado Desarrollo de estrategias de aprendizaje para las matemáticas del bachillerato: la transversalidad curricular de las matemáticas Módulo III. Documento interno. Cinvestav –IPN.

Cordero, F. (2016) Modelación, funcionalidad y multidisciplinareidad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz (Eds.). *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa*. Barcelona. España: Editorial Gedisa.

Cordero, F.; Gómez, K.; Silva-Crocci, H.; Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Barcelona: Editorial Gedisa.

Gómez, K. y Cordero, F. (2013). La institucionalidad, funcionalidad e historicidad. Elementos para el rediseño del discurso matemático escolar. En R. Flores (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26*, 1323-1330, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Hale, P. (2000). Kinematics and Graphs: Students' Difficulties and CBLs. *Connecting Research to Teaching*, *93*(5), 414–418.

Laverty, J., & Kortemeyer, G. (2012). Function plot response: A scalable system for teaching kinematics graphs. *American Journal of Physics*, *80*(8), 724-733.

McDemortt, L., Rosenquits, M., & van Zee, E. (1987). Student dificultties in conecting graphs and physics: Examples for kinematic. *American Journal of Physics*, *55*, 503-513.Mineduc (2012).

Bases Curriculares Educación Básica. Chile, Santiago: ministerio de educación.

Mineduc (2013). Bases Curriculares 7º básico a 2º medio. Chile, Santiago: ministerio de educación.

Morales, A.; Mena, J.; Vera, F.; Rivera, R. (2012). El rol del tiempo en un proceso de modelación utilizando videos de experimentos físicos. *Revista Enseñanza de las Ciencias 30*(3), 237-256.

Stake, R. (2007). *The art of case study research*. Thousand Oaks: Sage Publications.

LA SOCIALIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DESDE UNA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE EN INGENIERÍA

Irene Pérez-Oxté, Francisco Cordero Osorio
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. (México)
iperezo@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx

RESUMEN: El reporte de investigación tiene por objetivo evidenciar el proceso de socialización del conocimiento matemático cuando se puso en juego una situación de aprendizaje. La pluralidad epistemológica y la transversalidad del conocimiento matemático fueron las características principales de la situación experimentada con una comunidad de ingenieros químicos industriales en formación. Dicho estudio, reconoce la Opacidad de los usos del conocimiento matemático y por ende se tuvo la finalidad de transparentar lo matemático a la luz de una situación de aprendizaje.

Palabras clave: socialización del conocimiento matemático, aprendizaje, ingeniería

ABSTRACT: This research report attempts to show the spreading process of mathematical knowledge through a learning situation. The epistemological plurality and the transverse system of the mathematical knowledge were the main features of the experiment carried out with a group of engineering students majoring in Industrial Chemistry. Such study recognizes the opaqueness of mathematical knowledge uses; therefore this work is intended to provide clearness to mathematics in the light of a learning situation.

Key words: the spreading of mathematical knowledge, learning, engineering

Introducción

El presente reporte de investigación se enmarca en una problemática fundamental, el discurso Matemático Escolar *dME*, como un sistema de razón cuyas características tratan con conocimientos utilitarios y acabados (Soto y Cantoral, 2014). Así, se reconoce que ese sistema, que vive en una matemática escolar, no esclarece una relación funcional con problemáticas cotidianas de estudiantes, docentes o con aquellos involucrados en el aprendizaje de las matemáticas.

En particular, el *dME* es generador de una imposición de significados y una opacidad de la pluralidad epistemológica en una Matemática Escolar (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015). Mucha de las veces, puede ser observable, cuando los actores en un proceso de aprendizaje, en poca medida cuestionan aquello que aprenden, o cuando no resulta satisfactorio percibir a los conocimientos de la matemática escolar como funcionales para su vida diaria.

Ante tal panorama, diversas posturas como Etnomatemáticas, Matemáticas realistas, Everyday Mathematics, Matemáticas cotidianas, Matemáticas en la vida diaria pretenden impactar en el aula a partir de reconocer el "cotidiano" (Yerbes, 2016), es decir, buscan favorecer una relación entre el conocimiento matemático del aula y situaciones de la vida cotidiana.

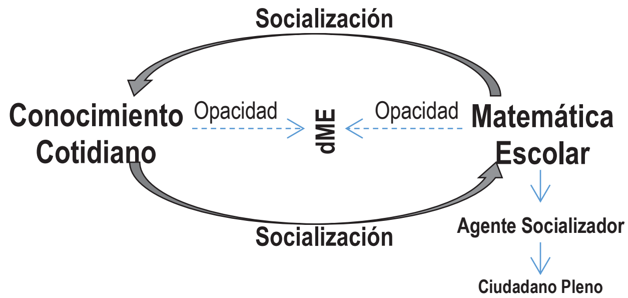
Precisamente, la investigación que se reporta también busca permanentemente la construcción de relaciones entre ambos conocimientos: el de la matemática escolar y el cotidiano de quien aprende, favoreciendo una pluralidad epistemológica y por ende un conocimiento funcional.

Así, se exhiben aquellos elementos que permiten construir relaciones recíprocas entre ambos conocimientos en una situación específica de ingenieros químicos industriales en formación y de esta manera se robustece una categoría de conocimiento transversal.

La opacidad y la socialización del conocimiento matemático

Este trabajo está centrado en la propuesta de la socialización del conocimiento matemático que emerge cuando se desea contrarrestar el fenómeno de la opacidad de los usos del conocimiento matemático. A continuación, se describe dicho fenómeno que da sentido a la propuesta de uso del modelo de socialización.

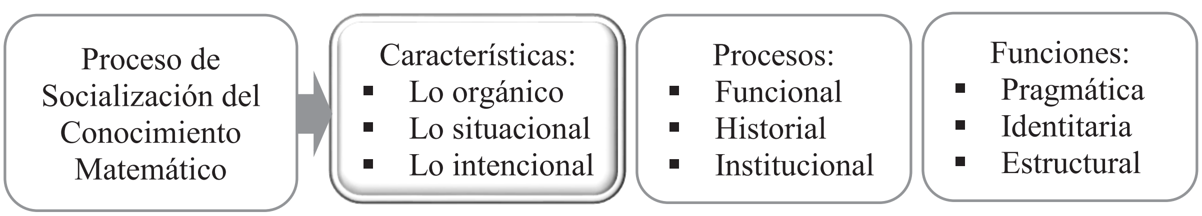
Dentro de un programa socioepistemológico, con énfasis en los usos del conocimiento matemático, se reconocen dos conocimientos que tienen distinta naturaleza: conocimiento del cotidiano y la matemática escolar. Ambos conocimientos, muchas de las veces, no guardan una relación recíproca, olvidando los usos del conocimiento matemático. El esquema 1, dibuja la no relación entre los dos conocimientos, es decir, la negación de una pluralidad epistemológica o lo que se le ha llamado *Opacidad.*



Esquema 1. El fenómeno de opacidad y la socialización del conocimiento matemático (Cordero, et al, 2015, p. 95).

El modelo planteado en Cordero y otros (2015) pone de manifiesto, la pertinencia de rescatar el conocimiento funcional de los usos, para su incorporación a la Matemática Escolar, a través de un proceso de socialización del conocimiento matemático. Esto quiere decir, que se concibe *que el proceso de socialización provoque un diálogo recíproco entre la pluralidad epistemológica del cotidiano y la epistemología que norma el dME* (p. 102).

El modelo de socialización del conocimiento que plantea Gómez (2015) se compone de varios elementos: las características del conocimiento, sus procesos y sus funciones (Ver esquema 2). Advierte que, sin el conocimiento, el proceso que propone no podrá ser entendido cabalmente, dado que no se está planteando una idea de socialización centrada en el interaccionismo entre individuos, sino en una relación comunidad –situación específica del conocimiento.



Esquema 2. Elementos del proceso de socialización (Gómez, 2015).

De acuerdo al modelo de socialización del conocimiento matemático, donde se busca permanentemente hacer visible la funcionalidad del conocimiento (Gómez, 2015; Cordero, et al, 2015) se considera que se está produciendo un proceso de socialización cuando se reconoce un conocimiento con ciertas características:

- Lo orgánico: en términos de la funcionalidad del conocimiento en una comunidad.
- Lo situacional: pone de relieve el carácter situado del conocimiento, expresado en las resignificaciones de los usos.
- Lo intencional: plantea la necesidad de preservar el conocimiento a través de la identificación de las categorías del conocimiento matemático (Cordero, 2008) que pongan en relación las situaciones de variación, transformación, aproximación o selección.

Dichas características del conocimiento resultan ser la expresión de un conocimiento funcional que trasparenta lo que el *dME* ha opacado en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

Una situación de aprendizaje en ingeniería

A partir de la problemática fundamental descrita en este documento, se construyó una situación de aprendizaje (SA) que se caracterizó por tres elementos: la transversalidad del conocimiento, la pluralidad epistemológica y la situación específica de una comunidad. En el sentido de Cordero (2016) es una expresión de la tríada: Pluralidad, Transversalidad y *el otro.*

Así, la transversalidad se reconoce en la acción de recuperar los usos de la gráfica de ingenieros químicos industriales cuando diagnostican transformadores eléctricos en el escenario del trabajo, reportado en Torres (2013). Desde el cual se construyó de una epistemología intencional que fue experimentada en una comunidad de ingenieros químicos industriales en formación.

La situación de aprendizaje se sustenta, en tanto se reconoce que el conocimiento matemático puesto en juego tiene características opuestas a un conocimiento hegemónico y utilitario, en ese sentido, se dice que la SA atiende a una pluralidad epistemológica.

En el esquema 3, se evidencia lo *orgánico* del conocimiento como la expresión del uso de las gráficas en tres momentos (Pérez-Oxté y Cordero, 2016, p.28).

Momento 1 Gráficas con variaciones similares	**Momento 2** Comportamientos con tendencias	**Momento 3** Comportamientos ideales, normales o extraordinarios

Esquema 3. Esquema 3. Usos de la gráfica.

Así, se favorecían discusiones centradas en situación de variación, de transformación o de optimización.

Lo *situacional* del conocimiento, estuvo enmarcado en la predicción del estado de un transformador eléctrico; situación compuesta de funcionamientos y formas que permitieron mirar la resignificación de usos de la gráfica (Ver tabla 1).

Tabla 1. Funcionamiento y forma asociado a un momento del uso de la gráfica

Situación específica. Predecir el estado de un transformador eléctrico	
Uso de la gráfica	
Funcionamiento	*Forma*
Predecir comportamientos estables	Comparar las concentraciones de los gases del aceite del transformador eléctrico

Lo *intencional* del conocimiento, se formuló a partir de considerar elementos de construcción (Cordero, 2008): cuáles son las significaciones en la situación, cuál es el procedimiento y cuál es el instrumento que en conjunto permiten generar una argumentación. Así se tomaron en cuenta situaciones de variación, transformación y selección en una situación específica de ingenieros químicos industriales en formación (Pérez-Oxté y Cordero, 2016).

Ingenieros químicos industriales en formación

A continuación, se ejemplifican aspectos del proceso de socialización del conocimiento en un episodio de la experimentación de la situación de aprendizaje. De acuerdo a los intereses del trabajo, la elección del episodio se justifica en un estudio de casos, debido a que se deseaba analizar las relaciones entre la *pluralidad epistemológica* y la *epistemología del dME* en las respuestas de la comunidad.

Una actividad presentada a la comunidad de ingenieros en formación consistió en describir la variación de las concentraciones del hidrógeno y etileno. Así como las relaciones que pudieran darse entre ellos. Esto con la finalidad de sacar conclusiones sobre el estado del transformador eléctrico.

Se les presentó la imagen 1, que representa datos reales de las concentraciones de los gases hidrógeno y etileno de un transformador eléctrico.

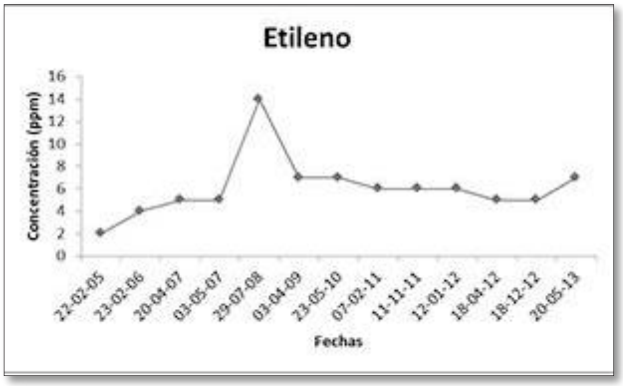


Imagen 1. Modelo gráfico, Tiempo/partes por millón del gas hidrógeno y etileno.

La discusión de la actividad estuvo centrada en la presencia de variaciones de las concentraciones de los gases y; las condiciones en las que están presentes, lo cual sirvió para caracterizar comportamientos normales.

La transcripción 1 nos da pautas para mirar una justificación funcional del comportamiento del etileno. Se hace alusión a características del modelo gráfico como el aumento o decrecimiento en un intervalo de tiempo. Las variaciones en la concentración permitieron caracterizar que se trata de un comportamiento normal, en tanto que se reconocen desgastes naturales.

"Se puede observar que desde el día 22-02-05 hasta 03-05-07 tuvo un leve aumento en la concentración del gas etileno (de 2 a 5 ppm) después de esta fecha se observa abrupto cambio en las concentraciones, reflejada en un aumento considerable de la misma y un decremento posterior en un intento de 2 años, la causa probable pudo haber sido una falla (por un punto caliente) posterior a esta fecha, 03-04-07 no hubo ningún cambio brusco en las ppm y se mantuvieron relativamente normales hasta la fecha " (IQIF)

Transcripción 1

En la transcripción 2, se hace referencia a un comportamiento idealizado versus un comportamiento normal, es decir, se toma en cuenta que los datos son representados por concentraciones reales de un transformador. Se evidencian elementos de la epistemología de la matemática escolar, en tanto que los datos reales pudieran ser representados por modelos lineales para predecir posibles fallas en el transformador eléctrico.

En cuanto al inconveniente de los puntos calientes asociados al etileno, de manera general podemos hablar de un comportamiento constante con tendencia ligera el crecimiento.

Transcripción 2

De esta manera, se reconoce a una situación de aprendizaje, no como una actividad o serie de problemas a resolver; sino un marco de referencia que se caracteriza por exhibir una transversalidad del conocimiento matemático.

Reflexiones y prospectivas

La identificación de las relaciones de la pluralidad epistemológica y la epistemología de la matemática escolar en las respuestas de los ingenieros en formación, tiene justificación en la distinción de un conocimiento acabado y un conocimiento funcional. Por ejemplo, las respuestas presentadas no están centradas en el objeto matemático como puede ser la derivada. Pero sí tiene justificación en lo funcional, al predecir comportamientos normales en el diagnóstico de un transformador eléctrico.

Algo que distingue este trabajo es la transversalidad del conocimiento, dado que se recuperan los usos del conocimiento de ingenieros en el escenario del trabajo y éstos son incluidos en un escenario escolar. Esto permitió cuestionarnos sobre el conocimiento que se presume es transversal a los niveles educativos en México, es decir, el conocimiento matemático que se adquiere en el nivel básico de una u otra manera tiene un impacto en el nivel medio superior y superior. Entonces la cuestión es, de qué naturaleza es ese conocimiento matemático. El interés se posicionó en otorgar un ejemplo de dicha transversalidad que contrarreste la problemática fundamental sobre la opacidad de los usos del conocimiento.

Así, se está construyendo y justificando que una herramienta para mirar la transversalidad del conocimiento matemático hacia otro nivel educativo es el modelo de socialización del conocimiento matemático. Siendo las situaciones específicas las que nos permitan recolectar los datos a través de aspectos de estudios de casos.

Finalmente, las reflexiones conllevan pensamientos sobre el Impacto educativo, en el sentido de que el modelo de socialización es un factor que coadyuvará a la alianza de calidad docente de matemáticas (Cordero, 2016). Siendo reflexionada por varios programas de investigación que contribuyen con diferentes estudios hacia el desarrollo profesional docente.

Específicamente, se reconoce, que el trabajo realizado, contribuye a través de construir marcos de referencia que expresen la transversalidad del conocimiento, en este caso, la expresión de una categoría de usos de la gráfica que se resignifica a la luz de diferentes niveles educativos (Educación media superior o Educación básica) dejando una pregunta futura ¿cómo será esa resignificación de usos?

Referencias bibliográficas

Cordero, C. Gómez, K. Silva-Crocci, H. Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. México: Gedisa.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama & A. Romo (Ed.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 285-309). México, D. F.: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Cordero, F. (2016). Profesionalización docente. Funcionalidad de la Matemática Educativa. Programa permanente. Seminario de Doctorado.

Gómez, K. (2015). *El fenómeno de opacidad y la socialización del conocimiento. Lo matemático de la ingeniería agrónoma*. Tesis de doctorado no publicada. CINVESTAV-IPN. México. D.F.

Pérez-Oxté, I. y Cordero, F. (2016). Una epistemología basada en la transversalidad de los Usos de la gráfica de una comunidad de ingenieros Químicos industriales. En F. Rodríguez, R. Rodríguez y L. Sosa (Eds.). *Investigación e Innovación en Matemática Educativa 1 (1),* (pp. 24-30). Oaxaca, México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso Matemático Escolar y Exclusión. Una Visión Socioepistemológica. *Boletim de Educação Matemática*, 28 pp.1525-1544.

Torres, L. (2013). *Usos del Conocimiento Matemático. La Simultaneidad y Estabilidad en una Comunidad de Conocimiento de la Ingeniería Química en un Escenario de Trabajo*. Tesis de Maestría no publicada. CINVESTAV-IPN. México, D.F.

Yerbes, J. (2016). *El rol de los constructos Cotidiano y Matemática Funcional en la Matemática Educativa: sus diversidades ontológicas y epistemológicas*. Tesis de maestría no publicada. CINVESTAV-IPN, México, D.F.

LA MATEMÁTICA FUNCIONAL EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA. UNA EXPERIENCIA DE PROFESIONALIZACIÓN DOCENTE

Irene Pérez-Oxté, Diana Medina-Lara, Cristina Mota, Francisco Cordero
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. (México)
iperezo@cinvestav.mx, diana.medina@cinvestav.mx, cristina.mota@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx

RESUMEN: Dentro de un programa socioepistemológico con énfasis en los usos del conocimiento matemático, se implementó un taller centrado en la visión de una matemática funcional para una matemática escolar. Los participantes, docentes de educación primaria, en el Estado de México, pusieron en juego argumentaciones como el comportamiento tendencial y la optimización, a partir de discutir situaciones de transformación y selección. En este reporte se describe la experiencia del taller y las reflexiones que los docentes externaron al resolver algunas actividades y de cómo visualizaron adaptarlas a sus realidades educativas.

Palabras clave: docente, pluralidad epistemológica, matemática funcional

ABSTRACT: Within a socio- epistemological program focused on the uses of mathematical knowledge, a workshop centered on the view of functional mathematics for school mathematics was implemented. The participants, teachers of primary education, in the State of Mexico, after discussing situations of transformation and selection, put into practice arguments such as tendency behavior and optimization. This report describes the workshop experiences as well as the reflections teachers expressed when solving some activities and how they visualized adapting them to their educational realities.

Key words: Teacher, Epistemological Plurality, Functional Mathematics

Planteamiento

El presente reporte da cuenta de las experiencias de aprendizaje con docentes, del Estado de México, de nivel primaria cuando se enfrentaron a un taller denominado *Una matemática funcional en la educación primaria*.

La matemática escolar es un hecho social ineludible, por lo que importa estudiar su función; el cual se hace a través de lo que se ha llamado, el discurso Matemático Escolar *dME* (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015, p.16). Con esto, se pretendió socializar algunas actividades que se caracterizaron por una matemática diferente a la escuela: en el sentido que dichas actividades no pretendían una solución por medio de algoritmos matemáticos, sino por el contrario, actividades que llevaban a los docentes a ver más allá de las operaciones, a reflexionar mancomunadamente, de tal manera de crear un ambiente de diálogo para trastocar y transformar el objeto matemático permeado por el dME.

El dME se reconoce que es generado por los programas, currículos y modelos educativos, basado en una epistemología dominante, lo que conlleva opacar y excluir los usos del conocimiento matemático de la gente en su cotidiano. El dME solo favorece los algoritmos matemáticos imponiendo procedimientos, argumentaciones y significados; esto trae a consecuencia los fenómenos de exclusión y de opacidad, a saber. El primero consiste en la auto exclusión de la Construcción Social del Conocimiento Matemático CSCM y el segundo consiste en la negación de la pluralidad epistemológica. Pero además, el dME por su carácter nocivo y por la legitimidad de la cual goza en el sistema educativo genera un fenómeno más: la adherencia, en tanto que generación tras generación de docentes en matemáticas se adhieren al dME, es decir no se atreven a trastocarlo (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015).

Es así, que la intención del taller fue construir un ambiente de diálogo en el que los docentes trastocaran y transformaran la matemática escolar a partir de tres ejes: sentido numérico y pensamiento algebraico; forma espacio y medida, y manejo de la información. Reflexionando, cuestionando y discutiendo los contenidos matemáticos, así como los fenómenos de Adherencia, Exclusión y Opacidad, que el propio dME produce y que comúnmente se puede ver reflejado en las dificultades de enseñanza y aprendizaje en la escuela.

La propuesta abordada para el diálogo, estuvo basada en los usos del conocimiento matemático, que sin lugar a duda, serán los que sustentan a una matemática funcional. Soportada por el reconocimiento de una pluralidad epistemológica y una transversalidad de los usos del conocimiento matemático (Cordero, 2016).

El propósito de construir una matemática funcional para la matemática escolar, es para alcanzar la consistencia con la función del conocimiento matemático en la sociedad. Dicho conocimiento deberá ser transversal a los diferentes niveles educativos. Así, se cree pertinente la fijación de dicha funcionalidad en la educación primaria. A fin de poner en juego categorías de situaciones con énfasis en argumentaciones de comportamiento tendencial, optimización, predicción, entre otras.

Una pregunta que resultó de la experiencia de llevar a cabo el taller fue: ¿En qué medida el docente de primaria se muestra sensible a la pluralidad del conocimiento, a mirar su funcionalidad y su transversalidad a partir de las actividades planteadas? Sin lugar a duda, la respuesta no es nada trivial, pero valoramos nuestro primer acercamiento a esta comunidad de conocimiento, la cual enriqueció nuestro quehacer como investigadores y de igual manera dejó reflexiones como grupo de investigación en torno a la importancia de un trabajo conjunto entre investigadores y docentes.

Desarrollo

Para la realización del taller se tuvo como eje central la discusión y reflexión de la matemática funcional para una matemática escolar. Cabe mencionar que reconocer a la matemática funcional como el núcleo base, implica admitir la pluralidad de usos del conocimiento matemático en la escuela y sobre todo fuera de ella. Si bien, el conocimiento no es único, es posible admitir en la vida diaria de un estudiante conocimientos que se construyen como parte de su entorno. En ese sentido la matemática más que una ciencia que se enseña en la escuela es un asunto de su función social (Cordero, Pérez-Oxté, Mendoza, Yerbes, Medina-Lara, Mota, Pérez-López y Opazo, 2016; Cordero et al, 2015).

Convino resaltar la importancia de tener en cuenta que los conocimientos de la matemática escolar en la primaria, son conocimientos que trascienden a los diferentes niveles educativos. Por ello, importó cuestionar qué conocimiento será enseñado y su funcionalidad.

Para el caso del uso de las gráficas en los distintos niveles educativos, a manera de ejemplo se pudieron mostrar actividades de la matemática escolar como las que se muestran en Cordero y Flores (2007), en primaria las tareas se caracterizan por reproducir una figura o un mosaico en una cuadrícula, en secundaria las tareas se caracterizan por situaciones cuya función es de la forma $xy = k$. Se vacían los datos que se obtienen de estos en tablas, para después graficar los puntos y unirlos con curvas contiguas, mostrando en ambos casos un comportamiento similar de las curvas obtenidas.

La matemática funcional que se desarrolló en el taller, adquirió sentido al momento de trastocar y transformar los conocimientos matemáticos a enseñar, es decir, al preguntarse por los usos y su funcionalidad. Estos aspectos, son opacados por el dME y como parte del taller se procuró hacer explícitos a partir de categorías de conocimiento. Dichas categorías se caracterizan por elementos de construcción: las significaciones, los procedimientos y el instrumento que favorecen argumentaciones (Cordero, 2008), bajo situaciones como por ejemplo, de variación, transformación, aproximación o selección.

Por ejemplo, en el eje de manejo de la información, las situaciones de selección y de transformación (ver Tabla 1) son una expresión de la funcionalidad que el dME ha opacado, por lo que el énfasis estuvo centrado en las argumentaciones de la optimización y del comportamiento tendencial en contenidos de educación primaria, como las operaciones con números naturales o las medidas de tendencia central.

Tabla 1. Elementos discutidos en el taller “Una matemática funcional en la educación primaria”.

Elementos de construcción	Situación de selección	Situación de transformación
Significaciones	Patrones de adaptación	Patrones de comportamientos gráficos
Procedimientos	Distinción de cualidades	Variación de la constante
Instrumento	Lo estable	Instrucción que organiza comportamientos
Argumentación	Optimización	Comportamiento tendencial

La situación de selección se presentó en diversas actividades relacionadas con el eje de manejo de la información y se caracterizó por distinguir cualidades entre dos o más gráficas o figuras. Esto con la finalidad de seleccionar la gráfica, la figura o el dato “más óptimo”.

La situación de transformación se evidencia en actividades donde se variaban parámetros, por ejemplo, cuestionarse sobre qué le pasa a la recta que representa a la media aritmética, si le agregamos más datos a la muestra.

Para la realización del taller se contó con dos actores: Instructores Matemáticos Educativos y Profesores de educación básica, así como dos momentos, los cuales se caracterizaron de la siguiente manera:

Tabla 2. Momentos en los que se dividió el taller

Momento 1	***Diálogo de una problemática fundamental.*** **Diálogo que se caracterizó por evidenciar la complejidad de una problemática fundamental en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas: El discurso Matemático Escolar. Se dejó ver que existen fenómenos asociados a este discurso que muchas veces no permiten trastocar y transformar la matemática que se enseña.**
Momento 2	*Reflexión de una matemática funcional a través de situaciones específicas.* El eje de manejo de la información se caracterizó por situaciones que involucran fenómenos variacionales y estocásticos, donde el énfasis está en recolectar información, organizarla, analizarla y presentarla mediante algún tipo de registro. Un aspecto clave en este eje es la intencionalidad de tomar decisiones con base al análisis de datos.

Se contó con la participación de ocho instructores y seis grupos de trabajo (tres grupos en la Ciudad de México y tres grupos en Toluca) con un total de 150 docentes a nivel primaria.

Resultados y reflexiones

Las reflexiones y comentarios que externaron los profesores, dan cuenta de la pertinencia de establecer un diálogo continuo. Sus respuestas y/o comentarios estuvieron centradas en la necesidad de buscar la funcionalidad del conocimiento matemático en su práctica educativa. Sobre todo, por el nivel educativo en el que se desempeñan profesionalmente.

Las caracterizaciones se realizaron a partir de las reflexiones y argumentaciones externadas de las situaciones planteadas, de acuerdo a los momentos antes mencionados.

- *Reconocimiento de una pluralidad en los usos del conocimiento matemático*

En el momento uno, se evidenció un diálogo, donde los profesores de educación básica se identificaron con la problemática general propuesta. Sus comentarios estaban enfocados a las experiencias que día a día ocurren con sus estudiantes, no externaban con tecnicismo de la disciplina de la Matemática Educativa pero sí dimensionaban la complejidad de la problemática.

Se identificó que los docentes asumían un papel relevante para construir aprendizajes en sus estudiantes, esto lo asociaban a su propia preparación. En el siguiente extracto de un docente, se deja ver una preocupación aunado a las diferentes estrategias que pueden darse en un aula de clases, ante una situación específica:

“La socialización de procedimientos para poder llegar a un determinado resultado. Donde los niños tienen que comparar diferentes procedimientos, […] cuál de ellos es más rápida o más práctico. Ahí ocurre una enseñanza aprendizaje incluso del docente mismo” Docente de educación primaria del estado de México.

Para poder discutir ideas sobre una pluralidad de usos, se presentaron actividades como la retomada del libro de Farfán sobre “El problema de Rubén”, el objetivo, estaba centrado en predecir las personas que serán atendidas antes que Rubén, si Rubén se adelanta dos lugares, cuando el taquero atiende a una persona, y en el caso de que solo quede una persona delante de él, Rubén se adelanta para quedar al frente de la fila y poder ser atendido (Farfán, 2012).

Imagen 1. Momento 1 Diálogo sobre una problemática fundamental, el discurso Matemático Escolar

Una posible estrategia es establecer la relación existente entre la cantidad de personas antes de Rubén en la fila y la cantidad de personas atendidas antes que Rubén. Para el establecimiento de esta relación aparecieron herramientas matemáticas que dieron explicación del patrón, como los múltiplos de 3, la división, aproximación, entre otras. Un punto que estuvo en discusión fue la funcionalidad de la multiplicación y división, en este caso como “herramientas” que optimizan y contribuyen a la argumentación de la predicción.

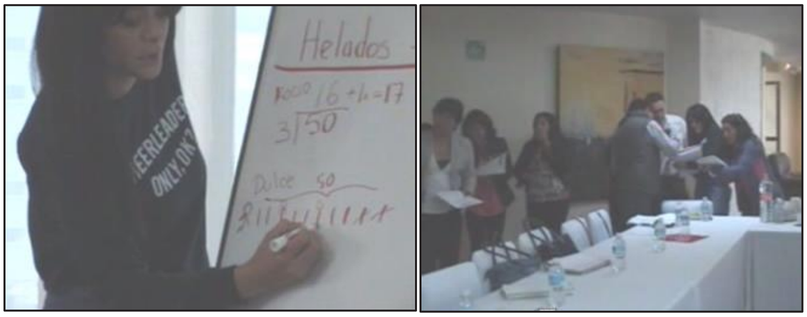


Imagen 2. Docentes socializando su estrategia. El problema de Rubén.

- *Las argumentaciones y justificaciones funcionales. Una matemática Funcional*

Un ejemplo de las actividades de reflexión con énfasis en una matemática funcional, se presenta en la Imagen 3. Dicha actividad, promovió la resignificación de la media aritmética en un ambiente gráfico.

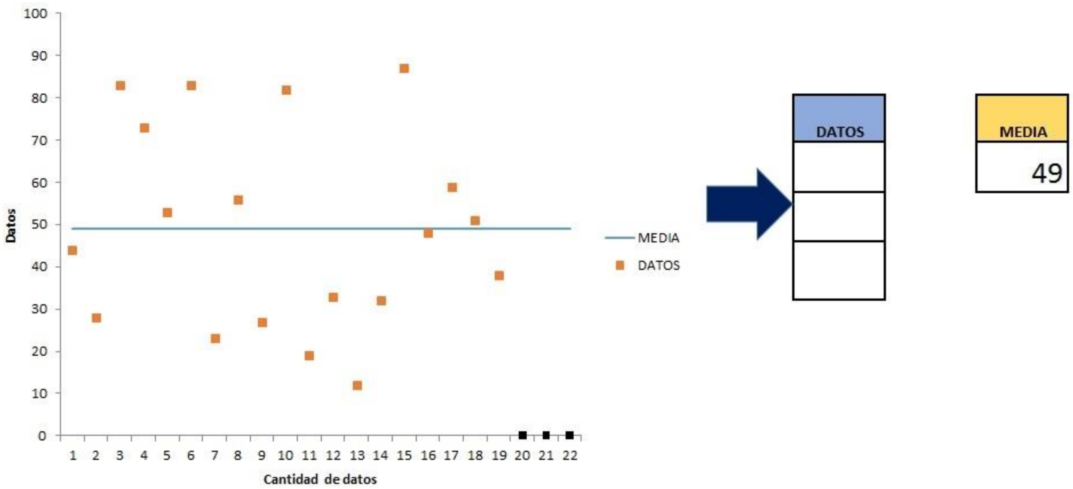


Imagen 3. Actividad de reflexión. Argumentación del comportamiento tendencial

El objetivo, estuvo centrado en reflexionar dos aspectos:

- Describir cómo se afecta la media de una muestra, cuando se agregan más datos
- Proponer datos para que la media se conserve

Se evidenció el fenómeno de adherencia al dME, al imponerse el cálculo de la media aritmética y el opacamiento del significado gráfico.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Dar sentido a la expresión anterior en un ambiente gráfico, significó reconocer la idea de distancia, de cada dato a un recta horizontal que coincidía con el valor de la media.

En la Imagen 4, se presentan las reproducciones de los docentes al proponer cuatro datos cuyos valores sean mayores a la media y un dato menor a ella, de tal suerte que la media (49) se conserve.

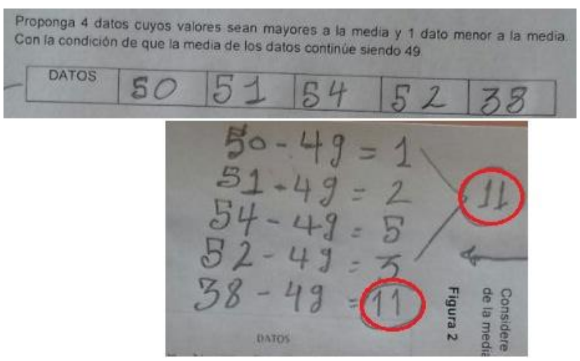


Imagen 4. Justificar datos a partir de mirar las distancias de cada dato a la media

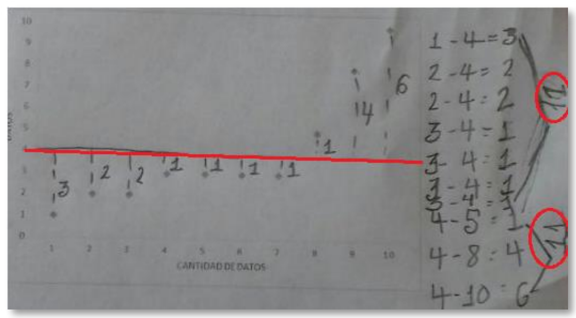


Imagen 5. Determinación del valor de la media de acuerdo a la estrategia de la construcción de una recta horizontal

La Imagen 5, evidencia la construcción de una recta horizontal (valor de la media), desde donde se pueden observar que la suma de las distancias (de cada dato a la media aritmética) por debajo de la recta es igual a la suma de las distancias por arriba de ella.

La experiencia en dicho taller, dejó ver la realidad de los docentes de educación primaria, la necesidad de favorecer una matemática funcional que pueda resignificarse a la luz de cada uno de ellos. Para ello, los docentes fueron sensibles a la idea de que las actividades propuestas no significan algo estático, sino ejemplos de cómo trastocar la matemática que enseñan todos los días.

Una Matemática funcional para una Matemática Escolar, significó cuestionarse sobre cuáles son los usos del conocimiento matemático de los estudiantes de educación primaria.

Referencias bibliográficas

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama & A. Romo (Ed.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 285-309). México, D. F.: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Cordero, F. (2016). Profesionalización docente. Funcionalidad de la Matemática Educativa. Programa permanente. Seminario de Doctorado.

Cordero, F. y Flores, F. (2007). El uso de la gráfica en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(1), 7-38.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar. La adherencia, la exclusión y la opacidad*. España: Gedisa.

Cordero, F., Pérez-Oxté, I., Mendoza, E.J., Yerbes, J., Medina-Lara, D., Mota, C., Pérez-López, R. y Opazo, C. (2016). *Taller: Una matemática funcional en la educación primaria.* British Council, México.

Farfán, R. (2012). *El desarrollo del pensamiento matemático y la actividad docente.* México: Gedisa.

UNA CARACTERIZACIÓN DEL BINOMIO FUNCIONAMIENTO Y FORMA DEL USO DE LAS GRÁFICAS Y SU RESIGNIFICACIÓN CON PROFESORES DE BACHILLERATO

Claudia Leticia Cen Che
Instituto Tecnológico Superior de Calkiní en el Estado de Campeche, ITESCAM. (México)
claudia.cen.che@gmail.com

RESUMEN: El trabajo presenta los resultados de investigación sobre el uso de las gráficas de las funciones caracterizadas por profesores del Nivel Medio Superior. Ésta fue realizada a través de una propuesta de actividades y una categoría de conocimiento matemático desde la Socioepistemología. Tal propuesta, fue con base al comportamiento tendencial de las funciones, que pone en acción el conocimiento matemático que se ve reflejado en las argumentaciones de los profesores acerca de los usos de la gráfica a través de la unidad de análisis funcionamiento y forma. El análisis de la evidencia muestra una resignificación del uso de la gráfica.

Palabras clave: funcionamiento, forma, resignificación, uso

ABSTRACT: This work shows the results of an investigation about the use of function graphs characterized by senior high school teachers. The research was carried out by means of proposal of tasks and a category of mathematical knowledge, from the Social Epistemology. Such proposal was based on the tendencies of the function behavior, which activates the mathematical knowledge that is reflected in the teachers' explanations about the graph uses, by linking analysis, functioning and form . The evidence analysis shows a new significance of the graph use.

Key words: functioning, form, new significance, use

Introducción

El estudio del uso de la gráfica parte de considerar que ésta es una herramienta que promueve el uso del conocimiento matemático, en donde la función matemática juega un papel fundamental. Por otra parte, se reconoce la importancia de la función en el sistema didáctico y la poca o nula atención que tienen hacia su representación gráfica y quizás a la inclinación a no separarlas y a ver a una como el "paso final", en el caso de la gráfica. Así pues en un estudio realizado en el bachillerato tecnológico mexicano en 2006 se dio a conocer que existen al menos seis usos de las gráficas de las funciones, a saber: *ubicación de puntos, comportamiento geométrico, análisis de la curva, cálculo de área, cálculo de volumen y análisis de información*. Sin embargo, esos usos no son del dominio de los profesores de matemáticas al seguir un programa de estudios lineal, para apreciarlos es necesario verlos a un nivel macro del bachillerato.

Ejemplo de los usos mencionados son los que se presentan en el escenario de la recta (figura 1) en donde el discurso matemático escolar trata con la recta en donde el uso de la gráfica concierne a la ubicación de puntos para el trazado de la recta a través de la forma tabular. Una vez que se reconoce cómo es la ecuación y la forma de la recta, este uso evoluciona para dar lugar al comportamiento geométrico cuyo funcionamiento es la asociación gráfica-expresión algebraica, y se presenta mediante formas de la transformación de funciones (traslación horizontal y vertical, estiramientos y reflexión). Con ello de alguna manera se infiere la posición de la recta, que posteriormente se usa para calcular el área y el volumen; el funcionamiento de la gráfica radica en definir el área que genera la superficie del área a calcular, y sus formas surgen a través de la integración. El desarrollo del uso consiste en distribuir puntos, luego en establecer comportamiento geométricos y finalmente calcular superficies (Cordero, Cen y Suárez, 2010). Otros escenarios son los de la curva sinusoidal y la parábola que son una muestra de cómo se desarrolla el uso de la gráfica en el sistema escolar.

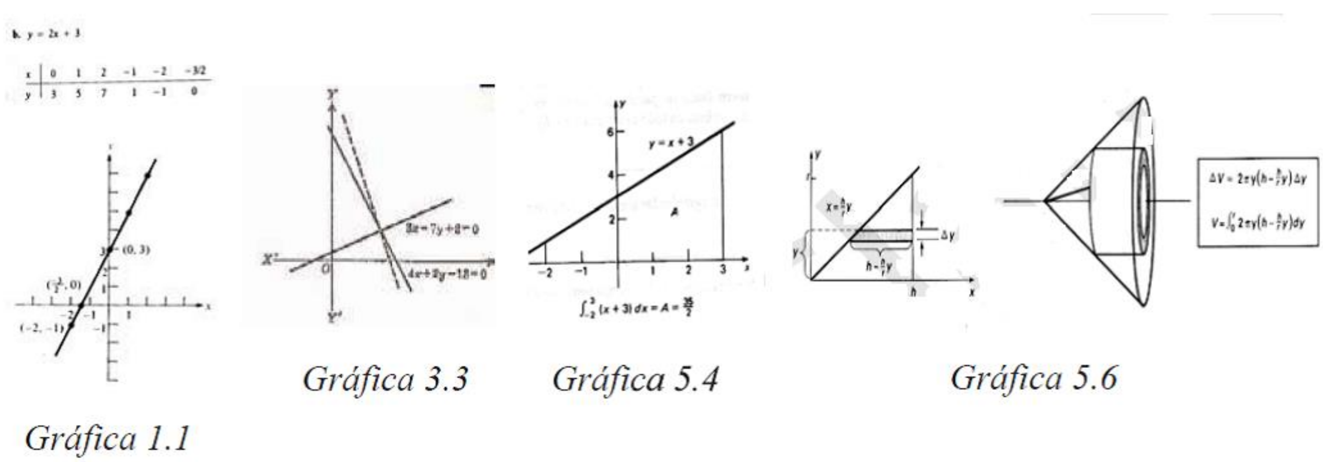


Figura 1. Escenario de la recta (Cordero et al., 2010, p. 201)

Al haber identificado los usos entonces surgieron las preguntas que conducen a este reporte de investigación, *¿los usos de las gráficas de las funciones provocan un desarrollo del conocimiento?, ¿cómo suceden los usos de las gráficas cuando se proponen en alguna actividad matemática?* El propósito es dar evidencia de la importancia de habilitar categorías de conocimiento en el sistema didáctico y la potencialidad que adquiere la gráfica cuando se prescinde intencionalmente de la expresión matemática.

El estudio está sustentado en el marco socioepistemológico bajo su premisa principal: *la práctica social es la que regula y norma la actividad de los individuos y genera conocimiento matemático en instituciones* pues es ahí en donde las acciones tendrán significados propios e intención. Por otra parte también se parte de la premisa *la gráficación es una práctica social que genera conocimiento matemático del cálculo* (Cordero, 2008, p. 293). Las posturas anteriores han permitido desarrollar el constructo *uso de la gráfica* y centrar la atención sobre el propio uso; que en su sentido coloquial hace referencia a hacer servir la gráfica para ejecutar y practicar algo habitualmente por costumbre. Por otra parte en Cordero et al. (2010) se puso de manifiesto que en el bachillerato existe un marco de referencia del uso de la gráfica y que a lo largo de los semestres hay un desarrollo del uso de la gráfica, el cual debería exponer una resignificación del uso. Ésta es la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano, normado por lo institucional (Cordero, 2008).

Marco teórico

En el estudio del uso de la gráfica no se trivializa al acto de realizar una gráfica, sino que se concibe como el estudio del uso de la gráfica en una situación específica que responde a la funcionalidad del conocimiento matemático (Zaldívar, Cen, Briceño, Méndez y Cordero, 2014). Con ello la gráfica adquiere otro estatus, el de una herramienta y una argumentación en una situación. Así el objeto matemático función será explicado a través de argumentaciones gráficas que se desarrollan en la situación. La unidad de análisis es el *funcionamiento y forma*, un binomio inscrito en una relación dialéctica que toma sentido y significación en las argumentaciones de los participantes cuando resuelven una actividad matemática con aquello que les es útil (Cen, 2015). El método seguido para la investigación se compone de dos partes: la metodología del marco teórico y la experimental. Respecto al marco la intención está en reconocer la *resignificación del uso de la gráfica*, cómo se presenta y cómo se modifica cuando la gráfica se traduce a actividades no tradicionales del discurso matemático escolar del bachillerato. Para ello se consideró la categoría *comportamiento tendencial de las funciones* (CTF), la cual es un argumento que establece relaciones entre funciones y está compuesto de una colección coordinada de conceptos en situaciones donde se discuten aspectos globales de variación (Cordero, 2008).

La metodología experimental tiene un carácter descriptivo e interpretativo, en donde el objetivo fue analizar el funcionamiento-forma cuando los usos se ponen en juego en algunas actividades. La experimentación se realizó con treinta y cuatro profesores de nivel medio superior en un taller sobre modelación-graficación. Se hizo una encuesta en donde una de las preguntas fue ¿en qué situaciones y para qué utiliza las gráficas en sus clases? Las respuestas fueron las esperadas: las gráficas surgen como una herramienta para explicar comportamientos geométricos, los diferentes tipos de funciones que emplean, el cálculo del área bajo la curva, para mostrar la solución de un sistema de ecuaciones, en estadística, para analizar la continuidad y discontinuidad de una función, entre otros (Cen, 2015). Con base en lo anterior se diseñaron tres actividades, no tradicionales o convencionales en el sistema didáctico, cuya génesis está en la situación de transformación y el CTF. Las actividades son en consideración a los usos: *ubicación de puntos, análisis de la curva y comportamiento geométrico* (Cordero et al., 2010).

Actividad 1. El uso ubicación de puntos

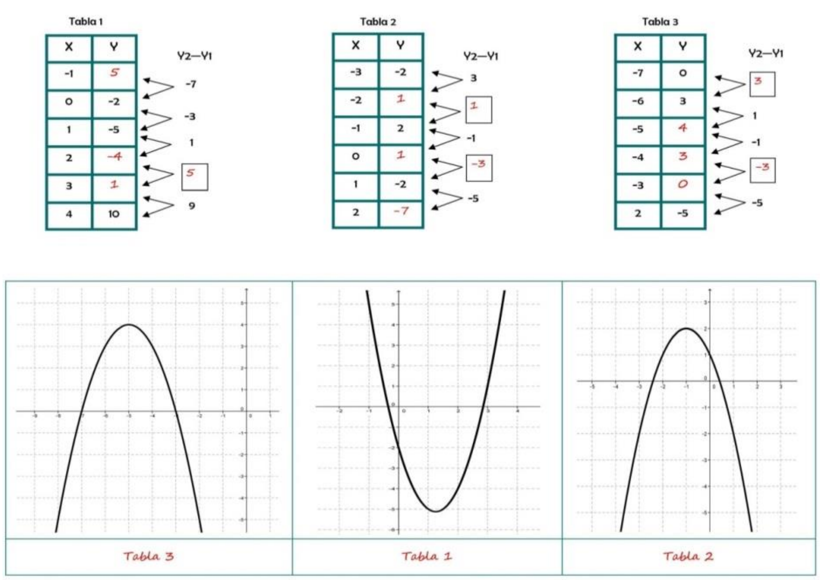


Figura 2. El CTF y el uso ubicación de puntos (Cen, 2015, p. 86)

En la primera actividad se tomó la relación tabla-gráfica lo que implica tener una tabla con todos los valores explícitos y después realizar la ubicación de los puntos en el plano. Los profesores realizaron el llenado de las tablas y después ubicaron algunos de esos puntos en las gráficas propuestas. En este caso la gráfica fue secundaria; es en donde se aprecia la fuerza del discurso matemático escolar. Dentro de las estrategias está el ubicar las parejas de números propuestos en las tablas y ubicarlos en las gráficas. Es decir, no se realizó el llenado de las tablas para identificar las gráficas correspondientes, sino que se basó con las propuestas. Con ello se verificó que si una pareja de números cumple con la gráfica seleccionada entonces se tomaba otra pareja para verificar si también cumplía. Ambos casos exponen que la gráfica es vista puntualmente, a pesar de tener la representación gráfica, por lo que no se mira cómo varían los puntos.

Actividad 2. El uso análisis de la curva

En la tabla 1.

¿Cómo son las variaciones o diferencias (Y2-Y1) de las imágenes si $-1 < x < 1$? ¿En la gráfica qué observas para esas imágenes de x?

¿En la gráfica qué observas si $1 < x < 2$? ¿Cómo son las variaciones si $2 < x < 4$? ¿En la gráfica qué observas para esas imágenes de x?

¿Cómo crees que serán las variaciones si $x > 4$? y ¿si $x < -1$?

En la tabla 2, ¿cómo describirías sus variaciones y diferencias? , ¿y su gráfica correspondiente?

En la tabla 3, ¿cómo describirías sus variaciones y diferencias? , ¿y su gráfica correspondiente?

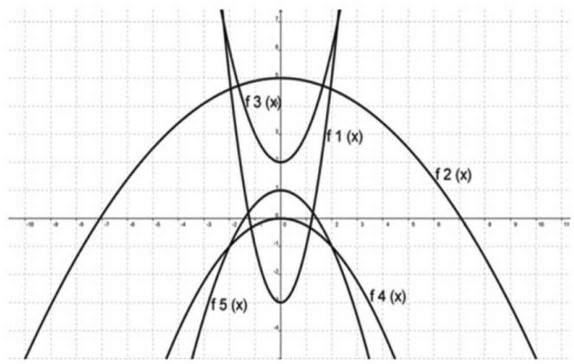
Figura 3. El CTF y el uso análisis de la curva (Cen, 2015, p. 95)

Se tomó como actividad de inicio el uso ubicación de puntos en donde la expresión analítica no es propuesta, por lo cual no se puede realizar los criterios de la primera y segunda derivada que son las formas en que se manifiesta este uso institucionalmente (Cen, 2006). Esto no significa que no se pueda realizar el análisis comportamiento de las funciones, que es el funcionamiento del uso propuesta por tablas de valores.

Al poner en juego esta actividad se tienen dos funcionamientos en este uso de la gráfica. Un funcionamiento es describir el comportamiento de la curva a través de las tablas de valores propuestos, en tal caso la tabla adquiere un papel primordial. La forma en que se llevó a cabo este uso de la gráfica es cuando se miran en las tablas los valores de X y cómo éstos varían en las tres tablas. El segundo funcionamiento es describir el comportamiento de la curva desde la curva misma. Es decir, la atención está sobre la curva ya que a partir de ella se responden las preguntas de la actividad y después se verifican o corroboran en las tablas de valores. Entonces la forma de este uso radica en lo perceptible de la gráfica, ya que sobre ella trazan con un lápiz, con un dedo, con la mano o bien con un bolígrafo a manera de recta, la trayectoria que tiene la curva (Zaldívar, 2014). Es ese movimiento el que expone el comportamiento de la curva, en donde se aprecia el vértice y como consecuencia la recta tangente.

Actividad 3. El uso comportamiento geométrico

$$f(x) = ax^2 + c$$



$f(x) = ax^2 + c$	Signo de "a"	Coeficiente c	Coeficiente a
f1 (x)			
f2 (x)			
f3 (x)			
f4 (x)			
f5 (x)			

Figura 4. El CTF y el uso comportamiento geométrico (Cen, 2015, p. 105)

En esta actividad se observó cómo identificaron los coeficientes "a" y "c" del modelo de función cuadrática propuesta. Respecto a encontrar el valor de "c" fue ágil afirmar que éste coeficiente es el corte que tiene con el eje y. Algunos extrapolaron, por decirlo de alguna manera, lo que significa el parámetro "b", respecto de y=ax+b, a lo que significa el parámetro "c" en el modelo de función propuesto para esta actividad.

En este uso de la gráfica también es fundamental la forma gestual de la gráfica, en el recorrido que realizan sobre la gráfica ya sea con el dedo, lápiz o bolígrafo; además de hacer ademanes sobre el alargamiento horizontal (cerrada o abierta, como señalaron los profesores) de la gráfica.

Resultados

Estas actividades tuvieron como objetivo confrontar lo que el discurso matemático escolar "dicta" que siga un profesor de matemáticas en su práctica profesional cuando se proponen algunas actividades no típicas de ese discurso. Respecto de los usos de las gráficas se observó la potencialidad de la gráfica para estimar los coeficientes de la función, la gráfica como una herramienta que modela variaciones y la tabla de valores como una herramienta que permite abordar aspectos variacionales y que la función puede ser considerada secundaria en las actividades si la atención está puesta sobre el uso de la gráfica. Por otra parte, los profesores proporcionaron evidencia de su práctica profesional y que la gráfica es una herramienta, en donde su uso se resignifica y por tanto lleva a cuestionar el rol que juega en los aspectos variacionales y en la modelación. Las actividades propuestas dieron evidencia de la funcionalidad del conocimiento matemático cuando se trata con el uso de la gráfica a través de sus funcionamientos y formas, puesto que los profesores atravesaron por una "crisis", en el sentido de Berger y Luckman (2006), por lo que pusieron en juego el conocimiento adquirido con base a su experiencia.

Al respecto del discurso del profesor se hizo evidente que existen otros funcionamientos y formas que están inherentes a la práctica del profesor y otras que desconoce, esto producto del discurso matemático escolar en donde las prácticas institucionales son rutinas o bien rutinarias. Por lo cual se deben proponer epistemologías de conocimiento centradas en el uso del conocimiento y su resignificación, es decir ofrecer a los profesores alternativas al discurso matemático escolar. También se observó que la epistemología inicial reportada por Cen (2006) era rígida por decirlo de alguna manera y no permitió resaltar que existen otros funcionamientos y formas y más aún cómo suceden éstos.

La propuesta de actividades permitió observar que para un funcionamiento, existen una o más formas del uso de la gráfica, lo cual confirma que "el funcionamiento son las ejecuciones, acciones u operaciones que desempeña la gráfica en la situación, mientras que la forma son las clases de esas ejecuciones, acciones u operaciones" (Cordero et al., 2010, p. 199). Esto significa que debido al funcionamiento de la gráfica, existen varias maneras de proceder a realizar la tarea propuesta. Por otro lado, también se infiere que no son los únicos funcionamientos y formas que se pueden proponer o bien existen respecto a los usos de las gráficas, sino que al tratar con el uso existe un subuniverso de significados en el sentido de Berger y Luckman (2006), que deben ser explotados pues conforman una alternativa del uso del conocimiento que pudieran ser integrados en el discurso matemático escolar.

Conclusiones

Los resultados obtenidos al respecto radican la potencialidad de la gráfica para estimar los coeficientes de la función, la gráfica como una herramienta que modela variaciones y la tabla de valores como una herramienta que permite abordar aspectos variacionales. Por otra parte, ya se tiene evidencia de las prácticas profesionales de los profesores y cómo éstas se desarrollan ante una actividad no tradicional del discurso matemático escolar; así como la gráfica como herramienta provoca una resignificación del conocimiento matemático y lleva a cuestionar el rol que juega en los aspectos variacionales y en la modelación. La investigación permite reafirmar la necesidad de incorporar en el sistema didáctico el uso de las gráficas atendiendo a dos razones: la resignificación del uso del conocimiento matemático y el marco de usos de la gráfica (Cordero et al., 2010) se hizo más robusto al considerar las argumentaciones de los profesores alrededor de cada uno de los usos propuestos en la actividad. Por otra parte, la evidencia empírica indica la conveniencia de ampliar el constructo teórico y proponer que el funcionamiento es la acción que se desea desempeñe la gráfica en la situación que se trate, mientras que la forma es la manera en la cual el sujeto actúa sobre la gráfica, por lo que la apariencia perceptible de la gráfica (objeto) es fundamental pues de alguna manera orienta el proceder del sujeto (proceso) lo cual se ve reflejado en las argumentaciones de los participantes.

Referencias Bibliográficas

Berger, P. y Luckmann, T. (2006). *La construcción social de la realidad* (1ª edición, 20ª reimpresión). Buenos Aires: Amorrortu.

Cen, C. (2015). *Una caracterización del uso de las gráficas de las funciones con profesores de bachillerato.* Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Cen, C. (2006). *Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato.* Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. Ciudad de México, México.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso matemático del cálculo escolar. Una visión Socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte iberoamericano* (pp. 265 – 286). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. – Díaz de Santos.

Cordero, F., Cen, C., Suárez, F. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(2), 187 – 214.

Zaldívar, D. (2014). *Un estudio de la resignificación del conocimiento matemático del ciudadano en un escenario no escolar.* Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. Ciudad de México, México.

Zaldívar, D., Cen, C., Briceño, E., Méndez, M. y Cordero, F. (2014). El espacio de trabajo matemático y la situación específica de la matemática funcional: un ejercicio de diálogo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(4 – II), 417 – 436.

LA RESIGNIFICACIÓN DE GRÁFICAS LINEALES. EJEMPLOS DESDE UNA COMUNIDAD DE INGENIERÍA

Isabel Tuyub Sánchez, Gabriela Buendía Ábalos
CICATA (México)
isabel.tuyub@correo.uady.mx, buendiag@hotmail.com

RESUMEN: En el presente escrito se presentan dos ejemplos extraídos de una comunidad de una maestría en ingeniería sobre cómo, mediante dos tipos de usos de las gráficas cartesianas (organización de información y mostrar procedimientos), se resignifican ciertos conocimientos matemáticos por medio de la dialéctica entre el funcionamiento y la forma de las gráficas presentes en dichos usos. Se muestra que es por medio de la resignificación de puntos de referencia que se puede dar cuenta de la construcción de conocimiento matemático asociado al uso de la gráfica como argumento visual.

Palabras clave: usos, resignificación, gráficas, ingenieros

ABSTRACT: This paper shows two examples obtained in a Master´s degree course in engineering. The examples show how by means of two types of Cartesian graphs use (information arrangement and procedure showing), certain mathematical knowledge meanings are renewed by the dialectics between functioning and form of the graphs present in such uses. It is evident that it is precisely by the renewal of the meaning of reference points that it is possible to recognize the mathematical knowledge building associated to the graph use as a visual argument.

Key words: uses, meaning renewal, graphs, engineers

Introducción

Se reconoce que en la enseñanza tradicional no es claro cómo se adquieren los significados de las nociones matemáticas y que permeen en una globalidad de estudiantes en su cotidiano. Por otro lado la sociedad, desde un punto de vista profesional o científico, no identifican los saberes matemáticos inmersos que son fuente clave para la realización de ciertas prácticas en una comunidad de aprendizaje. Estos dos escenarios son naturalmente distintos, sin embargo, el primero debe impactar en el segundo, pues el fin de la educación es profesionalizar y el segundo debe dar indicios de qué elementos deben prescindir en el primero. Pero la pregunta sin responder es cómo. Estamos convencidos que más contenidos matemáticos no es la solución, si no el desarrollo de pensamiento matemático, para ello se requiere de una matemática funcional que le proporcione significados al estudiante, este tipo de significados se pueden encontrar presentes en contextos profesionales, cotidianos y científicos, véase por ejemplo Tuyub y Cantoral (2012), Zaldívar y Cordero (2012) y Gómez (2015).

La intención del artículo es evidenciar con algunos ejemplos la resignificación del uso de las gráficas cartesianas de variación y cambio por medio de tareas representativas de la comunidad de estudio: la maestría en ingeniería de la Universidad Autónoma de Yucatán, una del tipo científica académica de las más prestigiadas de México. Para ello se consideró apoyo de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), la cual modela la construcción social de conocimiento matemático, es decir, considera dicha construcción desde un punto de vista situacional, tomando elementos como el contexto, la individualidad de los estudiantes, su ciudadanía, las relaciones que se presentan dentro de una comunidad, las afecciones y concepciones hacia la matemática, entre otros elementos de corte sociocultural; todo ello para entender cómo se construye y por qué de esa manera cierto conocimiento matemático (Cantoral, 2013). Lo que se rescata es la forma de organizar el uso de conocimiento matemático y dar paso a reflexionar sobre la matemática funcional como aquella matemática con sentido y significado para quien la usa (Cantoral, 2013).

La TSME le apuesta al saber matemático como un conocimiento en uso y problematiza dicho conocimiento, donde la práctica de referencia aparece como elemento principal sobre el cual se interrelaciones tres elementos esenciales: un uso que se fomenta en dicha práctica de referencia, un usuario, ya sea un individuo o una comunidad, y los contextos socioculturales de significación (Cantoral, 2013). Para nuestra investigación la *práctica de referencia* es la práctica de la comunidad, ahí se concentra cuál es el interés de ésta por producir conocimiento y cómo; el *usuario* la comunidad de la maestría en ingeniería compuesta por ingenieros, arquitectos y biólogos distribuidos en aprendices y expertos para el estudio de la ingeniería en construcción, estructuras y ambiental; dentro de *los contextos socioculturales de significación* se identifican dos tipos de uso: el de la organización de la información y el de procedimientos y técnicas. En dichos contextos es donde la comunidad significa su práctica expresada en tareas claves que realiza para fomentar sus productos de investigación y darle sentido al estudio del uso de gráficas situado. El *uso* se explicitará por medio de la identificación de las interrelaciones entre el *funcionamiento* y la *forma* de la gráfica (Cordero, 2008, Suárez, 2008; Cordero, Cen, Suárez, 2010; Buendía, 2010, Buendía, 2011). El funcionamiento se entenderá como el cómo y para qué le sirve la gráfica a la comunidad, la forma la apariencia perceptible del objeto (gráfica), así como cuáles son las maneras en la que dicha comunidad actúa sobre éste, en qué se fijan para analizar, argumentar y cómo, es decir qué de lo que veo de la gráfica se utiliza. Por tanto el carácter situacional del uso debe ser con respecto a tareas, las cuales se pueden rescatar (categorizar) por el cómo usan.

Cuando se estudia el uso, la *resignificación* es un elemento clave que puede evidenciarse en éste. La definiremos como la reconstrucción de significados asociados a un conocimiento matemático, el cual puede evidenciarse mediante el uso de dicho conocimiento en un contexto específico en el que se significa por una persona o comunidad. Se cree que ésta es una herramienta que permitirá la reconceptualización de saberes matemáticos (Domínguez, 2003; Ferrari y Farfán, 2004; Rosado, 2004; Biehler, 2005; García, 2007, Alfonso y Balda, 2010).

Se eligió la TSME debido a que provee un marco funcional sobre el desarrollo del uso de las gráficas, señala una relación dialéctica entre el funcionamiento de la gráfica y su forma en situaciones específicas (Buendía y Cordero, 2005). Permite la perspectiva de considerar a las gráficas como un saber continuo y funcional, consideradas como una manifestación del uso del conocimiento matemático a través de sus funcionamientos y formas (Cordero, 2008; Cordero y Flores, 2007); además es un tipo de modelación que trasciende y se resignifica, con lo que transforma al objeto en cuestión (Cordero, 2006).

Materiales y métodos

Para la obtención de los datos, se utilizó una metodología cualitativa con investigación no participante; se grabaron clases, seminarios y se analizaron textos como artículos de investigación y tesis en diferentes ambientes que presenta la comunidad. Para ello se dedujo a la comunidad de la Maestría en Ingeniería como una Comunidad de Práctica (CoP), en el sentido de Wenger (2001), cuyo objetivo es construir conocimiento científico del corte ingenieril en el que entre aprendices y expertos se fomenta una negociación de significados, en el que los productos de proyectos finales, tesis de maestría y artículos de investigación publicados por dichos aprendices y expertos de la Comunidad de Práctica fueron pieza clave para analizar su quehacer (Tuyub, Martínez y Buendía, 2011).

Las gráficas lineales fueron un medio transversal para analizar el que hacer de la comunidad. Por medio de los constructos teóricos socioepistemológicos *funcionamiento* y *forma se* pudieron categorizar dos tipos de usos: *la organización de la información* cuyo impacto radica en la comprobación de hipótesis al comparar dos comportamientos, donde la literatura es la base, por ejemplo una norma, una hipótesis teórica; *el uso de procedimientos y técnicas* cuando la lectura de la gráfica permite predecir y tomar decisiones mediante la manipulación de ciertos elementos de la gráfica. Al final de cuentas estos dos tipos de usos se emplean, en su mayoría, para comprobar resultados.

Para el análisis de resultados se optó por una unidad de análisis, la cual fue tomada de la TSME (Montiel y Buendía, 2011), presentada en la Figura 1, en la que se muestran los elementos considerados en nuestra investigación, tomando a lo *cognitivo* como el saber matemático elegido, el cual es abordado en el uso de las gráficas cartesianas relacionadas con la variación y el cambio, lo *epistemológico* como el quehacer de la Comunidad de Práctica, lo *didáctico* en las producciones escritas de la CoP, a lo que dentro de las comunidades de práctica denominan la cosificación que es la explicitación de los procesos de una comunidad manifestados en algo físico que permite el continuo del conocimiento de esa comunidad.

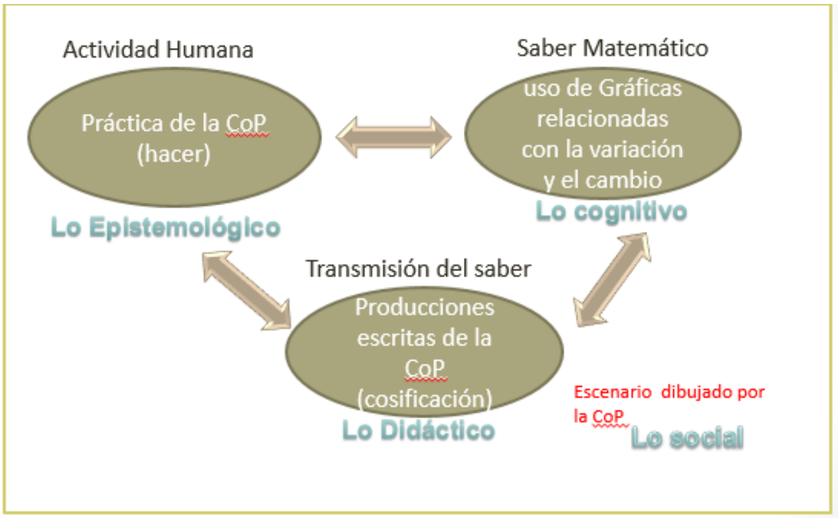


Figura 1. Unidad de análisis basado en Montiel y Buendía (2011)

Análisis de los ejemplos

Con respecto al *uso de la organización de la información*, existen diferentes formas de ordenar datos que proporcionan de cierta manera información útil para la comunidad, ya sea datos de la realidad, o dada una forma de leerlos a otra que ellos consideran óptima con respecto a la anterior.

Como primer ejemplo se tiene la tarea de *ordenar la información de un programa de obra a una gráfica de líneas de balance*. El programa de obra es el que se aprecia en la parte superior de la Figura 2, esto es un plan de carácter indicativo con previsión del tiempo. Algunas tareas se pueden hacer en la misma fecha y se puede apreciar con las líneas horizontales que están en una misma columna. Lo que se hace es dado una lista de actividades, que se presenta en la primera columna, que se requieren realizar para la construcción de una vivienda en determinado tiempo, medido por semanas (primera fila). Se considera una gráfica cartesiana, por tener un punto y ejes de referencias, el inicio en días de la obra, cada actividad (tarea a realizar) señalada en cada fila de la primera columna, respectivamente; es de variación y cambio porque las actividades a realizar tiene un lapso de tiempo a cubrir (señalado por el tamaño de las barras horizontales), así como nexos de continuidad entre una tarea y otra (distinguido con flechas de conexión).

Las líneas de balance, como se aprecia en la parte inferior de la Figura 2, muestran el "ritmo" de trabajo al cual debe ser realizadas todas las actividades que conforman un proyecto para concluirlo de acuerdo a lo programado, expresa no sólo los tiempos planeados para la entrega de viviendas sino el cómo deben ser cumplidos esos tiempos (en términos de ritmos): "una gráfica de LDB no muestra relaciones directas entre actividades individuales; muestra una relación de resultados entre las diferentes operaciones y cómo cada operación debe ser completada a un ritmo particular para que la subsecuente proceda al ritmo requerido" (Loria, 2013, p.7).

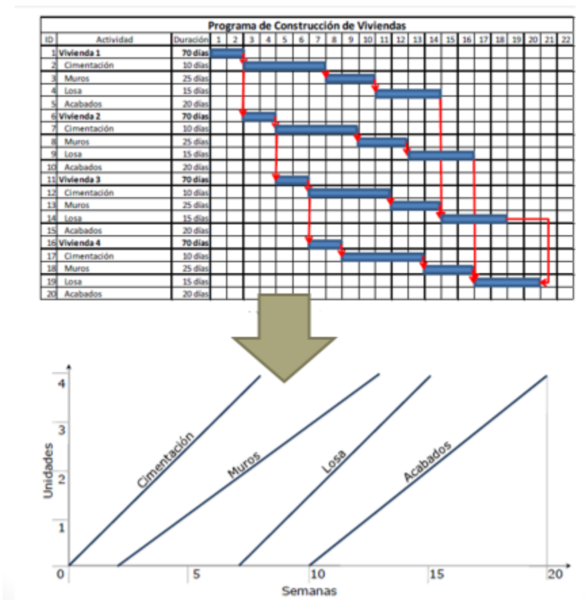


Figura 2. Ejemplo de un programa de obra a una Línea de Balance en la construcción de viviendas. Ejemplo de organización de la información.

El impacto de la tarea es que proporciona información de manera simplificada para medir avances de programación (rendimientos) de actividades repetitivas con un enfoque de sistemas (grupos). Se observa en el eje de las ordenadas la cantidad de elementos a construir. En el eje de las abscisas están las actividades comunes, pero realmente se miden tiempos para cada actividad, como varios ejes x representados en una sola representación. El rendimiento es representado por la pendiente de los elementos lineales que representan el ritmo de ejecución de la actividad en cada uno de los elementos a construir y también se puede leer como conjunto, cómo se está comportando uno con respecto a otro.

La *forma* de la gráfica radica en la lectura de la información para identificar procesos que se repiten una y otra vez en las construcciones de casas y sistematizar tareas de una producción en masa (de manera óptima) que involucra una línea recta por tarea, dichas rectas se distinguen unas de otras por el punto inicial y sus pendientes que reflejan el ritmo de producción de cada tarea, es decir, al cómo se espera que se desarrollen. La gráfica *funciona* como un medio de optimización de la lectura para planear construcciones que demanden procesos que contienen tareas que se repiten, esta planeación se da finalmente en términos de ritmos representados hipotéticamente por líneas rectas.

Con respecto al uso de mostrar procedimientos y técnicas, como el segundo ejemplo se tiene la obtención de las *líneas de balance* como una técnica para mirar en una sola línea un gran número de actividades comunes cuya pendiente representa el ritmo de trabajo bajo el cual deben realizarse todas las actividades que en conjunto conforman un proyecto de ingeniería determinado para concluirlo en un tiempo programado. La tarea es *corregir la demora de avance real de un proyecto de construcción de viviendas.*

En la Figura 3 se muestra la gráfica como técnica para predecir comportamientos del proceso de construcción de viviendas que se construyen en serie, es decir que llevan el mismo procedimiento, como podrían ser viviendas de fraccionamientos (un proyecto), la cual permite entender globalmente la construcción y no sólo determinarla por actividades. Las líneas continuas muestran lo planeado, mientras que las líneas punteadas el avance real y la fecha de corte es el punto en el que se analiza para la toma de decisiones.

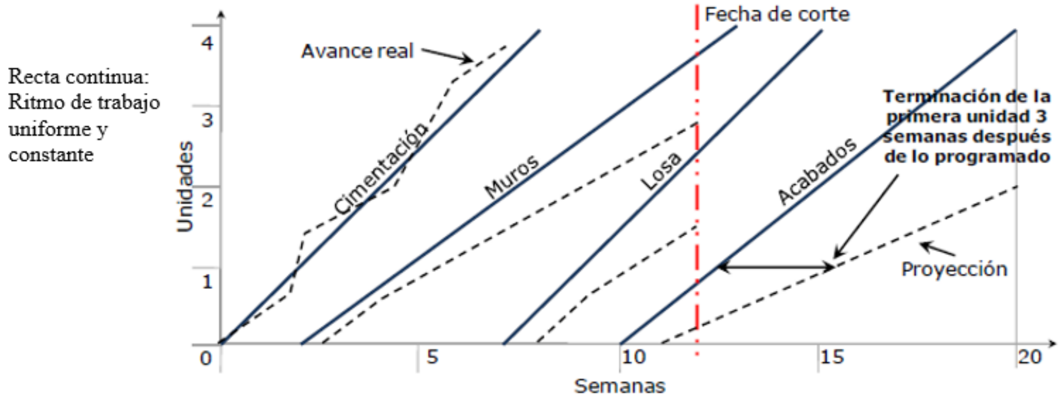


Figura 3. Ejemplo de un programa actualizado con Líneas de Balance para la construcción de viviendas.

La forma de la gráfica radica en la lectura, verticalmente se aprecia un corte entre las semanas 10 y 15, punto clave para extrapolar con base al ritmo el cómo se está alejando lo real de lo programado, en términos de las pendientes de las rectas punteadas al aproximarse a líneas continuas con base a la disminución o incremento del ritmo de realización de las actividades; por ejemplo, una decisión que podría tomar es que la demora podría corregirse al incrementar los ritmos de producción de los muros, la losa y acabados, al incrementar la eficiencia o recursos necesarios a aquella actividad donde no se está logrando la producción esperada. Horizontalmente es en términos de las unidades de las viviendas a construir, del tiempo de cada una de las etapas que se requieren para la construcción. El funcionamiento es tomar decisiones y predecir al extrapolar fechas de terminación del proyecto apegándose a lo planeado.

Discusión

Ingenieros miran la misma gráfica, pero argumentan debido a las formas que le interesan de ella y de esta manera dan cuenta del funcionamiento de dicha gráfica para lo que requieren. Las gráficas tienen un uso que se desarrolla situacionalmente de tal manera que es factible explorar la naturaleza del conocimiento matemático involucrado y favorecer su resignificación. Uno de los elementos principales que se rescata de esta comunidad es el uso de las gráficas lineales como una herramienta visual poderosa de validación de resultados o comprobación de hipótesis.

Se puede notar con la evidencia sobre la resignificación del uso de las gráficas algunos matices de la noción de la linealidad. Con respecto al primer ejemplo la *resignificación del uso de la gráfica* se manifiesta al momento de su lectura global de un conjunto de curvas lineales rectas, al ponerse en juego sus pendientes para la determinación de éstas, ritmos de trabajo constantes, uniformes e invariantes parecen ser considerados para una planeación de un proyecto de la Comunidad de Práctica, que se asocian con la linealidad de las curvas manifestadas; esta representación de rectas posiblemente sea porque las actividades se suponen desarrollarse en condiciones óptimas. En el segundo ejemplo lo que se resignifica en el uso de la gráfica es la noción de pendiente como ritmo de producción, aumento o disminución del ritmo implica gráficamente una pendiente mayor o menor, respectivamente; así como la linealidad, al intentar aproximar lo real a lo hipotético. No les interesa tener un ritmo mayor que el planeado sino acercar la realidad al plan.

De ahí que la resignificación de la linealidad se da mediante el uso de las pendientes y puntos de referencia en las gráficas cartesianas de una comunidad de ingenieros, como elementos esenciales para el desarrollo de supuestos. Cabe mencionar que en el aula solo se aborda la ecuación de la línea recta y no sobre la importancia de un comportamiento lineal.

La discusión que se pone en la mesa es que realmente hay una resignificación del uso de las gráficas lineales, y que no es el convencionalmente que se trabaja en el contexto escolar, además en dicha resignficación también los elementos de la gráfica y las formas y funcionamientos de ésta también se resingifican (progresivamente), así como rescatar nociones matemáticas involucradas que de la misma forma se resignifican. Por lo que la resignificación del uso de las gráficas es una herramienta poderosa para poder rescatar ciertos elementos que sean de interés para el investigador con determinada intención, como es el rescatar nociones para desarrollar el pensamiento matemático en el aula.

Referencias Bibliográficas

Alfonso, E. y Balda, P. (2010). *La modelación como herramienta para la resignificación de la función*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.

Biehler, R. (2005). Reconstruction of meanings as a didactical task: the concept of function as an example. En J. Kilpatrick, C. Hoyles, & O. Skovsmose (Eds.). *Meaning in Mathematics Education* (pp. 61-82). USA: Springer.

Buendía, G. & Cordero, F. (2005). Prediction and the periodic aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics. Kluwer publishers 58(3)*, 299-333.

Buendía, G. (2010). Una revisión socioepistemológica acerca del uso de las gráficas. En G. Buendía (Ed.). *A diez años del posgrado en línea en Matemática Educativa en el Instituto Politécnico Nacional* (pp.21-40). México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa AC.

Buendía, G. (2011). El uso de las gráficas en la matemática escolar: Una mirada desde la socioepistemología. *Premisa 13(48),* 41-50.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matematica*. La Matematica e la sua Didattica 20 (1),* 59-79.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R.M. Farfán, J. Lezama, A. Romo (Eds.). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 285-309). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C. y Díaz de Santos S.A.

Cordero, F., Cen, C. y Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13(2)*, 187-214.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10 (1),* 7-38.

García, M. (2007). Resignificando el concepto de función lineal en una experiencia educativa a distancia. Un estado del Arte. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.

Gómez, K. (2015). *El fenómeno de la opacidad y la socialización del conocimiento. Lo matemático de la ingeniería agrónoma*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Ciudad de México, México.

Domínguez, I. (2003). *La resignificación de lo asintótico en una aproximación socioepistemológica*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Ciudad de México, México.

Ferrari, M y Farfán, R. M. (2004). La covariación de progresiones en la resignificación de funciones. En L. Díaz (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17, 145*-149. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Loría, J. (2008). Programación de obras con la técnica de líneas de balance. Recuperado de http://www.ai.org.mx/ai/archivos/coloquios/regional-zona7/Programacion%20de%20Obras%20con%20la%20Tecnica%20de%20la%20Linea%20de%20Balance.pdf el día 3 de septiembre de 2014.

Montiel G. y Buendía, G. (2011). Propuesta metodológica para la investigación socioepistemológica. En L. Sosa, R. Rodríguez y E. Aparicio (Eds.). *Memorias de la XIV Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 443- 454. México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A.C.

Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Ciudad de México, México.

Suárez, L. (2008). *Modelación-Graficación. Una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioespitemológico*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Ciudad de México, México.

Tuyub, I. y Cantoral, R. (2012). Construcción social de conocimiento matemático: Obtención de genes en una práctica toxicológica. *Boletim de Educação Matemática 26(42)*, 311 – 328.

Tuyub, I., Martínez G. y Buendía G. (2011). La comunidad de formación científica hacia una comunidad de práctica. En G. Buendía (Ed.). *Reflexión e investigación en Matemática Educativa* (pp.159- 190). México: Lectorum.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de Práctica. Aprendizaje, significado e identidad.* Barcelona: Paidós.

Zaldívar, D. y Cordero, F. (2012). Un estudio socioepistemológico de lo estable: consideraciones en un marco de la divulgación del conocimiento matemático. En O. Covián, Y. Chávez, J. López, M. Méndez, A. Oktaç (Eds.). *Memorias del Primer Coloquio de Doctorado*, (pp. 203 – 212), México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

LA PREDICCIÓN COMO ARTICULADORA DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO Y EL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL

Luis López-Acosta, Gisela Montiel Espinosa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. (México)
lalopeza@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx

RESUMEN: En el escrito se discute una articulación del Pensamiento Algebraico con el Pensamiento y Lenguaje Variacional, a partir del estudio de la variación para la predicción como una práctica que norma el proceso de generalización de comportamientos. Con base en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, se propone un modelo de anidación de prácticas para la generalización de patrones como un fundamento para la construcción de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje basada en prácticas.

Palabras clave: socioepistemología, pensamiento y lenguaje variacional, pensamiento algebraico

ABSTRACT: The paper discusses a linking of algebraic thinking with variation thinking and language, from the study of variation for prediction as a practice that regulates the behavior generalization process. Based on the Socio-epistemological Theory of Educational Mathematics, a nesting model of practices for the generalization of patterns is proposed as a basis for the construction of a practice-based learning hypothetical path.

Key words: socio epistemology, variation thinking language, algebraic thinking

Introducción

En el campo del Pensamiento Algebraico, algunos investigadores reconocen que su desarrollo está relacionado con el tratamiento de las relaciones funcionales y de la variable (Beigie, 2011; Knuth, 2000, en Smith, et. al. 2007; Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006; Blanton y Kaput, 2011; Blanton y Kaput, 2005; Grupo Azarquiel, 1993, en Serres, 2007). Por otro lado, otros coinciden con que el núcleo del Pensamiento Algebraico es la *generalización* (Kinach, 2014; Mason, Graham, Pimm y Gowar, 1985; Bell, 2011), sobre la cual, la mayoría de los trabajos se han enfocado en el trabajo con patrones.

Enmarcados en el Pensamiento y Lenguaje Variacional, se evidenció que ambas posturas se articulan bajo la noción de *variación*, toda vez que el tipo de actividades que promueven implican el análisis de situaciones de cambio, cuya finalidad es identificar regularidades de comportamiento para descubrir reglas generales que describan tales comportamientos (Figura 1). De manera particular, en el trabajo de López-Acosta (2016), se señala que este tipo de situaciones pueden caracterizarse como *situaciones variacionales*, en el sentido que propone Caballero (2012). Desde un análisis teórico, basado en la literatura especializada, a esta articulación se propone una ampliación a través de un modelo para la *generalización de patrones basada en prácticas*.

Blanton y Kaput (2011) Rivera (2013)

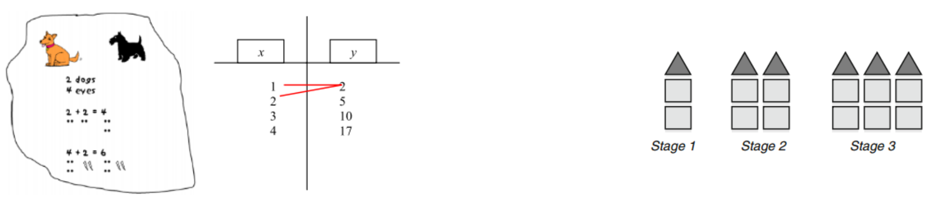


Figura 1. Ejemplos de actividades sobre pensamiento funcional y generalización como introducción al Pensamiento Algebraico

La variación como un articulador de los contenidos para el tránsito del pensamiento aritmético al algebraico

En el caso del bachillerato mexicano, puede observarse también la importancia de la noción de *variación* en el tránsito del Pensamiento Aritmético al Algebraico, pues se identifica también en los contenidos centrales que ésta articula más de uno de estos, como, por ejemplo: variación proporcional, tratamiento de lo lineal y lo no lineal y el uso de la variable (Figura 2).

PROPUESTA DE APRENDIZAJES FUNDAMENTALES | **MATEMÁTICAS**

Ejes	Componentes	Contenidos centrales
DEL PENSAMIENTO ARITMÉTICO AL LENGUAJE ALGEBRAICO	Elementos del Álgebra elemental	· Conceptos básicos del lenguaje algebraico · Usos de la variable · Números y sus propiedades · Variación proporcional · Tratamiento de lo lineal y lo no lineal (cuadrático) · Representación y resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Figura 2. Propuesta curricular del modelo educativo 2016 para el bachillerato mexicano (SEP, 2016)

De esta manera, tomando en cuenta la relevancia del tipo de actividades antes descritas, así como la demanda del modelo educativo en México para el bachillerato, consideramos pertinente iniciar el tratamiento del Pensamiento Algebraico centrado en el análisis de comportamientos de distinta índole.

La apuesta hacia este tipo de acercamiento es que, si se promueve un tratamiento del Pensamiento Algebraico que atienda el análisis de situaciones de cambio, se podrían tender puentes más robustos hacia el tratamiento de las funciones y del Cálculo, pues, por un lado, el estudio de las funciones debe estar centrado en reconocer sus distintas naturalezas en términos de sus regularidades de comportamiento. Por ejemplo, abordar lo lineal y lo cuadrático implica reconocer que lo lineal está caracterizado por su primer orden de variación constante, en tanto que lo cuadrático por su segundo orden de variación constante. Por el otro, el reconocimiento y análisis de regularidades puede favorecer el desarrollo de nociones como la acumulación, y la variación en sí misma, las cuales son la base para comprender conceptos más avanzados del Cálculo, como la derivada y la integral.

Desde nuestra postura dentro de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, coincidimos con la perspectiva de Hsu, Kysh, Ramag y Resek (2007) respecto al uso de “grandes ideas” para revitalizar el tratamiento del Álgebra, que, desde nuestra postura teórica se relaciona con el Rediseño del discurso Matemático Escolar (RdME).

Según esos autores las grandes ideas “son temas o ideas que:

a) Conectan diferentes partes del currículum,
b) Su entendimiento sirve como base para el entendimiento de otros temas, y
c) Es lo suficientemente específica para ser usada en la toma de decisiones respecto al currículum” (Hsu, Kysh, Ramag & Resek, 2007, p. 328).

De modo que el trabajar sobre la noción de variación y, más aún, sobre el abordaje de prácticas como la predicción y la generalización, aporta en esta dirección, puesto que es notorio que dentro del currículum estas nociones y prácticas están inmersas y se relacionan en gran cantidad de contenidos, no sólo en Álgebra. No obstante, resaltamos el hecho de que esta postura está centrada en un primer momento de desarrollo del Pensamiento Algebraico en el bachillerato, pues reconocemos también que este tipo de pensamiento precisa de otros aspectos más, por ejemplo, los vinculados con la *significación de la incógnita*.

■ Pensamiento y lenguaje variacional y pensamiento algebraico. Elementos de articulación

El Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar) es una de las líneas de investigación más consolidadas dentro de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), pues sirvió como base para su conformación (Cantoral, 2013). Hasta hoy, el PyLVar se ha encargado de “estudiar fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social” (Cantoral, 2004, p. 8). Asimismo, como una forma de pensamiento matemático, éste se caracteriza por comprender un conjunto de elementos, estrategias, técnicas y lenguajes variacionales que conforman una forma de razonamiento predictivo que permite enfrentar o conducirse ante problemas o situaciones variacionales (Cabrera, 2014).

Es dentro del PyLVar que se documenta la primera práctica social de la TSME: el *prædiccere,* la cual se relaciona con los mecanismos que permiten realizar predicciones: los *mecanismos de constantificación* y la *herencia del cambio* (carácter estable del cambio). Se considera que su articulación es la base sobre la que opera el razonamiento predictivo, puesto que permiten organizar el pensamiento para sistematizar el análisis de la variación y el cambio ante situaciones variacionales con la finalidad de realizar predicciones tanto globales como locales (López-Acosta, 2016).

Los mecanismos de constantificación son estrategias y razonamientos que dan sustento y permiten elegir las variables que aportan información de manera significativa sobre el comportamiento de los sistemas, así como para determinar hasta qué orden de variación es necesario considerar para la predicción. El uso de estos mecanismos tiene la finalidad de determinar el *carácter estable del cambio*, condición fundamental para poder predecir (López-Acosta, 2016). Esto es, la determinación de aquello que permanecerá invariante ante el fenómeno de variación. Por ejemplo, como se ha mencionado antes, el carácter estable del cambio de un fenómeno lineal consiste en que su primera variación es la misma siempre (estable).

Dentro del PyLVar, el trabajo de López-Acosta (2016), a partir de un análisis de algunos resultados respecto a la generalización de patrones, mostró que los mecanismos de constantificación y el carácter estable del cambio son fundamentales para la abstracción de los patrones subyacentes en secuencias de imágenes y numéricas.

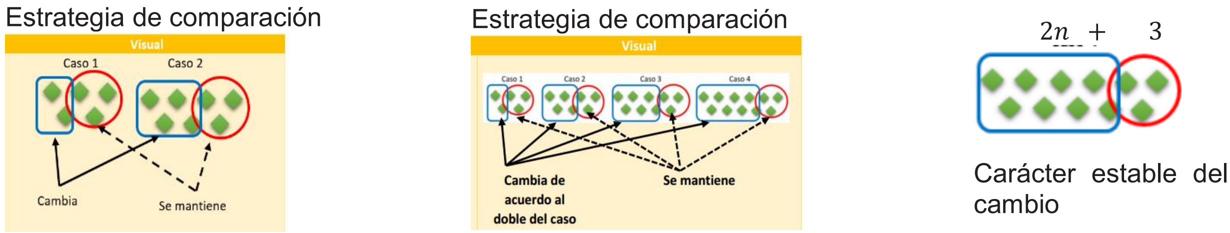


Figura 3. Estrategias variacionales visuales para la generalización de patrones (López-Acosta, 2016)

Modelo de generalización de patrones desde el pylvar

En el trabajo de López-Acosta (2016) se propone un modelo para generalizar patrones numéricos y figurales.

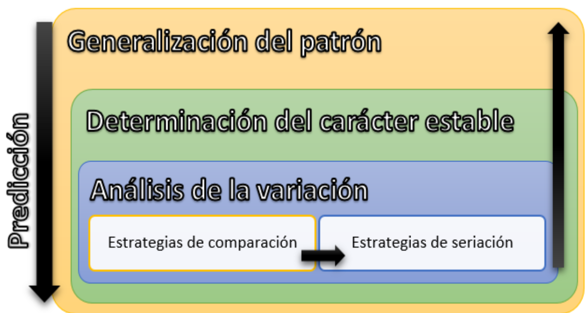


Figura 4. Modelo de generalización de patrones desde el PyLVar (López-Acosta, 2016, p.78)

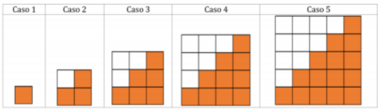
El modelo describe que para poder generalizar el patrón de comportamiento de una secuencia es necesario definir mecanismos de constantificación, en términos de *estrategias variacionales* (Caballero, 2012) que posibiliten el establecimiento de *comparaciones* entre diversos estados, es decir, “la identificación de la transformación que un valor sufre para convertirse en otro” (López-Acosta, 2016, p. 29) las cuales darán pie a *seriaciones*, que corresponden a colecciones de comparaciones analizadas para identificar patrones en el comportamiento de los cambios. Con la información aportada por las estrategias variacionales es posible develar el carácter estable del cambio que permitirá la predicción de valores futuros y, en consecuencia, generalizar el comportamiento que siguen las secuencias, es decir, el patrón (López-Acosta, 2016).

Asimismo, otro de los resultados que se generaron en este trabajo es que existe una relación simbiótica entre la *generalización* y la *predicción*, pues como se reporta en el mismo, la predicción en el reconocimiento de patrones se percibe, en cierto modo, como detonante que norma la actividad de la generalización, a la vez que para la predicción del comportamiento es necesaria de una generalización del mismo (López-Acosta, 2016). De esta manera, de acuerdo a este trabajo, la predicción y la generalización son prácticas que articulan Pensamiento Algebraico y Pensamiento y Lenguaje Variacional.

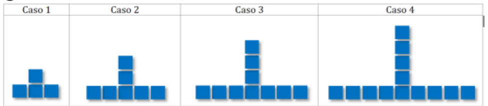
Anidación de prácticas para la generalización de patrones

Consideramos que una propuesta de rediseño del discurso Matemático Escolar (rdME) podría estar basada en el trabajo con "grandes ideas", de las cuales creemos que el análisis de la variación para la predicción es una que, como práctica articula y propicia la emergencia de gran diversidad de nociones matemáticas. Así, en López-Acosta (2016) y sustentado en la TSME, se propuso un modelo de anidación de prácticas (Cantoral, 2013) como un proceso hipotético de aprendizaje (Figura 5) para una posible Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) (Simon, 1995) para la generalización de patrones numéricos y visuales (Figura 6).

Figura 5. Modelo de anidación de prácticas para la generalización de patrones (López-Acosta, 2016)



¿Cuántos cuadros coloreados tendrá el caso 50?



¿Cuántos cuadros tendrá el caso 50?

Coche Azul	
Segundo	Distancia (cm)
1	8
2	16
3	24
4	32
5	40

Coche amarillo	
Segundo	Distancia (cm)
1	3
2	8
3	15
4	24
5	35

Tiempo	Distancia (cm)	Diferencia
1	3	
2	8	5
3	15	7
4	24	9
5	35	
...	...	...
n	$\sum_{i=1}^{n} 2i+1$	$2n+1$

¿Qué coche ganará la carrera? ¿A qué distancia estará a los 50 segundos el coche amarillo?

Figura 6. Ejemplos de tareas de la THA (López-Acosta, 2016)

El modelo de anidación de prácticas es un modelo que describe la construcción social del conocimiento matemático bajo una evolución pragmática. Parte de la idea de que el conocimiento es construido en primera instancia sobre la *acción*, la interacción entre sujeto y objeto de manera deliberada pero no consciente; posteriormente, es a partir de la mediación del contexto que las acciones son interiorizadas y se es consciente del actuar (*actividad*), sin embargo, dicho actuar no es vinculado de manera orgánica con el contexto. El nivel de *práctica socialmente compartida* implica que las acciones son organizadas y asociadas de manera consciente con el contexto, de manera que hay un esquema de comportamiento que está conscientemente asociado a factores situacionales que le dan sentido. El nivel de *práctica de referencia* consiste en aquellas formas ideológicas y herramientas que cierto grupo comparte, en tanto que la *práctica social* es una normativa del comportamiento y de las acciones de los individuos.

Cuando se proponen diseños de intervención desde esta postura, son los dos niveles más altos los que se propician de manera intencional en el diseño. Por ejemplo, en el caso de la generalización de patrones, la predicción y la generalización (matemática) son prácticas que se propiciarán para lograr el objetivo de generalización de patrones. Los niveles inferiores son acciones y actividades que se pretende emerjan a partir de la organización que los niveles superiores implican. Por ejemplo, se necesita de estrategias de estudio del cambio para predecir (acción), del análisis de la información de las estrategias para identificar regularidades (actividad), así como de un esquema consciente del proceso que se requiere para predecir valores futuros en distintos tipos de situaciones dentro de la tarea (práctica socialmente compartida).

■ Reflexiones finales

Consideramos que la predicción es una práctica que puede aportar al desarrollo del Pensamiento Algebraico pues la necesidad de predecir organiza el proceso de generalización de comportamientos. Asimismo, el trabajar con patrones tanto visuales como numéricos puede favorecer el análisis y la tipificación de los tipos de comportamientos que caracterizan a las funciones, por lo cual, también favorecen el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional.

Actualmente, para nosotros, la noción de “grandes ideas” representa un nexo importante con la TSME, puesto que desde esta última se considera que la práctica es la que permite la construcción del conocimiento matemático. En “la misma actividad humana que demanda del pensamiento matemático provee de aprendizajes que en la práctica no emergen por una intención didáctica sino por una intención funcional o situacional” (López-Acosta, 2016, p. 18). Por lo tanto, el diseño de escenarios de aprendizaje escolar, de alguna manera debe perseguir el trabajo con situaciones que demanden de la puesta en juego del Pensamiento Matemático, los cuales son más complejos que los típicamente escolares que, sin embargo, podrían construirse a partir de ideas transversales basadas en anidaciones de prácticas.

Referencias bibliográficas

Bell, C. (2011). Lining up Arithmetic Sequences. *Mathematics Teaching in the Middle School, 17*(1), 34-39.

Beigie, D. (2011). The Leap from Patterns to Formulas*. Mathematics Teaching in the Middle School, 16*(6), 328-335.

Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education. 36*(5), 412-446.

Blanton, M. & Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5-24). Heidelberg, Germany: Springer

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional en profesores de bachillerato.* Tesis de maestría no publicada, México:Cinvestav.

Cabrera, L. (2014). *El estudio de la variación en la práctica del profesor de cálculo. Un estudio de caso.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada Socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 17*, pp. 1-9.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona: Gedisa.

Carraher, D., Schliemann, A., Brizuela, B. & Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education. 37*(2), 87-115.

Hsu, E., Kysh, J., Ramage, K. & Resek, D. (2007). Seeking big ideas in algebra: the evolution of a task. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(4), 325-332.

Kinach, B. (2014). Generalizing: The Core of Algebraic Thinking. *The Mathematics Teacher. 107*(6), 432-439.

López-Acosta, L. (2016). *Generalización de patrones. Una trayectoria hipotética de Aprendizaje basada en el Pensamiento y Lenguaje Variacional*. Tesis de Maestría no publicada. México: Cinvestav.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. & Gowar, N. (1985). *Routes to Roots of Algebra.* The Open University Press, Walton Hall, Milton Keynes.

Rivera, F. (2013). *Teaching and Learning Patterns in School Mathematics*. Dordrecht Heidelberg New York London: Springer.

SEP (2016). *Propuesta curricular para la educación obligatoria 2016*. México: SEP

Serres, Y. (2007). Ejercicios, problemas y modelos en la enseñanza del Álgebra. En R. Cantoral, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoaméricano* (pp. 163-178). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.-Díaz de Santos.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivistic perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114–145.

Smith, M., Hillen, A. & Catania, C. (2007). Using Pattern Tasks to Develop Mathematical Understandings and Set Classroom. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(1), 38-44

EL USO DE LOS ÓRDENES SUPERIOR DE VARIACIÓN EN LA INTERPRETACIÓN CLÍNICA DEL ELECTROCARDIOGRAMA

Angélica Moreno-Durazo, Ricardo Cantoral
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. (México)
gamoreno@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

RESUMEN: Mostramos cómo la noción de orden de variación es usada por los profesionales de la medicina cuando interpretan un electrocardiograma, específicamente, asociamos a un tipo de bloqueo en la conducción eléctrica del corazón el uso del segundo orden de variación. Los cuestionamientos sobre cómo el médico requiere del uso de determinado orden de variación en el diagnóstico de sus pacientes, es nuestro escenario de investigación para el análisis de lo que postulamos como un razonamiento sobre la variación de "orden pequeño" y cómo éste organiza las prácticas asociadas a la predicción de fenómenos.

Palabras clave: teoría socioepistemológica, predicción, variación, medicina

ABSTRACT: We show how the notion of variation order is used by medicine professionals when interpreting an electrocardiogram. Specifically, we associate a type of blockage in the electrical conduction of the heart by using the second order of variation. The questioning about how the physician requires the use of certain order of variation in the diagnosis of his patients is our research scenario for the analysis of what we postulate as reasoning about the variation of "small order" and how the physician organizes the practices associated to the prediction of the phenomena.

Key words: socio epistemological theory, prediction, variation, medicine

Introducción

Las matemáticas del cambio se ubican, dentro del currículo escolar, en los cursos de Cálculo Diferencial e Integral, Ecuaciones Diferenciales; para las cuales se ha señalado, desde diversas investigaciones de la Matemática Educativa, una problemática sobre la construcción de los significados de los conceptos y procesos matemáticos involucrados; basados en diversas investigaciones enfocadas al reconocimiento de las dificultades o la tipificación de los errores en el tratamiento de los objetos matemáticos. Así, por ejemplo, se reportan dificultades entre los estudiantes al manejar la función lineal en los contextos matemático y físico, o las confusiones suscitadas entre la pendiente de la gráfica y la ordenada en una función lineal (Planinic, Milin-Sipus, Katic, Susac & Ivanjek, 2012; Johnson, 2015).

Apoyados en la Teoría Socioepistemológica lo que se enfatiza es la ausencia de procesos variacionales que doten de significado a los objetos matemáticos relacionados al cambio (Cantoral y Farfán, 1998). Además, asocian la falta de significación con la centración exclusiva en los objetos matemáticos, es decir, es precisamente la organización jerárquica desarrollada sobre conceptos y el uso de la mecanización de los algoritmos del cálculo como recursos didácticos, los que impiden el desarrollo del pensamiento matemático.

Ante esto, se propone la *descentración de los objetos matemáticos* como un medio de mejora al acompañarla de una nueva centración en las prácticas que dieron origen a dichos objetos, pues son las que promueven la resignificación de los objetos matemáticos (Cantoral, 2013). De manera que, los estudios sobre aspectos que posibilitan la predicción son relevantes para el proceso de significación de las matemáticas del cambio y la variación, pues estas nacen y se desarrollan como respuesta a cierta necesidad de predicción ante problemas que se ocupan de fenómenos naturales o sociales.

La *predicción* es objeto de estudio científico desde diferentes perspectivas, algunas interesadas en su relación desde el punto de vista cognitivo como su participación en el reconocimiento de modelos mentales, sus limitaciones a nivel neuronal, su relación con el condicionamiento clásico y el aprendizaje (Chiou y Anderson, 2010; Puente, 1998; Vogel, Soto, Castro y Solar, 2006; Llinás, 2012). En relación a aspectos didácticos, en (Lim, Buendía, Kim, Cordero y Kasmer, 2010) se le otorga un papel importante en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas superiores.

Para Gonzales (2010) la predicción es considerada como el objetivo último de las ciencias, una prueba para evaluar teorías y un paso previo a la toma de decisiones. Respecto a esta última, entendemos a la predicción, desde una postura sistémica, como una práctica relativa a la humanidad cuya base es el estudio del cambio y la variación. Además, reconocemos que este estudio no se limita a la Matemática, sino que se encuentra inmerso tanto en las experiencias cotidianas de los grupos sociales y de los individuos, como en otras áreas del conocimiento como física, química, biología, toxicología, entre otras (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006; Tuyub y Cantoral, 2012)

La presente investigación tiene como objetivo analizar aquellos elementos, relativos al estudio del cambio y la variación, que permiten al profesional de la Medicina emitir un diagnóstico ante la situación de su paciente (justo ahí radica su carácter predictivo). Esto es, el objetivo es localizar, analizar, clasificar y organizar aquellas prácticas predictivas de la Medicina relativas al uso de los órdenes de variación. En particular, mostramos el papel que juegan los órdenes superiores de variación en la interpretación de un electrocardiograma (ECG), representación gráfica de los cambios eléctricos en las células cardiacas en los procesos de contracción y relajación del músculo cardíaco en función de las variables tiempo y voltaje.

Es importante mencionar que esta investigación no busca la inclusión, *per se*, de cursos de Cálculo en el currículo en la formación de los médicos, sino que elegimos el escenario que nos permita hablar de la transversalidad de los razonamientos propios del estudio de la variación. Esto es, la predicción en fenómenos deterministas se analiza con apoyo en modelos analíticos, por ejemplo, la convergencia de series de Taylor, donde se asume “constante” o con poco efecto, la “cola” de la expansión infinita; lo que Cantoral (1990) denominó segundo nivel de constantificación. Ahora bien, la Medicina nos provee de un escenario nuevo en el que la predicción se ve restringida con la presencia de la incertidumbre y el caos, el ritmo cardíaco y los ciclos sistémicos, donde la predicción no es plena, pero resulta de gran relevancia el estudio de la variación acotada.

Por último, proporcionamos un ejemplo desde la Física clásica, el movimiento de una partícula, para ilustrar a qué nos referimos con orden de variación. El estudio del cambio de la posición de un objeto respecto del tiempo alude a su velocidad (primer orden de variación), mientras que el estudio del cambio de la velocidad, el cambio del cambio, alude a la aceleración (segundo orden de variación), (Cantoral, 2013).

Elementos teóricos

La investigación se encuentra inmersa en la línea de Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar), que se interesa por las formas en las que los individuos se apropian del cambio y la variación ante situaciones de predicción. Esta línea se desarrolla bajo las perspectivas de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, para la cual, las explicaciones sobre la construcción de conocimiento matemático radican en las prácticas que realice el individuo. Por ejemplo, recientemente Reyes-Gasperini (2016) propuso una evolución de prácticas indispensable para el desarrollo de un pensamiento proporcional, contrapuesto con la regresión de conceptos matemáticos ligados a la proporcionalidad inmersa en el currículo escolar.

El estudio del cambio y la variación ante la necesidad de predecir sobre determinados fenómenos, requiere de la consideración de aquellas prácticas que permitan al individuo identificar *qué es lo que cambia*, *cómo cambia*, *cuánto cambia* y *por qué cambia de esa manera*; las cuales, dependiendo del fenómeno de estudio, se organizan en el siguiente modelo de anidación de prácticas.

Figura 1. Modelo de anidación de prácticas (Cantoral, 2013).

En el modelo conviven varios momentos que separaremos en dos grupos: aquellos que pueden ser materializado mediante acciones, actividades y prácticas y, el que las “moldean” en tanto norman y estructuran a éstas: prácticas, prácticas de referencia y prácticas sociales. El momento de la acción se refiere a aquellas interacciones directas entre el sujeto y su entorno, que se organizan en relación a él convirtiéndose en actividades y devienen en prácticas socialmente compartidas; las prácticas de referencia las estructuran mientras que las prácticas sociales las norman (Cantoral, 2013). Esta organización de prácticas no es estática, sino que las explicaciones sobre la construcción de conocimiento se dinamizan “… hacia arriba, la construcción social del conocimiento comienza por la acción del sujeto sobre el medio y hacia abajo, la construcción social del conocimiento comienza por la norma que regula el quehacer de los individuos en colectividad.” (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015, p. 13)

Lo que no se muestra con las lecturas en subida o bajada del modelo es qué relaciona, por ejemplo, el nivel de acción con el de actividad o éste con el de prácticas socialmente compartidas; lo que en términos generales decimos como, qué es lo que organiza a las prácticas. Nuestra hipótesis de investigación es que lo que organiza a las prácticas asociadas a la predicción es un razonamiento sobre la *pequeña variación,* que denominamos *principio estrella*: *p** desde nuestro grupo de investigación*.*

Las estrategias variacionales de *comparación*, *seriación*, *estimación* y *predicción* fueron reportadas por investigaciones que se centraron en determinar, ante tareas matemáticas, las maneras en las que un individuo trata con el cambio y la variación (Caballero, 2012; Salinas, 2003), de manera que estarán presentes en el modelo de anidación al explicar la construcción de conocimiento relativo a la predicción. Así que, lo que nos preguntamos en la hipótesis de investigación es: ¿qué es lo que relaciona a la comparación con la predicción?, ¿qué es lo que las organiza en un modelo de anidación de prácticas? Es así que la búsqueda de relaciones y organizaciones entre prácticas es el centro de esta investigación.

Según Caballero (2012) son la comparación y la seriación base de estrategias más complejas, como lo son la estimación y la predicción. Caracteriza a la comparación como aquella acción de *establecer diferencias* entre estados, lo cual permite cuantificar el cambio; sin embargo, no es posible con dos estados cuantificar el cambio que sufre el cambio. Aspecto que sí es posible a través de la seriación, caracterizada como el *análisis comparativo* de estados sucesivos (más de dos) con la intención de encontrar un patrón entre ellos.

Notemos que las estrategias de comparación y seriación aluden a la noción matemática de *variación*, en diferentes órdenes, la cual está íntimamente ligado a la predicción. Adicionalmente, reconocemos la incapacidad del hombre para tratar con infinitas variables y variaciones, por lo que lleva a cabo procesos de constantificación (Cantoral, 1990). Por lo anterior, decimos que el estudio de la variación de "orden pequeño" es lo que organiza las prácticas predictivas en situaciones estables.

Lo anterior, requiere de un estudio profundo del papel que tiene la variación en la predicción de fenómenos. A continuación, mostramos un ejemplo para la Medicina, del uso de la noción orden de variación ante la necesidad de explicar, anticipar y "predecir" en ciertas condiciones cuál será el comportamiento del ritmo cardiaco del paciente.

■ Matemáticas y Medicina. Un estudio del pensamiento y lenguaje variacional

La anormalidad en el funcionamiento cardíaco, vista desde el ECG, se caracteriza sólo con base en las variables tiempo o voltaje. Para algunos casos, el referente es el tiempo que transcurre para realizar determinado proceso en el ciclo cardíaco; para otros será el voltaje empleado para realizarlo o la combinación de estas variables es la que caracteriza la enfermedad. Las anomalías que abordaremos en este momento son las referidas exclusivamente al tiempo.

Un bloqueo en la conducción eléctrica en el corazón puede presentarse en diferentes zonas y ser de dos tipos: completos e incompletos. En los primeros, el estímulo eléctrico no pasa por la zona bloqueada y en los de segundo tipo, el estímulo viaja de forma retrasada o enlentecida en el tiempo (Castellano, Pérez y Attie, 2004). Para investigar el orden de variación referidos a la variable tiempo en el diagnóstico de bloqueos en la conducción eléctrica estudiamos los bloqueos ubicados en el nodo atrioventricular (bloqueos AV, BAV). En los cuales el médico para identificarlos analiza, en términos generales, los cambios en el segmento PR y la relación entre las ondas P y el complejo QRS (figura 2).

> Basándose en las características electrocardiográficas, el BAV se clasifica en tres categorías: a) BAV de primer grado que es la prolongación del intervalo PR más allá del límite superior de la normalidad, es decir mayor de 0,2 segundos;

> b) el BAV de segundo grado, en él, una o más ondas P, pero no todas, no son conducidas, esto es, no son seguidas de complejo QRS, y c) el bloqueo AV de tercer grado, en el cual ninguna de las ondas P se conduce a los ventrículos, es decir, hay un bloqueo total de la conducción a nivel AV. (Lobelo, Hernández, González y Moro, 2001, p. 2125)

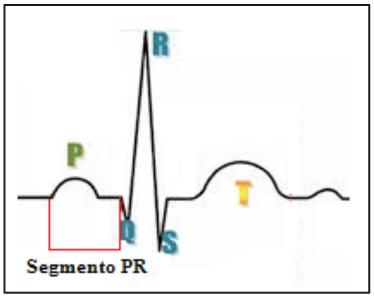


Figura 2. Ciclo cardiaco

La característica principal en la descripción de los bloqueos de primer y segundo grado corresponde a la prolongación del intervalo PR. Esta centración en la prolongación de un suceso alude al tiempo como variable principal de estudio y a un comportamiento específico sobre la variable (*su crecimiento*), por lo que nos interesamos por analizar las características electrográficas de este tipo de bloqueos. Longitudes mayores en ese sentido corresponden a lapsos mayores.

El bloqueo AV de segundo grado se describe de la siguiente manera:

> Es la interrupción intermitente de un estímulo supraventricular a su paso por el nodo atrioventricular. Esa interrupción tiene lugar de manera que un primer estímulo se conduce normalmente a través del nodo atrioventricular, el siguiente estímulo sufre un enlentecimiento de la conducción a través de dicho nodo, el tercer estímulo se enlentece aún más y así hasta que un determinado estímulo se bloque y no es capaz de atravesar el nodo atrioventricular. Este enlentecimiento progresivo de la conducción a través del nodo AV se llama fenómeno de Wenckebach. (Castellano, et al. 2004, p 85)

En esta primera descripción del bloqueo Wenckebach nos interesa resaltar la delineación que se hace del comportamiento de los estímulos eléctricos que parten del nodo sinusal al atrioventricular. Esto es, los estímulos tienen *cada vez un mayor retraso*, lo que habla de una cuantificación del cambio que sufre el tiempo que tarda en conducir un estímulo en determinada zona del corazón; este cambio se representa con un crecimiento de algún tipo, es decir, involucra un primer orden de variación en tanto solo habla de crecimiento y no de qué tipo de crecimiento es (*segundo orden de variación*).

A continuación, explicamos cómo el segundo orden de variación está presente en las características del bloqueo AV tipo Wenckebach (Mobitz I) y, además, cómo esto se visualiza en el ECG.

> Las características electrocardiográficas del BAV tipo Mobitz I son: a) prolongación progresiva del intervalo PR; b) disminución progresiva del incremento del intervalo PR de latido a latido; c) disminución del intervalo RR; d) la pausa producida por la onda P bloqueada es menor a la suma de dos intervalos PP y es igual a la suma de dos intervalos PP menos la suma total de los incrementos de conducción, y e) el intervalo RR producido después de la pausa es mayor que el último intervalo RR producido antes de la onda P bloqueada. (Lobelo, et al. 2001, p. 2126)

A partir de esto, en las características de este tipo de bloqueos, reconocemos que entre los elementos que permiten identificar el enlentecimiento en los estímulos eléctricos del corazón, es el estudio del intervalo PR. El apartado a) indica una *prolongación progresiva* de este intervalo, lo que entendemos como un comportamiento creciente en el tiempo que dura en realizarse para cada ciclo cardíaco; además, especifica en el apartado b) que este *crecimiento del intervalo sufre una disminución progresiva.* Es decir, el intervalo PR durante un bloqueo AV de tipo Wenckebach tiene un crecimiento cada vez menor.

De lo mencionado anteriormente, decimos que el médico en la interpretación del electrocardiograma (figura 3), requiere para diagnosticar la presencia de un bloqueo tipo Wenckebach típico del estudio del segundo orden variación sobre la variable tiempo.

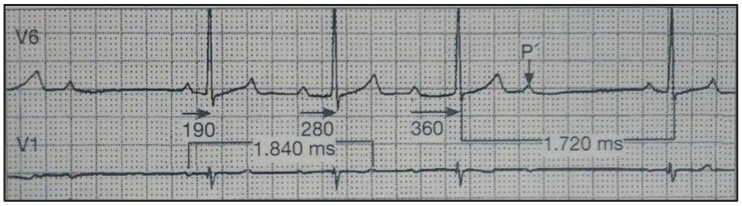


Figura 3. Bloqueo AV de tipo Wenckebach

Reflexiones finales

Mostramos a este momento, cómo es que la noción de orden de variación es utilizada para identificar comportamientos en los procesos rítmicos del corazón, de los cuales surge el diagnóstico que el médico realiza; basados en la comparación y la seriación de una “parte” del electrocardiograma (intervalo PR). Aún queda por analizar, en un ejemplo concreto, cómo el razonamiento sobre la pequeña variación que representa el segundo orden de variación en el caso del fenómeno de Wenckebach organiza las prácticas consecutivas del médico.

Con esta investigación lo que buscamos son elementos para el rediseño del discurso Matemático Escolar, con base en la evolución de prácticas que signifiquen a los objetos matemáticos empleados en el estudio del cambio. La propuesta de una organización curricular con base en prácticas antepone un conflicto sobre cómo se jerarquizan esas prácticas, conflicto que no presenta la organización curricular por contenidos ya que la jerarquización sobre objetos matemáticos es, por ejemplo, en función de los objetos matemáticos que se desean estudiar. De manera que, mostrar que la organización de las prácticas predictivas en relación al razonamiento sobre la pequeña variación es una contribución a ese rediseño.

Referencias bibliográficas

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del lenguaje y pensamiento variacional en profesores de bachillerato*. Tesis de maestría. México: Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav.

Cantoral, R. (1990). *Categorías Relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la Teoría Elemental de las Funciones Analíticas. Simbiosis y predación entre las nociones de “el Prædiciere” y “lo Analítico”*. Tesis Doctoral. México: Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilón,* 42, 353-369.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J. y Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: Algunos Ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Número Especial, 83-102.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* 8, 9-28.

Castellano, C., Pérez, M. y Attie, F. (2004). *Electrocardiografía clínica.* Madrid: Elsevier.

Chiou, G. y Anderson, O. R. (2010). A study of undergraduate physics students' understanding of heat conduction based on mental model theory and an ontology–process analysis. *Science Education, 94* (5), 825-854.

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la transformación y la mejora educativa.* Tesis Doctoral. México: Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav.

González, W. (2010). *La predicción científica. Concepciones filosófico-metodológicas desde H. Reichenbach a N. Rescher*. España: Editorial Montesinos.

Johnson, H. (2015): Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Estudies in Mathematics*, *89*(1), 89 – 110.

Lim, K. H., Buendía, G., Kim, O. K., Cordero, F. y Kasmer, L. (2010). The role of prediction in the teaching and learning of mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(5), 595-608.

Lobelo, R., Hernández, A., González, J. y Moro, C. (2001). Bloqueo Aurículo – Ventricular. *Medicine 8* (40), 2125-2131.

Llinás, R. (2012). Función de predicción del cerebro. En Caparros, N. y Cruz, R. (Dirs). *Viaje a la complejidad 2. Del origen de la vida a la emergencia del psiquismo*. España: Biblioteca nueva.

Planinic, M., Milin-Sipus, Z. Katic, H., Susac, A. y Ivanjek, L. (2012). Comparison of Student Understanding of Line Graph Slope in Physics and Mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*(6), 1393 – 1414.

Puente, A. (1998). *Cognición y aprendizaje. Fundamentos psicológicos*. España: Ediciones Pirámide.

Salinas, S. (2003). *Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los cursos introductorios al cálculo*. Tesis de maestría. México: Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav.

Tuyub, I. y Cantoral, R. (2012). Construcción Social del Conocimiento Matemático durante la Obtención de Genes en una Práctica Toxicológica. *Bolema 26* (42A), 311-328.

Vogel, E. H., Soto, F. A., Castro, M. E. y Solar, P. A. (2006). Modelos matemáticos del condicionamiento clásico: evolución y desafíos actuales. *Revista Latinoamericana de Psicología 38* (2), 215-243.

DISTINCIÓN ENTRE DOS PROPUESTAS PARA AFECTAR EL AULA DE MATEMÁTICAS. UNA DESDE LA MATEMÁTICA FUNCIONAL Y OTRA DESDE EL EVERYDAY MATHEMATICS

Julio Yerbes González, Francisco Cordero Osorio
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. (México)
jjyerbes@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx

RESUMEN: El presente reporte pretende dar cuenta de una investigación que tuvo por objetivo distinguir a los constructos Cotidiano y Matemática funcional, que se desarrollan en el marco del Programa Socioepistemológico, en contraposición a los constructos que se desarrollan en otras perspectivas. En particular, en este escrito se exhibe un contraste con el Everyday Mathematics, constructo que también caracteriza a un conocimiento fuera de la escuela, esto, a través de las propuestas que realizan para afectar el aula de clases de matemáticas, con la intención de disminuir la brecha entre lo escolar y la matemática de la gente.

Palabras clave: cotidiano, matemática funcional, objeto matemático

ABSTRACT: The present report shows an investigation that had as objective to distinguish the daily-life constructs and functional Mathematics that are developed in the frame of the socio- epistemological program, in opposition to the constructs that are developed in other perspectives. In particular, this paper shows a contrast with “Everyday Mathematics”, a construct that also characterizes an out of school knowledge , this, through the proposals made to affect the classroom of mathematics, with the intention of diminishing the gap between school math and people’s math.

Key words: daily, functional mathematics, mathematical object

Introducción

En la educación matemática una problemática que viven día con día profesores y estudiantes, es la falta de articulación entre la matemática escolar y el cotidiano de la gente; que al no percibirla, se torna difícil aprenderla o enseñarla según sea el caso. Desde otras perspectivas, se tiene registro de investigaciones como la de Carraher, Carraher y Schliemann (2007), estos autores exhiben este fenómeno al intercambiar los problemas de matemáticas de un niño de la calle con los de un niño de la escuela, lo impactante en este estudio es que ninguno de los dos pudo resolver los problemas propuestos.

Por su parte la Socioepistemología para dar cuenta de este fenómeno, que es la brecha entre lo escolar y el cotidiano, ha caracterizado al discurso Matemático Escolar (dME), el cual se asume como el causante (Cordero, 2016a). Por otro lado, en Cantoral (2013), se explicita que este discurso afecta a estudiantes y profesores al normar sus interacciones con un discurso (vertical), el cual determina (sin reciprocidad y sin entorno) qué se debe enseñar, cómo se debe enseñar y qué se debe aprender, eso repercute al privilegiar ciertas explicaciones, contenidos y ejemplos, limitando así las experiencias de los estudiantes y profesores.

Es así, que dentro de un Programa Socioepistemológico denominado Sujeto olvidado y Transversalidad de Saberes (Cordero, 2016b), se han realizado investigaciones con la finalidad de rescatar el conocimiento de la gente. Esto es debido a una de las premisas que se establecen en el margen del programa, la cual considera que existe un *sujeto olvidado*, que debe ser rescatado (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015).

En particular investigaciones como la de Torres (2013), López (2012), Gómez (2015), rescatan el conocimiento matemático que se desarrolla y se resignifica en las Comunidades de Conocimiento Matemático, este conocimiento tiene un carácter funcional, motivo por el cual es estudiado.

Dentro de la perspectiva teórica que sustenta a la investigación, los constructos Matemática Funcional y Cotidiano denotan un conocimiento fuera de la escuela. Por otro lado, en la Matemática Educativa existen otras caracterizaciones sobre un conocimiento fuera de la escuela. Es así, que el interés de la investigación fue realizar una distinción entre los constructos que tienen lugar dentro de la Socioepistemología con respecto a los desarrollados desde otras perspectivas teóricas. En particular, en este escrito se exhiben elementos que caracterizan a la Matemática Funcional y al Everyday Mathematics, con la intención de validar nuestra hipótesis, la cual es que la Socioepistemología se enfoca en los usos del conocimiento matemático en situaciones específicas, en tanto que otras perspectivas se enfocan en la emergencia del objeto matemático.

Las investigaciones que retomamos para realizar la distinción, es la de Pérez-Oxté (2015), para el caso de la Matemática Funcional, mientras que para el Everyday Mathematics, se retoman los resultados de Arcavi (2002).

Configuración teórica de las propuestas

En primera instancia, consideramos pertinente mostrar las caracterizaciones de los constructos involucrados en este trabajo. En un Programa Socioepistemológico, al conocimiento que se encuentra en el cotidiano, se le ha dado el carácter de Matemática Funcional,

> …la cual sus usos son resignificados en situaciones específicas donde la mayoría de las veces la matemática no es el objeto de estudio, sino más bien, para la matemática educativa, el objeto de estudio es la transversalidad de los usos del conocimiento matemático en los diferentes escenarios: la escuela, el trabajo y la ciudad. En ese tránsito los usos son resignificados (Cordero, 2016, p. 2).

Es a través de la cita anterior, que se vislumbra la primera postura, donde el foco está en los usos del conocimiento matemático propios a una comunidad y desarrollados en situaciones específicas.

De manera particular, la propuesta a analizar por parte del Programa Socioepistemológico corresponde a la situación de aprendizaje desarrollada por Pérez-Oxté (2015), en ella se retoma el trabajo realizado por Torres (2013), que exhibe una epistemología del uso de las gráficas propia a una Comunidad de Conocimiento Matemático (CCM) la cual es resignificada en función de la población a la que va dirigida la propuesta, estudiantes de Ingeniería Química Industrial. A continuación en la Figura 1, se presenta un esquema que conjunta algunos elementos fundamentales para el diseño de situaciones de aprendizaje desde esta perspectiva.

Figura 1. Elementos desde un programa Socioepistemológico de diseño de situaciones de aprendizaje para el aula de matemáticas.

En el esquema anterior es posible observar, que las propuestas para el aula de matemáticas desde el programa, no están pensadas para llevar tal cual el conocimiento matemático observado en el Cotidiano de las personas, sino que se propone una metodología que considera a la comunidad de donde se obtiene el conocimiento de referencia y a la comunidad que se piensa afectar. Por otro lado, los marcos de referencia son un elemento primordial en el programa, ya que a partir de ellos se pueden generar diversas situaciones para comunidades diversas. Por su parte, la propuesta realizada por Arcavi (2002), tiene la intención de reducir la brecha existe entre el *Everyday mathematical practice* y *mathematics in school* (*or academic*).

En específico, Arcavi (2002) considera que el *Everyday mathematical practice*, varía dependiendo del significado que las personas tengan de cotidiano, es así que se cree que depende del contexto y la práctica donde emerjan las matemáticas. Por otro lado, estas prácticas deben estar cada vez más permeadas por la vida de los niños, específicamente aquellas en las que no perciban a la matemática, pero que posteriormente se puede dar un siguiente paso hacia las matemáticas académicas. En la Figura 2, se presentan un esquema que sintetiza los elementos más relevantes usados para caracterizar al conocimiento matemático fuera de la escuela y la propuesta sobre cómo usar este en el aula de clases.

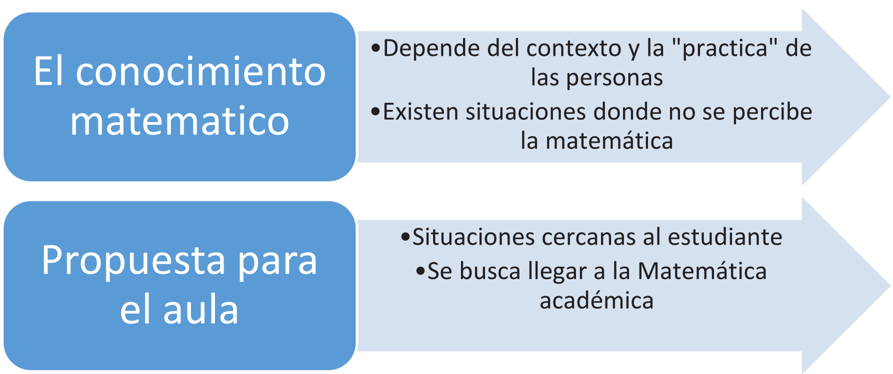


Figura 2. Elementos para afectar el aula desde la visión de Arcavi (2002).

Para la propuesta que se presenta anteriormente, es posible observar que no se especifica un filtro o un mecanismo del *Everyday practice* para llegar a la propuesta para el aula, es decir pareciera ser que es directo el paso hacia el aula. Del mismo modo, se aprecia que las situaciones que selecciona para estudiar tienen la característica que deben ser cercanas al estudiante e incluso que no se percate de la matemática.

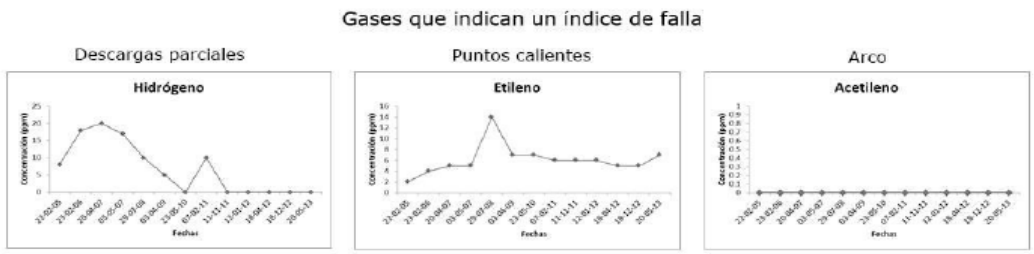
Ejemplo de dos propuestas para el aula

A continuación, presentamos las dos propuestas cuyas consideraciones para su construcción se exhibieron en el apartado anterior.

La investigación a exhibir, es la de Pérez-Oxté (2015), la cual retoma el Marco de Referencia generado por Torres (2013), quien rescata el uso de la gráfica, en una comunidad de Ingenieros Químicos Industriales. Así teniendo en cuenta estos elementos, es que configura una propuesta para el aula de matemáticas, en particular para los estudiantes de Ingeniería Química Industrial, pues es una comunidad cercana a la comunidad de donde se obtuvo el Marco de Referencia. En la Figura 3, se muestra un extracto de la situación diseñada.

LO MATEMÁTICO EN EL USO DE MODELOS GRÁFICOS DE CONCENTRACIONES DE GASES DE UN TRANSFORMADOR ELÉCTRICO

1.2 Si del año 2008 al 2009 el Etileno disminuyó de 14 ppm a 7ppm ¿Cómo



cambia la concentración del gas Etileno después del 2009?

Figura 3. Primer momento de la Situación de Aprendizaje de una CCM (IQI) en formación, (Pérez-Oxté, 2015, pp. 45-46)

En el pequeño extracto anterior, es posible observar una pregunta realizada a los estudiantes, la cual deja ver que el énfasis no está en que el estudiante determine las expresiones analíticas correspondientes a las tres gráficas, sino más bien se pretende que éste realice comparaciones entre los comportamientos gráficos, que identifique tendencias, reconozca patrones, y con base en esto realice una toma de decisión. Con ello lo que se pretende ilustrar es que el énfasis de esta propuesta no está en mirar la emergencia de los conceptos matemáticos ni observar cómo el estudiante determina una función, sino por el contrario se enfoca en el uso del conocimiento matemático en una situación específica.

Por su parte, en la Figura 4 se presenta la descripción de una actividad que Arcavi (2002), propone como un ejemplo para disminuir la brecha entre lo académico y el cotidiano, esta actividad pretende ilustrar una experiencia cercana a los estudiantes que según el autor, puede ser utilizada como algo previo al tratamiento de nociones matemáticas más formales, es decir, debido a que puede parecer que la matemática no está presente o explícita, es que son idóneas para posteriormente formalizar el conocimiento que está de fondo.

Magia con números. Les solicito que se introduzca en la calculadora un número de tres cifras xyz, y que lo repitan para tener un número de seis cifras $xyzxyz$. Me concentro con la teatralidad como la de los magos, y les digo, «Ahora dividan el número por 91». Y comento, «estoy seguro que obtuviste un número entero por cociente», lo que causa gran sorpresa, y cuando les digo que si dividen dicho cociente por 11 obtendrán el número de partida, y verifican mi afirmación, la sorpresa aumenta. Y es mayor la sorpresa y la curiosidad al ver lo que resulta al dividir el otro número cualquiera $xyzxyz$, por 142 y luego por 7.

Figura 3. Ejemplo de una actividad propuesta (Arcavi, 2002, p. 15)

La postura que está de trás del ejemplo de la Figura 4, es que se considera a las experiencias o situaciones fuera de la escuela con el fin de servir como base para poder llegar a una matemática más formal, es decir, lo que significa que son usadas meramente como un contexto que permita la introducción de un tema matemático al aula. También es posible observar que la situación es artificial, es decir está diseñada para introducir la idea de ecuaciones, por lo que no forma parte de algo que un estudiante realice muy a menudo en su vida, por lo que desde un inicio al proponer la actividad ya se sabía que concepto matemático se deseaba desarrollar.

De las dos propuestas que se presentaron a través de las Figuras 3 y 4, se puede observar un fuerte contraste sobre el objetivo de cada propuesta, en lo que corresponde a la desarrollada dentro del Programa Socioepistemológico, su objetivo no está en el objeto matemático, sino en los usos del conocimiento matemático que subyacen de la práctica de una comunidad de conocimiento matemático. Por su parte, Arcavi, en su propuesta, considera fuertemente al objeto matemático, es decir, desde un inicio ya sabe qué es lo que desea desarrollar en los estudiantes, por lo que recurre a un contexto "cercano al estudiante" para introducir el tema de su interés y poder, más adelante, realizar una formalización del conocimiento matemático que deseaba.

Esto marca una clara diferencia sobre el foco de cada propuesta, la cual se configuró en nuestra hipótesis, por lo que para el caso de estas dos propuestas, reconocemos que una diferencia está en que el *Everyday practice*, su propósito es el desarrollo de cierta matemática formal, mientras que desde la Matemática Funcional, se busca el uso del conocimiento matemático.

Consideraciones finales

Teniendo en cuenta los elementos presentados en el apartado anterior, es que se puede afirmar que una distinción entre las dos propuestas es que una centra la atención en el objeto matemático en contraposición a la otra que se preocupa por los usos del conocimiento matemático.

Por otro lado, pareciera ser que la propuesta de Arcavi, le asigna un valor inacabado al conocimiento matemático fuera de la escuela, esto debido a que lo usa como un “puente” para llegar al objeto matemático, el cual tiene lugar en la formalización de la matemática. Mientras que la propuesta de Pérez-Oxté (2015), considera el rescate del conocimiento de una comunidad y tras la construcción de una epistemología realiza la propuesta que siga considerando dichos usos del conocimiento, dándole así un estatus a la matemática propia a las comunidades.

Para finalizar, este contraste mostrado a lo largo del escrito, así como el que se propone en Yerbes (2016), permiten dar cuenta que lo que se desarrolla dentro del Programa Socioepistemológico, conforma una alternativa para trastocar al discurso Matemático Escolar. Es decir, se apuesta que para un cambio en la matemática escolar, una posible dirección es considerar y rescatar el conocimiento matemático de la gente, el cual a causa de este discurso ha sido olvidado y soslayado de las aulas de clase y de las experiencias de los estudiantes y profesores.

Referencias Bibliográficas

Arcavi, A. (2002). The Everyday and the Academic in Mathematics. In Breneer, M.E. & Moschkovick, J.N. (Eds.), *Everyday and Academic Mathematics in the Classroom* (pp. 11-29). Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics [NCTM].

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona. Gedisa.

Carraher, T., Carraher, D. & Schliemann, A. (2007). *En la vida diez, en la escuela cero*. México. Siglo veintiuno.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. & Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar. La adherencia, la exclusión y la opacidad*. España. Gedisa.

Cordero, F. (2016a). Modelación, Funcionalidad y Multidisciplinariedad: El Eslabón de la Matemática y el Cotidiano. En L. Díaz y J. Arrieta (Eds). *Investigaciones latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa*. (pp. 59-88). México: Gedisa.

Cordero, F. (2016b). La función social del docente de matemáticas: pluralidad, transversalidad y reciprocidad. Conferencia en las XX Jornadas Nacionales de Educación Matemática de la Sociedad Chilena de Educación Matemática. Valparaíso, Chile.

Gómez, K. (2015). *El fenómeno de opacidad y la socialización del conocimiento. Lo matemático de la ingeniería agrónoma*. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

López, S. (2012). *Un estudio de la matemática del ciudadano*. Tesis de Maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Pérez-Oxté, I. (2015). *Los usos de la gráfica en una comunidad de Ingenieros Químicos Industriales en Formación. Una base para el diseño de una situación de aprendizaje*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Torres, L. (2013). *Usos del conocimiento matemático. La simultaneidad y la estabilidad en una comunidad de conocimiento de la ingeniería química en un escenario de trabajo*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Yerbes, J. (2016). *El rol de los constructos Cotidiano y Matemática Funcional en la Matemática Educativa. Sus diversidades ontológicas y epistemológicas*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

MATEMÁTICA FUNCIONAL EN UNA COMUNIDAD DE CONOCIMIENTO DE INGENIEROS. TRANSVERSALIDAD DE LA ESTABILIDAD

E. Johanna Mendoza Higuera y Francisco Cordero Osorio
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. (México)
ejmendoza@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx

RESUMEN: En esta investigación se trata de construir un marco de referencia que caracterice y estructure los usos de la estabilidad en situaciones específicas. La problemática en cuestión, radica en el hecho de que hay usos del conocimiento matemático de la ingeniería que son diferentes en la Matemática Escolar. Buscamos identificar aspectos de funcionalidad que permitan construir un diálogo entre el aula y la realidad. En este avance de investigación se mostrará, *grosso modo*, la resignificación de la estabilidad y la metodología que estamos conformando. Con ello, pretendemos construir un marco socioepistemológico que oriente el diseño de situaciones para el aula: generar situaciones de socialización que amplíen los episodios de aprendizaje donde el estudiante construye conocimiento de lo estable en situaciones específicas propias de la ingeniería.

Palabras clave: socioepistemología, ingeniería, estabilidad, usos

ABSTRACT: This research attempts to construct a reference framework that characterize and structure the uses of stability in specific situations. The problem in question lies in the fact that there are uses of mathematical knowledge in engineering that are different in school Mathematics. We seek to identify aspects of functionality that allow us to construct a dialogue between the classroom and reality. This research progress will show, roughly speaking, the reinterpretation of stability and the methodology that we are elaborating. Thus, we try to construct a socio-epistemological framework that guide the design of situations for the classroom: to generate situations of socialization that spread learning experiences where the student constructs knowledge of stability in specific situations of engineering.

Key words: socio-epistemology, engineering, stability, uses

Introducción

Uno de los propósitos de la educación, es proveer a los ciudadanos de conocimientos que les permitan mejorar sus condiciones de vida. Múltiples ejemplos dan cuenta que este objetivo no ha sido alcanzado (Callejo et al, 2010 citados por Gómez-Osalde, 2015). En específico, con respecto a la matemática, Gómez-Osalde (2015) ha reportado que la matemática escolar no trasciende al cotidiano del estudiante. Lo que se "aprende" en la escuela, se queda en la escuela. Por otro lado, sólo se dibuja una dirección de acción de la matemática escolar al cotidiano; para Cordero (2016) la escuela se interesa en conocer *lo que sabe* un estudiante y no *cómo usa su conocimiento*. Se afirma que en escenarios no escolares, el ciudadano que actúa ante una situación específica, se vale de justificaciones que le son funcionales. Es decir, las justificaciones funcionales responden a lo que es de utilidad a la gente (Cordero 2016). Así, se observa una débil relación entre la matemática escolar y la matemática de la gente, la una no afecta a la otra.

Por otro lado, la relación histórica que guardan la matemática y la ingeniería, estructura los entornos en los que se desempeña la comunidad de conocimiento matemático de ingenieros (CCM(Ing)) y da muestra de la relación recíproca entre realidad y matemáticas. Por ejemplo, Fourier en su trabajo Thèorié Analytique de la Chaleur de 1822 describe el comportamiento de la propagación del calor en los sólidos y para ello busca lo estable y permanente en el tiempo. En todo el desarrollo está presente el referente *físico concreto* que le permitió iniciar el estudio de la convergencia (Farfán, 2012). Lo anterior nos muestra la relación recíproca entre la construcción de un conocimiento matemático y un fenómeno físico. Ahora, la fundación de instituciones como École Polytechnique en Francia y el Real Seminario de Minas en México, marcaron un momento histórico en el desarrollo de la ingeniería como disciplina. La primera institución fue fundada en 1792 en París. Antes y después de este momento el desarrollo del conocimiento estuvo ligado con las actividades militares que consistían en la elaboración de artefactos para la guerra y la construcción de vías y fortificaciones. Es así como la construcción de conocimiento matemático estaba ligada a la realidad social de la época y, por esta razón, se constituyeron programas que favorecieron la funcionalidad del conocimiento matemático (Mendoza, 2016). En la matemática escolar se presentan conocimientos desprovistos de la realidad, importan las significaciones desde la matemáticas pero no así de la ingeniería.

Cordero (2001 y 2016) exhibe una confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar. Esta última no reconoce la función del conocimiento matemático, la organización que lo produce, ni su rol en el aula. Entonces ¿cómo interpretar, reorganizar y resignificar la obra matemática?, ¿cómo incursionar permanentemente dentro de las comunidades de conocimiento? Lo que aquí se teorice, debe ir acompañado del empirismo que ayude a conocer la experiencia propia de las comunidades de conocimiento.

En síntesis, el propósito de esta investigación consiste en caracterizar elementos de la funcionalidad de un conocimiento matemático (la estabilidad) en la transversalidad entre la obra matemática, la ingeniería y la gente. Todo esto conformará una epistemología de usos para el rediseño del Discurso

Matemático Escolar (dME). Identificar usos de la matemática *desde* la ingeniería, tanto en su *saber* como en el *hacer*, así como la intencionalidad para llevarlo al aula, nos obligan a identificar un constructo de diálogo continuo y permanente entre las comunidades de conocimiento involucradas.

Las matemáticas en la formación de los ingenieros

Se ha evidenciado un modelo tradicional en la formación de los ingenieros. Los primeros semestres se orientan a la enseñanza de las ciencias básicas, después se acerca a los estudiantes a las ciencias de la ingeniería; y finalmente se abordan los cursos profesionales donde trabajan problemas de la ingeniería en los que usarán los conocimientos “aprendidos” en los semestres anteriores (Langereis, Hu y Feijs, 2013). En este sentido, la matemática es vista solo como una herramienta y no como un instrumento para la construcción de conocimiento disciplinar.

Contamos con antecedentes para creer que en la formación y en la práctica laboral del ingeniero están involucrados conocimientos específicos de otras disciplinas como la matemática, la física, la química, la tecnología y la programación, por mencionar algunas; es decir, la ingeniería es multidisciplinar. Sin embargo, a pesar de reconocerlo, lo que ha imperado es la jerarquización de los conocimientos, donde la matemática es el núcleo principal y no así los conocimientos matemáticos desde la ingeniería. Pareciera que el dME cumple con su acometido: no ofrece al docente otros marcos de referencia para resignificar el conocimiento y así gestionar en el estudiante una matemática funcional (Mendoza, 2013).

En los últimos años, se ha estudiado la incorporación de la modelación matemática como estrategia de enseñanza de la matemática en los diferentes niveles educativos, así como en la formación de ingenieros (Romo-Vázquez, 2014, Rodríguez, 2016; Cardella, 2010; Camarena, 2009). En algunos casos se diseñan situaciones para el aula donde se lleva a los estudiantes a transitar por los diferentes dominios y fases del proceso de modelación matemática; y en otros, después de determinar ciertos métodos, propios de la ingeniería, se plasman en una situación didáctica. En esta situación la solución del modelo analítico juega un papel importante.

Normalmente, se promueve una modelación matemática para el aula que parte de una realidad preexistente que se quiere modelar y donde el modelo que se busca, se considera que *a priori* existe y se puede representar gráfica o analíticamente. Esto es bastante discutible. Los artículos revisados de investigadores que trabajan desde la matemática en el escenario del trabajo, confirman que en el proceso de modelación matemática, el ingeniero construye esa realidad que va a modelar (Bissell y Dillon, 2000) a la par que resignifica la matemática. Es decir, la realidad se construye a la par del conocimiento matemático (Cantoral, 2013; Cordero, 2001, 2008).

Si bien estas estrategias han sido un avance en el intento de acercar al estudiante al conocimiento propio de su realidad profesional, no se han enfocado en analizar la matemática o la modelación propia de la ingeniería, ni tampoco han discutido ¿qué matemática debemos enseñar a los estudiantes de ingeniería?, ¿qué modelación matemática usa el ingeniero en su práctica profesional?

En nuestro caso, nos interesa entender la función social del conocimiento matemático desde la ingeniería y a partir de ahí generar situaciones de socialización que amplíen los episodios donde el estudiante construye conocimiento.

Construcción social del conocimiento matemático. La Teoría Socioepistemológica

La Teoría Socioepistemología (TSE) establece que la matemática escolar es de naturaleza dual. Es decir: el conocimiento matemático tiene funciones diferentes según su uso. Para los matemáticos es su objeto de estudio, mientras que, en otras disciplinas, la matemática es tomada como un instrumento. Así, existen profesionales usuarios del conocimiento matemático, que no son matemáticos y que usan la matemática como un instrumento en su práctica profesional (Cordero, 2008). Al analizar estos usos, se observa que las justificaciones que se dan a la construcción del conocimiento matemático, también son diferentes. Por un lado, impera la justificación racional producto de la actividad matemática y por el otro, aparece la justificación funcional que surge de la actividad humana (Cordero, 2016) y que conlleva una intencionalidad definida por su cotidiano disciplinar.

Identificar elementos de la justificación funcional, amplía la problemática propia de la matemática escolar y ofrece formas de proponer otro marco de referencia para la enseñanza de la matemática en los diferentes niveles educativos (Cordero, 2016). Entonces ¿cómo construir este marco?, ¿cómo identificar estos elementos?, ¿qué usos del conocimiento matemático suceden en otras disciplinas?

Entender cómo un sujeto construye conocimiento desde su condición de ciudadano, en los diferentes escenarios en los que participa, caracterizar los elementos de función y forma del uso del conocimiento en el cotidiano permitirán construir el marco de referencia ya mencionado, así como los procesos de socialización: lo orgánico, lo situacional y lo intencional (Gómez-Osalde, 2015; Cordero et al, 2016); coadyuvarán a la constitución de diseños de socialización del conocimiento.

Usos de la estabilidad en la ingeniería

Nuestra investigación, busca aportar al marco de referencia mencionado desde el estudio de usos de la estabilidad. Para evidenciar una transversalidad de estos usos proponemos identificar las resignificaciones de la estabilidad en diferentes escenarios como la obra matemática, el cotidiano, el dME y la Ingeniería.

La hipótesis que planteamos en esta parte del trabajo, es que existe una categoría propia de la matemática funcional que articula estas resignificaciones de la estabilidad y que denominamos Categoría del Comportamiento Tendencial de las Funciones ζ(ctf).

Trabajos como el de Zaldívar (2014) y Ruiz-Esparza (2014) han evidenciado que el ζ(ctf) emerge en situaciones movimiento y temperatura, cuando se trabaja con niños y jóvenes en un ambiente de divulgación. Solís (2012) y Mendoza (2013) trabajando en escenarios escolares de la ingeniería identifican las ecuaciones diferenciales lineales como modelos de estabilidad. El primer autor, por medio de la simulación tecnológica, con estudiantes de ingeniería, evidencia un patrón de construcción de estas ecuaciones donde el comportamiento tendencial se convierte en el hilo conductor de esta situación. La segunda autora formula un diseño de situación para ingenieros civiles en formación y caracteriza, en una situación de acumulación de fluidos, la forma cómo los estudiantes significan la estabilidad como un momento en el que se quiere alcanzar un equilibrio y la variación es cada vez más pequeña. En estos dos trabajos, también encontramos elementos de la ζ(ctf).

Desde nuestra investigación, se han analizado los programas curriculares de una institución que forma ingenieros electrónicos, libros de texto de matemáticas y libros de sistemas de control utilizados para su formación.

En la revisión de los programas se confirmó la secuenciación de asignaturas ya mencionada. También, a pesar de llamar a algunos cursos como Cálculo para la Ingeniería en el detalle de las temáticas, da a entender que el docente impartirá los contenidos de la misma forma para cualquier especialidad de ingeniería. El libro de texto más usado es Elementary Differential Equations and boundary Value Problems de Boyce & Diprima (en este caso se revisó la edición de 1977). La estructura que desarrolla este texto para el estudio de las ecuaciones diferenciales, es dar los conceptos matemáticos y después algunos ejemplos de aplicación en la física y la biología. Los problemas planteados ya ofrecen al estudiante la expresión matemática que modela los fenómenos y éste analizará la solución y estabilidad de la ecuación diferencial según los criterios que se resumen. Si bien estos métodos son importantes, ofrecen al estudiante una sola mirada del conocimiento matemático, desprovista de toda funcionalidad desde la ingeniería.

En el texto Sistemas de Control Automático de Kuo (1996), se afirma que el diseño de sistemas de control lineal se puede ver como un problema que consiste en transformar ciertos parámetros para que un sistema se comporte de acuerdo a cierto valor de referencia. Además, dentro de las especificaciones de desempeño utilizadas en el diseño de un sistema de control, uno de los requerimientos es que sea estable. Lograr la regulación o estabilización, es tratar de mantener la señal de salida muy pequeña o cercana a algún punto de equilibrio o valor de referencia. Para Kuo, la estabilidad es una noción que describe “si un sistema es capaz de seguir el comando de entrada, o en general, si dicho sistema es útil” es decir “un sistema se dice inestable si sus salidas se salen de control” (1996, pp. 12). Aquí observamos que la estabilidad tiene funciones y formas: caracterizar el desempeño de un sistema de control, que contrastan con las funciones y formas encontradas en los libros de texto de matemáticas.

Por lo anterior, hemos convenido profundizar el estudio de usos de estabilidad en el escenario de la obra matemática y en comunidades de ingenieros electrónicos (ingenieros investigadores e ingenieros profesores). Para el primer escenario, nos centramos en la Teoría de Estabilidad propuesta por A.M. Lyapunov y en el segundo nos interesa poner atención en situaciones propias del análisis y diseño de sistemas de control. Esto nos permitirá identificar cuáles son las transversalidades de resignificaciones de los usos de la estabilidad.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Para alcanzar nuestro objetivo, ha sido importante concebir una forma de acercarnos a la comunidad de ingenieros con miras a identificar sus usos de conocimiento en el escenario del trabajo y, a la vez, construir un diálogo permanente. Esta metodología nos permitirá caracterizar a la comunidad de conocimiento matemático de ingenieros desde sus elementos de reciprocidad, intimidad y localidad, las formas de institucionalización de su conocimiento y los aspectos de identidad que los hace llamarse ingenieros.

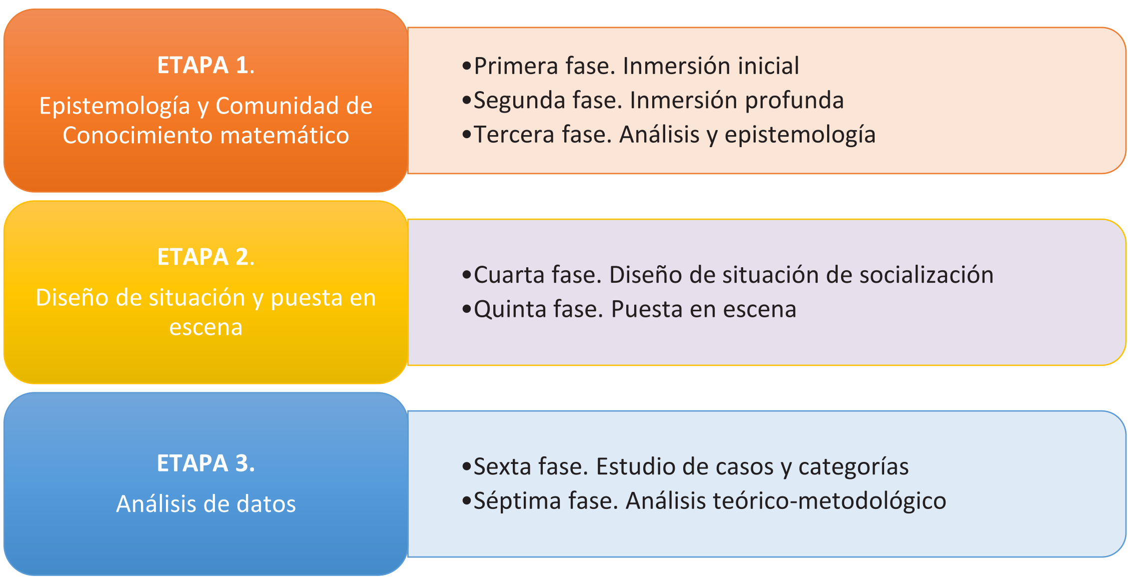


Figura 1. Etapas metodológicas (Mendoza, 2016)

El principal interés de la investigación, consiste en revelar el conocimiento matemático de los ingenieros, por ello creemos en la necesidad de dibujar los escenarios y vivencias en los que se construyen estos conocimientos matemáticos.

Por el momento, se ha considerado que, retomando aspectos de los estudios etnográficos, podemos adentrarnos en la comunidad. Así conformamos una metodología de recolección y análisis de datos en tres etapas (Figura 1). En la primera etapa, en las dos primeras fases, consideramos la inmersión como un método en el cual el investigador vivirá un acercamiento profundo que le permita revelar *in situ* las formas de construcción de conocimiento desde el punto de vista del ingeniero. Requerimos escuchar y observar al ingeniero en su escenario y tener en cuenta sus interpretaciones del mundo que lo rodea, de su realidad, de su práctica. Es decir: recuperar la voz del ingeniero en las situaciones de socialización.

Conclusiones

Hasta aquí, hemos mostrado la problemática que identificamos en la enseñanza de la matemática en la ingeniería y la forma como la estamos abordando con base en la TSE. También se ha señalado, la importancia de estudiar los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones desde diferentes escenarios, de tal forma que nos permita hacer un enlace entre la matemática escolar y la realidad. Nuestra investigación ha podido evidenciar, por ahora, diferentes elementos entorno a la problemática. Por ejemplo, para revelar el uso de la estabilidad en una comunidad de ingenieros necesitamos caracterizar sus formas de construcción. Es decir, reconocer el conocimiento íntimo que expresa su jerga disciplinar; el conocimiento local que nos permita ver elementos propios de su práctica; reciprocidades de conocimiento que dibujan la forma en que se desarrollan sus usos de conocimiento. De esta manera, lo que logremos dibujar en torno a los significados, procedimientos y argumentaciones dará evidencias de la funcionalidad de su matemática.

Referencias bibliográficas

Bissel, C. y Dillon, C. (2000). Telling Tales: Models, Stories and Meanings. *For the learning of Mathematics*. 20(3). pp. 3-11.

Boyce, W.E. y DiPrima, R.C. (1977). *Elementary Differential Equations and boundary Value Problems*. 3rd. Edition. USA: John Wiley & Sons, Inc.

Camarena, P. (2009) Mathematical models in the context of sciencies. In Topic Study Group 21: *Mathematical apllications and modelling in the teaching and learning of mathematics, at the 11th ICME*, pp. 117 –131. Monterrey, México

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Barcelona: Gedisa

Cardella, M. (2010). Mathematical modeling in engineering design projects. In R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines y A. Hurford (Eds.) *Modeling students´ mathematical modeling competencies*, pp 87 – 98. New York: Springer.

Cordero, F. (2016) Modelación, funcionalidad y multidisciplinariedad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz. *Investigaciones Latinoamericanas de Modelación. Matemática Educativa.* España: Gedisa.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano*, pp. 265-286. México, D.F.: Díaz de Santos-CLAME A.C.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 4(2), pp. 103-128.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad.* España: Gedisa.

Farfán, R. (2012). *Sociepistemología y ciencia. El caso del estado estacionario y su matematización.* España: Gedisa.

Gómez-Osalde, K. M. (2015). *El fenómeno de opacidad y la socialización del conocimiento. Lo matemático de la Ingeniería Agrónoma*. Tesis de doctorado no publicada. DME, Cinvestav-IPN, México.

Kuo, B. (1996). *Sistemas de control automático*. 7ª. Ed. México: Prentice- Hall Hispanoamericana, S.A.

Langereis, G. Hu, J. & Feijs, L. (2013) How to introduce mathematical modelling in Industrial Design eduacation? In G.A. Stillman, W. Blum, G. Kaiser, & J. Brown, (Eds.) *Teaching mathematical modelling: connecting to research and practice*, pp. 551 – 561.

Mendoza, E.J. (2016). *Matemática funcional en una comunidad de conocimiento de ingenieros. El caso de la estabilidad en la electrónica*. Documento Predoctoral, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México.

Mendoza, E.J. (2013). *Matemática funcional en una comunidad de conocimiento: el caso de las ecuaciones diferenciales lineales en la ingeniería*. Tesis de maestría no publicada. DME, CINVESTAV, México.

Rodríguez, R. (2016). Enseñanza y aprendizaje de matemáticas a través de la modelación desde y para la formación del ingeniero. En J. Arrieta y L. Díaz (Coords.) *Investigaciones Latinoamericanas en modelación. Matemática Educativa*, pp. 163 – 193.

Romo-Vázquez, A. (2014). La modelización matemática en la formación de ingenieros. Educación Matemática. *Revista Educación Matemática*, Edición especial, pp. 314-338.

Ruiz-Esparza, A. (2014) *Rediseño de una situación específica desde una categoría del cotidiano: de la divulgación a la socialización de la ciencia.* Tesis de maestría no publicada. Departamento de matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Solís, M. (2012). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del Cálculo. El caso de la predicción y la simulación en las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden*. Tesis de doctorado no publicada. DME, CINVESTAV, México.

Zaldívar, D. (2014). *Un estudio de la resignificación del conocimiento matemático del ciudadano en un escenario no escolar*. Tesis de doctorado no publicada. México: Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav.

EL PERIODO DE UNA FUNCIÓN: UNA PROPUESTA PARA RESIGNIFICAR SU APRENDIZAJE A PARTIR DE LO INTUITIVO, LA MODELACIÓN Y PREDICCIÓN

Laura Tun Uc
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán (México).
laura.tun@hotmail.com

RESUMEN: Este trabajo presenta una propuesta de aprendizaje dirigida a estudiantes de Pre-cálculo del nivel Medio Superior, producto de un proyecto escolar cuya finalidad consistió en crear estrategias innovadoras en el proceso de enseñanza aprendizaje que permitieran la construcción de conocimientos y el aprendizaje significativo de las matemáticas favoreciendo el empleo de los recursos didácticos.

Esta propuesta tiene dos intencionalidades, primeramente pretende favorecer la construcción y resignificación de *la noción periodo* como introducción a la función periódica*,* lo anterior se desarrolla a partir de la modelación de situaciones periódicas con ayuda de sensores de movimiento y de luz. La segunda intencionalidad es contribuir en el *rediseño del discurso escolar* respecto a las funciones periódicas.

Palabras clave: resignificar, periodo, conocimiento intuitivo, predicción

ABSTRACT: This paper presents a proposal of learning addressed to students of Pre-calculus at upper high school, as a result of a school project whose purpose was to create innovative strategies in the teaching-learning process that allowed the construction of knowledge and significant learning of mathematics favoring the use of didactic resources. This proposal has two purposes. First, it aims to favor the construction and reinterpretation of the notion period as an introduction to the periodic function. It is developed from the modeling of periodic situations with the help of motion and light sensors. The second purpose is to contribute to redesign the school discourse with respect to the periodic functions.

Key words: reinterpretation, period, intuitive knowledge, prediction

Introducción

El cálculo es la herramienta matemática más útil para la descripción de fenómenos, desde sus inicios hasta la actualidad es considerada como la matemática del cambio y la variación (Reséndiz, 2004). En el proceso de enseñanza del cálculo en el nivel medio superior, en especial de la función periódica, la mayoría de los profesores optan por instruir a sus estudiantes de forma procedimental la cual no permite la comprensión de lo variacional y periódico que implica este objeto de estudio.

La importancia del estudio de la función periódica radica en el análisis de su comportamiento repetitivo para la predicción de estados futuros, por lo que en su proceso de enseñanza aprendizaje las tareas relativas a las prácticas de modelación y predicción son fundamentales para la construcción de estos conocimientos (Buendía, 2004). Relativo a lo anterior, es importante enfatizar, que para realizar predicciones en diferentes instantes es preciso definir tanto el estado inicial de una función (caracterización local) como su comportamiento (periodo) (Cordero y Martínez, 2002).

En la imagen 1 se presenta la organización del sistema de predicción global, donde todo el proceso se centra y reduce en la importancia de reconocer el *periodo*, para finalmente poder predecir. Por lo que el aprendizaje del periodo debe ser fundamental para la construcción de nuevos conocimientos que involucren la práctica de predecir.

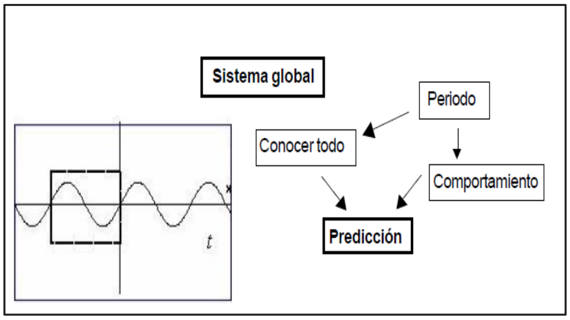


Imagen 1. Sistema de predicción global según Buendía (2006)

Por otro lado, comúnmente la enseñanza del cálculo escolar se reduce a un discurso en el que se promueve la memorización de definiciones y propiedades, el concepto *periodo* de una función es tratado de manera algorítmica y centrado únicamente en el tema de *funciones periódicas* en asignaturas como Pre-cálculo o Cálculo, donde la mayoría de los libros de texto incluidos Swokowski (1982) y Leithold (1999), presentan definiciones similares a la siguiente:

Una función f es periódica, en periodo P si existe un número real positivo P, tal que para cualquier punto x del dominio se verifica $f(x+P)=f(x)$.

En esta definición, P es considerado como una característica o norma para la construcción de curvas, en especial de las funciones trigonométricas (Buendía, 2011), siendo P el menor valor real que se encuentra en la representación gráfica de una función periódica, además la importancia de su estudio se centra en determinar, si las representaciones gráficas tienen o no un comportamiento periódico empleando la definición y el valor que define dicho comportamiento, en este caso P, al cual solo se le asigna un valor entero, no tiene un significado propio. Lo anterior origina una falta de sentido hacia esta definición, ya que la periodicidad solo es concebida como un proceso y no puede ser transformada en un objeto, lo que puede llevar al estudiante a identificar un periodo de un fenómeno periódico que no es necesariamente correcto (Cordero y Martínez, 2002), mismo que en la enseñanza tradicional se consideraría como un aprendizaje no adquirido.

Consideraciones teóricas

Para que el aprendizaje de las matemáticas sea significativo y funcional debe considerarse el rediseño del discurso matemático escolar, el cual evite presentar los conceptos como objetos ya acabados, pues “un concepto no puede ser reducido a su definición, al menos si se está interesado en su aprendizaje y enseñanza” (Vergnaud, 1990, p. 133). Debido a ello es importante promover en el estudiante la necesidad de significar conceptos y construir pensamientos matemáticos para así permitir la movilidad de los conocimientos adquiridos en la escuela hacia otros contextos.

Considerando la importancia por la construcción del pensamiento y conocimiento matemático referente a lo periódico Buendía (2004), propone una epistemología cuyos elementos estén extraídos de las prácticas que realiza el individuo al tratar con aspectos del comportamiento repetitivo de gráficas de funciones que describen movimientos; a esta epistemología de prácticas le llamó Socioepistemología de lo periódico que habla de una relación entre lo periódico y la práctica de predecir Buendía (2006).

Por otro lado, se sabe que la enseñanza de las matemáticas se limita al empleo de libros de texto como material de apoyo los cuales generalmente se centran en la presentación de definiciones y propiedades; para evitar este modo de enseñanza y para promover la construcción de pensamientos matemáticos se propone el empleo de la Tecnología de los Sensores dado que, ofrece al estudiante posibilidades nuevas no solo para explorar y entender el mundo sino también para verlo representado simbólicamente de manera que aumentan considerablemente la comprensión (Thinker, 2004). Al respecto Codina y Lupiañez, (2004) mencionan que al trabajar conjuntamente con un sensor y una calculadora, los estudiantes pueden capturar, ver y analizar datos de movimiento extraídos de una práctica real, es decir, pueden modelizar experiencias físicas lo que supone una enorme ventaja con respecto a las tradicionales actividades con papel y lápiz. De igual modo resulta importante mencionar que existen Investigaciones realizadas en el marco de la Evaluación Nacional de Progreso Educativo (NAEP, por su sigla en inglés) auspiciado por el Departamento de Educación de los Estados Unidos, que demuestran que los estudiantes que utilizan sensores, sondas y computadores para recolectar y analizar información obtienen puntajes más altos en Ciencias que quienes no lo hacen (Godier, 2015).

Organización de los libros de texto

Como se ha mencionado el material que emplean los profesores para la enseñanza de la función periódica son los libros de texto, y de este depende el discurso que emplea para su enseñanza. Por ello se realizó una revisión de los libros de texto empleados en el nivel medio superior para la enseñanza de las funciones periódicas, de donde se concluyó lo siguiente (**Tabla 1**):

Tabla 1. Desarrollo de la función periódica presentada en libros de texto

Libro empleados en el nivel medio superior	Desarrollo del tema
Leithold, L. (1999)	I. Definición de función periódica: $f(x+p)=f(x)$ II. Define al periodo como el valor de p III. Ejemplifica con funciones seno y coseno. Puntualiza mediante ejemplos, la aplicación analítica de la propiedad $f(x+p)=f(x)$
Barnett, R., Ziegler M. y Byleen, K. (1999)	I. Construcción de periodicidad con base en el círculo unitario. II. Definición de función periódica: $f(x+p)=f(x)$ III. Ejemplifica y analiza el comportamiento periódico de las funciones seno y coseno.
Stewart, J. (2009)	I. Presenta las funciones seno y coseno. II. Posteriormente las características de las funciones seno y coseno como periodicidad de $2k\pi\ \forall k \in \mathbb{Z}$ III. Definición de función periódica y periodo, como una norma para el trazado de curvas. $f(x+p)=f(x)\ \forall x \in D_f$
Larsson,R., Hostetler, R. y Edwarsd, B. (1995).	I. Una característica de función trigonométrica es el *periodo.* II. Definición de función periódica: $f(x+p)=f(x)\forall x \in D_f$ III. Se trabaja con el término *amplitud* y se relaciona con el *periodo.* IV. Ejemplificación gráfica de diversas funciones periódicas (las más comunes)

Al analizar el tratamiento didáctico que se brinda al concepto o noción de periodo de una función periódica en la enseñanza de las matemáticas, se infiere que éste se reduce a una definición formal, seguida de ejemplificación y la posterior aplicación de una fórmula, como se puede observar los libros de textos más empleados para la enseñanza de este tema en el nivel medio superior emplean procedimientos similares, ninguno pretende la construcción de conocimientos.

Conocimientos intuitivos

Buendía y Vázquez (2007) mencionan que los estudiantes tienen representaciones cognitivas de la periodicidad y del concepto periodo, ya que es una propiedad identificada de manera natural por los individuos. Los estudiantes tienen ciertas vivencias relacionadas con fenómenos de comportamiento repetitivo (aquellos que suceden cada determinado tiempo), los cuales en un principio pueden identificarse a partir de la observación y experimentación (ejemplo de esto son las horas del día y la noche, temporadas de lluvia/sequia/ciclones, lluvia de estrellas, fenómenos lunares, entre otros), de modo que cuando un individuo se introduce al ámbito educativo de manera particular para las matemáticas ya tiene ciertas concepciones, que como tal no son incorrectas, simplemente no cumplen con las definiciones matemáticas asociadas. Por ejemplo el estudiante puede tener ideas intuitivas sobre el periodo producto de alguna vivencia, sin embargo no coinciden con aquello que se considera en una definición matemática como *el menor valor real*.

Considerando la realidad anterior, se retoman los resultados de Buendía (2011) para construir o resignificar el periodo de la función periódica como la unidad de análisis que describe el comportamiento de una función periódica y con ello predecir estados futuros sin embargo, esta propuesta ofrece analizar el periodo desde una *etapa cero* en la cual el estudiante aún no ha tratado con funciones periódicas de modo que, emplea las concepciones intuitivas que posee para significar la *noción de periodo*, es decir, el estudiante le asigna un significado al periodo como aquella unidad de análisis que permite describir el comportamiento repetitivo de una representación gráfica, que de manera contigua le permite asociar un significado natural, al tema *función periódica,* pues se razonaría sobre cierta unidad de análisis que define su comportamiento.

Diseño de la propuesta

La propuesta se centra en el estudio de gráficas que modelan situaciones periódicas, con actividades fundamentadas en la Teoría Socioepistemológica, en la cual a través de las prácticas sociales y el empleo de tecnología de sensores se pretende la resignificación del periodo en representaciones gráficas de situaciones modeladas con el uso de sensores de movimiento y de luz y calculadoras graficadoras.

En el diseño se consideraron los aspectos que se representan en la **imagen 3**. La experiencia inicia con actividades donde se emplean los conocimientos intuitivos para describir situaciones periódicas, después se continua con la modelación de fenómenos periódicos con ayuda de los sensores de movimiento y de luz, los cuales permiten obtener una mejor comprensión de los comportamientos periódicos, y con base en ello determinar estados futuros de modo que, al considerar esta proceso lógico en la experiencia de aprendizaje se pretende el logro del objetivo, resignificar el periodo.

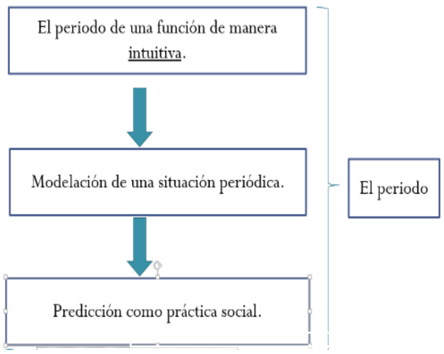


Imagen 3. Etapas de la experiencia.

En la primera actividad, se trabaja con representaciones gráficas con comportamientos periódicos en la cual se espera que los estudiantes puedan describir comportamientos de representaciones gráficas que modelan situaciones cotidianas periódicas.

En este primer momento se inicia con situaciones periódicos de la vida diaria que relacionan cambios de comportamientos con respecto al tiempo, de modo que los estudiantes emplean las concepciones que tienen a cerca de lo periódico para poder describirlos y a partir de la observación y análisis determinar estados próximos del objeto en cuestión. Esto se logra a partir de una necesidad, por ejemplo se trabaja con las mareas altas y bajas en las cuales es necesario conocer estados futuros para prevenir la estancia de personas en playa y así evitar accidentes.

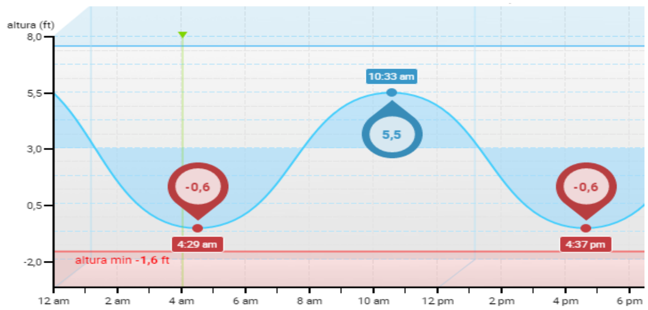


Gráfico 1. Alturas de la marea alta.

Seguidamente se continúa con la actividad 2, en la cual se realiza la modelación gráfica de situaciones que describen comportamientos periódicos, en la cual se pretende modelar gráficamente situaciones periódicas empleando tecnología de sensores.

Para iniciar es necesario presentar actividades en las cuales se permita las primeras experiencias con los sensores y su funcionamiento, donde el alumno interactúe con el sensor, y así en un segundo momento describir los movimientos que debería realizarse frente al sensor para obtener una determinada gráfica.

En esta actividad se promueve la discusión grupal, la modelación gráfica de modo que a partir del análisis y un comportamiento local, se bosqueje la continuidad de la representación y así determinar posiciones futuras en la representación.

El diseño se finaliza con una situación en la cual se describe el comportamiento de la intensidad de luz solar que recibe una planta; el estudiante ya ha identificado comportamientos periódicos y además puede determinar estados futuros de situaciones que describen comportamientos periódicos, en esta actividad el análisis ya no se centra en representaciones gráficas, sino en datos numéricos, por ejemplo se presenta una tabla donde se describen intensidades de luz que recibe la planta:

Días	Día 1	Día 2	Día 3	Día 4	Día 5	Día 6	Día 7	Día 8
Intensidades	10000	25000	20000	400	10000	25000	20000	400

En estos momentos el estudiante determina las intensidades que se presentan en los próximos días, de igual modo se pretende que pueda establecer diferentes unidades que permiten predecir estados futuros de una mejor manera. Es decir se identifican diferentes unidades que describen el comportamiento de un fenómeno periódico, sin embargo existen diferentes unidades que le permiten establecer un estado futuro, empero existe uno que permite obtener de manera óptima la predicción.

Reflexiones

Con esta propuesta se presenta un tratamiento diferente para iniciar el concepto de función periódica evitando presentar al periodo como un valor P en una definición formal. Aunque las actividades propuestas no han sido llevadas a cabo en un aula formal se realizó un rediseño en algunas actividades después de ser presentadas en el taller de discusión con profesores, con dichas actividades se pretende crear en el estudiante la noción del *periodo*, no como la unidad de medida más pequeña, sino más bien como aquella unidad que facilita determinar la repetición de una representación gráfica según la finalidad para la cual se quiera la repetición.

Referencias bibliográficas

Barnett, R., Ziegler M. y Byleen, K. (1999). *Precálculo: funciones y gráficas*. México: McGraw-Hill.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico en las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9(2)*, 227-251.

Buendía, G. (2011). *La construcción social del conocimiento matemático escolar*. España: Díaz de Santos, S.A.

Codina, A. y Lupiáñez, J. (2004). Calculadoras y sensores: la matemática en movimiento. En Peñas, M., Moreno, A., Lupiañez, J. (Eds). *Investigación en el aula de matemáticas: Tecnologías de la información y la comunicación,* (pp. 143-149). Granada: SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Godier, J. (2015). *Bionet Science Full Kit, una alternativa viable para la inclusión digital en ciencias.* Universidad Nacional Autónoma de México. Recuperado el 19 de noviembre de 2015, de: http://reposital.cuaed.unam.mx:8080/jspui/handle/123456789/4036

Larsson,R., Hostetler, R. y Edwarsd, B. (1995). *Cálculo y Geometría analítica*. Madrid: McGraw-Hill.

Leithold, L. (1999). *El cálculo séptima edición*. México: Oxford.

Reséndiz, E. (2004). La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9(3), 435-458.

Stewart, J. (2009). *Cálculo de una variable, trascendentes tempranas sexta edición.* México: CENGAGE Learning.

Swokowski, E. (1982). *Cálculo con geometría analítica.* EU: Wadsworth Internacional.

Vázquez, I. y Buendía, G. (2007). Estudio de lo periódico en diferentes contextos: identificación y uso de la unidad de análisis. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20,* 432-437. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, 10(2), 133-170.

DESPLAZAMIENTO DE LA PRÁCTICA DE DILUCIONES ENTRE LA COMUNIDAD DE INGENIEROS BIOQUÍMICOS Y LA ESCUELA

Adriana Galicia Sosa, Leonora Díaz, Jaime Arrieta, Landa Habana Lorena
Instituto Tecnológico de Acapulco, Universidad de Valparaiso, Universidad Autónoma de Guerrero. (México). (Chile)
leonora.diaz@uv.cl, jaime.arrieta@gmail.com, tikibu_fresia15@hotmail.com

RESUMEN: El contexto que domina la matemática escolar obedece a la generación de la matemática como conocimiento científico. En este trabajo cambiamos de enfoque y desde construir matemáticas nos desplazamos a contribuir a formar profesionistas. Ello requiere de inmersión en los contextos de desempeño profesional. La práctica que se decide estudiar es una que responde a la necesidad de diluir una pequeña muestra en una solución mayor: la dilución seriada, considerando las dimensiones de procedimientos, intenciones, herramientas y argumentos que ostentan quienes la ejercen. Éstas evidencian por las formas en que, quien ejerce la práctica, articula el modelo con lo modelado, configurando lo que hemos llamado dipolo modélico. Se reporta una metodología inicial para ello: la deconstrucción, que proporcionó una caracterización de la práctica para la elaboración de un diseño de aprendizaje. En la aplicación de este diseño, el estudiante descentró un dipolo constituido incorporando otro. Robusteció su forma de diluir, reconstituyendo así su práctica.

Palabras clave: dipolo modélico, reconstitución de prácticas

ABSTRACT: The context that covers school mathematics responds to the generation of mathematics as scientific knowledge. In this work we change our approach; from constructing mathematics, we move to contribute to train professionals, all of which requires immersion in the contexts of professional performance. The practice to be study is one that responds to the need to dilute a small sample into a larger solution: serial dilution, considering the dimensions of procedures, intentions, tools and arguments that show those who exercise it. They show what we have called modeling dipole due to the ways in which the model is articulated with modeling by the one who exercise the practice. We report a proposal of a methodology: the deconstruction, which provided a characterization of the practice to elaborate a learning design. In the implementation of this design, the student separated a constructed dipole, by including another one. He strengthened his way of diluting, thus reconstructing his practice.

Key words: modeling dipole, reconstruction of practices

La distancia entre prácticas profesionales y escolares

La preocupación inicial de este trabajo se ubica alrededor de una formación integral del estudiante, particularmente de Ingeniería Bioquímica (IBQ). En la universidad el estudiante requiere cursar inicialmente asignaturas del campo de las ciencias básicas los dos primeros años, con la promesa de que las matemáticas le serán "útiles" para el ejercicio de la ingeniería. Las prácticas han sido constituidas de tal forma que realizan procesos algorítmicamente, en caso de existir situaciones emergentes a nivel de procesos de laboratorio, el estudiante no siempre resuelve de la mejor manera, no hacen uso de las herramientas matemáticas. Tampoco reconocen usarlas en sus procesos.

En esta investigación consideramos relevante estudiar las prácticas de modelación del ingeniero bioquímico y las del aula de matemáticas, a fin de tender puentes entre las prácticas de la escuela y las de comunidades de IBQ, particularmente planteamos estudiar la práctica de las diluciones seriadas (DS).

La Socioepistemología como perspectiva teórica

La presente investigación se desarrolla en el marco de la perspectiva teórica llamada Socioepistemología. Coincidiendo con Cantoral (2013) cuando menciona que la Socioepistemología responde a la construcción de nuestros sistemas conceptuales desde tres planos. El primero trata sobre la naturaleza misma del saber. Hablar del saber no se limita, en esta perspectiva, a definir la relación que este guarda con los objetos matemáticos, sino a posicionar al ser humano, en sus distintas dimensiones, en el acto mismo de construcción de sus sistemas conceptuales, su problematización. El segundo plano se ocupa de la práctica social como normativa de la actividad humana y como base de la construcción de nuestros sistemas conceptuales. Sus mecanismos funcionales. El tercer plano, el plano teórico, se ocupa de caracterizar las articulaciones teóricas, con una fuerte evidencia empírica, de nociones, procesos y términos del modelo de construcción social del conocimiento

Por otra parte Arrieta (2003) resalta explícitamente las características de práctica como hacer algo pero no simplemente hacer algo en sí mismo y por sí mismo; es algo que en un contexto histórico y social otorga una estructura y un significado a lo que hacemos. En ese sentido, la práctica es siempre una práctica social. Este concepto de práctica incluye tanto los aspectos explícitos como los implícitos. Incluye lo que se dice y lo que se calla. Lo que se presenta y lo que se da por supuesto. Incluye el lenguaje, los instrumentos, los documentos, las imágenes, los símbolos, los roles definidos, los criterios especificados, los procedimientos codificados, las regulaciones y los contratos que las diversas prácticas determinan para una variedad de propósitos.

Desde la mirada socioepistemológica, nos distinguimos de perspectivas que aluden a las nociones matemáticas como objetos que precisen ser enseñados desde la obra matemática. En esta investigación privilegiamos la matemática como herramienta además provista de intenciones, de procedimientos y argumentaciones. Una matemática que propicia formas de actuar en contextos específicos.

El dipolo modélico

El estudio de las prácticas de modelación de comunidades es complejo. Se precisa de entidades que nos permitan analizar las formas de ejercer la práctica de modelar.

En términos de Arrieta y Díaz (2014) la modelación es una práctica de articulación de dos entes, para actuar sobre uno de ellos, llamado lo modelado, a partir del otro, llamado el modelo. El ente se convierte en modelo cuando el actor lo usa para intervenir en el otro ente, por lo que deviene en herramienta.

La articulación de un ente inicial, un modelo con otro ente, lo modelado da lugar a una nueva entidad a la que se denomina dipolo modélico.

En la configuración de este dipolo modélico intervienen los argumentos que se esgrimen, las herramientas que se utilizan, los procedimientos y las intenciones. Es decir, de la práctica de modelación emergen dipolos modélicos conformados por dos polos (esferas) y finas corrientes de atracción: los argumentos, las herramientas, las intenciones y los procedimientos. Estas fuerzas de atracción viven tensionando el modelo con lo modelado. En esta tensión, distinguimos la atracción entre los polos sobre la separación (Figura 1). Ahora bien, la articulación de estos polos se produce en el ejercicio de Prácticas de Modelación (Galicia, 2014).

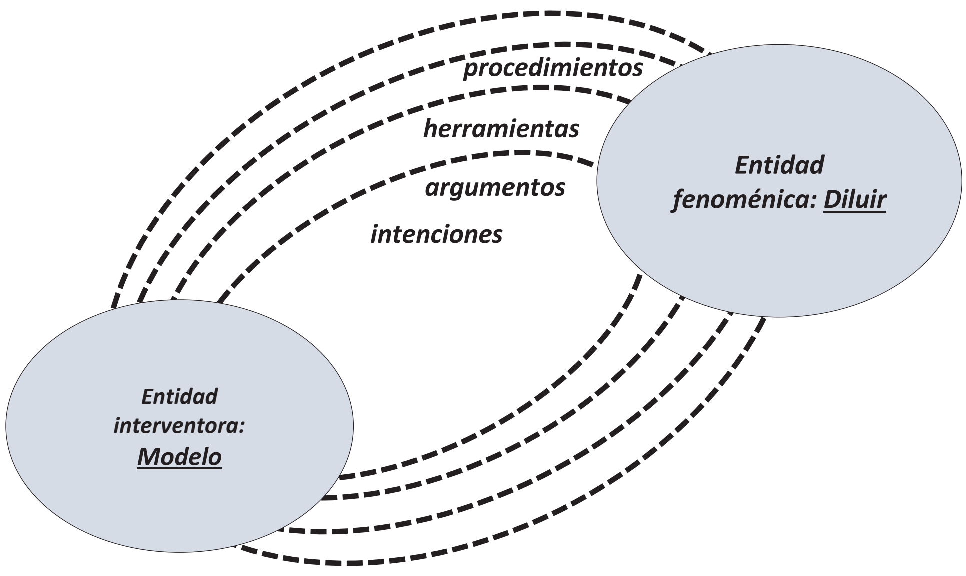


Figura 1. Diagrama dipolo modélico. (Galicia 2014)

Deconstrucción de prácticas. Hacia una metodología de investigación.

Para investigar las prácticas se precisa estudiar las prácticas en los diversos escenarios propios de su gestación. Como acercamiento metodológico se plantearon tres etapas. Sus actividades, de carácter flexible, posibilitan su retroalimentación, a fin de que las evidencias, análisis y construcciones, entre otras cosas, proporcionen elementos de examen lo más nítidos posibles.

En la primera etapa, *prácticas legítimas y su colindancia*, se consideran al mismo tiempo que se reconocen, los escenarios donde las prácticas viven, las formas de ejercicio de las prácticas de la comunidad desde adentro, desde el sitio de su producción. Para ello se aplican entrevistas, análisis de artículos científicos y programas de estudio, entre otras acciones. En esta etapa se identifican y clasifican prácticas recurrentes. El mapa de las prácticas de una comunidad y la elección de la práctica a estudiar así como sus proximidades se consideran un producto de esta etapa.

La segunda etapa, *de la constitución a la deconstrucción de prácticas*, consiste fundamentalmente en poner en evidencia la intencionalidad de la práctica, los procesos que se desarrollan y las herramientas que se utilizan para ejercerla, los argumentos que esgrimen quienes la ejercen.

La tercera etapa, *la reconstitución de la práctica* del IBQ en la escuela, tiene que ver con la elaboración de diseños de aprendizaje y experimentación educativa. Con base en la deconstrucción realizada de la práctica se elabora un diseño de aprendizaje y se instala en el aula como un estudio preliminar vía la experimentación educativa. En esta etapa se propicia la descentración del dipolo modélico constituido en el estudiante, reconstituyendo su práctica para que incorpore un dipolo propio a la comunidad de IBQ, cuando el dipolo que el estudiante tenga constituido sea limitado.

Dilución seriada practica deconstruida

El ingeniero bioquímico se caracteriza por su actividad en el laboratorio y la experimentación. Así, en los diversos escenarios de su pertenencia, en el laboratorio preparan soluciones, realizan análisis cualitativos y cuantitativos de corte biológico, químico y físico. En muchas de estas prácticas la dilución y la dilución seriada es una práctica recurrente fundamental para posteriores procesos y sencilla en apariencia.

La dilución seriada es un procedimiento que consiste en reducir la concentración de una sustancia en otra de manera consecutiva. Consiste en tomar 1 ml de la muestra y colocarla en un tubo que contiene 9 ml de solución diluyente, esa es la dilución 10^{-1}, Posteriormente se toma 1 ml de este tubo y se coloca en otro que contenga 9 ml de solución diluyente, esta es la dilución 10^{-2} y así sucesivamente. Figura 2.

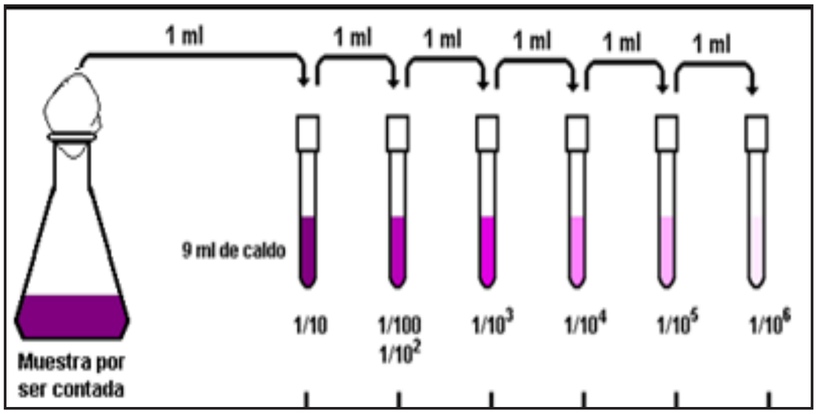


Figura 2. Esquematización de la práctica de dilución seriada en análisis microbiológico

El procedimiento se investigó a partir de diversas fuentes bibliográficas y La Norma Oficial Mexicana, NOM-110-SSA1-1994. Los procedimientos de las diluciones seriadas inician con la medicina homeópata. Hahnemann (1810) argumenta con sus anotaciones de preparación de la escala cincuentamilesimal en el Organón de la medicina. Con las intenciones diluir medicamentos a la dosis requerida.

Configuración de dipolos modélicos en la práctica de dilución

Una característica importante de la práctica de dilución: la sencillez y la precisión con que se ejerce. En ese sentido, se considera importante estudiar aquellas prácticas que viven en torno a esta práctica, en ésta y en otras comunidades. Así, se analizan algunas de estas prácticas en diferentes escenarios, con la intención de caracterizar las entidades que están presentes en su desarrollo. En este reporte detallamos las del investigador y de los estudiantes.

Las Diluciones Seriadas que ejerce un Investigador (DIV). El investigador se enfrenta a situaciones emergentes debido a la naturaleza de su actividad. Por ejemplo, en un laboratorio de investigación, al investigador se le cuestiona cómo realiza la dilución 1 en 50 (1/50) y explica su procedimiento: “coloco 10 μL en 490 μL (10/500), o 100μL en 4900 μL (100/5000) y todas son dilución 1 a 50 μL (1/50). Utilizamos un factor de dilución que es igual al volumen de muestra utilizada entre volumen total, eso es a prueba y error, tomamos la mejor dilución, por eso tenemos que hacer varias y por la experiencia previa tenemos una idea de la dilución que debemos realizar. Pero se debe demostrar que hay robustez, reproducibilidad y repetibilidad”. En este escenario se utilizan micropipetas. El motor de esta práctica es la economía de la práctica que exige racionalizar costos, tiempos y mejora en la calidad de los procesos. Ahora bien, en parte del proceso el investigador realiza una prueba cualitativa al agregar reactivo a una muestra: “por el color sé que tiene actividad enzimática. No se cuanta. Agrego reactivo y si tiene una coloración muy fuerte tiene mucha actividad enzimática, desde ahí comienzo a hacer diluciones”. En la actividad de laboratorio observada, el investigador al ejercer la dilución configura además del dipolo DIV el dipolo del pintor DCNP (Tabla 1).

Estudiante en situación didáctica. Generalizar el procedimiento en la relación *a:b* que se reduce a *1:c*^{n} DSE3. La situación didáctica comienza solicitándoles a los estudiantes que analicen una muestra. Se limita el procedimiento al ejercicio solo con pipetas de 5 ml. y con tubos de ensaye de 10 mL que contienen 5 mL y 10 mL de agua estéril. Inicialmente los estudiantes se resisten a formular una base distinta a la base 10 de la norma NOM-110. Algunos estudiantes que encuentran la base de la primera dilución, realizan las siguientes de manera algorítmica. Usan la misma base y solo van modificando el exponente, como lo hace el técnico laboratorista (DSTL). A medida que avanza la puesta en escena fue posible que algunos estudiantes lograran comprender por qué las bases que se generaban eran diferentes a la NOM-110. En esta actividad la intencionalidad la marca el propio diseño de aprendizaje, ya que se va induciendo al estudiante a la comprensión del procedimiento hacia una forma generalizada. El procedimiento que realiza un estudiante tiene que ver con relacionar en una fracción el numerador como la cantidad tomada y en el denominador la suma de la cantidad tomada con la que se encontraba en el tubo de ensaye: 5 mL de muestra en 5 mL de solución diluyente es igual a 5/10, 1/2 o 2^{-1}.

Un argumento de los estudiantes al cuestionarles por qué realizaban el cambio de la base fue explicado de la siguiente manera: “ya no se puede expresar de la misma manera, ya la relación de la muestra y el agua cambió”.

Durante la actividad, el estudiante logra “romper” la base diez que establece la norma y con ello genera una relación diferente a:b, que se reduce a $1/c^n$. Si bien no logra la configuración del dipolo modélico del investigador ya que en su proceso con las fracciones reduce la misma y no configura un polo general del tipo D= Vm/Vt el estudiante robustece su red de dipolo modélico.

En la tabla 1 se muestra la caracterización de los dipolos modélicos en los distintos ejercicios de la DS.

Tabla 1. Configuración de los dipolos modélicos de prácticas de dilución

Dipolo modélico	Procedimiento	Herramientas	Argumentos	Intención
DCNP Pintor	Por tanteo: agrego agua a la pintura	Sentidos	Fijarme en el color que muestra la pintura	Diluir rápidamente logrando color adecuado
DSTL Técnico	Agrego tantos ceros como diluciones realice	Algoritmo	La norma dice así, así siempre se ha hecho, así funciona	Diluir rápidamente de forma precisa y utilizando la norma

DSE2 Estudiante antes de la situación didáctica	Realizo *n* diluciones , con relación 1:10 Multiplico por el inverso de 10^n	Exponentes base 10, razón diluyente dilución 1:10	Entendí porque la norma funciona, son 1 parte de 10 en la primera entonces la solución debe de tener diez veces más que lo que nos dice la dilución y así sucesivamente. Es como si multiplicaras por un número 10^n	Aprender a diluir de manera normada
DSE3 Estudiante después de la situación didáctica	Realizo n diluciones con relación a:b que reduzco a 1:c	La relación *a:b* que se reduce a *1:c*^{n} base "c"	La base no se puede expresar de la misma manera. La relación de la muestra y el agua cambió	Aprender el procedimiento generalizado, saber por qué se hace así.
DSP Profesor	Realizo *n* diluciones, con relación 1:10 Multiplico por el inverso de 10^n. He utilizado la relación a:10	Exponentes base 10, razón diluyente dilución 1:10	Aplico la norma para enseñarla. Comprendo su funcionamiento, pero no es prioridad enseñarlo	Enseñar a los estudiantes a diluir con base en la norma
DSI Profesionista	Realizo n diluciones, con relación 1:10 Multiplico por el inverso de 10^n.	Exponentes base 10, razón diluyente dilución 1:10	Conozco la norma. Es 1 parte de 10 en la primera, 1 en 100 en la segunda y así sucesivamente.	Diluir de forma oficial
	0.5 mL. En 4.5 mL. Proporciones (mitad) de la norma. Misma base 10. Mismos factores de dilución	$a:b \propto 1:10^{n}$	Hago proporciones de la base al 50 y 25 %	Para economizar diluyente en situación emergente
DIV Investigador	Determino el volumen de la muestra entre el volumen total Agrego el reactivo y observo la coloración.	Modelo algebraico $D = \frac{V_m}{V_t}$ Sentidos	El volumen de muestra es limitado y cuento con micropipetas Dependiendo de la coloración tengo una idea de la concentración.	Diluir de acuerdo a los datos esperados, dependiendo del comportamiento de la reacción Decidir la dilución a usar

Conclusiones

Las prácticas se van constituyendo con el tiempo. Esta constitución, en ocasiones, propicia la pérdida de los elementos que la hacen funcionar. En razón de la economía de la práctica, los procedimientos, se van forjando en algoritmos a seguir, sin cuestionarse sobre los argumentos que dan validez a estos, sin cuestionarse el por qué se realiza el procedimiento. Los procedimientos se restringen a una particularidad de la práctica, y esta se vuelve mecánica: ya no es posible distinguir las herramientas con las que se actúa y la forma cómo funcionan. De tal forma que, en un proceso que requiera la modificación de la práctica, quienes la ejercen de forma constituida no siempre son competentes para ello. Los argumentos están ausentes y solo queda operar algorítmicamente. Ante esta situación el profesionista difícilmente reconocerá a la herramienta matemática en la vivencia de ejercerla. Las formas de ejercer son un elemento para estudiar la complejidad del quehacer de las comunidades.

En esta investigación se precisó hacer un análisis de las prácticas de dilución, desestructurar para volver a estructurar desde la misma o diferente arista. Este camino nos fue conduciendo a la comprensión de su estructura, a su caracterización. La deconstrucción como acercamiento metodológico permitió mostrar la relatividad de la práctica y validar internamente diseños de aprendizaje para la clase de matemáticas, aportando a disminuir distancias entre la escuela y su entorno, a enriquecer en el estudiante su red de dipolos modélicos de diluir.

Elemento importante tanto para la deconstrucción como para la configuración de prácticas son los dipolos modélicos que intervienen y con las articulaciones específicas con las que los actores desarrollan las diluciones seriadas.

Consideramos importante investigar elementos que tienen que ver con los procedimientos con que desarrollan los actores sus actividades; las herramientas matemáticas y los instrumentos que utilizan; las intencionalidades que lo llevan a hacer lo que hace y los argumentos que dan sustento al ejercicio de la práctica. Estos elementos viven tensionando el modelo con lo modelado, estableciendo características distintivas al ejercer la práctica, de configurar dipolos modélicos de la práctica. Distinguimos de la tensión entre los polos las cercanías por sobre las distancias. Al estudiar el núcleo y la periferia del ejercicio de prácticas, se conformó la red de dipolos modélicos. Una red de prácticas de Diluciones Seriadas. A medida que se fue haciendo más fino el estudio, se dejó ver la relatividad de la red de dipolos modélicos. Es decir, una persona ajena a la comunidad de IBQ´s –y aún algunos IBQ- ven las diluciones seriadas que ejercen los investigadores y los técnicos como las mismas, sin embargo existen distinciones en su ejercicio. Esta configuración de los dipolos no implica que la entidad con las que algunos investigadores interactúan sea la DSTL u otra, así como algunos técnicos laboratoristas interactúe con la entidad DIV.

Se ha mostrado cómo es que la forma de ejercer la práctica distingue a un IBQ por ejemplo de un pintor y de un investigador. Las personas actúan de diferente manera, por ello son diferentes, es decir, la forma de actuar distingue a unos de otros.

Al poner en escena un diseño de aprendizaje basado en la deconstrucción de prácticas, se mostró la descentración del dipolo modélico del estudiante modificando sus argumentos, las herramientas de las que hace uso, el procedimiento de diluir y las intenciones. En ese sentido esta descentración da lugar a su *reconstitución de la práctica* (Figura 3). Es decir el estudiante reconstituye la práctica que ya tenía constituida. Práctica constituida con base a un dipolo que se descentra e incorpora un nuevo dipolo, robusteciendo su práctica de diluir.

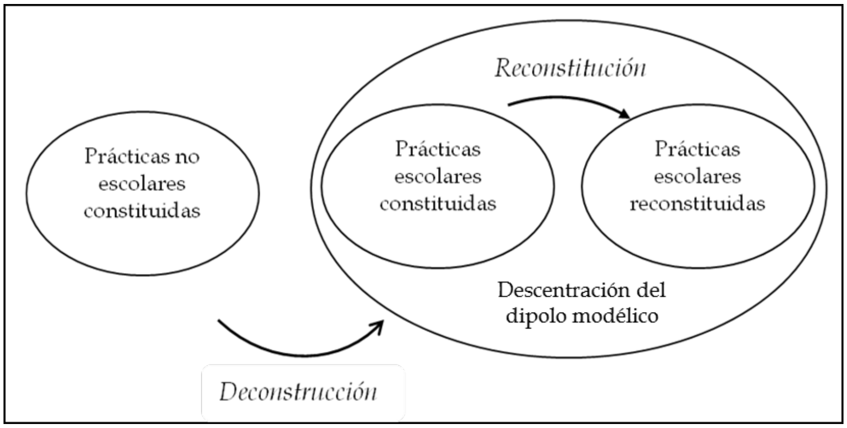


Figura 3. Deconstrucción como acción precursora de reconstitución de prácticas en aula

Con la reconstitución de la práctica concebimos un primer acercamiento de las prácticas que viven en el escenario escolar hacia las prácticas que viven en escenarios no escolares. Se pretendió acortar distancia entre la práctica del estudiante y la del investigador**.**

Consideramos a la deconstrucción como actividad precursora de la reconstitución de prácticas.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Arrieta, J. y Díaz, L. (2014) Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 18 (1),* 19-148.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. España: Gedisa.

Galicia, A. (2014). *Desplazamiento de la práctica de diluciones entre la comunidad de ingenieros bioquímicos y la escuela*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Norma Oficial Mexicana. NOM-110-SSA1-1994. *Bienes y servicios. Preparación y dilución de muestras de alimentos para su análisis microbiológico*. Diario Oficial de la Federación 1994. Recuperado el 8 de febrero del 2014 de http://www.dof.mx.

DESARROLLO DEL USO DE LAS GRÁFICAS EN UNA SITUACIÓN DE MODELACIÓN ESCOLAR

María Esther Magali Méndez Guevara, Karen Zúñiga González
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
memmendez@uagro.mx, kzg.93@live.com

RESUMEN: Se reportan resultados de una investigación socioepistemológica que versó del estudió sobre el desarrollo de una red de usos del conocimiento matemático mediante las gráficas de función a trozos significadas en el estudio del llenado de los recipientes. Se comparte la estructura del diseño de situación de aprendizaje, que partió de la experimentación y provocó el desarrollo del uso de la gráfica develado en las herramientas de variación local, global y su articulación, según las producciones de estudiantes de bachillerato.

Palabras clave: desarrollo de usos, modelación escolar, experimentación

ABSTRACT: The article shows the results of a socio - epistemological research that included a study about the development of a network for using the mathematical knowledge, by means of segment function graphs used in the study of containers' filling. The structure of a learning situation design is proposed. It started from the experimentation and fostered the uses of the graph shown in the tools of the local and global variation and the graph linking, according to senior high school students´ performance.

Key words: development of the uses, school modeling, experimentation

Planteamiento del problema u objetivo de la investigación

Hoy en día, es indudable que para el desarrollo de las sociedades se reconozca la importancia del desarrollo de la ciencia y la tecnología, en específico en la Matemática; ya que esta, permite explicar fenómenos físicos, químicos, biológicos, sociales u otros, que son el escenario para el desarrollo científico. Sin embargo, cuando de Matemática hablamos nos enfrentamos a un gran problema, pues existe cierto rechazo hacia ella, a pesar de que su presencia es una consecuencia de su presencia en la sociedad y, por tanto, las necesidades Matemáticas que surgen en la escuela deberían estar subordinadas a las necesidades Matemáticas de la vida en la sociedad (Chevallard, Bosch & Gascón 1998, p.46), y que esta avanza progresivamente más determinada por las Matemáticas y las tecnologías. Y no invertir la subordinación causando una desvalorización social de la Matemática y convirtiendo la enseñanza escolar de las Matemáticas en un fin en sí mismo.

Desde una mirada sistémica de la Matemática Educativa, la problemática sobre la enseñanza de las Matemáticas está en el fenómeno de exclusión (Cantoral & Soto, 2014), y es ocasionado por el discurso matemático escolar (dME) y la falta de marcos de referencia que promuevan la construcción de conocimiento matemático, la mirada a la que nos referimos es la Socioepistemológica. Es decir, desde aquí lo importante sería reformular el dME mediante la generación de marcos de referencia que provoquen una Matemática funcional, esta investigación se propone añadir elementos para el rediseño del dME en torno a la función a trozos mediante el estudio de su gráfica, nos preguntamos sobre los usos de las gráficas en el tratamiento de funciones a trozos en donde se esperaban argumentos de variación local y global por parte de los jóvenes de nivel medio superior en el desarrollo de argumentos emergentes ante una situación basada en una categoría de modelación para la Matemática Escolar. Es decir, ¿Cómo al comunicar el llenado de recipientes, dadas ciertas restricciones, se desarrolla una red de usos de conocimiento matemático? En específico usos de gráficas o tablas de datos. Se postula una categoría de modelación como un eje que permite el desarrollo de redes de usos de conocimiento matemático y se elabora un diseño de situación de aprendizaje.

Acerca de la modelación

La modelación es parte esencial de la construcción, difusión y aceptación del conocimiento científico, pues otorga una justificación funcional a este, además provoca la construcción de herramientas como elementos esenciales de la situación que se atiende, para representar lo que se estudia con determinados fines, de manera que pueda ser comunicado (Koponen, 2007). De acuerdo con Lingefjärd (2011), la modelación se asume de diferentes formas en todo el mundo, con base a los paradigmas y marcos teóricos desde donde se desarrollan, evidenciando diferentes posibilidades para investigar y analizar aspectos relacionados a la enseñanza envueltos en la modelación. Desde este hecho, nosotros desarrollamos investigación al seno de una base teórica que profesa a las prácticas sociales como la base del conocimiento, en la medida en que son el sustento y la orientación para llevar a cabo una construcción social del conocimiento matemático, la Socioepistemológica (Cantoral, 2013, p. 52).

Así en la teoría Socioepistemológica (TSE) existen investigaciones que exhiben una Matemática Funcional en términos de uso y desarrollo de conocimientos matemáticos, que surgen ante intenciones compartidas por una comunidad escolar o profesional, donde es importante reconocer la actividad del humano haciendo Matemáticas, es decir construyendo su conocimiento (Arrieta, 2003; Cordero, 2001; Méndez, 2008; Suárez, 2008). Se llama la atención hacia un cambio de paradigma del conocimiento matemático que lo redefina y comprenda como un conocimiento que puede estar en las necesidades cotidianas del humano; de este modo buscar categorías que muestre como pueden lograrse experiencias que abarquen toda la sociedad. Se propone involucrar a los alumnos en contextos que sean continuos a los cotidianos para que surja el aprendizaje, para tratar de discernir la tensión que existe entre el ambiente escolar y extraescolar, con ello evitar el rechazo a las Matemáticas.

La perspectiva de modelación que desarrolla esta teoría fue apropiada para nuestra investigación, dado que permite construir epistemologías de uso del conocimiento matemático, involucrando lo cotidiano y lo escolar, se ha formulado una categoría de modelación escolar que delimita los elementos esenciales en el proceso de modelación, mismo que serán eje para diseños de situaciones de aprendizaje. La creencia de que la modelación es una aplicación de la Matemáticas ha llevado, a enseñar Matemáticas y después, a buscar la aplicación de tal conocimiento, sin embargo, desde esta teoría se ha explicado a la modelación como construcción de conocimiento matemático en sí misma (Méndez & Cordero, 2014). Así mismo las gráficas habitualmente en el discurso escolar tiene un carácter secundario y muchas veces no se considera modelo matemático, mientras que en nuestra postura la gráfica es un modelo que permite organizar comportamientos matemáticos y sintetiza las características de una situación estudiada de forma global, y se postula que el uso de las gráficas en las prácticas de enseñar y aprender Matemáticas favorece la construcción y desarrollo del conocimiento matemático. De modo que en esta investigación nos ocupamos en generar una red de usos de conocimiento matemático (Méndez & Cordero, 2014) en torno a las gráficas, ante una situación de llenado de recipientes. En el diseño los usos aparecen como argumentos y evidencias que los actores, en este caso estudiantes, emplean para organizar la situación que origina el fenómeno, mediante la comparación de dos estados de éste en el tiempo, los cambios de condiciones en un experimento y sus implicaciones en las variaciones de su gráfica hasta llegar al estudio de operaciones de corte lógico-formal. Además, dichas construcciones son enlazadas por prácticas como interpretar, analizar, especular, graficar, calcular, organizar, postular, adaptar y consensuar, entre otras.

Elementos metodológicos

Esta investigación se sustenta de los elementos teóricos y mecanismos socioepistemológicos que permiten acercar la teoría al aula de clase de Matemáticas, esto implica un proceso (figura 1) de resignificación de usos de conocimientos matemáticos, esto mediante la llamada categoría de modelación escolar (Méndez, 2013) lo que permitiría elaborar diseños de situación para la enseñanza básica, media superior y superior.

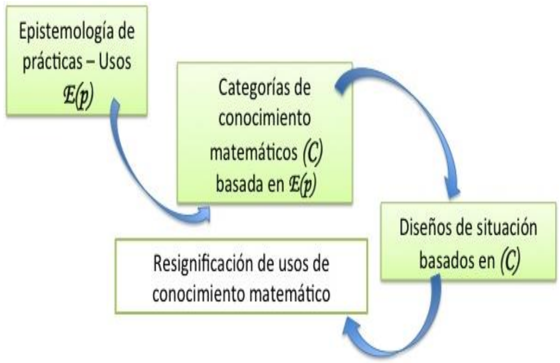


Figura 1. Proceso de resignificación de usos (tomado de Méndez, 2013.P.15)

Dicha categoría funciona como el eje argumentativo que favorece la constitución de conocimientos matemáticos para la Matemática escolar donde los partícipes pueden construir y desarrollar su conocimiento matemático. Dicha categoría provoca el desarrollo de redes de usos de conocimientos matemáticos (drucm), en la caracterización de tipos comportamientos, que se exhiben en usos de gráficas-tablas-expresiones analíticas como herramientas que permiten estudiar y explicar la variación local o global y conjeturar sobre la tendencia o características de un comportamiento, en este caso, constante, lineal, y cuadrático .

Los momentos del diseño

El diseño de situación que se elaboró tuvo como objetivo principal develar el uso de las gráficas. La forma en cómo se ponen en juego todos los elementos se sintetiza en momentos, los cuales provocan el *drucm* del que hablamos articulados por momentos.

Para la validación de nuestro diseño se realizó una primera exploración y en éste el objetivo fue llegar al análisis de comportamientos globales y locales mediante gráficas, sin la petición de fórmulas (ver tabla 1). Dado que se exploró en escenarios de divulgación teniendo presente que en este escenario el tiempo de atención de los participantes es corto, nuestra primera idea fue hacer el diseño de tipo inducido, sin embargo, ello rompe con nuestra ideología de dejar que ellos nos muestren los usos de sus conocimientos matemáticos.

Tabla 1. Momentos base del diseño de situación

	El llenado de los recipientes
Momento 1	Elementos que describen el experimento y su implicación en las transformaciones gráficas y los valores numéricos. La construcción del espacio gráfico.
Momento 2	Caracterizar los incrementos por intervalos en forma numérica en las tablas de datos o en los intervalos de variación en una gráfica.
Momento 3	En la interpolación y extrapolación de los puntos en las gráficas. La identificación de una constante de variación y formulación de una regla de variación.

Parte de los resultados obtenidos fueron reportados en Zúñiga y Méndez (2013), con ello percibimos que los estudiantes no tienen claro en que situaciones es conveniente cada tipo de gráfica, es decir qué modelan las gráficas. Por ejemplo; 1.Con respecto a las gráficas no se cuestionan sobre qué significa el origen, los ejes en relación con las variables dependiente e independiente, o qué significa usar gráficas de barras o cartesianas. De ahí que nos cuestionáramos ¿Por qué sucede esto? ¿Cómo hacer que se desarrolle el uso de la gráfica?

Así que elaboramos una reestructuración del diseño, esta vez pensando en un escenario escolar con jóvenes de bachillerato cuyo objetivo fue el desarrollo en red de usos de: gráficas, tablas numéricas y expresiones algebraicas, al modelar el llenado de recipientes con formas combinadas, lo cual lleva al tratamiento de las funciones a trozos en la articulación de los momentos (tabla 2), ahí interesó conocer cómo y porqué se usan las gráficas más que saber si saben graficar o no, o si logran construir los modelos correctos.

Tabla 2. Momentos base del rediseño de situación

El llenado de los recipientes	
Momento 1	Consta de la experimentación donde se devela los usos de las gráficas en tanto **se convienen las variables y sus relaciones**. Se decide qué variables considerar para comunicar y caracterizar el llenado de los distintos recipientes.
Momento 2	Toma de datos de la experimentación y **desarrollo de la gráfica** para las **variaciones a trozos** en los distintos recipientes. Se estudia las variaciones en el llenado dadas diferentes secciones de los recipientes, para realizar ajustes y las tendencias en las gráficas que expresan cómo se llenan.
Momento 3	Desde **la articulación** de la gráfica y los datos numéricos a la expresión algebraica. Se analiza **la variación en los datos y el comportamiento general de la gráfica** para poder proponer una expresión algebraica que reúne las condiciones del experimento y el comportamiento que tiene el llenado durante cierto tiempo.

Descripción de la puesta

La puesta en escena final se realizó con un grupo de siete estudiantes del bachillerato, con especialidad en electromecánica y electrónica, que cursaban en cuarto semestre y hasta el momento habían cursado las materias que forman parte del componente básico matemático del bachillerato tecnológico: álgebra; geometría y trigonometría; geometría analítica y cálculo. Según su programa de estudios tenían conocimiento sobre el lenguaje algebraico, ecuaciones (lineales y cuadráticas), figuras geométricas, relaciones transcendentes (trigonométricas, exponenciales y logarítmicas), sistemas rectangulares y polares, lugares geométricos (la recta y cónicas), pre-cálculo, funciones, límites y derivada.

Los estudiantes se agruparon en dos equipos, uno de cuatro y otro de tres, y se prosiguió a proponer las actividades, apoyándolos en las dudas sobre las situaciones que planteaba el diseño. Nuestro escenario físico se ubicó en las instalaciones de la Facultad de Matemáticas en Acapulco en dos de las aulas de dicha institución durante dos sesiones de 120 minutos cada una.

Es importante destacar que se recopilación datos mediante hojas de trabajo y videos de clase para después cruzar la información y evidenciar los desarrollos de usos. Lo cual permitió dar evidencias sobre la evolución de la práctica, analizando el cambio de argumentos, métodos y herramientas que se usan en el diseño. Las evidencias del Drucm se reportan en los tres momentos que estructura el diseño.

Resultados

A continuación mostraremos extractos de la puesta en escena que nos permiten evidenciar el desarrollo de redes de usos en torno al uso de las gráficas mediante argumentos sobre el fenómeno y las herramientas matemáticas.

a) Red del equipo 1: El fenómeno ⇔ la gráfica⇔lo numérico, que se buscó provocar en los momentos I y II del diseño de situación de aprendizaje (figura 2).

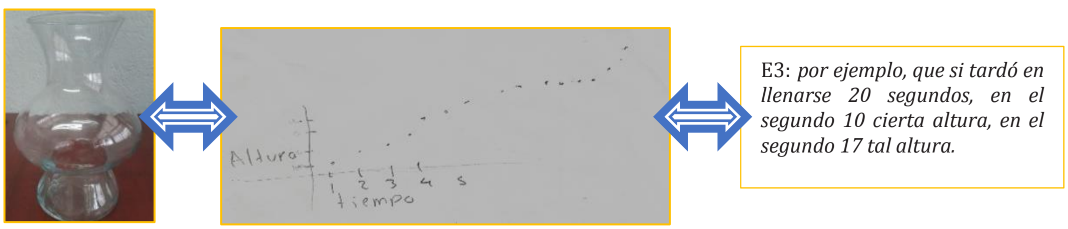


Figura 2. . *…No es constante la altura de llenado…* Esquema de articulación de redes de usos para explicar el comportamiento de las variables que influyen en el fenómeno

b) Red del equipo 2: El fenómeno ⇔ lo numérico ⇔ lo algebraico ⇔ la gráfica, fue incitado por las actividades del momento I aunque se esperaban el momento III del diseño de situación de aprendizaje (figura 3).

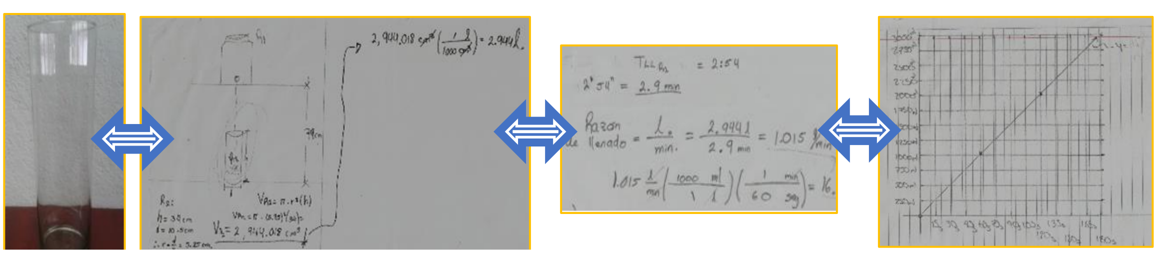


Figura 3. *Cómo expresaríamos esa relación?... pues todo esto que calculamos, sería esto de modelar…:* Esquema de articulación de redes de usos para explicar el comportamiento de las variables que influyen en el fenómeno

La segunda actividad se pidió analizar un recipiente con formas combinadas caracterizando comportamientos, rescatamos una red de usos que a nuestro parecer muestra una modelación (fig. 4). El esquema 4 muestra la articulación del fenómeno con los usos de la gráfica y la tabla de datos en tanto que se negaban a asumir la variación constante la cual podría parecer por la gráfica, esto los llevo a analizar las variaciones locales en los intervalos de cambios del recipiente mediante los datos numéricos.

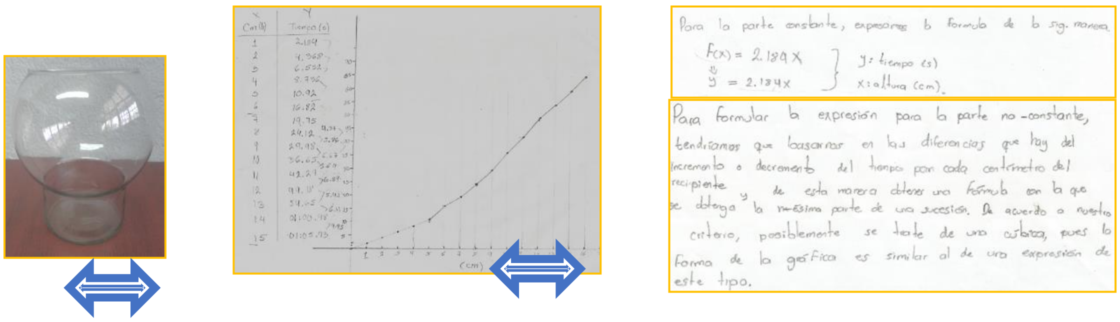


Figura 4. Esquema de articulación de redes de usos para el comportamiento lineal combinado con otro cúbico.

E7: *De este recipiente podrían ser dos fórmulas porque en este al principio es constante y el otro es distinto…*

…Sería una razón de llenado básicamente…

…Sí, claro porque es constante, el de nosotros es constante hasta aquí, ya de ahí sería una variación, de hecho serían tres porque al final va disminuyendo.

El dialogo anterior, deja ver que los jóvenes interiorizaron el proceso de modelación, y reconocen la importancia del fenómeno y las condiciones iniciales para la postulación de herramientas matemáticas.

Reflexiones finales

El diseño que se sustentó de esta categoría provoco que los estudiantes que participaron en la puesta en escena, hicieran uso de sus conocimientos matemáticos para explicar el fenómeno y sin darse cuenta ya estaban modelando. Hecho que les causo impresión ya que creían que modelar era algo más complicado, entonces se dieron cuenta de que al tratar de explicar la situación del llenado de recipientes usando herramientas matemáticas que ya conocían, cómo las tablas de datos, las gráficas y las expresiones algebraicas, estaban en el proceso de modelación.

Desde la experiencia de haber elaborado un diseño de modelación, y desarrollado el mismo en distintos escenarios, escolares y de divulgación, nos atrevemos a decir que la modelación escolar es una categoría que debiera ser implementada en las aulas de clases más a menudo, y aunque hay una variedad de diseños basados en esta categoría, que buscan el desarrollo del conocimiento matemático, estamos firmes en que es necesario a prontitud la creación o elaboración de más diseños basados en esta categoría que trastoquen tópicos matemáticos de nivel superior.

Insistimos en que es necesario rediseñar el discurso matemático escolar, uno en el cual se adhieran diseños de investigación consensados con los actores principales del discurso matemático escolar, los profesores, en formación y en servicio. Una forma de incluir estos diseños en desde la formación inicial del profesor de Matemáticas, promoviendo estos instrumentos como elementos que te hacen vivir el desarrollo de saberes sobre las variaciones y su caracterización en: las tablas de datos, gráficas y expresiones algebraicas.

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* (Tesis doctoral). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R. & Soto, D. (2014). Discurso Matemático Escolar y Exclusión. Una Visión Socioepistemológica. *Boletim de Educação Matemática*, 28(50), 1525-1544.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1998). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* México: SEP

Cordero. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2), pp. 103-128

Koponen, I. (2007). Models and modelling in physics education: a critical re- analysis of philosophical underpinnings and suggestions for revision. *Science & education*, 16, 751- 773.

Lingefjärd, T. (2011). Modelling from primary to upper secondary school: finding of empirical research. In G. Kaiser, R. Borromeo, W. Blum & G. Stillman (eds.) *Trends in teaching and learning of mathematical modelling*, (pp. 9-14). Springer

Méndez, M (2008). *Un estudio de la evolución de la práctica: La experiencia de modelar linealmente situaciones análogas.* (Tesis inédita de Maestría). Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. México

Méndez, M. (2013) *Desarrollo de red de usos del conocimiento matemático: la modelación para la matemática escolar.* Tesis no publicada de doctorado, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional-Departamento de Matemática Educativa. Distrito Federal, México.

Méndez, M. & Cordero. F. (2014). La modelación. Un eje para la red de desarrollo de usos. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 27*. (Pp. 1603-1610) Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Suárez, L. (2008). *Modelación-Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultado de un estudio socioepistemológico*. (Tesis inédita doctoral). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México

Zúñiga, K. y Méndez, M. (2013). La modelación. Una experiencia del uso de las gráficas. En L. Sosa, E. Aparicio y F. Rodríguez (Eds.), *Memoria de la XV Escuela en Invierno de Matemática Educativa*, 15, 99-103. México: Red de Centros de Matemática Educativa A. C. ISBN: 978-607-95761-2-7

EMERGENCIA DE LAS NOCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL ALMAGESTO

Gerardo Cruz-Márquez, Gisela Montiel Espinosa
Cinvestav, IPN. (México)
gerardo.cruz@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx

RESUMEN: Como primera etapa de un proyecto de investigación cuya intención final es el rediseño del discurso Trigonométrico Escolar en el contexto de la formación inicial docente en Honduras, nos planteamos una problematización de lo trigonométrico en un escenario histórico. Dicha problematización consta de un análisis sociohistórico y documental del Almagesto de Ptolomeo, obra en la que la Trigonometría emerge como geometrización de los fenómenos celestes. Si bien este análisis no ha concluido, nos ha permitido ser conscientes de la influencia de las circunstancias sociales, culturales e institucionales en la estructura, racionalidad y lenguaje utilizado por Ptolomeo en el Almagesto, y en la emergencia y evolución de nociones trigonométricas en la dicha obra.

Palabras clave: trigonometry, socio-epistemology, socio-historical analysis, almagest

ABSTRACT: As the first stage of a research project whose final intention is the redesign of the trigonometric school discourse in the context of initial teaching training, in Honduras, we propose a problematization of the trigonometric notions in a historical setting. This problematization consists of a socio-historical and documentary evidence analysis of the Almagest of Ptolemy, a work in which Trigonometry emerges as a geometric form of celestial phenomena. Although this analysis has not concluded, it has allowed us to be aware of the influence of social, cultural and institutional circumstances on the structure, rationality and language used by Ptolemy in the Almagest, and on the emergence and evolution of trigonometric notions in this work.

Key words: trigonometry, socioepistemology, socio-historical analysis, almagest

Introducción

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) sostiene que el conocimiento matemático, en tanto producción social, no fue diseñado para ser enseñado (Cantoral, 2013). Por tal motivo, en su introducción en el sistema educativo se producen discursos, denominados genéricamente discurso Matemático Escolar (dME), que al centrarse únicamente en el dominio de conceptos matemáticos han generado la concepción de la Matemática como un conocimiento acabado, no susceptible de construirse, sino solo de adquirirse (Soto, 2010).

Una de las características del dME asociado a la trigonometría, denominado *discurso Trigonométrico Escolar* (Montiel, 2005), que se cristaliza en los planes y programas de estudio, los libros de texto y el discurso escolar es la disociación entre las relaciones trigonométricas y las construcciones geométricas que históricamente les dieron origen y que además las preceden de manera general en los programas y planes de estudio. Como consecuencia de este fenómeno, nombrado *aritmetización de la trigonometría* (Montiel, 2011), las relaciones trigonométricas “dejan de tener utilidad para expresar relaciones de proporcionalidad y se convierten en el proceso aritmético de dividir las longitudes de los lados del triángulo” (Montiel, 2011, p. 66).

Atendiendo esta problemática, y desde la perspectiva que ofrece la TSME, hemos comenzado un proyecto de investigación cuya intención final es el rediseño del discurso Trigonométrico Escolar, en particular en el contexto de la formación inicial docente en Honduras. La primera etapa de este proyecto consiste en ampliar la problematización de lo trigonométrico realizada por Montiel (2005) en dos escenarios: uno histórico y uno didáctico. El histórico consta de un análisis documental de los preliminares matemáticos del *Almagesto* de Ptolomeo, donde la Trigonometría emerge como geometrización de los fenómenos celestes, y el didáctico corresponde a un análisis curricular del Profesorado en Matemáticas que oferta la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, relativo a los contenidos de Trigonometría y Geometría.

Ambos análisis proveerán elementos para, en una segunda etapa de la investigación: plantear una epistemología de prácticas que fundamente una investigación de diseño orientada a la intervención didáctica para el desarrollo del pensamiento trigonométrico en la formación inicial docente.

Este escrito da cuenta del avance de la problematización en el escenario histórico, así como de los elementos teóricos que la sostienen, el método de análisis utilizado y algunos resultados preliminares de la misma.

Análisis sociohistóricos

Desde la TSME, realizar un análisis documental con el fin de estudiar la naturaleza epistemológica del saber matemático conlleva “no sólo la relatoría de hechos históricos, sino la búsqueda de las circunstancias socioculturales que rodean la generación de conocimiento matemático” (Montiel y Buendía, 2012, p. 68). En nuestro caso, pretendemos conocer y analizar las circunstancias sociales, culturales e institucionales que propiciaron la emergencia y evolución de nociones trigonométricas en el *Almagesto* de Ptolomeo, especialmente en el Capítulo IX del Libro I (Saiz, 2003) de dicha obra.

Para este fin, consideramos la propuesta metodológica para estudios sociohistóricos planteada por Espinoza-Ramírez y Cantoral (2010), la cual sostiene que para construir una explicación del significado sociocultural de una obra esta debe verse al menos desde tres perspectivas:

Como una producción con historia. La obra debe ser entendida como perteneciente a una época, a un ser humano con sus propias ideas germinales y sus medios de significación. En este sentido nos planteamos interrogantes como: ¿quién fue Claudio Ptolomeo?, ¿cuándo y dónde nació?, ¿quién fue su familia?, ¿cuál fue su formación?, ¿qué antecedentes astronómicos y matemáticos sustentan su obra?

Como un objeto de difusión. Toda obra Matemática que se publica tiene una intencionalidad de difusión intrínseca, pues busca difundir algo a alguien. En nuestro caso nos interesa saber: ¿es el *Almagesto* una obra con fines didácticos o de divulgación científica?, ¿quiénes son sus destinatarios iniciales?, ¿qué eventos sociales, políticos y económicos son determinantes en su publicación?, ¿en qué condiciones se difunde originalmente?

Como parte de una expresión intelectual global. Una obra antigua es una expresión intelectual que pertenece a una secuencia de ideas y evoluciona en la totalidad de las obras del autor e incluso de su comunidad científica, académica o social. Entonces, resulta oportuno preguntarnos: ¿qué relación guarda el *Almagesto* con otras obras de Ptolomeo? y ¿qué relación mantiene con otras obras matemáticas o didácticas relevantes en la época?

A estas cuestiones intentaremos, siguiendo un orden cronológico, dar respuesta en los apartados siguientes.

Hechos que propiciaron el *Almagesto*

A pesar del extraordinario dominio de la medición del tiempo y la gran cantidad de observaciones astronómicas realizadas por la civilización egipcia y babilónica, las explicaciones que estas daban a los fenómenos celestes estaban íntimamente relacionadas con sus creencias religiosas y míticas. Es hasta el siglo VI a. C., con el asentamiento de las primeras colonias griegas a lo largo de toda la costa del mar Negro y del mar Mediterráneo, que dio comienzo el movimiento de *racionalización del universo*, esto es, se inicia la búsqueda de explicaciones a los desplazamientos, formas, tamaños y posición de los astros, por sobre las observaciones de los mismos.

El primer indicio de este movimiento lo constituye la escuela del filósofo Tales de Mileto (ca. 624-548 a. C.), a la cual se le concede el proponer las primeras dimensiones para el Sol y la Luna, plantear que las estrellas se hallan clavadas en una esfera transparente de materia cristalina y postular la *geocentricidad* del universo (Mateu y Orts, 2006).

Al norte de Mileto, en la isla de Samos, nace Pitágoras (ca. 580-500 a. C.), presunto alumno de Tales, quien erige la segunda escuela de este movimiento, una sociedad de carácter comunal y secreto a la cual se atribuye el proponer la *esfericidad* de los cuerpos celestes, así como la *circularidad* de sus trayectorias (Boyer, 1986).

La doctrina pitagórica consideraba que *los números (enteros positivos) rigen la vida y el cosmos*, por tal motivo, el descubrir la incapacidad de estos para dar cuenta de algunas relaciones fundamentales, por ejemplo, la razón del lado de un cuadrado y su diagonal, representó la demolición de las bases de la fe pitagórica. En este sentido, la *inconmensurabilidad* "hizo que la geometría se privilegiara sobre la aritmética y con ello en Grecia la geometría adquirió el estatus de ciencia por excelencia" (Sánchez, 2012, p. 76), hecho evidente en la posterior producción Matemática y Astronómica de la época.

En Atenas, Platón (ca. 428-348 a. C.), quien a pesar de no sobresalir como astrónomo, influyó de manera determinante en la visión del cosmos de la época al secundar la *esfericidad* de los cuerpos celestes propuesta por los pitagóricos (Timeo, citado por Saiz, 2003). Con base en esto, uno de sus más reconocidos discípulos, Eudoxo de Cnido (408-355 a. C.), propuso el modelo de las esferas homocéntricas, en el cual cada uno de los planetas está adherido al ecuador de una de varias esferas transparentes concéntricas que, con diferentes ejes de rotación, giran alrededor de la Tierra estática.

Posteriormente, Aristóteles (384-322 a. C.), que al igual que su maestro Platón destacó como filósofos antes que como astrónomo, secundó la *circularidad* de las trayectorias de los cuerpos celestes propuesta por los pitagóricos y la *geoestaticidad* del modelo de Eudoxo (Saiz, 2003).

En el año 323 a. C., con la muerte del Alejandro Magno, alumno de Aristóteles y emperador de Macedonia, se desencadena una lucha despiadada por tomar el poder del imperio, que abarcaba entonces la mayor parte del mundo conocido. Este conflicto concluye con la división Macedonia en tres reinos: el Imperio Seléucida, Macedonia antigónida y Egipto. De este último, en el año 306 a. C., asume el poder Ptolomeo I Soter (Boyer, 1986), el cual toma como sede de su gobierno a la ciudad de Alejandría, urbe fundada por Magno en una zona costera muy fértil, al oeste del río Nilo.

Entre las primeras decisiones de Ptolomeo I estuvo el establecimiento de la Biblioteca y la Escuela en Alejandría. Se estima que para el año 300 a. C. la Biblioteca contaba con alrededor de 200,000 volúmenes y la Escuela, denominada Museo, despuntaba como el centro de la actividad científica de la época (Melogno, Rodríguez y Fernández, 2011). El Museo jugó un papel medular en la composicion del *Almagesto*, dado que, además de considerarse la casa de estudio de Ptolomeo, como profesores de esta desfilaron los autores de las bases matemáticas y astronómicas inmediatas de dicha obra: Euclides, Apolonio e Hiparco (Boyer, 1986).

El primero, Euclides de Alejandría (325-265 a. C.), fue autor de no menos de doce obras referentes a una variedad materias, pero es, sin lugar a dudas, sobre los *Elementos* que descansa su fama. Esta obra compuesta por 13 libros recopila la Matemática elemental de la época en diversos campos temáticos. La importancia de esta obra radica no solo en la completitud de la síntesis que contiene, pues ya existian al menos tres epítomes similares (Boyer, 1986), sino en su presentación como un sistema formal axiomático deductivo (Melogno et al., 2011).

Por su parte, el astrónomo Apolonio de Perga (262-190 a. C.) propone dos modelos geométricos equivalentes para explicar los movimientos de los cuerpos celestes, el de los *epiciclos* y el de los *excéntricos* (Boyer, 1986).

Si bien los astrónomos y matemáticos griegos desde Aristarco, 200 años antes, habían estudiado y utilizado relaciones entre rectas y circunferencias, hasta este momento no existía nada que podamos llamar trigonométrica medianamente sistemática. Hiparco de Nicea (ca. 180-125 a. C.), a mediados del siglo II a. C., es el primero que se da a la tarea de tabular los valores correspondientes de arcos y cuerdas para una serie completa de ángulos, componiendo así la *tabla trigonométrica* (ahora perdida) que le hace acreedor al título de “padre de la trigonometría” (Boyer, 1986). Otras contribuciones importantes de este astrónomo, geógrafo y matemático fueron el organizar y ordenar las observaciones realizadas por sus antecesores, redactar un catálogo de 850 estrellas, mejorar algunas constantes como la duración del mes y el año, y utilizar los prototipos plateados por Apolonio para modelar el movimiento del Sol y la Luna.

A pesar de que el nombre de Claudio Ptolomeo dominó el pensamiento astronómico hasta la época de Copérnico, más de 1400 años, poco se sabe de la vida de este matemático, astrónomo, geógrafo y físico. Existe cierta unanimidad a considerar a Egipto como su país de origen y los años 100 y 170 d. C como fechas de su nacimiento y muerte, respectivamente. Menos certeza tenemos acerca de su familia, pues varios escritores asocian a Ptolomeo a la familia real del mismo nombre, algunos incluso le conceden el título de rey, otros, en cambio, argumentan que Ptolomeo no pudo tener dicha ascendencia (Saiz, 2003). La ciudad egipcia de la cual fue oriundo también es un enigma, Alejandría, Pelusio y Ptolemaida son algunas de las ciudades involucradas en dicho debate.

Lo que es un hecho es que, como mencionan Dorce (2006) y Saiz (2003), gracias a las observaciones propias que reporta Ptolomeo en sus estudios, sabemos que trabajó en la ciudad de Alejandría entre los años 125 y 141 d. C., y tras esta última fecha se dedicó a redactar la obra que le ha hecho inmortal: el *Almagesto*.

No obstante Ptolomeo “fue muy escrupuloso en citar a sus predecesores cuando la idea no era suya, lo que permite distinguir claramente cuáles son y cuáles no sus propias contribuciones” (Melogno et al., 2011, p. 84), no pequeño es el debate acerca de la originalidad de esta síntesis compuesta por 13 libros, en los cuales Ptolomeo expone su teoría del Sol, la Luna y las estrellas, primero la de las fijas y posteriormente la de los cinco planetas conocidos.

Llegados a este punto poseemos un panorama general de la visión del universo que tuvo Ptolomeo, esta nos es necesaria para entender la problemática que pretendia abordar al escribir su obra: la *geoestaticidad* y la *geocentricidad* del universo, la *esfericidad* de los cuerpos celestes y la *circularidad-uniformidad* de su movimiento. También somos concientes de las principales herramientas matemáticas y astronómicas con las que contaba: las observaciones realizadas por los egipcios y babilonios, la Matemática axiomática-deductiva de Euclides, las teorías de epiciclos y excéntricos de Apolonio, y toda la producción científica de Hiparco. Además, hemos hecho alusión a algunos de los hechos de índole social, cultural e institucional que jugaron un rol trascendental en la configuración, carácter y estructura del *Almagesto*: la inconmensurabilidad, la expansión y división de Macedonia, la fundación de la Biblioteca y la Escuela de Alejandría y la labor de Ptolomeo como maestro en dicha ciudad.

Análisis documental

El análisis documental es un procedimiento sistemático para revisar y/o evaluar documentos (digitales o impresos), cuya razón fundamental radica en su utilidad como método independiente para formas especializadas de investigación cualitativa, y el rol que juega en la triangulación metodológica y de datos (Bowen, 2009). Estos atributos son especialmente deseables en los estudios como el nuestro, en los cuales los acontecimientos ya no pueden ser observados y donde los documentos constituyen la única fuente viable de datos.

Gracias a lo reportado en la literatura y la revisión inicial de nuestro documento a analizar, el Capítulo IX del Libro I del *Almagesto* (Saiz, 2003), apartado en el que Ptolomeo construye su tabla trigonométrica, nos percatamos de la pertinencia de analizar previamente los *Elementos* de Euclides con el fin de acercarnos a la racionalidad y al lenguaje con el cual se hacía Matemática en la época. Además, este análisis, llevado a cabo junto con el colega Sergio Rubio Pizzorno durante el Seminario de Investigación en Matemática Educativa II perteneciente al segundo semestre del año lectivo 2015-2016, nos permitió estructurar una estrategia de análisis que, debido a la aludida afinidad entre las obras, fue base en la propuesta de análisis del *Almagesto*.

Dicha propuesta consistente de tres niveles: *nivel micro, meso y macro*. El primero apunta a estudiar en detalle cada proposición de la obra en tanto estructura discursiva y objetivo particular; en el segundo nivel, el meso, se estudia las relaciones existentes entre una proposición y otra; y, finalmente, el análisis macro persigue la articulación de los objetivos particulares de cada proposición y los nexos entre estos, con la intención de acercarnos al objetivo del documento.

El análisis micro se compone a su vez de dos grandes secciones: el análisis de la *estructura discursiva* y la *interpretación* de la misma. La organización utilizada para el estudio de la *estructura discursiva* del *Almagesto* toma como base la empleada en el análisis de los *Elementos*, la cual se fundamenta en las propuestas de Vega (2013) y Navarro (2003), y se detalla como sigue:

- *Enunciado:* fase en la que se declara lo que se quiere demostrar.
- *Exposición:* apartado en el que se exponen los objetos que van a intervenir en el desarrollo de la proposición y se concretan en un dibujo (representación material).
- *Preparación:* planteamiento de las relaciones a establecer a partir de los objetos declarados anteriormente.

- *Demostración:* puede constituir de los siguientes elementos:

a. *Construcción:* parte en la que se añade al dibujo inicial (o representación material) unidades figurales (puntos, líneas o circunferencias) cuyas propiedades contribuyen a demostrar la afirmación del enunciado.

b. *Prueba:* apartado dedicado a plantear y justificar los pasos lógicos necesarios para demostrar la tesis.

- *Conclusión:* este se corresponde de manera general con el enunciado, y en el menor número de casos con la preparación. Su fin es cerrar la proposición puntualizando lo que se demostró.
- *Uso:* en este apartado el autor se vale de la proposición demostrada para añadir mediciones a su tabla trigonométrica y/o establecer corolarios.

En la segunda sección del análisis micro, la interpretación, se atienden las cuestiones: *¿qué hace?* y *¿cómo lo hace?* En la primera de estas se intenta identificar los elementos claves de la demostración llevada a cabo, mientras que la segunda busca describir y explicar el proceso y objetivo de la proposición. Además, cuando es pertinente, se incluye un tercer apartado denominado *otros*, en el que se puntualizan particularidades identificadas en la proposición, las cuales de manera genérica corresponden a aspectos lingüísticos, lógicos y matemáticos.

Resultados provisorios

Antes de comenzar a plantear sus modelos planetarios, Ptolomeo se da a la tarea de construir la tabla trigonométrica que será la base de sus cálculos posteriores. Como hemos anotado, se concede a Hiparco la construcción de la primera tabla de este estilo, pero esta se ha perdido; afortunadamente en el Capítulo IX del Libro I del *Almagesto* nos encontramos no solo con la tablas trigonométrica de Ptolomeo sino con la explicación de los métodos utilizados en su construcción.

Previo a comenzar dicha empresa, Ptolomeo establece dos convenios: la subdivisión de la circunferencia de un círculo y un sistema para subdividir el diametro del mismo. Con relacion al primero, utiliza una circunferencia subdividida en 360 partes, una división usual en la época, posiblemente tomada de la astronomía griega (Boyer, 1986). El dividir el semidiámetro del círculo en 60 partes, cada una dividida subsecuentemente en 60 partes más pequeñas, es sin duda sugerido por el sistema de numeración posicional babilónico, que, como el mismo Ptolomeo menciona (Saiz, 2003), permitía un trabajo con las fracciones considerablemente superior al tratamiento de las fracciones unitarias egipcias y de las fracciones griegas de la época.

Resuelta esta situación, Ptolomeo emprende la construcción de su tabla, el proceso iterativo mediante el cual lo consigue es: demostrar una proposición y emplearla para calcular nuevas medidas y/o postular corolarios que lo lleven a estas. Así, por ejemplo, se propone en primera instancia construir y averiguar la longitud del lado del decágono, hexágono, pentágono, cuadrado y triángulo regulares inscritos en la circunferencia de un círculo. La demostración de esta proposición le permite calcular las cuerdas que se subtienden bajo 36°, 60°, 72°, 90° y 120°, respectivamente.

Las restantes proposiciones que desarrolla son: el cálculo de la cuerda subtendida por el ángulo suplementario, la determinación de las cuerdas de los ángulos diferencia (o suma) y el cálculo de las cuerdas de los ángulos mitad (Boyer, 1986). Estas proposiciones y cálculos anotados, aunados a la aproximación de las cuerdas subtendidas por un ángulo central de 1° y 0.5°, le permiten completar la construcción de una tabla trigonométrica compuesta con los arcos comprendidos entre 0.5° y 180°, con incrementos de medio grado, y su línea recta subtensa correspondiente.

Si bien no se ha completado el análisis de la obra, nos atrevemos a plantear algunas observaciones provisionales del mismo: a pesar de los más de 400 años que separan una obra de la otra, la influencia de los *Elementos* de Euclides en la estructura, racionalidad y herramientas matemáticas puestas en juego por Ptolomeo en el *Almagesto* es evidente.

A manera de ilustración, podemos considerar el hecho de que, tan solo en la demostración de la primera proposición mencionada, hemos identificado el uso de 16 proposiciones de la obra maestra de Euclides, provenientes de los libros I, II, IV, VI y XIII. Además, el uso del lenguaje matemático introducido en los *Elementos* es claro, un ejemplo de esto es la clasificación particional de cuadriláteros de la cual hace uso Ptolomeo, misma que Sánchez (1991) concede como original de Euclides.

Si bien el modelo astronómico propuesto por Ptolomeo se basó en supuestos de partida no válidos actualmente como la *geocentricidad* del universo y la *circularidad* de los movimientos de los astros, los argumentos geométricos que utilizó para construir y fundamentar este modelo constituyen las primeras evidencias concretas de la emergencia de nociones matemáticas de una naturaleza particular: la trigonométrica.

■ Referencias bibliográficas

Bowen, G. A. (2009). Document analysis as a qualitative research method. *Qualitative research journal 9(2)*, 27-40.

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Universidad de Textos.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Dorce, C. (2006). *Ptolomeo: el astrónomo de los círculos*. Madrid: Nivola.

Espinoza-Ramírez, L. y Cantoral, R. (2010). Una propuesta metodológica para estudios socio históricos: el caso de la teoría de funciones de Lagrange. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, 889-897. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Mateu, E. y Orts, A. (2006). La astronomía griega: de los pitagóricos al almagesto de Ptolomeo. *Huygens (62)*, 19-38.

Melogno, P., Rodríguez, P. y Fernández, S. (Eds.). (2011). *Elementos de Historia de la Ciencia*. Uruguay: Universidad de la República.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica* (Tesis de Doctorado no publicada). Centro de investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada-IPN, México.

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico*. México: Díaz de Santos.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones*, 55-82. México: Lectorum.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones. *Metodología en matemática educativa: visiones y reflexiones*, 61-88.

Navarro, J. (2003). Los elementos de euclides. *Un Paseo por la Geometría 2002/2003*, 55-82. España: Real Sociedad Matemática Española.

Saiz, L. (2003). *El Capítulo IX del Libro I del Almagesto de Claudio Ptolomeo: "Sobre la medida de las líneas rectas que se trazan en el círculo*". Madrid: Maxtor.

Sánchez, C. H. (2012). La historia como recurso didáctico: el caso de los Elementos de Euclides. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED (32)*, 71-92.

Sánchez, P. (1991). *Elementos de Euclides*. Madrid: Gredos.

Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una visión Socioepistemológica* (Tesis de Maestría no publicada). Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, D.F., México.

Vega, Y. (2013). *Resolución de problemas geométricos en el aula usando el método de análisis y síntesis* (Tesis de Maestría no publicada). Universidad Nacional de Colombia.

GEOMETRÍA DINÁMICA: EL CASO DE LA FUNCIÓN SENO

Marcela Ferrari Escolá, Diana Lluck Soberanis, Gustavo A. Meneses Cisneros
Universidad Autónoma de Guerrero. CBTys 14. (México)
mferrari@uagro.mx, dianalluck@hotmail.com

RESUMEN: Presentamos un acercamiento a la función seno involucrando una construcción geométrica en GeoGebra. Cobijamos nuestra investigación en la sociepistemología siendo la “experiencia de enseñanza” la metodología utilizada. El diseño de aprendizaje provoca un uso intuitivo de los radianes así como una discusión de los parámetros que se involucran en la expresión analítica de esta función al manipular la gráfica lograda. Reportamos un primer análisis de los datos recogidos al invitar a doce estudiantes de bachillerato tecnológico mexicano a construir geométricamente la función seno, donde la medida del ángulo no involucre razones trigonométricas sino su lectura directa en radianes. Todos los equipos reconocen, por la “forma”, una “onda” que asocian con la función seno en la primera sesión del experimento de enseñanza. Nos enfocamos en la producción de uno de los equipos el cual discierne que la medida del arco representa el ángulo medido sin reconocerlo como radianes, argumentando desde la definición de seno (relación trigonométrica) que conocen.

Palabras clave: socioepistemología, función seno, geoGebra

ABSTRACT: We present an approach to the sine function involving a geometric construction in GeoGebra. We base our research on socio-epistemology, being the "teaching experience” the methodology used. The learning design causes an intuitive use of radians as well as a discussion of the parameters involved in the analytical expression of this function when manipulating the graph achieved. We report a first analysis of the data collected by asking twelve Mexican technical high school students to geometrically construct the sine function, where the angle measurement does not involve trigonometric ratios but their direct reading in radians. All the teams recognize, by the "form", a "wave" that they associate with the sine function in the first session of the teaching experiment. We focus on the production of one of the equipment that could discern that the arc measurement represents the measured angle without recognizing it as radians, arguing from the sine definition (trigonometric relation) that they know.

Key words: socio- epistemology, sine function, geoGebra

Introducción

La apropiación de “función”, en el ámbito escolar, ha sido estudiada desde diferentes miradas teóricas y en particular a través de la “covariación” (Johnson, 2015). En general, se reflexiona sobre funciones partiendo de conocer sus características mediante su lenguaje algebraico, numérico y gráfico. Pocos son los que reflexionan sobre funciones particulares tales como funciones cuadráticas (Ellis, 2011), funciones exponenciales (Castillo-Garsow, 2010), funciones trigonométricas (Shotz & Montiel, 2013; Moore, 2014), función logarítmica (Ferrari & Farfán, 2010) entre otras. Sin embargo, vemos que se va desdibujando el paradigma imperante años atrás sobre el estudio global de función dando lugar al estudio de funciones específicas donde posicionamos esta investigación. Respecto a la función senoidal, Demir y Heck (2013) evidencian que en la escuela existen dos acercamientos a funciones trigonométricas: razones trigonométricas y circunferencia unitaria. Presentan un modelo de entendimiento trigonométrico, diseñando tres momentos: trigonometría del triángulo rectángulo; círculo trigonométrico; y, gráficas de estas funciones. Reportan que los estudiantes de bachillerato presentan dificultades en convertir de grado a radianes y vincular el triángulo trigonométrico con el círculo trigonométrico unitario. Sin embargo, consideran que los estudiantes evolucionan hacia ser capaces de evaluar funciones trigonométricas en relación con la longitud de un arco.

Para Yiğit (2016) es factible considerar a la trigonometría como una especie de puente entre el razonamiento geométrico y el algebraico. Reporta dificultad en los estudiantes graduados en Matemáticas para el concepto de ángulo; observa que prevalece el método del triángulo rectángulo y su nemotecnia, y recomienda fomentar estudios donde se involucre la circunferencia unitaria con relaciones trigonométricas así como desarrollar tareas en entornos dinámicos. En tanto que Akkoc (2008) reporta que los profesores en formación entrevistados evidencian que el “concepto imagen” de *grado* predomina sobre la de *radian*, así como una concepción conflictiva entre π como ángulo en radianes y como número irracional al reflexionar desde la función. Moore, LaForest y Kim (2015) reportan sobre cómo profesores en formación relacionan la longitud de un arco de circunferencia, observan que el círculo unitario surge como estrategia de cálculo. Concluyen que para estos estudiantes considerar al círculo unitario como herramienta juega un papel fundamental en la conversión de medidas en relación con la longitud de un arco de la misma

A diferencia de los reportes anteriores, estudios de corte socioepistemológico se cuestionan sobre la construcción de saberes entorno de funciones trigonométricas, en búsqueda de argumentos originales que se han cercenado del discurso matemático escolar, elementos que no son discutidos en los reportes mencionados. En Montiel (2005), encontramos que si bien una caracterización funcional para el seno ya era conocida por Newton, fue en el *Introductio in analysin infinitorum* de Euler (1748, citado en Montiel 2005) donde se reconoce a las cantidades trigonométricas como relaciones funcionales trascendentes, junto con el logaritmo y la exponencial. Al seno se le consideraba como la longitud de segmentos de línea relativos a un círculo dado de radio R. Es decir, el seno del ángulo A es la mitad de la cuerda en un círculo, subtendida por el ángulo central 2A.

Para Montiel (2005), en *De quantitatibus trascendentibus ex Circulo ortis* (primer Tomo, Capítulo VIII del libro mencionado), Euler define las funciones trigonométricas como cantidades trascendentes que nacen del círculo y aunque no hace uso de la palabra radián, señala que π es la semicircunferencia de un círculo (de radio 1) y en consecuencia es la longitud del arco de 180°. Establece entonces, que *sen* 0 π = 0, *sen* π/2 = 1, *sen* π = 0; y, *sen* 3π/2 = -1. En este sentido, Buendía y Montiel (2009) observan que en esta obra coexisten la presentación de la medida de un ángulo en grados y en radianes; manejo ambiguo que, en la literatura actual se evidencia los conflictos que acarrea en tanto que Euler utiliza y transita entre ambas unidades (grados y radianes) sin complejidad, sin limitarse su método de calcular la cantidad trascendente al triángulo rectángulo.

En este reporte presentamos las reflexiones del lider de un equipo de estudiantes de bachillerato tecnológico mexicano sobre función seno desde un par de ejes cartesianos, un círculo unitario y una construcción geométrica. Nos cuestionamos en esta investigación sobre ¿Qué argumentos emergen en estudiantes de bachillerato que participan en un experimento de enseñanza que evidencien el desarrollo de su pensamiento covariacional?

■ Marco teórico

La socioepistemología, sustento teórico de esta investigación, propicia la confluencia y relación dialéctica de aspectos que consideramos fundamentales al abordar un fenómeno didáctico. Contemplar y analizar el devenir de una noción a un objeto de saber; caracterizar las concepciones de los alumnos; dar cuenta de cómo vive una noción en las aulas y el discurso matemático escolar que se genera, ser conscientes que la Matemática es un bien cultural inmerso en una sociedad y tiempo determinados que condiciona su comunicación y apropiación (Cantoral, 2013) conlleva profundizar en la reorganización del discurso matemático escolar y sus personajes.

Compartimos con Buendía (2004) y Cordero (2005), la idea de que desde las construcciones sociales generadas por ciertas prácticas así como desde los contextos argumentativos que surgen naturalmente en los grupos sociales, emerge la construcción del conocimiento matemático. Buendía (2004) rescata que argumentar es presentar una postura con la conciencia de que existe otra opinión, implícita o explícita, diferente de la propia. En este sentido Cordero (2005) establece una terna entre: los significados generados por los estudiantes en la interacción; los procedimientos; los procesos-objetos y el argumento refiriéndose a la reorganización de los anteriores.

Por otro lado, Krummheruer (1995, en Lavy, 2006) explicita que el aula de Matemáticas es una situación social donde emerge una conexión cercana entre la participación activa en acontecimientos áulicos y el desarrollo del concepto matemático discutido con el estudiante. Krummheruer (2015) considera que el foco principal debe estar sobre el análisis del proceso y no del producto, pues al analizarlo se descubre un cierto dominio de realidad, que está de algún modo solamente entre el nivel sociológico de los aspectos institucionalizados escolarmente y el nivel psicológico del individuo de conocimiento. Además, considera que*, el conocimiento matemático es un conocimiento argumentativo.*

Está basado en la participación de los estudiantes en "una práctica de explicar" (Garfinkel, 1967, p. 1) que es provechosa, de apoyo, y la iniciativa para los procesos de aprendizaje matemáticos de los estudiantes (p. 62). Más específicamente sus aportaciones sobre la argumentación, nos hace entenderla no sólo como un elemento deseable en una situación de aprendizaje, sino una condición fundamental para que este aprendizaje se dé, y por tanto, consideramos de interés no sólo preguntarnos cómo está estructurado un argumento realizado en el curso de la interacción, si no también, cómo el profesor y los alumnos participan en su producción (colectiva) interactiva.

Metodología

Consideramos como metodología de la investigación, el experimento de enseñanza (Steffe & Thompson, 2000), ya que nuestro propósito es percibir el desarrollo del pensamiento covariacional de estudiantes de bachillerato provocado por un diseño de aprendizaje en un ámbito discursivo que propicia GeoGebra analizando sus argumentaciones.

El experimento de enseñanza fue desarrollado en tres sesiones con 12 estudiantes de sexto semestre de bachillerato, un par de ellos con especialidad en electrónica y el resto en electromecánica. Los estudiantes, de 17 y 18 años, fueron organizados en cuatro equipos de tres jóvenes, de los cuales sólo dos fueron mujeres y todos participaron libremente en la puesta en escena.

Figura 1. Diseño del experimento de enseñanza

Las sesiones fueron videograbadas así como recopilado las evidencias escritas de los estudiantes. En cada equipo se colocó una videocámara y un grabador que fueron controlados por cuatro auxiliares de investigación. Se contó con un testigo, en este caso el profesor del grupo, y el investigador principal desarrolló las actividades (Fig.1)

En los programas de Bachillerato Tecnológico encontamos en los cursos de Matemáticas que en segundo semestre cursan Geometría y Trigonometría donde se les pesentan las relaciones trigonométricas, en particular, razones, funciones, círculo unitario, identidades y resolución de triángulos. En cuarto y quinto semestre se desarrollan los Cálculos diferencial e integral, invitándolos a reflexionar sobre la variación y la acumulación, en tanto que en sexto semestre se espera articular los saberes matemáticos en la unidad de aprendizaje “Matemática aplicada”, ideas que se retoman y profundizan en el nivel superior que se extiende incluso al uso de varias variables. En cursos de especialidad también se acercan a la función seno priorizando sus características en diferentes actividades (Fig. 2)

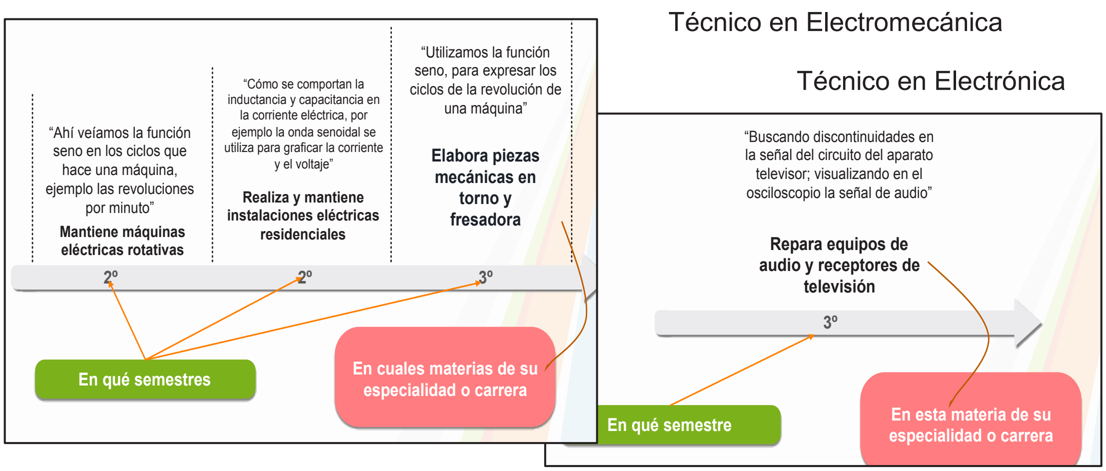


Figura 2. Uso escolar de función seno

En la primera sesión se proponen, en el diseño de aprendizaje, tres actividades. El objetivo de la primera es familiarizarlos con el espacio de GeoGebra y percibir la forma de la curva, quizás reconocerla como la función seno. La segunda se destina a sobrepasar las limitantes de la geometría dinámica al solicitarles que construyan puntos hacia la derecha (implica reconocer el período de la función) y hacia la izquierda (reconocer la simetría central y el papel del signo menos aplicado a cantidades positivas “arco”). La tercera, pretende reflexionar sobre por qué creen los estudiantes que se utiliza el arco y la altura para trazar los puntos de la curva así como de dos características de la misma: “es función” y “es función sobre”.

En la segunda sesión se busca desafiarlos a agrandar el círculo unitario que provocará alterar los parámetros de la expresión algebraica y propiciar la reflexión sobre ¿qué varía? ¿Cómo varía? ¿qué pasa con la forma de la curva? ¿qué mide el arco en realidad? ¿cómo ajustar los puntos? La tercera sesión se destina a escuchar a los jóvenes sobre en qué actividades reconocen ellos el uso de la función seno.

En este artículo reportamos los argumentos presentados por el Equipo 3 conformado por tres muchachos uno de los cuales fungió como líder y portavoz (E1) que evidencia cierta articulación de varios elementos del diseño.

Resultados

En la primera sesión se inició la construcción geométrica de puntos de la función seno mediante el trazo de un punto sobre la circunferencia unitaria que determinaría un punto de la función al medir el arco que subtiende y la recta horizontal que lo atraviesa. El equipo 3 utilizó varios minutos para trazar puntos de manera aleatoria, sin un orden, sólo con el fin de percibir la "onda" que iba emergiendo. Comienzan a buscar una relación entre el aumento de "*y*" y el del "arco" (Episodio 1).

Episodio 1: Relación entre altura de "y" y el arco subtendido

E1: Es que, lo que pasa es que, en este punto que graficamos el primer punto que es "B", el radio vale exactamente 1 y conforme va subiendo la longitud en "*y*" va aumentando y por eso… cuando llega, cuando el radio está exactamente a 90 grados alcanza, yo creo que alcanza su punto máximo, entonces ya cuando alcanza 90 grados ya pasa a 100, entonces ahora el radio… la longitud de "*y*" va disminuyendo.

Testigo 1: Pero ¿es el radio el que va disminuyendo?

E1: No, es la longitud de "*y*".

Testigo 1: Y ¿quién es la longitud de "*y*"?

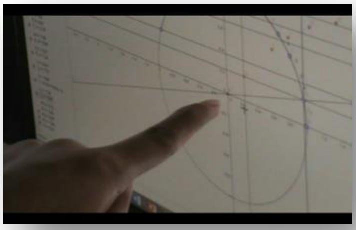
E1: aahh, Cómo?

Testigo 1: Tú me dices, hay un radio que es 1 y la longitud de "*y*" está cambiando, pero la longitud de "*y*" respecto al círculo donde tú estas marcando, ¿con qué lo relacionas?

E1: Es que eso está relacionado con el cateto… si lo trazáramos sería un triángulo rectángulo y la hipotenusa sería el radio y el eje "*x*" nunca cambiaría ese sería el cateto adyacente, lo que cambiaria solamente sería el cateto opuesto y creo que por eso se pone una … ecuación ehh… digo una función senoidal, porque el seno es igual al cateto opuesto entre la hipotenusa.

Al observar la variación de la "altura de *y*" y los ángulos que están involucrados "E1" reconoce la función seno. Respalda su argumento imaginando un triángulo rectángulo y utilizando la definición de seno, es decir la razón trigonométrica "cateto opuesto sobre hipotenusa". No duda entonces que la variación del seno aumenta hasta 90º y disminuye nuevamente hasta 180º. Sin embargo, no tiene aún una respuesta sobre porqué se utiliza el arco. Sin embargo, percibe una gran relación entre "ángulo y arco" (Episodio 2)

Episodio 2: "ese arco es lo que vale el ángulo



Maestra: […] ¿Qué es lo que estás mirando? […] esto que decías de los catetos y el triángulo, ¿cuál sería el triángulo que visualizas?

E1: Éste y después la perpendicular a ésta.

Maestra: Ah ok

E1: Y a este ángulo es el que está variando y esta recta sube y por lo tanto el ángulo está variando.

Maestra: […] ¿y por qué creen que medimos el arco?

E1: ¿Este arco? Porque ese arco es lo que vale el ángulo, porque esté ángulo es igual a este arco. Entonces le digo que sólo lo que varia es el eje "y" esta longitud que si la ponemos hasta acá ya el triángulo sería más amplio… eso… por eso que se forman esos puntos, por eso creo que suben y por eso creo que luego bajan

En la segunda sesión se los desafía a ajustar los puntos que surgen al "agrandar" el círculo unitario. Todos los puntos están vinculados al círculo inicial pues son construidos midiendo el arco que subtiende y la altura que determina, por tanto el radio del círculo está involucrado (Fig. 3).

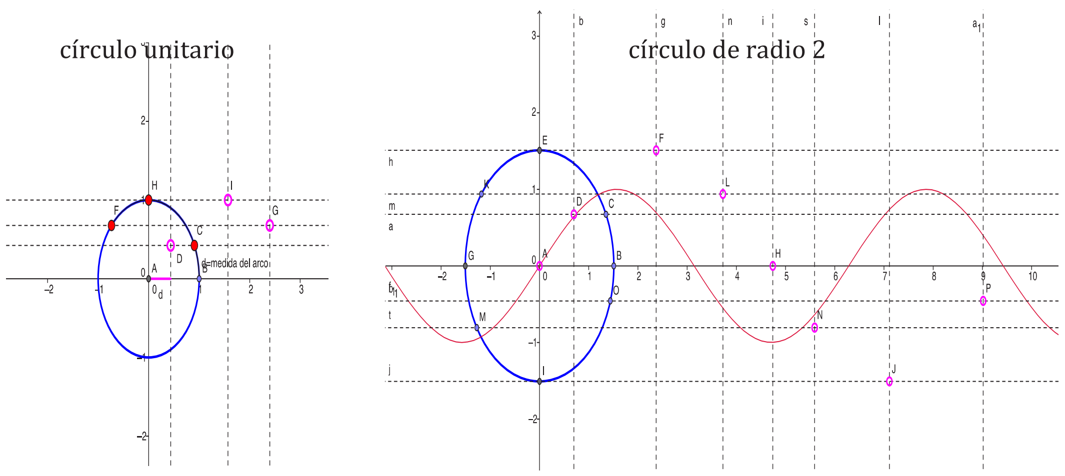


Figura 3. *Construcción de función seno*

El equipo 3 intenta "atrapar" los puntos multiplicando por una constante la función seno (Fig. 4a) para luego manipular el argumento de la función (Fig. 4b) que les permite observar, en ambos casos, los efectos globales, la primera ataca la amplitud (la altura) en tanto que el segundo varía el período. Luego de varios intentos perciben que se trata de alterar ambos parámetros al mismo tiempo y que el radio del círculo es primordial (Fig. 4c)

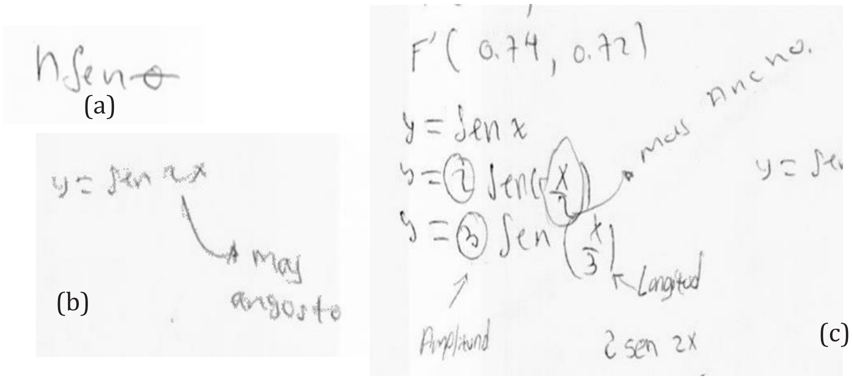


Figura 4. *Exploración para ajustar la curva*

Conclusiones

Emerge, en la gestión del diseño de aprendizaje, un uso intuitivo de los radianes en tanto se construye un acercamiento a la función seno ampliando la discusión a los parámetros que se involucran en la expresión analítica de esta función. El equipo 3, acepta la medida de los arcos como representante de los ángulos medidos en grados sin discutirlo. Centran su argumento en la definición del seno (relación trigonométrica) sin reconocer los radianes como unidad de medida. Logran asociar en la segunda sesión la medida del radio con el efecto que produce en los puntos construidos involucrando los parámetros (amplitud-período), lo cual conlleva discutir sobre cómo medir arcos subtendidos en un círculo y por ende el uso de radianes. Consideramos que este equipo logra percibir la covariación senoidal, pues articulan los “puntos” (modelo geométrico) con “la forma” (modelo gráfico) que los ajusta requiriéndose para ello una expresión algebraica (modelo algebraico), es decir, lograron una red de modelos, que nos permite establecer que se sumergieron en la práctica de modelar al participar en el experimento de enseñanza.

Todos los equipos reconocen por su “forma” una “onda” asociándola rápidamente a la función seno, elementos que se constata en la tercera sesión donde los equipos presentan ejemplos de donde ellos usan la función. El equipo 3 explica el uso de una máquina donde se percibe que les es suficiente reconocer un ciclo que se repite regularmente, pese a que se trataba de una variación lineal la que describe el movimiento de la pieza, imaginándolo como una “onda” y por tanto involucran a la función seno.

Los resultados encontrados en esta investigación nos dan aliento a continuar explorando el diseño de aprendizaje, pues se vislumbró articulación de los estudiantes entre las razones trigonométricas y el estudio de variaciones senoidales.

Referencias Bibliográficas

Akkoc, H. (2008).Pre-service mathematics teachers' concept images of radian, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 39*(7), 857-878.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. (Tesis de Doctorado no publicada). Cinvestav, México.

Buendía, G. & Montiel, G. (2009). Acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22* (pp. 1287-1296) CLAME.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Castillo-Garsow, C. C. (2010). *Teaching the Verhulst model: A teaching experiment in covariational reasoning and exponential growth*. (Tesis de doctorado no publicada). USA: Arizona State University.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8*(3), 265- 286.

Demir, Ö., & Heck, A. (2013). A new learning trajectory for trigonometric functions. En E. Faggoano & A. Montane (Eds.) *Proceeding of ICMTM 11* (pp. 119-124). University Bali, Italy.

Ellis, A. B. (2011). Algebra in the Middle School: Developing Functional Relationships Through Quantitative Reasoning. En J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. 215–238). Berlin, Germany: Springer.

Ferrari, M. & Farfán, R. M. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13*(4), 53-68.

Johnson, H. L. (2015). Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Studies in Mathematics 89*(1), 89-110.

Krummheuer, G. (2015). Methods for Reconstructing Processes of Argumentation and Participation in Primary Mathematics Classroom Interaction. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp.51-74). Springer.

Lavy, I. (2006). A case study of different types of arguments emerging from explorations interactive computerized environment. *Journal of Mathematical Behavior 25*, 153-169.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. (Tesis de Doctorado no publicada). CICATA-IPN, México.

Moore, K. C. (2014). Quantitative Reasoning and the Sine Function: The Case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(1), 102–138

Moore, K., LaForest, K. & Kim, H. (2015). Putting the unit in pre-service secundary teacher´s unit circle. *Educational Studies in Mathematics 92*(2), 221-241.

Shotz, O. & Montiel, G. (2013) Bases de un diseño didáctico para la construcción de las razones trigonométricas en el contexto geométrico del círculo. En Landa (Ed.) *Memoria de la XVI Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp.347-354). Red Cimate.

Steffe, L. P. & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh, & A. E. Kelly (Eds.), *Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 267–307). Hillside, NJ: Erlbaum.

Yiğit Koyunkaya, M. (2016). Mathematics education graduate students' understanding of trigonometric ratios. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-21.

EXPLORANDO COVARIACIÓN LOGARÍTMICA EN COORDENADAS POLARES

José Antonio Bonilla Solano, Marcela Ferrari Escolá
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
jbonillasolano@gmail.com, mferrari@uagro.mx

RESUMEN: En este trabajo presentamos el avance de nuestra investigación para ampliar los estudios de covariación logarítmica. El diseño de la actividad de aprendizaje surge con el plegado de papel, al dar forma un caracol nautilus de donde observamos que la curva es regida por una sucesión de triángulos semejantes en donde la hipotenusa (radio) crece con progresión geométrica y el ángulo adyacente en forma aritmética. Analizar los puntos de la curva nos invita a trabajar en el sistema de coordenadas polares, donde el ambiente de la geometría dinámica propicia la modelación de datos al permitir articular al caracol con tablas, expresiones algebraicas, gráficas necesarios para evocar las afirmaciones anteriores abordando de esta manera la covariación logarítmica, siendo la sociespistemología nuestro marco teórico y el experimento de enseñanza nuestra metodología de trabajo. Los resultados evidencian la dificultad para articular las exploraciones numéricas y geométricas con expresiones algebraicas así como abstraer la covariación en el plano polar.

Palabras clave: covariación logarítmica, geoGebra

ABSTRACT: In this paper we present the advance of our research to extend the studies of logarithmic co variation. The design of the learning activity arises with the folding of paper, forming a nautilus snail from where we observe that the curve is ruled by a succession of similar triangles in which the hypotenuse (radius) grows with geometric progression and the adjacent angle in Arithmetic form. Analyzing the points of the curve, invites us to work in the polar coordinate system, where the dynamic geometry environment facilitates data modeling by allowing the snail to articulate with tables, algebraic expressions, graphs necessary to evoke previous statements by addressing this way the logarithmic co variation; being the socio-epistemology our theoretical framework and the experiment of teaching our methodology of work. The results showed the difficulty for articulating numerical and geometric explorations with algebraic expressions as well as for abstracting the co-variation in the polar plane.

Key words: logarithmic co-variation, geoGebra

Introducción

El aprendizaje de función como objeto matemático ha sido estudiado y documentado por investigadores desde diferentes posturas teóricas, problemática que no ha perdido vigencia. La compilación de Dubinsky y Harel (1992) es una de las primeras síntesis sobre dificultades que presentan los estudiantes ante nociones de Cálculo abordando también la problemática de aprendizaje de función. Si bien, en distintas revistas de investigación y difusión de nuestra disciplina se abordan esta problemática, es difícil encontrar reflexiones sobre funciones particulares tales como funciones exponenciales (Ellis, Ozgur, Kulow, Williams & Amidon, 2012), funciones trigonométricas (Buendía y Montiel, 2009; Martínez Sierra, 2012) y en específico alrededor de la función logarítmica que se discute en esta investigación; todos estos reportes aterrizados en el sistema de coordenadas cartesianas.

Al intentar posicionar nuestra investigación, hallamos reportes en dos direcciones, aquellos que evidencian el ámbito escolar y la problemática suscitada alrededor de la función logarítmica (Liang & Wood, 2005; Ferrari & Farfán, 2010) y aquellos que centran su mirada en la historia de los logaritmos (Gonzáles & Vargas, 2007) los cuales nos enriquecen con estudios puntuales de originales o fuentes primarias.

En esta investigación nos proponemos indagar sobre la covariacion logarítmica (Ferrari y Farfan, 2010) en un sistema de coordenadas polares. En algunas investigaciones encontradas sobre función en este sistema se reporta que particularmente para el discurso matemático escolar, las coordenadas polares se dotan de más sentido y significado cuando la visualización en este sistema hace su aparición (Ramírez y Ferrari, 2011). Sin embargo, por lo general emergen dificultades ya que los alumnos evocan particularidades del plano cartesiano, para hacerlas válidas en el plano polar (Montiel, Wilhelmi, Vidacovik y Elstak, 2009). Hay evidencia también de fragilidades en el uso de la medición de ángulos en radianes (Martinez-Sierra, 2012) sin dejar atrás la problemática que existe en su concepción.

En este trabajo abordamos la covariación logarítmica en un sistema coordenado polar desde el plegado de papel o “papiroflexia”. Consideramos que dar forma de un caracol nautilus a una hoja cuadrada propicia la observación de ciertas regularidades y la discusión de las variaciones implicadas. Modelar conlleva no sólo mirar cómo la figura se envuelve en un sentido progresivo sino a articular las herramientas matemáticas que emergen invitándonos a utilizar la geometría dinámica para estudiar las variaciones.

Marco teórico

En esta investigación nos identificamos con la socioepistemología al sostener que, según Cantoral (2013), el saber no se limita a definir la relación que éste guarda con los objetos matemáticos sino a posicionar al ser humano en el acto mismo de significar, conocer, construir significados y en consecuencia estructurar sus sistemas conceptuales en tanto se lo problematiza. Ese saber emerge de prácticas sociales que no se limitan a caracterizar lo que el ser humano hace, sino a problematizar las causas del porque lo hace, describir las circunstancias de cómo y cuándo lo hace, en dónde y porqué lo hace y como se concibe haciéndolo.

En la indagación socioepistemológica de Ferrari y Farfán (2010) se reportan tres etapas en el desarrollo de los logaritmos si se toma como eje central la relación entre las progresiones aritmética y geométrica; argumento utilizado por Napier (1616, citado en *íbidem*) para su primera definición y los aportes de Briggs (1620/2004, citado en *íbidem*) para afinar su funcionamiento con el afán de *facilitar cálculos.* Elementos que también fueron utilizados por Huyens (1678/1981, citado en *íbidem*) o Newton (1697/1993, citado en *íbidem*) entre otros en búsqueda de *modelar* el movimiento de un objeto en un elemento viscoso. Prácticas que estos investigadores consideraron como las propulsoras de la construcción de los logaritmos. En este sentido, establecen como hipótesis epistemológica que la incorporación explícita de la relación entre una progresión aritmética y una geométrica, que denominan *covariación logarítmica*, como la esencia misma de los logaritmos, propiciaría una integración, quizás más efectiva y por tanto más robusta, de esta noción como función. Función que ahora estudiamos en el ámbito del sistema de coordenadas polares.

En esta investigación, nos interesa resaltar el papel que juega la modelación (Arrieta & Díaz, 2015), en tanto emerge, como argumento unificador, la covariación logarítmica en un ambiente de coordenadas polares. Nos enfocamos entonces en estudiar los argumentos que emitan los estudiantes universitarios al involucrarlos en un ambiente especial diseñado utilizando el plegado de papel y el uso de geometría dinámica, elementos que propicien la construcción de una espiral logarítmica y su discusión. Compartimos con Krummheruer (2015) la idea de que, por lo general, se asume que la argumentación, que parece ser bastante explícita y sofisticada en los participantes, es una condición previa para la posibilidad de aprender y no sólo el resultado deseado del conocimiento matemático puesto en juego. Es decir, el conocimiento matemático es argumentativo y surge en la participación de los estudiantes en *"una práctica de explicar* " (Garfinkel, 1967, p. 1 citado en Krummheruer, 2015).

Experimento de enseñanza

Es el experimento de enseñanza la metodología de investigación, pues crea el ambiente adecuado de nuestro objetivo, en donde más allá de ver la efectividad del diseño se pretende evidenciar la evolución de los argumentos que sobresalen en cada reactivo de la actividad. Un experimento de enseñanza consiste en una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son, por lo general, un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores. Se generan hipótesis que, durante el experimento, es necesario abandonar o reformular a la luz de los datos, y finalmente elaborar un modelo de aprendizaje y/o desarrollo de los alumnos en relación con un objetivo específico (Molina, Castro, Molina & Castro, 2011)

La preparación del experimento surge con la elaboración de conjeturas esperadas para cada sesión, y, analizando el plan de estudios de esta licenciatura percibimos que los estudiantes habían tenido un acercamiento a criterios de semejanza y coordenadas polares en cursos como: Elementos de la geometría, Geometría Analítica y Algebra Superior, así como hacia el estudio de variaciones en los Cálculos (diferencial e integral) elementos necesarios para realizar la actividad.

Nuestra puesta en escena se realizó en un ambiente escolar con la presencia de un profesor-investigador (P1), dos investigadores-observadores (P2 y P3) y seis alumnos del sexto semestre de la licenciatura en Matemáticas con área en Matemática Educativa, con edad entre 19 y 21 años de edad. Se formaron dos equipos, uno con un hombre (E1) y dos mujeres (E2 y E3) y el otro con tres mujeres (E4, E5 y E6). La dinámica de la clase consistía en que un alumno elegido al azar viviera previamente la actividad, para después sea el apoyo en la recogida de datos. Se utilizó grabación audio-visual y voz para cada equipo y una cámara general en cada sesión así como evidencia física (instrumento de trabajo) lo cual permite un análisis de datos más robusto del como utilizaron un saber, por qué y para que lo utilizaron, dejando ver así la evolución de la argumentación.

Diseño de la actividad

Estructuramos nuestro diseño de aprendizaje en tres sesiones

1) Construcción del caracol nautilus con papiroflexia donde se distinguen diferentes figuras geométricas y el papel que algunas de ellas juegan en el acercamiento a la espiral logarítmica que modela la forma (Figura 1)

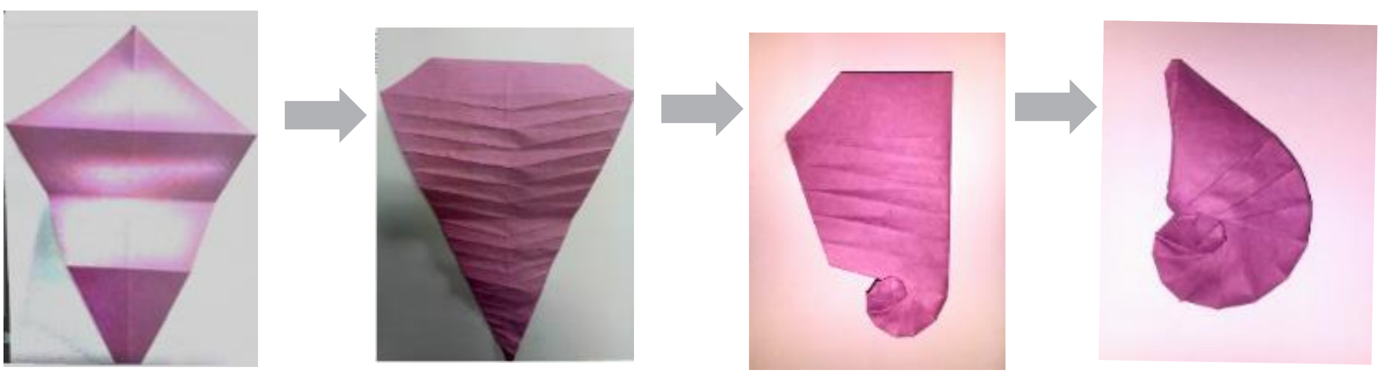


Figura 1. Construcción con plegado de papel

2) Construcción de la espiral que modela las variaciones presentes utilizando triángulos rectángulos en el ambiente de GeoGebra y que propicia la tabulación de ciertos puntos en coordenadas polares y la emergencia de una progresión aritmética (en los ángulos) y otra geométrica (en el radio) que entrelazadas rigen la curva (Figura 2)

3) Construcción algebraica de la curva, esto a través del análisis de los datos obtenidos (Figura 3)

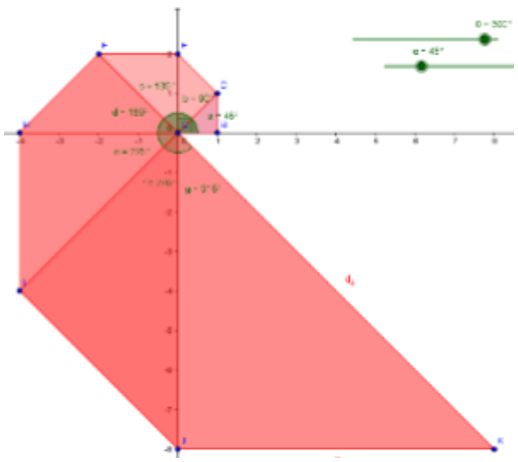


Figura 2. Construcción por triángulos

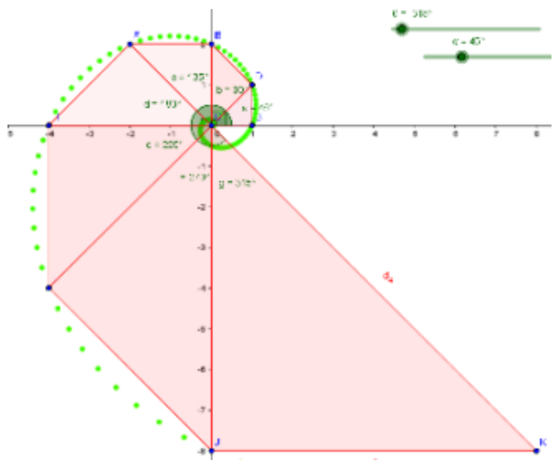


Figura 3. Espiral logarítmica

Resultados

Primera sesión:

En la aplicación de la primera actividad del plegado de papel, donde se hizo énfasis en el proceso de construcción del caracol nautilus, observamos empatía con la tarea sin que perturbara la presencia de dos investigadores-observadores. Se inició con la instrucción del profesor-investigador, donde los alumnos comenzaron por obtener un cuadrado, desde un hoja rectangular, para después generar un romboide y continuar con dobleces más precisos que involucraban trapecios.

Antes de terminar el plegado de la figura se le interrogó sobre ¿Qué figura u objeto creen que vamos a obtener con la construcción? las respuestas fueron ocurrentes, tales como "*E1: Yo me imagino una cucarachita marina*", *"E1: O una culebrina" o "E4: es un pan",* lo cual generó un ambiente agradable para continuar la actividad, pues aquello era un mar de risas por las respuestas. Luego se dieron las instrucciones para continuar con la construcción hasta llegar a la forma del nautilus y quedaron admirados pues nunca pensaron llegar a esa forma.

Continuando con la actividad para el análisis de la forma de la figura los alumnos empezaron a ser cuestionados sobre ¿Qué varía? ¿Cómo varía? ¿Qué regularidades hay? El equipo 2, el cual analizaremos como un estudio de caso, argumenta que lo que varía son los triángulos inmersos en la figura (Episodio 1)

Episodio 1: ¿Qué varía?

P2: ¿Qué creen que varía?

E1: Varía los triangulitos que están aquí (señalando la figura), *porque hay unos más chicos y otros van creciendo…*

Observamos en este episodio que el equipo 2 logra identificar el factor visual que emplearon para dar una primera idea de los que estaba variando, así como identificar la principal figura geométrica que utilizaríamos en la siguiente actividad. Para finalizar, se les solicitó hacer una investigación acerca de qué Matemáticas podemos encontrar en el objeto que estábamos estudiando y presentarla antes de iniciar la siguiente sesión.

Segunda Sesión

En la tarea encomendada, el equipo 1 presentó su investigación, resultando de mucho interés pues logran explicar al grupo la noción central de la construcción de un caracol nautilus. En el siguiente renglón se muestra parte de la exposición comentada (Episodio 2).

Episodio 2: La semejanza de triángulos

E4: En la construcción de la concha de nautilus, cada triángulo genera un nuevo triángulo semejante y adyacente a él y es así como obtenemos la estructura que se parece a la espiral logarítmica…

Este episodio evidencia un primer acercamiento a la construcción de triángulos propuesta en el diseño, y al continuar exponiendo E4 hace mención de la progresión aritmética y la progresión geométrica como característica principal de una espiral logarítmica. Sin embargo, E5 continua afirmando que el concepto era desconocido para ellas y al explorar se encontraron con el plano polar, que no supieron identificar y lo denominaban como un plano cortado por diagonales que a partir de un punto trazaban ortogonales generando triángulos semejantes (Episodio 3)

Episodio 3: Noción de progresión geométrica

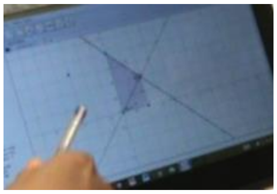
E5: …y de esta parte comenzamos a trazar… ortogonales y ya así, si continuamos, no tengo marcador… pero si continuamos se va haciendo algo de esa forma [haciendo un giro espiral con el dedo]... *y se generan triángulos semejantes con ángulos constantes donde el radio va en aumento es decir que el crecimiento es exponencial y equidistante a eso se refiere con progresión geométrica.*

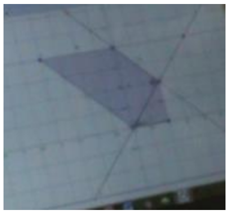
Con esta primer mirada es claro que ellos aludían a la progresión geométrica como un comportamiento de crecimiento veloz de una longitud. Lo interesante es como esta información no es utilizada durante la actividad, que serán reflejados en el siguiente episodio.

La primera encomienda del día, luego de la presentación de la investigación realizada por el equipo 1, fue utilizar GeoGebra. Después de construir un primer triángulo se daba la siguiente instrucción: Construyan un siguiente triángulo semejante tal que uno de sus catetos sea la hipotenusa del anterior, para después repetir la construcción. La complicación aparece, en el equipo 2, al querer construir un tercer triángulo pues la posición de este no favorece (Episodio 4).

Episodio 4: ¿Cómo continuar la construcción?

E1: *Prolonga la línea…(risas) traza una recta que pase por esos dos puntos, vas a utilizar la anterior … y traza una perpendicular que pase por ese punto… No, sabes que, no es, tienes que borrarla me equivoque.*





E2: *Si porque mira, tomando el ángulo al eje equis hace un ángulo recto, entonces por lo tanto este y este tiene la misma medida…*

E2: *Debe ser el lado del anterior… debe medir dos*

En el cuadro mostramos el proceso de construcción del triángulo, donde al principio no tomaron en cuenta que uno de los lados es la hipotenusa del anterior, enfocándose únicamente en buscar el ángulo recto. Notamos también que utilizaban únicamente valores numéricos para validar la construcción dejando atrás cualquier criterio de semejanza.

Continuando con la actividad y teniendo varios triángulos construidos comenzaron con su análisis, en el cuál se les cuestiono sobre ¿Qué es lo que va variando y que se mantiene constante? ¿Qué datos podemos obtener de nuestra construcción? ¿Qué regularidades encuentran en ello? El equipo 2 comenzó afirmando que lo que variaba eran las hipotenusas, en las cuales centraron su análisis. E2 comenzó por explorar en una hoja de su cuaderno haciendo un dibujo de lo formado en geogebra, asentando las medidas de las hipotenusas extraídas de los datos que proporciona el software. En esta parte también percibimos la carencia de utilizar los radianes, pues no lograba expresar 135° y al preguntar a sus compañeros dudaron en la respuesta, fue hasta la intervención de P2 que lograron las expresiones necesarias.

En el análisis de la variación que ellos identificaron, E2 comienza por acomodar los datos en una tabla, en la cual definió “feos (con decimal) y bonitos (enteros)” (Episodio 5)

Episodio 5: “Feos y bonitos”

E1: pues nada más me gustan los bonitos, dos, cuatro, ocho (Escribe las longitudes de las hipotenusas)… *es uno feo, uno bonito, uno feo, uno bonito, uno feo, otro bonito*

Se les cuestiona acerca si podían predecir el siguiente número en la tabla, afirmando que los números bonitos crecían exponencialmente por tal motivo sabían que seguía un número bonito, pero ¿Qué pasa con los números feos? interrogante que desató una discusión entre el equipo dando distintas respuestas:

E1: *¡OH ya! mira cada que es un número bonito como tú dices* (risas) *por ejemplo aquí es cero ¿no? aquí es pi medios, aquí es pi (relacionando "los bonitos" con los ángulos), aquí es, como, es, es tres pi cuartos, y aquí va a ser este dos pi,*

P1: *si no tuviéramos esta parte de geogebra, como calcularías este, este, este y este, los feos como tú los llamas*

E2: *por Pitágoras, mira aquí está éste de hecho*

P2*: por qué propusiste esa idea*

E2*: Pués es que, aquí como que este numerito va afuera, este va aquí luego raíz de dos, este aqui luego raíz de dos y así...*

Se puede observar el uso de calculadora para simplificar las raíces y poder validar la respuesta, al cuestionarlos qué ocurre cuando obtenemos *n* triángulos las respuestas inmediatas fueron $n\sqrt{2}$ pues en el episodio anterior afirmaban que la regla de la sucesión era el número anterior afuera y al lado raíz de dos, cuando se dieron cuenta que no era lo que buscaban optaron por buscar algo exponencial llegando de esta manera a la forma general.

A manera de conclusión

El estudio de este caso reveló la indiferencia hacia los datos, pues previamente habían sido dotados de información útil para su desempeño en la actividad además de la incertidumbre que existe cuando dentro de los datos no existe un patrón uniforme visible. También comprobamos que medir en radianes no es usual complicando así su expresión.

El estudio de nuestro caso nos muestra que la argumentación en el trabajo con software generalmente va acompañada de datos numéricos obtenidos de él, dejando atrás los por qué, de esos valores.

Desde una primera mirada a lo construido geométricamente, detectar las variaciones en los radios, contrastarlas con la variación constante y articular estas variaciones, surge la indagación de la expresión de la espiral logarítmica. Evidencias éstas de un acercamiento de los estudiantes a lo covariacional logarítmico-exponencial. De lo mencionado nos dan pautas para próximas investigaciones como el contraste de los dos equipos, así como el análisis de los alumnos que vivieron experiencias particulares de la actividad y que rol juegan dentro de la actividad.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. & Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 18*(1), 19-48.

Buendía, G. & Montiel, G. (2009). Acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22* (pp. 1287-1296). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Dubinsky, E. & Harel, G. (1992)(Eds.) *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy.* MAA Notes, Vol. 25. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Williams, C., & Amidon, J. (2012). Quantifying exponential growth: The case of the jactus. In R. Mayes & L. Hatfield (Eds.), *Quantitative reasoning and mathematical modeling: A driver for STEM integrated education and teaching in context* (pp. 93–112). Laramie, WY: University of Wyoming.

Ferrari, M. & Farfán, R. M. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13*(4), 53-68.

Gonzáles, M. & Vargas, J. (2007). Segmentos de la historia: la función logarítmica. *Matemáticas Enseñanza Universitaria XV* (2), 129-144.

Krummheuer, G. (2015). Methods for Reconstructing Processes of Argumentation and Participation in Primary Mathematics Classroom Interaction. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.): *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp.51-74). N.Y., USA. Springer.

Liang, C. B., & Wood, E. (2005). Working with Logarithms: Students' Misconceptions and Errors. *The Mathematics Educator*, *8*(2), 53–70.

Martínez-Sierra, G. (2012). Concepciones y matemática escolar: Unidades de medida de las funciones trigonométricas en el nivel medio superior *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 15*(1), 35-62.

Molina, M., Castro, E., Molina, J., Castro, (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a traves de los experimentos de enseñanza. *Revista de enseñanza de la ciencias* 29(1), 75-88.

Montiel, M., Vidacovik, D., Elstak, I., Wilhelmi, M. (2009). Using the ontosemiotic approach to identify andanalyze mathematical meaning when transiting between different coordinate system in a multivariate context. *Educacional Studies in Mathematics*.(72), 139-160.

Ramírez, T & Ferrari, M. (2011). Las coordenadas polares: Algunos de sus usos en disciplinas de investigación específicas. En L. Sosa, R. Rodríguez, y E. Landa (Eds.) *Memoria de la XIV Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. (pp.111-117). México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A.C.

EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL Y LAS ACCIONES EN LAS PRÁCTICAS PREDICTIVAS

Jesús Enrique Hernández Zavaleta, Ricardo Cantoral Uriza
CINVESTAV. (México)
jesus.hernandez@cinvetav.mx, rcantor@cinvestav.mx

RESUMEN: Este escrito es parte de una investigación en curso que pretende dar cuenta del estatus del carácter estable del cambio ligado a sistemas con dinámicas erráticas o caóticas, donde las interacciones de científicos ante la predicción darán indicios de una forma de construir conocimiento matemático. El problema de los tres cuerpos estudiado por Poincaré, las formas de predicción climática de Lorenz y el crecimiento poblacional de May son ejemplos de este tipo de dinámicas. Las singularidades en las actuaciones de estos investigadores ante este tipo de sistemas serán caracterizadas por estrategias variacionales globales.

Palabras clave: estrategias-variacionales, predicción, dinámicas-caóticas, socioepistemología

ABSTRACT: This paper is part of a current research which attempts to show the status of the stable nature of change linked to systems with mistaken or chaotic dynamics where scientists' interactions for prediction will provide notions about a way to construct mathematical knowledge. The problem of the three bodies studied by Pioncaré, the ways of climatic prediction by Lorenz, and the population growing by May, are all examples of this kind of dynamics. The peculiarities in the behavior of these researchers concerning such types of systems will be characterized by global variation strategies.

Key words: variation strategies, prediction, chaotic dynamics, socio-epistemology

Objetivo de la investigación

En diversas investigaciones bajo el marco teórico de la teoría Socioepistemológica se ha encontrado que la enseñanza y el aprendizaje de *situaciones variacionales*, en el cálculo particularmente, plantean una problemática no trivial, así que enfocarse en los actos de entendimiento ante situaciones que precisan del pensamiento y lenguaje variacional se ha tornado fundamental para el desarrollo teórico y en general para la mejora educativa (Cantoral & Ferrari, 2004); (Chimal, 2005); (Montiel, 2005); (Caballero, 2012); (Farfán, 2012); (Cantoral, 2013b); (Cordero & Morales, 2014). La presente investigación se enfoca en la búsqueda de regularidades en las acciones que emanan de situaciones variacionales particularmente no lineales que buscan la periodicidad y la estabilidad del cambio, en otras palabras, *se dispone identificar el carácter estable del cambio ante situaciones de variación no lineal.* El término *situación variacional* se refiere a la puesta en escena, en el aula, de una forma para estudiar fenómenos en los que el cambio y la variación se encuentran inmersos (Cabrera, 2009), sin embargo, esta investigación considera una visión ampliada que incluye escenarios diversos, que van desde las prácticas humanas ligadas a la variación en el "día a día", hasta las prácticas de científicos interesados en el estudio del cambio y su variación para el entendimiento, explicación y predicción de fenómenos naturales un tanto más complejos.

Se sostiene la existencia de principios que guían el desarrollo del pensamiento variacional y las interacciones que lo transforman. Desde un punto de vista complejo las interacciones de estos principios, propios de la construcción social del conocimiento, generan estructuras cada vez más intrincadas de saberes matemáticos. El caso que ocupa, esta investigación, es la búsqueda y caracterización de uno de esos principios, el principio estrella (*p**). Asumiendo se encuentra presente en la articulación entre la predicción y las adaptaciones de los individuos ante la búsqueda de la predicción en sistemas con dinámicas no lineales, particularmente caóticas, comúnmente vinculadas a otras disciplinas. Así, la pregunta que guía está investigación es: *¿Cuáles son los argumentos, códigos y estrategias variacionales que se encuentran presentes al intervenir sistemas no lineales caracterizados como caóticos?*

Los *argumentos variacionales* son utilizados por las personas cuando recurren a maniobras, técnicas o explicaciones que muestran, en algún sentido, el reconocimiento del cambio en sentido cualitativo y cuantitativo del objeto de su estudio (Cantoral, 2001). Los *códigos variacionales* se encuentran presentes en las producciones escritas u orales relacionadas con el cambio y su variación. Las *estrategias variacionales* serán consideradas como procesos reguladores de la toma de decisiones optimas ante situaciones variacionales, es decir, son acciones que posibilitan el enfrentamiento ante una situación variacional.

Rumbo a la configuración de un nuevo currículo

Tratando de configurar la constitución de un nuevo currículo que oriente el proceso de enseñanza – aprendizaje de las Matemáticas, el enfoque socioepistemológico propone su organización mediante prácticas, éstas aparecen a partir de las interacciones sociales y culturales de una forma desorganizada, así que es crucial el desarrollo de investigaciones que construyan propuestas adecuadas para su inserción en el ámbito escolar.

Cantoral (2016) propone un diagrama de anidación de prácticas en el que se muestran diferentes niveles de organización promotores de la emergencia de la Práctica Social (PS), más aún, estos niveles están regidos por dos tipos de relaciones "de subida" y "de bajada", el primero hace que la construcción social de conocimiento comience en las acciones de los individuos sobre su medio, hasta llegar a la conformación de prácticas de referencia que dan lugar a la práctica social. El segundo hace ver la normatividad de la práctica social en las acciones de los individuos (Cantoral, Montiel, & Reyes-Gasperini, 2015). Ambos mecanismos se encuentran imbricados y no pueden ser separados, el dinamismo intrínseco en los niveles hace que dependiendo del contexto sociocultural en que se inicie un estudio acciones pueden ser vistas como prácticas o viceversa y lo mismo pasa en, cualquiera de los, otros niveles (Ver *Figura 1*).

Figura 1. Se muestra el diagrama de anidación de prácticas y su dinamismo intrínseco. Las acciones pueden ser vistas como prácticas o viceversa dependiendo del contexto sociocultural en el que se encuentre situado un estudio.

Las dimensiones que sustentan este diagrama son dos, verticalmente las interacciones de subida y bajada están estructuradas por los procesos de institucionalización de las prácticas, éstos son concebidos y normados por las comunidades que rodean las prácticas; por ejemplo, la familia, el pueblo, la comunidad de carpinteros o la de ingenieros. Una vez que las prácticas se van reconociendo en ámbitos, cada vez más, especializados se reconocen nuevos miembros de su colectivo. La dimensión horizontal está dada por el proceso histórico de evolución de la práctica social; por ejemplo, la práctica social del *Preadicere* que juega un papel fundamental para el estudio de la Matemática de la variación y el cambio, primero se muestra en forma de Esquema en la época de Newton, para posteriormente convertirse en Modelo, en la predicción del comportamiento del flujo continuo, para posteriormente constituirse en Teoría tomando de ejemplo ámbitos matemáticos como la analiticidad en las funciones (Cantoral, 1990; 2016). Así, en la *Figura 2* se muestran cómo viven estas dimensiones en el diagrama de anidación de prácticas, ahora mostradas en distintos de niveles de organización de abajo (acciones) hacia arriba (práctica social).

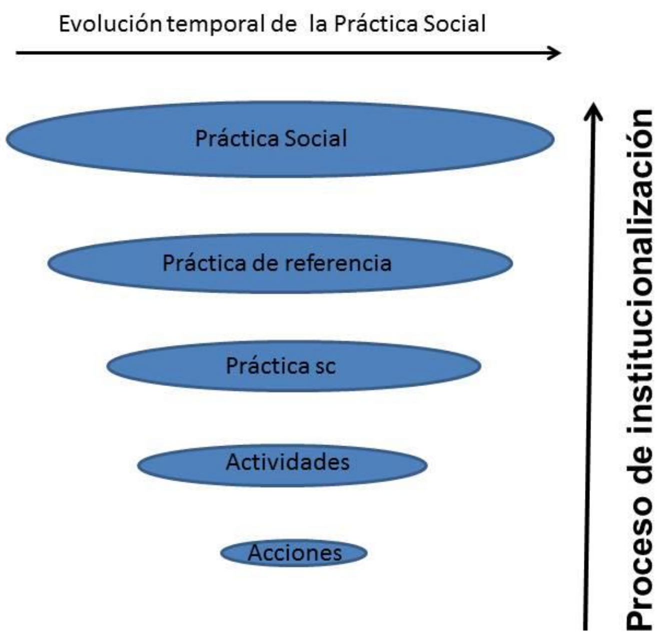


Figura 1. Se muestran las dos dimensiones del diagrama de anidación de prácticas.

Es en el primer nivel donde se encuentra una red de acciones cuyas aristas se conforman de interacciones, a través de estas emergen actividades que posteriormente conformaran las prácticas, es en este nivel donde el proceso de institucionalización cobra sentido como parte de la dinámica social y cultural, en la que la iteración intencional construye el camino hacia las experiencias compartidas logrando la constitución de Prácticas de Referencia (PR). Finalmente debido a las características intrínsecas de cada una de éstas y sus interacciones emerge la PS, no se debe obviar la interacción biunívoca entre cada nivel de anidación, es decir, la PS norma a las PR, estas a su vez a las prácticas y así sucesivamente.

La organización de las prácticas se propone a partir de principios propios de la construcción social del conocimiento matemático que mediante sus interacciones generan estructuras de saberes cada vez más complejas reflejadas en el diagrama de anidación de prácticas. Por su parte la investigación socioepistemológica ha documentado, con profundidad, las acciones detrás de la práctica de predicción mostrando una diversidad de actividades en el día a día; por ejemplo, cruzar la calle o llevar una sombrilla en caso de lluvia, dicho de otra forma, se encuentra presente y se institucionaliza de muchas formas. La imposibilidad humana de manipular el tiempo propone a la predicción como una estrategia emergente para la adaptación a al entorno y se considera que proviene de la evolución en las interacciones del colectivo social (Cantoral, 2001).

Las actividades y las prácticas de las personas son conducidas en un mundo en esencia no lineal y aunque las estrategias que se utilizan, para lidiar con él, son de índole diversificada en todas se encuentran procesos intrínsecos de constantificación que actúan sobre las variables del entorno. Éstos muchas veces quedan, a suficiencia de los sentidos, en el cálculo instantáneo de dos órdenes de variación, es decir, considerando la posición, la velocidad y la aceleración. Sin embargo, la predicción en dinámicas no lineales requiere de estrategias globales sobre las variables, que permitan obtener más información sobre el entorno, así las prácticas y las formas de vislumbrar los fenómenos requieren del uso de nuevas direcciones para pensar y tratar las variables.

■ El comienzo: del determinismo al caos determinista

Los eventos determinísticos como la salida y puesta del sol, los experimentos de causa efecto (si lo empujas se mueve en la misma proporción); por ejemplo, al lanzar un objeto desde la azotea de un edificio sabemos que caerá hasta tocar el suelo, etcétera, han sido ideales para realizar predicciones apegadas a la mecánica newtoniana, por otro lado, el caso opuesto se distingue por el estudio de los procesos aleatorios para los cuales dada la probabilidad de un suceso sabremos lo que sucederá, con cierto porcentaje, en tiempos posteriores.

Ford (1986) menciona que las nociones de determinismo, existencia y unicidad y soluciones analíticas exactas han dominado el pensamiento científico por décadas y que el significado de una solución exacta, en símbolos, es $S(t) = F(S_0, t)$, donde *S* es el estado exacto del sistema al tiempo *t*, que evoluciona desde una condición inicial S_0 de acuerdo con la regla *F* implícitamente determinada por la existencia y unicidad. En otras palabras, el determinismo significa que el pasado y el futuro provienen del estado presente, y eso es la esencia de la existencia y unicidad. Para Pierre Simon de Laplace este pensamiento era llevado al extremo al proponer la existencia de una inteligencia que pudiera conocer todas las fuerzas de la naturaleza en un cierto momento y todas las posiciones de su composición podría poner en una fórmula el movimiento de todo el universo y así predecir todos sus estados futuros.

Básicamente desde el determinismo se proponen dos tipos de sistemas dinámicos: las ecuaciones en diferencias y las ecuaciones diferenciales, las primeras en ámbito discreto y las segundas en el continuo. Estas ecuaciones funcionan para la predicción de estados futuros mediante la información obtenida en el presente. Es decir, dada una ecuación diferencial y cualquier condición inicial, podemos decir localmente cómo se comportan las soluciones y decirlo para cualquier condición inicial dada, no importando que el sistema sea un sistema de características no lineales; por ejemplo, mediante técnicas y análisis cualitativos y cuantitativos en el sistema del péndulo simple se pueden obtener condiciones para las cuales hay periodicidad o trayectorias cerradas, oscilantes, puntos de equilibrio estables e inestables, es decir, podemos describir toda su dinámica.

Es importante mencionar que las variaciones entre las soluciones de ecuaciones diferenciales existen, pero no muestran gran diferencia entre una solución y otra, es decir, soluciones que pertenecen a Condiciones Iniciales (CI) cercanas, permanecerán cercanas para todo tiempo. En años recientes se ha retomado la teoría de la estabilidad propuesta por Lyapunov (1892) para caracterizar las dinámicas caóticas, de acuerdo a la distancia entre soluciones con CI muy parecidas, su distancia crece al poco tiempo de haber comenzado la dinámica de acuerdo al exponente característico del sistema (Parks, 1992). En este sentido las *acciones de búsqueda y selección de CI y de variación de parámetros* son esenciales para la predicción en sistemas que presentan dinámicas de comportamiento errático o caóticas.

La predicción en sistemas dinámicos no lineales

Los sistemas dinámicos no lineales han dado paso a un cambio de paradigma en el análisis de sistemas deterministas. Su foco no se centra en la búsqueda de soluciones precisas de las ecuaciones que definen el sistema dinámico, así que las preguntas que surgen de su estudio tienen sentido en la búsqueda de los estados estables o periódicos a largo plazo de todo el sistema, las posibles cuencas de atracción o atractores o de la dependencia de las condiciones iniciales y haciendo que el análisis cualitativo tome un papel central. De esta forma las dinámicas no lineales han mostrado dinámicas estables, inestables, periódicas y caóticas.

Las dinámicas caóticas han sido de gran importancia para la creación de nuevas formas de acercarse a la predicción, ya que, en presencia de éstas, se requiere de un conocimiento exponencial del presente para dar significado al pasado y al futuro. Dicho sea de paso, no solamente aparecen en sistemas complejos, ya que se ha encontrado en sistemas aparentemente triviales, como el mapeo logístico (May, 1976). El cambio del paradigma comienza cuando la primera ley de newton no se cumple a cabalidad, es decir, a toda acción corresponde una reacción, pero no necesariamente de la misma magnitud, este es el sentido de la metáfora propuesta por Lorenz (1993) “El efecto Mariposa”.

En principio el uso de análisis locales mediante cantidades infinitamente pequeñas es necesario y de esta forma se pueden hacer análisis de variación de diversos órdenes, en funciones analíticas, mediante expansiones en series de Taylor, sin embargo, la predicción ante el caos está relacionada con la búsqueda y selección de condiciones iniciales adecuadas, además de la construcción de sistemas de referencia que consideren la comparación entre todas las soluciones del sistema y su comportamiento respecto a un amplio marco en la variación de los parámetros asociados. Se propone que además de las estrategias variacionales ya estudiadas por la teoría Socioepistemológica, la predicción en sistemas no lineales caóticos requiere de estrategias como *“la variación de parámetros y* *la selección y estudio de condiciones iniciales”,* esto brinda un espectro amplio de dinámicas que permite hacer distinciones entre comportamientos deterministas, aleatorios o caóticos.

Reflexiones finales

El principio estrella se encuentra ligado a la búsqueda de la estabilidad del cambio y a dos momentos o niveles de constantificación, el primero se debe a la selección adecuada de las variables y el segundo a la selección del orden de variación para hacer predicciones, estos a su vez están orientados por estrategias variacionales como la comparación, seriación y estimación y más precisamente por la predicción.

Sin embargo, la complejidad, de la mayoría, de los fenómenos que nos rodean es de orden superior o igual a dos, así que debido a la PS del *Preadicere* se han buscado estrategias para hacer predicciones sobre fenómenos donde intervienen gran cantidad de variables. En presencia de sistemas dinámicos no lineales, caóticos, se actúa sobre la variación de las variables seleccionadas en el primer momento, pero el orden de variación en el segundo puede ser tan grande como se desee, entonces hablaremos de un proceso de constantificación diferenciado en el que es posible considerar estrategias para elegir los parámetros adecuados y seleccionar las condiciones iniciales.

En el transcurso de esta investigación se han generado nuevas preguntas que apuntan a responder la pregunta de investigación, a continuación, se presentan las últimas que se han hecho: ¿Cuáles son las formas de razonamiento que coordinan las acciones necesarias para realizar una predicción en un sistema no lineal? ¿Cómo se da la coordinación entre las acciones y actividades vinculadas con la predicción ante sistemas no lineales?

Como se ha mencionado se considera importarte mostrar una forma de organización las prácticas, así el *p** se propone como promotor de esta organización y se muestra transversal al diagrama de anidación de prácticas en el caso de las situaciones variacionales. Esta afirmación debe ser acompañada de la evidencia empírica que exige el campo de investigación de la Matemática Educativa, así el trabajo futuro apunta a la construcción de una situación que desarrolle los aspectos de las dinámicas caóticas y permita evidenciar el uso de estrategias para la predicción. La interacción entre varias disciplinas y el uso softwares, para simplificar las tareas de cálculo y la visualización, han sido fundamentales para el desarrollo de las ideas de este tipo de dinámicas, por tal motivo es imperante pensar en un diseño experimental que conjunte todos estos aspectos y permita dar cuenta de las actuaciones referentes a la predicción. Se propone utilizar las ideas plasmadas por Cobb, Confrey, diSessa, Leherer, & Schauble (2003) como marco metodológico para el diseño de experimentos.

Referencias Bibliográficas

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Cabrera, L. (2009). *El pensamiento y lenguaje variacional en el desarrollo de competencias*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Cantoral, R. (1990). *Categorías Relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las Funciones Analíticas. Simbiosis y Predación entre las nociones de "el Prædiciere y lo Analítico"*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Cantoral, R. (2001). Sobre la construcción social del conocimiento matemático avanzado. En J. Domínguez, & M. Sierra, *Tendencias actuales de las matemáticas, su história y su enseñanza* (págs. 97-110). Salamanca: Univerisdad de Salamanca.

Cantoral, R. (2013b). Socioepistemología de la variación y el cambio. En C. Cuevas, & F. Pluvinage, *La enseñanza del cálculo diferencial e integral* (págs. 195-216). México: Pearson.

Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático* (Segunda ed.). México: Gedisa.

Cantoral, R., & Ferrari, M. (2004). Uno studio socioepistemologico sulla predizione. *La matematica e la sua didattica*, 33-70.

Cantoral, R., Montiel, G., & Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *AIEM- Avances de Investigación en Educación Matemática*, 9-28.

Chimal, R. (2005). *Una mirada socioepistemológica a la covariación* . Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Leherer, R., & Schauble, L. (2003). Design Experiments in *Educational Research. Educational Research*, 9-13.

Cordero, F., & Morales, A. (2014). La Graficación-Modelación y la Serie de Taylor. Una Socioepistemología del Cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 319-345.

Farfán, R. M. (2012). *Sociepistemología y ciencia. El caso del estado estacionario y su matematización.* Barcelona: Gedisa.

Ford, J. (1986). Chaos: Solving the Unsolvable, Predicting the Unpredictable. En M. Barnsley, & S. Demko, *Chaotic Dynamics and Fractals*. Orlando Florida: Academic Press.

Lorenz, E. (1993). *The Essence of Chaos*. Uniten States of America: Washington.

Lyapunov, A. M. (1892). *The general problem of the stability of motion*. Kharkov: Kharkov Mathematica Society.

May, R. (1976). Simple Mathematica Models with very complicated Dynamics. *Nature*, 459-467.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis de Docotorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.

Parks, P. C. (1992). A. M. Lyapunov's stability theory—100 years on*. *IMA Journal of Mathematical Control & Informa*t, 275-303.

PROBLEMATIZACIÓN DE LA GEOMETRÍA EN LA GÉNESIS HISTÓRICA DE LA TRIGONOMETRÍA

Olivia Alexandra Scholz Marbán, Gisela Montiel Espinosa
CINVESTAV-IPN. (México)
olivia.scholz@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx

RESUMEN: Presentamos el avance de una investigación que busca estudiar la transición de la trigonometría en un contexto estático-geométrico (cuerdas y razones trigonométricas) a la trigonometría en un contexto dinámico-variacional (función trigonométrica), en el nivel medio superior. El avance se centra en un análisis documental de fuentes históricas relativas a la Geometría y a la Trigonometría, con la finalidad de establecer una base de conocimientos necesarios y problemáticas que contextualicen su construcción y resignificación. La finalidad de esta problematización es devolver los procesos de construcción geométrica que le dan sentido y razón de ser al aprendizaje de la Trigonometría.

Palabras clave: geometría, trigonometría, génesis histórica, análisis documental

ABSTRACT: We present the advance of a research that seeks to study the transition from trigonometry in a static-geometric context (trigonometric strings and ratios) to trigonometry in a dynamic-variation context (trigonometric function), in the upper middle level. The advance focuses on a documentary analysis of historical sources related to Geometry and Trigonometry, in order to establish necessary and problematic knowledge bases that contextualize its construction and reinterpretation. The purpose of this problematization is to return the processes of geometric construction that give meaning and reason for being, to the learning of Trigonometry.

Key words: geometry, trigonometry, historical genesis, documentary analysis

Introducción

Desde la mirada de la construcción social del conocimiento trigonométrico (Montiel 2011, 2005), el objeto de estudio se configura a partir de problematizar qué es lo que se aprende y qué es lo que se enseña, por lo que no basta con dar cuenta de las dificultades de aprendizaje de los estudiantes respecto al tema, sino plantear situaciones que permitan al estudiante construir conocimientos y poder estudiar el desarrollo de ese conocimiento a partir de lo que el estudiante hace. En ese sentido, nuestro planteamiento de investigación contempla la problematización de lo geométrico para abordar el estudio de lo trigonométrico en el nivel medio superior, atendiendo principalmente la transición de lo estático geométrico hacia lo dinámico-variacional.

Una breve revisión histórica acerca del desarrollo de la Trigonometría la realiza Bressoud (2010) y en ella destaca que la Trigonometría tuvo su origen con la observación del cielo, en la Grecia antigua, y nace a partir de construcciones geométricas. Se destaca también que fue en el siglo II a. C. que Hiparco construyó la tabla de cuerdas considerada la primera tabla trigonométrica y que 300 años después, el astrónomo Ptolomeo utilizó el valor del radio igual a 60, pues los griegos adoptaron el sistema numérico sexagesimal de los babilonios, para la elaboración de sus tablas trigonométricas.

En el libro del Almagesto capítulo XI libro I, Ptolomeo incluye una tabla de cuerdas y la explicación de su método para elaborarla. Bressoud (2010), desde este análisis histórico, propone el comienzo del estudio de la Trigonometría en el contexto del círculo trigonométrico, tomando en cuenta que históricamente nace del estudio geométrico de las relaciones de las cuerdas y las longitudes de arco.

En una investigación antecedente (Scholz, 2014; Scholz y Montiel, 2015) se estudió la resignificación de la razón trigonométrica en estudiantes de nivel medio superior, en una experiencia cuyo diseño didáctico provocó la modelación geométrica de una situación de cálculo de distancias. Los resultados de la investigación y la evidencia empírica recabada nos dan un punto de partida para reconocer la viabilidad de integrar los procesos de construcción geométrica en el aprendizaje de la razón trigonométrica, a través del cálculo de cuerdas. Sin embargo, dado el contexto histórico que plantean Bressoud (2010) y Montiel (2011), resulta fundamental problematizar estos saberes, es decir, se deben *historizar* y *dialectizar* (en el sentido de Cantoral, 2013).

Consideraciones teóricas

La investigación se enmarca en los estudios sobre la construcción social de conocimiento matemático, en particular del conocimiento trigonométrico (Montiel, 2011; Scholz, 2014; Torres, 2014; Montiel y Jácome, 2014). Estos estudios se caracterizan por la amplia problematización que se hace del conocimiento matemático en juego y dada la génesis histórica de la Trigonometría en la Geometría, problematizarla implica reconocer que estudiar su origen trata del estudio del hombre haciendo Geometría.

Cantoral (2013) propone que, para problematizar un saber, éste se debe historizar y dialectizar. Por historizar, el autor se refiere a “una historia que va más allá de lo cronológico factual, nos interesa una historia crítica del desarrollo conceptual, una *epistemología situada*.” (p. 53); mientras que dialectizar, la considera desde la Dialéctica como parte de la Filosofía para “mostrar que [el algo] que se dialectiza reconoce la contradicción, no como mera errata o falla, sino que en su “sistema” la contradicción tiene un rol interno fundamental de confrontación.” (p. 53).

Como estrategia metodológica, iniciamos historiando los momentos señalados por Bressoud (2010), en el marco de un seminario de posgrado donde se analizó el Libro I de los Elementos de Euclides. Este análisis sirvió para concretar lo que Montiel (2011) denomina “contexto estático-proporcional” y “racionalidad helenística-euclidiana” en sus elementos de construcción social de la Trigonometría, relativa al cálculo de cuerdas (como antecesor de la razón trigonométrica).

Método

En función de que esta primera etapa es de revisión histórica se utilizó el análisis documental como método para la obtención de datos, para identificar las raíces históricas, en tanto problemas y condiciones que inciden en los saberes que se pretenden problematizar.

Asumimos el análisis de documentos como lo define Bowen (2009): “un procedimiento sistemático para revisar o evaluar documentos” (p. 27), ya sea que los materiales estén en formato impreso o electrónico. Bowen menciona que existen algunas investigaciones de tipo cualitativas que se basan únicamente en el análisis de documentos, aunque es más común que se utilice como complemento de otros métodos de investigación, en nuestro caso para esta parte del estudio solo se utilizó el análisis de documentos, cuando se realiza este análisis se debe proporcionar la información detallada acerca de cómo se diseñó el estudio y se llevó a cabo.

El análisis de documentos consiste en una revisión superficial, una lectura profunda y la interpretación de la información; este proceso es iterativo y se combina con elementos del análisis de contenido y del análisis temático. El análisis de contenido es el proceso de organizar la información en categorías y relacionarlas con las preguntas centrales de la investigación, mientras que el análisis temático es una forma de reconocimiento de patrones dentro de los datos, con temas emergentes convirtiéndose en las categorías de análisis.

En esta primera etapa de la investigación los documentos se analizaron bajo las siguientes preguntas ¿qué hace?, ¿cómo lo hace? y ¿para qué lo hace? refiriéndonos a las construcciones geométricas que dan surgimiento a la Trigonometría, dado que el objetivo de la investigación es estudiar la transición del contexto geométrico al contexto dinámico.

Elegimos este método por las ventajas que proporciona para el propósito de este trabajo, como, por ejemplo, es: un método eficiente, la disponibilidad, costo-efectividad, estabilidad, exactitud y cobertura.

La presencia del investigador no altera lo que se está estudiando (Merriam, 1988), los documentos cubren un largo periodo de tiempo y muchos eventos.

Análisis de documentos históricos

El texto central del análisis es el capítulo IX del libro I del Almagesto de Ptolomeo, en el que presentan los preliminares matemáticos de su teoría astronómica. En él desarrolla las construcciones geométricas que le permiten elaborar una tabla de cuerdas subtendidas por ángulos que incrementan de 10 en 10.

Otras fuentes de análisis fueron los estractos de Hiparco y Euclides incluidos como anexos en (Bressoud, 2010), y el Libro I de los Elementos de Euclides, por ser la base del lenguaje y pensamiento matemático con el que Ptolomeo desarrolla la fundamentación matemática en el Almagesto; motivo por el cual describimos primero el proceso de análisis de éste.

Sobre la problematización en los Elementos

Se eligió la versión de los Elementos traducido por Zamorano (1576), ya que es la primera traducción al castellano que se conoce y es considerada, por los historiadores, la más fiel y apegada al documento original; sin embargo, se consultó también la versión traducida al español por Simson (1774) porque al ser más reciente nos auxilió para comprender algunos términos que en la versión de Zamorano se consideraron ambiguos.

Nos apoyamos en diversos autores que han realizado un análisis de la obra de Los Elementos como Melogno (2011), quien reconoce que Euclides con su obra permitió la delimitación de la Matemática como disciplina independiente de la Filosofía; Navarro (2005), hace un estudio de la obra y da una interpretación de la composición de los libros, así como de las partes que conforman los teoremas y los problemas de la obra; y Vega (2013), cuya estrategia terminó de conformar nuestra estructura de análisis para cada proposición del Libro I.

El análisis documental del Libro I de los Elementos de Euclides, nos dio luz sobre la naturaleza de algunos objetos y conceptos geométricos. Replicamos y analizamos las proposiciones tomando como punto de partida cuestionamientos de tipo socioepistemológico: ¿qué hace?, ¿cómo lo hace?, ¿para qué lo hace?, identificando el lenguaje y las herramientas puestas en juego, con la intención de entender y detectar la forma de construir, argumentar y presentar la Geometría. En el proceso de análisis observamos que la forma de expresión de la época era verbal y no simbólica como en la actualidad, además se hace referencia a los elementos que conforman a las figuras geométricas tratándolos como partes del objeto lo que facilita hacer comparaciones y establecer relaciones entre ellos, de las cuales se componen las proposiciones.

Sobre la problematización en el Almagesto

Se estudiaron y reprodujeron las construcciones geométricas del capítulo IX del libro I del Almagesto con las que Ptolomeo establece su teorema y construye la tabla de cuerdas con incrementos de 10 en 10. Ptolomeo inicia este capítulo IX del libro I con el problema de inscribir polígonos regulares en el círculo y así relaciona la longitud de las cuerdas respecto a un ángulo central, como se muestra en la Figura 1.

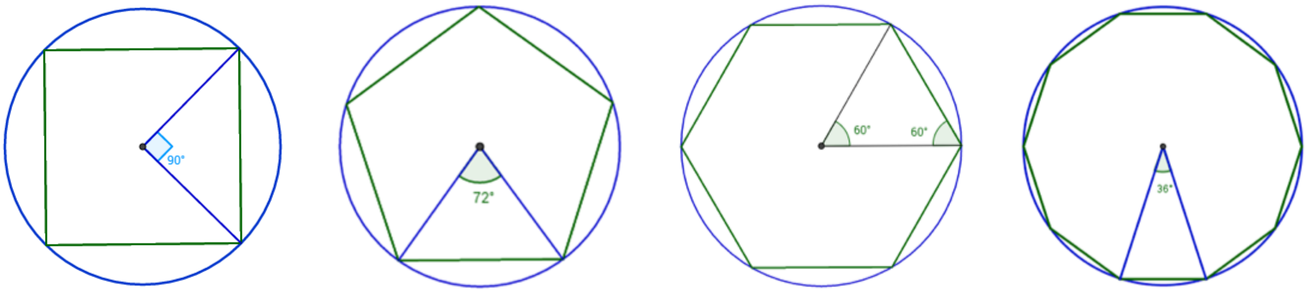


Figura 1. Uso de polígonos inscritos para calcular longitudes de cuerdas.

La imposibilidad de construir algunos polígonos, con las herramientas geométricas euclidianas de la época, lo lleva a construir lo que hoy conocemos como *Teorema de Ptolomeo*. El teorema está basado en sumas y restas de medidas ya conocidas, en un cuadrilátero cíclico, como se observa en la Fig. 2.

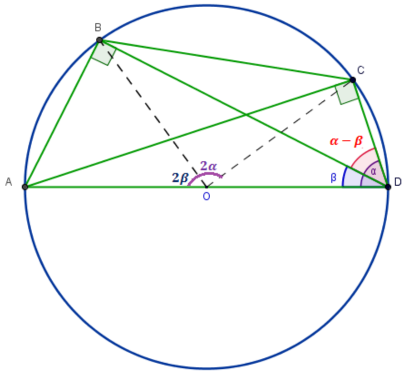
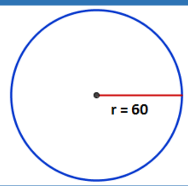
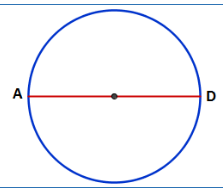
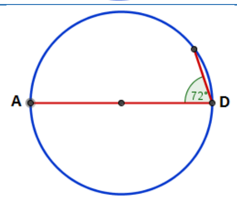
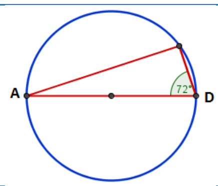
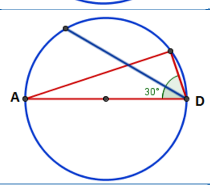
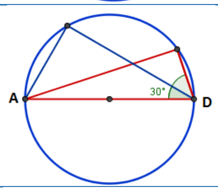
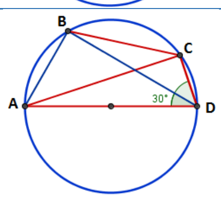


Figura 2. Cuadrilátero cíclico. Teorema de Ptolomeo

Nuestro análisis contempló la identificación de las nociones implicadas en las construcciones geométricas y en el planteamiento del teorema, que sintetizamos en la siguiente tabla:

Figura	Análisis (operaciones entre medidas, relaciones)	Nociones implicadas
	Se traza el círculo con radio de tamaño 60	Circunferencia, círculo, centro, radio, punto medio
	Se traza el diámetro para tener un dato del cuadrilátero AD=120	Diámetro, cuerda, ángulo central
	Se traza la cuerda que forma un ángulo conocido tomando como vértice un extremo del diámetro, en este caso D	Cuerda, ángulo inscrito
	Se traza una cuerda desde el otro extremo del diámetro hacia el extremo de la cuerda que forma el ángulo conocido	Triángulo rectángulo, ángulo recto, cuerdas, trazo de segmentos, ángulo central, ángulo inscrito
	Se traza la cuerda que forma un segundo ángulo conocido tomando como vértice un extremo del diámetro, en este caso D	Cuerda, ángulo inscrito
	Se traza una cuerda desde el otro extremo del diámetro hacia el extremo de la cuerda que forma el ángulo conocido	Triángulo rectángulo, ángulo recto, cuerdas, trazo de segmentos, semejanza de triángulos
	Se completa el cuadrilátero trazando el segmento BC	Segmento, cuadrilátero

A partir de las construcciones geométricas realizadas en el círculo determina las longitudes de las cuerdas faltantes utilizando el Teorema de Pitágoras para sus cálculos, esto debido a que identifica que el cuadrilátero se compone de dos triángulos rectángulos, por lo tanto, propone calcular la distancia de CD y BD como se muestra:

$$CD = \sqrt{(AD)^2 - (AC)^2}$$
$$BD = \sqrt{(AD)^2 - (AB)^2}$$

Para finalmente enunciar su Teorema (AC)(BD)=(AD)(BC)+(AB)(CD) que es el que le permite conocer las distancias de cuerdas asociadas a ángulos centrales.

Discusión

Este análisis nos permitió problematizar los conocimientos trigonométricos de interés, en un contexto donde la Matemática se restringe a la Geometría, vislumbrando algunos caminos para su resignificación. Principalmente se reconoce la importancia y relevancia del trabajo de construcción geométrica en el surgimiento y desarrollo de los conceptos trigonométricos. Consecuencia de reintegrar dichas construcciones se entrevé el desarrollo de un pensamiento y lenguaje geométrico, sobre la base del estudio de relaciones y proporciones. En términos escolares, desarrollar un pensamiento geométrico en los estudiantes demandaría de un enfoque transversal dentro de la propia Matemática.

Reflexiones

Este análisis no pretende reconstruir la historia en el aula, sino reconocer lo que le es propio al conocimiento matemático en su génesis histórica; sin embargo, al confrontar (dialectizar) el análisis de los procesos de construcción geométrica con el análisis del discurso Matemático Escolar (dME) (reportado por: Montiel y Jácome, 2014; Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015), se pone en evidencia la riqueza en el lenguaje y en el pensamiento que se pierde cuando el dME norma la construcción de significados tanto para el que enseña como para el que aprende.

La integración de los procesos de construcción geomérica en el círculo (evidenciados por: Scholz (2014) y Torres (2014)) para introducir al estudio de la Trigonometría, se fundamenta no sólo en la coherencia histórica que señala Bressoud, sino en la evolución de significados conforme se complejiza el estudio de las relaciones en el círculo. Es decir, estaríamos intencionando un desarrollo de usos del conocimiento trigonométrico; de ahí nuestro objeto de investigación: la transición de lo geométrico a lo variacional.

Referencias Bibliográficas

Bressoud, D. (2010). Historical reflections on Trigonometry*. Mathematics Teacher, 104(2)*, 106-112.

Bowen, G. A. (2009). Document analysis as a qualitative research method.Q*ualitative research journal*, *9*(2), 27-40.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* (1a ed.). Barcelona: Editorial Gedisa SA.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 18*(1), 5-17.

Melogno, P. (2011). Los Elementos de Euclides y el desarrollo de la matemática griega. En Melogno, P., Rodríguez, P. y Fernández, S. (Comps.). *Elementos de Historia de la Ciencia, 500*, 61-79. Urugay: Universidad de la República.

Merriam, S.B. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach.* San Francisco: Jossey-Bass.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. Tesis doctoral. México: CICATA – IPN.

Montiel, G. (2011*). Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico.* México: Ediciones Díaz de Santos.

Montiel, G., y Jácome, G. (2014). Significado Trigonométrico en el Profesor. *Bolema-Mathematics Education Bulletin, 28*(50), 1193-1216.

Navarro, J. (2005). Los Elementos de Euclides en castellano. Exposición virtual en DivulgaMAT.

Ptolomeo, C., Montes, L. A. S., y Fernández, P. A. (2003). El capítulo IX del Libro I del "Almagesto" de Claudio Ptolomeo: Sobre la medida de las líneas rectas que se trazan en el círculo:(construcción de la primera tabla trigonométrica conocida). Ed. MAXTOR.

Scholz, O. (2014). *Construcción de significados para lo trigonométrico en el contexto geométrico del círculo.* Tesis de maestría no publicada, Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria. México.

Scholz, O. y Montiel, G. (2015). Construcción de significados de las razones trigonométricas en el contexto geométrico del círculo. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 28*(3), 906-913.

Simson, R. (1774) (Eds.). Los seis primeros libros y el undécimo, y duodécimo de los elementos de Euclides: traducidos de nuevo sobre la versión latina de Federico Comandino conforme a la fiel, y correctísima edición de ella. Universidad Complutense de Madrid.

Torres, D. (2014). *Un entorno geométrico para la resignificación de las razones trigonométricas en estudiantes de Ingeniería.* Tesis de maestría no publicada, Instituto Tecnológico de Sonora. México.

Vega, Y. (2013). *Resolución de problemas geométricos en el aula usando el método de análisis y síntesis*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias. Bogotá, Colombia.

Zamorano, R. (1576) (Eds.). Los seis primeros libros primeros de la Geometría de Euclides.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS EN LA ESCUELA INTERCULTURAL

Hermes Nolasco Hesiquio, Dominga Jiménez Millán
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
nolascohh@hotmail.com

RESUMEN: Este trabajo de investigación, asumimos una perspectiva etnomatemática para identificar las dificultades en la resolución de problemas aritméticos en una escuela primaria bilingüe. Nos preguntamos cuáles son las dificultades que surgen en el ambiente intercultural en los procesos de resolución de problemas aritméticos. Nuestro objetivo es identificar las dificultades que presentan los alumnos cuando resuelven problemas aritméticos en un ambiente intercultural. La investigación se realiza con la participación de niños de quinto y sexto grado (11 y 13 años). La metodología está enmarcada en el paradigma cualitativo, basada en el método etnográfico.

Palabras clave: etnomatemática, ambiente intercultural, método etnográfico

ABSTRACT: In this investigation, we base our work on an ethno mathematical perspective to identify difficulties in solving arithmetic problems in a bilingual primary school. We ask ourselves which are the shortcomings that arise in the intercultural environment in the processes of solving arithmetic problems. Our aim is to identify the difficulties the students experience when solving arithmetic problems in an intercultural environment. The research is carried out with the participation of children of fifth and sixth grade (11to13 age group). The methodology is framed in the qualitative paradigm, based on the ethnographic method.

Key words: ethno-mathematics, intercultural environment, ethnographic method

Introducción

De acuerdo al *Handbook of International Research in Mathematics Education,* hace mención que la creciente diversidad cultural en la aulas, es uno de los retos a los que se enfrentan las sociedades modernas. Producto de los efectos de la globalización, la proliferación económica y cultural internacional, aumento de la migración e inmigración, lo que lleva al incremento de la interculturalidad; reforzándose el interés en investigar en el contexto cultural de la educación en general, y la educación Matemática en las comunidades multiculturales en particular (Appelbaum y Stathopoulou, 2016, p. 336).

En este sentido, la multiculturalidad social va generando la adecuación de determinada prácticas pedagógicas en la enseñanza. Proliferando experiencias, investigaciones en ciertas disciplinas escolares tales como las ciencias sociales y la lengua escrita. Sin embargo, las Matemáticas parecen inalterables ante los estudios orientados sobre la multiculturalidad al menos en el Estado de Guerrero, debido a la escasez de estudios sistemáticos, falta de claridad sobre cuáles son los saberes matemáticos ancestrales propios de las culturas originarias que todavía están vivas, qué Matemáticas se utilizan en las comunidades, o de qué manera unos y otros serían insumos de verdaderas propuesta didácticas (Ávila, 2014).

En el estado de Guerrero, México; cuenta con 3 388 768 habitantes, y se encuentran comunidades culturales bien identificadas compuestas por población indígena. Estas comunidades suponen el 18,7 % de la población total (es decir, 635 620 personas) y geográficamente se encuentran esencialmente en la zona de la Montaña y en menor medida en la Costa Chica, Centro, Acapulco, Costa Grande y Norte, siendo éstas las zonas más marginadas del estado. La población indígena, no siempre bilingüe, se reparte en 4 grupos: Nahuas (náhuatl) con un 40% de la población, Mixtecos (na savi) con un 28%, Tlapanecos (me´phaa) con un 22% y Amuzgos (suljaa’) con un 9%.

En ese contexto, los procesos educativos giran en torno al currículo de la Educación Primaria monolingüe, siendo el libro de texto gratuito de la SEP (Secretaría de Educación Pública) el principal recurso didáctico para la enseñanza (López y Tinajero, 2011), que plantean situaciones descontextualizadas a la vida de dichos alumnos. Esta diversidad cultural y el hecho de radicar en zonas geográficas distantes, hace que nos planteemos abordar este estudio, en una primera instancia, en la Escuela Primaria Federal Bilingüe “Telpochkalli” que se encuentra ubicada en la Colonia “Hermenegildo Galeana” en Acapulco, Guerrero, México. La colonia se encuentra registrada como un asentamiento mayoritariamente indígena: Náhuas.

La importancia de indagar sobre las posibles dificultades en la resolución de problemas aritméticos en una escuela primaria bilingüe, es lograr una mayor comprensión de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Tal situación, nos permitió delimitar y centrar un aspecto particular del problema de investigación a través de la siguiente pregunta: ¿cuáles son las dificultades que surgen en el ambiente intercultural en los procesos de resolución de problemas aritméticos? En específico, nos planteamos como objetivo, identificar las dificultades que presentan los alumnos cuando resuelven problemas aritméticos en un ambiente intercultural.

Marco teórico

En los últimos años, se han diversificado notablemente el número de investigaciones que relacionan la cultura y el aprendizaje de las Matemáticas, han adquirido una diversidad de intereses y orientaciones, incluyendo: "las Matemáticas como cultura; las bases pedagógicas del conocimiento; etnomatemática crítica y sus enfoques para la enseñanza y el aprendizaje; estudios sobre las culturas populares; pedagogías generales; y la educación Matemática Crítica" (Appelbaum y Stathopoulou, 2016, p. 340). En este sentido, varios estudios realizados han demostrado que gran parte del conocimiento matemático puede ser adquirido fuera de la escuela, trayendo nuevas variables para el análisis del aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas (Oliveras, 2006; Bishop, 1999). La etnomatemática como un paradigma de investigación es mucho más amplio que los conceptos tradicionales de las Matemáticas o cualquier multiculturalismo en el sentido actual (Rosa y Orey, 2010). En esta visión ampliada de la Matemática tradicional, la etnomatemáticas aparece como un intento de teorizar una educación Matemática intercultural, con la finalidad de justificar y poner orden en los conceptos y principios en la interacción de la clase. Por otro lado, D´Ambrosio (1997) define la etnomatemática como "la Matemática que se practica entre los grupos culturales identificables, tales como sociedades de tribus nacionales, niños de cierto rango de edades, clases profesionales entre otros". En esta definición se deja ver una fuerte influencia social en el ambiente de la clase de Matemáticas. Por nuestra parte, entendemos por etnomatemática cualquier aproximación a la Matemática Educativa que considere sus aspectos sociales y culturales. Bajo esta perspectiva, pretendemos identificar las dificultades en la resolución de problemas aritméticos en una escuela bilingüe.

Metodología

En el presente trabajo de investigación se ha optado por un enfoque etnográfico. La perspectiva etnográfica permite reconstruir cualitativa y descriptivamente lo que se dice y hace en el aula (Erickson y Shultz, 1983; Bertely, 2010). Es decir, estamos interesados en el punto de vista y en la perspectiva de los participantes, pues creemos que es posible comprender la intrincada red de relaciones y de acontecimientos que tienen lugar en una realidad particular. Sólo así es posible entender la significación que profesor y alumnos le otorgan a sus acciones. Asimismo, la metodología etnográfica, basada en la observación intensiva, constituye una alternativa que se presta perfectamente para el estudio que pretendemos realizar. A través de ella –técnica de observación y análisis cualitativo de datos– se pueden comprender mejor y de manera sistemática los procesos de aprendizaje que aparecen en el aula.

La investigación etnográfica ha dado origen a nuevas metodologías y técnicas sobre la observación participante y se han encontrado nuevas interpretaciones de modelos cognitivos entre las culturas indígenas. Ello pone de relieve el importante papel de la historia de los individuos y de las comunidades en el proceso cognitivo.

Para el logro de los objetivos nos proponemos desarrollar las siguientes actividades:

- Selección de la población de estudio
- Elaboración de un instrumento de observación y registro relativo a los referentes matemático-culturales de la población en estudio.
- Validación de dicho instrumento
- Análisis cualitativo de datos a través de triangulación
- Elaboración de informes divulgativos a través del análisis cualitativo.

Se pretende dar a conocer algunas dificultades que se enfrentan los niños bilingües al resolver problemas aritméticos. La potencialidad en un ambiente de resolución de problemas permite tratar los contenidos matemáticos con autenticidad y con una distribución equitativa de la participación en el aula.

Contexto y participantes

La investigación se realiza en la Escuela Primaria Federal Bilingüe “Telpochkali” ubicada en la Colonia "Hermenegildo Galeana” en Acapulco, Guerrero. Dicha Colonia está ubicada en la parte alta de la Ciudad, y se encuentra registrada como un asentamiento mayoritariamente indígena: Nahuas y Mixtecos provenientes de la Región del Alto Balsas de Guerrero.

El trabajo experimental se desarrolla con la participación de 24 niños de quinto y sexto grado (11 y 13 años). El grupo estuvo compuesto por 14 alumnos bilingües nahuas, 6 mixtecos y 4 monolingües. Todas las sesiones fueron audiograbadas y, además, el investigador tomó notas de lo más sobresaliente de cada una de ellas. De acuerdo a la profesora del grupo, los alumnos tenían un rendimiento bajo en Matemáticas.

Los problemas propuestos fueron abordados en un ambiente de colaboración la cual los alumnos proponían la forma de abordar el problema de manera conjunta. La estrategia didáctica de trabajo en equipos, permitió que se discutieran sus interpretaciones en el mismo problema y que llegara acuerdos sobre la manera más conveniente de enfrentarlo. En algunos momentos el investigador intervenía planteando preguntas, y proporcionando a los alumnos sugerencias que alentaban al proceso de solución (cuidando no inducir a la solución), los apoyaba cuando se presentaban dificultades en alguna parte del proceso.

Resultados preliminares

A continuación, se hace mención de algunos resultados encontrados en dos problemas planteados:

Problema 1. Luis tenía 9 chocolates. Luego Ana le dio algunos más. Ahora Luis tiene 25 chocolates. ¿Cuántos Chocolates le dio Ana?

Episodio 1	
Agustina:	Sí, mira /*kema ixkita*/. Luis tenía 9 chocolates, luego Ana le dio algunos más, ahora Luis tiene 25 chocolates.
Carlos:	Sí, es una multiplicación, ¿Cuántos chocolates le dio Ana?
Tomasa	Le dio 225, ves estamos mal.
Agustina:	A 25 le quitamos 9.
Carlos:	No se puede…
Tomasa:	Sí, a ver préstame borra.
Carlos:	No tengo, tenía.
Agustina:	Pero es una resta, resta, resta.
Tomasa:	Sí, es una resta, préstame borra.
Carlos:	¡Borra todo!
Tomasa:	No, estás loco, ¡Espérame!
Agustina:	El resultado quedo 16.

En el episodio 1, Carlos sin reflexionar el problema realiza una multiplicación 9*x*25, resultándole 225. Esta forma de proceder, se puede deber a que las variables semánticas de los problemas verbales influyen de manera determinante en la complejidad para resolver problemas de este tipo, en donde la incógnita se ubica en el segundo sumando $a+?=c$; resolver este problema obliga a realizar una inversión en el planteamiento del problema y en el razonamiento que de él deriva, y no todos los niños logran resolverlos. Respecto a los problemas de suma y resta, la dificultad depende no sólo de la dificultad del cálculo numérico, si no de la forma en como está estructurado el problema.

Forma de proceder de Agustina

Las evidencias muestran que la dificultad observada en este tipo de problemas en buena medida tiene que ver con la estructura del planteamiento del problema. En este caso, Agustina utilizando bolitas representó los 25 chocolates que tiene Luis en total, posteriormente le restó 9. El camino que siguió

Agustina es un buen camino pero; no comprendió que realizó una inversión en el planteamiento del problema realizando la sustracción $25 - 9 = 16$.

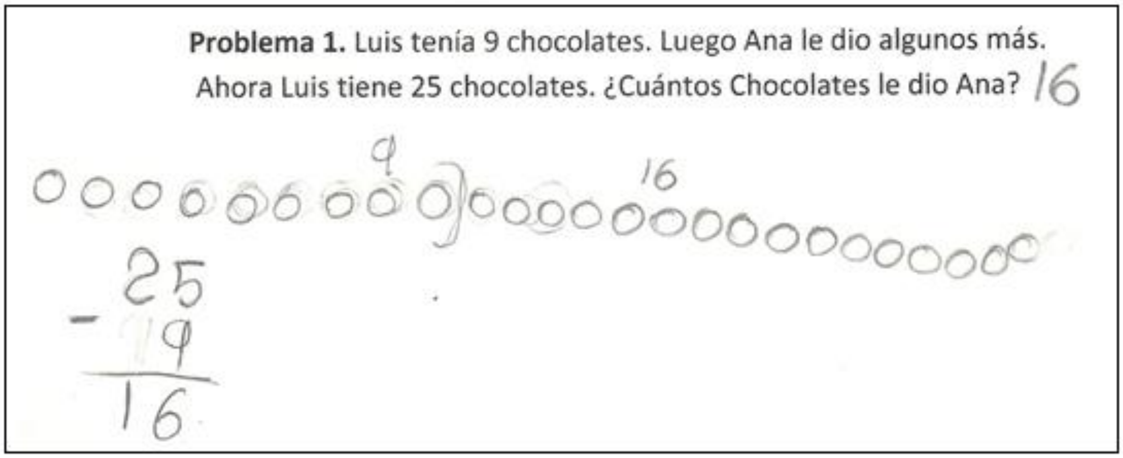


Figura 1. Solución realizada por Agustina

Problema 2. Si 4 niños y 3 niñas están bailando, ¿Cuántas parejas diferentes podemos formar?

En el equipo formado por los tres alumnos Nahuas, recurren a su lengua materna en momentos claves en los procesos de interacción, que puede estar más relacionada con percepciones sobre qué lengua le resulta más apropiada para su comprensión Matemática. De tal forma, que utilizan su idioma materno como una estrategia en los problemas que requieren una mayor comprensión conceptual, dejando el español para su explicación. En este sentido, Moschkovich (2007) identifica el uso de estrategias de cambio hacia la primera lengua del estudiante en situaciones numéricas de conteo.

Episodio 2	
Tomasa:	Sxin casocamate / *Es que no le entendemos*.
Agustina:	Ka sxikitta nikilia yeyime de yeye / *Les digo que de a tres, de tres*.
Tomasa:	Nawe de nawe pan yas, se tlacat iwan se siwuatl / *4 de 4 parejas y 3 de tres parejas, pero verdad que no que tienen que ser de un hombre y una muje*r.
Agustina:	Sxikita yeyi san kuale, ya un se san yejuasin / *Le digo que dá a 3 y uno baila solo.*
Ana:	Ken timisilis, welis tik tlalis nawe tlacame igoan yeyi siwuame.

	Kechpan wan nimitotis se. Ka ni noxime ni mitotiske tlanin yowe ni yeyime, kenon ninmin totiske yegoa iwan yegoa tel kitoka agus iwan tegoa tel, ya yegoa san yegoasin nocawa; Ya tikiknelis ka, ya igoan timitotis, ka maka manotlalitto, ya yegoa wan yow agus, nin kechme, ka ninse nocawas xika ni mitotiske?) yoni casocamatitke. /*Quedaría de esta manera, se puede poner solo cuatro hombres, con tres mujeres, cuántas veces van a bailar uno con el otro, donde todos bailen si vamos los tres, como bailaríamos ella con él, Agus y tu verdad, y ya él se queda solo, y pues se va a ver mal si se queda ahí solo sin bailar, así que primero bailo con él para que no esté sentado, y después el con Agus, cuántos son, para que ninguno se quede sin bailar, ya le entendieron/.*

En este problema, se observó que los alumnos tuvieron dificultades para encontrar las relaciones existentes entre los datos del problema; con frecuencia interpretaban los datos de una manera estática, no representan mentalmente la idea de temporalidad, de movimiento. Desde esta representación estática, los alumnos van construyendo una estrategia de solución que consiste en el establecimiento de correspondencias uno a uno entre las parejas de niños y niñas. Por eso en las soluciones dadas, sobra un niño que no tiene con quien bailar:

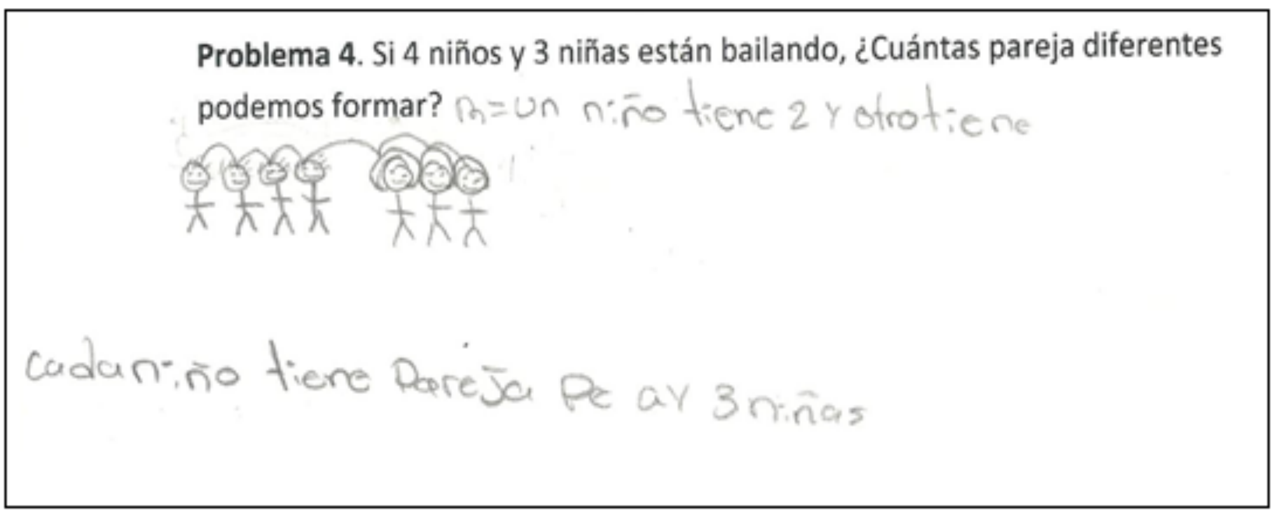


Figura 2. Interpretación estática del problema

Otros niños produjeron soluciones diferentes, realizan una suma como operación:

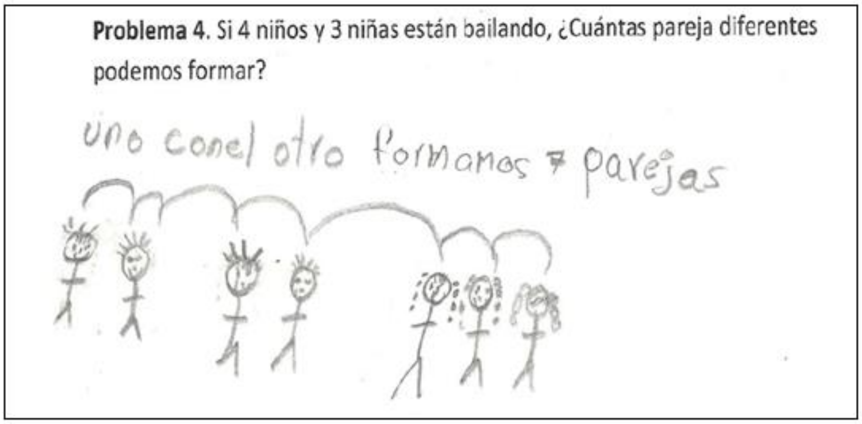


Figura 3. La suma como operación

La visión estática del problema, tiene una limitación que no les permite llegar a una solución correcta. En este problema solo un equipo tuvo éxito en la solución, en donde la multiplicación es entendida como la operación que permite calcular las combinaciones posibles entre los elementos de dos conjuntos. Las estrategias de representación estática del problema y la representación dinámica del problema, ya fueron identificadas por Ávila (1993) en trabajos anteriores, en alumnos regulares con problemas multiplicativos.

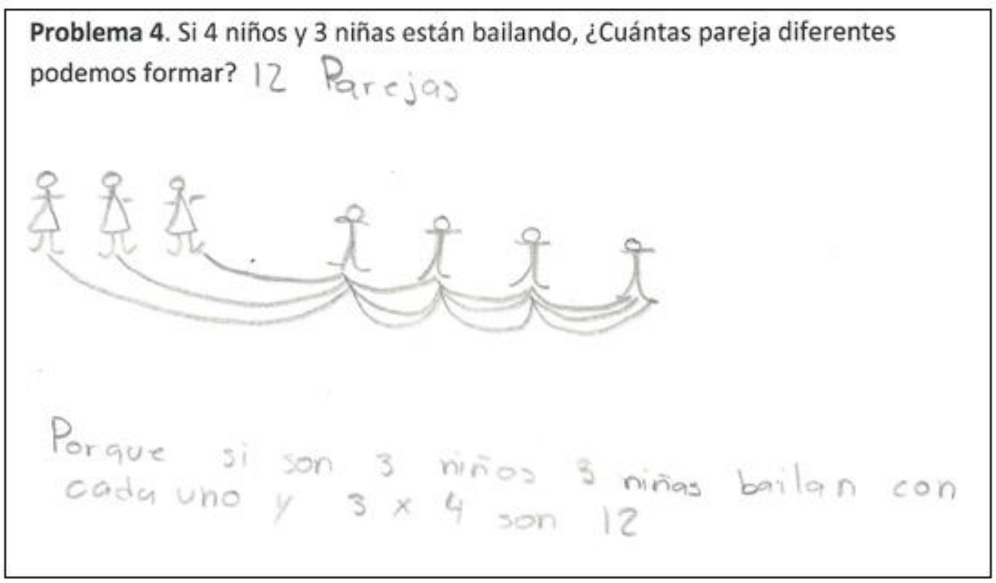


Figura 4. Representación dinámica del problema

Esta clase de problemas corresponde a las definiciones formales de $M \times N$, en términos del número de pares de conjuntos distintos que se puede formar, cuando el primer miembro de cada par pertenece a un conjunto de *M* elementos y el segundo a un conjunto con *N* elementos. Designemos por M el conjunto de niños, y por N el conjunto de las niñas. El conjunto C de las parejas posibles $M \times N = C$. Por tanto, una pareja consiste en la asociación de un elemento del primer conjunto a un elemento del segundo. El número de parejas es igual al producto de el número de niños por el número de niñas.

En este caso, la multiplicación como la operación dinámica que permite el calcular el número de combinaciones posibles entre elementos de dos conjuntos.

Reflexiones finales

Las dificultades encontradas en el ambiente intercultural al resolver problemas aritméticos podemos destacar lo siguiente:

1. El equipo formado por los tres alumnos Nahuas, en varios momentos de la interacción, recurren al náhuatl en momentos claves de esos procesos de comprensión Matemática, que puede estar más relacionada con las percepciones sobre que la lengua que resulta más apropiada. Asimismo, nos permite plantear que las dificultades y errores evidenciados en los problemas, debido a que no todos tienen al 100% el dominio del español.
2. Respecto a los problemas de suma y resta, la dificultad depende no solo de la complejidad del cálculo numérico, sino la estructura en como está planteado el problema.
3. En los problemas multiplicativos, los niños pasan por dos estrategias bien identificadas: la representación estática del problema y la representación dinámica del problema. La primera que consiste en el establecimiento de correspondencias uno a uno, sin tener una solución favorable al problema; la segunda con la búsqueda exitosa de combinaciones posibles entre los elementos de dos conjuntos.

Referencias bibliográficas

Appelbaum, P. y Stathopoulou, C. (2016). Critical issues in culture and mathematics learning. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 336-358). New York, USA: Springer.

Ávila, A. (2014). La etnomatemática en la educación indígena: así se concibe, así se pone en práctica. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(1), 19-49.

Ávila, A. (1993). Un significado que se construye en la escuela. En SEP (Ed.), *Los niños también cuentan* (pp. 17-29). DF, México.

Bertely, B. (2010). *Conociendo nuestras escuelas. Un acercamiento etnográfico a la cultura escolar.* México: Paidos.

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural.* Madrid, España: Paidós.

D´ambrosio, U. (1997). Ethnomathematics and its address in the history and pedagogy of Mathematics. En A. Powell y M. Frankenstein (Eds.), *Ethnomathematics. Challenging Eurocentrism in Mathematics Education* (pp. 13-24). Albany, USA: State University of Ney York.

Erickson, F. y Shultz, J. (1983). When is a context? En J. Green y C.Wallat (eds.). *Ethnography and language in educational setting*. Norwood: Ablex.

López, G. y Tinajero, G. (2011). Los maestros indígenas ante la diversidad étnicay lingüística en contextos de migración. *Cuadernos de comillas*, 1, 5-21.

Moschkovich, J. N. (2007). The discursive construcción of learning in a multiethnic school: Perspectives from non-immingrant studens. *Intercultural Education*, 18(1), 1-14.

Oliveras, M. L. (2006). Etnomatemáticas de la multiculturalidad al mestizaje. E. J. Goñi (Ed.), *Matemáticas e interculturalidad* (pp. 117-149). Barcelona, España: Grao.

Rosa, M. y Orey, D. (2010). Etnomodeling as a Pedagogical Tool for the Ethnomathematics Program. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 3(2), 14-23.

REFLEXIONAR SOBRE LA MATEMÁTICA ESCOLAR. UNA RUTA SOCIOEPISTEMOLÓGICA

Mayra Báez Melendres, Rosa María Farfán Márquez

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. (México)

mbaez@cinvestav.mx, rfarfan@cinvestav.mx

RESUMEN: En la línea de formación de profesores se enfatizan prácticas profesionales para el mejoramiento de la misma, como la reflexión docente. En ese contexto, exponemos avances de una investigación enfocada en promover la reflexión hacia la Matemática Escolar, esto es, su problematización. Desde esta perspectiva se postula un desarrollo del pensamiento matemático reflexivo de carácter social y un desarrollo profesional docente que inicia con el cuestionamiento del propio conocimiento matemático y se dirige hacia los usos, prácticas y significados del mismo.

Palabras clave: reflexión docente, matemática escolar, socioepistemología

ABSTRACT: In the field of teacher training, professional practices, such as teacher's reflection, are emphasized for its improvement. In this context, we present advances of a research focused on promoting reflection towards school mathematics, that is, its problematization. From this perspective, we propose the development of a reflective mathematical thinking of a social nature and a professional development that begins with the questioning of the own mathematical knowledge and is directed towards its uses, practices and meanings.

Key words: teacher reflection, school mathematics, socio epistemology

Introducción

La reflexión sobre la práctica docente es un tema que ha adquirido mayor interés dentro de la Educación Matemática, especialmente en el desarrollo profesional de maestros y de formadores. En estas investigaciones es posible notar la complejidad de reflexionar sobre la práctica docente, que involucra la reflexión de la planeación, del desarrollo de la clase, de las interacciones con los estudiantes, de episodios específicos (videograbaciones), de los conocimientos matemáticos necesarios, conocimientos pedagógicos, y otros aspectos relacionados con la enseñanza de la Matemática. Estos esfuerzos nos han permitido identificar que la reflexión, como forma de pensamiento (Dewey, 1989), se desarrolla de manera permanente, se aprende, pues no nacemos reflexivos sino que nos construimos reflexivos. Las variaciones dadas por las condiciones históricas, sociales, económicas y culturales, afectan tal desarrollo del pensamiento reflexivo, pues permiten comparaciones y confrontaciones con distintas realidades.

La toma de conciencia es una de las características principales de la reflexión, pero no su objetivo ni su fin. Para Campechano (2006), “cualquier docente que quiera transformar racionalmente su práctica primero tiene que conocerla, no imaginarla ni suponerla”. Así, la recuperación sistematizada de la práctica parte de identificar el objeto de reflexión y profundizar sobre él. Reflexionar, para varios autores, es un acto de complejización de la práctica (Shulman, 1986; Perales, 2006), y lo que se busca con un proceso reflexivo es la generación de nuevo conocimiento, principalmente alrededor del objeto del que se reflexiona. Dicho conocimiento nuevo, se pretende que esté sustentado en resultados de la investigación y en otras formas de conocimiento como las experiencias, que incrementen la validez de las nuevas proposiciones, para que de este modo, las acciones que se sucedan sean argumentadas (Dewey,1989; Freire,1973). Esto último, es el propósito principal de la reflexión.

En la literatura hemos identificado definiciones, su importancia para la profesionalización docente y el desarrollo de la identidad profesional, que son fundamentales para estudiar y comprender un proceso de desarrollo profesional. Conscientes del énfasis que han puesto las investigaciones por reflexionar sobre la práctica docente, proponemos como objeto de reflexión a la Matemática Escolar (Báez, Farfán, 2015), ésta última caracterizada por la Socioepistemología como una forma de conocimiento que se difunde en la escuela pero que carece de significados tanto dentro como fuera de ella. En otras palabras, esta teoría propone la difusión de una Matemática Funcional.

Particularmente en este estudio nos enfocaremos a la reflexión sobre el conocimiento matemático propio (como parte de la Matemática Escolar), con el fin de identificar cómo el profesor construye y reconstruye significados y argumentos. La hipótesis es que la reflexión sobre la Matemática Escolar permitirá movilizar el sentido de responsabilidad sobre la formación matemática. El objetivo es entonces, proponer una caracterización de la reflexión sobre la Matemática Escolar bajo este planteamiento teórico.

De esta manera, la postura que tomamos acerca de la reflexión es de carácter social y cultural (Báez, Farfán, 2015), que como proceso cognitivo busca la toma de conciencia, pero como proceso de desarrollo creativo del humano, buscará una transformación del individuo en actos de *concientización* (Freire, 1982), en este caso llevados por el profesor de Matemáticas.

Marco Teórico

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (Cantoral, 2013), tiene como tesis que el conocimiento matemático se construye socialmente. Esto supone la naturaleza del saber matemático y que la participación humana ha jugado un papel fundamental. Sin embargo, esta naturaleza del saber y ha sido filtrada por un interés generalizado de difundir la obra matemática y de procesos de transposición didáctica que han provocado perder el interés por las prácticas y considerar como enseñable un conocimiento que parece preexistir.

De esta manera, la Socioepistemología identifica un *discurso matemático escolar* (dME) caracterizado por lo hegemónico, lo utilitario, lo universal que impide la construcción de argumentos, significados y procedimientos asociados a un concepto matemático escolar (Cantoral, 2013). Los profesores de Matemáticas, aún formados profesionalmente en diferentes áreas afines a las Matemáticas son excluidos de estas formas del conocimiento matemático, más aún, su formación está basada en esa Matemática que preexiste, y que no ha sido significada o construida por ellos mismos. Al respecto, autores como Sennet (2009) y Freire (1973) enfatizan la importancia de ser partícipes de la construcción del propio conocimiento, en tanto que contribuye al desarrollo del individuo y a la *creación de sí mismos*.

Dadas las características del dME, se plantea desde esta postura la necesidad de *problematizar* la Matemática Escolar para resignificar los conocimientos matemáticos y promover una forma diferente de relacionarse con el saber matemático. Dicha problematización alude entonces a la búsqueda de sentido y significado de esta Matemática, y que su funcionalidad no esté arraigada solo al sentido de su enseñanza sino también a lo que puede significar para quien la aprende. La *problematización del saber matemático* (Cantoral, 2013), como constructo teórico, busca indagar en la naturaleza del saber, sus modos de apropiación, mecanismos de difusión, que sirven de base y sustento para la *problematización de la Matemática Escolar*. Esta diferencia está puesta en que el primer tipo busca indagar sobre las relaciones y condiciones que dan origen al saber matemático, abordando cuatro componentes: cognitivo, didáctico, epistemológica, social. Mientras que la segunda, toma como base estos resultados con otro propósito, promover resignificaciones sobre el saber matemático en cuestión en un contexto específico, el escolar, donde las particularidades del contexto influirán sobre las resignificaciones. Esto quiere decir, a nivel teórico, que la problematización del saber matemático también puede verse afectada por la problematización de la Matemática Escolar. Carácter dinámico y de resignificación de la misma teoría.

La *Matemática Escolar* la entendemos como el conglomerado de significados, argumentos, representaciones, relaciones que se establecen en dicho contexto escolar; es un conocimiento lógicamente organizado, que vive tanto dentro de la escuela como fuera de ella, y se encuentra con diferente estructura en libros, planes de clase, el conocimiento del profesor, el discurso del estudiante, y todas las formas objetivas en que se presenta la Matemática en este contexto. Su organización está basada en objetos matemáticos y en estructuras inamovibles, mientras que la propuesta teórica plantea una organización de la Matemática escolar basada en prácticas pero que incluyen a los objetos matemáticos, cuya construcción dicta otro camino epistemológico y de desarrollo del pensamiento matemático. Así, la problematización de esta Matemática significará confrontar la Matemática Escolar con la propuesta teórica.

De esta forma, concebimos que la reflexión de la Matemática Escolar en el sentido socioepistemológico significará la problematización de esta Matemática, en tanto que desde esta postura teórica se buscan las condiciones de construcción de nuevo conocimiento significado por las *prácticas* asociadas a él. El desarrollo del pensamiento matemático tendrá un carácter basado en las experiencias, las prácticas, los intercambios, los usos, los significados, que están normados por el contexto y lo sociocultural. Esta forma de abordar la estructura Matemática escolar tenderá a un cambio cultural sobre la Matemática Escolar y su enseñanza, y sobre el propio desarrollo de quien la vive.

En este último aspecto, resaltamos la importancia del proceso que vivirá un profesor al involucrarse en tal fenómeno de confrontación, pues si bien la reflexión que se promoverá será sobre la Matemática Escolar, es el profesor quien vivenciará un conjunto de cuestionamientos y rupturas sobre los conocimientos matemáticos. En este sentido, dos aspectos son relevantes: el *qué,* situado en el objeto de reflexión, y el *quién*, el que reflexiona. Un proceso de transformación se estará vivenciado cuando se logren superar las rupturas, o más concretamente, cuando se tomen acciones ante las confrontaciones. Esta afirmación no es arbitraria, sino que, al poner en confrontación distintas formas de un conocimiento, quien lo vivencia, vivencia también formas de conciencia sobre ese conocimiento, poniendo en confrontación realidades del profesor de Matemáticas respecto a sus conocimientos y su enseñanza. Por tanto, la acción sobre esa confrontación, la suponemos con tendencia hacia la transformación.

Metodología

Puesto el interés en la reflexión docente sobre la Matemática Escolar, hemos considerado el estudio socioepistemológico de Reyes-Gasperini (2016) en el tema de la proporcionalidad. La diferencia que hacemos sobre la problematización y nuestra postura sobre la reflexión, pone en consideración elementos para promover la reflexión sobre la proporcionalidad escolar: la confrontación, la interacción con los conocimientos (argumentaciones) y la introducción de las *prácticas* que significan lo proporcional. Estos elementos fueron tomados en cuenta para el diseño de las actividades. La confrontación es la estrategia metodológica considerada para dar lugar al inicio de este proceso de reflexión, que permite la toma de conciencia del conocimiento matemático actual del profesor, y da lugar al conocimiento y reconocimiento de nuevas propuestas. La argumentación busca ampliar y profundizar sobre las formas de pensamiento proporcional. Por último, se precisa de introducir las *prácticas* que significan lo proporcional, que van más allá de sus formas de representación y definiciones, y analizar cómo juegan un papel en la toma de decisiones. Estar inmerso en el proceso anterior depende de las confrontaciones que viva el profesor, entonces diremos que el maestro ha iniciado un proceso de reflexión si se produce la confrontación, bajo el sustento teórico-metodológico expuesto.

Situamos la investigación de corte cualitativo cuyo método a utilizar será el Estudio de Caso (Merriam, 1998) y hemos elegido a la Teoría Fundamentada de Glaser y Satruss (1967) para el análisis de las entrevistas en profundidad realizadas. Nuestro informante en un profesor de nivel secundaria en la Ciudad de México, México, que ha participado en experiencias previas con esta visión teórica en años anteriores.

En este escrito presentaremos los resultados de seis entrevistas hechas en la primera fase: la confrontación. La primera entrevista fue la única planeada, donde se pretendía la discusión de la definición y argumentos sobre la proporcionalidad con las actividades presentadas. Las siguientes cinco entrevistas se definieron conforme se avanzó en las temáticas de discusión. Las interacciones fueron de una hora en promedio cada una.

Primeros resultados

El estudio de la reflexión sobre la Matemática Escolar nos coloca en tratar de identificar otros elementos que van a caracterizar este tipo de reflexión. Por tanto, el análisis de las entrevistas nos permitió identificar: a) las temáticas que dirigían la discusión, las confrontaciones con el propio conocimiento matemático vivenciadas por el profesor, los argumentos usados como referencia de análisis y comprobación, y las acciones realizadas que le permitieron al profesor enfrentar y superar las confrontaciones. La discusión se inicia cuando se le pide al profesor argumentar sobre la gráfica con pendiente negativa de qué tipo de proporcionalidad es.

En la siguiente tabla presentamos una síntesis de las categorías:

Tabla 1. Desarrollo de la reflexión sobre la proporcionalidad escolar.

Entrevista	Tema de discusión	Confrontaciones	Argumentaciones (y referencias de análisis)	Acciones (y uso de formas institucionalizadas)
1	La definición cualitativa de proporcionalidad.	La falta de correspondencia entre la definición cualitativa del profesor y la	Uso de tablas (hechas por el profesor) donde varían los valores.	Elaboración de ejemplos.

		representación gráfica.		
2	La definición de proporcionalidad, 1º secundaria.	La falta de correspondencia entre las distintas representaciones. Y significado del signo del factor de proporcionalidad.	Ejemplos de tablas y definición de su libro de secundaria.	Revisión del libro de 1º de secundaria.
3	La definición de proporcionalidad y análisis de situaciones de proporcionalidad en la variación de valores en una tabla.	Evaluar un modelo de pensamiento proporcional del profesor: Aditivo. Análisis del signo del factor de proporcionalidad con distinta variación.	Las tablas de las actividades y otras hechas improvisadamente.	Elaboración de tabla donde varían de diferente forma los valores y con diferente signo.
4	Definición de proporcionalidad directa (Y/X) VS proporcionalidad inversa (YX).	Comparación de las definiciones de proporcionalidad directa con proporcionalidad inversa: concepto y representaciones.	Análisis de tablas y definición de los libros de 2º y 3º de Secundaria.	Revisión de libros de otros niveles de secundaria.
5	Análisis de la expresión Y/X. La experiencia con estudiantes de 3er año de secundaria.	El argumento de los estudiantes es contrario al del profesor, y además, cumple con la definición de proporcionalidad directa.	La argumentación de los estudiantes de 3ero.	Comprobación con estudiantes
6	Estudio de la definición de proporcionalidad inversa y sus diferentes representaciones: gráfica y algebraica.	Comprobación de las representaciones gráfica y algebraica de las funciones proporcionales inversas y directa.	Libro de Secundaria de otro autor.	Revisión de libros, otros autores.

En la tabla es posible notar una evolución en la profundidad de las discusiones. Es decir, de comenzar argumentando con una definición cualitativa sobre la proporcionalidad, las discusiones llevan a tener que hablar de la definición de proporcionalidad inversa. Pero esto se da ante la necesidad de tener comparaciones y crear argumentos sobre la proporcionalidad directa, necesidad expresada en todas las entrevistas.

Sobre las confrontaciones, se presentaron de distinta naturaleza: discurso-representación, comparación de distintas representaciones (gráfica, tabla, expresión algebraica), significado del signo de factor de proporcionalidad, distintas razones de cambio analizadas en una tabla, análisis de definiciones, comparación de argumentos: profesor-estudiantes, comparación de gráficas con distinta forma de variación.

Las argumentaciones versaron sobre los recursos que usó el profesor para analizar, comparar y comprobar: tablas de valores improvisadas, gráficas de las actividades presentadas, definiciones en libros de texto, y los argumentos de estudiantes de tercer grado.

Las acciones conformaron aquello realizado para superar y abordar la confrontación: ejemplificar, revisar libros de texto, buscar el argumento de los estudiantes. Estas acciones más que una evolución, representaron la búsqueda de distintas formas de validación del cocimiento matemático propio.

Es en el análisis de las formas Y/X y YX, como relación de variables, que el profesor logra reconocer diferencias en las representaciones y definiciones, resignificando el signo menos de un factor de proporcionalidad, ya que el signo no determina el tipo de proporcionalidad.

Consideramos que estas categorías dan muestra de lo siguiente: la actitud del profesor ante la confrontación, la toma de conciencia del propio conocimiento matemático, los esfuerzos de expresarse con sentido crítico para la argumentación. En otras palabras, podemos decir que las argumentaciones y acciones nos van dando muestra de la reflexión que tiene el profesor sobre su conocimiento matemático, como Matemática Escolar.

Conclusiones

El espacio de confrontación de significados, con sustento socioepistemológico, pone en evidencia conocimientos actuales y potenciales, en este sentido busca generar un ambiente para el aprendizaje. En el sentido de Dewey (1989) esto significaría provocar ese espacio de duda sobre el propio conocimiento matemático y la profundidad sobre ellos. En el caso del profesor entrevistado, son sus esfuerzos por tener un sentido crítico para la argumentación aquello que le permite superar la confrontación. Esta superación representará el reconocimiento de avanzar sobre el conocimiento matemático, que induce a una forma de atender a la formación matemática propia.

La resignificación sobre el signo del factor de proporcionalidad representó una de las mayores confrontaciones, ya que para el profesor, el signo era una característica para determinar el tipo de proporcionalidad. Este aspecto tiende a marcar una relación diferente del profesor con este conocimiento, un sentido crítico sobre el signo del factor, o en otras palabras, un sentido de autonomía sobre él.

Dos aspectos más señalamos como relevantes, que mientras nos ocupamos por poner en confrontación los conocimientos matemáticos, el profesor que las confronta tiene un papel sustancial, pues el desarrollo de su pensamiento matemático se verá influenciado tanto por dicha confrontación como por sus experiencias, interacciones, contexto, etc. (Cantoral, 2013). Es decir, no solo interesará la reflexión sobre el objeto matemático sino quien reflexiona sobre él, el profesor en su momento creativo y argumentativo (Freire, 1982).

De esta manera, decimos que un profesor debe reflexionar sobre la Matemática Escolar, ya que esta práctica argumentará sus elecciones sobre la Matemática que enseña y profundizará sobre la Matemática que sus alumnos aprenden. Tales reflexiones significan otras formas de entender y construir Matemáticas.

Por último, la profundidad alcanzada ha permitido hacer notar que el proceso de reflexión irá más lento que el desarrollo de las *prácticas* (en el sentido socioepistemológico), pero también que realizar dicho proceso de manera intencional es fundamental para la toma de decisiones en la práctica docente, permitiendo así una práctica argumentada sobre los contenidos matemáticos.

Referencias Bibliográficas

Báez, M. & Farfán, R. (2015). La matemática escolar como objeto de reflexión docente. Aspectos para su desarrollo. Memorias del Vigésimo noveno de la *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Alicante, España.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social de conocimiento*. España: Gedisa.

Campechano, (2006). Elementos para interpretar los significados de las acciones en las prácticas educativas. En R. C. Perales (coord.), *La significación de la práctica educativa*, 19-53. México: Paidós.

Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos. Nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo*. Barcelona: Paidós.

Freire, P. (1973). *Pedagogía del oprimido*. (11ª edición). México: Siglo XXI Editores.

Freire, P. (1982). *La educación como práctica de la libertad*, (29ª edición). México: Siglo XXI Editores.

Glaser, B & Strauss, C. (1967). *The Discovery of Grounded Theory. Strategies for Qualitative Research*. Chicago: Aldine.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative Research and Case Study Applications in Education*. Jossey-Bass Publishers.

Perales, R. (2006). *La significación de la práctica educativa*. México: Paidós.

Reyes-Gasperini, D. & Cantoral, R. (2014). Socioepistemología y Empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático. *Boletim de Educação Matemática*, 28(48), 360-382. doi: 10.1590/1980-4415v28n48a14.

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: Una alternativa para la transformación y la mejora educativa*. Tesis doctoral inédita. Centro de Investigación y de Estudios del Instituto Politécnico Nacional. Cinvestav, México.

Sennet, R. (2009). *El artesano*. Barcelona: Anagrama.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.

SITUACIONES DE APRENDIZAJE PARA LA MODELACIÓN ESCOLAR

María Esther Magali Méndez Guevara, Nancy Marquina Molina, Karen Zúñiga González
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
memmendez@uagro.mx, nmarquina@uagro.mx, kzg.93@live.com

RESUMEN: Desde nuestra perspectiva, la modelación es parte esencial en la construcción, difusión y desarrollo del conocimiento científico, es por ello que consideramos importante incluir en las aulas de Matemáticas, diseños en los que se desarrollen actividades que promuevan la modelación de situaciones cotidianas. Así se proponen tres diseños de situación basados en la categoría de modelación escolar, mismos que han sido explorados en escenarios escolares y de divulgación matemática y que trastocan conocimientos de la geometría analítica, el cálculo y las ecuaciones diferenciales. El objetivo principal fue compartir los diseños mediante su aplicación y análisis de la experiencia vivida, se utilizaron diversos sensores para obtener datos gráficos y analizar las variaciones, locales y globales, para ajustar las tendencias y delimitar estabilidad de las gráficas, considerando las condiciones iniciales. Finalmente se invita a conocer y discutir el eje que sustenta los diseños, quedando abierta la posibilidad de sugerencias a la mejora y a la adaptación de los mismos.

Palabras clave: modelación escolar, variaciones, tendencias y estabilidad

ABSTRACT: From our perspective, modeling is an essential part in the construction, spreading and development of the scientific knowledge. That´s why we consider it is important to include designs to develop activities that allow modeling daily situations in math classrooms. Then, we propose three designs of situations, based on the school modeling category, all of which have been explored in school and mathematical spreading settings. They change knowledge of analytic geometry, mathematic calculus and differential equations. The main objective of this work was to share the designs by applying and analyzing of the achieved experience. Different sensors were used to obtain graphical data and to analyze both local and global variations, in order to adjust the tendencies and to define graphs stability, according to the initial conditions. Finally, we propose to know and discuss the core that supports the designs, and we are open to suggestions for changing and improving them.

Key words: school modeling, variations, tendencies and stability

La modelación escolar

El desarrollo científico y tecnológico no está aislado de los problemas, contextos o usanzas que vive la sociedad en momentos específicos. En este sentido, la modelación es parte esencial de la construcción, difusión y desarrollo del conocimiento científico, pues otorga una justificación funcional a este, además provoca la construcción de herramientas como elementos esenciales de la situación que se atiende, para representar lo que se estudia con determinados fines, de manera que pueda ser comunicado (Gilbert, 2004; Koponen, 2007). Es decir, es lo que hace posible a un grupo humano construir explicaciones de su realidad, tomar decisiones y desarrollar sus construcciones, de manera que no es ajena al ser humano, ni a la situación en la que sucede.

La modelación se reconoce como la estrategia por excelencia del ser humano para generar conocimiento (D´Ambrosio, 2009). Sin embargo, la visión generalizada sobre modelación en la Matemática Escolar consiste en concebirla como un proceso establecido que conviene implementar para resolver problemas o movilizar competencias, de manera que este proceso se muestra aislado a quienes lo usan. Para nosotros, la modelación es una práctica social en donde los actores principales del desarrollo de conocimiento son participes del proceso, esto lo llevamos al discurso Matemático Escolar y en el proponemos a la modelación escolar como una categoría de conocimiento matemático que promueve el desarrollo y articulación de los conocimientos matemáticos, en este sentido la modelación es un proceso de construcción en sí mismo de conocimiento matemático.

Nos interesa incluir las prácticas de modelación en las actividades del docente de Matemáticas mediante una categoría de construcción de conocimiento matemático llamada modelación escolar, es por ello que proponemos que mediante talleres de modelación y reflexión sobre la estructura de los diseños podríamos lograr el escenario que propicie la adopción de prácticas de modelación por parte de profesores en servicio o formación. En primer lugar se comparten algunos diseños de situación (DS) basados en la modelación escolar, mediante los cuales los participantes tendrán una vivencia desde la experimentación con diversos sensores (movimiento, fuerza y temperatura), analizando las variaciones locales, globales, las tendencias de gráficas para postular estabilidad y comportamientos de las mismas, incluyendo los efectos de las condiciones iniciales. En segundo lugar, se da a conocer y se discute el eje que sustenta los diseños en tanto sustento teórico-metodológico, y tercero se invita a realizar sugerencias para mejorar y/o adaptar los mismos a la Matemática de la escuela según sus realidades. Con esto se tiene la intención de crear un medio para poder incluir en la Matemática Escolar elementos de la investigación que provoquen problematizar y desarrollar el saber matemático.

Las actividades se detonan desde el estudio de fenómenos Físicos, que son tratados desde el Nivel Básico en la secundaria hasta el Nivel Superior, y que a nosotros nos da un contexto para resignificar el proceso de modelación en el estudio de las condiciones iniciales y las variaciones, tangible en el desarrollo del uso de las gráficas. Los fenómenos son: El estudio del movimiento rectilíneo uniforme y rectilíneo uniformemente acelerado; El estudio de las temperaturas y, El estudio de la fuerza sobre un objeto.

Con este escenario se busca significar y desarrollar el uso de la gráfica en la modelación de estos fenómenos. Con esto evidenciamos también la transversalidad de la Matemática.

Los diseños se sustentan en elementos de la teoría Socioepistemológica (Cantoral, 2013), sobre todo de aquellos que caracterizar el rol de la modelación en la construcción social del conocimiento, mediante las categorías de conocimiento matemático basados en el proceso de modelación (Méndez, 2013; Suárez & Cordero, 2010; Méndez, 2008; Arrieta, 2003), desde estas retomamos los medios y procesos que permitieron estudiar cómo la Matemática adquiere sentido y se desarrolla en sus usos ante situaciones específicas (Zaldívar, Cen, Briceño, Méndez & Cordero, 2014; Méndez & Cordero 2014), por ejemplo en comunidades de estudiantes de la educación media superior y superior.

Los diseños de situación

Los diseños de situación están basados en la modelación escolar son:

- La experimentación o experiencia evocada; de donde se obtienen y tienen sentido los datos a estudiar; las condiciones iniciales y el comportamiento general del fenómeno darán significado a los dominios o rangos de funciones, en general conllevará a la formulación de los modelos matemáticos.
- El estudio de las variaciones locales y globales en los datos expresados en gráficas o tablas numéricas.
- La descripción, análisis y ajuste de comportamientos que transforman los datos en modelos, con los que es posible predecir a corto o largo plazo (o aproximar a un valor específico) el fenómeno o situación estudiada.

Figura 1. Elementos de la categoría de modelación escolar

Los elementos mencionados se hacen tangibles en los diseños, los cuales pasan por tres momentos, no necesariamente son lineales y consecutivos, estos son:

El Momento 1: Está caracterizado por la emergencia de usos que explican los cambios que ocasiona la modificación de condiciones en el experimento que se realizó. Usos detonados por la situación de transformación, en donde se caracterizan variaciones globales. Es decir, por el comportamiento del tipo de variación.

El Momento 2: Está caracterizado por el estudio del cambio de una posición a otra o de un intervalo de tiempo a otro, para determinar cuánto o cómo varia algo en ese intervalo, o bien, en los intervalos en donde sucede un cambio (propio de la situación de variación).

El Momento 3: Este momento se caracteriza por los usos del conocimiento cristalizados ante la intención de acercarse lo más posible a un valor específico. Estos usos se valen de las propiedades de variación en intervalos pequeños cercanos al valor que se quiere aproximar (esto sucede en la situación de aproximación).

Con esta categoría se busca generar escenarios para resignificar conocimientos matemáticos, reconociendo cuáles son las funciones de estos ante el análisis, la predicción y la argumentación sobre situaciones específicas en donde es inherente el cómo y por qué se hacen visible los elementos esenciales, la variación y el comportamiento de lo estudiado, es decir las formas.

Desarrollo de la propuesta

El ambiente del taller es adecuado para desarrollar nuestra categoría pues mediante el análisis y la reflexión se construyen hipótesis sobre las experiencias, esto lleva a postular, ajustar y convenir herramientas matemáticas que describan y predigan lo estudiado, es decir los modelos. Nuestra propuesta promueve una Matemática Funcional, lo que implica que los partícipes en el desarrollo de situaciones construyan y articulen usos del conocimiento matemático donde la modelación escolar es el eje argumentativo.

La gestión del taller se realiza en tres fases:

Fase 1. La experimentación. Análisis de lo sucedido en la experimentación o, en la experiencia evocada o simulada, esto se realiza mediante actividades en equipo, las cuales invita a definir qué variables intervienen en la situación, qué variables se pueden relacionar.

Fase 2. La especulación. Se discute cómo se pueden relacionar las variables, qué significan según el experimento y cómo se puede expresar esa relación esto se hace en equipo y en el colectivo para compartir usos.

Fase 3. El consenso y la identidad de usos. Se convienen en los equipos qué herramientas Matemáticas permiten articular los elementos que intervienen en las situaciones enfatizando en el funcionamiento de estas según su intención. Esto último llevará a reconocer identidades en los usos del conocimiento matemático.

Los diseños que se desarrollan están estructurados en momentos de desarrollo de usos del conocimiento matemático que se articulan de manera inevitable ante la formulación de argumentos en torno a las herramientas matemáticas construidas, los modelos, que permiten caracterizar y predecir los fenómenos estudiados, a este hecho le llamamos Desarrollo de redes de usos de conocimiento matemático (Drucm).

En actividades sobre el estudio del movimiento (Tabla 1), se invita a estudiar; el desplazamiento de un objeto en línea recta, a lo largo de tres puntos, con esto se tiene la intención de conocer cuáles son los usos cotidianos de las gráficas en donde se busca resignificar el espacio de graficación, las variables y su articulación, y promover desde ahí el desarrollo del uso de las gráficas para describir distancias recorridas con respecto del tiempo en donde se construyen o develan saberes sobre función y función a trozo, también promovemos el desarrollo del uso de gráficas velocidades en ciertos tiempos, en donde es posible resignificar a la integral definida mediante el estudio de situaciones de movimiento (Tocto & Méndez, 2015).

Tabla 1. Describe las expectativas del diseño de la situación sobre el estudio del movimiento

<table>
<tr><th colspan="2">DS
Drucm</th><th>Estudiando el movimiento</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Usos de las gráficas y las expresiones analíticas</td><td>Momento 1</td><td>Consta de la experimentación donde se develan los usos de las gráficas en tanto **se convienen las variables y sus relaciones.** Se **desarrolla la gráfica** para las **variaciones a trozos**.
Se convienen y analizan las variables a considerar para comunicar y caracterizar el movimiento.</td></tr>
<tr><td>Momento 2</td><td>Consta de la experimentación y **desarrollo de la gráfica** para las **variaciones a trozos**.
Se estudia las variaciones del movimiento dadas diferentes condiciones, para realizar ajustes y las tendencias en las gráficas que expresan como es el movimiento.</td></tr>
<tr><td>Momento 3</td><td>Desde **la articulación** de la gráfica dadas diferentes condiciones a la expresión algebraica.
Se analiza **la variación y el comportamiento general de la gráfica** para poder proponer una expresión algebraica que reúne las condiciones del experimento y la acción del movimiento durante cierto tiempo.</td></tr>
</table>

En general las actividades se desenvuelven desde el estudio del movimiento mediante la articulación de modelos y el fenómeno (Fig. 2) Para el desarrollo de estas actividades recurrimos al sensor del movimiento y al programa que nos facilita la visualización de las gráficas, también se emplea el geogebra como medio de argumentación en los modelos de funciones a trozos.

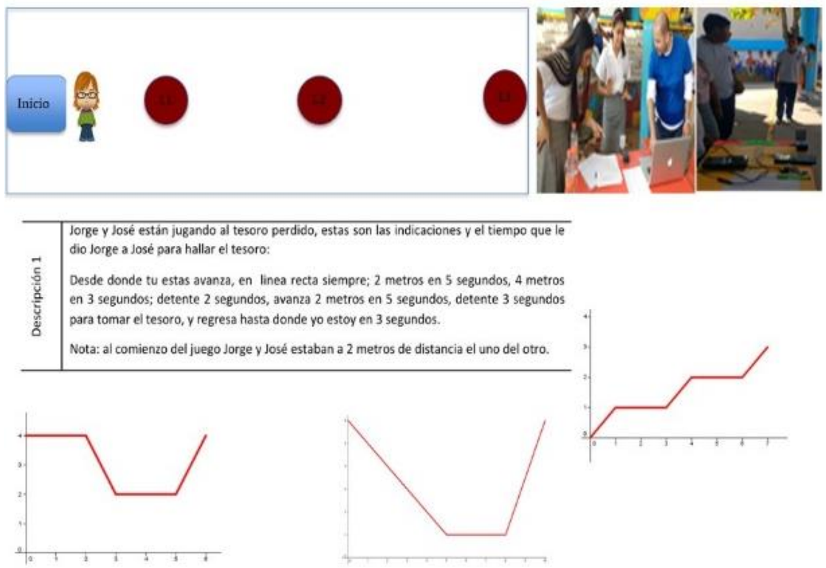


Figura 1. Imágenes de la Situación del estudio de movimiento.

Mientras que las actividades que se proponen para el estudio de la temperatura versa básicamente sobre el análisis de las condiciones iniciales y cómo estas se expresan en las gráficas en tanto su variación global y su tendencia, y finalmente se pide que se postulen modelos que se ajusten a los datos que se tienen de esta situación (Tabla 2).

Se estudian básicamente dos fenómenos; el enfriamiento o calentamiento de sustancias (Agua y/o silicón) y el equilibrio térmico (Figura 3). Las actividades giran entorno en el estudio de las variaciones globales y su tendencia, lo cual motiva a postular alguna función conocida dado el comportamiento que se identifica en las gráficas y los incrementos numéricos.

Tabla 2. Describe las expectativas del diseño de la situación sobre el estudio de la Temperatura

DS *Drucm*		**ºFrio vs caliente, ¿se establece?**
Desarrollo de usos de las gráficas y articulación con modelos numéricos y algebraicos	**Momento 1**	Este consiste en conjeturar desde el sentido común sobre la tendencia de la temperatura bajo ciertas condiciones. Se toman datos puntuales de la temperatura y se bosquejan gráficas, donde **se convienen las variables y sus relaciones,** esto es expresado en usos de las gráficas**.**
	Momento 2	Consta de la experimentación y **desarrollo de la gráfica** para las **variaciones globales**. Se estudia las variaciones del cambio de la temperatura con respecto al tiempo en ciertas condiciones de experimentación. Sucede un desarrollo del uso de las gráficas dado que se argumenta sobre cómo afecta a las variaciones globales, visibles en gráficas, las diferentes condiciones de experimentación.
	Momento 3	Consiste en analizar las variaciones y postular alguna relación algebraica o analítica que se corresponda con la gráfica y la situación estudiada. Se prueba y se ajusta los modelos propuestos. Se analiza **la variación de los datos numéricos y el comportamiento general de la gráfica** para poder proponer una expresión que reúne las condiciones del experimento, su variación y tendencia en cierto tiempo.

Para la realización de las actividades nos apoyamos de sensores de temperatura y calculadoras graficadoras, estos medios nos permiten visualizar las variaciones globales de las gráficas y obtener los datos numéricos para analizar las variaciones en intervalos de tiempo, con ello dar elementos a los partícipes para postular expresiones que se ajusten a la gráfica y la situación que se estudia. Finalmente se plantea el estudio de gráficas que expresan la variación de la fuerza de un objeto en movimiento durante el transcurso del tiempo, nos enfocamos básicamente al estudio de las variaciones globales con respecto a las condiciones de experimentación.

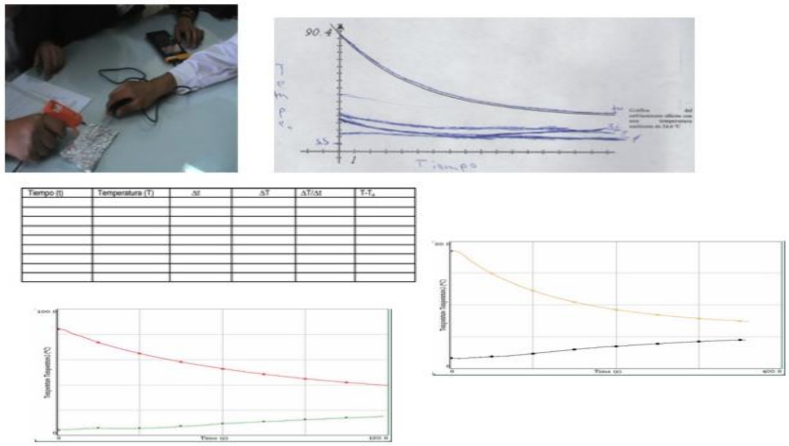


Figura 3. Imágenes de la Situación del estudio de la temperatura

En este caso nos interesa que los participantes analicen la relación que existe entre los modelos gráficos y las condiciones iniciales cuando experimentamos con un sensor de fuerza utilizando objetos redondeados de diferente tamaño, colgados de un hilo y puestos en movimiento (Tabla 3).

Tabla 3. Describe las expectativas del diseño de la situación sobre el estudio de la Fuerza

DS *Drucm*		¿Graficando fuerza?
Desarrollo de usos de las gráficas para la predicción de la situación.	Momento 1	Consiste en el análisis de una situación dada y su interpretación por medio del bosquejo de una gráfica. **Se convienen y analizan las variables** a considerar para la construcción de un modelo gráfico.
	Momento 2	Consta de la experimentación y la obtención del modelo gráfico a partir del uso del sensor de fuerza bajo diferentes condiciones experimentales. A partir del estudio de **las variaciones de las gráficas modificando las condiciones iniciales del experimento** se pretende la elaboración de **argumentos** que sustenten la **predicción** del comportamiento de las gráficas.
	Momento 3	**La articulación** de las condiciones iniciales de experimentación, **postulando** a los parámetros que intervienen en los modelos gráficos, significando con esto la tendencia del comportamiento y/o la estabilidad de la gráfica. Se analiza **la variación y el comportamiento general de la gráfica** bajo las diferentes condiciones iniciales, sucede una articulación de las gráficas con el fenómeno modelado.

Las gráficas obtenidas de la tensión ejercida sobre la cuerda cuando pende a ésta un objeto en movimiento, pretenden provocar diferentes argumentos que relacionen los parámetros de las gráficas con características específicas de la situación tales como: tamaño de la bola, largo de la cuerda de la que pende y el ángulo desde el cual se suelta la bola, mismas que deberán corroborar experimentando (Figura 4). Con estás actividades se promueven la inclusión de prácticas de modelación mediante una categoría que desarrolla y artícula los usos de conocimientos matemático que la comunidad pueda desarrollar para describir y predecir qué sucede con la situación vivida.

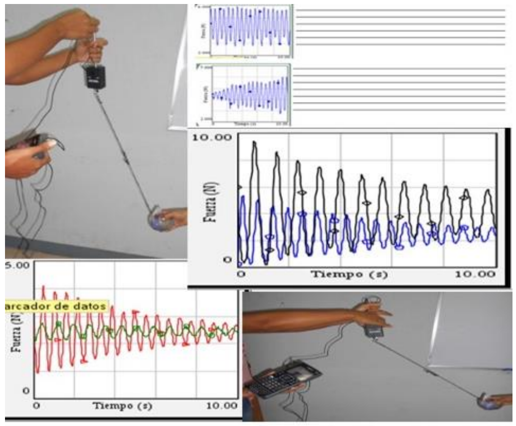


Figura 4. Imágenes de las actividades de fuerza

Algunos resultados

Con esta propuesta de taller se genera un espacio para la resignificación del uso de las gráficas desde argumentos cotidianos, matemáticos y físicos. Por ejemplo en una situación de movimiento se pidió analizar una gráfica velocidad - tiempo y describir las distancias recorridas del móvil, esto ha mostrado dos usos de la gráfica, una tiene que ver con argumentos de la Física escolar, específicamente la fórmula para calcular la velocidad, y el otro argumento se corresponde con la Matemática, en tanto usan la integral definida.

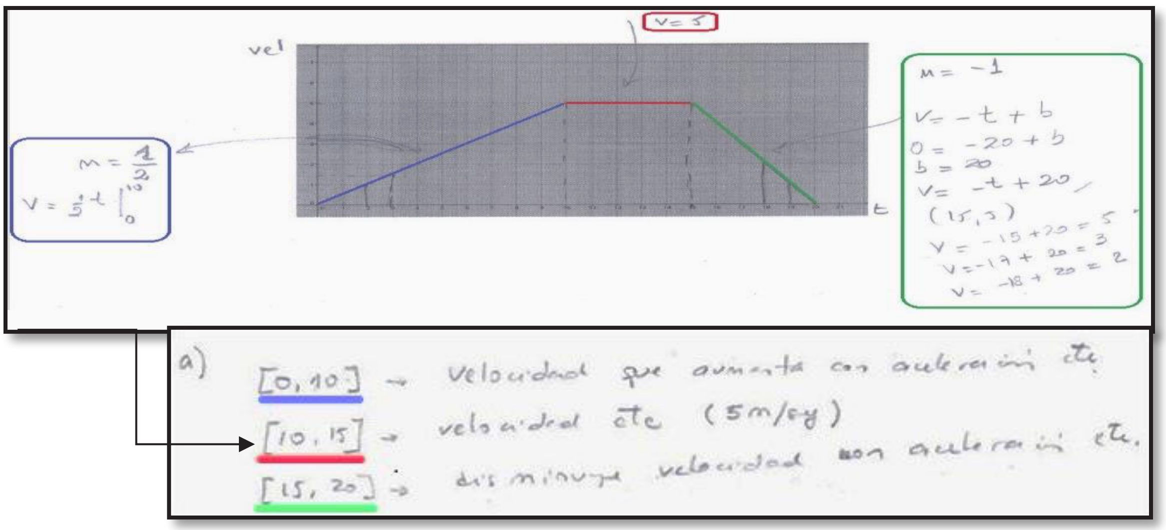


Figura 5. Uso de la gráfica que se desprende de argumentos de la Física escolar (Tomado de Tocto, 2015)

La figura 5 muestra cómo se usa la gráfica desde el argumento de la física para obtener las funciones por intervalos de tiempo. Esto permite determinar las variaciones locales de velocidad y posteriormente permitió saber las distancias recorridas por intervalos y en total de esta. Mientras que la figura 6 muestra cómo se usa la gráfica para identificar comportamientos en los intervalos, marcados como creciente, constante, decreciente y se identifican los puntos de cambio de estos comportamientos para así emplear la fórmula de punto pendiente y así obtener las funciones a trozos, y finalmente calcular la integral definida a cada función según sus extremos de variación.

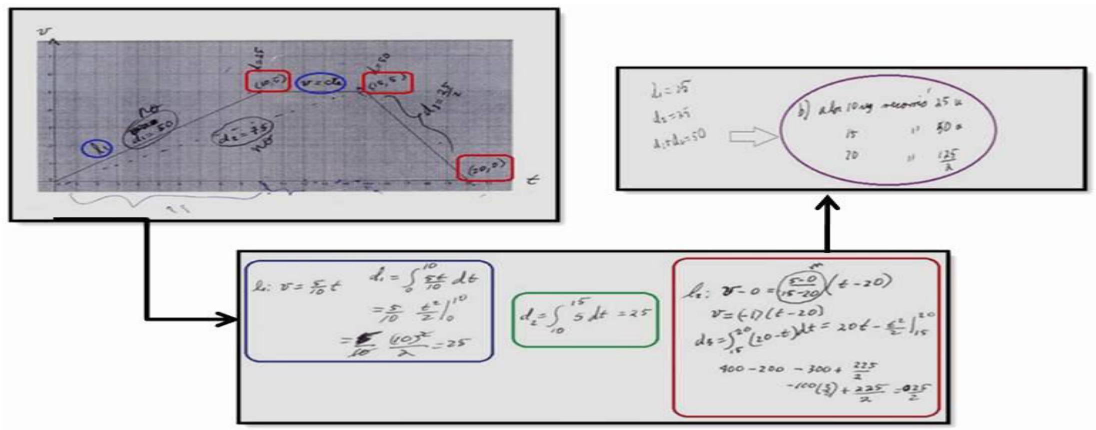


Figura 6. Uso de la gráfica que se desprende de argumentos matemáticos (Tomado de Tocto, 2015)

Esto nos deja evidenciar que si bien podría observarse la misma representación no son iguales, y eso se caracteriza por el uso de gráfica, la cual da significados a los saberes que confluyen y la situación misma. Entre los argumentos matemáticos que se promueven están; el espacio de graficación cartesiano, función, función a trozos, derivada e integral definida así como la estabilidad expresada como la tendencia de las gráficas en las situaciones del estudio de fuerza y la temperatura. Si bien las actividades que se proponen están aún en exploración se obtuvo buena aceptación por parte de los participantes, así mismo se nos hicieron algunas sugerencias que serán consideradas en los próximos rediseños.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. (Tesis doctoral no publicada). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R. (2013). Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento. Barcelona, España: Gedisa.

Cen, C., Zaldívar, D. Briceño, E., Méndez, M., & Cordero F. (2014). El espacio de trabajo matemático y la situación específica de la matemática funcional: Un ejercicio de diálogo. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17 (4-III), 417-436.

Méndez, M. (2013). *Desarrollo de red de usos del conocimiento matemático: la modelación para la matemática escolar*. (Tesis inédita de doctorado). Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Méndez, M & Cordero, F. (2012). La función de la modelación en la resignificación del conocimiento matemático. En O. Covián, Y. Chávez, J. López, M. Méndez, A. Oktaç. *Memorias del Primero Coloquio de Doctorado,* (pp. 257 – 267). ISBN: 978-607-9023-08-9, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Cinvestav. D´Ambrosio, 2009

Méndez, M. (2008). *Un estudio de la evolución de la práctica: La experiencia de modelar linealmente situaciones análogas,* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México.

Méndez, M. & Cordero. F. (2014). *La modelación. Un eje para la red de desarrollo de usos. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 27*. (Pp. 1603-1610) Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Suárez, L. & Cordero, F. (2010). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio sociepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4-II), p. 319-333.

Tocto, M. & Méndez, M. (2015). Modelación y la emergencia de la integral. En F. Rodríguez & R. Rodríguez (Eds.) Memoria de la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa. La profesionalización Docente desde los Posgrados de Calidad en Matemática Educativa (pp. 226-231). Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.

Tocto, M. (2015). *Modelación escolar y la caracterización de la integral definida*, (Tesis de maestría no publicada).). Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México.

UNA CARACTERIZACIÓN DE LA NOCIÓN SISTEMA DE REFERENCIA PARA EL TRATAMIENTO DEL CAMBIO Y LA VARIACIÓN

Mario Caballero-Pérez, Ricardo Cantoral
Cinvestav-IPN. (México)
macaballero@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

RESUMEN: Investigaciones enmarcadas en el Pensamiento y Lenguaje Variacional han mostrado que la variación es una noción importante en el aprendizaje del Cálculo, no obstante, consideramos que ésta no es explicita en los fenómenos de estudio; la variación no se observa, sino que se infiere, se calcula, se mide, y por tanto, se construye. Nuestra investigación está enfocada en comprender cómo se construye la variación en el pensamiento humano mediante la noción de sistemas de referencia. Estos sistemas consisten en el reconocimiento del cambio y la variación, de su organización y comunicación mediante cuatro elementos: las variables de estudio (¿qué cambia?), la unidad de referencia (¿respecto de qué cambia?), la una unidad de medida (¿cuánto cambia?) y una temporalización de los fenómenos (¿cómo cambia?).

Palabras clave: variación, predicción, prácticas, socioepistemología

ABSTRACT: Researches concerned with the Thought and Variation Language has shown that variation is an important notion in the learning of Calculus; however, we consider that it is not explicit in the phenomena of study; the variation is not observed, but it is inferred, calculated, measured, and therefore constructed. Our research is focused on understanding how variation in human thought is constructed through the notion of reference systems. These systems consist of the recognition of change and variation; of their organization and communication through four elements: the variables of study (what changes?); the reference unit (with respect to what, it changes?); the unit of measurement (How much does it change?); and a timing of phenomena (how does it change?).

Key words: variation, prediction, practices, socio epistemology

Introducción

El Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar) es una línea de investigación que se ocupa de estudiar los fenómenos de enseñanza y de aprendizaje del conocimiento matemático propios de la Matemática del Cambio (Cantoral, 2000), en particular del Cálculo y el Análisis, enfatizando en el carácter variacional de las ideas matemáticas y no únicamente en su manejo simbólico y analítico. En un sentido amplio consiste en las formas de pensar, argumentar, organizar, tratar y comunicar matemáticamente fenómenos de cambio.

Dentro del PyLVar, el cambio consiste en toda modificación de estado (posición, forma, altura, peso, etc.), en tanto que la variación se asume como una cuantificación particular de dicho cambio, no solo en el sentido de emparejar una unidad con un número sino también al reconocer aspectos medibles en un fenómeno o situación (Johnson, 2015), ya sea de naturaleza cualitativa o cuantitativa.

Diversos trabajos han incorporado el estudio del cambio y la variación para la significación y aprendizaje de conceptos matemáticos, ya sea para la construcción de conceptualizaciones más avanzadas de la noción de pendiente y derivada (Nagle, Moore-Russo, Viglietti y Martin, 2013), para dotar de un carácter dinámico a los conceptos de variable y función (Yüksel y Soybaş, 2009), o propiciar un vínculo entre las diferentes conceptualizaciones de la idea de derivada (Sánchez, García y Llinares, 2008).

Observamos que en esos trabajos la variación es el punto de partida para la significación de objetos matemáticos como función, pendiente y derivada, pero no se ha cuestionado sobre la construcción de la propia noción de variación. Esto resulta importante debido a que, si bien el cambio puede ser percibido, la variación no, ya que consiste en una abstracción de orden superior.

…si bien nos percatamos del movimiento de las personas, de su cambio de posición, casi nunca nos cuestionamos por la forma en que se producen dichos cambios, aun cuando podríamos percatarnos de ello: si el movimiento era uniforme, si se presentaban variaciones, es decir, se movían cada vez más rápido o más lento o si alternaban este comportamiento. Menos llegamos a establecer algún sistema de medida para darle valor a esas variaciones del cambio. Es decir, si bien percibimos y comprendemos lo que cambia, el analizar los cambios de ese cambio no es tan natural. Se requiere de un segundo nivel de elaboración teórica, de una abstracción de segundo orden, dando lugar al concepto de variación (Cabrera, 2009, p. 51).

La variación no es explicita en los fenómenos, no se observa, sino que se infiere, se calcula, se mide, y por tanto, se construye. Investigaciones previas han mostrado cómo la variación es operada mediante el uso de *estrategias variacionales* (Caballero y Cantoral, 2013), pero ahora nos interesa conocer cómo se construye la noción de variación, o dicho de otra forma, ¿cómo opera el pensamiento humano ante situaciones de variación?

Algunas investigaciones han reportado dificultades para acceder a la noción de variación, ya sea en la comprensión de la derivada a través de la razón de cambio (Sahin, Aydogan-Yenmez y Erbas, 2015), al acceder a la noción de acumulación de funciones (Thompson, Byerley y Hatfield, 2013) o al distinguir entre velocidad y aceleración en el movimiento de personas (Sokolowski, 2014). Estas propuestas se caracterizan por reconocer una falta de significación de los objetos matemáticos, en tanto que nuestra investigación, enmarcada en el PyLVar, se interesa en la forma de construir la variación en sí misma.

En ese sentido nos preguntamos: ¿cómo acceden las personas a la variación?, ¿cómo la operan?, ¿cómo la comunican? Consideramos que entender estos cuestionamientos nos permitirá entender el proceso de significación de la Matemática del cambio, lo que proveerá de elementos para promover el desarrollo del PyLVar. Nuestra hipótesis consiste en que se precisa del desarrollo de dos nociones propias de la psicogenética, la *causalidad* y la *temporalización*, cuya articulación da lugar a la conformación de *sistemas de referencia* para el estudio del cambio y la variación.

Marco teórico

Tomamos como referente teórico a la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa que explora formas del pensamiento matemático fuera y dentro de la escuela. Asimismo, modela las dinámicas de la construcción social del conocimiento matemático a través del conjunto de *prácticas* que son aceptadas y establecidas socialmente (Cantoral, 2013), normadas a su vez por *prácticas sociales,* las cuales se entienden no como la acción efectuada (por ejemplo medir) sino la orientación estratégica de la práctica (por qué medimos y por qué lo hacemos de esa manera), aquello que regula las actividades en la construcción social del conocimiento matemático.

En ese sentido, la Socioepistemología centra la atención no en los *objetos matemáticos* (por ejemplo, la noción de limite, derivada, función), sino en las *prácticas* que los acompañan y dan origen. Particularmente en el Cálculo, éstas prácticas se denominan *estrategias variacionales*, las cuales son normadas por la práctica social del Prædiciere. Está práctica social consiste en aquello que norma la actividad matemática con fines predictivos, no es la predicción como tal sino lo que orienta el querer predecir.

En (Cantoral, 2013) se presenta un modelo evolutivo del Prædiciere que da cuenta de un tránsito del conocimiento al saber matemático y clasifica el tipo de predicción que se realiza, así como las herramientas que se construyen y utilizan para ello. “El paso de los datos (Prædiciere como esquema) al patrón o regularidad en el comportamiento (Prædiciere como modelo) es un requisito para la emergencia del concepto en el marco de las redes conceptuales correspondientes (Prædiciere como teoría)” (Cantoral, 2013, p. 132).

Este modelo también nos deja ver el tipo de estudio del cambio que se precisa en la predicción de fenómenos. Así por ejemplo, en el *Prædiciere* como modelo se precisa establecer relaciones funcionales entre variables a traves de identificar aquello que cambia, mientras que, en el *Prædiciere* como esquema, consiste en describir la forma en cómo se relacionan las variables, esto es, caracterizar la naturaleza de cambio del fenómeno, lo cual se reliza ya sea en términos de valores numéricos o a través de descripciones cualitativas mediante frases como: más grande que, igual que, menor que, más frio, menos frio, cada vez más rápido, cada vez más lento, etc.

Ahora bien, para describir la naturaleza del cambio las investigaciones enmarcadas en el PyLVar recurren al uso uso de *estrategias variacionales*, las cuales consisten en una forma particular de razonar y actuar ante una situación para tratar con el cambio y la variación (Caballero y Cantoral, 2013). Algunas de las estrategias reconocidas son la *predicción*, la *comparación*, la *seriación* y la *estimación.*

El uso de las *estrategias variacionales* comienza por la *comparación* de estados para cuantificar el cambio, después la *seriación*, vista como un conjunto de comparaciones sucesivas, permite caracterizar cualitativa y cuantitativamente el patrón de regularidad de la variación en un conjunto de estados sucesivos. Por último, la *estimación* y *predicción* organizan la información obtenida de las estrategias anteriores y la utilizan para anticipar comportamientos globales o estados puntuales respectivamente.

Lo anterior deja ver una evolución pragmática en el estudio del cambio y la variación asociado a una jerarquía en las *estrategias variacionales* donde la *comparación* y *seriación* atiende a la tipificación del cambio, en tanto que la *estimación* y *predicción* se apoyan en éstas para anticipar estados y comportamientos futuros. En otras palabras, mediante las *estrategias variacionales* la variación es operada, aunque todavía no implica que se construya. Para ello, hace falta indagar en la forma en cómo se reconocen las relaciones funcionales del *Prædiciere* como modelo y los estados sucesivos para caracterizar la naturaleza del cambio como esquema. Para ello, recurrimos a dos nociones de la picogenetica que nos han permitido plantear un postura al respecto.

El papel de la causalidad y la temporalización en el estudio de la variación

Hemos mencionado que predecir precisa de una cuantificación del cambio en las variables de un fenómeno (*Prædiciere* como modelo) con el fin de encontrar algún patrón o regularidad en él (*Prædiciere* como esquema), pero, sostenemos, no de cualquier variable sino de aquellas que están relacionadas causalmente, aspecto profundizado en (Caballero y Cantoral, 2014). Esto debido a que, dentro del PyLVar, el establecimiento de *relaciones causales* es un requisitito previo a las *relaciones funcionales*. Por ejemplo, antes de estudiar la forma de cambio del volumen de un líquido al aumentar su temperatura, se precisa reconocer que efectivamente la modificación de la temperatura afecta al volumen, es decir, que están relacionados causalmente.

El reconocimiento de una causalidad entre variables (la modificación de una resulta en la modificación de la otra) da pie al reconocimiento del cambio, esto debido a que los datos (sean numéricos, gráficos, verbales) ya no se conciben aislados sino provenientes de una relación particular. Identificar dichas relaciones suele ser omitido en la actividad escolar, dando prioridad a la operatividad de la función, en particular a un tratamiento algebraico.

De manera que, por medio de la *causalidad* se reconoce la variación (¿qué cambia?), en tanto que las *estrategias variacionales* permiten cuantificar el cambio, por ejemplo, al comparar dos estados y observar el incremento o decremento entre ellos, pero ¿qué comparamos? y ¿con qué comparamos? Reconocer la variación no tendría lugar sin el establecimiento de un referente para percibir el cambio (¿respecto de qué cambia?) y otro para medirlo, para cuantificarlo (¿cuánto cambia?).

Ahora bien, cuantificar el cambio también precisa identificar estados intermedios en los fenómenos de variación para usar las estrategias de *comparación* y *seriación*, lo que permite dar cuenta de la evolución del cambio. A esto lo denominamos establecer una *temporalización* del cambio, noción que proviene de la perspectiva psicogenética sobre el desarrollo de la noción de tiempo, aspecto profundizado en (Caballero y Cantoral, 2014).

La importancia de considerar la *temporalización* en fenómenos de variación continua es que permite describir, caracterizar y cuantificar el comportamiento de las variables de una función (¿cómo cambia?). Esto implica que de un cierto modo los fenómenos de variación se discretizan, sin embargo, esto representa un paso necesario para llevar a cabo el estudio del cambio, ya que mediante las estrategias de *comparación* o *seriación* los estados intermedios que se identifican no se quedan al nivel de imágenes estáticas, sino que se vuelven estados de transición del fenómeno, lo que da cuenta de la evolución del cambio (su variación).

Hemos planteado que las nociones de *causalidad* y *temporalización* son necesarias para el estudio del cambio, en el sentido que permiten reconocer y organizar el cambio y la variación, en tanto que las *estrategias variacionales* son la forma de operar con éstas últimas. Con base en esto, reconocemos una noción que articula la *causalidad* y la *temporalización* a la que denominamos *sistema de referencia*, el cual organiza la variación de un fenómeno mediante cuatro elementos (ver figura 1).

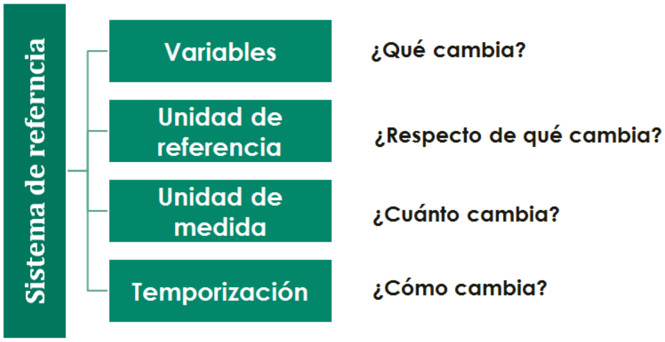


Figura 1. Elementos del sistema de referencia

Ejemplo de un sistema de referencia en el estudio del cambio

En esta sección mostramos como la noción de *sistema de referencia* permite explicar la actuación de un joven ante situaciones de variación, en particular el llenado de recipientes a flujo constante. Este ejemplo es retomado de (Johnson, 2015), donde se presentan tres casos sobre los razonamientos de estudiantes asociados a la razón de cambio cuando resuelve actividades que involucran cantidades que covarian, centrándose en el tipo de relación que establecen entre dichas cantidades.

La actividad en concreto que analizamos corresponde a las respuestas de uno de los tres estudiantes, Jacob, al pedirle que bosqueje la gráfica que exprese el crecimiento del volumen al incrementarse la altura para una botella en concreto (ver figura 2).

Figura 2. Botella correspondiente a la actividad de Johnson (2015)

Jacob dibuja una gráfica compuesta por tres secciones principales conformadas por trazos rectos (figura 3), donde cada sección corresponde a una sección curva de la botella, en las que distingue entre angosta y ancha. Él establece que en las secciones delgadas la *altura* se incrementa más que el *volumen,* mientras que en las anchas es al contrario

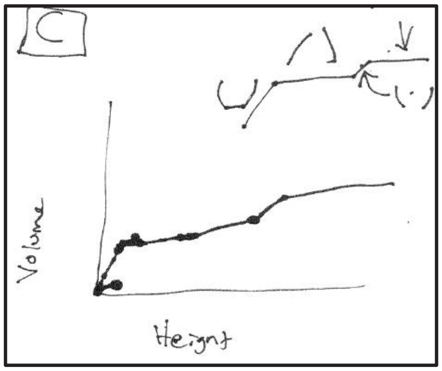


Figura 3. Gráficas realizadas por Jacob

Johnson enfatiza que a pesar de haber trabajado con gráficas no lineales en otras tareas previas, Jacob *compara* el incremento de la altura y volumen a través de gráficas lineales, para él, éstas fueron suficientes para distinguir entre los tres tipos de crecimiento que tiene el volumen de acuerdo a la forma de la sección de la botella. Jacob imagina el cambio ocurriendo a través de secciones, donde la característica esencial de cada sección es la intensidad en la cantidad de cambio.

En cuanto al *sistema de referencia* y la función que tienen sus elementos, identificamos que las *variables* de estudio abarcan más que la altura y el volumen, Jacob analiza el cambio de estas en función de la forma de la botella. En otras palabras, relaciona causalmente la forma de la botella con el comportamiento variacional del *volumen* y la *altura*, la forma es una variable.

Observamos la *unidad de referencia* cuando Jacob argumenta que una sección ancha implica que el crecimiento del *volumen* sea mayor al crecimiento de la *altura*, en tanto que una sección angosta es lo contrario, de manera que se utiliza la estrategia *de comparación*. De modo que la *unidad de referencia* consiste en una forma particular de la botella, que a diferencia de su función como variable, aquí no se considera variaciones en ella sino que se mantiene una en particular para determinar comportamientos específicos.

La *unidad de medida* consiste en el ancho de una sección de botella para determinar la intensidad de cambio en la relación *volumen vs altura* (una asociación entre la longitud de la base y la parte superior de esa sección). Entre más angosta la sección el *volumen* aumenta más que la *altura*, y entre menos angosta la relación es al contrario. Es decir, miden la variación mediante la *comparación* de qué tan angosta es la sección.

Observamos la *temporalización* en las gráficas que realiza Jacob, ya que establece secciones de gráfica que corresponde a comportamientos de secciones de la botella. Esto es, más que señalar valores específicos de la *altura* para analizar el *volumen*, él establece una secuencia de los comportamientos de la relación *volumen vs altura* que plasma en una gráfica con varios segmentos de línea recta con diferentes inclinaciones, a partir de los cuales utiliza una *seriación* para *estimar* la forma de la gráfica.

Reflexiones finales

Hemos planteado que la variación es una noción que no es explicita en los fenómenos de estudio, ésta no se observa sino que se infiere, se calcula, se mide, y por tanto, se construye. Investigaciones fundamentadas en el PyLVar han mostrado como la variación es operada mediante el uso de *estrategias variacionales*, pero ahora interesa cómo se construye la noción de variación en el pensamiento humano.

Con base en lo presentado, postulamos que construir esta noción exige del desarrollo de dos nociones propias de la psicogenética, la *causalidad* y la *temporalización*. Por una parte, la variación consiste en una cuantificación del cambio en las variables de un fenómeno, pero no de cualquier variable sino de aquellas que están relacionadas causalmente. Normalmente el tratamiento escolar provee esas variables y se espera que el alumno caracterice su comportamiento mediante el estudio de su variación, pero la revisión de los trabajos sobre *casualidad* nos han dejado ver que sin la previa construcción de *relaciones causales* esto se torna en algo de naturaleza memorística y sin significado.

Por otra parte, la variación expresa la dinámica de las variables estudiadas, esto es, da cuenta de la evolución de las variables en diversos estados del fenómeno. Es así, que la variación requiere reconocer y, en su caso, construir estados intermedios en el desarrollo del fenómeno, esto es, realizar una *temporalización*, ya que sin esto la cuantificación del cambio, la variación, no tiene lugar.

La articulación entre *causalidad* y *temporalización* nos ha permitido postular una noción a la que denominamos *sistema de referencia* que explica la forma en cómo las personas perciben y organizan el cambio y la variación para su estudio mediante *estrategias variacionales*. Tradicionalmente en las aulas escolares los *sistemas de referencia* son proporcionados explícitamente, siendo el ejemplo más común el sistema cartesiano. No obstante, esto inhibe el desarrollo del *pensamiento y lenguaje variacional*, ya que no se da lugar a desarrollar formas de percibir el cambio, de medirlo, de comunicarlo. En ese sentido, se precisa fomentar la construcción de estos *sistemas de referencia*, tanto para situaciones escolares como para aquellos fenómenos fuera del aula.

Referencias Bibliográficas

Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del Pensamiento y Lenguaje Variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 1007 – 1015.

Caballero, M. y Cantoral, R. (2014). Pensamiento y Lenguaje Variacional: Un estudio sobre mecanismos de construcción del conocimiento matemático. *Memorias de la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 17, 307 – 314.

Cabrera, L. (2009). *El Pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de Competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato*. Tesis de maestría no publicada, Centro de investigación y estudios avanzados del IPN, México.

Cantoral, R. (2000). Situaciones de cambio, pensamiento y lenguaje variacional. En R. Cantoral, R.M. Farfán, F. Cordero, J.A. Alanís, R.A. Rodríguez y A. Garza (Eds.) *Desarrollo del Pensamiento Matemático* (pp. 185-203). México, DF:Trillas.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático*. México: Gedisa Editorial.

Johnson, H. (2015): Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Estudies in Mathematics*, 89 p. 89 – 110.

Nagle, C., Moore-Russo, D., Viglietti, J. y Martin, K. (2013). Calculus students and instructors' conceptualizations of slope: a comparison across academic levels. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11, 1–25.

Sahin, Z., Aydogan- Yenmez, A. y Erbas, A. (2015). Relational Understanding of the Derivative Concept through Mathematical Modeling: A Case Study. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11(1), 177-188

Sánchez, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11 (2), 267 – 296.

Sokolowski, A. (2014). Modelling rate for change of speed in calculus proposal of inductive inquirí. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45 (2), p. 174 – 189.

Thompson, P. Byerley, C. y Hatfield, N. (2013). A Conceptual Approach to Calculus Made Possible by Technology. *Computers in the Schools: Interdisciplinary Journal of Practice, Theory, and Applied Research*, 30 (1-2), 124-147.

Yüksel, D. y Soybaş, D. (2009). Preservice mathematics teachers: Experiences about Function and Equation Concepts. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 7, 89 – 102.

DISEÑO DE UNA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL

Mario Caballero-Pérez, Gloria Moreno-Durazo
Cinvestav-IPN. (México)
macaballero@cinvestav.mx, gamoreno@cinvestav.mx

RESUMEN: En este escrito se presentan las consideraciones teóricas que sustentan el diseño de una situación de aprendizaje con miras al desarrollo del pensamiento matemático asociado al estudio de comportamientos lineales. Para ello, se retoma el esquema de anidación de prácticas de la teoría socioepistemológica y el uso de *estrategias variacionales* del Pensamiento y Lenguaje Variacional. La situación está diseñada considerando cuatro momentos, el primero consiste en el reconocimiento de la función lineal como aquella de variación constante, el segundo confronta diferentes comportamientos lineales para significar los parámetros de la expresión $f(x) = mx + b$, en tanto que el tercero recurre al uso del parámetro *m* para realizar predicciones sobre comportamientos lineales y el ultimo una confrontación entre lo lineal y lo no lineal.

Palabras clave: variación, predicción, prácticas, socioepistemología

ABSTRACT: This paper shows the theoretical assumptions that support the design of a learning situation in order to develop mathematical thinking associated with the study of linear behaviors. Then, the nesting scheme of socio-epistemological theory practices and the use of variation strategies of thought and variation language are retaken, as well. The situation is designed considering four moments: the first, consists of the recognition of the linear function as that of constant variation, the second confronts different linear behaviors to signify the parameters of the expression $f\ (x)\ =\ mx\ +\ b$, while the third, uses the parameter m to make predictions about linear behaviors and the last one makes a confrontation between linear and nonlinear behavior.

Key words: variation, prediction, practices, socio- epistemology

Introducción

La enseñanza y aprendizaje del Cálculo ha sido tema de interés en diversas investigaciones, algunas interesadas en cómo diseñar situaciones para construir significados a los conceptos del Cálculo (Engler, Vrancken, Gregorini, Müller, Hecklein y Henzenn, 2008: Johnson, 2015), y otras que, a partir del diseño de un conjunto de actividades, determinan cuáles son las concepciones y las dificultades que tienen profesores y estudiantes sobre tópicos de esta asignatura (Planinic, Milin-Sipus, Katic, Susac y Ivanjek, 2012; Caballero y Cantoral, 2013).

En el caso de la función lineal, encontramos dificultades relacionadas al significado de la pendiente en contextos disciplinares, por ejemplo, en (Planinic, et. al. 2012) se reporta que los estudiantes tienen dificultades en la transición del contexto matemático al físico ya que, aunque pueden resolver correctamente el planteamiento del primero, no ocurre lo mismo con el segundo. Desde nuestra perspectiva, esto puede deberse a que la enseñanza de la pendiente se ve desprovista de los escenarios de significación que le dan origen, lo que repercute en que la Matemática sea vista como algo independiente de los aspectos físicos, aun cuando los conceptos e ideas comparten un origen similar, el estudio del cambio y la variación.

Por otra parte, Johnson (2015) reporta que en el análisis de gráficas, los estudiantes conciben a éstas como imágenes estáticas y no como la expresión de un fenómeno dinámico de variación. Consideramos que en parte se debe al tipo de tratamiento que se da a las gráficas, que no propicia la argumentación desde la gráfica, sino una algebrización de la expresión analítica y posteriormente una tabulación de puntos particulares.

Dificultades como las anteriores son abordados por la línea de investigación Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar), la cual se ocupa de estudiar los fenómenos de enseñanza y de aprendizaje del conocimiento matemático propios de la Matemática del Cambio (Cantoral, 2000), enfatizando en el carácter variacional de la Matemática y no únicamente en su manejo simbólico y analítico. En un sentido amplio consiste en las formas de pensar, argumentar, organizar, tratar y comunicar matemáticamente fenómenos de cambio.

Las investigaciones enmarcadas en el PyLVar han mostrados que conceptos como *función*, *límite, continuidad, derivada e integral* no pueden reducirse a su definición, ni limitarse a su aplicación (Cantoral, 2013). Se precisa de un cambio de paradigma del tratamiento algebraico al que son sometidas, para dar lugar a las ideas de cambio y variación que permitieron el surgimiento y desarrollo de estos conceptos. Dado lo anterior, en este escrito presentamos las consideraciones teóricas que sustentan el diseño de una situación de aprendizaje con miras al desarrollo del pensamiento matemático asociado al cambio y la variación.

La situación que proponemos consiste en un problema de llenado de recipientes con flujo constante, contexto que frecuentemente es utilizado en investigaciones que se interesan por analizar los procesos mentales que siguen los estudiantes en su resolución, en particular la forma en cómo emergen conceptos matemáticos como pendiente (Johnson, 2015). Nuestra propuesta por otro lado se enmarca en la teoría Socioepistemológica, de modo que nuestro punto de interés no es observar el uso de los conceptos matemáticos en la situación, sino propiciar el desarrollo de prácticas para favorecer el estudio y la predicción de procesos de cambio. Es así, que nuestro objetivo es el diseño de una situación de aprendizaje fundamentada en el PyLVar, para lo cual tomamos como fundamento el modelo de anidación de prácticas de la Socioepistemología y una problematización de la noción de variación.

Marco Teórico

Tomamos como referente teórico a la Teoría Socioepistemológica, la cual que explora formas del pensamiento matemático fuera y dentro de la escuela, a la vez de modelar las dinámicas de la construcción social del conocimiento matemático a través del conjunto de *prácticas* que son aceptadas y establecidas socialmente (Cantoral, 2013), normadas a su vez por *prácticas sociales,* las cuales se entienden no como la acción efectuada (por ejemplo medir) sino la orientación estratégica de la práctica (por qué medimos y por qué lo hacemos de esa manera).

La Socioepistemología centra la atención en las *prácticas* que acompañan y dan origen a los objetos matemáticos, particularmente en Cálculo, éstas prácticas se denominan *estrategias variacionales* (Caballero, 2012*)*, las cuales son normadas por la práctica social del Prædiciere, la cual consiste no en la acción de predecir sino lo que orienta el querer predecir.

Ahora bien, estas prácticas no se efectúan arbitrariamente sino que cuenta con una estructura, una organización, que se denomina *modelo de anidación de prácticas*, el cual permite explicar empírica y teóricamente el proceso de construcción social de conocimiento matemático mediante el desarrollo intencional de prácticas.

Figura 2.1. Esquema de la anidación progresiva de prácticas (Cantoral, 2013)

El interés por estudiar el cambio y la variación se deriva de una necesidad inherente al ser humano, la necesidad de predecir, ya que ante la incapacidad de adelantar el tiempo para observar los resultados venideros, se han desarrollado diversas herramientas basadas en el estudio del cambio y orientadas por la práctica social del Prædiciere para anticipar el comportamiento de sistemas complejos (Cantoral, 2013). Ahora bien, la predicción de fenómenos precisa determinar algún patrón o regularidad en el comportamiento de la variación, esto es, entender la dinámica que las variables y sus variaciones siguen. A esto se le denomina el *carácter estable del cambio* (Cantoral, 2013) aquella regularidad asociada a la variación que determina el comportamiento de los estados ulteriores del fenómeno.

Para determinar el carácter estable del cambio, nuestra hipótesis sostiene se precisa atender cuatro cuestionamientos asociados a la percepción del cambio: ¿qué cambia?, ¿respecto de qué cambia?, ¿cómo cambia? y ¿cuánto cambia? En un fenómeno de variación pueden existir una multitud de elementos que están cambiando simultáneamente (¿qué cambia?), no obstante, de acuerdo con Cantoral (2013), no se centra la atención en todos ellos sino que se eligen aquellas variables relevantes para una situación específica. Ello requiere de algún referente para comparar los estados del fenómeno a fin de dar cuenta que ocurrió un cambio, es decir atender al cuestionamiento ¿respecto de qué cambia?

Los primeros dos cuestionamientos se refieren a la identificación y establecimiento de relaciones de dependencia entre variables; los otros consisten en describir la forma en cómo se relacionan las variables y caracterizar la naturaleza del cambio. La pregunta ¿cuánto cambia? está orientada a asignar un valor a la modificación de estado percibida, mientras que la pregunta ¿cómo cambia? a describir el comportamiento global. Ambos pueden realizarse en términos de valores numéricos o a través de descripciones cualitativas, por ejemplo, más grande que, menor que, más frio, menos frio, cada vez más rápido, cada vez más lento, etc.

Para atender a estos cuatro cuestionamiento se cuenta con un modelo teórico desarrollado por M. Caballero en (Caballero y Cantoral, 2013) que explica la forma en cómo se estudia la variación en una situación específica. El uso de las *estrategias variacionales* comienza por la *comparación* de estados para cuantificar el cambio entre ellos, y después la *seriación*, vista como sucesión de comparaciones, permite caracterizar cualitativa y cuantitativamente el patrón de regularidad de la variación en un conjunto de estados. La *estimación* y *predicción* organizan la información obtenida de las estrategias anteriores para anticipar comportamientos globales o estados puntuales respectivamente. Lo anterior deja ver una evolución pragmática en el estudio del cambio y la variación asociado a una jerarquía en las *estrategias variacionales* que se presenta en la siguiente anidación de prácticas.

Tabla 1. Anidación de prácticas del pensamiento y lenguaje variacional

Práctica social	Prædiciere
Práctica de referencia	Toxicología Física etc.
Práctica	Predicción Estimación
Actividad	Comparación *Seriación*
Acción	Ordenar Medir Girar etc.

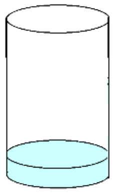
Las acciones se consideran la intervención directa del sujeto sobre el objeto de estudio, en este caso la variación, de modo que los elementos y variables del fenómeno se ordenan, agrupan, miden, etc. Dichas acciones son organizadas mediante la *comparación y seriación,* vistas como actividades efectuadas de manera consiente e intencional. Esto significa que no toda *comparación* o *seriación* es una *estrategia variacional* sino aquellas que tengan la intención de estudiar la variación. Estas actividades se organizan deliberadamente para componer una práctica, en este caso las estrategias de *predicción* y *estimación*. Estas prácticas son orientadas y reguladas bajo el paradigma de una *práctica de referencia* y estas a su vez normadas por la búsqueda de la predicción de la *práctica social* del Prædiciere.

Una situación de aprendizaje para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional

Con base en la anidación de prácticas (tabla 1) se han estructurado cuatro momentos en la situación de aprendizaje. El primero se refiere al llenado de un recipiente cilíndrico a flujo constante, donde la atención se centra en identificar la cantidad de altura que aumenta cada segundo y la asociación con la gráfica correspondiente. En el segundo se trabaja el llenado de dos recipientes cilíndricos, comparando la velocidad de llenado al variar la forma del recipiente (más ancho menor pendiente, más angosto mayor pendiente). En el tercer momento, se compara el llenado de dos recipientes desde un enfoque numérico, con el fin de predecir cuál se llena primero. En el último momento se contrastan las gráficas del crecimiento de la altura de recipientes cilíndricos (a razón constante) con el llenado de recipientes de forma cónica, a modo de contrastar lo lineal con lo no lineal (Arrieta, 2003). Por cuestiones de espacio, nos limitamos a mostrar el análisis de los dos primeros momentos.

Primer Momento

Un recipiente vacío de forma cilíndrica es llenado mediante una llave que deja salir agua a flujo constante. En la imagen siguiente se muestra la altura que alcanza el cuerpo del agua al transcurrir un segundo.



1. Marca sobre la imagen la altura que alcanzará el agua a los *3* segundos.
2. ¿Cuántos segundos tardará en llenarse el recipiente? Justifica tu respuesta
3. Realiza el bosqueja de la gráfica que muestra altura del líquido al paso del tiempo. Considera que el eje horizontal corresponde al tiempo y el eje vertical a la altura. Explica cómo es el crecimiento de la altura en este recipiente.

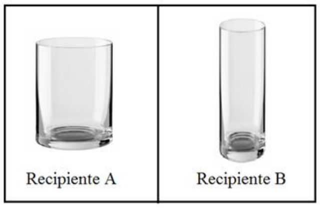
La primera pregunta tiene el objetivo de establecer la altura del líquido y el tiempo como las *variables* del fenómeno, para lo cual se señala en el dibujo la parte en azul con el fin que se utilice como medida cuantitativa. Al nivel de acción se efectúan dibujos en la botella que indican el nivel de agua cada segundo a partir de la medición del segmento azul. Estos trazos deben ser de tal forma que la longitud de las alturas sea la misma, lo que lleva a la actividad de *comparar* las nuevas alturas respecto a la original.

En la segunda pregunta, el nivel de acción corresponde nuevamente al dibujo de los segmentos, pero ahora articulado por la estrategia de seriación en el nivel de actividad, de tal forma que los segmentos lleguen hasta la parte superior de la botella. Con esto, en el nivel de práctica dichos segmentos son contados para predecir el tiempo de llenado. Para la tercera pregunta, el nivel acción corresponde a considerar la construcción de los segmentos anteriores, de manera que en el nivel de actividad se usa la *seriación* para determinar que los incrementos son siempre iguales.

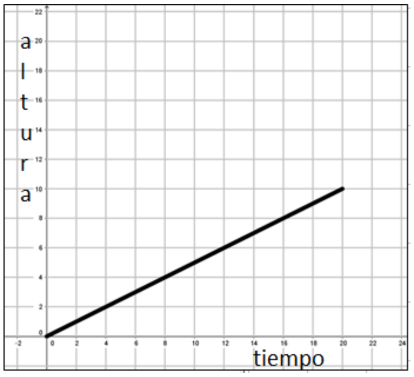
De esta forma, en el primer momento se caracteriza los comportamientos lineales como aquellos cuyo crecimiento es constante. Esto se logra al enfocar la atención en la actividad a la comparación de las longitudes de los segmentos que se dibujan respecto al que tiene en un principio. De modo que al reconocer que las longitudes son siempre iguales, se puede determinar el tiempo de llenado del recipiente.

Momento 2

1. Considera los recipientes cilíndricos A y B que tienen diferentes ***dimensiones*** pero misma ***capacidad***, los cuales son llenados con agua con el mismo flujo constante. Bosqueja la gráfica de la altura del agua al paso del tiempo para cada recipiente. ¿Qué diferencia hay en la forma en cómo crece la altura en cada uno?



2. El siguiente plano cartesiano muestra la gráfica del llenado de un recipiente C. Construya, sobre el mismo plano cartesiano, la gráfica del llenado del recipiente D sabiendo que ambos recipientes son llenados a flujo constante y, además, la altura del líquido en el recipiente D aumenta el doble respecto al recipiente C.



En la pregunta 1 se pide diferenciar el crecimiento de la altura en dos recipientes cilíndricos de diferentes dimensiones, para lo cual es necesario dibujar (o considerar) la altura que alcanzaría el líquido al transcurrir un segundo en alguno de los recipientes, lo que corresponde al nivel de acción. El nivel de actividad se presenta al *comparar* la altura dibujada con la que alcanzaría el otro recipiente en el mismo tiempo, y de ese modo determinar que el incremento en el recipiente angosto es mayor que en el ancho. Dado que ya se reconoce que el crecimiento es constante para cada botella, no se requiere utilizar la *seriación*, sino únicamente comparar las alturas correspondientes a cada recipiente.

La pregunta *2* tiene el objetivo de construir la gráfica del llenado de un recipiente cilíndrico dada la gráfica del llenado de otro recipiente. El nivel acción corresponde a una operación aritmética de multiplicar por *2* el valor de la altura en cada instante de tiempo, y también en localizar dicho valor en el plano. El nivel de actividad consiste en una *comparación* de alturas, ya que cada altura generada debe cumplir la característica de ser el doble respecto a la anterior.

Momento 3

Las siguientes tablas muestran los datos de la altura de un líquido durante el llenado de dos recipientes cilíndricos con las mismas dimensiones. Si ambos recipientes miden 15 cm de alto, ¿cuál de los dos se llenará primero? Justifique su respuesta

Recipiente A	
Tiempo (s)	**Altura (cm)**
1	3.3
2	4.6
3	5.9
4	7.2

Recipiente B	
Tiempo (s)	**Altura (cm)**
1	1.8
2	3.6
3	5.4
4	7.2

Momento 4

Considera dos recipientes con forma de “cono”, como los que se muestran a continuación, que son llenados a flujo constante:

Recipiente A Recipiente B

a. Para cada recipiente, ¿qué diferencia hay en la forma de crecimiento en la altura de la parte inferior de cada botella respecto a la parte superior?

b. Para cada recipiente, proporcione la gráfica que muestre la altura del cuerpo del líquido al paso del tiempo.

Reflexiones del trabajo

La situación de aprendizaje propicia el reconocimiento de la función lineal como aquella de variación constante, tanto de manera cualitativa y cuantitativa en el análisis gráfico y numérico, lo que permite significar los parámetros de la expresión $f(x) = mx + b$ como la cantidad de flujo (m) y la cantidad inicial de agua (*b*). La situación fue diseñada considerando una evolución pragmática de la variación mediante el desarrollo de las *estrategias variacionales* y el esquema de anidación de prácticas, atendiendo a los cuestionamientos ¿qué cambia?, ¿respecto de qué cambia?, ¿cómo cambia? y ¿cuánto cambia?

En el primer momento de la situación las variables de estudio (¿qué cambia?) son explicitados en las preguntas, pero se refuerzan al proporcionar una altura inicial del líquido como referente para analizar el crecimiento de la altura (¿respecto de qué cambia?). Al pedir que se dibuje el segmento que corresponde al segundo 3, se estable una forma de medir los incrementos con base en la longitud del segmento original (¿cuánto cambia?), en tanto que al pedir la gráfica y explicar la forma de crecimiento se atiende al cuestionamiento ¿cómo cambia?). El segundo momento agrega, a las variables tiempo y altura, la forma de la botella ¿qué cambia?), ya que el ancho de estas modifica el incremento de las alturas, de manera que se usa la altura que alcanzaría en uno de los recipientes para analizar el otro (¿respecto de qué cambia?). Ahora bien, aunque los incrementos siguen siendo constantes en cada recipientes (¿cómo cambia?), la cantidad que aumentan es diferente (¿cuánto cambia?).

Un aspecto a considerar en el diseño de esta situación, es que la anidación de prácticas que proponemos no consiste en estructurar una tarea por cada nivel del modelo, sino que cada pregunta o indicación de la situación se construye considerando el tipo de acciones, actividades y prácticas que se pretenden propiciar. En una fase posterior se contempla la implementación de la situación con estudiantes de bachillerato de México que no han cursado la asignatura correspondiente a Pre-Cálculo, con el fin de recopilar y analizar los datos correspondientes para validar y, en su caso, restructurar la situación y el marco teórico.

Referencias Bibliográficas

Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del Pensamiento y Lenguaje Variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 1007 – 1015.

Cantoral, R. (2000). Situaciones de cambio, pensamiento y lenguaje variacional. En R. Cantoral, R.M. Farfán, F. Cordero, J.A. Alanís, R.A. Rodríguez y A. Garza (Eds.) *Desarrollo del Pensamiento Matemático* (pp. 185-203). México, DF: Trillas.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático*. México: Gedisa Editorial.

Johnson, H. (2015): Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Estudies in Mathematics*, 89 p. 89 – 110.

Planinic, M., Milin-Sipus, Z. Katic, H., Susac, A. y Ivanjek, L. (2012). Comparison of Student Understanding of Line Graph Slope in Physics and Mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10, p. 1393 – 1414.

CAPÍTULO 4

EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

Eduardo Carrasco Henríquez
eduardo.carrasco@umce.cl

El aula, entendida desde las interacciones entre las y los estudiantes que desean conocer; la matemática que ha vivido sus procesos de transformación en saber enseñable y, el o la profesora que busca facilitar el aprendizaje del estudiante, han dejado de estar delimitada por la institución escolar para emerger en diversos espacios y entornos no tradicionales. Así, el aula se constituye en la acción educativa intencionada por el profesor, que permite vivir a las y los estudiantes experiencias de construcción de saber. El profesor, por tanto, como parte de esta aula se imbrica en las relaciones con la responsabilidad y herramientas para configurar, desde sus condiciones materiales y de recursos, las acciones y retroacciones que configuran el aula como espacio de construcción de conocimiento.

Esta posición del profesor en la construcción del aula, comporta un desafío que se ha puesto al centro de la investigación en el área. Da ponte y Chapman (2016) construyen una síntesis de las investigaciones, principalmente en inglés, en torno a la formación inicial docente. Emerge de ella, el conocimiento del profesor como un elemento a considerar en las investigaciones, tanto el conocimiento matemático, como el de la matemática para la enseñanza. Desde una mirada que da cuenta de las debilidades respecto del saber que se muestra efectivo para un adecuado desempeño. Suma a lo anterior el considerar la importancia de reconocer la identidad docente. Identidad, reflejada en su pensamiento, creencias, reflexión sobre su propia práctica, sus prácticas (liberadoras o no) entre otros aspectos que muestran lo multidimensional del concepto. A la vez, la identidad, se aprecia como un elemento central para la construcción de procesos de formación de profesores de matemática que lleven al cambio.

Sin embargo, Ávila (2017) destaca la multiplicidad del aula, en cuanto es un espacio de concurrencia (material o digital) de biografías de vida, formas de hacer, emociones. Es decir, lo releva como un espacio en que emerge la complejidad vivencial de las personas que se involucran en una situación de enseñanza y aprendizaje. Es un espacio de encuentro de epistemes, en tanto formas de conocer el saber que se enseña, que cada sujeto (estudiantes y profesores) han construido en su vida por corta que esta pueda parecer. De manera que, la acción docente se ve desafiada a la búsqueda de formas de "conectar con la complejidad humana –sobre todo en este nuevo siglo– que permita abrir canales de interrelación e involucramiento con el proceso de conocer, enseñar y aprender en educación matemática" (Op. Cit., p. 198).

Este capítulo que se presenta en esta Acta Latinoamericana de Matemática Educativa -ALME, que va en versión número treinta, está dedicado a aquellas investigaciones que colocan como uno de los elementos clave al profesor. Se ofrece como una oportunidad de entender cómo hemos abordado al profesor en la investigación en matemática educativa. Las representaciones de los docentes, su conocimiento y competencias, su actividad y la reflexión de la práctica, son elementos que se vislumbran en los artículos presentados y que conforman una ventana para saber aquello que se ha avanzado y para establecer desafíos pendientes de abordar.

Un análisis preliminar del capítulo en la edición 2016 de ALME 29, realizado con la librería tm, del software R, muestra que las palabras más usadas son *conocimiento, profesor y matemáticas,* es decir, pareciera central la importancia que el conocimiento del profesor, en particular en matemática ha tenido en la investigación latinoamericana. Dejando en un segundo lugar de frecuencias, las palabras estudiante enseñanza y menos frecuente las palabras *aprendizaje, desarrollo, prácticas.* Por su parte, desde un análisis de cluster (método de distancia euclidiana) nos permite reconocer a la triada *matemática, conocimiento y enseñanza,* como palabras cercanas y por tanto el grupo principal de interés en las investigaciones. Del mismo modo las palabras *profesor* y *alumno,* son altamente cercanas entre ellas, pero no tanto del grupo anterior. El otro grupo los conforman diversas palabras que refieren a facetas del acto educativo, como son las palabras *problemas*, *aprendizaje*, *competencias*, *desarrollo* o *práctica,* que se posicionan más lejanamente del primer cluster. En síntesis, pareciera que el foco central en la versión 29 de Acta Latinoamericana de Matemática Educativa se centra el pensamiento del docente, y de modo más particular respecto de su conocimiento matemático.

Lo anterior se presenta como una mirada preliminar a la investigación y que permite invitar al lector a la revisión profunda de los artículos presentados que permita entender cómo estamos abordando en la investigación el vértice del profesor, tanto en su relación sistémica a sus prácticas en el aula y como ellas promueven aprendizajes matemáticos, así como en entender su identidad, sus saberes y los procesos de aprendizaje de la labor docente.

Referencias

Ávila, J. (2017). Pensamiento complejo y emociones: otros lentes para pensar la formación de profesorado de matemáticas. En G. González y T. Del Valle (Eds), *Investigación para la formación de profesores. Aportes desde la Universidad Católica Silva Henríquez,* pp. 195-215. Santiago, Chile: Ediciones UCSH.

Da Ponte, J. P. y Chapman, O. (2016). Prospective Mathematics Teachers' Learning and Knowledge for Teaching. In English, Lyn D. & Kirshner, David (Eds.) *Handbook of International Research in Mathematics Education (pp.3-18).New York:* Taylor and Francis

PROFESORES DE ENSEÑANZA BÁSICA CHILENOS REFLEXIONAN SOBRE SU PROPIA PRÁCTICA. PRIMEROS RESULTADOS DE UN PROYECTO EN CURSO

Sandra Burgos, Montserrat Prat, Ximena Oyarzo, María Isabel del Río
Universidad Austral de Chile. (Chile) Universidad Ramon Llull. (España).
sandraburgos@uach.cl, montserratpm3@blanquerna.url.edu, xoyarzo@spm.uach.cl, midelriov@gmail.com

RESUMEN: Este reporte de investigación presenta los resultados del primer año del proyecto “Estudio de los cambios en las prácticas pedagógicas de un grupo de profesores de matemáticas de enseñanza básica de la comuna de Puerto Montt, debido a un proceso guiado de reflexión conjunta”. En este grupo participan 10 profesores y profesoras de educación básica, con pos título en matemáticas, amplia experiencia docente y que trabajan a jornada completa en instituciones públicas o subvencionadas de entornos vulnerables o medios. El objetivo del grupo es compartir experiencias, y a través de la interacción entre pares, reflexionar y fortalecer sus prácticas docentes.

Palabras clave: matemáticas, reflexión, práctica pedagógica, desarrollo profesional

ABSTRACT: This research report sets out the first-year results of the of the project “ Study of educational practice changes of a group of basic school mathematics teachers in Puerto Montt community, due to a guided process of common reflection” Ten teachers of basic school take part of such group. They are experienced teachers with a degree in math, who work full time in public institutions or in vulnerable environment subsidized schools. The aim of the group is to share experiences, and to reflect and improve the educational practices through peer interaction.

Key words: mathematics, reflection, educational practice, professional development

Introducción

En este reporte de investigación se presentan los resultados del primer año del proyecto "Estudio de los cambios en las prácticas pedagógicas de un grupo de profesores de matemáticas de enseñanza básica de la comuna de Puerto Montt, debido a un proceso guiado de reflexión conjunta". Se trata de un proyecto financiado por la Dirección de Investigación y Desarrollo de la Universidad Austral de Chile, con una duración de 2 años, iniciándose en marzo del 2015.

El objetivo del primer año del proyecto, tal como se planteó en la postulación, fue el de *lograr dentro del grupo, un entorno de confianza que permita compartir experiencias*. Otras experiencias en grupos similares reafirman esta necesidad de conseguir un ambiente de confianza para que las interacciones entre los miembros del grupo sean ricas (Crespo, 2006; Males, Otten & Herbel-Eisenmann, 2010).

Grupos de estudio para la mejora del desarrollo profesional

Desde la perspectiva del constructivismo social (Ernest, 1998), los profesores y profesoras se forman mediante las interacciones con sus pares, así como por sus procesos individuales. Los grupos de estudio formados por profesores y profesoras permiten esta interacción entre iguales fomentando a partir de la reflexión conjunta su desarrollo profesional.

Al hablar de grupos de estudio (en inglés, *study groups*), lo hacemos en el mismo sentido que Arbaugh (2003), refiriéndonos a un grupo de profesores y profesoras que se reúnen de manera regular apoyándose entre ellos a medida que trabajan de manera colaborativa para desarrollar su práctica profesional, a la vez que reflexionan y modifican su práctica como profesores y profesoras de matemáticas. Este tipo de grupos es relativamente común en educación matemática, y tienen como objetivo proporcionar a los maestros ocasiones para trabajar conjuntamente en el desarrollo de su propia comprensión matemática, a la vez que ofrecen a los miembros del grupo la oportunidad de ampliar su conocimiento acerca del pensamiento matemático de los estudiantes (Crespo, 2006).

La reflexión como motor del cambio

Coincidimos con García, Sánchez y Escudero (2006) al considerar que la reflexión no es únicamente un proceso psicológico individual, sino que implica la inmersión consciente del individuo en el mundo de su experiencia. Así, para Llinares y Krainer (2006) la reflexión es un medio que permite a los maestros seguir aprendiendo sobre el proceso de enseñar y sobre ellos mismos como maestros.

Nuestra propuesta se enmarca en la teoría de la práctica reflexiva de Schön (1983) la cual parte de las experiencias contextualizadas de cada docente y de la reflexión sobre su propia práctica. Esta teoría, tiene en cuenta la experiencia profesional para la mejora del desarrollo profesional de los docentes. Schön (1983) distingue entre la reflexión-sobre-la-acción (*reflection-on-action*), cuando la reflexión se lleva a cabo antes y después de la acción; y la reflexión-en-la-acción (*reflection-in-action*), al referirse al diálogo reflexivo que tiene el profesional docente mientras realiza la actividad, por ejemplo, resolviendo problemas o tomando decisiones durante la propia actividad.

En el mismo sentido que Schön, Zeichner (1993) presenta al profesor como un profesional reflexivo, cuando someten sus teorías prácticas a su propio examen y al de sus colegas. Cuando el profesor o profesora presenta sus teorías prácticas a discusión en un grupo de profesores tiene la oportunidad de aprender de los demás. En definitiva, para este autor, la enseñanza reflexiva, permite a los profesores y profesoras, criticar y reflexionar acerca de sus teorías prácticas cuando reflexionan juntos y por separado en-la-acción y sobre-la-acción de su actividad docente, y de las condiciones sociales que configuran sus experiencias docentes.

Por todo ello la práctica reflexiva permite "transformar la experiencia colectiva en conocimiento profesional y conectar la formación de profesores con el desarrollo de proyectos educativos en las escuelas" (Nóvoa, 2009, p. 214)

Metodología

Método y participantes

Esta investigación se adscribe, como apuntan Latorre, Rincón y Arnal (2007), al paradigma cualitativo o interpretativo, el cuál enfatiza la comprensión e interpretación de la realidad educativa desde los significados de las personas implicadas en los contextos educativos. En esta investigación, la información surgirá de los discursos y acciones de los participantes, en el grupo de trabajo. Según el objetivo propuesto, la podemos situar como una investigación de tipo descriptivo, siguiendo a Latorre (op.cit), puesto que tiene como objetivo central la descripción de lo que ocurre dentro del grupo de trabajo, a la vez que pretende describir qué se considera dentro de este grupo como una buena práctica de matemáticas.

Esta investigación se define como un estudio de caso, donde el caso es el grupo formado por 10 profesores y profesoras de matemáticas de Enseñanza Básica (de 3º a 8º básico) chilenos, con pos título en matemáticas (de primer y segundo ciclo), y amplia experiencia docente (entre 9 y 30 años de servicio). Son profesores que trabajan a jornada completa (de 40 a 44 horas semanales) en instituciones públicas o subvencionadas de entornos vulnerables o sectores medios; y que no tienen ninguna rebaja en su carga horaria de clases, en sus centros educativos, por participar en este grupo de trabajo.

Los profesores y profesoras del grupo no se conocían ni habían trabajado conjuntamente con anterioridad. La motivación que les llevó a formar parte de este proyecto, es compartir experiencias docentes y a través de la interacción entre pares, reflexionar y fortalecer sus propias prácticas docentes.

Este grupo se reunió una vez al mes, en dependencias de la Universidad Austral de Chile – Sede Puerto Montt, en un ambiente agradable y distendido. En cada una de las sesiones estuvo presente el equipo de investigadoras y puntualmente algún invitado especial. El papel de las investigadoras durante el primer año es el de coordinar y proponer actividades para generar la confianza necesaria entre los miembros del grupo, que les permitan compartir actividades, experiencias, inquietudes, aciertos o desaciertos.

Instrumento y procedimiento.

Los instrumentos de recogida de datos fueron tres: (1) cuestionario inicial a los miembros del grupo, (2) cuestionario al finalizar el primer año, y (3) grabaciones de las sesiones del grupo.

Se hizo una convocatoria a 15 profesores y profesoras que habían participado en diferentes actividades organizadas por la universidad. En esta reunión se explicó el proyecto, se mostró el calendario de reuniones y la metodología de trabajo. Posterior a esto, se envió un cuestionario para que lo respondieran antes de la segunda reunión todos aquellos que estuvieran interesados y que tuvieran reales posibilidades de participar

La intención del cuestionario fue conocer de mejor manera los a profesores, a la vez que saber cuáles son sus inquietudes como profesores de matemáticas, y sus expectativas respecto al grupo al que ingresaban. Así, se les pidió que respondieran las siguientes preguntas:

- Nombre y apellido
- Título
- Grado, posgrados, cursos especialización, formación continua, etc.
- Años de experiencia docente.
- Cursos de enseñanza básica en los cuales ha realizado clases de matemática.
- ¿Hay algún curso en el que prefieras hacer clases? ¿Por qué?
- ¿Qué eje y/o contenido de matemáticas es tu preferido a la hora de realizar clases? ¿Por qué?
- ¿Qué eje y/o contenido de matemática has explicado en la última sesión de clase que has impartido? ¿Cómo has introducido el contenido? ¿Cómo has explicado el contenido?
- ¿Con qué eje y/o contenido matemático te sientes menos cómodo/a a la hora de ejecutar tus clases? ¿Por qué?
- ¿Qué contenido matemático, según tu experiencia, crees que es más difícil de entender para los niños y niñas? ¿Por qué?
- ¿Qué esperas de este grupo?
- Recordando tu propia experiencia como estudiante de enseñanza básica, ¿Qué tipo de emociones relacionas con la matemática?

Los cuestionarios iniciales sirvieron para preparar las siguientes sesiones de trabajo, proponiendo actividades interesantes para ellos y que respondieran a sus inquietudes y expectativas. Paulatinamente, las sesiones fueron evolucionando de manera natural hacia intereses compartidos por todo el grupo, que se concretaron en la sesión 3 dónde los integrantes del grupo propusieron comentar el desarrollo de sus prácticas pedagógicas.

Se grabaron y se transcribieron las 9 sesiones del año y las investigadoras tomaron notas de las diferentes situaciones acontecidas durante las sesiones de trabajo.

Como colofón al primer año, se pidió a los profesores que respondieran un cuestionario, para poder evaluar el primer año y planificar el segundo año del grupo. Las preguntas de este cuestionario fueron las siguientes:

- ¿Cómo valoras el primer año de funcionamiento del grupo? ¿Qué cambiarías o agregarías?
- ¿Qué ha aportado a tu práctica pedagógica?
- Desde el inicio del grupo ¿ha cambiado de alguna forma, la metodología en tus clases? Si es así, ¿qué cambios has incorporado? ¿qué aspectos crees que han propiciado estos cambios? ¿crees que tu participación en el grupo ha podido influir? ¿de qué manera?
- Si no has modificado tu metodología ¿a qué crees que se debe?
- ¿Has implementado en tus clases de matemáticas algunas propuestas o actividad que se haya explicado en el grupo? ¿Cuál? ¿Por qué decidiste implementarla? ¿Cómo fueron los resultados? ¿La vas a incorporar en tu planificación habitual? ¿Harás alguna modificación?
- ¿Qué esperas para el próximo año?

Resultados

Organización y seguimiento de las sesiones

La primera sesión se planteó para empezar a reflexionar conjuntamente. Así, con la intención de que surgiera la primera necesidad compartida como grupo, se analizó (sin pauta) un video corto seleccionado por las investigadoras sobre una sesión de clase de matemáticas. El proceso de discusión condujo al grupo a la conclusión (compartida) que era necesario tener una pauta si queríamos analizar y discutir futuros videos, era necesario consensuar y buscar un posicionamiento común. Así pues, se elaboró entre todos una pauta de observación poniendo énfasis en cuatro aspectos a observar: profesor, estudiantes, gestión de aula y contenido matemático. En la siguiente sesión se analizó nuevamente un video, ahora con la pauta elaborada a partir de los comentarios y las reflexiones del grupo. Además del hecho de tener una pauta compartida, se observó un cambio en el tono de las apreciaciones de los profesores, lo cual era vital para las observaciones de sus propias clases.

A partir de la tercera sesión se animó a los profesores y profesoras a grabar sus propias clases. Llegar a este punto no fue un proceso fácil, necesitaron la certeza de que la clase grabada no sería vista por los demás, sino que sería analizada por el propio profesor y la tarea consistiría en explicar al grupo qué había observado, siempre a partir de la pauta consensuada por el grupo. Con el paso de las sesiones fue creándose un clima de confianza que se hizo evidente con lo que cada profesor iba explicando de sus grabaciones a medida que avanzaban las sesiones. El punto de inflexión tuvo lugar en la sesión de noviembre (novena sesión), cuando uno de los profesores mostró fotos de una de sus clases mientras explicaba lo que había trabajado esa tarde.

Además de las sesiones puramente de trabajo, durante este primer año de desarrollo del proyecto el grupo recibió la visita de dos expertos, recibiendo charlas y asesoramiento sobre el valor social de las matemáticas, el rol del profesorado hoy en día, y el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Participación y cohesión del grupo

El compromiso y la participación de las profesoras y profesores ha sido muy elevado, durante las sesiones siempre se contó con la presencia de al menos el 80% de los participantes.

La cohesión del grupo, como hemos señalado anteriormente, es un hecho viendo las grabaciones de las sesiones, pero también revisando la actitud de las profesoras y profesores durante el primer año. Este cambio, también se hace evidente en los comentarios de los profesores y profesoras en el cuestionario final del primer año, cuando explican que han adquirido: “confianza para contar nuestras experiencias”, o comentan que:

> “entre las cosas que ha aportado [pertenecer al grupo] es poder tener confianza para contar las experiencias presentadas en la sala de clase”.

Además, las profesoras y profesores valoran positivamente pertenecer al grupo por ser un espacio que les aporta la oportunidad de conversar y así reflexionar sobre su práctica docente.

Algunas de sus valoraciones sobre el grupo son:

> “(…) una experiencia muy positiva, donde se logran espacios para conversar y analizar actividades en nuestra práctica pedagógica”.

> “Hemos podido analizar nuestras fortalezas y debilidades e ir enriqueciéndonos unos a otros”.

> “Reflexión permanente y poder colaborar en red”

Cambios metodológicos o incorporación de actividades

Para las profesoras y profesores formar parte de este grupo ha supuesto cambios en su día a día en el aula. El hecho de adquirir la confianza necesaria para contar sus propias experiencias, les ha permitido ver cómo trabajan sus compañeros, lo que ha supuesto un proceso de aprendizaje. Además, han entendido que era necesario llevar a cabo en la sala de clase las propuestas que iban viendo, y así han modificado sus propias prácticas, introduciendo cambios metodológicos, probando nuevas actividades, enriqueciendo, en definitiva, su práctica profesional.

Estos cambios que han ido compartiendo en las sesiones, también se han explicitado en los cuestionarios que han respondido al finalizar el primer año del grupo. Así según los miembros del grupo:

> "Trabajo con más material concreto"
>
> "La metodología ha cambiado, he tratado de que las actividades sean más lúdicas y entretenidas."
>
> "Formas de hacer las clases en forma más práctica que teórica. Como enfrentar problemas disciplinarios. Entender como es la matemática que se debe desarrollar en el aula (descubrimientos, hacer, compartir, jugar aprendiendo, investigar…)"
>
> "Dar problemas no rutinarios"

Comentarios finales

La primera sesión del segundo año (marzo 2016) sirvió para constatar los avances del año anterior. En esta sesión los profesores tomaron la iniciativa para grabarse y analizar los videos. Las reflexiones en todo momento fueron más ricas y autónomas que en el año anterior. La discusión generada les llevó a organizar las siguientes reuniones en torno a un tema específico que fuera interesante y complicado para todo el grupo. Se decidió trabajar el tema de 'datos y azar' de forma transversal, desde primer ciclo hasta segundo ciclo, revisando los libros de texto y creando actividades para los distintos niveles, los que serán puestos a prueba en sus cursos, grabados y discutidos en las próximas sesiones.

Esta actitud muestra una transformación en su comportamiento como grupo. Sienten la necesidad de apoyarse, y a su vez se sienten capaces de hacerlo. Esto es la mejor muestra que el primer objetivo está cumplido y que se avanza con paso firme hacia los objetivos propuestos para el segundo año que son: *identificar momentos de reflexión conjunta sobre las prácticas analizadas, observar la evaluación de la práctica docente de cada profesor periódicamente y describir y consensuar la idea de buena práctica matemática en el aula.*

Referencias bibliográficas

Arbaugh, F. (2003). Study groups as a form of professional development for secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6: 139-163.

Ernest, P. (1996). Varieties of constructivism: A framework for comparison. In L.P. Steffe, et al. (Eds.), *Theories of mathematical Learning* (pp.335-350). Nahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Crespo, S. (2006). Elementary Teacher Talk in Mathematics Study Groups. *Educational Studies in Mathematics*, 63: 29-56.

García, M., Sánchez, V. & Escudero, I. (2006). Learning Through Reflection in Mathematics Teacher Education. *Educational Studies in Mathematics*, 64: 1-17.

Latorre, A., Rincón, D., y Arnal, J. (2007). Bases metodológicas de la investigación educativa. Barcelona: Ediciones Experiencia.

Llinares, S. & Krainer, K. (2006). Mathematics (Student) Teachers and Teacher Educators as Learners. In A. Gutierrez and P. Boero (Eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future.* Rotterdam: Sense Publishers.

Males, L.M.; Otten, S. & Herbel-Eisenmann, B.A. (2010). Challenges of Critical Colleagueship: Examining and reflecting on mathematics teacher study group interactions. *Journal Mathematics Teacher Education*, 13: 459-471.

Nóvoa, A. (2009) Para una formación de profesores construida dentro de la profesión. *Revista de Educación*, 350: 203-218.

Schön, D. (1983). *The Reflective Practitioner.* London: Temple Smith.

Zeichner, K. (1993). El maestro como profesional reflexivo. *Cuadernos de Pedagogía*,

CONCEPCIONES DE LOS PROFESORES SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE DE LOS CONCEPTOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Cristhian López Leyton, Eliécer Aldana Bermúdez, Ángela María Ossa Nieto
Universidad del Quindío. (Colombia)
leyton3991@gmail.com, eliecerab@uniquindio.edu.co, angelanieto05@gmail.com

RESUMEN: Este reporte de investigación tiene como propósito analizar las concepciones de Profesores universitarios de matemáticas, sobre la resolución de problemas en torno a los conceptos del Cálculo Diferencial e Integral. En este sentido, se utiliza como teoría las creencias y concepciones de los profesores en relación a los ejercicios, problemas y situaciones problema que se presentan para el desarrollo de los contenidos de estos cursos; todo esto enmarcado desde un enfoque etnográfico. Los resultados se obtienen a partir de registros de clase, preparadores, apuntes de estudiantes, entrevistas, observación y episodios en audio y video. Esto permite concluir en primer lugar que los profesores ven la resolución de problemas de acuerdo a la aplicación de conceptos, es decir como contenido; y en segundo lugar como metodología; siendo esta la transición del lenguaje verbal al simbólico, adaptándose como vehículo para generar el aprendizaje.

Palabras clave: creencias, concepciones, resolución de problemas, cálculo

ABSTRACT: This research paper is aimed at analyzing the math university professors' conceptions about problem solving related to Integral and Differential Calculus concepts. With this respect, the theory is based on professors' beliefs and conceptions of exercises, problems and problem situations that appear in the development of these courses contents, all of which is classified in an ethnographic approach. The outcomes are obtained from the class registers, trainers, students' notes, interviews, observations, and audio and video episodes. It allows us to get to the conclusion, that teachers first see the solution of problems in accordance with the way concepts are applied, i.e. as content; and in the second place as methodology; being it the transition of verbal language to symbolic language as a vehicle to generate learning.

Key words: beliefs, conceptions, problem solution, calculus

Introducción

Las matemáticas son parte vital del sistema educativo obligatorio en todos los países del mundo, esto nos permite deducir que constituyen un aspecto fundamental de la tradición cultural y social, porque forman al ser humano ante la sociedad y le posibilitan desarrollar su pensamiento, a partir de procesos mentales como abstraer, generalizar, representar, sintetizar, visualizar, definir, entre otras, y ofrece herramientas fundamentales para su futura actividad profesional y ocupacional que escoja como sustento para su vida.

Desde una mirada global en la Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas en el contexto de la educación matemática, nos encontramos con un ámbito de actuación que involucra el aspecto social y cultural centrado en este caso al conocimiento didáctico del contenido matemático como lo plantea Shulman, (1986) para poder liderar y gestionar procesos académicos y didácticos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas universitarias. Es decir, que el objetivo de este campo es velar y garantizar que las instituciones formadoras desde niveles básicos a superiores generen procesos de enseñanza y por ende de aprendizaje, que cumplan con el encargo social, cultural y cotidiano, para lo cual fueron creadas en el contexto nacional e internacional.

Es así como, en una visión de Valle, Juárez, y Guzmán (2007, p.3), ponen de manifiesto que los lineamientos curriculares desde la educación básica hasta el nivel superior, demuestran el requerimiento de comprender como los estudiantes destinan el saber obtenido, aplicándolo a distintos ámbitos y contextos mediante la resolución de problemas. Esto nos da una clara visión del por qué se hace importante un estudio que dé cuenta sobre las creencias y concepciones que puedan tener los profesores de matemáticas de contexto Universitario, al momento de la transposición didáctica (Chevallard, 1991) sobre los elementos matemáticos que configuran el Cálculo diferencial e Integral en marco de una Licenciatura en matemáticas.

Marco teórico

De acuerdo con lo anterior, se hace necesario conocer referentes teóricos en torno a conceptos como creencias, concepciones, la relación entre estos dos aspectos; la resolución de problemas como vehículo de aprendizaje de las matemáticas y las concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas.

En primer lugar, (Pajares, 1992) citado en Gil Cuadra (2003), considera que las **creencias** son "verdades personales indiscutibles, sustentadas por cada uno, derivadas de la experiencia o de la fantasía, que tiene un fuerte componente evaluativo y afectivo. Las creencias se manifiestan a través de declaraciones verbales o de acciones (justificándolas)". En este sentido Thompson (1992), plantea que los profesores difieren ampliamente en sus creencias sobre la naturaleza y el sentido de las matemáticas, lo que impacta en gran medida su cronograma de actividades, su percepción frente al papel que se juega cada día en su práctica profesional, cómo se desenvuelve en ella, y el lugar que ocupan sus estudiantes en relación al entorno matemático. En investigaciones como Erazo y Aldana (2015) se resalta la importancia de las creencias como factor que influye de forma directa el proceso de aprendizaje de las matemáticas, lo que puesto en un contexto universitario permea al profesor y el futuro licenciado en formación.

Para el caso de las *Concepciones* (Moreno & Azcárate, 2003, p. 267) las describen como "organizadores implícitos de los conceptos, de naturaleza esencialmente cognitiva y que *incluyen creencias*, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias, entre otras, que influyen en lo que se percibe y en los procesos de razonamiento que se realizan"

A partir de esto se concluye que las concepciones incluyen las creencias y en este caso se podría hablar de concepciones de tipo subjetivo, que obedecen a procesos mentales construidos y establecidos que son además epistemológicos ya que obedecen a un conocimiento sobre la formación disciplinar o la naturaleza de la enseñanza de las matemáticas.

En el caso de *la relación entre concepciones y creencias* de acuerdo con Ponte (1994) configuran parte del conocimiento, y en este sentido, las creencias son certezas descendientes de vivencias o inventiva propia, muy a diferencia de las concepciones, siendo estas la moldura organizacional de los conceptos involucrados en procesos de cognición que intervienen al momento de realizar una actividad de cualquier naturaleza.

Por otro lado, la *resolución de problemas* ha tenido como fin primordial que los estudiantes aprendan las matemáticas a partir de esta competencia, las reformas educativas a través de los estándares por competencias ponen como telón de fondo la resolución de problemas para que un estudiante logre ser matemáticamente competente. Y es debido a esto que, gran parte de las investigaciones en Educación Matemática llevadas a cabo en diferentes lugares del mundo, optan la resolución de problemas como estrategia para el aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, según Stanic y Kilpatrick (1989) afirman que el término "resolución de problemas (RP)" se ha convertido en un slogan que acompañó diferentes **concepciones** sobre qué es la educación, qué es la escuela, qué es la matemática, por qué debemos enseñar matemáticas en general, y la **resolución de problemas** en particular. De acuerdo con esto la RP ha adoptado diferentes significados de acuerdo con el uso que se les ha dado:

- *Resolver problemas como contexto:* vehículo para enseñar matemáticas, generar motivación, y práctica.
- *Resolver problemas como habilidad:* rutinarios, no rutinarios, y técnicas de resolución como contenido.
- *Resolver problemas es "hacer matemática":* optar que el objetivo de los matemáticos es resolver problemas y que la matemática consiste en problemas y soluciones (Polya, 1954).

En estudios como Santos-Trigo (2008) se reconoce la presencia de múltiples formas para analizar y legitimar el impacto de ligar la resolución de problemas con la construcción del conocimiento matemático. Es así como, *Las concepciones que tienen los profesores sobre la RP,* la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pueden estar ligadas a los mismos significados. Por ello, estas concepciones pueden jugar un papel fundamental a la hora de cómo se tiene interiorizados los conceptos de ejercicio, problema en matemáticas, y situaciones problema.

Metodología

En el caso de esta investigación, es un estudio centrado en el ámbito de investigación denominado enseñanza, específicamente en la línea formación de profesores de contexto universitario, de corte cualitativo interpretativo (Bisquerra, 2009), y que a partir de una *investigación etnográfica* tiene como propósito conocer una realidad educativa (Murillo y Martínez, 2010) de los elementos matemáticos que configuran el Cálculo en el marco del Programa de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Quindío - Colombia.

Para (Woods, 1987), etimológicamente el vocablo etnografía deriva del griego “ethnos” (tribu, pueblo) y de “grapho” (yo escribo) y se emplea para exponer la “detallar el modo de vida de un grupo de individuos”, y de esta manera ratificar el nivel de conciencia que las personas asignan a sus conductas, sus pensamientos, y el entorno en el cual se desenvuelven.

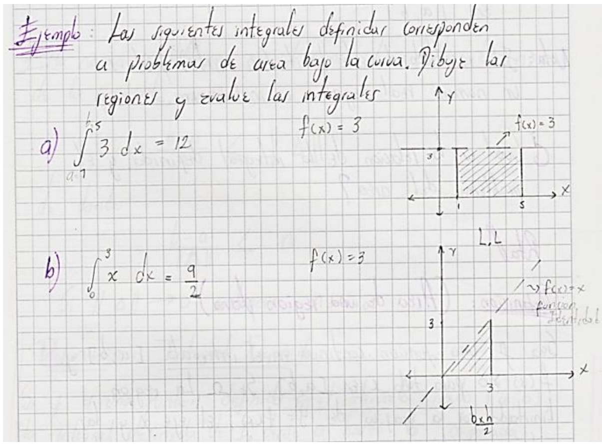
En este sentido, se plantea una investigación de tipo cualitativa, debido a que está orientada a la comprensión, pues su objetivo es describir e interpretar la realidad educativa desde su interior; y tiene que ver con la forma cómo los estudiantes comprenden/construyen los conceptos de: límite, derivada, e integral definida, mediante el planteamiento y resolución de problemas y el papel que la RP juega en la enseñanza y aprendizaje en estudiantes de tercer año de Licenciatura de Matemáticas de la Universidad del Quindío. Para ello se llevaron a cabo registros del que hacer de dos profesores en un periodo de 4 meses por medio de la observación en el aula, revisión de materiales (preparadores, talleres), y apuntes de los estudiantes; esto permite dar explicaciones de la práctica escolar estudiada a la luz de fundamentos teóricos realizados con anterioridad que nos posibilita concluir.

Resultados

Esta sección se divide en dos momentos; en primer lugar, una secuencia de apuntes de clase elaborados por un estudiante de Cálculo Integral donde se emplea la RP *como contenido*. En segundo lugar, se muestra un problema de área bajo la curva planteado como preámbulo para encaminar el aprendizaje de la integral definida, es decir, se emplea la RP *como contexto.*

RP como contenido:

Figura 1: El profesor ha expuesto la definición de integral definida y plantea la siguiente pregunta: ¿Cuál es la relación de la integral definida y el problema del área? A la cual responde con la definición de "Área de una región plana"



.

Figura 1. Apuntes de clase estudiantes

Figura 2: Se plantean ejemplos para hallar el "área bajo la curva", los cuales el profesor llama "problemas". Para este caso las regiones forman un rectángulo y un triángulo rectángulo respectivamente, relacionando el área de estas superficies conocidas con la solución de la integral.

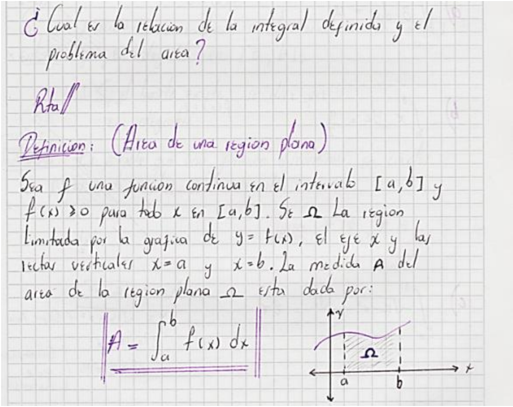
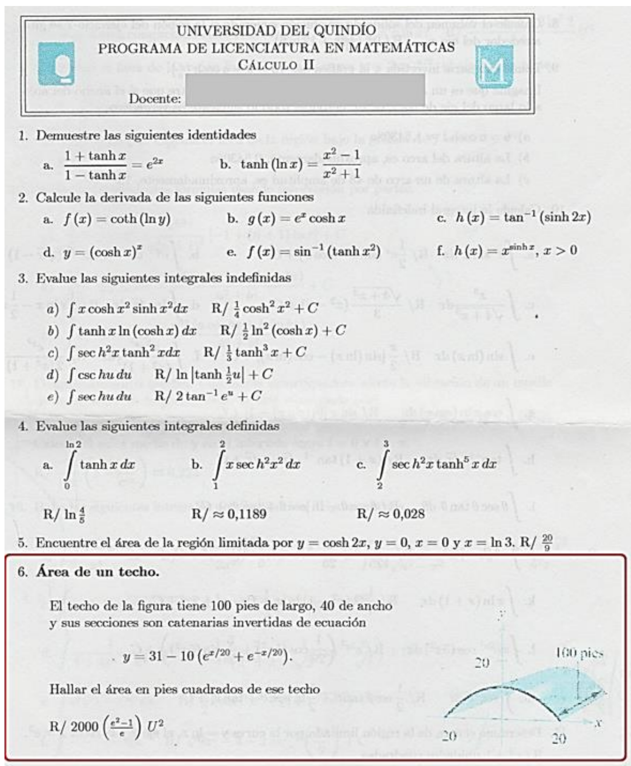


Figura 2. Apuntes de los estudiantes

Después de exponer el teorema fundamental del cálculo y resolver algunos ejercicios en clase, el profesor realiza una “aplicación” que llama “problemas de áreas”, esta aplicación es seguida por una definición de “área entre dos curvas”.

Figura 3: El profesor al finalizar la clase entrega un taller congruente con lo evidenciado en los apuntes. En la figura 3 se encuentra resaltado con rojo un problema (el área de un techo relacionada con una curva catenaria), este se encuentra al final de una serie de ejercicios de integración.



UNIVERSIDAD DEL QUINDÍO
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
CÁLCULO II

Docente:

1. Demuestre las siguientes identidades
   a. $\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}=e^{2x}$ b. $\tanh(\ln x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$
2. Calcule la derivada de las siguientes funciones
   a. $f(x)=\coth(\ln y)$ b. $g(x)=e^x\cosh x$ c. $h(x)=\tan^{-1}(\sinh 2x)$
   d. $y=(\cosh x)^x$ e. $f(x)=\sin^{-1}(\tanh x^2)$ f. $h(x)=x^{\sinh x}$, $x>0$
3. Evalue las siguientes integrales indefinidas
   a) $\int x\cosh x^2 \sinh x^2 dx$ R/ $\frac{1}{4}\cosh^2 x^2+C$
   b) $\int \tanh x \ln(\cosh x)\,dx$ R/ $\frac{1}{2}\ln^2(\cosh x)+C$
   c) $\int \sec h^2 x \tanh^2 x dx$ R/ $\frac{1}{3}\tanh^3 x+C$
   d) $\int \csc hu\,du$ R/ $\ln\left|\tanh\frac{1}{2}u\right|+C$
   e) $\int \sec hu\,du$ R/ $2\tan^{-1}e^u+C$
4. Evalue las siguientes integrales definidas
   a. $\int_0^{\ln 2}\tanh x\,dx$ b. $\int_1^2 x\sec h^2x^2\,dx$ c. $\int_2^3 \sec h^2 x\tanh^5 x\,dx$
   R/ $\ln\frac{4}{5}$ R/ $\approx 0{,}1189$ R/ $\approx 0{,}028$
5. Encuentre el área de la región limitada por $y=\cosh 2x$, $y=0$, $x=0$ y $x=\ln 3$. R/ $\frac{20}{9}$
6. **Área de un techo.**

   El techo de la figura tiene 100 pies de largo, 40 de ancho y sus secciones son catenarias invertidas de ecuación

   $$y=31-10\left(e^{x/20}+e^{-x/20}\right).$$

   Hallar el área en pies cuadrados de ese techo

   R/ $2000\left(\frac{e^2-1}{e}\right)U^2$

Figura 3. Taller preparador

RP como contexto (Vehículo para el aprendizaje):

El profesor inicia su clase planteando la siguiente situación problema:

Consumo de energía eléctrica: La Figura 4 muestra el consumo de energía continuo de una vivienda promedio entre la 1 de la mañana y las 12 de la tarde.

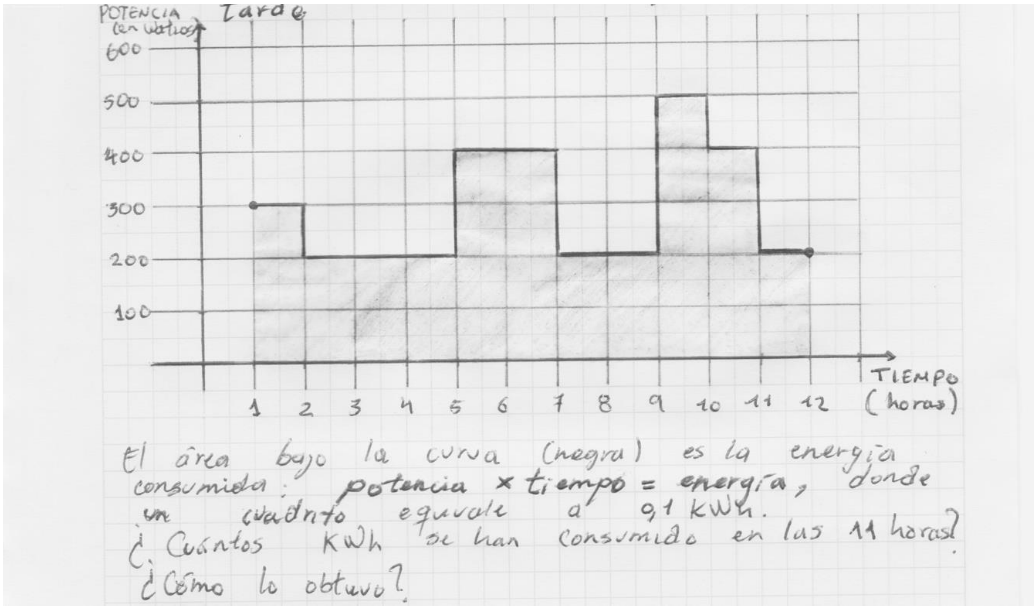


Figura 4. Preparador del profesor

Figura 5: Uno de los estudiantes da solución al problema de dos maneras; A) sumando el área de cada uno de los rectángulos formados verticalmente y B) sumando una a una el área de los cuadros bajo la “curva” dada.

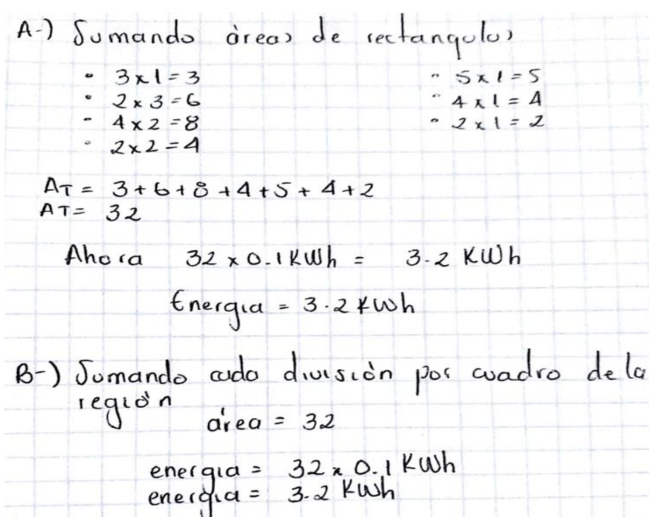


Figura 5. Apuntes de los estudiantes

Conclusiones

De acuerdo con los resultados podemos concluir que los profesores dan significado a la resolución de problemas como:

Contenido: Poseen una concepción en la cual un problema que involucre diferentes conceptos (objetos matemáticos) es incluido al final de una unidad o tema, como paso del lenguaje verbal al simbólico; para este caso, la integral definida y el uso de curvas catenarias. Esto sitúa la RP como habilidad de acuerdo con lo avizorado por Stanic y Kilpatrick (1989), además de ello no se evidencian situaciones problémicas en contexto para el desarrollo de la unidad.

Metodología: *El* planteamiento y resolución de problemas es utilizado como vehículo para el aprendizaje, siendo este una introducción al concepto creando un debate positivo acerca de las herramientas matemáticas disponibles para solucionar situaciones propias del contexto, además de propiciar la reflexión por parte del estudiante sobre la importancia de los elementos matemáticos que configuran el Cálculo en escenarios propios de la cotidianidad humana. A partir de ello podemos evidenciar que los profesores que acuden a estas situaciones tienen una visión de acuerdo con Polya (1954) donde el objetivo de los matemáticos es resolver problemas y que la matemática consiste en problemas y soluciones.

Finalmente es importante reconocer la trascendencia que obtienen los pensamientos del profesor en su praxis pedagógica, puesto que la conducta y comportamiento del profesional proviene de una historia de vida y por lo tanto su formación y aprendizaje también. Por ello es significativo que los programas educativos tengan en cuenta aspectos como las concepciones, las creencias, actitudes, posturas, hábitos y la realidad del docente, como variables que intervienen en el desarrollo de la práctica educativa al igual que la planificación de la misma (Ezpeleta, 2004).

Referencias bibliográficas

Bisquerra, R. et al. (2009). *Metodología de la investigación educativa*. Barcelona, España: Editorial La Muralla, 2da edición. ISBN: 978-84-7133-748-1

Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique.

Erazo, H. J., y Aldana, B. E. (2015). Sistema de creencias sobre las matemáticas en los estudiantes de educación básica. Praxis, 11, 163-169.

Ezpeleta, J. (2004). Innovaciones educativas. Reflexiones sobre los contextos para su implementación. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 9*(21), 403-424.

Flores, P. (1998). Libro Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Universidad de Granada, departamento de didáctica de la matemática, España. (pp. 30).

Gil Cuadra, F y Rico Romero L. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las ciencias*, *21*(1), 27-47.

Murillo, J y Martínez, C (2010). Investigación etnográfica, métodos de investigación educativa. pp. 09

Polya, G. (1954). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.

Ponte J. P. (1994). Knowledge, beliefs and conceptions in mathematics teaching and learning. En L. Bazzini (ed.), *Theory and practice in mathematics education. Proceedings of the Fifth internacional conference on systematic cooperation between theory and practice in mathematics education*. Grado, Italia.

Santos-Trigo, M. (2008). *La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica*. Memorias del seminario de Resolución de Problemas: 30 años después del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, septiembre 2008.

Shulman, L. S. (1986). "Paradigms and Research Programs for the Study of Teaching". En M. C. Wittrock (Ed.). *Handbook of Research on Teaching*. New York: Macmillan, 3ra. ed., p. 3-36.

Valle Espinosa, M. C., Juárez Ramírez, M. A. y Guzmán Ovando, M. E. (2007). Estrategias generales en la resolución de problemas de la olimpiada mexicana de matemáticas. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 9*(2). http://redie.uabc.mx/vol9no2/contenido-valle.html

Woods, P. (1987). *La escuela por dentro*. La etnografía en la investigación educativa. Barcelona: Paidós.

ANÁLISIS DIDÁCTICO DE PRÁCTICAS MATEMÁTICAS DE AULA UTILIZANDO "THE KNOWLEDGE QUARTET"

Mario Martínez, Edith Arévalo
Centro Regional de Formación Docente e Investigación Educativa. (México)
Escuela Normal Miguel F. Martínez. (México)
mario.martinez@cresur.edu.mx, edith.arevalo@enmfm.edu.mx

RESUMEN: El presente reporte integra resultados preliminares de una investigación que utiliza el análisis didáctico "experto" de clases de matemáticas como estrategia para el desarrollo profesional de los profesores de educación básica; evaluando asimismo su impacto. Se han recuperado videograbaciones realizadas durante dos años consecutivos de clases de matemáticas en grupos de sexto grado de primaria y primero de secundaria donde se aborda, ente otros contenidos, el tema de la proporcionalidad; haciendo uso del modelo de conocimiento profesional denominado el Cuarteto del Conocimiento en el análisis didáctico de las mismas. El proyecto ha generado recursos valiosos para el desarrollo de la competencia matemática y didáctica de los profesores en servicio.

Palabras clave: proporcionalidad, análisis didáctico, cuarteto del conocimiento

ABSTRACT: This report integrates preliminary results of a research that use a specialized didactic analysis of math lessons as a strategy for the professional development of basic school teachers, and evaluate its impact as well. Video recordings have been collected in sixth-grade and first- year secondary school math classes during two years. They include, among other contents, the proportionality, by using the professional knowledge model called Knowledge Quartet, for their didactic analysis. The project has produced resources for the development of practicing teachers' mathematical and didactic competence.

Key words: proportionality, didactic analysis, knowledge quartet

Introducción

Desde hace dos años hemos trabajado en un proyecto de investigación que tiene como objetivo general desarrollar el conocimiento profesional de estudiantes para profesores de educación primaria y profesores en servicio, a partir del análisis didáctico de clases.

Entendemos que, aprender a mirar las prácticas matemáticas escolares, a problematizar, reflexionar y explicar en torno a éstas, es fundamental en el proceso de aprender a enseñar matemáticas. Asimismo, estamos conscientes que los nuevos escenarios sociales requieren de una formación inicial y continua de mayor calidad; que implique la actualización y renovación permanente.

En el presente artículo damos cuenta del uso del modelo The Knowledge Quartet para analizar una secuencia de actividades en el tratamiento didáctico del tema de *Proporcionalidad* en un grupo de sexto grado de educación primaria, con la intención de que dicho análisis sea utilizado posteriormente como insumo para diseñar, implementar y valorar un trayecto de formación profesional sobre el aprendizaje y enseñanza de la proporcionalidad.

Analizar el conocimiento profesional que un profesor activa en la gestión de la clase de matemáticas, brinda sin duda, la oportunidad de reflexionar, explicar y actuar sobre el proceso de aprendizaje de sus estudiantes y sobre su propio proceso de enseñanza. Así mismo, la competencia en el análisis didáctico es una competencia profesional que los formadores de formadores han de desarrollar a fin de que puedan promover su desarrollo en los profesores en servicio y en los estudiantes para profesores.

El conocimiento profesional para enseñar matemáticas

Entre los modelos que se han desarrollado sobre el conocimiento profesional que requieren los profesores para enseñar matemáticas resaltamos por su relevancia, conforme al objetivo de nuestro estudio, los siguientes: a) El modelo denominado MKT (Mathematical Knowledge for Teaching) desarrollado por el grupo de investigación que coordina Deborah Ball en la Universidad de Michigan y, b) El modelo denominado The Knowledge Quartet (Cuarteto del Conocimiento) desarrollado por un grupo de investigadores encabezados por Tim Rowland, en Londres.

La perspectiva denominada Mathematical Knowledge for Teaching (Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Blunk, Charambous, Lewis, Phelps, Sleep, y Ball, 2008) intenta dar cuenta del conocimiento matemático que requieren los profesores cuando enseñan matemáticas en clase. Es una perspectiva teórica con una base práctica desarrollada a partir del análisis de las demandas que implican las tareas de enseñanza en torno a esta asignatura, en el contexto áulico. Desde el marco del MKT, el conocimiento matemático del profesor tiene un papel crucial en la enseñanza. Los profesores necesitan conocer matemáticas de forma útil para darle sentido al trabajo con sus estudiantes y seleccionar eficaces formas de representar las matemáticas escolares para hacerlas más accesibles.

El modelo The Knowledge Quartet (Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005) otorga mayor atención a realizar una caracterización más dinámica del conocimiento del profesor que se despliega en el aula. Su actividad central va mucho más allá de la transmisión de saberes, definiciones y algoritmos. Bajo las directrices de los nuevos enfoques didácticos, le corresponde diseñar y proponer secuencias de situaciones problemáticas adecuadas, con la finalidad de favorecer la construcción de los aprendizajes esperados en torno a los contenidos matemáticos escolares. Este modelo considera cuatro dimensiones o categorías del conocimiento profesional que el profesor requiere, para enseñar matemáticas. Dimensiones que a continuación se describen (Rowland, 2013):

Foundation: Conocer y comprender las matemáticas per se y la pedagogía específica de la misma; creencias acerca de su naturaleza, el propósito de la educación matemática y las condiciones bajo las cuales los estudiantes aprenderán matemáticas de forma más efectiva.

Transformation: Tener la capacidad para la presentación de los conceptos matemáticos en forma de analogías, ejemplos, explicaciones y demostraciones. Esta capacidad permite a los profesores seleccionar ejemplos y representaciones matemáticas adecuadas, seleccionar y utilizar materiales instruccionales idóneos que les posibiliten hacer demostraciones para explicar un procedimiento.

Contingency: Habilidad de dar respuestas convincentes, razonadas y bien informadas a eventos imprevistos y no planificados que ocurren en la clase de matemáticas. Permite al profesor hacer los ajustes necesarios a su plan de trabajo para responder adecuadamente a las ideas y concepciones de los estudiantes, usando oportunidades/incidentes que se presentan en la clase para favorecer mejores aprendizajes.

Connection: Implica el conocimiento sobre la secuencia del material de instrucción y una conciencia de las relativas demandas cognitivas de diferentes temas o tareas en la clase de matemáticas. Permite a los profesores anticipar la complejidad de los objetos o procesos matemáticos, tomar decisiones sobre la secuencia de los contenidos o las tareas; hacer conexiones entre conceptos o procedimientos y el reconocimiento de propiedades conceptuales.

Los modelos de conocimiento profesional como Mathematics Knowledge for Teaching y The Quartet Knowledge, tienen en común en mayor o menor medida la especificidad otorgada al conocimiento matemático para la enseñanza, lo cual marca una diferencia con otras investigaciones de carácter general que diferencian únicamente entre un conocimiento didáctico general y un conocimiento de la matemática como disciplina científica, en particular (Badillo, Figueiras, Font y Martínez, 2013).

■ Objetivo y metodología

Como hemos referido en párrafos anteriores, estamos trabajando en un proyecto de investigación que tiene como objetivo principal desarrollar el conocimiento profesional de estudiantes para profesores de educación primaria y profesores en servicio, a partir del análisis didáctico de clases con la finalidad de favorecer la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares. Para ello, hemos recuperado videograbaciones de clases en la asignatura de Matemáticas en varios grupos, sobre tópicos como numeración, operaciones aritméticas, geometría, medición, proporcionalidad, entre otros; realizados en el contexto de un estudio sobre los problemas de la transición matemática de los estudiantes, al pasar del nivel educativo de primaria al de secundaria, en un grupo de escuelas de la ciudad de Barcelona, España.

Para el caso que nos ocupa, recuperamos particularmente las videograbaciones dedicadas al desarrollo del tema de *Proporcionalidad* (siete sesiones de clase de una hora y media cada una). Posteriormente se realizó la transcripción a detalle de las videograbaciones, y se identificaron y analizaron los episodios de clase en los que de manera implícita o explícita la profesora del grupo desplegaba algún tipo de conocimiento matemático para la enseñanza, tomando como referente la categorización del modelo The Knowledge Quartet. El análisis se centró en la secuencia de las actividades desarrolladas por la profesora, particularmente en la manera en las que se puso en juego y articularon las dimensiones del conocimiento profesional propuesta en el modelo en cuestión. También se observó con sumo cuidado el trabajo de los alumnos, ya que constituye un referente fundamental como efecto de lo trabajado por la profesora en los episodios de cada sesión, posibilitando comprender su toma de decisiones ante la dinámica generada en las mismas.

Análisis didáctico del desarrollo del tema de proporcionalidad

Lo comunicado en los siguientes párrafos constituye un primer nivel de análisis didáctico del desarrollo del tema de Proporcionalidad en el grupo de sexto de primaria observado con base en las cuatro dimensiones propuestas por el modelo The Knowledge Quartet. Este primer nivel de análisis didáctico está integrado por la identificación y descripción de algunos episodios de clase en los que de manera implícita o explícita se pone en juego alguna dimensión del modelo (Transformation, Contingency, Connection, Foundation).

Transformation

El análisis de la secuencia didáctica desarrollada por la profesora permite identificar el uso de representaciones, ejemplos y contraejemplos para "enseñar" el concepto de proporcionalidad. En algunos casos la profesora presenta la información en una tabla de doble entrada y en otros de manera verbal o como problema "de enunciado" escrito. Así mismo utiliza algunos ejemplos y contraejemplos de situaciones de proporcionalidad.

Ejemplos y representaciones

a) Tablas de proporcionalidad

La profesora plantea a los estudiantes situaciones diversas ("problemas") de proporcionalidad en las que hay que relacionar dos magnitudes: número de pelotas/precio en euros; número de panes/huevos que se requieren para su elaboración; número de entradas para el cine/precio; número de barcos/viajeros; kilo de manzanas/precio por kilo; número de personas/cantidad de ingredientes de una receta; número de helados/precio. Un ejemplo de este tipo de representación se presenta en la Tabla 1.

Tabla 1. Representación de problema de proporcionalidad

No. de pelotas	1	2	3	4	10
Precio en euros	5	10			

La representación de los datos de un problema en forma de tablas de doble entrada, es la más recurrente como recurso para hacer visible a los estudiantes la proporcionalidad entre los datos del problema. En muchas situaciones prácticas se establecen relaciones de proporcionalidad entre las cantidades de dos magnitudes, como en estos casos: cantidad de pelotas con su respectivo precio, o número de barcos con el número de personas a bordo.

b) Representación de operadores multiplicativos

Adicionalmente a la representación de los datos de los problemas de proporcionalidad en una tabla de doble entrada, también se representan los operadores multiplicativos que hacen pasar de una dimensión a la otra como en el siguiente ejemplo.

Tabla 2. Representación de operadores multiplicativos

x 5

No. pelotas	1	2	3	4	10
Precio en €	5	10	15	20	50

:5

c) Problema de enunciado verbal o escrito

Algunas de las situaciones “problema” planteadas en la clase se realizan de manera verbal, sin escritura de por medio, tanto en su planteamiento como en su resolución. En otros casos el problema se presenta de manera escrita. Los siguientes ejemplos ilustran estos dos casos.

Problema de enunciado verbal

Profesora: En cambio si yo tengo un kilo de manzanas que vale 2 euros ¿Cuánto costarán 2 kilos?

Alumnos: Cuatro

Profesora: Cuatro, y tres kilos… valdrán seis…Son magnitudes que van aumentando de manera proporcional

Problema de enunciado escrito

Ingredientes:

260g de macarrones

160g de chorizo

120g de queso rayado

200g de tomate frito

Calcula la receta para 6 personas. Estos cuatro ingredientes se necesitan para hacer los macarrones para cuatro personas. Si fuera para 8 personas ¿Cuánto se necesitaría?

Contraejemplos

Además de los ejemplos, la profesora presenta y pide a sus estudiantes que propongan contraejemplos de relaciones de proporcionalidad entre dos magnitudes. Surgen propuestas que relacionan edad/peso en kg; número de partidos de futbol/número de goles. Para estos casos, concluyen profesora y estudiantes que por ejemplo al dividir la edad entre el peso no se obtiene la misma constante de proporcionalidad, lo que quiere decir que estas dos cantidades no son proporcionales.

Contingency

Identificamos diversas situaciones en las que la profesora aprovecha o desaprovecha situaciones contingentes para profundizar en el estudio del tema de Proporcionalidad. A continuación, presentamos un ejemplo.

Profesora: Si dos pelotas valen 6 euros; 5 pelotas ¿Cuánto valdrán? (Escribe en pizarrón)

2	6
5	?

Alumnos: catorce… quince

Profesora: ¿Cómo le hago?

*Alumna**:*** Si 2 pelotas valen 6 euros, dividir 6 entre 2 y….

*Profesora***:** (Interrumpe la intervención de la alumna) Una manera es, si sabemos que dos pelotas valen 6 euros, averigüemos lo que vale una pelota ¿la mitad verdad?, 3 euros (escribe en el pizarrón 1-3 euros)

*Profesora**:*** Entonces ¿Cuánto costarán 5 pelotas?

Alumnos: Quince

Observamos cómo la profesora en algunos momentos atiende o retoma las respuestas de los estudiantes y en otras no las considera (continúa expresando sus ideas como si los estudiantes no hubieran aportado alguna resolución al respecto). Los alumnos han ofrecido respuestas intuitivas, estimativas (*catorce, quince*) al planteamiento que se les propone; situación que es desaprovechada por la profesora para explorar/conocer el razonamiento matemático de sus estudiantes. Aún más, una alumna expresa haber encontrado un procedimiento para saber el valor unitario que le posibilitaría posteriormente encontrar el valor para cinco pelotas. Lo empieza a comunicar ("*Si 2 pelotas valen 6 euros, dividir 6 entre 2");* sin embargo la profesora no la atiende.

Connection

En la clase identificamos el establecimiento de conexiones del tema de proporcionalidad con el de fracciones equivalentes, razón, con la regla de tres simple y con los productos cruzados. A continuación, un ejemplo en el que se conecta el concepto de proporcionalidad con el de fracciones equivalentes.

La profesora dibuja en el pizarrón la siguiente tabla de proporcionalidad:

1	2	5	6	
2				16

Profesora: Si uno es a dos… ¿qué será aquí? (señalando la segunda columna).

Alumnos: 4

Profesora: Y aquí (señalando la tercera columna 10)… y aquí (señalando la cuarta columna)

Alumnos: 10, 12

Profesora: ¿Y aquí? (señalando la quinta columna parte superior)

Alumnos: 8

Profesora: ¿Qué les recuerda esta tabla? Escribe en el pizarrón 1/2, 2/4

Alumnos: Las fracciones equivalentes

Profesora: A las fracciones equivalentes porque ¿cómo hago para pasar de esta fracción a esta otra? (señala 1/2 a 2/4)

Alumnos: Multiplicar

Profesora: Multiplicar por dos. Se multiplica el numerador y el denominador por dos

1 x (2)	2
2 x (2)	4

Profesora: La proporcionalidad la relacionaremos con las fracciones equivalentes.

En este fragmento de clase la profesora relaciona la proporcionalidad con las razones y las fracciones. Intenta hacer visible para los estudiantes el operador multiplicativo que hace pasar de una columna a la otra; intenta hacer visible que las relaciones de proporcionalidad están representadas por fracciones equivalente, en las que 1/2 = 2/4= 5/10 = 6/12 = 8/16.

Foundation

En general el conocimiento matemático y didáctico del profesor está presente en las demás dimensiones (transformaciones, contingencia, conexiones). En teoría un profesor con un conocimiento profundo de los fundamentos matemáticos y didácticos tendrá mayores recursos para realizar transformaciones del conocimiento para ser aprendido por sus estudiantes, tendrá mayor capacidad para responder a los eventos imprevisibles en el aula y para establecer conexiones matemáticas; ya que bajo los enfoques actuales, la enseñanza debe ser entendida como la creación de las condiciones más favorables que producirán la apropiación del conocimiento en los estudiantes (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez, Garza, 2008).

Con respecto al tratamiento de este tema en particular, los fundamentos matemáticos que pueden ser identificados en las clases de la profesora, tenemos:

- Definición de proporcionalidad
- Definición de magnitud
- Ejemplos y contraejemplos de situaciones de proporcionalidad
- Relación entre procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad directa como búsqueda del valor unitario y regla de tres simple
- Relación entre razones de proporcionalidad y fracciones equivalentes
- K es llamada la constante o factor de proporcionalidad.
- Planteamiento y resolución de problemas como eje para el aprendizaje del tema de proporcionalidad directa

Conclusiones

El análisis didáctico de clases de Matemáticas a través de las dimensiones de The Knowledge Quartet, es una herramienta útil que permite identificar el conocimiento matemático y didáctico que el profesor despliega en la clase de matemáticas. Constituye una herramienta conceptual y metodológica favorable para aprender a “mirar con sentido” el tratamiento de contenidos matemáticos en las clases que desarrollan los profesores (Mason, 2002; Fernández, Llinares y Valls, 2012).

El trabajo que aquí se presenta, lo valoramos como una aportación al campo de la formación inicial y continua de los profesores de preescolar, primaria y secundaria. Nos permite identificar la riqueza del conocimiento profesional implícito o explícito desplegado por la profesora en la clase, haciendo visibles las oportunidades que se generan para el aprendizaje matemático del grupo y de su propio quehacer docente (SEP, 2011).

Asimismo, este tipo de estudio constituye una aporte para la investigación sobre el conocimiento profesional del profesor desde la práctica; al mismo tiempo que como señalan Badillo et al. (2013), favorece el desarrollo de competencias docentes tanto de estudiantes para profesores como para profesores en servicio, para cuya implementación se requiere la selección de episodios de aula; efectuar un análisis de las prácticas profesionales observadas en estos episodios y del conocimiento matemático - didáctico activado en dichas prácticas; y diseñar un ciclo formativo en el que se utilicen estos episodios y el análisis realizado, e implementar estos ciclos formativos en la formación inicial y/o permanente de profesores de matemáticas.

Referencias bibliográficas

Badillo, E., Figueiras, L., Font, V. y Martínez, M. (2013). Visualización gráfica y análisis comparativo de la práctica matemática en el aula. *Enseñanza de las ciencias*, *3*(31), 207-225.

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Cordero, F., Alanís, J.A., Rodríguez, R.A., Garza, A. (2008). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: Trillas-ITESM.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through online discussions. *ZDM. Mathematics Education*, *44*(6), 747-759.

Hill, H., Blunk, M., Charambous, Y., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L. y Ball, D. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction. An Exploratory Study. *Cognition and Instruction, 26*(4), 430-511.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice*. The discipline of noticing. London: Routledge-Falmer.

Rowland, T. (2013). The knowledge quartet: the genesis and application of a framework for analysing mathematics teaching and deepening teachers' mathematics knowledge. *Sisyphus-Journal of Education*, *1*(3), 15-43.

Rowland, T., Huckstep, P. & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255-281.

SEP (2012). Programa de Estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Primaria, Sexto grado. México: SEP.

CREENCIAS Y DISPOSICIONES DE LOS FORMADORES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN CHILE RESPECTO DEL ENFOQUE DE FORMACIÓN POR COMPETENCIAS Y LOS CRITERIOS DE EVALUACIÓN ASOCIADOS

Alonso Quiroz Meza
Universidad Católica Silva Henríquez. (Chile)
aquiroz@ucsh.cl

RESUMEN: Este reporte analiza las creencias y disposiciones de los formadores de profesores de matemáticas en Chile hacia el enfoque de formación por competencias en el ámbito evaluativo. En el marco de la Teoría Fundamentada, el estudio se centra en las competencias matemáticas específicas. Se aplicó un cuestionario a 56 formadores de profesores, determinándose mediante un análisis factorial, las componentes principales a ser analizadas. Los resultados indican que los formadores de profesores de matemáticas tienen un conocimiento aceptable y valoran positivamente el enfoque de formación por competencias, no obstante, la implementación de estrategias evaluativas asociadas a este enfoque, que realizan dichos formadores, es deficiente o nula.

Palabras clave: competencias específicas – criterios de evaluación

ABSTRACT: This report analyses the beliefs and dispositions of the Mathematics teachers' trainers in Chile towards the competence training approach in the sphere of evaluation. According to the stated theoretical framework, the research is focused on specific mathematic competences. A questionnaire was applied to 56 teachers' trainers, determining the main components to be analyzed by using a factorial analysis. The obtained results show that Mathematics teachers' trainers have an acceptable knowledge and they positively evaluate the competence-based training approach. However, the implementation of evaluation strategies based on this approach that trainers put into practice is deficient or null yet.

Key words: specific competences, evaluation criteria

El problema

A partir del año 2012 con la puesta en marcha del proyecto INICIA el gobierno de Chile decidió generar estándares orientadores para la formación inicial de los profesores de matemáticas de educación media. Dichos estándares están formulados bajo la lógica de competencias. Así mismo, las instituciones formadoras de docentes comenzaron a formular sus programas de formación por competencias, determinando en primer término los perfiles profesionales de egreso para luego generar las matrices de competencias, los bloques temáticos y las asignaturas que contribuyen al logro de las mismas. Sin embargo, como lo señala el Centro Interuniversitario de Desarrollo (2009), “De hecho, las universidades se han encontrado con diversas dificultades en el desarrollo de modelos curriculares actualizados. Una de ellas es la evaluación de los aprendizajes acumulativos o longitudinales asociados a las competencias” (p. 11)

Existen estudios y mediciones internacionales como los de la OCDE que se refieren a la evaluación de competencias matemáticas básicas, sin embargo, la revisión de la literatura informa que no existen estudios que contribuyan al diseño de estrategias para evaluar competencias matemáticas específicas en la formación de profesores de matemáticas de educación media. Por tal razón, se hace necesario emprender una investigación que dé cuenta de las creencias y disposiciones de los formadores de profesores de educación media en matemáticas hacia el enfoque de formación por competencias y los criterios de evaluación asociados.

Marco teórico

Los trabajos de Gardner (2000) proporcionan evidencias de la importancia de la selección, integración y movilización de saberes a la hora de un buen desempeño laboral. En tal sentido, el enfoque de formación por competencias se diferencia del enfoque clásico por el tipo de mirada que se da a los procesos, incorporando a la mirada analítica, una visión más amplia del aprendizaje, en donde el protagonismo de los estudiantes pasa a ser lo relevante.

El concepto de competencia tiene una amplia gama de definiciones, las cuales ponen énfasis en determinados aspectos del concepto: un primer enfoque orientado a las empresas cuyo centro son las tareas a desarrollar, un segundo enfoque orientado a la excelencia profesional cuyo centro es el perfil a lograr y un tercer enfoque orientado a la preparación del ser humano para la vida, cuyo centro es la visión holística y compleja (Segura, 2008).

Uno de los roles esenciales del formador de profesores es otorgar oportunidades para que sus estudiantes aprendan a ser docentes o más específicamente aprendan a enseñar (Avalos, 2004), por tanto, la creencia de que para ser buen formador basta que se sepa muy bien lo que se tiene que enseñar, esta lo más lejos de la realidad actual (Vaillant, 2002).

Respecto de la evaluación de competencias, cabe señalar que ésta requiere planificar un sistema de evaluación que permita vincular las competencias con los indicadores y éstos con sus respectivas evidencias (Villa & Poblete, 2007).

Por otra parte, si convenimos en que una de las capacidades relevantes que se quiere desarrollar en los estudiantes es la de poder autorregularse, estaremos de acuerdo en que la evaluación de competencias debiera incluir esta perspectiva. En efecto, una evaluación de competencias tendría que incluir una autoevaluación individual y una compartida como lo señalan varios autores, a objeto de reflejar la experiencia personal y la reflexión que el estudiante hace sobre ella (Sánchez & Ruiz, 2011).

En síntesis, la adopción de la evaluación de competencias requiere ser sistémica e incluir los aspectos curriculares y metodológicos correspondientes. Además, la evaluación de competencias constituye una mirada sintética de los aprendizajes, por lo que es necesario definir con toda claridad los criterios que se utilizarán al momento de su realización.

Diseño metodológico

A objeto de indagar acerca de las creencias y disposiciones de los formadores de profesores de matemáticas hacia el enfoque de formación por competencias, se elaboró un cuestionario validado por juicio de expertos y prueba piloto, el cual se aplicó a una muestra censal de 56 formadores a lo largo de todo Chile. El cuestionario constó de ocho ítems de caracterización, 16 de la dimensión “Enfoque de formación por competencias” y 19 de la dimensión “Criterios de evaluación asociados a competencias”. La aplicación del cuestionario fue *online* mediante Google Drive, entre los meses de junio y noviembre de 2015. Luego de la aplicación del cuestionario y con auxilio del software SPSS versión 20, se realizó un análisis de fiabilidad confirmatorio que dio como resultado un alfa de Cronbach de 0,771 como promedio de ambas dimensiones, lo cual es aceptable para un estudio de este tipo, es decir, los ítems del cuestionario tienen consistencia interna (George & Mallery, 2003).

A objeto de realizar la reducción de variables, mediante el software SPSS, se realizó un análisis factorial de correspondencias. Dicho análisis dio como resultado, considerando auto valores mayores a la unidad, la extracción de seis componentes principales. La medida de adecuación muestral de Káiser Meyer Olkin (KMO) arrojo el valor 0,615 y la prueba de esfericidad de Bartlett dio 245,03 con 120 grados de libertad y una significancia de 0,00 lo cual indica la recomendación de reducción de las variables iniciales consideradas en el estudio. Mediante el Método de Normalización Varimax con Káiser y luego de siete iteraciones, la rotación convergió en los valores que se muestran en la tabla 1:

Tabla 1. Salida de SPSS. Matriz de componentes rotados

	Componentes					
	1	2	3	4	5	6
VAENFOBJ	,892					
VACRIOBJ	,793					
VAENFAPR	,716					
VAENFEVA	,708					
IMCRISAL		,796				
IMCRIEVA	,317	,791				
IMCRIPLAN		,757				
COCRIDES			,791		,343	
VACRIAPR			,735			,368
COENFEVO			-,659		,328	
COENFINT				,750		
COENFDES				,746	,352	
IMENFPLA	,430			-,469	,416	
COCRIMOV					,808	
COENFMOV						,868
VACRIEVA	,397					,523

Las variables agrupadas que determinó el análisis factorial fueron las siguientes:

1.- Valoración de las Competencias respecto de los Objetivos

2.- Implementación de Criterios de evaluación por competencias

3.- Valoración de la evolución del desempeño.

4.- Conocimiento de la integración de saberes y el desempeño.

5.- Implementación de competencias y criterios para evaluarlas.

6.- Valoración de la evaluación para la movilización de saberes.

Por último, cabe destacar que cada una de las variables agrupadas se cruzó con las componentes de la caracterización de la muestra censal (tabla 2):

Tabla 2. Caracterización de la muestra censal

CARACTERISTICAS		%
GENERO	HOMBRES	66.07
	MUJERES	33.93
LUGAR DE TRABAJO	ZONA NORTE	32.50
	REGIÓN METROPOLITANA	45.00
	ZONA SUR	22.50
TITULO	SIN TÍTULO	22.50
	PROFESOR(A) DE MATEMÁTICAS	70.00
	PROFESOR(A) DE MATEMÁTICAS Y OTRA ESPECIALIDAD	7.50
GRADO	LICENCIADO EN EDUCACIÓN	7.50
	MAGÍATER EN EDUCACIÓN	12.50
	DOCTORADO EN EDUCACIÓN	5.00
	MAGÍSTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA	12.50
	OTRO	62.50
ASIGNATURA QUE IMPARTE	ALGEBRA	25.00
	CALCULO	20.00
	GEOMETRIA	15.00
	OTRA	40.00
ANTIGÜEDAD EN	MENOS DE 5 AÑOS	27.50
	ENTRE 5 Y 10 AÑOS	12.50

LA DOCENCIA	MAS DE 10 AÑOS	60.00
TIPO DE CONTRATO	POR HORAS	20.00
	MEDIA JORNADA	12.50
	JORNADA COMPLETA	67.50
	EN LOS ESTANDARES	22.50
	EN LA AUTORREALIZACIÓN	7.50
	EN LA INTEGRACIÓN DE SABERES	57.50

Resultados

Considerando las seis componentes principales que determinó el análisis factorial, el programa SPSS mostró los recuentos y porcentajes de la distribución de las opciones marcadas por los formadores. Dichos resultados se presentan en dos tablas. La primera, en donde se muestran los resultados generales y la segunda, en la que se desglosa cada variable de acuerdo a las características de la muestra.

Tabla 3. Resultados generales de cada variable agrupada

VARIABLES	PORCENTAJE
VALORACIÓN POSITIVA DEL ENFOQUE DE FORMACIÓN POR COMPETENCIAS	69.64%
IMPLEMENTACIÓN DE CRITERIOS DE EVALUACIÓN ASOCIADOS A COMPETENCIAS	26.9%
VALORACIÓN POSITIVA DE LA EVOLUCIÓN DEL DESEMPEÑO	94.64%
CONOCIMIENTO DE LA INTEGRACIÓN DE SABERES Y EL DESEMPEÑO	87.50%
IMPLEMENTACIÓN DE COMPETENCIAS	60.71%
VALORACIÓN DE LA EVALUACIÓN PARA LA MOVILIZACIÓN DE SABERES	85.71%

De acuerdo a los porcentajes señalados, podemos afirmar que donde hay mayor consenso entre los formadores, es en la valoración positiva de la evolución del desempeño, mientras que la implementación de criterios de evaluación asociados a competencias es realizada sólo por poco más de la cuarta parte de los formadores. Si consideramos las variables anteriores de acuerdo a las características de la muestra (tabla 4), tenemos una visión más pormenorizada de la distribución de respuestas en las componentes principales del análisis factorial.

Tabla 4. Porcentaje de formadores dentro de los porcentajes señalados en la tabla 3, que tienen la característica señalada (Sólo se consideraros porcentajes superiores al 40%.)

CARACTERÍSTICAS PREDOMINANTES	VALORACIÓN POSITIVA DEL ENFOQUE (69.64)	IMPLEMENTACIÓN DE CRITERIOS DE EVALUACIÓN (26.9)	VALORACIÓN POSITIVA DE LA EVOLUCIÓN DEL DESEMPEÑO (94.64)	CONOCIMIENTO DE LA INTEGRACIÓN DE SABERES Y EL DESEMPEÑO (87.50)	IMPLEMENTACIÓN DE COMPETENCIAS (60.71)	VALORAC. DE LA EVAL. PARA LA MOVILIZ. DE SABERES (85.71)
HOMBRES	42.8%		70.3%			
MUJERES				90%		57.9%
TÍTULO DE PROFESOR DE MATEMÁTICAS	48.2%					
ZONA SUR		46.2%			70%	
ZONA NORTE						93.3%
SIN FORMACIÓN ESPECIALIZADA EN EDUCACIÓN				57.14%		
CARACTERÍSTICAS PREDOMINANTES	VALORACIÓN POSITIVA DEL ENFOQUE (69.64)	IMPLEMENTACIÓN DE CRITERIOS DE EVALUACIÓN (26.9)	VALORACIÓN POSITIVA DE LA EVOLUCIÓN DEL DESEMPEÑO (94.64)	CONOCIMIENTO DE LA INTEGRACIÓN DE SABERES Y EL DESEMPEÑO (87.50)	IMPLEMENTACIÓN DE COMPETENCIAS (60.71)	VALORAC. DE LA EVAL. PARA LA MOVILIZ. DE SABERES (85.71)
MENOS DE CINCO O MÁS DE DIEZ AÑOS	64.2%				65.6%	87.5%

DE EXPERIENCIA DOCENTE						
JORNADA COMPLETA	46.4%					
ENFASIS EN LA INTEGRACIÓN DE SABERES	42.8%		94%		75%	93.8%

Se observa que la inmensa mayoría de quienes tienen conocimiento sobre la integración de saberes y el desempeño son mujeres. Del mismo modo, la mayor parte de quienes valoran positivamente la evaluación para movilizar saberes, son formadores que pertenecen a la zona norte. Además, se observa que la inmensa mayoría de quienes valoran positivamente la evolución del desempeño como la evaluación para la movilización de saberes, corresponden a formadores que ponen énfasis en la integración de saberes cuando se refieren al concepto de competencia.

Conclusiones

Los formadores que ponen énfasis en la integración de saberes al hablar de competencias son los que están mejor posicionados tanto para implementar competencias como para evaluar movilización de saberes. Además, valoran la evolución del desempeño y prefieren las competencias a los objetivos, razón por la cual, este indicador parece ser adecuado para detectar formadores con disposiciones positivas hacia el enfoque de formación por competencias. Estos formadores, al enfatizar la integración de saberes, indirectamente están sosteniendo que dicha integración la logran mejor las competencias que los objetivos, no obstante, en relación con la implementación de competencias Solar, Deulofeu & Azcárate, (2010) sostiene que se habla demasiado de competencias, lo que no se traduce en la práctica, en una formación orientada hacia el desarrollo de éstas. En efecto, los resultados del presente estudio muestran indicios de implementación del enfoque, sobre todo de parte de las mujeres formadoras, no obstante, dicha implementación es insuficiente.

Los formadores que imparten asignaturas que mezclan temáticas muestran una mejor disposición hacia el enfoque de formación por competencias, de lo cual podría deducirse que el diseño de asignaturas que integran temáticas favorece el desarrollo de competencias. Al respecto, Tardif (2011) sostiene que la flexibilidad y la adaptabilidad de la competencia justifican plenamente su movilización. Resulta esperanzador que más del 85% de los formadores valore la evaluación para movilizar saberes, sin embargo, no es claro si los formadores estan conscientes que lo clave en dicha movilización es la selección de los recursos a movilizar, de los cuales, los saberes son sólo una parte. Este aspecto merece ser indagado en profundidad.

Por último, los resultados obtenidos muestran que la implementación de criterios de evaluación asociados a competencias es insuficiente y si bien se valora la integración de saberes en la enseñanza de contenidos matemáticos, a juicio del autor, dicha valoración es intuitiva ya que por ejemplo la mayor parte de ellos no incluye en sus programaciones expectativas de desempeño en el lugar de trabajo.

■ Referencias bibliográficas

Avalos, B. (2004). *Las instituciones formadoras de docentes y las claves para formar buenos docentes*. Santiago: Ministerio de Educación de Chile.

Centro Interuniversitario de Desarrollo. (2009). *Diseño Curricular basado en competencias y aseguramiento de la Calidad en la Educación Superior*. Santiago. Alfabeta Artes Gráficas.

Gardner, H. (2000). *La educación de la mente y el conocimiento de las disciplinas: Lo que todos los estudiantes deberían comprender.* Barcelona. Ed. Planeta.

George, D., & Mallery, P. (2003). *SPSS for Windows step by step: A simple guide and reference*. 11.0 update (4th ed.). Boston: Allyn & Bacon.

Sánchez, A. & Ruiz, M. (2011). Evaluación de competencias genéricas: Principios, oportunidades y limitaciones. *Revista de pedagogía, 63(1),* 147-170.

Segura, R. C. (2008). *Mucho que ganar, nada que perder. Competencias: Formación integral de individuos*. ST Editorial.

Solar Bezmalinovic, H., Deulofeu Piquet, J., & Azcárate, C. (2010). *Competencias de modelización y argumentación en interpretación de gráficas funcionales*. Barcelona. Publicación de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Tardif, J. (2011). Desarrollo de un programa por competencias: De la intención a su implementación. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación del Profesorado,* 1-16.

Vaillant, D. (2002). *Formación de formadores: Estado de la práctica* (No. 658.3124 V131f). Programa de Promoción de la Reforma Educativa en América Latina.

Villa, A., & Poblete, M. (2007). *Aprendizaje basado en competencias: Una propuesta para la evaluación de las competencias*. Madrid. Mensajero.

CONEXIONES MATEMÁTICAS EN LA REFLEXIÓN SOBRE PRÁCTICAS ESCOLARES

Yuly Vanegas, Joaquin Giménez, Vicenç Font
Universitat Autónoma de Barcelona. (España), Universitat de Barcelona. (España)
yulymarsela.vanegas@uab.cat, quimgimenez@ub.edu, vfont@ub.edu

RESUMEN: En este trabajo se reflexiona sobre la importancia de las conexiones en el diseño, implementación y análisis de prácticas escolares matemáticas. Se caracteriza el uso de conexiones que realizan futuros profesores y docentes en ejercicio que participan en un Máster de Formación, a partir del análisis de producciones escritas de los dos grupos. Se constata que ambos grupos valoran de forma semejante el uso de las conexiones. Encontramos un mayor uso de conexiones intra-matemáticas no justificadas por parte de los docentes en ejercicio mientras que un mayor número de conexiones extra-matemáticas por parte de los futuros profesores.

Palabras clave: formación de profesores, conexiones, prácticas escolares

ABSTRACT: This research work deals with the importance of connections in the design, implementation and analysis of math school practices. The use of such connections by future teachers and by those in the teaching profession who are taken a Master’s Degree, are characterized, from the analysis of both groups’ written tasks. It was possible to observe that both groups assess the use of connections in a similar way. We found a greater use of non-justified intra-mathematics connections by practicing teachers meanwhile there was a greater number of extra-mathematics connections by the group of future teachers.

Key words: teachers’ training, connections, school practices

Introducción

Desde los nuevos planteamientos curriculares para la enseñanza de las Matemáticas, se considera que uno de los procesos que caracterizan la actividad matemática, son las conexiones. Las conexiones, además de brindar oportunidades para establecer relaciones al interior de las matemáticas y de las matemáticas con otras áreas de conocimiento, posibilitan una mejor comprensión de las ideas matemáticas y de la manera como éstas se construyen.

La formación de profesores no puede ser ajena a estos planteamientos y por ello consideramos que se deben desarrollar tareas profesionales que ayuden a reconocer a los futuros docentes, el valor y necesidad de las conexiones en la construcción de las tareas escolares. Además, diversos autores han mostrado que las creencias de los profesores sobre la importancia de establecer conexiones en el aula determinan y modifican su propia práctica (Sawyer, 2008; Frykholm y Glasson, 2005). Interpretamos las conexiones como aquello que posibilita el establecimiento de relaciones entre contenidos. Para reconocer y analizar estas relaciones, buscamos maneras de capturar experiencias de alumnos aprendiendo matemáticas en momentos diferentes de las clases, considerando algunos invariantes sociales, éticos, afectivos y cognitivos, los cuales nos permiten comprender mejor la complejidad de los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas.

En este trabajo, nuestro objetivo es el reconocimiento de la idea de conexión que usan profesores y futuros profesores, en el diseño, implementación de secuencias didácticas y en la reflexión posterior que hacen de su práctica. Buscamos caracterizar el tipo de conexiones que plantean y sus reflexiones en torno a ellas. Para ello, analizamos algunas prácticas de formación usando herramientas teóricas del enfoque onto-semiótico (EOS), en particular la pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica (Godino, Bencomo, Font, y Wilhelmi, 2007). Consideramos que es importante que el futuro docente reconozca no sólo el valor de las conexiones para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sino que se apropie de elementos que le permitan distinguir entre las conexiones intra-matemáticascentradas en la construcción y establecimiento de relaciones entre conceptos y procedimientos y las extra-matemáticas en las que se posibilita la construcción de significados (Boaler, 2002).

Marco Teórico

Interpretamos las matemáticas como un tipo de prácticas que presentan conexiones tanto entre los propios conceptos matemáticos como con problemas de la vida real. Las conexiones aparecen, por un lado, como un conocimiento teórico del profesor de matemáticas en los modelos de Ball, Thames, y Phelps, (2008) y Carrillo, Climent, Contreras, y Muñoz-Catalán (2013). Por otra parte, se reconocen, como un tipo de acción del profesor que se puede observar en sus prácticas de aula, en el modelo de Rowland y Turner (2007). Diversos autores señalan que el establecimiento de conexiones por parte de los alumnos los ayuda a construir un conocimiento matemático profundo y duradero (Bamberger y Oberdorf, 2007). Además, las conexiones se consideran importantes para el desarrollo de las competencias matemáticas, evidencia de esto, es el papel protagónico que se les da en diversas propuestas curriculares como Sudáfrica (Mwakapenda, 2008), Australia (Sawyer, 2008), Catalunya, (Departament d'Ensenyament, 2017), Estados Unidos (NCTM, 2000), entre otros.

Businskas (2008), teniendo en cuenta los tipos de relaciones matemáticas, propone siete tipos de conexiones: 1) *Representación alterna*: A y B son dos representaciones de un mismo concepto dadas en registros diferentes, por ejemplo, una ecuación con una gráfica, o con un enunciado textual. 2) *Representación equivalente*: si son representaciones equivalentes de un mismo concepto. Es decir, A y B son representaciones diferentes de un mismo concepto dadas en un mismo registro, como pueden ser dos ecuaciones equivalentes de una misma función. 3) *Rasgos comunes*: dos ideas matemáticas A y B están relacionadas si comparten algún rasgo en una clase mayor. 4) *Inclusión*: si A está incluida en B, o dicho de otra manera si B incluye A. Se trata de una relación jerárquica, por ejemplo, el vértice es parte de la parábola, y la parábola contiene al vértice. 5) *Generalización*: dos ideas matemáticas están relacionadas si A es una generalización de B, o dicho de otra manera B es un ejemplo de A. Por ejemplo, la ecuación general de la parábola $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey = K$ es una generalización de cualquier ecuación particular de una parábola. 6) *Implicación*: si la relación entre A y B depende del establecimiento de un razonamiento deductivo como, por ejemplo, si un polinomio con coeficientes reales tienen grado n, tiene como máximo n raíces reales. 7) *Procedimiento*: A y B están relacionados si A es un procedimiento que se utiliza al trabajar con la idea B. Por ejemplo, un diagrama de árbol es un procedimiento que se utiliza al definir un espacio muestral en probabilidad.

En el EOS, para valorar si un proceso de instrucción es idóneo, se considera la noción de *conexionismo*. Esta noción tiene que ver con la explicitación y justificación de las articulaciones entre significados, mediante el análisis de las configuraciones de las prácticas asociadas. En estudios anteriores hemos visto, como algunos futuros docentes piensan que establecen conexiones, pero no siempre es cierto. En Giménez, Vanegas y Font (2013) se muestra un ejemplo del Teorema de Tales para visualizar que no se hizo una buena conexión intra-matemática.

En efecto, es difícil hacer explícitas las conexiones que muchas veces se espera que hagan los propios adolescentes.

> "Intentamos establecer conexiones, ya sea entre los conceptos de la secuencia de enseñanza (Tales con triángulos semejantes; triángulos semejantes con figuras semejantes, y así sucesivamente) así como con otras materias (por ejemplo, calcular la medida de columnas con espejos, las leyes de refracción, reconociendo conceptos físicos y relacionándolos con conceptos matemáticos)...Por lo tanto mi configuración epistémica era correcta" (Estudiante MA, 2011).

En la formación, usamos este ejemplo, para introducir la idea de que considerar la conexiones y la representatividad, aumenta la calidad matemática de la instrucción. Se presenta a los futuros docentes tres documentos: la explicación dada por la futura profesora de las tareas en donde se propone explicar el Teorema de Tales; el análisis de la idoneidad epistémica de las prácticas desarrolladas; y un texto en donde se presenta un ejemplo de conexión adecuada.

En el trabajo de Rondero y Font (2015), se analizan diversos significados de la media aritmética, allí, se consideran tres tipos de conexiones desde el punto de vista del enfrentamiento de situaciones matemáticas complejas: las relaciones semióticas, metafóricas y las generalizaciones. En ellas, se establecen nuevas relaciones que se explican en las diferentes dualidades asociadas a la configuración epistémica (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007). La conexión se relaciona también con la riqueza matemática de una secuencia de tareas en el sentido que se enlaza una configuración con otra, mediante un elemento común (definiciones, argumentos, representaciones, etc.).

Metodología

Para desarrollar nuestro objetivo, efectuamos una investigación, en la que se valoran aspectos de forma cuantitativa y cualitativa. Estamos interesados primero en describir, sobre todo, el desarrollo de un aspecto parcial de la competencia en análisis didáctico de los futuros profesores (analizar y valorar la calidad matemática de procesos de instrucción). Se trata de una investigación que tiene además un componente de desarrollo ya que se pretende, por un lado, proporcionar conocimiento detallado sobre el estado actual de la formación de futuros profesores de Secundaria y la identificación de los factores condicionantes de la misma, y, por otro lado, se pretende elaborar recursos didácticos específicos para mejorar la formación de estos profesores.

La investigación se enmarca en un programa de formación de profesores a nivel de Maestría. En dicha propuesta se consideran cinco ejes fundamentales: a) una mirada ética formadora hacia lo social-cultural y cognitivo en el trabajo matemático; b) un análisis de experiencias escolares de calidad, con énfasis en prácticas de modelización, resolución de problemas y de matemática aplicada; c) una mirada globalizadora sobre la contribución de las matemáticas al desarrollo de competencias transversales, d) un enfoque de análisis didáctico en donde se reconocen criterios de calidad que ayudan a realizar una evaluación competencial y, (e) un análisis sobre el poder de los recursos para el aprendizaje. La base teórica que fundamenta estos principios, es la idoneidad de un proceso de instrucción matemático (Vanegas, Giménez y Font, 2016).

La propuesta de formación, se desarrolla en dos contextos: “Máster Interunivesitario de Formación de profesores de Secundaria de Matemáticas” (MIFPSM) en Catalunya y “Máster de Formación de Profesores” (MFP) en Ecuador. En el primero participan futuros profesores y en el segundo docentes en ejercicio. Hay dos diferencias principales en los contextos de formación: los futuros docentes tienen una formación compactada en un año y tres momentos de reflexión sobre su práctica (un momento que antecede a la práctica, uno inmediatamente posterior a la práctica y otro más tarde, el cual se sistematiza en lo que se denomina Trabajo Final de Máster (TFM) con tutorización presencial. En el caso de los docentes en ejercicio el TFM fue tutorizado a distancia.

Para el estudio se han considerado como datos 60 trabajos finales de máster, 30 del MIFPSM (Gr 1) y 30 trabajos del MFP (Gr 2) del año 2015. El registro de la información fue la grabación en video de las clases impartidas y la documentación recibida y organizada en la plataforma Moodle (presentaciones, lecturas, tareas y respuestas a las tareas, cuestionarios y respuestas de los alumnos a los cuestionarios). Para reconocer cuantitativamente el uso de conexiones intra o extramatemáticas y mostrar evidencias de la calidad de las aportaciones, se identifican y codifican las producciones según, el uso de conexiones, el tipo de conexión y si se justifican las mismas. Para el análisis cualitativo se realizan descripciones interpretativas de casos particulares destacando su nivel de profundidad en el uso de conexiones en cada uno de los dos grupos de formación.

Para el análisis de los tipos de conexiones *intramatemáticas*, usamos la categorización propuesta por Martinez, Giné, Figueiras y Deulofeu (2011): *intraconceptuales*, tienen lugar en la proximidad de un único concepto: equivalencia entre caracterizaciones de un concepto (ECC); prueba de la equivalencia entre dos definiciones (EDef); distinción entre una condición suficiente de una necesaria (CNS), o la expresión de un concepto o proceso en un caso particular (PC). *Interconceptuales*, los conectores son ideas matemáticas que permiten vincular diferentes representaciones del mismo concepto (RMC) o diferentes conceptos que los estudiantes afrontan en el mismo momento (RCD). *Temporales*, se dan entre conocimientos previos y futuros, y derivan del conocimiento del profesor sobre los conocimientos previos y futuros de los estudiantes. Estas conexiones posibilitan estudiar otras propiedades de un concepto o procedimiento (EPC) o aplicar el conocimiento aprendido a situaciones nuevas y/o más complejas (APL).

Para las conexiones *extramatemáticas*, consideramos cinco indicadores a priori diferenciados que surgen de un primer análisis de los trabajos de planificación, y se corresponden a usos del contexto para establecer objetos o procesos matemáticos cada vez más complejos: *conexión modelizadora* (CMC) que conecta un contexto extra-matemático con una idea matemática, de forma que posibilita que se interprete que el fenómeno se puede modelar mediante dicho concepto, para que permita hacer una aproximación precisa del fenómeno con el objeto matemático; *conexión mediadora* (ISIM) la que conecta un contexto extra-matemático con una idea o procedimiento matemático, para interpretar mejor cierto significado de la idea matemática. Es el caso de los recursos manipulativos como el tangram, en donde la superposición se usa como idea de relación de medida. O bien el caso del uso de geogebra, que permite que se generalice un cierto tipo de propiedad; *interdisciplinar genérica* (RPR) que conecta un contexto extramatemático, para establecer relaciones que permiten mostrar algunas características o propiedades del concepto o asociar problemas o propiedades relevantes respecto representaciones diferentes de un concepto. Ejemplo, el uso de la historia o la Arqueología para generar una reflexión sobre métodos matemáticos clave en la construcción de objetos o procesos matemáticos; *metafórica* (CPG) que muestra de qué manera se usa un elemento extra-matemático como metáfora que me permite reconocer la particularización y generalización implícitos en dicho elemento y *materialización* (MCM) plantea un contexto extra-matemático para materializar una definición, como el caso de los lugares geométricos con cuerdas, y después visualizados con geogebra.

Resultados

En cuanto lo cuantitativo, se observa mayor atrevimiento en el uso de conexiones y un mayor grado de justificación por parte de los futuros profesores (Gr 1) que por los docentes en ejercicio (Gr 2).Como se ve en la Tabla 1, dominan las conexiones *extra-matemáticas*. La consideración de dichas conexiones se evidencia mayoritariamente al inicio de las unidades didácticas, y son prácticamente nulas al final. En el caso de los profesores de Ecuador, se producen conexiones de tipo contextualizado en la primera o segunda lección, pero desaparecen en muchos trabajos en las sesiones siguientes.

Tabla 1. Porcentaje de alumnos que usan conexiones intra-matemáticas

	Momento	Momento	Momento
Conexiones intra-matemáticas	20 %	32 %	16 %
Evocación extra-matemática	44 %	40 %	20 %
Conexiones extra-matemáticas	8	16 %	4 %
Conexiones intra-matemáticas	20 %	24 %	12 %
Evocaciones extra-matemáticas	40%	20 %	--
Conexiones extra-matemáticas	32 %	12 %	--

La intencionalidad se encuentra bien justificada tanto en los futuros docentes como los profesores experimentados, aunque los argumentos básicos son de tipo emocional.

> “El planificar una situación problema a partir de un video, una imagen, un anuncio televisivo o un objeto que permita sentir una pregunta como punto de partida para captar y mantener la atención de los estudiantes, debe permitir generar una dinámica de aula más centrada en los estudiantes y menos en el contenido curricular” (P14).

En cuanto las conexiones *intra-matemáticas*, los docentes en ejercicio, proponen secuencias bien estructuradas, pero no explicitan las conexiones como criterio de calidad de la secuencia didáctica, aunque si hablan de contextualizaciones. Algunos docentes usan sistemas de representación o juegos para reconocer propiedades del contenido al que se quiere llegar. Tal es el caso de Trabajos como el Teorema de Pitágoras, en donde junto al significado de áreas, se reconoce el significado de ternas de números que tienen cierta propiedad. La conexión se establece no solo porque hay rasgos comunes, sino que se muestran representaciones equivalentes como es el caso de usar puzles diferentes, pero en los que se ve que la suma de las áreas de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. Para seguir, se usan aplicaciones en el sentido que se reconoce una fórmula que se aplica a nuevas situaciones. Y en este caso, digamos que se reconoce solo en algunos casos que se cambiaría alguna situación para favorecer la idea de conjetura generalizada y demostración.

> "…que pudieran observar antes en Geogebra la variación de la hipotenusa cuando cambian de valor los catetos, eso ayudaría en la demostración" (P2).

Muchos profesores experimentados producen secuencias con aparentes conexiones intra-matemáticas, pero con saltos cognitivos, como el caso de P3 que hace una generalización muy rápida a partir de un solo ejemplo con alcancías para reconocer rasgos de una progresión geométrica provocando un salto cognitivo a la idea de patrón multiplicativo, y de ahí a la función exponencial. Si bien en su reflexión posterior se explica la posible riqueza de procesos, solo se enuncian, pero, en estos casos, no se explica cómo estos procesos contribuyen al desarrollo de significados. En cuanto la conciencia de los requerimientos de ideas matemáticas, este profesor dice que: "debería haber trabajado las funciones logarítmicas antes que las sucesiones"

Suelen manifestar que hacen problemas contextualizados, pero realmente son evocaciones en los enunciados. Las conexiones suelen ser búsqueda de rasgos comunes, de tipo procedimental, de los que se extrae la idea matemática. En el mejor de los casos de dominio de conexiones intra-matemáticas se justifican las conexiones realizadas.

> "…comprendan como la matemática se puede interconectar entre distintos aspectos, en el que podemos establecer conexiones entre las gráficas y las expresiones, pasando de problemas reales a la aplicación matemática en donde se vea reflejado la relación del lenguaje común con el mundo matemático" (P38).

Este tipo de profesor asume que conecta mediante cambios representacionales, para tratar de solventar conflictos cognitivos.

> "Con la finalidad de explicitar ciertas condiciones básicas que debe tener análisis por tablas y la relación entre variables se solicitó a los estudiantes analizar y comparar los valores de la tabla proporcionada, con la que ellos debían construir y completar y graficar con la ayuda de geogebra" (P2).

O incluso en algunos casos, aprecia el valor de establecer rasgos comunes, para establecer una idea abstracta, que no siempre es procedimental.

> "En la sesión 'Cómo modelar la función afín', con el fin el mantener la motivación y hacer más atractiva esta actividad, solicité en la clase anterior, distintos tipos de cuentas básicas pero, el no contar con el material solicitado, dificultó el establecer características de similitud o diferencia, de establecer valores a expresarse en una tabla que conducen al razonamiento, análisis y síntesis de la función afín"(P2).

Las conexiones *extra-matemáticas* son fundamentalmente contextualizaciones, que se proponen al inicio de la secuencia didáctica, en el caso de los docentes de Ecuador. Mientras que los futuros profesores (en Catalunya) exploran la idea de conexión en diversos momentos de sus secuencias didácticas. Algunos de los docentes saben razonar que las contextualizaciones metafóricas permiten usar contextos extra-matemáticos diversos como los problemas de tránsito, para trabajar situaciones funcionales lineales en las que el uso de tablas o ecuaciones permite ver que hay diferentes formas de reconocer la noción de función lineal.

> "En esta sesión se presentará un video que hay que observar hasta el segundo 30 (link: https://www.youtube.com/watch?v=85Jn6K3dpjE), en donde se observa la persecución de la policía a un carro que va a exceso de velocidad por la ciudad. Esta actividad relacionaremos con las leyes de tránsito del Ecuador" (P38).

Es difícil que los docentes en ejercicio muestren modelizaciones reales, aunque se proponiendo situaciones con elementos reales, las preguntes son algo forzadas en algunos casos. Pero lo interesante es que se interpretan metafóricamente los métodos matemáticos usados.

> "Para la modelización de la función cuadrática se propondrá que resuelvan el siguiente problema: En una institución educativa se ha destinado cierta cantidad de terreno para formar la granja ecológica. Los estudiantes de segundo de bachillerato deben realizar el cerramiento del terreno rectangular de mayor área posible. Para ello disponen de 100 m de alambre. ¿Qué dimensiones debe tener el terreno para cercarlo con esa cantidad de alambre, con una sola vuelta?" (P. 38).

Y se alude a la conciencia del docente sobre las dificultades del alumnado.

> "...A lo anterior se suma que los alumnos no estuvieron acostumbrados a aplicar el razonamiento matemático en situaciones reales" (P38).

Algunos docentes son reflexivos en cuanto lo que conectan en lo matemático, explicitando los aspectos concretos de su trabajo. Pero no siempre es así.

> "No tenían costumbre de relacionar entre un problema propuesto, la tabla de valores, su representación gráfica y las expresiones algebraicas, peor aún realizar conjeturas, descontextualizarlo e institucionalizarlo. Las materializaciones se suelen usar en temas considerados más abstractos como los temas de potenciación. Así, se observan configuraciones de cuadrado para indicar el cuadrado, o de cubo para designar el cubo, y de ahí se va al abstracto" (P38).

En varios casos, como ya habíamos observado en el caso previo de MA la conexión no es totalmente auténtica, porque no se explicita el tipo de referencial que se está ayudando a construir. No se relaciona con la potencia de las representaciones en relación a los significados y realmente se yuxtaponen tareas sobre los significados matemáticos, pero no se trabaja las relaciones entre los mismos. Eso explica que en muchos casos las casillas de los primeros indicadores intraconceptuales no se observan, aunque aparezcan indicios de intencionalidad.

> "Se logró el objetivo principal de mostrar la importancia del estudio de las fracciones en nuestra vida cotidiana. La clase despertó el interés de los estudiantes al observar el primer vídeo sobre la historia de las fracciones, y ejemplos del uso de fracciones en la vida cotidiana. Se realizaron conexiones de las matemáticas con la historia, la matemática e internet, también entre ramas de la matemática como la geometría y la aritmética" (E26).

Se constata que los TFM en los que se han considerado un mayor número de conexiones y justificaciones más completas fueron los mejor valorados. En algunos casos del grupo de futuros docentes, se observan cambios en sus propuestas de mejora que explicitan más que las matemáticas ofrecen oportunidades y herramientas potentes para interpretar fenómenos, reconociendo características de conexiones extra-matemáticas. En cuanto al tipo de argumentos, se alude a la contextualización como base de motivación, y al valor de conectar para establecer mejores relaciones entre contenidos y trabajar la dimensión competencial. Esto se reconoce en producciones de los futuros profesores, como:

> "...Aprender los conceptos cuando los vas necesitando aporta motivación al aprendizaje y fortalece la competencia de aprender a aprender, ya que el alumno aprende a hacer conexiones entre los conceptos y sus utilidades, y así mismo permite utilizar los aprendizajes en diferentes contextos. Si usamos contextos sociales trabajaremos las competencias social y ciudadana" (E 12).

A modo de conclusión

A pesar de que se ha insistido en el valor de las conexiones en ambos contextos de formación, nuestra hipótesis sigue siendo la reticencia del profesor experimentado en hacer cambios en sus propuestas didácticas que han sido en general tradicionales. Aunque no podemos concluir que ello sea cierto. En el grupo de futuros profesores en gran parte de las propuestas del rediseño de actividades, se percibe la intención de introducir elementos contextuales, problemas sociales, así como el trabajo cooperativo en la clase.

Las conexiones extra-matemáticas son fundamentalmente contextualizaciones, que se proponen al inicio de la secuencia en el caso de los profesores experimentados, mientras que los futuros profesores exploran la idea de conexión en diversos momentos de sus secuencias didácticas con mayor profundidad.

Diversos trabajos de investigación han mostrado que el éxito del trabajo contextualizado en las escuelas depende de la capacitación de los profesores en la formación inicial, por ello esperamos con nuestra propuesta aportar un granito de arena en la construcción de este camino.

Referencias bibliográficas

Ball, D. L., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of teacher education*, *59*(5), 389-407

Bamberger, J. y Oberdorf, C. (2007). *Introduction to connections. Grades 3-5*. The Maths Process Standars Series Portsmouth, N. H. Heinemann.

Boaler, J. (2002). Exploring the nature of mathematical activity: using theory, research and working hypotheses to broaden conceptions of mathematics knowing. *Educational Studies in Mathematics*, *51*. 3-21.

Businskas, A. (2008). Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualise and contend with mathematical connections. Unpublished doctoral dissertation. Simon Fraser University, Burnaby, Canada. Recuperado de: http://ir.lib.sfu.ca/handle/1892/10579

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Mathematics teacher specialized knowledge. *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME 8*. (pp. 3055 – 3064). Antalya: Middle East Technical University.

Charalambous, C. Y. (2010). Mathematical knowledge for teaching and task unfolding: An exploratory study. *The Elementary School Journal*, *110*(3), 247-278.

Departament d'Ensenyament, (2017). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic*. Recuperado de: http://ensenyament.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/colleccions/competencies-basiques/eso/eso-matematic.pdf.

Font, V. (2007). Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas. En: *la gaceta de la real sociedad matemática española*, *10*(2), 427– 442.

Frykholm, J. y Glasson, G. (2005). Connecting Math & Science Instruction: Pedagogical context knowledge for teachers. *School Science and Mathematics, 105*(3), 127-141.

Godino, J., Bencomo, M., Font, V. y Wilhelmi, D. (2006). Análisis y valoración didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradgima*, *27* (2), 221-252.

Mwakapenda, W. (2008). Understanding connections in the school mathematics currículum. *South African Journal of Education*, *28*, 189–202.

Martinez, M., Giné, C., Fernández, S., Figueiras, L. y Deulofeu, J. (2011). *El conocimiento del horizonte matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro.* En M. Marín; G. Fernández; L. Blanco; M. Palarea (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XV.* (pp. 429-438). Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Rondero, C. y Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 29-49.

Rowland, T. y Turner, F. (2007). Developing and using the ‘knowledge quartet’: a Framework for the observation of mathematics teaching. *The mathematics educator, 10*(1), 107-123.

Sawyer, A. (2008). Making Connections: Promoting Connected ness in Early Mathematics Education. M. Goos, R. Brown, y K. Makar (Eds.) *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.* (pp.429-435), Brisbane: The University of Queensland.

Vanegas, Y., Giménez, J. y Font, V. (2016). How future teachers improve epistemic quality of their own mathematical practices. In: K. Krainer; N. Vondrová. (Eds.) *Proceedings of the ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education. CERME 9. (pp.* 2937-2943), Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

COMPRENSIÓN DE LA MEDIA PONDERADA POR DOCENTES EN FORMACIÓN PARA PRIMARIA

Ana María Martínez Blancarte, Ana María Ojeda Salazar
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. (México)
amatinezb@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx

RESUMEN: Esta investigación, cualitativa, enfoca la formación en estocásticos de 52 estudiantes de cuarto semestre de la Licenciatura en educación primaria. Previamente a la enseñanza de ese contenido, sus respuestas a un reactivo referido a la media ponderada revelaron que los estudiantes universitarios, aunque podían calcular la media aritmética de un conjunto de datos, no identificaron la media ponderada. Por tanto, para lograr el conocimiento especializado de medidas de tendencia central es necesario tratar no sólo su cálculo y su función en relación a la variación entre los datos y el tipo de éstos, sino un repertorio apropiado de referentes para identificar analogías entre ellos relativas a esas medidas.

Palabras clave: profesores en formación, media ponderada, estocásticos

ABSTRACT: This is a qualitative research, which focuses on stochastic training of 52 fourth-semester students of the Bachelor in Primary Education. Before teaching this content, the students' answers to a proof related to the pondered average showed that university students were not able to identify the pondered average, although they could calculate the arithmetic average of a set of data. Therefore, to achieve the specialized knowledge about central tendency measurements, the students should study not only its calculus and function with respect to the variation among data and the types of data, but also an appropriated set of referents, in order to identify their analogies related to these measurements.

Key words: training teachers, pondered average, stochastic

Introducción

En investigaciones realizadas en distintos niveles educativos en el sistema mexicano, se ha señalado la poca la importancia que se otorga a los estocásticos en la formación matemática pre-universitaria (por ejemplo, Perrusquía, 1998; Flores L., 2002; López, 2006; Flores M., 2009; Salcedo, 2013). También han mostrado que los alumnos tienen dificultades de comprensión de ideas de estocásticos, además de que en los planes y programas, y en las evaluaciones mismas, el tema no parece tener la relevancia que suponen sus aplicaciones en la diversidad de ámbitos de la actividad humana. En contraste, recién se incluyeron los estocásticos para todo un semestre en el curriculum de la Educación Normal (SEP, 2012).

Pollatsek, Lima y Well (1981) señalan que la enseñanza de los promedios se centra en la presentación y aplicación de algoritmos, lo cual impide comprender los conceptos. Nuestra investigación se enfoca en la comprensión de estocásticos de profesores en formación para la educación primaria, para identificar el *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (Ball y Bass, 2010) que requerirán en su práctica docente en el aula de esos contenidos. Particularizamos la reflexión respecto a la media ponderada y su vinculación con las ideas fundamentales de estocásticos que propone Heitele (1975).

Marco teórico

Ball y Bass (2000) proponen el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (CME), el cual definen como una composición de contenido matemático y pedagogía. Sus facetas son:

- *Conocimiento Matemático Especializado*, al que Hill, Ball y Schilling (2008) definen como el contenido adicional que va más allá del conocimiento matemático “común” para la enseñanza de un tópico matemático.
- *Conocimiento de estudiantes*, por el que el docente relaciona sus conocimientos de contenido con el razonamiento de los alumnos, es decir, cuáles son las estrategias, dudas, confusiones o ideas erróneas de los educandos respecto a un tópico matemático.
- *Conocimiento para la enseñanza*, que es la fusión del conocimiento de matemáticas y de pedagogía para el diseño y planeación de la enseñanza en el aula.

Pollatsek *et al.* (1981) proponen tres tipos de conocimiento de los conceptos matemáticos:

1. De cálculo, que implica la aplicación de una expresión matemática, de un algoritmo;

2. Funcional, que se refiere a un concepto como significativo del mundo real; y

3. Analógico, por el que se pueden establecer analogías entre distintos referentes.

En el ámbito de estocásticos, el conocimiento analógico al que se refirieron Pollatsek y sus colaboradores también tiene relación con el dominio intuitivo de *simulación* que establece Fischbein (1975), que demanda identificar los elementos relevantes del carácter aleatorio de un fenómeno dado y sus relaciones, para vincularlos con los de otra situación análoga a él, accesible a sus repeticiones efectivas, luego, al enfoque frecuencial de la probabilidad.

Para incluir temas de estadística y de probabilidad en el currículum, desde la educación básica hasta la superior, Heitele (1975) considera "fundamental" una idea de estocásticos si en los distintos niveles de desarrollo del individuo lo dota de un modelo explicativo de la situación respecto a la cual evoca tal idea. Para la formación en esos temas, el autor propuso diez ideas fundamentales, interrelacionadas entre sí, como guía continua de un curriculum en espiral: medida de probabilidad, espacio muestra, adición de probabilidades, regla del producto e independencia, combinatoria, equiprobabilidad y simetría, modelo de urnas y simulación, variable aleatoria, ley de los grandes números y muestra.

Comprensión de la media. Pollatsek, *et al*. (1981) han señalado que la media no es sólo uno de los conceptos más básicos de la estadística y de la ciencia experimental, sino de frecuente aplicación en la vida cotidiana. Descubrieron que, sin embargo, los estudiantes universitarios tienen dificultades para solucionar problemas comunes de promedio que implican a la media ponderada, aun después de años de educación formal. Muchos de los estudiantes participantes en su investigación, de edades de 18 a 22 años, fueron incapaces de resolver problemas de medias ponderadas, pues consideraban a la media como un concepto puramente formal, definida en términos de un cálculo basado en números abstractos. Concluyeron que los libros de texto de la Licenciatura de Psicología que cursaban esos estudiantes ignoraban el conocimiento funcional de la media, que se refiere a la media como un concepto significativo del mundo real, dado que los ejercicios que proponían eran básicamente de cálculo y que pocos problemas proporcionaban una práctica intensiva en la traducción de una variedad de referentes a estructuras computacionales, por lo que era poco probable lograr la comprensión de manera general.

Mokros y Russell (1995) afirman que aprender el concepto de media es uno de los primeros encuentros de un estudiante con una construcción matemática que expresa una relación entre números particulares. En soluciones de alumnos de primaria y secundaria a problemas de media, identificaron al promedio como: moda; por su algoritmo (conocimiento de cálculo); como algo razonable (conocimiento funcional); como punto medio (conocimiento funcional); y como punto matemático de equilibrio (conocimiento analógico).

Método

Esta investigación, cualitativa (Vasilachis, 2006), tiene dos componentes: 1) una investigación documental del contenido de estocásticos en las propuestas institucionales para la Licenciatura en Educación Primaria (SEP, 2012) y para primaria (SEP, 2011), para identificar los acuerdos entre ellas; y 2) la aplicación de un cuestionario diagnóstico a 52 estudiantes (19 a 31 años de edad) del cuarto semestre de la Licenciatura de Educación Primaria, diseñado por tres docentes de esa licenciatura (o sea, formadores de docentes), para identificar el dominio de conceptos de sus estudiantes de los contenidos de la asignatura “Procesamiento de la Información Estadística” (SEP, 2012). El cuestionario, impreso, se contestó individualmente en máximo dos horas. El reactivo 25, de los 27 que se plantearon, se refirió a la media ponderada. Las respuestas a él se clasificaron de acuerdo a los tres tipos de conocimiento que proponen Pollatsek *et al*. (1981). A las propuestas institucionales y al reactivo 25 se les aplicó la célula de análisis (Ojeda, 2006): Situación referente; Ideas fundamentales de estocásticos; Otros conceptos matemáticos requeridos; Recursos semióticos; y Términos empleados para referirse a estocásticos.

Resultados de los análisis

Propuesta institucional de la Licenciatura para Educación Primaria. En comparación con el plan y programas de 1997 para las escuelas normales, su reciente reforma (SEP, 2012) da importancia al tema de estocásticos. La currícula de la Licenciatura en Educación Básica (primaria) actualmente destina el cuarto semestre completo al estudio de la asignatura “Procesamiento de la Información Estadística”, con cuatro unidades: “Estadística”, “Probabilidad y muestreo”, “Inferencia estadística”, y “Vinculación con el eje manejo de la información”. La primera incluye las medidas de tendencia central. La Tabla 1 muestra la caracterización de la unidad “Estadística” al aplicar la célula de análisis (Ojeda, 2006).

Tabla 1. Caracterización de la Unidad 1, “Estadística”, de la asignatura “Procesamiento de la Información Estadística”.

Ideas fundamentales de estocásticos: Equidistribución y simetría, variable estocástica, muestra.			
Contenido	**Otros conceptos matemáticos**	**Recursos semióticos**	**Términos empleados**
1. Estudio de la estadística	Cantidad, función, relación.	Lengua natural escrita.	Estadística descriptiva, inferencial, población, experimento, parámetro, atributo, medir, variabilidad.
2. Tablas de distribución	Operaciones	Lengua natural escrita,	Frecuencia,

de frecuencias y representaciones gráficas	básicas, porcentajes, producto cartesiano.	tablas, gráficas (histograma, tallo y hojas), signos numéricos.	distribución, datos apareados, categorías.
3. Medidas de tendencia central	Operaciones básicas, orden ascendente y descendente de números naturales, producto cartesiano.	Lengua natural escrita, tablas, gráficas, expresiones matemáticas, simbología aritmética.	Moda, media, mediana, rango medio.
4. Medidas de posición	Operaciones básicas, números naturales, conjuntos, producto cartesiano.	Lengua natural escrita, tablas, gráficas, expresiones matemáticas, simbología matemática y aritmética.	Cuartiles, deciles, percentiles.
5. Medidas de dispersión	Operaciones básicas, tabulaciones, raíz cuadrada, producto cartesiano.	Lengua natural escrita, tablas, gráficas, simbología matemática y aritmética.	Distribución normal, media, rango, desviación media y estándar, varianza, covarianza, coeficiente de variación.
6. Datos bivariados	Operaciones básicas, producto cartesiano.	Lengua natural escrita, tablas, gráficas (gráfico de puntos), diagramas (de dispersión), simbología matemática.	Variables, promedio, variables de datos, dispersión.

De la Tabla 1 parecería que la mayoría de los temas de la unidad 1 se dedican a la faceta de *Conocimiento matemático especializado*, dado que el objetivo de la asignatura es “promover que el futuro docente comprenda y aplique los conceptos y procedimientos básicos de probabilidad y estadística descriptiva e inferencial que le permitan recolectar, organizar, presentar y analizar datos para abordar la resolución de problemas en el contexto educativo” (SEP, 2012; p. 6). El programa de la asignatura:

> contempla la construcción y lectura de tablas y gráficas, así como el cálculo de medidas e índices para caracterizar y realizar estudios de poblaciones (…) se pretende que los futuros docentes desarrollen competencias didácticas que les permitan diseñar y aplicar estrategias eficientes para que los alumnos de educación primaria se apropien de las nociones, conceptos y procedimientos relacionados con el eje temático de manejo de la información. (*ibíd*.; p. 6)

La Unidad 1 no incluye las dos facetas del Conocimiento Matemático para la Enseñanza, a saber, el Conocimiento de Estudiantes y el Conocimiento para la Enseñanza, pues lo relativo a ellos se propone hasta la Unidad 4 de la asignatura, a la que, por limitaciones de tiempo al final del semestre, frecuentemente se le omite. La Unidad 4 plantea la revisión y análisis de los programas de primaria con base en los conceptos y técnicas estadísticas revisados en las tres unidades anteriores; y el diseño de estrategias didácticas para la enseñanza de los contenidos del eje manejo de la información de primaria.

Para la enseñanza de las medidas de tendencia central, se utilizó el Capítulo 4 del libro de Nortes (1991, pp. 73-101), sugerido en la bibliografía de “Procesamiento de la Información Estadística”. La Tabla 2 caracteriza este capítulo según la célula de análisis (Ojeda, 2006).

Tabla 2. Caracterización de Medidas de tendencia central del libro de Nortes (1991).

Ideas fundamentales de estocásticos: Equidistribución y simetría, variable estocástica, muestra.			
Medidas de tendencia central	**Otros conceptos matemáticos**	**Recursos semióticos**	**Términos empleados**
Media aritmética	Magnitud, operaciones básicas, caracteres cualitativos, diferencia.	Expresiones matemáticas, símbolos numéricos, tablas, lengua natural escrita.	Medible, valores de la variable, frecuencias absolutas, variable continua, intervalos, marca de clase, centralizar.
Mediana	Orden de valores pares e impares, semisuma, porcentajes, orden creciente, paralelas y perpendiculares al eje, producto cartesiano, vértices superiores.	Expresiones matemáticas, símbolos numéricos, tablas, lengua natural escrita, gráficas (histograma, de barras y poligonal).	Valores centrales, distribución de datos, frecuencia absoluta acumulada, variables, intervalos.
Moda	Producto cartesiano, modalidades no ordenables, área, figuras geométricas (rectángulos), porcentajes.	Expresiones matemáticas, símbolos numéricos, tablas, lengua natural escrita, gráficas.	Distribución cuantitativa, más veces, variable cuantitativa, frecuencias, mayor número, intervalos, valores extremos, intervalo modal, distribuciones continuas, encuestas de opinión.

De esta Tabla 2 resulta que la secuencia de enseñanza de las medidas de tendencia central que favorece ese libro de texto es comenzar por la media, después la mediana y por último la moda. No se incluye un tratamiento específico de la media ponderada, el cual resulta necesario para contextos cotidianos, como el del elevador y las calificaciones obtenidas en diferentes semestres que proponen Pollatsek *et al*. (1981). Para la enseñanza, Nortes (1991) sugiere que, "con temas de la vida ordinaria, el docente realice cálculos mediante medidas representativas de un colectivo, (…) confeccione tablas y trace gráficas". (pp: 93-97)

Propuesta institucional de primaria (SEP, 2011). La Tabla 3 caracteriza el tratamiento de las medidas de tendencia central en los libros de texto de matemáticas vigentes. En toda la primaria sólo se dedican seis lecciones a las medidas de tendencia central, que se destinan al último bloque, el V, en los grados 4° y 5°, y al bloque III en sexto grado. Esto revela la poca importancia otorgada a este contenido en la primaria, en la que tampoco se incluye la media ponderada como tal.

Tabla 3. Caracterización de las lecciones de medidas de tendencia central de los libros de texto de primaria.

Ideas fundamentales de estocásticos: Variable estocástica y muestra.						
Grado	**Bloque**	**Lección del libro de texto**	**Contenido**	**Otros conceptos matemáticos**	**Recursos semióticos**	**Términos empleados**
4°	V	105. ¡Pasteles, pasteles!	Moda	Suma, diferencia, menos de un millón de habitantes, plano cartesiano.	Tablas, mapa de la República Mexicana, gráfica de barras.	Mayor/menor, número de habitantes, promedio, censo, esperanza de vida.
		106. Cuando la moda se acomoda	Moda	Plano cartesiano y operaciones básicas.	Tabla, gráfica de barras, figuras.	Frecuencia, riesgo.
5°	V	97. Vamos por una beca	Media (promedio).	Cuarto bimestre, valores en gramos, peso real y operaciones básicas.	Tablas.	Promedio, promedio mínimo, posibilidades, mejor estimación.

		98. ¿A todos les va igual?	Media (promedio).	Operaciones básicas.	Tabla.	Muestra, moda, media, representativa.
6°	III	52. La edad más representativa	Aplicaciones de media (promedio), mediana y moda en resolución de problemas.	Números de dos cifras menores de 90, unidades de medida (años), orden numérico, operaciones básicas.	Lengua natural escrita, figuras, signos numéricos.	Media aritmética, promedio, mediana, datos de edades.
		53. Número de hijos por familia	Aplicaciones de media (promedio), mediana y moda en resolución de problemas.	Números de dos cifras menores a 30, operaciones básicas.	Tablas de datos, lengua natural escrita, signos numéricos, figuras.	Conjunto de datos, valores, muestra, encuesta, medidas representativas.

Reactivo 25. La Tabla 4 caracteriza al reactivo relativo a la media ponderada que se incluyó en el cuestionario diagnóstico aplicado a 52 estudiantes normalistas.

Tabla 4. Caracterización del reactivo 25 de media ponderada y porcentajes de tipos de respuesta.

Situación referente	Ideas fundamentales de estocásticos	Otros conceptos matemáticos	Recursos semióticos	Términos empleados
El promedio de las edades de Manuel, Amalia y de sus nueve nietos es de 25 años. Se sabe que Manuel es 3 años mayor que Amalia y que ella tiene 65 años. ¿Cuál es el promedio de edad únicamente de sus nueve nietos? a) 15.7 años b) 52.6 años c) 14.6 años d) 9 años	Variable estocástica, Muestra	Orden, operaciones básicas.	Lengua natural escrita, signos aritméticos.	Promedio, edades, mayor que.
Respuestas correctas: 20 (38.46 %)	Diez no dieron evidencia de cómo obtuvieron el resultado correcto. Nueve mostraron un conocimiento de cálculo y uno, un conocimiento funcional.			

Respuestas incorrectas: 20 (38.46 %)	Siete expresaron conocimiento de cálculo; dos, conocimiento funcional aunque contestaron incorrectamente.
Respuestas omitidas: 12 (23.07 %)	

20 estudiantes no identificaron la idea de muestra, dado que no reconocieron el total de personas incluidas en la situación planteada; por lo tanto, la idea de variable estocástica tampoco se puso en juego, pues no dieron el resultado correcto de la media ponderada. De los siete estudiantes (13.46 %) que respondieron que el promedio era nueve años, cuatro (7.69 %) efectuaron operaciones básicas y sólo uno dio evidencia de haber utilizado una expresión matemática (véase la Figura 1). Once estudiantes respondieron 14.36 años; tres (5.76 %) realizaron operaciones básicas y uno una expresión matemática.

Dos estudiantes (3. 84 %) dieron como respuesta 52.6 años, sin mostrar el procedimiento seguido. De acuerdo con Pollatsek *et al*. (1981), al desarrollar el algoritmo de la media simple, ellos mostraron sólo un conocimiento de cálculo, es decir, obtuvieron un promedio por su algoritmo (Mokros y Russell, 1995).

Diez de las 20 contestaciones correctas al reactivo no dieron evidencia del procedimiento seguido, por lo que no se les clasificó en ninguno de los tres tipos de conocimiento. A las otras 10 respuestas correctas que sí lo mostraron, se les clasificó como sigue:

Cálculo. Nueve (17.30 %) estudiantes, no usaron una expresión matemática general (fórmula) y presentaron dificultades para resolver correctamente sus operaciones básicas. El estudiante restante que operó correctamente (véase la Figura 1), mostró conocimiento deficiente de la expresión matemática de la media ($\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$), por ello, tuvo deficiencias en el cálculo del promedio por su algoritmo, según Mokros y Russell (1995).

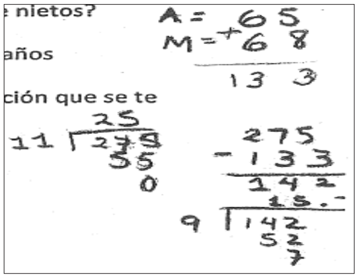


Figura 1. Solución correcta con operaciones básicas.

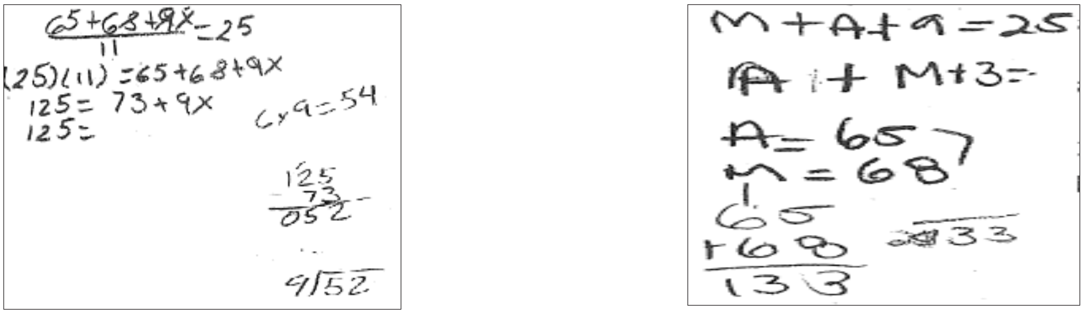


Figura 2. Soluciones incorrectas, pero parecen aplicar una expresión matemática

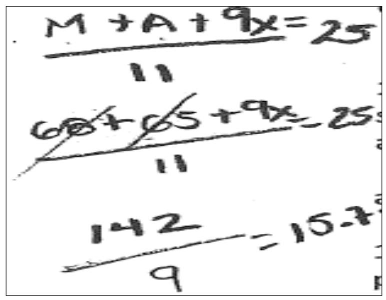


Figura 3. Solución correta al aplicar una expresión matemática

Funcional: Tres estudiantes (5.76 %) mostraron un conocimiento funcional incipiente al plantear su solución con el recurso de una expresión matemática como su conocimiento de la media simple; ello evidencia que identificaron el promedio como algo razonable, según Mokros y Russell (1995). Las operaciones de dos estudiantes fueron incorrectas (véase la Figura 2), lo que exhibió su conocimiento deficiente de los algoritmos aritméticos básicos (otros conceptos matemáticos). El tercer estudiante sí contestó correctamente (véase la Figura 3), aunque su notación de la media aritmética no parece ser la convencional ($\bar{x}$).

Analógico: Ningún estudiante agregó a su respuesta algún comentario que aludiera a una analogía, aunque aclaramos que el reactivo 25 (véase en la Tabla 4), o algún otro del cuestionario, no planteó una pregunta con esta orientación.

Comentarios

Tanto para la Licenciatura en Educación Básica (Primaria; SEP, 2012) como para la Educación Primaria (SEP, 2011) se incluyen las medidas de tendencia central (moda, mediana y media aritmética), pero no la media ponderada. El Conocimiento para la Enseñanza de las medidas de tendencia central en el libro de texto utilizado en la escuela normal comienza con la media aritmética, después la mediana y al último la moda. En primaria se inicia con la moda, luego la media y por último la mediana.

En general, el conocimiento de los estudiantes de la media es deficiente, a pesar de los 12 años de escolarización previa. Se identificaron dificultades en las ideas de variable estocástica y de muestra. Sólo 38.46% de los futuros docentes identificaron la media ponderada; sin embargo, de quienes mostraron su procedimiento, el 17.30 % de las respuestas reveló conocimiento de cálculo de la media y sólo un estudiante reveló conocimiento funcional, según Pollatsek *et al*. (1981); e interpretamos su aplicación de la media simple al menos como “algo razonable” (Mokros y Russell, 1995) que lo condujo a la respuesta correcta, aunque no lo expresó como tal. El término identificado por los estudiantes fue el de *promedio*, pero sólo como media simple. El conocimiento matemático de la media ponderada de 16 (30.76 %) estudiantes, se basó en el cálculo de la media aritmética; otros tres, (5.76 %), si bien mostraron un conocimiento funcional, éste fue muy incipiente.

Particularmente, los resultados obtenidos subrayan el papel preponderante que juegan los formadores de docentes no sólo en el cumplimiento de lo prescrito en el programa de estudios (en el mejor de los casos), sino en la incorporación de resultados de investigación en sus estrategias de enseñanza y en el diseño de sus instrumentos de diagnóstico y de evaluación de los futuros docentes.

Referencias bibliográficas

Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics* (pp. 83-104). Westport, CT: Ablex.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Holland: Reidel.

Flores L., P. (2002) *La predicción y el azar: praxis, creencias, saberes y conocimientos del docente de educación primaria*. Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav.

Flores M, P. (2009). *Medios y enseñanza de estocásticos en el tercer ciclo de educación primaria.* Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav.

Heitele, D. (1975). An epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics*. 6(2), 187-205.

Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers’ topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39 (*4*), 372-400.

López, J. (2006). *Comprensión de la Ley de los Grandes Números en el Tercer Grado de Secundaria*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Mokros, J. & Russell, S. J. (1995). Children's concepts of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education*. 26 (1), 20-39.

Nortes, A. (1991). Los cálculos. En *Encuestas y precios* (Capítulo 4). España: Síntesis.

Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En Filloy (Ed.) *Matemática Educativa, treinta años* (pp. 257-281). México: Santillana-Cinvestav.

Perrusquía, E. (1998). *Probabilidad y Aritmética: estudio en el Estadio Medio. Dificultades de Interpretación*. Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav.

Pollatsek, A., Lima, S., Well, A. D. (1981). Concept or Computation: Student's Understanding of the Mean. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 12, No. 2, pp. 191-204. Springer.

Salcedo, J. (2013). *Razonamiento Probabilístico en el Bachillerato Tecnológico.* Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav.

SEP (2011). *Plan y programas de la Escuela Primaria 2011*. México.

SEP (2012). *Planes y programas de la Licenciatura en Educación Primaria 2012*. México.

Vasilachis, I. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa*. España: Gedisa.

IDENTIFICACIÓN DE NIVELES DE RAZONAMIENTO ALGEBRAICO A CARGO DE MAESTROS DE EDUCACIÓN BÁSICA

Cecilia Gaita, Francisco Ugarte, Jesús Flores, Mihály Martínez
Pontificia Universidad Católica del Perú. (Perú)
cgaita@pucp.edu.pe, fugarte@pucp.edu.pe, jvflores@pucp.pe, martinez.ma@pucp.edu.pe

RESUMEN: En este artículo presentamos los resultados de una investigación realizada con maestros de educación primaria, a quienes se les solicitó reconocer, en las respuestas de sus estudiantes, rasgos de desarrollo del razonamiento algebraico e identificar los niveles de algebrización adquiridos. Para ello se utilizaron actividades sobre patrones geométricos. Los resultados muestran que, si bien los docentes declaran de manera general conocer cuáles son los objetos y procesos propios de la actividad algebraica, no reconocen en las respuestas de sus estudiantes los procesos de unitarización y formalización. Por lo que se concluye la necesidad de diseñar actividades que contribuyan a dicho fin.

Palabras clave: razonamiento algebraico, profesores, niveles, patrones

ABSTRACT: This article shows the results of a research that was carried out with primary school teachers. They were asked to recognize, in their students answers, some features of algebraic thinking development and to identify the acquired algebraic knowledge levels. With this respect, some activities about geometric patterns were used. The results show that the teachers generally state that they know which the objects and processes are typical of the algebraic activities, but they don't recognize, when checking students' answers, the unitary and formalization processes. Therefore, the conclusion is focused on the need of designing activities for achieving this purpose.

Key words: algebraic thinking, teachers, levels, patterns

Introducción

En relación a la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, en los últimos años se han desarrollado numerosos trabajos con distintos focos de atención, tal como lo señala Kieran (2006). Por un lado, tenemos las investigaciones sobre la naturaleza del álgebra; algunas centradas en el álgebra como un instrumento de modelización matemática (Chevallard, 1994; Bolea, 2003; García, 2008; Ruíz Munzón, 2010; Gascón, 2011; Fonseca, Gascón y Oliveira Lucas, 2014; Ruíz Munzón, Bosch y Gascón, 2015), otras centradas en el razonamiento algebraico y en la elaboración de un modelo que contemple niveles de algebrización para estudiar la actividad algebraica, tanto en el nivel elemental como en el superior (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2012; Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012; Godino, Aké, Gonzato, y Wilhelmi, 2014; Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa, 2015). Este último grupo de investigaciones han sido desarrollados desde el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.

En relación al desarrollo del razonamiento algebraico, Radford (2012) señala que este no es de ninguna manera natural, sino el producto de una reflexión sofisticada. En esa misma línea, Cai y Knuth (2011) plantean la necesidad de que los maestros compartan una visión ampliada del álgebra a fin de que estén capacitados para transformar las tareas matemáticas escolares hacia el logro de niveles progresivos de algebrización.

De estas investigaciones, conjeturamos que los docentes de matemáticas requieren tener conocimientos sobre el desarrollo del razonamiento algebraico, de modo que puedan identificar los niveles en los que se encuentran sus estudiantes, para luego propiciar que estos evolucionen. De allí nuestro interés, en primer lugar, de evaluar los conocimientos didáctico matemáticos de un grupo de maestros en ejercicio, al analizar respuestas, dadas por estudiantes que finalizaron la educación básica, a tareas que involucran objetos y procesos algebraicos.

Marco teórico

Tomamos como base el modelo teórico de razonamiento algebraico elemental (RAE) desarrollado en Godino et al. (2014), según el cual definen niveles primarios de algebrización; es decir, estadios del funcionamiento de conocimientos matemáticos al abordar una situación problema. Esto se hace en base a cuatro criterios: generalización, unitarización, formalización y ostensión, y transformación. Así, aquellas soluciones en las que el estudiante recurra a objetos particulares y en las que, aunque reconozca la relación de un término con el siguiente, no identifique la regla que generaliza dicha relación, serán consideradas de nivel 0. Serán de nivel 1, aquellas en las que intervienen objetos intensivos (generales) que se reconocen explícitamente a través de lenguajes gestual, numérico, natural o icónico, pero no simbólico literal. Una práctica matemática será considerada en un nivel de razonamiento algebraico 2, siempre que la generalización se exprese mediante un lenguaje simbólico, asociada a la información del contexto pero que no se realicen operaciones con dichos símbolos. Finalmente, en un nivel consolidado de algebrización, nivel 3, se consideran aquellas soluciones en las que intervienen objetos intensivos representados de manera simbólica-literal y que se realicen operaciones con ellos.

Para el análisis de las respuestas de los docentes, se consideró el trabajo de Godino et al. (2015), en el que se definen categorías para los conocimientos didáctico- matemáticos sobre el RAE de un profesor de matemáticas.

Método

Esta investigación sigue los supuestos de la metodología cualitativa investigación-acción ya que se focaliza en el trabajo con profesores en ejercicio, los cuales reflexionan sobre su forma de trabajo, organizados en comunidades de investigadores (Serres, 2007). En una primera etapa, se consideraron actividades de tipo generacional, que resultan del estudio de patrones geométricos, las que fueron aplicadas a estudiantes que habían culminado la educación básica (16 años).

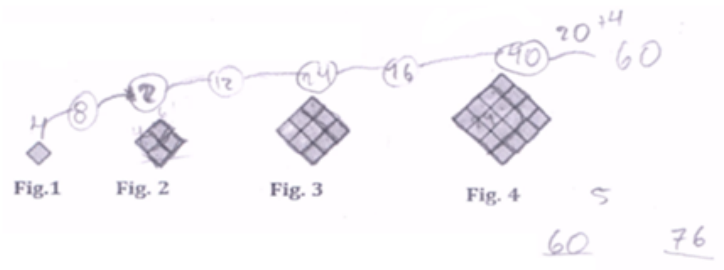
Posteriormente, se seleccionaron respuestas que permitían explorar la adquisición de diferentes niveles o grados de razonamiento algebraico. Dichas soluciones fueron presentadas a doce profesores de educación básica que se encontraban realizando un programa de formación continua, en el que se había estudiado previamente el modelo teórico para el RAE considerado en Godino, et al. (2014). Los docentes desarrollaron un cuestionario que buscaba identificar los conocimientos didáctico-matemáticos que poseían en relación a los objetos matemáticos presentes en el álgebra elemental, así como su capacidad para reconocer rasgos del razonamiento algebraico en las respuestas de los estudiantes. El análisis de las respuestas fue complementado con entrevistas.

Resultados

El análisis de las respuestas nos permite concluir que los docentes reconocen cuáles son los objetos matemáticos presentes en prácticas consideradas algebraicas, que pueden desarrollarse en la educación primaria. Señalan, por ejemplo: la búsqueda de patrones en secuencias numéricas o de figuras, las propiedades de las operaciones aritméticas, las ecuaciones, las situaciones de variación en contextos de proporcionalidad, así como las funciones. Sin embargo, la mayoría de los docentes asocia estos temas a determinados niveles de razonamiento algebraico; por ejemplo, consideran que actividades sobre búsqueda de patrones solo permiten explorar razonamientos de nivel 0 o 1, mientras que las ecuaciones y funciones son asociadas a niveles 2 y 3. Es decir, los docentes no reconocen que hay procesos propios de la actividad matemática algebraica, tales como la generalización, unitarización, formalización y ostensión, así como la transformación, que pueden emerger al abordar situaciones sobre los diferentes tópicos señalados. Y que será a partir de la presencia o ausencia de dichos procesos que se podrá asignar un nivel de razonamiento a la solución de un determinado estudiante.

Para propiciar la identificación de dichos rasgos, se presentaron tareas como la mostrada en la figura 1.

A un estudiante se le pidió determinar el número de cuadraditos que formaban las siguientes figuras y, a partir de ello, determinar cuántos se necesitarían para formar las de la posición 5, 8, 30 y *n*.
La respuesta del estudiante A se muestra a continuación:



¿A qué nivel de razonamiento algebraico asociaría esta solución?

Figura 1. Primera tarea propuesta a los maestros para identificar el nivel de RAE

El estudiante A resolvió otra tarea: determinó el número de segmentos con los que se formaban las figuras. A través de un recuento, el estudiante A reconoció que, de figura en figura, el número de segmentos no se incrementaba de manera constante pero sí respondía a una sucesión de la forma 8, 12 y 16 por lo que el término siguiente debía construirse con 20 segmentos más. El estudiante no necesitó dibujar la figura de la posición 5 para concluir que se requerían 60 segmentos. Sin embargo, no pudo determinar la cantidad correcta de segmentos que generaría la figura 8 (señaló que eran 76), lo que muestra que no identificó la regla que generalizaba dicha relación.

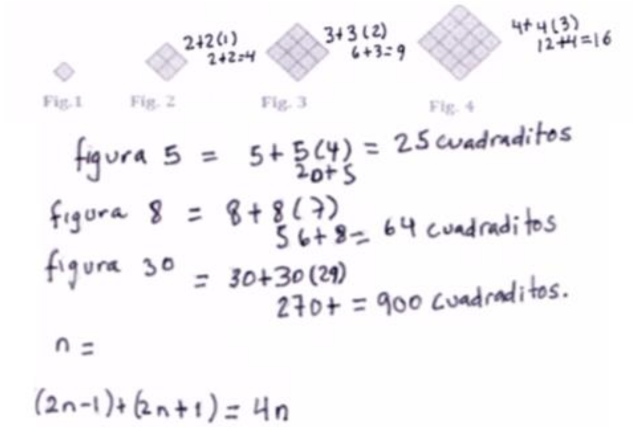
Se esperaba que los maestros reconocieran que, si bien el estudiante A había respondido una pregunta distinta a la que se le había formulado, sí había intentado hallar un patrón aunque sin éxito. Se esperaba también que los maestros argumentaran su respuesta en base a la presencia o no de procesos de generalización, que es uno de los procesos fundamentales en el desarrollo del razonamiento algebraico elemental.

Si bien la mayoría de profesores asignó a esta solución el nivel 0 de algebrización, los argumentos dados se basaron en que el estudiante no *había usado* álgebra y que su solución estuvo centrada en procedimientos aritméticos; en ningún caso se hizo mención a que el estudiante solo operó con objetos particulares y que solo hizo uso de un lenguaje icónico y numérico.

De otro lado, los maestros que sí reconocieron una búsqueda de generalización, asignaron a la solución del estudiante A un nivel intermedio de algebrización, dando como argumento que el estudiante sí había descubierto la regla de formación pero que no había logrado simbolizar la regla general. Esta afirmación, muestra que dichos maestros no reconocieron que el estudiante solo logró determinar el término inmediato siguiente y que la asignación de 76 segmentos para la figura 8 era incorrecta. El resto de maestros señaló que, dado que el estudiante A había respondido otra pregunta, se le debía asignar el nivel 0. En estas respuestas se evidencia que dichos maestros se centran en la solución ideal, sin preocuparse por identificar los procesos involucrados en la actividad matemática del estudiante.

Otra de las tareas presentada a los maestros se muestra en la figura 2.

A un estudiante se le pidió determinar el número de cuadraditos que formaban las siguientes figuras y, a partir de ello, determinar cuántos se necesitarían para formar las de la posición 5, 8, 30 y *n*.
La respuesta del estudiante B se muestra a continuación



¿A qué nivel de razonamiento algebraico asociaría esta solución?

Figura 2. Segunda tarea propuesta a los maestros para identificar el nivel de RAE

El estudiante B realizó un recuento particular: contó el número de cuadraditos de una fila y le sumó el producto del número de cuadraditos de una fila por la cantidad de filas restantes. Esto lo hizo para las primeras cuatro figuras, pero para las figuras 5, 8 y 30 ya no recurrió nuevamente al recuento; lo que evidencia el reconocimiento explícito de intensivos a través de un lenguaje numérico. Intentó establecer la relación entre un término general y el número de cuadraditos empleando un lenguaje simbólico, aunque sin éxito.

Se esperaba que los maestros reconocieran que el estudiante B había encontrado la regla general (la cantidad de cuadraditos es igual al número de la figura más el producto de dicho número y el predecesor), pero que no logró expresarla adecuadamente de manera simbólica; ello ubicaría la solución en el nivel 1, con algunos rasgos del nivel 2.

La mitad de los docentes reconoció que la estrategia de solución del estudiante B se basó en el recuento de cuadraditos para casos particulares y que luego identificó la regla general. Más aún, señalaron que la expresión simbólica obtenida: $(2n\text{-}1)+(2n+1)=4n$, era correcta y ubicaron la solución en el nivel 3, nivel consolidado de algebrización. Dichos maestros no reconocieron que el estudiante no había simbolizado correctamente.

Otro grupo de maestros señaló que, si bien el estudiante B encontró regularidades y estableció relaciones, no logró formalizar adecuadamente la generalización, por lo que le asignaron el nivel 1 de razonamiento algebraico.

Finalmente, un maestro no reconoció el patrón identificado por el estudiante B (para la figura n se requieren $n+(n\text{-}1)n$ cuadraditos), solo consideró la respuesta final y señaló que en la generalización el estudiante había considerado que el número de cuadraditos necesario para formar la figura n era n^2.

Consideraciones finales

Los docentes reconocen que la búsqueda de patrones y de relaciones entre variables, así como la manipulación de expresiones algebraicas y la generalización de propiedades de operaciones aritméticas son objetos y procesos matemáticos presentes en la actividad algebraica. Sin embargo, tienen dificultad para analizar las respuestas de los estudiantes desde el modelo RAE. Así por ejemplo, en aquellas respuestas en las que los estudiantes trataron de expresar la regla de formación con símbolos aunque de manera incorrecta, los docentes no reconocieron un proceso de formalización.

La investigación realizada permitió reconocer los conocimientos didáctico- matemáticos que poseían docentes de primaria en relación a los niveles de desarrollo del pensamiento algebraico: los docentes de primaria no están familiarizados con la manipulación de símbolos algebraicos ni con la obtención de una expresión simbólica para el término general de una sucesión. De otro lado, la falta de comprensión del significado de los criterios de generalización, unitarización y formalización no permitió que identificaran en las respuestas de los estudiantes los rasgos de un razonamiento algebraico.

Referencias bibliográficas

Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 29. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.

Cai, J. y Knuth, E. (2011). *Early algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives.* Dordrecht: Springer.

Chevallard, Y. (1994). Enseignement de l'algèbre et transposition didactique. *Actes du Séminaire de l'Associazione Mathesis, Université de Turin, 52*(2), 175-208.

Fonseca, C., Gascón, J., y Oliveira Lucas, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(3), 289-318

García, F. (2008). El álgebra como instrumento de modelización. Articulación del estudio en las relaciones funcionales en la educación secundaria. *Investigación en educación matemática: comunicaciones de los grupos de investigación del XI Simposio de la SEIEM, celebrado en La Laguna del 4 al 7 de septiembre de* 2007, 71-92.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática*, *14*(2), 203-231.

Godino, J., Castro, W., Ake, L. y Wilhelmi, M.R. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema, 26*(42B), 483-511.

Godino, J., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2012). Niveles de razonamiento algebraico elemental. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. Penalva, F. García, L. Ordóñez (Eds.) *Investigación en Educación Matemática* (Vol. *XVI,* pp. 285-294).

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 199–219

Godino, J., Neto, T., Wilhelmi, M., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *8*, 117-142.

Godino, J., Aké, L.P., Contreras, A., Díaz, C., Estepa, A.F., Blanco, T., …, Wilhelmi, M.R. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(1), 127-150.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp.11-49), Rotterdam: Sense Publishers.

Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA*, *6*(4), 117-133.

Ruíz Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Ruíz Munzón, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2015). El problema didáctico del álgebra elemental: Un análisis macro-ecológico desde la teoría antropológica de lo didáctico. *REDIMAT, 4*(2), 106-131.

Serres, Y. (2007). Un estudio de la formación profesional de docentes de matemática a través de investigación-acción. *Revista de Pedagogía*, *28*(82), 287-310.

DESARROLLO DE LA COMPETENCIA DIGITAL EN LA FORMACIÓN DE FUTUROS PROFESORES A TRAVÉS DEL ANÁLISIS SOBRE SU PROPIA PRÁCTICA

Silvia Carvajal, Adriana Breda, Vicenç Font
Universitat de Barcelona. (España), Universidad de los Lagos. (Chile), Universitat de Barcelona. (España)
scarvajal@ub.edu, adriana.breda@gmail.com, vfont@ub.edu

RESUMEN: El objetivo de este trabajo es relacionar la competencia en análisis didáctico con el desarrollo de la competencia digital. Los sujetos son una muestra de alumnos de una promoción del Máster Interuniversitario de Formación del Profesorado de Educación Secundaria de la especialidad de Matemáticas de Catalunya (España). Estos alumnos en la asignatura del Prácticum II diseñaron una unidad didáctica y en la asignatura de Trabajo Final de Máster utilizaron los criterios de idoneidad didáctica que propone el EOS para: a) Valorar la unidad que diseñaron e implementaron en el Prácticum II. b) Diseñar una propuesta de mejora de la unidad didáctica implementada en el Prácticum II que mejoraba algunos de los aspectos que la valoración realizada indicaba que se debían y podían mejorar. Se observó como a través de la reflexión sobre la propia práctica, la mejora de la competencia en análisis e intervención didáctica incide en la mejora de otras competencias, como la competencia digital.

Palabras clave: educación matemática, formación, competencias profesionales, análisis didáctico, competencia digital

ABSTRACT: This work is aimed at establishing a relationship between the didactic analysis competence and the digital competence development. The research included a sample of students from the Interuniversity Master´s Degree for secondary school teacher´s training in Cataluña (Spain). In the subject Practicum II, the students designed a didactic unit, while in the subject Master’s Degree Final Report they used the didactic suitability criteria that the program proposes: a) To assess the unit they designed and implemented, as a result of the subject Practicum II. b) To design a proposal to improve the didactic unit implemented in the subject Practicum II which improved some possible aspects, according to their evaluation. The research showed how through the reflection of the own practice, the competence improvement on the didactic analysis and intervention, influence on the improvement of other competences, as the digital one.

Key words: mathematic education, building of professional competences, didactic analysis, digital competence

Marco de referencia

El enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007; Font, Planas y Godino, 2010 y Font y Godino, 2011) propone un modelo de análisis didáctico de procesos de instrucción con cinco niveles:

1) Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas.
2) Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.
3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.
4) Identificación del sistema de normas y metanormas.
5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

Este enfoque considera que los futuros profesores, a partir de estas herramientas, deben desarrollar una competencia que les permita mejorar el análisis didáctico.

Objetivos

El principal objetivo de esta investigación es relacionar el desarrollo de la competencia digital con el desarrollo de la competencia en análisis e intervención didáctica, en particular relacionar la valoración de la idoneidad mediacional con la valoración de la idoneidad matemática que resulta de la incorporación de recursos TIC.

Sujetos y metodología

Nuestros sujetos de estudio son la promoción de alumnos del curso académico 2015-2016 del Máster Interuniversitario de Formación del Profesorado de Educación Secundaria de la especialidad de Matemáticas de Catalunya (a partir de ahora, MFPSM). Estos alumnos en la asignatura del Prácticum II (a partir de ahora, PII) diseñaron una unidad didáctica y en la asignatura de Trabajo Final de Máster (a partir de ahora, TFM) utilizaron los criterios de idoneidad didáctica que propone el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática para:

a) Valorar su propia práctica, en concreto la unidad que diseñaron e implementaron en el PII.
b) Diseñar una propuesta de mejora de la unidad didáctica implementada en el PII que mejoraba algunos de los aspectos que la valoración realizada indicaba que se debían y podían mejorar. Esta propuesta debía estar justificada a través de diversa literatura científica.

A continuación, como paso previo para poder evaluar el desarrollo de la competencia digital, analizamos los siguientes documentos relacionados con las asignaturas de PII y TFM:

1) Las unidades didácticas diseñadas en la asignatura de PII.
2) La memoria escrita del TFM.

A partir del análisis de estos dos documentos y de la caracterización de la competencia digital realizada en Carvajal y Font (2016) tuvimos suficientes evidencias para poder inferir un nivel de competencia digital de todos los alumnos de la muestra en dos momentos diferentes: después de la lectura de la memoria del PII y después de la lectura de la memoria del TFM.

A continuación, siguen las dimensiones y los descriptores de la caracterización de la competencia digital propuesta en Carvajal y Font (2016). Por motivos de espacio hemos especificado la descripción de los tres niveles de la primera dimensión y no hemos especificado la descripción de los diferentes niveles del resto de descriptores:

Tabla 1. Caracterización de la competencia digital realizada por Carvajal y Font (2016)

Dimensión	Descriptor
1. Información específica	1. Busca y hace buscar a sus alumnos información en red, acceder a ella y seleccionar recursos de forma eficaz. Nivel 1: Utiliza la tecnología digital para buscar y hacer buscar información matemática en red en buscadores generalistas. Nivel 2: Utiliza la tecnología digital para buscar y hacer buscar información matemática en red en plataformas/canales/fuentes específicas de matemáticas. Nivel 3: Utiliza la tecnología digital para buscar y hacer buscar información matemática en red en plataformas/canales/fuentes matemáticas específicas sabiendo distinguir y valorar entre la calidad matemática de las fuentes y/o sus contenidos.
	2. Compara, contrasta, evalúa e integra información matemática de forma crítica. Nivel 1: Sabe que no toda la información matemática que se encuentra en Internet es fiable. Nivel 2: Sabe comparar y contrastar diferentes fuentes de información matemática. Nivel 3: Es crítico/a con la información que encuentra contrastando su validez y credibilidad e integrándola en sus creaciones matemáticas.
2. Creación y uso de contenidos específicos	1. Desarrolla contenidos matemáticos para su clase mediante diferentes formatos y/o diseña tareas en las que los alumnos tengan que utilizar diferentes programas informáticos.
	2. Modifica, perfecciona y combina los recursos existentes para crear contenido y conocimiento nuevo, original y relevante.

3. Almacenamiento y comunicación	1. Entiende, gestiona, almacena y selecciona diferentes dispositivos/ servicios en donde almacenar los recursos digitales y/o la información matemática.
	2. Interacciona por medio de diversos dispositivos y/o aplicaciones digitales para establecer contacto social.
	3. Utiliza tecnologías y medios para los procesos colaborativos y para la creación y construcción común de recursos, conocimiento y contenido matemático.

A continuación, observamos la primera tabla con la que inferimos el nivel de competencia digital de los alumnos del MFPSM después de la lectura de la memoria del PII.

La tabla se confeccionó de la siguiente manera:

- En la primera columna: se incluyen a los alumnos objeto de estudio. Por cuestiones de privacidad de datos en lugar de sus nombres y apellidos se enumeran como A1, A2….
- En la segunda columna: se analiza qué alumnos utilizaron recursos digitales en sus prácticas y, por el contrario, qué alumnos prescindieron de los mismos.
- En la tercera columna: se incluye el nivel de competencia digital que los alumnos poseían después del periodo de prácticas utilizando la caracterización anteriormente mencionada.

Tabla 2. Nivel de competencia digital de diez alumnos después del PII

Alumno	Recursos digitales utilizados en el PII	Nivel de competencia digital después del análisis del PII
A1	No	N1
A2	Sí	N1
A3	Sí	N2
A4	Sí	N1
A5	Sí	N2
A6	No	N1
A7	No	N1
A8	Sí	N2

A9	Sí	N1
A10	No	N2
...	…	…

Por cuestión de espacio, únicamente hemos incluido en la tabla a los diez primeros alumnos y nos hemos centrado en los resultados del análisis del alumno A1. Una vez leída su memoria de prácticas y analizados sus comentarios, podemos afirmar que el alumno A1 no utiliza los recursos digitales en la planificación ni en la implementación de su unidad didáctica y tiene un nivel 1 de competencia.

A partir del análisis del segundo documento y de la caracterización de la competencia digital realizada por Carvajal y Font (2016) tuvimos suficientes evidencias para poder inferir un nivel de competencia digital de todos los alumnos de la muestra después de la lectura de la memoria del TFM.

La tabla se confeccionó siguiendo los mismos criterios que la tabla 2.

Tabla 3. Nivel de competencia digital de los mismos diez alumnos después del TFM

Alumno	Recursos digitales utilizados en la propuesta de mejora del TFM	Nivel de uso de los recursos digitales después del análisis del TFM
A1	Sí	N2
A2	Sí	N2
A3	Sí	N3
A4	Sí	N3
A5	Sí	N3
A6	No	N2
A7	Sí	N2
A8	Sí	N3
A9	Sí	N2
A10	Sí	N3
...	...	...

En este caso el alumno A1 se le asignó un nivel 2 de competencia digital ya que a partir de sus comentarios tuvimos evidencias para inferir los siguientes niveles de competencia digital en cada uno de los descriptores:

Dimensión: **Información específica**

Descriptor: 1. Busca y hace buscar a sus alumnos información en red, acceder a ella y seleccionar recursos de forma eficaz.

Nivel: 3

Consideramos que este descriptor se debe valorar con un nivel N3 ya el futuro profesor explica que las propuestas de mejora de su unidad didáctica las encontró por medio de una búsqueda en Internet en la que consultó fuentes matemáticas específicas para profesores:

A1: “La actividad 1 la he copiado literalmente de la Copa Cangur: http://www.cangur.org/la-copa”

Dimensión: **Información específica**

Descriptor: 2. Compara, contrasta, evalúa e integra información matemática de forma crítica.

Nivel: 2

Consideramos que este descriptor se debe valorar con un nivel N2 ya el futuro profesor escoge este artículo entre diferentes actividades existentes en Internet en las que se trabajan los polinomios a nivel de 3° ESO:

A1: “Esta actividad está basada en el artículo de Romà Pujol, Lluís Bibiloni y Jordi Deufeu [5]”

Dimensión: **Creación y uso de contenidos específicos.**

Descriptor: 1. Desarrolla contenidos matemáticos para su clase mediante diferentes formatos y/o diseña tareas en las que los alumnos tengan que utilizar diferentes programas informáticos.

Nivel: 3

Consideramos que este descriptor se debe valorar con un nivel N3 ya el futuro profesor desarrolla diferentes GeoGebras para su clase:

A1: “Nosotros como profesores les enseñamos a introducir un polinomio en el GeoGebra y ellos harán una lista de polinomios simples para que las vayan analizando. Por ejemplo, les podemos poner rectas con pendiente negativa y con pendiente positiva, parábolas en las que cambia el término independiente y algunas veces corta una vez al eje, otras no corta a los ejes o corta dos veces, etc.”.

Dimensión: **Creación y uso de contenidos específicos.**

Descriptor: 2. Modifica, perfecciona y combina los resultados existentes para crear contenido y conocimiento nuevo, original y relevante.

Nivel: 2

Consideramos que este descriptor se debe valorar con un nivel N2 ya que el futuro profesor modificó y mejoró actividades existentes en Internet para su posterior uso en el campus virtual:

A1: “Los alumnos no utilizaban libro de texto. Elaboré diferentes actividades y apuntes que colgué en el campus virtual”.

Dimensión: **Almacenamiento y comunicación**

Descriptor: 1. Entiende, gestiona, almacena y selecciona diferentes dispositivos/servicios en donde almacenar los recursos digitales y/o la información matemática.

Nivel: 1

Consideramos que en este descriptor la valoración es N1 debido a que el profesor no realiza ninguna alusión sobre este descriptor en todo el análisis.

***Dimensión*: Almacenamiento y comunicación**

Descriptor: 2. Interacciona por medio de diversos dispositivos y/o aplicaciones digitales para establecer contacto social.

Nivel: 1

Consideramos que en este descriptor la valoración es N1 debido a que el profesor manifiesta que no utilizó la pizarra digital como una herramienta de interacción con sus alumnos. Además, realiza comentarios valorativos de tipo negativo sobre las ventajas de este dispositivo tecnológico.

A1: “En lo que respecta al aula, creo que la pizarra digital era un recurso inútil que ocupaba espacio y no la utilizaba casi ningún profesor. A parte, no había un ordenador por pizarra, por lo que tenías que traer tu propio ordenador, encenderlo, conectarlo, esperar que se encendiera, etc. para después utilizarlo como una pizarra ordinaria. Personalmente, hubiera estado más cómodo con una pizarra tradicional y hubiera podido sacar a más alumnos a la pizarra y hacerlos trabajar paralelamente”.

***Dimensión*: Almacenamiento y comunicación**

Descriptor: 3. Utiliza tecnologías y medios para los procesos colaborativos y para la creación y construcción común de recursos, conocimiento y contenidos matemático.

Nivel: 3

Consideramos que en este descriptor la valoración es N3 debido a que el profesor manifiesta que usa el Moodle como herramienta de almacenamiento de información para los alumnos y que este uso es positivo en el desarrollo de su clase:

A1: "Al mismo tiempo se utilizaron medios temáticos que disponía el instituto, por ejemplo: el Moodle, que nos permitió enviar a todos los alumnos todo el material sin necesidad de hacer fotocopias".

En la siguiente tabla podemos observar de forma resumida los diferentes niveles de competencia digital de cada uno de los descriptores:

Tabla 4. Nivel de competencia digital de los mismos diez alumnos después del TFM

Dimensión	Descriptor	Niveles		
		N1	N2	N3
1. Información específica	1. Busca y hace buscar a sus alumnos información en red, acceder a ella y seleccionar recursos de forma eficaz.			X
	2. Compara, contrasta, evalúa e integra información matemática de forma crítica.		X	
2. Creación y uso de contenidos específicos	1. Desarrolla contenidos matemáticos para su clase mediante diferentes formatos y/o diseña tareas en las que los alumnos tengan que utilizar diferentes programas informáticos.			X
	2. Modifica, perfecciona y combina los recursos existentes para crear contenido y conocimiento nuevo, original y relevante.		X	
3. Almacenamiento y comunicación	1. Entiende, gestiona, almacena y selecciona diferentes dispositivos/ servicios en donde almacenar los recursos digitales y/o la información matemática.	X		
	2. Interacciona por medio de diversos dispositivos y/o aplicaciones digitales para establecer contacto social.	X		
	3. Utiliza tecnologías y medios para los procesos colaborativos y para la creación y construcción común de recursos, conocimiento y contenido matemático.			X

Si realizamos una ponderación entre los niveles de todos los descriptores observamos como el alumno A1, después de la reflexión sobre su propia práctica mejora su nivel de competencia digital del nivel 1 al nivel 2.

Principales conclusiones

Los alumnos del MFPSM no habían tenido en cuenta los criterios de idoneidad a la hora de la planificación y el diseño de la unidad didáctica implementada en el periodo de prácticas. Sin embargo, si utilizaron los criterios de idoneidad como herramienta para organizar la reflexión sobre su propia práctica en la propuesta de mejora (incluida en sus TFM).

Muchos de los alumnos del estudio que no habían incluido recursos digitales en sus prácticas, a partir de los criterios de idoneidad y de la reflexión sobre su propia práctica fueron conscientes de la necesidad de incluirlos en la propuesta de mejora. Otros, a pesar de utilizarlos durante el periodo de prácticas, decidieron realizar mayor número de actividades y problemas contextualizados en los que las TIC fuesen protagonistas. Como consecuencia se observa un aumento del nivel de desarrollo de la idoneidad mediacional y, en consecuencia, un aumento en dichos alumnos del desarrollo de la competencia digital.

Referencias bibliográficas

Carvajal, S. y Font, V. (2016). Caracterización de la competencia digital en la formación de profesores de matemáticas. *Revista del Congreso Internacional de Docencia Universitaria e Innovación (CIDUI)*, 3, 1-12.

Font, V. y Godino, J. D. (2011). Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato. En J. M. Goñi (Ed.), *Matemáticas: Investigación, innovación y buenas prácticas* (pp. 9-55). Barcelona: Graó y Ministerio de Educación.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33* (1), 89-105.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

APRENDIZAGEM BASEADA EM PROBLEMAS NA PERSPECTIVA DE PRÁTICAS INVESTIGATIVAS

Arlenes Buzatto Delabary Spada, Maria Elisabette Brisola Britto Prado
Universidade Anhanguera de São Paulo. (Brasil)
arlenes.delabary@catolica-to.edu.br, bette.prado@gmail.com

RESUMO: Este artigo é um recorte de uma pesquisa de doutoramento em Educação Matemática. O objetivo é o de analisar uma situação de Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP), enquanto Prática Investigativa, na prática de um professor. O referencial teórico escolhido aborda os conceitos de atividades investigativas na visão de Ponte (2006) e das metodologias ativas, segundo a orientação de Freire (2006); a Aprendizagem Baseada em Problemas é trabalhada na concepção de Berbel (2011) e Sebastiany & Bastos (2011). Utilizamos a metodologia de natureza qualitativa e instrumentos de observações feitas durante a atividade. Os dados coletados foram pré-analisados e, os primeiros resultados demonstram alterações na forma de ensinar os conceitos matemáticos por parte do professor e, consequentemente, em sua prática. Aponta também, receios quanto à utilização desta nova metodologia de ensino.

Palavras chave: metodologias ativas, ABP, atividades investigativas

ABSTRACT: This article is part of a bibliographical review about Mathematics' Education. Its aim is to analyze a Problem-Based Learning (PBL) situation, related to the teacher's researching practice. The selected theoretical framework is based on the concepts of researching activities, according to Ponte (2006) and the active methodologies, according to Freire (2006). It also includes the problem solving learning, according to Berbel (2011) and Sebastiany & Bastos (2011). We use a qualitative methodology and observation indicators applied during the activities. The obtained data were previously analyzed. The first outcomes showed alterations respected to the way of teaching mathematic concepts and, consequently, during their practical use. Finally, some recommendations about the use of this new methodology are also included in this article.

Key words: active methodologies, problem-based learning (PBL), research activities

Introdução

Novas formas de ensinar matemática nunca pareceram tão urgentes e cruciais quanto na atualidade. É fato que as formas de ensino tradicionais não conseguem mais suprir as necessidades de uma sociedade que está em constante mudança. A escola possui um papel fundamental nesse processo, pois enraizada em suas funções, está o dever de contribuir para a formação integral do indivíduo, ou seja, auxiliar a formá-lo enquanto sujeito cognitivo, social e político.

É preciso inovar em seu modo de formar. Aliás, inovação parece mesmo ser a palavra de ordem. Inovar nos processos, inovar nas estratégias, inovar nas relações que temos com nossos alunos e, principalmente, inovar em nossa forma de ensinar e também, de aprender. Nessa perspectiva, as Metodologias Ativas da Aprendizagem (MAA) ganham um destaque interessante, pois seu caráter ativo vem ao encontro de uma geração com essa mesma característica, com as mesmas necessidades de atuação.

Dentre as MAA, uma constitui o foco deste artigo. Trata-se da Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP) que traz, essencialmente, o fazer, o buscar, o investigar, o discutir, alterando assim, a postura do aluno frente à formação do seu conhecimento. Exige também, do professor, uma mudança em sua forma de compreender como o conhecimento é construído, além de agregar um novo item: a preocupação com a qualidade do que está sendo ensinado ao aluno.

O desafio parece ser alinhar os dois posicionamentos, ou seja, atender à demanda do currículo proposto e as necessidades de mudanças na forma que a matemática tem sido ensinada em nossas escolas.

Nessa perspectiva, objetiva-se neste artigo analisar uma situação prática de Aprendizagem Baseada em Problemas desenvolvida por um professor da disciplina de Álgebra Linear do curso de Engenharia da Produção, relatando, as mudanças observadas no processo de ensinar matemática aos seus alunos.

Fundamentação Teórico-metodológica

O referencial teórico da pesquisa circula sob dois aspectos principais: a Aprendizagem Baseada em Problemas e as Atividades Investigativas. Dada suas especificidades, considera-se interessante descrever, ainda que brevemente, as características principais que compõem estes conceitos:

A Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP) constitui-se como um método educacional que utiliza problemas do cotidiano (reais) como forma de estimular a busca e a investigação de conceitos. Estes problemas são elaborados por um grupo de professores especialistas que visam desenvolver as habilidades previstas no currículo de uma determinada disciplina.

Nas palavras do educador Paulo Freire (2006), a metodologia ativa é uma concepção educativa que estimula processos construtivos de ação-reflexão-ação. Nela, o estudante é motivado a buscar soluções para problemas reais, por meio da investigação, da discussão em grupo, da analogia a casos semelhantes, entre outras estratégias. Nesse contexto, passa a assumir uma postura ativa e autônoma, atuando junto ao grupo e ao professor na construção de novos conceitos.

Compõem o rol das MAA, a Atividade Baseada em Problemas (*Problem Based Learning*) que, nas palavras de Berbel (2011) "se desenvolve com base na resolução de problemas propostos, com a finalidade de que o aluno estude e aprenda determinados conteúdos". Faz parte do grupo das metodologias ativas, pois proporciona ao estudante agir de forma ativa frente a seu aprendizado.

Podemos perceber que, diferentemente de outros métodos de ensino, a Aprendizagem Baseada em Problemas centra-se no estudante, pois estimula que este aprenda com problemas reais e interagindo com seu grupo, que nessa metodologia é chamado de Grupo Tutorial, composto de um tutor e 8 a 10 alunos, entre os quais um será o coordenador e o outro o secretário. Aliás, o papel do grupo é fundamental, pois juntos constroem hipóteses baseadas em suas experiências e buscam soluções. Os conceitos prévios que possuem, interagem, reafirmando posicionamentos ou reconstruindo-os. Em grupo tomam as decisões e verificam suas aplicações.

E o professor? Nesse processo seu papel é mediar. Nesse contexto ele é denominado de tutor e deve ter, além do conhecimento do conteúdo, um bom relacionamento com os alunos, pois atuará junto a pequenos grupos, na grande maioria, composto por 10 alunos. Deve também, estimulá-los a investigar. Não é muito dizer que, nessa metodologia, o estímulo impulsiona a investigação.

Para Sebastiany e Bastos (2011) assumir esse novo papel é um desafio para o professor. Dentre suas "novas" funções, estão:

> Abertura do encontro do grupo tutorial, com estímulo à apresentação de todos os seus integrantes; orientação no momento da escolha do coordenador e do secretário do grupo; preocupação com o resgate dos conhecimentos prévios dos acadêmicos com relação à temática em estudo, instigando-os a expressarem publicamente suas ideias pré-concebidas e as relações estabelecidas até então; intervenções mediadoras que favoreçam a distinção entre questões principais e secundárias no processo de resolução de problemas; preocupação com a participação ativa de todos os integrantes do grupo, levando o acadêmico a assumir uma postura autônoma, através de construções próprias; acompanhamento da evolução das aprendizagens do grupo, identificando e propondo estratégias e recursos facilitadores da construção do conhecimento; indicando fontes de pesquisa e aprimorando o raciocínio do estudante. (Sebastiany e Bastos, 2011, p. 41-42).

Observa-se que o papel exercido pelo professor também é ativo, pois ele participa de todas as etapas, orientando, conduzindo, sintetizando e investigando, junto com o grupo tutorial. Dessa forma, desenvolve habilidades que o tornam mais preparado para atuar nas situações cotidianas. Porém, muitas dessas habilidades não lhe foram ensinadas na academia. É necessário tempo, estudo e dedicação para adquiri-las.

Na APB temos a utilização dos problemas reais como forma de ensinar os conteúdos selecionados pelo grupo de professores, valendo-se da investigação para que isso ocorra, mas é fundamental que o professor direcione o processo, por meio de questionamentos, orientações de leituras, analogias a situações passadas, bem como de materiais, ferramentas e estratégias para que a aprendizagem ocorra.

Percebe-se que a investigação constitui um fator determinante para o alcance dos objetivos propostos no método. O conceito de investigação adotado por nós é retirado de Ponte (2006, p. 25) ao afirmar que investigar "não é mais do que procurar conhecer, procurar compreender, procurar encontrar soluções para os problemas com os quais nos deparamos".

Esta foi a perspectiva adotada na pesquisa. A intenção era substituir a conhecida "revisão de conteúdos" por uma metodologia que permitisse aos alunos do curso de Engenharia da Produção, não apenas revisitar conceitos vistos no Ensino Médio, mas fazê-los compreender os campos de aplicações destes conceitos, por meio de investigações. Este é o caso da disciplina de Álgebra Linear que prevê, em sua organização, o estudo de álgebra de matrizes, determinantes e sistemas lineares.

Sendo assim, o professor regente da disciplina, propôs-se a adotar a Metodologia da Aprendizagem Baseada em Problemas, como forma de diagnosticar os conhecimentos prévios dos alunos acerca dos conceitos de matrizes.

A primeira ação do professor foi descrever aos alunos o que é a APB e seus sete passos: i) leitura do problema, identificação e esclarecimentos dos termos desconhecidos; ii) identificação dos problemas propostos pelo enunciado; iii) formulação de hipóteses explicativas para os problemas identificados no passo anterior; iv) resumos das hipóteses; v) formulação dos objetivos de aprendizado; vi) estudo individual dos assuntos levantados nos objetivos de aprendizado; vii) retorno ao grupo tutorial para rediscussão do problema frente aos novos conhecimentos adquiridos na fase de estudo anterior.

Os alunos foram então divididos em grupos de 3 a 5 componentes, com um coordenador e um secretário, responsável por registrar os avanços do grupo. O problema disponibilizado para os grupos de Engenharia da Produção, tratava do custo de produção de acessórios femininos artesanais, feitos com Capim Dourado, produto típico do Estado do Tocantins, Brasil. A situação proposta trazia como problemática a melhor forma de apresentar aos associados de um Centro de Artesãs, o custo total das categorias envolvidas na produção obtido em cada uma das lojas. Estes dados deveriam ser apresentados em uma única tabela, de forma que os associados pudessem perceber, em cada loja, a categoria que necessitava de intervenção.

As habilidades matemáticas envolvidas na resolução desse problema eram: operar com matrizes e interpretar os resultados obtidos nas operações realizadas entre as matrizes. Seguem as tabelas utilizadas no cenário criado.

Custo de produção por item (em reais)			
Categorias	Produto		
	Brincos	Colares	Pulseiras
Matéria - prima	1,70	4,30	3,15
Pessoal	2,30	3,40	2,25
Despesas gerais	1,10	2,20	1,15

Tabela 1.

Quantidade mensal produzida por loja			
Produto			
	Loja Taquaralto	Loja Centro	Loja Shopping
Brincos	400	450	400
Colares	200	260	220
Pulseiras	580	620	600

Tabela 2.

A partir da exposição do problema a ser resolvido, os alunos iniciaram os passos da Aprendizagem Baseada em Problemas.

Análises e Resultados Preliminares

Os resultados obtidos, ainda que em fase preliminar, revelam aspectos interessantes e que merecessem análises mais aprofundadas. Encontram-se divididos em categorias:

Ausência de conhecimentos prévios

Foram observadas dificuldades em reconhecer a tabela como uma matriz. Dessa forma, ao perceberem que o objetivo exposto no problema era "operar com matrizes", chamaram o professor para verificar como poderiam ter esse objetivo e não ter sido dada nenhuma matriz. Frente a este questionamento, o professor fez duas perguntas ao grupo: Qual era a definição de matrizes e onde eles percebiam o uso das matrizes na "vida real". É importante lembrar que, enquanto tutor, cabe ao professor o papel de questionar e orientar.

A primeira resposta foi a de que "*matriz é um conjunto de números dentro de um parêntese ou daquele outro tipo (colchete)*". Quanto ao segundo questionamento, não foram encontradas aplicações cotidianas para as matrizes, com exceção da questão que "caiu" no vestibular que ambos fizeram a poucos dias.

Frente a esta realidade, o professor pediu que o grupo pesquisasse, não apenas a definição de matrizes, mas situações cotidianas onde as utilizamos. Aconselhou que o grupo aproveitasse o momento para realizar um estudo individualizado na biblioteca e, posteriormente se reunissem para socializar o que compreenderam e, só depois voltassem à situação proposta. Propôs que os alunos buscassem na biblioteca por um livro de matemática do 2º ano do Ensino Médio, onde o conteúdo em questão costuma ser trabalhado.

Após a saída do grupo, o professor relatou que "*a parte mais difícil foi não dar a resposta*". Cabe ressaltar que, de acordo com Barbosa e Moura (2013), a ABP exige do professor requisitos como:

> mediar discussões, atuar para manter grupos de alunos focados em um problema; motivar alunos a se envolverem com as tarefas requeridas no processo de busca de solução; estimular o uso da função de pensar, observar, raciocinar e entender. (Barbosa e Moura, 2013, p.60).

Contudo, como dito inicialmente, tais habilidades não fizeram parte de sua formação enquanto docente, de forma que se trata de um processo que também deve ser construído. É interessante observar que, em relato posterior, o professor foi questionado pelos alunos quanto ao fato de não ter prontamente respondido que "toda tabela é uma matriz" e tê-los feito procurar pelo conceito. Tal atitude revela o comportamento passivo ao qual os alunos estão habituados.

Cumprimento do horário de aula

O tempo destinado à atividade: a metodologia da APB prevê momentos de estudos orientados pelo professor. Nessa ocasião, o grupo relata as evoluções que obtiveram na atividade proposta, as dificuldades e o professor analisa se as habilidades almejadas foram alcançadas. Em caso negativo, novos questionamentos são feitos ao grupo que, retorna aos seus trabalhos, encontros e pesquisas. Estes momentos de orientação são realizados, na maioria das vezes, no contra turno. Desta forma, havia no professor, uma preocupação latente quanto ao cumprimento integral do horário, haja vista, a instituição a qual pertence ser privada. Existia o medo de cobranças, tanto por parte dos coordenadores, quanto dos pais e dos próprios alunos.

Contudo, com o desenvolvimento das atividades, observou-se que os alunos passaram a procurar o professor a todo o momento e não apenas nos horários programados. De forma análoga, passaram a frequentar mais a biblioteca e os espaços de convivência na faculdade. Criaram um grupo do WhatsApp e passaram a publicar cada nova descoberta. O professor fora convidado para fazer parte deste grupo e, então, as orientações passaram a ocorrer a qualquer momento do dia.

Para Berbel (1998) o trabalho com a ABP necessita de alterações físicas ou materiais na instituição. Compreende-se que os horários das aulas devem ser revistos, bem como a utilização dos laboratórios e bibliotecas que passam a contar com uma quantidade maior de frequentadores.

Em outro momento, o professor relata que passou a estar "mais disponível" para os alunos e que isto influenciou em seus horários de chegada e saída da faculdade. Menciona que alguns colegas passaram a tecer críticas sobre o tempo que ele passa na faculdade e sobre cobranças dos alunos de outras turmas para que seus professores façam o mesmo. Em sua visão, o tempo necessário para esta metodologia seja aplicada corretamente não condiz com o regime de horas-aula proposto por muitas instituições.

Dúvidas quanto à qualidade do ensino

O professor relata que "*parece não estar ensinando direito*", pois ao não "*dar os resultados, tem medo de que o conteúdo fique fraco!*". A descentralização da figura do professor para a figura do aluno traz para ambos, a sensação de que "*algo está errado*".

Contudo, observa-se que ao longo do desenvolvimento da atividade, estes sujeitos tornam-se mais confiantes de seus novos papéis. Observa-se que o aluno, ao perceber que o professor não responderá ao exercício para ele, passa a buscar, por seus próprios meios, as soluções e os resultados esperados. Essa escolha faz com que desenvolva seu processo de autonomia. Na fase de socialização, onde os resultados são apresentados, percebe-se que, por diferentes caminhos, os alunos chegam às soluções esperadas, o que demonstra um respeito ao ritmo de aprendizagem deles.

Para Barbosa e Moura (2013), existem diferenças entre os requisitos necessários ao professor e ao aluno, no ensino convencional e na ABP. No primeiro caso, o professor é tido como o "transmissor de informação aos alunos" e o conteúdo é organizado em aula expositiva. Já, na APB o professor ensina ao aluno gerenciar sua aprendizagem e o curso é organizado em problemas. No ensino convencional, os alunos "transcrevem, memorizam, repetem e buscam a reposta para sair bem na prova". Porém, na ABP, o aluno deve construir seu conhecimento, por meio de questionamentos e validações.

Percebe-se que o próprio professor estava relutante quanto à efetividade do método de forma que, propôs aos grupos de alunos um novo desafio: criar uma situação de ABP, na sua área, com o conteúdo de matrizes e que possuísse um viés sustentável, haja vista ser a sustentabilidade, um dos pilares da IES.

A intenção do professor nessa proposta era de observar se os alunos haviam compreendido os objetivos da APB, seus passos e se conseguiriam perceber o conceito de matrizes em outras situações que não a proposta. Dentre as situações apresentadas, destacam-se as seguintes: "Controle produtivo empresarial em uma fábrica de rações para cães e gatos"; "Análise de produção de garrafas Pets feitas de Polímero termoplástico e de Poliéster"; "Fábrica de Chocolates TOcacau" e "Terceirização de logística de transportes de mercadorias".

Observa-se que a ABP proporcionou, por meio da pesquisa, o conhecimento das áreas onde os profissionais poderão atuar no futuro. Cabe ressaltar que, no primeiro período do curso de engenharia de produção, os alunos possuem como disciplina específica apenas “Introdução à Engenharia da Produção”.

Ao final desta atividade, foram feitos dois questionamentos aos alunos: 1ª) Quais os benefícios da atividade realizada? 2ª) No que ela diferencia-se de outras “mais diretas” como efetue, calcule, encontre o valor de? O aluno P, respondeu as duas questões, como segue:

> “a atividade realizada foi de grande proveito para o grupo. Como alunos, estamos acostumados a resolver questões como efetue, calcule, encontre o valor de, e, muitas vezes, para resolvê-las aplicamos uma fórmula sem muitas vezes compreender o porquê da aplicação da mesma. A situação proposta na atividade, de elaborar um problema, nos compele a ir além de apenas aplicar uma fórmula. Temos que entender, detalhar todo o processo de resolução e construir um enunciado compreensível. É como resolver uma equação de trás para frente...”.

Percebemos que as atividades produziram reflexões acerca da forma como os alunos assimilam os conceitos de matrizes, além de demonstrar como a investigação complementa os processos de ensino e aprendizagem. Na concepção do grupo de professores, afirmar que investigação e aprendizagem são processos disjuntos e contraditórios é assumir que teoria e prática possam coexistir separadamente.

Considerações Finais

Por fim, observou-se alterações na prática de ensino do professor, evidenciadas em suas respostas e em seus questionamentos. Entende-se que permitir que o aluno realize suas próprias descobertas, compreenda-as e justifique-as, ao invés de receber “respostas prontas” ou modelos a serem seguidos, deve ser papel do educador matemático. Contudo, percebeu-se que esta alteração na forma de ensinar do professor, transformando seu papel de “detentor do conhecimento” para mediador no processo de aquisição do conhecimento, requer planejamento, preparo e persistência.

Referências bibliográficas

Barbosa, E. Moura, D (2013). Metodologias Ativas de Aprendizagem na Educação Profissional e Tecnológica. *Revista Boletim Técnico do SENAC*, *39*(2), 48-67.

Berbel, N. (1998). A problematização e a aprendizagem baseada e problemas: diferentes termos ou diferentes caminhos? *Revista Interface Comunicação, Saúde e Educação, 2*(2), 139-154.

Berbel, N. (2011). As metodologias Ativas e a promoção da autonomia de estudantes*. Revista Semina: Ciências Sociais e Humanas, 32*(1), 25-40.

Freire, P (2006). *Pedagogia do Oprimido*. São Paulo: Paz e Terra.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2006). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Sebastiany, G., & Bastos, M (2011). *Curso de Medicina da UNISC***:** a Aprendizagem Baseada em Problemas. Santa Cruz do Sul: UNISC.

EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO EN LAS FACETAS EPISTÉMICA E INTERACCIONAL DE PROFESORES PERUANOS SOBRE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN: EJEMPLIFICANDO CON UN ESTUDIO DE CASO

Teresa Sofía Oviedo Millones, Luis R. Pino-Fan
Pontificia Universidad Católica del Perú. (Perú), Universidad de Los Lagos. (Chile)
sofia.oviedo@pucp.edu.pe, luis.pino@ulagos.cl

RESUMEN: En este reporte de investigación presentamos el análisis de una clase sobre funciones realizada por un profesor peruano en los primeros cursos de la universidad, con el fin de caracterizar los conocimientos didácticos y matemáticos en las facetas epistémica e interaccional, que le permiten al profesor gestionar los aprendizajes sobre funciones de sus estudiantes. Para ello, utilizamos el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM), que ha sido planteado considerando supuestos teóricos y metodológicos del Enfoque Onto-Semiótico (EOS). Los resultados muestran que el profesor posee un buen domino matemático, pero en el aspecto interaccional, tiene baja idoneidad didáctica.

Palabras clave: funciones, conocimiento didáctico-matemático, dimensión epistémica, enfoque ontosemiótico

ABSTRACT: In this research report we show the analysis of a class on functions that a Peruvian teacher gave in the first courses of the university. It is aimed at characterizing the didactic and mathematical knowledge in the epistemic and interactional stages which allow the teacher to manage the learning about their students' functions. That's why; we use the Didactic-Mathematical Knowledge Model, which has been proposed considering the theoretical and methodological assumptions of the Onto-Semiotic Approach (OSA). The results show that the teacher has a good mathematical mastery, but in the interactional aspect, he has a low didactic suitability.

Key words: functions, didactic-mathematical cnowledge, epistemic dimension, onto-semiotic approach

Introducción

La investigación respecto al Conocimiento Didáctico-Matemático de los docentes requiere de una amplia investigación debido a que la formación de los alumnos depende esencialmente del buen desenvolvimiento en este conocimiento por parte de los docentes (Cova, 2013). Investigaciones indican que muchas veces los docentes reciben una formación que no es suficiente para contemplar toda la complejidad de una situación real de enseñanza y de aprendizaje (Brito y Alves, 2008). El conocimiento de un profesor de matemáticas incluye muchos componentes adicionales a las matemáticas y por ello se hace necesario caracterizar el conocimiento del profesor, con el que se proporcionará pautas para saber cómo los formadores de profesores o formadores de matemáticos que irán a ejercer la docencia, deben intervenir con la finalidad de que los profesores adquieran competencias idóneas para la gestión de los aprendizajes.

En el Perú, al igual que en otros países, tal como menciona Olave (2013) "(…) es común que primero se enseñe la expresión formal de un conocimiento matemático y luego se presenten ejemplos y ejercicios de aplicación" (p. 26). Lo que se pretende en toda clase de Matemática es que los estudiantes logren un aprendizaje óptimo que le permita utilizar los conocimientos que va adquiriendo a diversas situaciones problemáticas, que sepan utilizar los algoritmos, las definiciones en diversas situaciones y no sólo en un tipo de problemas que son mostrados y enseñados en una clase por el profesor. Para llegar a ese aprendizaje, los estudiantes tienen que desarrollar la capacidad de aprender y pensar (Cammaroto, Martins y Palella, 2003). Es un reto docente manejar los conocimientos de tal forma que se cumplan los objetivos de aprendizaje con sus alumnos.

La enseñanza en el nivel superior conlleva a que los estudiantes de Ciencias e ingeniería, en su formación como profesionales, tienen que contar con conocimientos sólidos que le permitan afianzarse en el desarrollo de situaciones problemáticas matemáticas propias de su profesión.

En la institución en la que se hace efecto esta investigación, se observa que los estudiantes de los primeros semestres en el área de Matemática, tienen mucha dificultad para comprender nociones básicas de matemáticas, particularmente en el tema de funciones. Estas dificultades se contemplan desde la Educación Básica Regular en el Perú (Quintanilla, 2009). Las evaluaciones que hacen los profesores a sus estudiantes mediante exámenes y prácticas calificadas muestran las dificultades de los estudiantes. Aunque éstas no deberían ser la única forma de acreditar el conocimiento aprendido por los estudiantes, sólo se cuenta con este recurso para conocer aproximadamente lo que han aprendido (porque no hay otra metodología institucional, de acuerdo a su programación del curso).

La enseñanza de la matemática debe contemplar que el alumno adquiera flexibilidad para lidiar con el concepto de función en situaciones diversas, y esto debe contemplar al docente con un conocimiento didáctico-matemático idóneo. (Godino, 2011)

Con todo ello, se eligió analizar el Conocimiento Didáctico-Matemático de los docentes sobre el tema de funciones, pues además de ser este tema básico y fundamental para aplicaciones propias de las carreras universitarias, es un tema base en cursos del nivel universitario como cálculo, especialmente en alumnos que van a carreras de Ciencias e Ingeniería.

Se adoptó el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) planteado por Pino-Fan y Godino (2015), para poder caracterizar aspectos del ‘conocimiento especializado del contenido’ (faceta epistémica del CDM), que tiene un profesor universitario sobre la noción de función.

Marco teórico

Para el desarrollo de nuestra investigación se utilizó el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM), el cual proporcionan un sistema de categorías y subcategorías de conocimientos que deberían tener los docentes para gestionar adecuadamente los aprendizajes de sus estudiantes. El CDM comprende tres dimensiones (Pino-Fan y Godino, 2015): dimensión matemática, dimensión didáctica y dimensión meta didáctico-matemático. La dimensión matemática incluye las categorías del conocimiento común del contenido y del conocimiento ampliado del contenido; la dimensión didáctica incluye las facetas del conocimiento: epistémica, cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica. La dimensión metadidáctico-matemática refiere a los conocimientos necesarios para reflexionar sobre la propia práctica y valorar la idoneidad didáctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En esta investigación mostramos el análisis de la faceta epistémica incluida en la dimensión didáctica del CDM. En el análisis se utilizaron las herramientas teórico-metodológicas del EOS, que consiste de cinco niveles de análisis didáctico propuestos por el EOS (Godino, Batanero y Font, 2007), cuya aplicación permitió el estudio de aspectos descriptivos y explicativos de la clase, que fundamenta la valoración de la idoneidad epistémica. Estos niveles son: la identificación de prácticas matemáticas, identificación de objetos y procesos matemáticos, análisis de las trayectorias e interacciones didácticas, la identificación del sistema de normas y metanormas y la valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción. Los cuatro primeros niveles de análisis son herramientas para una didáctica descriptiva-explicativa, mientras que el quinto se centra en la valoración de la idoneidad didáctica (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006). Para esta investigación sólo se hizo la valoración de la idoneidad epistémica, para valorar si las matemáticas que se enseñan son unas buenas matemáticas. Para ello se requirió de componentes y descriptores (que veremos en la sección de análisis de esta investigación).

Metodología

La metodología que se utilizó fue la metodología cualitativa descriptiva-interpretativa de diseño no experimental de tipo transaccional (Hernández, Fernández y Baptista, 1998), porque las variables se consideran tal como están temporo-espacialmente sin manipulación y en un tiempo determinado. Pertenece a un estudio de caso.

En este reporte de investigación, que es parte de una investigación más amplia (en la que se consideran a tres docentes para el estudio), se presenta el análisis de la primera clase de funciones matemáticas de un curso de Matemática que dio un docente de una institución universitaria en el tiempo de una hora, con 48 alumnos presentes, de un total de 60 alumnos matriculados (entre 17 a 19 años) en un curso de Matemática de primer semestre académico.

Se hizo la grabación de la clase de una hora (29 de mayo de 2015), se transcribió esta clase y luego se procedió a analizarla de acuerdo a las herramientas teórico-metodológicas del EOS (Godino, Batanero y Font, 2007). Se analizó la faceta epistémica del CDM sobre funciones del docente, utilizando las nociones teórico-metodológicas antes descritas.

El docente, muestra de estudio, fue elegido con muestreo no probabilístico por conveniencia (fue uno de los docentes que aceptó ser filmado en sus clases).

Análisis de los datos

Se procedió a analizar la clase del docente, previa transcripción de la clase filmada (por razones de espacio no mostramos el anexo de la transcripción de clase y sólo daremos una síntesis de los análisis de la clase), con las herramientas de los cinco niveles de análisis propuestos en el EOS. Haciendo esto se pudo dar la idoneidad epistémica del docente de acuerdo a los componentes y descriptores de la idoneidad epistémica que se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Componentes y descriptores de la idoneidad epistémica (matemática). Godino (2011)

Componentes	Indicadores
Situaciones-problemas	Selección de una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización) Uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), traducciones y conversiones entre los mismos. Nivel adecuado del lenguaje para el nivel a que se dirige. Se promueve la expresión e interpretación.
Elementos regulativos (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	Definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo a que se dirigen. Se presentan los enunciados y procedimientos básicos del tema. Se promueve la generación y negociación de las reglas.
Argumentos	Adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen.

	Se promueven momentos de validación.
Relaciones (conexiones, significados)	Se relacionan y articulan de manera significativa los objetos matemáticos puestos en juego (situaciones, lenguaje, reglas, argumentos) y las distintas configuraciones en que se organizan.

Identificación de prácticas matemáticas

El tema dado en clase por el profesor es la primera clase de funciones para estudiantes del primer semestre académico universitario en un curso de Matemáticas. Antes de este tema el profesor hizo el tema de Geometría Analítica.

El profesor da una introducción al tema mediante una situación contextualizada, tomando en consideración los conocimientos previos de los alumnos: función, dominio, rango, función lineal (menciona que esos temas fueron hechos en el colegio y de acuerdo al Currículo Nacional de Educación Básica del Perú, así es). A partir de la situación contextualizada, el profesor institucionaliza algunos conceptos relacionados al tema de funciones: función, relación, dominio y rango, luego da ejemplos de estos temas, haciendo preguntas frecuentes a los estudiantes y dando paso también a que los estudiantes den ejemplos. Está atento a lo que los estudiantes expresen en clase.

Identificación de objetos y procesos matemáticos

El profesor da algunos argumentos conductistas, es decir, justifica el por qué usó determinados elementos matemáticos sin justificarlos matemáticamente: da la definición de función diciendo que es para aprender el curso de Matemáticas (el que está dando) y menciona también otro curso más avanzado (que llevarán en el siguiente semestre los estudiantes), se habla de números reales en números reales y afirma que no de todos los números reales. Esto no es correcto porque en las funciones no hay restricción que no se puedan usar todos los números reales. Quizá el profesor quiso referirse a algún detalle, pero en su discurso no especifica. Sus argumentos van de lo particular a lo general para luego institucionalizar las definiciones. En la Tabla 2 se muestran los objetos matemáticos primarios del EOS obtenidos del análisis de los datos.

Tabla 2. Configuración epistémica de la sesión de clase

Objetos matemáticos primarios	Utilización de los objetos matemáticos
Situaciones problemas	Se presentan situaciones de contextualización y aplicación del objeto matemático función

Elementos lingüísticos	Descripción verbal: el lenguaje natural (en tres ejemplos con conjuntos) Descripción simbólica: las definiciones son expresadas algebraicamente (definiciones de función, dominio). Descripción gráfica: mediante los diagramas de Venn.
Conceptos/Definiciones	Conceptos previos: conjuntos, diagramas de Venn, números reales, pares ordenados. Conjuntos emergentes: definición de función, de relación, funciones reales de variable real; tipos de funciones: lineal, afín, constante, cuadrática, polinómica; dominio, rango.
Proposiciones/ Propiedades	No se dio propiedades en este tiempo de clase.
Procedimientos	Da ejemplos en la que diferencia tipo de funciones, relaciones de funciones
Argumentos	Argumentos verbales para determinar la diferencia entre relación y función; argumentos para determinar la diferencia entre funciones lineal y afín. En general, para llegar a argumentar, el profesor hace inducción del tema, mediante ejemplos, para no explicar de manera directa los temas tratados respecto a función.

Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas

La configuración didáctica es de tipo magistral - interactivo (Godino, *et al.*, 2006). El docente trata de hacer participar constantemente a los estudiantes, pero es exclusivamente él quien institucionaliza, formula y valida los temas tratados en clase.

En su interacción con los alumnos les pudo ocasionar un conflicto semiótico cuando mencionó que se habla de números reales en números reales (en funciones) y afirma que no de todos los números reales.

Identificación del sistema de normas y metanormas

La metanorma del profesor que se puede apreciar es metaepistémica, al indicar sólo una determinada manera en los procesos matemáticos, pues usa sólo un registro de representación, ya sea sólo el gráfico (al inicio de la clase) y luego el algebraico, sin hacer relación justificativa matemática entre ambos registros y la norma es que el profesor es el que determina la intervención de los estudiantes.

Resultados

Se pudo precisar con detalle a través del CDM, y mediante el uso de las herramientas del EOS, características del conocimiento didáctico-matemático del docente del estudio de caso, el cual tuvo una enseñanza expositiva (magistral), contextualizada para los conceptos, y haciendo una valoración fundamentada de la idoneidad didáctica de dichos procesos (en particular de la idoneidad epistémica). Se dio como resultado una idoneidad epistémica adecuada, comparándolos con los indicadores de idoneidad citados en la tabla 1 de Godino (2011). Analizando de acuerdo a esta tabla se observó que el docente usó un contexto extra-matemático en la presentación de los conceptos que motivó a los alumnos a participar y atreverse a argumentar en algunos casos.

En cuanto a las representaciones sólo se hacen en dos registros de representación, gráfico y algebraico, pero no se relaciona el paso de un registro a otro. De esta manera los estudiantes aprenden a usar las operaciones algebraicas por un método: el paso de registro algebraico al gráfico. Las definiciones estuvieron adecuadas al nivel educativo al que iban dirigidas. Se apoya en situaciones cotidianas para introducir a la formalización de los conceptos. No se promovió la generación y negociación de las reglas, pues el docente asumió una característica de clase magistral en la que es el docente el que da toda la enseñanza. Hubo sólo un discurso que no estuvo claro, como el mencionado en el análisis de los datos (Identificación de objetos y procesos matemáticos). La argumentación, en la mayoría de su tiempo de clase del docente es adecuada en el sentido que va de lo particular a lo general en un contexto extra-matemático, es decir, con situaciones de referencia, que van ayudando a los estudiantes a comprender los conceptos y a su vez los motiva en su aprendizaje. Además, hubo una adecuada relación entre los objetos matemáticos dados en la clase.

Todo esto, nos conduce a decir que la idoneidad epistémica del docente es adecuada, pero no se puede decir que es totalmente adecuada, pues se tiene que ver la relación de la dimensión epistémica con las otras dimensiones (que sería parte de una investigación más amplia). Por ejemplo, se aprecia que la idoneidad interaccional fue baja.

Análogo fueron los resultados obtenidos del análisis de clases de los otros dos docentes en estudio, con particularidades que detallaremos en próximos artículos de investigación.

Conclusiones

Como la realización del análisis del conocimiento didáctico-matemático de los docentes (que comprende tres dimensiones y requiere del uso de las herramientas del EOS manifestadas en cinco niveles) es un trabajo muy complejo, sería prudente realizar todo el análisis de las sesiones completas de clase del docente o docentes en un tema determinado en matemática y esto sería necesario para identificar competencias de los docentes, actitudes a mejorar y lograr una idoneidad didáctica para beneficio del mejor aprendizaje de los alumnos.

El uso adecuado del contexto extra-matemático del docente podría conducir a los estudiantes en el transcurso de las demás clases, a que relacionen lo aprendido con otros contenidos matemáticos. Esto se tendría que constatar, en el análisis de más horas de clase del docente, que es parte de una investigación que está en proceso.

"(…) La investigación en Educación Matemática en el Perú está en pleno desarrollo y en proceso de consolidación" (Flores y Gaita, 2015, p. 272). Esta investigación que presentamos se suma en la contribución a la investigación educativa peruana en el campo de Formación de Profesores, usando un modelo, que todavía no ha sido utilizado en investigaciones peruanas. Son varias investigaciones en Educación Matemática peruanas que han aplicado el marco teórico EOS, pero aún no han aplicado el modelo CDM del EOS, como se constata, a la fecha, en los repositorios de tesis de universidades peruanas de los programas de Maestría y Doctorado en Educación o afines, así como en revistas académicas indexadas peruanas o en actas de congresos o coloquios.

Consideraciones finales

Habiendo llegado al análisis de la idoneidad epistémica, queda pendiente el análisis de las demás idoneidades mencionadas del EOS, junto con las interacciones entre las mismas (que es parte de una investigación más amplia que estamos realizando), es decir, se requiere de una idoneidad didáctica para tener una idoneidad global del proceso de enseñanza del docente muestra de estudio.

Referencias bibliográficas

Brito, A., y Alves, F. (2008). Profissionalização e saberes docentes: análise de uma experiência em formação inicial de professores de matemática. *A formação do professor que ensina matemática: perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica*, 27-42.

Cammaroto, A., Martins, F., y Palella, S. (2003). Análisis de las estrategias instruccionales empleadas por los profesores del área de matemática. Caso: Universidad Simón Bolívar. Sede Litoral. *Investigación y Postgrado*, *18*(1), 71-85.

Cova, C. (2013). *Estrategias de enseñanza y de aprendizaje empleadas por los (as) docentes de matemáticas y su incidencia en el rendimiento académico de los (as) estudiantes de 4to año del Liceo Bolivariano "Creación Cantarrana" período 2011-2012* (tesis Doctoral). Recuperado de http://ri.bib.udo.edu.ve/handle/123456789/160/simple-search?query=Cova%2C+C.y+Ernesto%2C+C

Flores, J. V. F. y Gaita, R. C. (2015). Educación Matemática en el Perú: Avances y perspectivas. En *La Educación Matemática en el siglo XXI* (pp. 257-276). Distrito Federal: Secretaria Académica del Instituto Politécnico Nacional.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME).* Recife, Brasil.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135. doi: 10.1007 /s11858-006-004-1

Godino, J. D.; Bencomo, D.; Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma 27* (2), 221-252.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (1998). *Metodología de la investigación.* México: Mc Graw Hill.

Olave, M. (2013). *Modelos de profesores formadores de Profesores de Matemática: ¿cuáles son y en qué medida se transmiten a los futuros docentes? Un estudio de casos.* (tesis Doctoral, Instituto Politécnico Nacional. Montevideo, Uruguay). Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/olave_2013.pdf

Pino-Fan, L., y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA, 36*(1), 87-109.

Quintanilla, C. (2009). *Un estudio sobre las concepciones del concepto de función desde la perspectiva de la teoría APOS* (tesis de Maestría). Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/755/recent-submissions

CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DE PROFESORES DE BACHILLERATO A TRAVÉS DE SU PRÁCTICA OPERATIVA

Ana Luisa Llanes Luna, Silvia Elena Ibarra Olmos
Universidad de Sonora. (México)
analuisa.luna@hotmail.com, sibarra@mat.uson.mx

RESUMEN: En este artículo se reportan resultados de una investigación (estudio de casos) que tuvo como objetivo caracterizar el Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) de profesores de matemáticas en el bachillerato mexicano, durante la realización de su práctica operativa. Los elementos teóricos que respaldan este estudio son los establecidos en el modelo del CDM de profesor, el cual forma parte del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemática (Godino, Batanero y Font, 2007). Entre los resultados que se reportan, destaca el conocimiento que evidencian los profesores con respecto a los programas de estudio vigentes en el país, así como el conocimiento que evidencian en la faceta epistémica (conocimiento común, especializado y ampliado del contenido).

Palabras clave: conocimiento didáctico-matemático, bachillerato

ABSTRACT: This article reports the outcomes of a research (case study) that aimed to characterize the Didactic-Mathematical Knowledge (DMK) of mathematics teachers of high school in Mexico, while doing their operational practice. The theoretical elements that support this study are those established in the teacher's DMK model, which is part of the Onto-semiotic Approach (OSA) of Knowledge and Mathematical Instruction (Godino, Batanero and Font, 2007). Among the reported results, it highlights the knowledge that teachers show with respect to the curricula that are in force in the country, as well as the knowledge they show in the epistemic stage (common knowledge, specialized and expanded content).

Key words: didactic-mathematical knowledge, high school

Planteamiento del problema

Desde el año 2008 fue puesta en marcha en México la llamada Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS), la cual tiene como objetivos mejorar la calidad, la pertinencia, la equidad y la cobertura del bachillerato (RIEMS, 2008). En ella se plantea la creación del Sistema Nacional de Bachillerato (SNB) en un marco de diversidad, en el cual se integran las diferentes opciones de bachillerato a partir de competencias genéricas, disciplinares y profesionales. El reconocimiento universal de todas las modalidades y subsistemas de bachilleratos, pertinencia y relevancia de los planes de estudios, además del tránsito entre subsistemas, son sus tres principios básicos.

La Reforma considera como un elemento clave al profesor, puesto que éste es el responsable de concretar algunos de sus planteamientos a los salones de clase. Para lograr que la reforma sea implementada de manera exitosa, se considera que el profesor debe de hacer una evolución de su perfil, el cual está constituido por “un conjunto de competencias que integran conocimientos, habilidades y actitudes” (RIEMS, 2008, p. 86; ACUERDO número 447, 2008, p. 1) las cuales deben ser activadas para la generación de ambientes instruccionales favorables para el estudiante, donde el objetivo radique en lograr desarrollar las competencias específicas de su perfil de egreso enmarcadas en el contexto de la Reforma. Se determinan como competencias docentes aquellas que “formulan las cualidades individuales, de carácter ético, académico, profesional y social que debe reunir el docente de la EMS, y consecuentemente definen su perfil” (ACUERDO número 447, 2008).

Se considera además que la evolución del perfil en torno a estas competencias abonaría en la transformación del maestro en un facilitador de los procesos de aprendizaje de los alumnos (RIEMS, 2008). Se asegura entonces que “el perfil de los maestros de EMS no puede ser igual al de los de educación básica o superior. Se trata de un nivel educativo distinto, con características particulares que deben atenderse” (RIEMS, 2008, p.13).

Si bien se considera importante la definición del perfil docente, éste ha sido uno de los principales retos a los que se ha enfrentado la autoridad educativa. Los esfuerzos realizados hasta este momento para determinar dicho perfil sólo han permitido proponer el de futuros profesores de la EMS. En este caso se ha diseñado un instrumento que permite evaluar el perfil del futuro profesor de EMS por medio de un examen que pretende valorar el conjunto de competencias que integran conocimientos disciplinares y didácticos, así como habilidades y actitudes que el docente deberá tener. Los resultados obtenidos durante su primera aplicación muestran que apenas el 4% de futuros profesores del total a nivel nacional, se ubicaron en el nivel más alto de desempeño, considerándose idóneos para la docencia (Servicio profesional docente, 2014). Tras una segunda aplicación en el 2015 esta cifra descendió al 2% (Servicio profesional docente, 2015).

En cambio, definir el perfil de los profesores en activo en torno a competencias docentes no ha sido sencillo. Si bien se han realizado una serie de acciones que tienen como objetivo el desarrollo de estas competencias (entre otras cosas), algunas de éstas no se centran en las necesidades y expectativas de los docentes según su área de desempeño o disciplina que imparten. Es verdad que existe el interés de la comunidad educativa y algunos avances en torno a la construcción del perfil docente que permita la implementación, de manera exitosa o satisfactoria, de la Reforma en el país, sin embargo, estos avances deberían relacionarse más con la especificidad del conocimiento disciplinar a enseñar.

En el caso de los profesores de matemáticas existen algunas propuestas (Godino, Castro, Rivas y Konic, 2012) de competencias que los docentes deberían desarrollar, entendiendo como competencia a "la capacidad de afrontar un problema complejo, o de resolver una actividad compleja" (Godino et al, 2012, p.2). Si bien estos autores establecen sus planteamientos para el caso de los profesores de educación primaria y secundaria, consideramos que el profesor del bachillerato mexicano debería de desarrollar también aquellas competencias matemáticas que le coloque en condiciones de resolver los diversos tipos de situaciones problemas que usualmente son abordados en este nivel educativo.

Con base en estas argumentaciones aseguramos que para lograr desarrollar competencias primero se considera necesario diagnosticar las potencialidades, así como las necesidades y expectativas de los profesores de matemáticas que actualmente laboran en la EMS, para después diseñar e implementar acciones que atiendan las necesidades y potencien las fortalezas de dichos profesores. Sin embargo, hasta este momento no se cuentan con los instrumentos necesarios que permitan describir los conocimientos o competencias que conforman el perfil del profesor de matemáticas.

Con estas inquietudes se diseñó un proyecto de investigación cuya pregunta central es: ¿Cuál es el conocimiento didáctico – matemático de profesores de bachillerato que imparten la asignatura de Matemáticas I?

De dicha pregunta se derivó como objetivo general "Caracterizar el conocimiento didáctico-matemático de profesores de matemáticas de bachillerato". Por razones prácticas se tomó como tema matemático central el de las ecuaciones cuadráticas, contenido que se estudia en el primer curso de matemáticas de este nivel educativo.

Cabe hacer la aclaración que se limita la caracterización a la práctica operativa de los profesores en estudio. Más adelante abundaremos sobre lo que significa dicho término.

El modelo del conocimiento didáctico-matemático

Desde hace treinta años el interés por caracterizar el conjunto de conocimientos disciplinares y didácticos de los profesores en activo ha cobrado interés, intentándose determinar en este lapso cuál es el conjunto de conocimientos que un profesor debe poner en juego en el aula de clases para realizar procesos instruccionales eficaces.

El modelo denominado Pedagogical Content Knowledge (PCK), propuesto por Shulman (Shulman, 1987) se ha considerado como uno de los referentes obligados/principales en la investigación de dicha caracterización, y en este modelo se proponen algunas categorías para determinar la base de conocimientos del profesor. A partir del año 2000, se introduce la noción de Mathematical Knowledge for Teaching (MKT), que se concreta como modelo ocho años después y que tiene como una de sus características principales el restringirse a las categorías propuestas en el PCK, haciéndolas específicas para los profesores de matemáticas, ya que el PCK propone categorías para la caracterización del conocimiento del profesor de cualquier área disciplinar.

Tras la identificación de algunas limitaciones en el PCK y el MKT, en el 2009 Godino propone el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) del profesor el cual se desarrolla desde el contexto del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemática (Godino, Batanero y Font, 2007). El modelo se compone de una serie de facetas y niveles, descritos como las componentes del conocimiento del profesor en las modalidades didáctica y matemática. Por tanto, el proyecto de investigación tiene sustento en nociones teóricas propuestas en el EOS, dado que brinda herramientas que permiten análisis y descripciones puntualizadas del CDM del profesor. Las categorías de esta noción son adaptaciones del PCK y el MKT, entre otros. El modelo se constituye por seis facetas y cuatro niveles; las facetas que se consideran para esta investigación, y lo que se ha buscado con cada una en torno al estudio de las ecuaciones cuadráticas, son:

- Epistémica: identificar los conocimientos matemáticos del profesor, relativos al contexto institucional, puestos en juego en el proceso, así como la distribución en el tiempo de los contenidos matemáticos.
- Cognitiva: describir el conocimiento del profesor sobre la progresión del proceso de aprendizaje y los conocimientos personales de los estudiantes.
- Afectiva: determinar las acciones que realiza el profesor con respecto a las actitudes, emociones, opiniones o valores, que los alumnos presentan en el proceso de estudio.
- Mediacional: describir los recursos tecnológicos del profesor en el desarrollo de los procesos de estudio, así como su distribución en el tiempo con respecto al tema. Interaccional: identificar los patrones de interacción del profesor, y la negociación en los significados.
- Ecológica: determinar el conocimiento del profesor sobre la pertinencia de los contenidos puestos en escena con respecto a su entorno social, político, económico, etc.

Se considera a las facetas epistémica y cognitiva como claves en el modelo, ya que desde el punto de vista del autor se reconoce a “la matemática como actividad humana que adquiere significado mediante la acción de las personas ante situaciones – problemas específicos” (Godino, 2009, p. 21), no obstante, no se debe omitir que cada una de estas facetas se relaciona con las otras restantes. Se proponen además cuatro niveles de análisis:

1. Prácticas matemáticas y didácticas. Descripción de las acciones realizadas para resolver las tareas matemáticas propuestas para contextualizar los contenidos y promover el aprendizaje. También se describen las líneas generales de actuación del docente y discentes.

2. Configuraciones de objetos y procesos (matemáticos y didácticos). Descripción de objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. La finalidad de este nivel es describir la complejidad de objetos y significados de las prácticas matemáticas y didácticas como factor explicativo de los conflictos en su realización y de la progresión del aprendizaje.
3. Normas y metanormas. Identificación de la trama de reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio, y que afectan a cada faceta y sus interacciones.
4. Idoneidad. Identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio que incrementen la idoneidad didáctica. (Godino, 2009, p. 21-22)

Se considera como práctica "toda actuación o expresión (verbal, grafica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino, et al., 2007). En este entendido la caracterización del CDM se realiza con base a la práctica operativa (lo que hace) del profesor realizada en el seno de la institución.

Aspectos metodológicos

Dada la naturaleza del objetivo de esta investigación, se optó por realizar este trabajo desde el enfoque cualitativo, a través de un estudio descriptivo de casos. La naturaleza del enfoque, referida en ocasiones como una "investigación naturalista, fenomenológica, interpretativa o etnográfica" (Sampieri, Collado y Lucio, 2006), permite explorar los escenarios "naturales" donde se desarrollan los procesos de enseñanza y aprendizaje expuestos por los sujetos de interés.

Los sujetos de investigación fueron dos profesores que laboran en un bachillerato estatal ubicado una de las principales ciudades del noroeste mexicano. El profesor de menor experiencia es ingeniero en mecatrónica mientras que el profesor de mayor experiencia es licenciado en matemáticas. Como ya se dijo, la caracterización del CDM del profesor se realizó en torno al tema "ecuación cuadrática", presentado como un elemento de la asignatura Matemáticas I, propuesta por la Dirección General de Bachillerato (DGB) y que se sugiere ofrecer en el primer semestre de preparatoria en México.

Puesto que el estudio es de carácter descriptivo, una de las técnicas empleadas es la observación no participante (Casanova, 1998) donde el papel del observador se centró en sólo observar, manteniéndose al margen de las actuaciones y relaciones que establecieron docentes y discentes dentro del escenario en el que se realizó la investigación. Se contó además con herramientas de apoyo como videograbaciones y los correspondientes protocolos de observación.

Sobre la caracterización del CDM de los profesores

El profesor A

Durante el proceso instruccional el profesor hace uso de una serie de objetos matemáticos (trinomio, fórmula general, forma general de la ecuación cuadrática, cálculo de áreas, rectángulos, procedimientos algebraicos, numéricos) que relaciona y le permiten entre otras cosas, resolver las situaciones problemas que propone. Si bien presenta algunas deficiencias en el lenguaje, éste se considera apto para el nivel educativo.

El tiempo que asigna al estudio es corto y no se acerca al que se proponen en los programas de estudios propuestos por la DGB, puesto que ésta propone asignar ocho horas al estudio de la ecuación cuadrática, él solo le invierte una sesión del semestre que equivale a cincuenta minutos. Durante el desarrollo de la sesión se nota el poco interés por parte de los estudiantes y ante esto el profesor no realiza algún tipo de estrategia que le permita motivar o bien hacer un cambio de actitud en sus estudiantes; por otra parte las situaciones propuestas no permiten valorar la utilidad de las matemáticas, específicamente del objeto "ecuación cuadrática" en situaciones de la vida real, ya que las situaciones que propone, que se consideran aptas a este nivel, se trabajan desde un contexto intra-matemático, específicamente en un contexto geométrico.

A través del desarrollo de su práctica operativa es posible percibir que el profesor conoce el programa de la materia, puesto que en ésta es posible identificar algunos de los elementos del currículo. Por otra parte, el profesor explica algunas de las conexiones que se pueden establecer con otros temas del programa de estudio, sin embargo, trunca algunas ideas con respecto al estudio del tema. No obstante, las situaciones presentadas (intra/extra-matemáticas, ejercicios) no son consideradas como una muestra representativa del programa de la materia.

A través de una serie de preguntas, por ejemplo *¿si se acuerdan de ella?* (refiriéndose a la fórmula general)*, "la forma general (de una ecuación cuadrática) ustedes ya la habían visto cuando empezamos a factorizar",* le permiten percatarse si los alumnos tienen o no los conocimientos previos considerados como necesarios para el desarrollo del tema, además se puede concluir que estos contenidos presentan una dificultad manejable para los estudiantes. Con respecto al uso de recurso mediacionales, éstos son los convencionales, pizarra, módulo de aprendizaje, cuadernos, entre otros. Si bien el profesor hace una presentación adecuada del tema (clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave, etc.) en ocasiones no logra resolver los conflictos presentados por los alumnos. Además, durante el momento que asigna autonomía/independencia a sus estudiantes hace uso de la observación, la cual es utilizada para evaluar el progreso cognitivo de los estudiantes sobre los conocimientos y comprensiones.

Un resultado de la observación realizada por el profesor, la cual utiliza durante la interacción docente-alumno (trato personal con el estudiante), es que le resta autonomía al estudiante indicando aquellos errores que ha cometido y en ocasiones resolviendo él la situación problema. Algunas de las normas que se logran identificar son durante el momento de la implementación, principalmente en las facetas epistémica (definiciones, proposiciones o convenciones), interaccional (se levanta la mano para hablar, se pide permiso para entrar al aula o salir de esta), ecológica (uso de uniforme, prohibido fumar en el aula de clases, prohibido el uso de teléfono celular), entre otras. Finalmente el proceso instruccional es considerado con media-baja idoneidad didáctica, obteniendo en este caso una valoración media alta en su faceta epistémica y ecológica.

El profesor B

El profesor hace uso de dos representaciones de la ecuación cuadrática, su representación gráfica y algebraica. Recurre constantemente a relacionar temas estudiados con anterioridad (sistemas de ecuaciones lineales de dos y tres incógnitas, factorización, ecuaciones lineales) para definir diversos conceptos propios del tema (la forma general de una ecuación cuadrática, el tipo de soluciones de una ecuación cuadrática, la gráfica de la ecuación igualada a “y”); además el profesor identifica posibles generalizaciones de la tarea y algunas conexiones con otros temas más avanzados que serán abordados en semestres posteriores.

Las explicaciones, las comprobaciones, las demostraciones y el lenguaje se consideran adecuados al nivel educativo, presentando además una dificultad manejable para sus estudiantes. Con ello además se puede determinar que el profesor conoce el programa de la materia, puesto que en su práctica se pueden identificar los elementos del currículo los cuales son abordados mediante la realización de la tarea propuesta. Sin embargo, el tiempo asignado al desarrollo del tema sólo consta de dos sesiones (100 minutos) distando en gran medida con los programas de estudio vigentes y propuestos por la DGB.

Los recursos tecnológicos puestos en juego en el aula de clase son pizarras, calculadoras, cuadernos. Con respecto al uso de la calculadora el profesor indica los algoritmos que deben ser introducidos para obtener el resultado deseado. El profesor durante las dos sesiones tiene el control total de desarrollo del proceso, sin embargo, hace uso de preguntas o frases que los alumnos contestan con una o dos palabras. No se otorga tiempo autonomía o independencia para que los estudiantes resuelvan o propongan posibles soluciones del problema, además a través de estas preguntas el profesor evalúa si sus estudiantes tienen o no los conocimientos necesarios para el estudio.

Por otra parte, con los ejercicios propuestos el profesor describe algunos de los principales tipos de conflictos o errores que cometen los estudiantes al momento de realizar la tarea. Además, por lo que se percibe durante el proceso, el profesor incluye actividades de ampliación y de refuerzo, series de ejercicios que los alumnos deberán entregar una vez realizado el examen correspondiente a éste y otros temas. No se debe perder de vista un aspecto de suma importancia en el profesor: la promoción, el acceso y el logro de todos los estudiantes. En el grupo observado se encuentra un estudiante con características diferentes a sus compañeros, en este caso el profesor hace uso de todos sus recursos, invirtiendo un poco más de tiempo con ejemplos y una interacción de tipo personal con el estudiante para explicar lo relacionado con el tema.

Las situaciones propuestas son en un contexto intra-matemático y por cuestiones de tiempos se puede inferir que las situaciones no son una muestra representativa del programa de estudios. Algunas de las normas que se logran identificar durante el momento de implementación, son principalmente en las facetas epistémica (definiciones, proposiciones o convenciones), interaccional (se levanta la mano para hablar, se pide permiso para entrar al aula o salir de esta, no se come dentro del aula y se guarda silencio), ecológica (uso de uniforme), mediacional (uso personal de calculadoras) entre otras. Finalmente el proceso instruccional es considerado con media-alta idoneidad didáctica, obteniendo en este caso una valoración media en la faceta afectiva, mientras que en las facetas epistémica, ecológica y cognitiva se considera media-alta.

Conclusiones

Con base en lo anteriormente expuesto y respondiendo a la pregunta de investigación, se considera que en ambos casos el CDM obedece y se fundamenta primordialmente en las propuestas curriculares (programas de la materia), buscando adaptar los contenidos que se piden promover a las condiciones que afrontan los profesores, principalmente el factor tiempo.

Un resultado más se enmarca dentro de la faceta epistémica, pues es en ésta donde ambos profesores presentan una mayor idoneidad, si bien no logran tener una alta idoneidad se acercan a ésta. Con respecto a la caracterización del CDM en dicha faceta se puede concluir lo siguiente:

Conocimiento común del contenido: Los profesores recurren al uso de tareas donde el objetivo radica básicamente en la aplicación y/o ejercitación de los métodos (procedimientos) para resolver ecuaciones cuadráticas de una variable.

Conocimiento especializado del contenido: Se promueve en mayor medida el lenguaje algebraico, así como las representaciones algebraicas de las ecuaciones cuadráticas. Las tareas propuestas les permiten generar procedimientos; el lenguaje se considera apto al nivel educativo y acorde al programa de estudios, sin embargo, no es posible presentar una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación.

Conocimiento ampliado del contenido: Se evidencia el conocimiento de los profesores con diversos tipos de tareas, especialmente las que se enmarcan dentro de contextos intra-matemáticos (posibles generalizaciones de las tareas, conexiones con otros temas más avanzados,) sin embargo estos se ven truncados por cuestiones temporales.

Referencias bibliográficas

Acuerdo Secretarial No. 447. (2008). Por el que se establecen las competencias docentes para quienes impartan educación media superior en la modalidad escolarizada. México: DOF.

Casanova, M. A. (1998). *La evaluación educativa. Escuela básica*. Editorial Muralla.

Godino, J. D. (2009). Categorías de los Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20,* 13-31.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME),* 1 – 20.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F., & Konic, P. (2012). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Revemat: Revista Electronica de Educación Matemática 7(2)*, 1-21.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Reserch in Mathematics Education,* 39, 372-400.

Sampieri, R. H., Collado, C. F., & Lucio, P. B. (2006). *Metodología de la investigación*. Cuarta edición. México: McGraw Hill/INTERAMERICMA EDITORES, SA DE C.V.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15(2),* 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57(1),* 1-22.

Subsecretaría de Educación Media Superior de la Secretaría de Educación Pública México, 2008. Reforma de la educación media superior en México: la creación de un sistema nacional de bachillerato en un marco de diversidad. Educación Media Superior, México, SEP.

Servicio profesional docente. (2014). Recuperado el 03 de mayo de 2017 de http://servicioprofesionaldocente.sep.gob.mx/ms/ingreso_historico_2014/estadisticas_do/

Servicio profesional docente. (2015). Recuperado el 03 de mayo de 2017 de http://servicioprofesionaldocente.sep.gob.mx/ms/ingreso/estadisticas_concurso/

ACTIVIDADES PARA LA INTEGRACIÓN DEL ÁLGEBRA LINEAL Y LA PROGRAMACIÓN EN EL PRIMER AÑO EN LA CARRERA DE INFORMÁTICA

Anelys Vargas Ricardo, Olga Lidia Pérez González, Yareida Fabián Estrada
Universidad de las Ciencias Informáticas. (Cuba), Universidad de Camagüey. (Cuba)
anelys@uci.cu, olga.perez@reduc.edu.cu, yfestrada@uci.cu

RESUMEN: Enfocar las clases hacia la solución de problemas reales y de la profesión puede permitir la comprensión de los conceptos más abstractos del Álgebra Lineal y aumentar la motivación de los estudiantes hacia su estudio. Para ello se llevó a cabo este taller en el que participaron varios profesores y que tuvo como objetivo instruir a los docentes sobre cómo vincular las asignaturas de Álgebra Lineal y Programación en el primer año de la carrera de Informática. Este taller fue impartido en dos ocasiones con profesores de procedencias. Las actividades propuestas propiciaron la participación activa de los docentes, y se obtuvo un debate enriquecedor, lográndose propuestas innovadoras e interesantes.

Palabras clave: interdisciplinariedad, álgebra lineal, programación

ABSTRACT: Focusing classes towards real-problem solving and professional problem solving can allow the understanding of the most abstract concepts of Linear Algebra and increasing students' motivation towards their study. With this aim, a workshop where several teachers participated was carried out with the objective to train teachers on how to link the subjects of Linear Algebra and Programming in the first year of the computer science major. The workshop was given twice with different kinds of teachers. The activities proposed led to the active involvement of teachers, and an enriching debate was achieved, resulting in innovative and interesting proposals.

Key words: interdisciplinary, linear algebra, programming

Introducción

Es un reto para los docentes de Matemáticas mostrar a sus estudiantes cual en la vinculación entre la materia que enseñan y el perfil del profesional desde el comienzo de la clase, y es por ello que surgen entre los alumnos inquietudes tales como ¿para qué me sirve esto? ¿Qué importancia tiene lo que estudiamos en esta clase? ¿Cómo voy a aplicar este contenido en la carrera? Estas interrogantes a menudo van acompañadas de desmotivación en los estudiantes que cursan esta materia y baja calidad en los resultados docentes que obtienen.

En las carreras de Ingeniería, la Matemática constituye una herramienta para la solución de los problemas de la profesión que enfrentarán los futuros graduados. Este aspecto es olvidado por muchos de los docentes que en sus clases disertan magistralmente sobre todos los aspectos teóricos propios de la ciencia pero olvidan el objetivo de la Enseñanza de la Matemática para estas titulaciones y al finalizar el curso e incluso la carrera los estudiantes, en ocasiones, se ven imposibilitados a aplicar lo aprendido a la solución de problemas reales y no se concibe un profesional altamente calificado en estas ramas sin un conocimiento profundo de elementos matemáticos que le permitan una visión transformadora de la sociedad con la cual interactúa (Delgado & Arza, 2011).

Una de las asignaturas de la disciplina Matemática, que no escapa a esta situación, es el Álgebra Lineal que constituye uno de los contenidos trascendentales para la formación de informáticos. El proceso de enseñanza-aprendizaje de esta asignatura ha sido estudiado durante las últimas décadas y a partir del análisis de varias investigaciones se ha llegado a la conclusión de que independientemente de los enfoques empleados en la impartición de esta materia ya sea matricial, axiomática, geométrica y computacional permanecen las deficiencias en el aprendizaje y al parecer esto se debe a que Álgebra Lineal es y seguirá siendo una materia de difícil comprensión para la mayoría de los estudiantes (Hurman, 2007).

Jean-Luc Dorier en 2000, planteó la existencia de dos tipos de fuentes de las dificultades de los estudiantes: la naturaleza de Álgebra Lineal en sí misma, y el tipo de pensamiento necesario para la comprensión de los conceptos del Álgebra Lineal los cuales son inseparables (Dorier, 2000).

Metodología empleada

Para que los estudiantes aprendan a ver que existe una necesidad y que ese conocimiento es desarrollado como una solución a un problema, es necesario que el enfoque en las clases sea hacia la solución de problemas reales, lo que puede permitir la comprensión de los conceptos más abstractos y aumentar la motivación de los estudiantes hacia el estudio de la materia. Es por ello que se realizó este taller con el objetivo de promover un debate entre los docentes sobre cómo vincular las asignaturas de Álgebra Lineal y Programación en el primer año.

Las actividades planificadas se enmarcan en una concepción del aprendizaje sustentada en que las cualidades humanas se desarrollan en la actividad, mediante de la formación por etapas de las acciones mentales de Galperin (1987) y el acercamiento a problemas solución de problemas reales trae consigo el uso inevitable del lenguaje natural y requiere de la transferencia de registros semióticos por lo que se emplea además la teoría de Duval (2006) para entender las dificultades que tienen los estudiantes en la comprensión de los problemas matemáticos a los que se enfrentan y son las principales causas de la falta de motivación y los bajos rendimientos académicos.

Estructura del taller

El taller se concibió y se llevó a cabo en dos sesiones de trabajo. En la primera sesión se abordaron aspectos teóricos y metodológicos para desarrollar el proceso de enseñanza en el primer año y el vínculo entre el Álgebra Lineal y la Programación y en la segunda sesión se abordó ejemplos y propuestas de actividades prácticas.

El objetivo planteado para el taller fue debatir con los docentes sobre cómo vincular las asignaturas de Álgebra Lineal y Programación en el primer año de la carrera Ingeniería en Ciencias Informáticas.
Se realizaron dos ediciones del taller, la primera llevada a cabo en la Universidad de las Ciencias Informáticas en diciembre de 2015 y otra durante la trigésima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 30), celebrada en el Instituto Tecnológico de Monterrey, en la Ciudad de Monterrey, México en julio de 2016. Los resultados de ambas experiencias se describen a continuación.

Experiencia y resultados obtenidos

Sesión 1

Se realizó un diagnóstico inicial encaminado a conocer la titulación de los docentes, país de procedencia, la experiencia impartiendo Álgebra Lineal y las motivaciones para la participación en el taller. Participó un total de 14 docentes, en la Tabla 1 aparecen los datos obtenidos:

Tabla 1. Composición de profesores que participaron en el taller

Profesores por países	Titulaciones	Experiencia docente
-Cuba (10) -México (3) -Perú (1)	-Licenciados en Matemática (4) -Ingenieros informáticos (4) -Licenciados en Educación, Esp. Matemática (4) -Otros Licenciados (1) -Otros Ingenieros (1)	-Menos de 5 años (7) -Más de 10 años (7)

Todos los docentes participantes coincidieron en que las motivaciones para formar parte de esta experiencia radica en la posibilidad de encontrar respuestas a cómo enfrentar metodológicamente la vinculación entre las materias en cuestión debido a que resulta un obstáculo el hecho de que al momento en que ambas se imparten existe muy poco dominio de los estudiantes del perfil profesional ya para dar solución a problemas de la profesión se requiere de mayor cantidad de elementos y conocimiento de la carrera.

A partir de tomar en consideración que es un reto para los docentes de Matemáticas mostrar a sus estudiantes cuál es la vinculación entre la materia que enseñan y el perfil del profesional desde el comienzo de la clase para dar respuesta a las inquietudes que manifiestan los estudiantes tales como ¿para qué me sirve esto? ¿Qué importancia tiene lo que estudiamos en esta clase? ¿Cómo voy a aplicar este contenido en la carrera? En las indagaciones iniciales los docentes coincidieron en que, dentro del proceso docente educativo, se manifiestan las siguientes deficiencias:

- Desmotivación en los estudiantes.
- Baja calidad en los resultados docentes
- Docentes que disertan magistralmente sobre todos los aspectos teóricos propios de la ciencia y olvidan el objetivo de la Enseñanza de la Matemática para la Ingeniería.
- Dificultades para que los estudiantes apliquen lo aprendido a la solución de problemas reales.
- Escasa utilización de ejemplos de la vida real en las clases, fundamentalmente que involucren el objeto de la profesión.
- Insuficiencias en la integración entre el Álgebra Lineal y la Programación.

Aspectos teóricos y metodológicos

La integración de las disciplinas se manifiesta en la escuela mediante las relaciones interdisciplinarias, llevadas a cabo en el momento de organización y estudio de los contenidos de las disciplinas. Se considera una etapa para la interacción que sólo puede ocurrir en un régimen de coparticipación, reciprocidad, mutualidad y es una etapa necesaria para la interdisciplinariedad.

Se entiende como interdisciplinariedad: el proceso de enriquecimiento curricular mutuo y de aprendizaje como un producto del reconocimiento y desarrollo de los nexos entre las disciplinas de un plan de estudios (Fiallo, 2001).

Existen 4 etapas para el establecimiento de las relaciones interdisciplinarias:

1. Durante la concepción del Diseño Curricular General.
2. Durante la elaboración de los programas de las diferentes disciplinas.
3. Durante la elaboración de los libros de texto, orientaciones metodológicas, cuadernos de ejercicios etc.
4. Durante la puesta en práctica del Diseño Educativo Escolar, por todos los factores influyentes en el proceso docente educativo.
5.

En este trabajo se propuso la búsqueda de nodos cognitivos para lograr interdisciplinariedad durante la puesta en práctica del Diseño Educativo Escolar.
Para ello se estableció que algunos de los elementos que vinculan el Álgebra Lineal y la Programación son los siguientes:

- Desarrollo del pensamiento algorítmico.
- El álgebra propicia un acercamiento a las estructuras de datos abstractas.
- Muchos de los procedimientos y conceptos del Álgebra Lineal se emplean en la Programación.
- Cambios de registros semióticos, dados por las formas de representación de los algoritmos.
-

Para la representación de los algoritmos se emplean los diagramas de flujo, los diagramas rectangulares estructurados y el pseudocódigo.

En las figuras 1, 2 y 3, tomadas del libro La Esencia de la Lógica de Programación – Básico de Trejos, publicado en 1999, se realiza un análisis de las ventajas y desventajas de cada uno de ellos.

Diagramas de Flujo	a. Permite visualizar gráfica-mente el camino que sigue la solución a un problema b. Por ser tan simplificado es muy entendible c. No se necesitan muchos conocimientos técnicos para utilizar esta técnica	a. Dado que los flujos (representados con fle-chas) pueden ir de cualquier lugar a cualquier lugar da espacio para que el diagrama llegue a ser casi inentendible b. Deben conocerse bien los símbolos que se van a utilizar c. No todos los símbolos están estandarizados d. Los ciclos deben ser reinterpretados para poder ser diagramados en esta técnica e. No siempre es muy entendible f. Algunas veces la analogía entre el diagrama y la codificación en el Lengua-je de Programación resul-ta ser compleja

Figura 1. Diagramas de flujo (Trejos, 1999, p. 74)

Diagramación Rectangular Estructurada	a. Permite tener un marco referencial concreto y definido para la repre-sentación de los algorit-mos b. Solo tiene tres esquemas que le permiten a su vez representar las tres estructuras básicas c. Exige orden en la representación de un algoritmo d. Es muy entendible e. La analogía entre la codificación y el diagrama normalmente es directa y por lo tanto muy sencilla	a. Exige una fundamen-tación técnica que permita representar la solución a cualquier problema a través de las tres estructuras básicas b. No una técnica muy popularizada

Figura 2. Diagrama rectangular estructurado (Trejos, 1999, p. 74)

SeudoCódigo	a. Permite expresar la solución algorítmica a un problema en nuestro propio lenguaje y casi con nuestras propias reglas b. La codificación se facilita demasiado dado que la transcripción es directa c. Si el programador es ordenado, esta puede llegar a ser la técnica mas entendible	a. Exige mucho orden para ser utilizada eficiente-mente b. Exige el mantenimiento claro de los conceptos de algoritmos como tales c. Las decisiones deben estar encasilladas dentro de los alcances de los operadores lógicos y operadores booleanos

Figura 3. Pseudocódigo (Trejos, 1999, p. 74)

Cada uno de estos sistemas de representación de los algoritmos ofrece herramientas a través de las cuales se seleccionaron como nodos cognitivos los siguientes:

- Matrices, vectores y arreglos.
- Algoritmos de solución de problemas del Álgebra Lineal y su representación.
-

Matrices, vectores y arreglos.

Si tomamos en cuenta las siguientes definiciones de matriz, encontradas en varias fuentes, se puede observar que existe en ellas una relación directa entre las matrices y los arreglos:

- "Matriz: Sistema de números (reales) a_{ij} (con $i = 1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, n$) ordenados en una tabla rectangular de m filas y n columnas" (Valera, Suárez, Castro y Baldoquín, 2002, p.99).
- "If *m* and *n* are positive integers, then an matrix is a rectangular array in which each entry, of the matrix is a number. An matrix (read "*m* by *n*") has *m* rows (horizontal lines) and *n* columns (vertical lines)"(Larson y Falvo, 2009, p.14).
- "Arreglo rectangular de números llamados ***entradas***, o ***elementos***, de la matriz" (Poole, 2011, p.144)**.**

Desde el punto de vista de la programación un arreglo es un conjunto de variables en donde cada una de ellas puede ser referenciada utilizando su posición relativa (su ubicación en relación con el primer elemento del conjunto). Un vector es un arreglo en donde la ubicación exacta de cada uno de sus elementos necesita solamente la utilización de un subíndice. (Los datos que se han de almacenar siempre serán del mismo tipo)

Empleando este enfoque desde el punto de vista de ambas asignaturas, se pueden ilustrar las relaciones interdisciplinarias.

Los algoritmos en la solución de problemas del Álgebra Lineal

Sesión 2

En la segunda sesión se abordaron ejemplos y propuestas de actividades prácticas.

Para llevar a cabo esta segunda etapa se dividieron los profesores en equipos y se les solicitó que realizaran propuestas de ejercicios donde se emplearan los diagramas de flujo y los seudocódigos para resolver problemas propios del Álgebra Lineal de forma tal que se mostrara la representación de algoritmos de solución de problemas del Álgebra Lineal y la relación entre los conceptos.

A continuación se muestran dos ejemplos.

Ejemplo 1: Describa, a través de un diagrama de flujo, un procedimiento para determinar si un sistema de vectores es linealmente dependiente o independiente.
Respuesta: Ver Figura 4

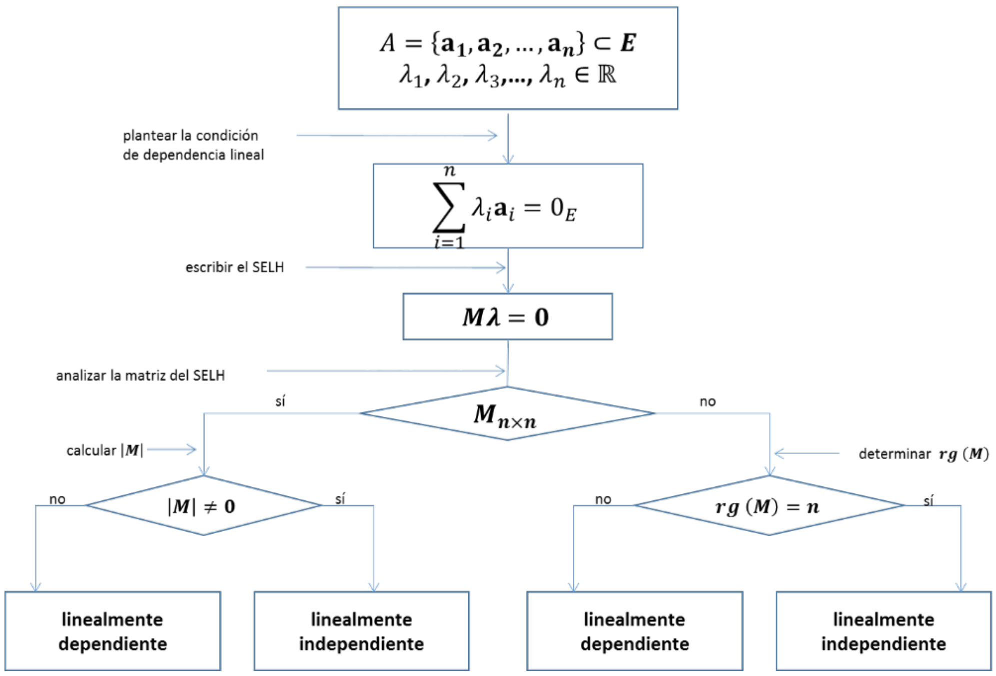


Figura 4. Procedimiento para determinar si un sistema de vectores es linealmente dependiente o independiente

Ejemplo 2: La Figura 5 muestra, en forma de diagrama de flujo, un procedimiento para determinar si un sistema de vectores es linealmente dependiente o independiente. Complete los espacios en blanco.

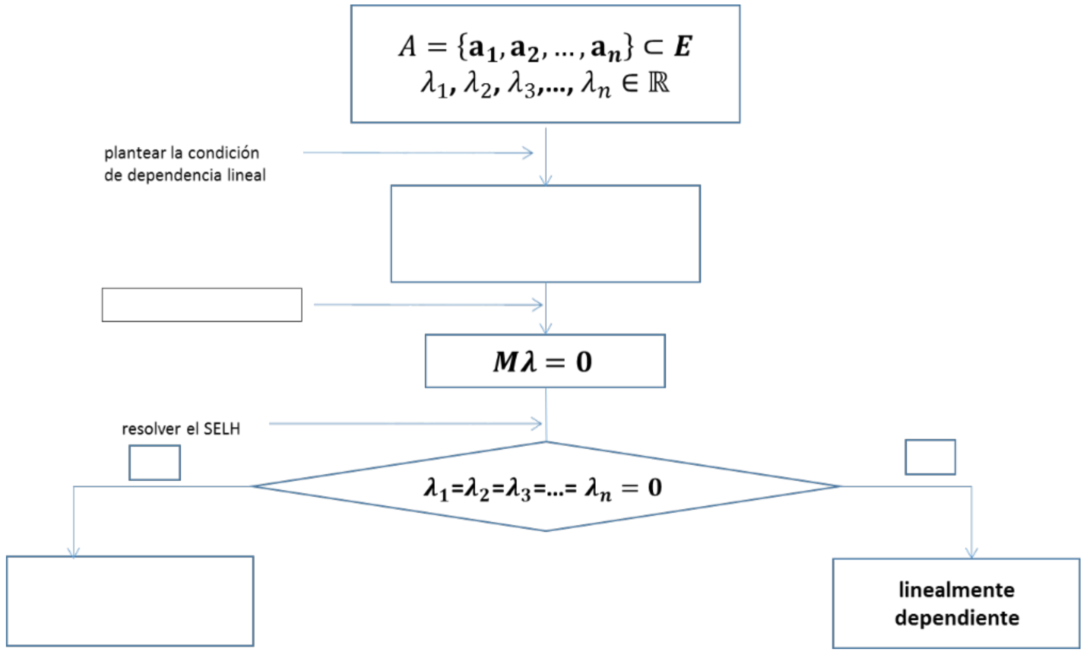


Figura 5. Diagrama de flujo de un procedimiento para determinar si un sistema de vectores es linealmente dependiente o independiente

Conclusiones

En este taller se propició la participación activa de los docentes con el empleo de metodologías activas y se obtuvo un debate enriquecedor lográndose propuestas innovadoras e interesantes.
Como parte de los análisis realizados se escogió el empleo de los diagramas de flujo debido a su poca complejidad de representación.
Se mostraron y pusieron en evidencia las relaciones interdisciplinarias entre el Álgebra Lineal y se mostró que se puede contribuir al desarrollo del pensamiento algorítmico desde esta asignatura.

Referencias bibliográficas

Delgado, Y., y Arza, L. (2011). El Álgebra Lineal en la formación del Ingeniero Informático. *Serie Científica de la Universidad de las Ciencias Informáticas*, 4(1).
Dorier, J.-L. (2000). *On the Teaching of Linear Algebra*: Kluwer Academic.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131.

Fiallo, J. P. (2001). *La interdisciplinariedad en el currículo: ¿utopía o realidad educativa?* La Habana: ICCP

Galperin, P. (1987). *Sobre el método de formación por etapas de las acciones mentales. Psicología Evolutiva y Pedagogía*. URSS: Progreso.

Hurman, A. L. (2007). *El papel de las aplicaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra Lineal*. Recuperado de http://www.cimm.ucr.ac.cr/eudoxus/Algebra Teaching/pdf/Hurman A. El papel De las Aplicaciones en el Proceso de Enseñanza-Aprendizaje del Algebra Lineal.pdf

Larson, R. y Falvo, D. C. (2009*). Elementary Linear Algebra*, Boston: Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company.

Poole, D. (2011). *Álgebra Lineal: una introducción moderna*. México: Cengage Learning.

Trejos, O. I. (1999). *La Esencia de la Lógica de Programación – Básico.* Pereira: Papiro.

Valera, M.V, Suárez, L., Castro, M. Baldoquín, G. (2002). *Álgebra Lineal*. Guantánamo: Osvaldo Sánchez

PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM UM PROJETO DO PROGRAMA OBSERVATÓRIO DA EDUCAÇÃO: PRÁTICAS DE ENSINO EXPLORATÓRIO

Rosana Jorge Monteiro Magni, Nielce Meneguelo Lobo da Costa, Rosangela de Souza Jorge Ando
Universidade Anhanguera de São Paulo. (Brasil), UNIAN. (Brasil)
rosanajmm@gmail.com, nielce.lobo@gmail.com, rosangela.ando@gmail.com

RESUMO: Neste artigo relatamos parte de resultados de uma pesquisa sobre uma formação continuada e discutimos uma prática de ensino exploratório de uma professora de matemática participante do processo formativo. A pesquisa, no tocante a essa prática, teve como fundamentação teórica estudos de Ponte e de Canavarro, Oliveira e Menezes, sobre aulas investigativas. A metodologia empregada foi a qualitativa de cunho co-generativo, segundo Greenwood e Levin. Os procedimentos metodológicos utilizados foram: acompanhamento do processo formativo, planejamento de atividades e análise conjunta das aplicações em sala de aula. Os dados foram coletados por meio de observações, recolha dos materiais adaptados pelos professores, gravações de áudio e vídeo, tanto do processo formativo como da sala de aula. A análise foi realizada por triangulação de dados, segundo Denzin. Os resultados parciais revelaram que foi um desafio para a professora desenvolver um ensino exploratório, especialmente pela mudança de prática e da gestão da sala de aula.

Palavras chave: ensino exploratório, observatório da educação, formação

ABSTRACT: In this article we report part of the results of a research on a continuous training and we discuss an exploratory teaching practice of a mathematics teacher who participates in the formative process. The research, in relation to this practice, was based on theoretical studies by Ponte and Canavarro, Oliveira and Menezes, on investigative classes. It used the co-generative qualitative methodology, according to Greenwood and Levin. The methodological procedures used were: monitoring the training process, planning activities and joint analysis of the activities in the classroom. Data were collected through observations, collection of materials adapted by teachers, audio and video recordings of both the training process and the classroom. The analysis was performed by triangulation of data, according to Denzin. The partial findings showed that it was a challenge for the teacher to develop an exploratory teaching, especially by the change of practice and the management of the classroom.

Key words: exploratory teaching, education observatory, training

Introdução

O presente estudo insere-se na linha de pesquisa "Formação de Professores que Ensinam Matemática", do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo – Brasil. A pesquisa desenvolve-se no âmbito de um Projeto dessa Universidade, intitulado "Educação Continuada do Professor de Matemática do Ensino Médio: Núcleo de Investigações sobre a Reconstrução da Prática Pedagógica", do Programa Observatório da Educação, denominado aqui de "OBEDUC Práticas". Tal Programa é uma ação do Ministério da Educação do Brasil/ MEC, com proposta de promover estudos e pesquisas em Educação que utilizem a infraestrutura disponível das Instituições de Educação Superior e as bases de dados existentes no Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira / INEP; proporcionar a articulação entre: a pós-graduação, as licenciaturas e as escolas públicas de educação básica; estimular a produção acadêmica e a formação de recursos pós-graduados, em nível de mestrado e doutorado.

A pesquisa que subsidia este artigo foi desenvolvida em uma formação continuada para professores de Matemática do Projeto "OBEDUC Práticas", do qual as autoras foram formadoras e pesquisadoras. A referida investigação teve por finalidade estudar o processo de desenvolvimento profissional docente.

Neste texto, analisamos um episódio de uma prática de ensino exploratório de uma professora de matemática participante desse processo formativo.

Fundamentação teórica

Uma aula de caráter investigativo de cunho exploratória da Matemática, segundo estudos de Ponte (2005) e de Menezes, Oliveira e Canavarro (2011, 2012) está estruturada em quatro fases: 1. Introdução da tarefa; 2. Realização da tarefa; 3. Discussão da tarefa e 4. Sistematização das aprendizagens matemáticas. O professor, para cada uma dessas fases, deve cuidar de promover a aprendizagem e gerir a turma; não reduzir o nível de desafio cognitivo da tarefa e desenvolver uma cultura de discussão matemática.

Na primeira fase da aula o professor lança/introduz a tarefa para os alunos garantindo que se apropriem do que lhes é proposto, e sintam-se desafiados a realizá-la. Além disso, deve gerir o tempo para a sua realização, organizar o agrupamento da turma em duplas ou em pequenos grupos, disponibilizar os recursos, ou seja, os materiais necessários, assegurando um ambiente adequado para o seu desenvolvimento com êxito.

Na fase seguinte da aula, de realização da tarefa, os alunos devem explorá-la/realizá-la de forma autônoma, apoiados pelo professor. É importante que esse apoio não interfira na estratégia e na resolução da mesma, promovendo desta forma o nível cognitivo exigido. Ainda nesta fase, o professor deve orientá-los para que registrem como realizaram a tarefa visando uma futura apresentação, organizando a sequência dessas exposições para discussão coletiva.

Na fase da aula que permite a discussão da tarefa, os alunos mantêm o papel de protagonistas, apresentando em plenária as estratégias utilizadas para sua resolução. O professor propicia a interlocução entre a turma, incentivando questionamentos, harmonizando a discussão, valorizando as distintas resoluções apresentadas e corrigindo possíveis equívocos, em relação aos conceitos matemáticos que embasam a tarefa.

A fase final da aula corresponde à sistematização das aprendizagens matemáticas, por meio da intervenção do professor, quando ele promove conexões e o reconhecimento de conceitos matemáticos apreendidos anteriormente pelo aluno, que sistematiza e constrói novos conhecimentos, relacionados à resolução de problemas e ao raciocínio lógico-matemático. (Ponte, 2005)

Abordagem Metodológica

A pesquisa é de natureza qualitativa, na perspectiva de Lüdke e André (1986) e de cunho co-generativo, segundo Greenwood e Levin (2000), ou seja, um tipo de pesquisa-ação conduzida democraticamente entre os participantes, na qual o conhecimento é co-gerado e o significado é construído no processo de investigação.

Os procedimentos metodológicos empregados para a realização da pesquisa consistiram no acompanhamento das professoras, tanto no processo formativo quanto no planejamento de atividades para a sala de aula, na aplicação e análise conjunta dessas atividades.

Os instrumentos de coleta utilizados foram: gravações de áudio e vídeo do processo formativo e da sala de aula, materiais produzidos/ adaptados pelos professores e diário de bordo das pesquisadoras.

A análise dos dados foi interpretativa pelo método de triangulação de dados e de teorias, na acepção de Denzin (1988). A triangulação de dados, envolvendo tempo, espaço e pessoas, implica coletar dados em diferentes períodos e fontes distintas, de modo a obter-se uma descrição mais rica e detalhada dos fenômenos. A triangulação de teorias consiste em utilizar mais de um esquema teórico na interpretação do fenômeno pesquisado e refere-se à possibilidade de o investigador recorrer a múltiplas teorias para interpretar um mesmo conjunto de dados. Assim, entendemos que o conjunto de dados recolhidos possibilitou uma análise consistente da ação e do episódio ocorrido.

Um episódio de uma prática de ensino exploraório

O episódio relatado ocorreu durante o processo formativo, em momento de discussão coletiva, ocorrido a partir de análise de vídeo sobre uma prática de ensino exploratório, empreendida por uma das professoras participantes.

No recorte apresentado, dadas às limitações de espaço desse texto para compreensão do contexto, sumarizamos o que ocorria no processo formativo. O foco estava em práticas de sala de aula que utilizassem tarefas de resolução de problemas. Entretanto, partindo desse tema, a discussão foi ampliada para outros tipos de tarefas, tais como as de cunho exploratório e as que se referem ao ensino de matemática por meio de aulas investigativas.

Para tanto propusemos, no processo formativo, a leitura de textos sobre ensino exploratório e sobre a condução de uma aula de caráter investigativo, na acepção de autores portugueses, tais como João Pedro da Ponte e equipe.

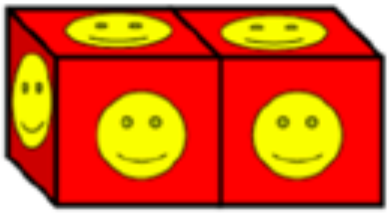
A partir desses estudos e do contato com materiais do Projeto P3M - Práticas Profissionais dos Professores de Matemática (Ponte et al., 2012), propusemos às professoras participantes que planejassem em conjunto uma tarefa utilizando o "método exploratório" para ser aplicada em sala de aula. A tarefa poderia ser criada ou adaptada a partir dos materiais estudados na formação.

As professoras adaptaram a atividade intitulada "Cubos com Autocolantes". Tal atividade foi descrita em artigo estudado pelo grupo (Canavarro, A.; Oliveira, H., & Menezes, L., 2012), o qual relatava detalhadamente, os materiais utilizados na sala de aula e a mediação do professor para desenvolver cada uma das fases indicadas na teoria sobre ensino exploratório de Matemática.

As adaptações foram feitas principalmente na linguagem, uma vez que as professoras participantes entenderam que a tarefa, que envolve generalização, se mostrava adequada à faixa etária de seus alunos, especialmente para promover explorações de conhecimentos algébricos.

Na figura a seguir, registramos a tarefa planejada pelas professoras, intitulada "Cubos com Adesivos".

"Joana está construindo um jogo com cubos e adesivos". Ela une os cubos por uma das faces e forma uma fila de cubos. Depois cola um adesivo em cada uma das faces. A imagem mostra a construção que Joana fez com 2 cubos. Nessa construção ela usou 10 adesivos.



1.Descubra quantos adesivos a Joana usa na construção com: a) três cubos; b) quatro cubos; c) dez cubos; d) cinquenta cubos.

2. Consegue descobrir qual é a regra que permite saber quantos adesivos a Joana usa numa construção com um número qualquer de cubo? Explique como pensou.

Figura 1. Tarefa exploratória para a sala de aula

As professoras participantes do processo formativo aplicaram a tarefa em sala de aula e produziram vídeos que trouxeram para análise e discussão no coletivo.

A seguir, relataremos as discussões sobre a prática de uma das professoras participantes, a saber, a professora Lyra, utilizando a metodologia da prática do ensino exploratório com as quatro fases indicadas na teoria.

A professora Lyra aplicou a atividade a alunos seus do 9º do Ensino Fundamental. Ela fotografou e produziu um vídeo registrando a "sua" aula exploratória e a metodologia empregada para a realização.

O vídeo da professora Lyra foi assistido e analisado em conjunto no processo formativo, pelas demais professoras participantes.

Apresentaremos a seguir, as análises que foram estruturadas em quatro etapas.

Primeira etapa

Constatamos que, inicialmente, Lyra informou aos alunos que naquela aula, fariam uma atividade diferente do que estavam habitualmente acostumados. Organizou os alunos em duplas, leu pausadamente o enunciado da tarefa com a intenção de que a turma compreendesse o que estava sendo proposto, e a *posteriori,* as questões que os desafiavam para a resolução. Preparou e distribuiu os materiais necessários para a sua realização (cubos de madeira, adesivos colantes, cartolinas para registro e a impressão da atividade). Incentivou-os com um discurso positivo de que todos seriam capazes de realizar a tarefa. Observamos que isso correspondeu à fase de introdução da tarefa, segundo a teoria estudada.

Na discussão no coletivo, ocorreram momentos de reflexões, onde Lyra relata, que:

> "...trabalhando e conhecendo os meus alunos, percebi a preocupação e o envolvimento deles com o "novo"; não apenas para eles, mas para mim também, como profissional, nunca havia feito um trabalho exploratório, e nem como aluna que fui, aprendi assim. Por isso, conhecendo o "novo", eu e os alunos, vimos um trabalho motivador, que busca algo não só novo, mas necessário ao ensino da matemática".

Observamos no relato, que Lyra refletiu sobre a sua formação e prática docente. Desta forma, o "novo" mencionado por ela, foi a forma diferenciada de realizar uma tarefa, tanto para ela, quanto para os alunos. Assim, conceitos matemáticos foram ensinados e aprendidos de uma forma mais significativa para ambos. Verificamos, pelo relato, que a proposta de tarefas exploratórias na sala de aula não fazia parte da prática profissional da professora.

Segunda etapa

Dando continuidade à discussão da aula de Lyra, observamos que ela solicitou aos alunos que se organizassem em duplas na sala de aula e registrassem as resoluções da tarefa, primeiro na folha onde estava impressa, e depois em uma cartolina. Explicou que as duplas, após discutirem e obterem as soluções apresentariam em plenária suas respostas para os demais colegas da turma. Enquanto os alunos exploravam a tarefa, a professora Lyra circulou na sala de aula para fomentar as discussões, retomando sempre as questões da tarefa. Além disso, verificou os registros dos alunos para organizar as apresentações. Recebeu, então, a visita da diretora da escola que acompanhou parte do desenvolvimento da atividade.

Notamos nessa etapa, que as sequências de ações empregadas pela professora corresponderam à fase de realização da tarefa, segundo a teoria proposta nos estudos da formação.

A discussão no coletivo prosseguiu. Lyra declarou:

> "Me aproximei e intervi pouco, não consegui dar pistas 'matemáticas' suficientes para os alunos resolverem a tarefa. Sabe, acho que não consegui fazer bem a mediação, não queria interferir na resolução dos alunos. Para mim é difícil dar aula dessa forma, uma aula exploratória, trazer dos alunos as respostas do problema, mas eu tente".

Percebemos pelo depoimento da professora, a dificuldade que teve para realizar essa fase da aula exploratória, ou seja, a realização da tarefa. Segundo Ponte (2005), este tipo de aula é realmente complexo, uma vez que requer do docente planejamento das ações, atitudes e decisões que devem ser tomadas, de modo a ser um articulador dos conteúdos matemáticos. Isso envolve organização de tempo, espaços e materiais pedagógicos, conhecer seus alunos, e assumir uma postura de regulador da atividade.

Lyra relatou sobre os alunos:

> "Os meninos se interessaram pela atividade, participaram, discutiram e procuraram encontrar a solução da tarefa. Houve envolvimento por parte deles".

É possível observar pela fala da professora e pelas cenas do vídeo, que os alunos estiveram realmente envolvidos na atividade, procuraram autonomamente estratégias para resolvê-la. Em nosso entender, isso pode ter favorecido a construção de conceitos matemáticos.

Lyra continuou seu depoimento. Disse:

> "Em minha escola este projeto foi muito bem aceito, apoiado pela direção e pelos funcionários, recebi toda a ajuda necessária para aplicar a tarefa, desde o preparo da classe, do material e da filmagem. Pensamos no aprendizado do aluno, sendo esta uma maneira diferente, podendo ser a melhor".

Notamos, nesta fala e no vídeo, que para o desenvolvimento da prática exploratória da professora Lyra foi fundamental o apoio da gestão escolar. Isso pode ter contribuído para mudanças nas práticas pedagógicas.

Terceira Etapa

Na sequência à discussão do vídeo, a professora solicitou às duplas de alunos que apresentassem suas estratégias de resolução e a solução da tarefa, ou seja, explicassem seus raciocínios à turma. Os alunos expuseram suas ideias e alguns até se equivocaram com as soluções. Nesse momento receberam esclarecimentos e explicações e, com o apoio da professora, conseguiram rever o erro e reavaliar suas respostas. Esta fase da aula exploratória correspondeu à discussão da tarefa, conforme a teoria.

Observamos no vídeo, que a professora, nessa fase da aula, - discussão da tarefa -, procurou não intervir nas falas dos alunos, deixando-os à vontade para serem protagonistas do aprendizado. Suas intervenções se restringiram a corrigir possíveis distorções. Tivemos a percepção também, que esse momento propiciou aos alunos a construção de conhecimentos matemáticos referentes à álgebra, particularmente à generalização de sequências.

No coletivo, a professora Lyra disse:

> "Aqui eu senti mais dificuldade em gerir o conteúdo matemático que a atividade propunha. Não ensino os alunos a pensarem assim... Mas, os alunos se saíram bem também na realização da atividade. Foram colocando seus registros na cartolina e explicando. Me surpreendi com as resoluções, foram confrontando as soluções e explicando uns para os outros como pensaram para resolver aquele desafio".

Notamos no vídeo e nas falas da professora, que nesta fase de discussão entre os alunos, a professora estava confiante, principalmente por constatar que os alunos desenvolveram a tarefa a contento. Isso contrasta com o sentimento declarado por ela em seu depoimento quanto à fase anterior, na qual teve dificuldade de conduzir a classe com relação ao conteúdo matemático, apresentado na tarefa.

Vale ressaltar que, para desenvolver essa prática de ensino exploratório, foi necessário à professora Lyra sair de sua "zona de conforto" e modificar a sua gestão de aula, assim como o seu papel docente.

Apresentamos na Figura 2, a seguir, imagens que ilustram o desenvolvimento da atividade desenvolvida pela professora Lyra com seus alunos do 7º ano, e também a interação da professora com seus alunos no desenvolvimento da aula.

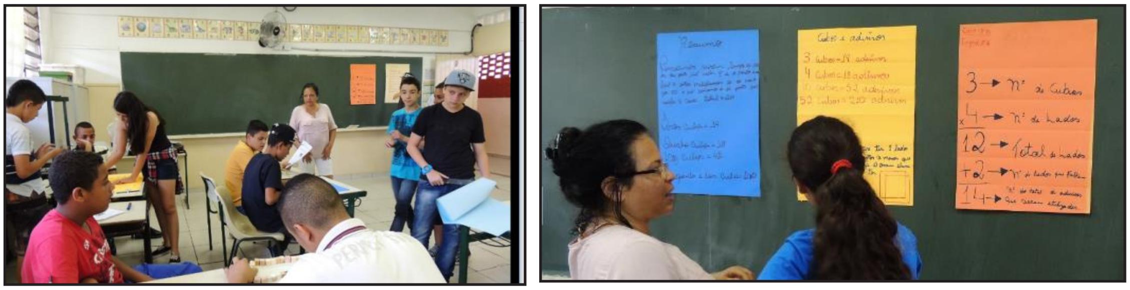


Figura 2. Imagens da realização da tarefa cubos com adesivos

Quarta etapa

Finalizando a discussão do vídeo sobre a aula exploratória desenvolvida por Lyra, assistimos a professora conduzindo a sistematização das aprendizagens matemáticas. Isso, após a fase de discussão das resoluções expostas pelos alunos. Retomou novamente o passo a passo da realização da atividade, reforçando etapas necessárias para que se observe regularidade da sequência e sua generalização, como utilizar álgebra – simbologia por letras, empregar variável. Nessa fase de institucionalização, procurou mediar os alunos de modo que estabelecessem relações entre seus conhecimentos e procedimentos já vistos anteriormente. As ações desenvolvidas pela professora, vão ao encontro da fase de sistematização das aprendizagens matemáticas, segundo a teoria estudada.

Em relação a essa fase, Lyra prossegue o relato:

> “Para a realização desta fase, foram poucas as dificuldades que tive que enfrentar. Foi normal, fui conversando com os alunos e fazendo relação com os conhecimentos que havíamos estudado naquele momento com outros estudos anteriormente. Não é simples propor práticas do ensino exploratório em Matemática, há momentos que não consegui fazer ligação entre uma fase e outra”.

A professora Lyra afirmou para os demais professores participantes dessa formação que:

> “Nós professores deveríamos ter mais oportunidades como esta, de frequentar formações, grupos de estudos, assim, tornaríamos a nossa vida profissional mais significativa e prazerosa”.

Os resultados revelaram que para a professora foi um desafio desenvolver um ensino exploratório especialmente pela mudança de prática e de condução da sala de aula. Entretanto constatamos que, na visão da professora, tarefas como esta incentivam os alunos para aprender, mas o papel do professor aqui foi essencial, como mediador e motivador da aprendizagem.

Mediante as declarações acima, concluímos que as formações continuadas e projetos tais como esse, do qual a professora participou, podem colocar os docentes frente a novos desafios, num movimento de aprimoramento e mudanças nas práticas. Além disso, podem oferecer aos professores subsídios e reflexões para a construção de conhecimentos. Nossos estudos culminam com as ideias de Ponte (2005), o professor, para ministrar uma aula investigativa de cunho exploratório, assume papéis primordiais para a aprendizagem, ou seja, desafia, apoia o trabalho, avalia o progresso dos alunos, necessitando, também, raciocinar matematicamente.

Referências bibliográficas

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, *115*, 11–17.

Canavarro, A.; Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. In L. Santos (Ed.), *Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da Matemática* (pp. 255-266). Porto Alegre: SPIEM.

Denzin, N (1988). Triangulation in educational research. Em J. Keeves, *Educational research, methodology and measurement: An Internacional handbook* (pp. 318-322). Oxford: Pergamon Press.

Greenwood, D.J., & Levin, M. (2000). Reconstructing the relationship between universities and society through action research. Em N. Denzin, & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 85-106). Thousand Oaks, California. Sage Publications Inc.

Ludke, M.; André, M. E. D. A. (1986). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas.* São Paulo: EPU.

Ponte, J. P. da, Brocardo, J. & Oliveira, H. (2005). *Investigações matemáticas na sala de aula.* Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Canavarro, A. P., Moreira, D., Martinho, H., Menezes, L., & Ferreira, R. (2012). Projeto P3M – Práticas profissionais dos professores de Matemática. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática – Práticas de ensino da Matemática.*

DESARROLLO DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA DE FUTUROS DOCENTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Gabriela Valverde Soto
Universidad de Costa Rica. (Costa Rica)
gabriela.valverde@ucr.ac.cr

RESUMEN: Los marcos curriculares que circunscriben la educación matemática en numerosos países señalan la competencia matemática como la expectativa de aprendizaje más relevante a desarrollar en los escolares. Esta situación introduce un desafío ineludible en el ámbito de la educación superior: el desarrollo de procesos de formación orientados a la promoción de la competencia matemática de los futuros docentes de educación primaria. El artículo contempla inicialmente una síntesis de investigaciones que se han planteado la cuestión ¿cómo desarrollar el conocimiento matemático y las competencias matemáticas de los futuros maestros de educación primaria? Posteriormente, se presentan los aspectos básicos de un experimento de enseñanza centrado en responder a la pregunta anterior desde el contexto matemático de la proporcionalidad.

Palabras clave: competencia matemática, educación primaria, formación de docentes proporcionalidad

ABSTRACT: The curricular frameworks restricting mathematical education in many countries point out the mathematical competence as the most relevant learning expectation, to be developed in the students. It leads to an unavoidable challenge in higher education: the development of training processes focused on the fostering of mathematical competence of prospective teachers of elementary school. This article first quotes a synthesis of researches which have stated the question: how to develop mathematical knowledge and mathematical competences in prospective teachers of elementary school. Later, the paper includes the main aspects of a teaching experiment aimed at answering the previous question from the mathematical context of proportionality.

Key words: mathematical competence, elementary school, teachers' training, proportionality

Introducción

El conocimiento matemático necesario para la enseñanza ha sido conceptualizado de diversas maneras. El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM por sus siglas en inglés) lo describe como: "el contenido y discurso matemático, incluye conceptos y procedimientos matemáticos y las conexiones entre ellos; múltiples representaciones de los conceptos y procedimientos matemáticos, formas de razonar matemáticamente, resolver problemas y comunicar efectivamente las matemáticas en diferentes niveles de formalidad" (NCTM, 1991, p. 132). Más recientemente, Kilpatrick, Swafford y Findell (2001) lo definen como "conocimiento de los hechos, conceptos y procedimientos matemáticos y las relaciones entre ellos, conocimiento de las formas en las que las ideas matemáticas pueden ser representadas, y el conocimiento de las matemáticas como una disciplina, en particular, cómo el conocimiento es producido, la naturaleza del discurso en matemáticas, las normas y estándares que dirigen los argumentos y demostraciones" (p.371). Entrelazado a este constructo está el de competencia matemática señalando la capacidad de una persona para interpretar y usar el conocimiento matemático en una diversidad de situaciones, pone énfasis por lo tanto en la funcionalidad del conocimiento (OCDE, 2004). Pero más allá del problema de la caracterización de este tipo de conocimiento o de la competencia matemática está el problema de cómo construirlo o reconstruirlo, y de cómo promover procesos cognitivos que permitan el desarrollo de dicha competencia; por lo tanto el artículo aborda la situación desde la práctica y no se centra en la discusión de las conceptualizaciones existentes. Un supuesto asumido en este trabajo es que los maestros de primaria no pueden ayudar a los niños a desarrollar la competencia matemática si ellos mismos no han logrado construir un nivel de desempeño aceptable de ésta. En este sentido, Niss (citado en Gómez, 2007, p. 127) afirma que un "buen docente de matemáticas" es aquel que puede inducir y promover el desarrollo de las competencias matemáticas en sus estudiantes, lo cual obviamente implica que el profesor mismo debe poseer esas competencias matemáticas.

Lamentablemente, desde el contexto de la mediación pedagógica suscitada en el proceso de formación inicial, los formadores de docentes de Educación Primaria comúnmente identificamos una serie de errores y dificultades en los procesos de razonamiento necesarios para la construcción del conocimiento matemático para la enseñanza, esta situación es frecuentemente descrita en investigaciones precursoras y en otras recientes (Ball, 1990; Simon, 1993; Tirosh, Graeber y Wilson, 1998; Valverde, 2008, 2012). Estos errores no son puntuales y se presentan en diversas áreas de la matemática, no obstante, los subconstructos de los números racionales constituyen un campo fértil para el enraizamiento de dificultades cognitivas. Este hecho ha venido exponiéndose desde la década de los años 80 en estudios que se han centrado en la comprensión de las fracciones, tales como: las justificaciones de la división (Ball, 1990), desempeño en la resolución de problemas verbales que implicaban la multiplicación y división de fracciones (Graeber y Tirosh, 1988), creencias acerca de estas operaciones (Tirosh y Graeber, 1990), entre otros. Tales estudios han mostrado que el conocimiento que los maestros en formación poseen sobre los números racionales es procedimental y escasamente conectado. Resultados de tales estudios muestran que tanto los maestros activos como aquellos en formación lidian con los mismos conceptos y manifiestan las mismas ideas primitivas y falsas concepciones que los estudiantes de primaria o secundaria. Este panorama no es exclusivo del aprendizaje de las fracciones pues se presenta en la comprensión de la razón o nociones que la vinculan como lo es la relación de proporcionalidad. Por ejemplo, en situaciones de comparación de razones la división de números naturales surge como un procedimiento apropiado para establecer la relación de orden entre dos razones, no obstante, paralelamente y de manera reiterada aparece la interpretación incorrecta del cociente de la división (Valverde, 2008).

Revisión de la Literatura

Con una visión más amplia, Ponte y Chapman (2008), destacan en el "*Handbook of International Research in Mathematics Education"* un conjunto de investigaciones relacionadas con el conocimiento matemático de los futuros docentes, y plantean una manera de organizar tales estudios retratando concisamente las dos tendencias más predominantes en esta línea de investigación: (1) las investigaciones centradas en estudiar las debilidades del conocimiento matemático de los profesores en formación inicial, y (2) las investigaciones centradas en el desarrollo de este tipo de conocimiento. Es necesario reconocer que gracias a los estudios centrados en la detección de debilidades se han logrado construir importantes ideas, por ejemplo, que los maestros en formación inicial necesitan construir matemáticas significativamente como una manera de desarrollar su conocimiento matemático para la enseñanza y que por lo tanto más o mera transmisión de matemáticas puras no se traducen en una mayor calidad de formación docente.

Las investigaciones centradas en el desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza tratan maneras de mejorar este conocimiento o remediar cuestiones específicas del mismo, representan formas alternativas para desarrollar un conocimiento más apropiado. En general, éstos incluyen principios para el aprendizaje de los profesores en formación inicial. Por ejemplo, Cramer (2004) identificó las siguientes pautas para guiar los cursos de matemáticas para maestros:

- El contenido matemático es incluido en conjuntos de problemas, los estudiantes recogen información, generan hipótesis y verifican conjeturas.
- Los estudiantes trabajan en grupos pequeños para optimizar las oportunidades de discutir.
- Los cuestionamientos se presentan para ayudar a los estudiantes a construir el conocimiento matemático.
- El lenguaje, oral y escrito, de los estudiantes juega un rol importante facilitando la transición desde la exploración y resolución de problemas hacia las abstracciones formales matemáticas.
- Se enfatizan las conexiones en y entre tópicos matemáticos.
- El uso de la tecnología se integra en las actividades cotidianas del curso. (Cramer, 2004, p.181)

La premisa subyacente de las investigaciones centradas en el desarrollo del conocimiento matemático es no proporcionar a los profesores en formación inicial más matemáticas, sino principalmente, permitirles comprender y reconstruir lo que ellos saben con mayor profundidad y significado (Ponte y Chapman, 2008). Pero, en general, según estos autores es necesaria más investigación acerca de cómo enfoques específicos ajustan los diferentes objetivos y necesidades de los grupos de profesores en formación inicial, de primaria y secundaria, con distintos fundamentos y en diferentes sistemas educativos.

A continuación, se presentan cinco tipos de actividades de aprendizaje que se vienen investigando y que se han sugerido como vías prometedoras o efectivas para facilitar el desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza. Posteriormente se detalla una investigación realizada por la autora de este artículo y que estuvo basada en el tipo de actividades descritas en el Enfoque 5.

Enfoque 1. Una estrategia seguida en algunos estudios para promover el desarrollo del conocimiento matemático consiste en la elaboración de diferentes explicaciones para un concepto matemático y en el debate de las mismas, esta estrategia ha sido utilizada en el estudio de Kinach (2002, en Ponte y Chapman, 2008). El investigador llevó a cabo un experimento de enseñanza en un curso de métodos para docentes de matemática de secundaria, en éste los participantes aportaban diferentes explicaciones para la adición y sustracción de números enteros.

Enfoque 2. Este está centrado en la auto-reflexión e investigación de conceptos y procesos matemáticos. Por ejemplo, Chapman (2004, en Ponte y Chapman, 2008), abordó la resolución de problemas aritméticos verbales con maestros de primaria en formación inicial. El propósito de tal investigación era promover la comprensión de este grupo en los tópicos antes mencionados. Las acciones seguidas en la intervención incluyeron la creación y comparación de problemas verbales de estructura similar, análisis y representación de problemas verbales con operaciones aritméticas enfocándose en la estructura del mismo y el significado de las operaciones, adicionalmente los estudiantes debían escribir artículos sobre la experiencia vivida. Los resultados indicaron que después de la intervención los maestros en formación mostraron una mayor comprensión de las operaciones aritméticas y de los problemas verbales, traducida en la exposición de diversas formas de representación del significado de las operaciones en distintos tipos de problemas verbales. Hine (2015) estudió la resolución de problemas verbales y el significado de las operaciones implicadas.

Enfoque 3. Este se centra en el uso de la tecnología para explorar conceptos matemáticos. Por ejemplo, en el estudio de Bowers y Doerr (2001, en Ponte y Chapman, 2008) contaron con la participación de futuros profesores en actividades que implicaban el uso de la tecnología como una forma de desarrollar su comprensión de nociones de cambio como la velocidad. El objetivo fue introducir conflictos en el conocimiento que poseían y usar la tecnología para hacerles frente y resolverlos. Los resultados indicaron que el esfuerzo de los participantes para resolver sus propias dificultades de comprensión les permitieron finalmente desarrollar un conocimiento profundo de las cantidades representadas en las gráficas de velocidad y de posición, y de la relación entre las mismas.

En este enfoque se ubican estudios realizados por Powers y Blubaugh (2005) y por Kokol-Voljc (2007), quienes investigan distintos programas informáticos que permitan la construcción del conocimiento con maestros de primaria en formación inicial.

Enfoque 4. Los estudios considerados en este enfoque se centran en el uso de mapas conceptuales para promover el desarrollo del conocimiento matemático de los profesores en formación inicial. Por ejemplo, el estudio de Bolte (1999, Ponte y Chapman, 2008) se centró en ampliar y evaluar la integración y expresión del conocimiento matemático de los profesores en formación. Se usaron mapas conceptuales y ensayos al principio de la lección como una forma de medir o revisar lo aprendido, durante la enseñanza para desarrollar una mejor comprensión o al final de la lección como una actividad de evaluación. Después de terminar una versión del mapa conceptual los participantes debían hacer un ensayo en donde explicaran y clarificaran las relaciones expresadas en el mapa conceptual. Los resultados indicaron que los participantes percibieron que la construcción del mapa conceptual y del ensayo los animó a reflexionar sobre su conocimiento, además se promovió la habilidad para establecer conexiones matemáticas. El autor concluyó que el uso de mapas conceptuales y ensayos interpretativos constituye una oportunidad para que los profesores en formación maduren matemáticamente y para que experimenten un método alternativo de enseñanza y evaluación. Un documento reciente que plantea actividades de formación inicial desde este enfoque es el de Poling, Goodson-Espy, Dean, Lynch-Davis, y Quickenton (2015).

Enfoque 5. En este enfoque se consideran estudios que utilizan un tipo particular de tareas matemáticas como medio para promover el desarrollo del conocimiento matemático de los futuros maestros.

La investigación desarrollada por Ilany, Ben Chaim y Keret (2004) está centrada en el uso de, lo que los autores describen como, auténticas actividades investigativas, las cuales forman parte de un modelo para la enseñanza de los tópicos de razón y proporción en el contexto de la formación de maestros. Este modelo consiste en 4 componentes. La primera componente incluye las auténticas actividades investigativas de tasas, razón, escalas y proporción indirecta. Simultáneamente, los participantes deben leer artículos matemáticos y didácticos acerca de la razón y proporción. El segundo componente incluye la estructura de la actividad, esto es, un contexto familiar a los participantes y contiene problemas de valor ausente, comparación numérica, predicción y comparación cualitativa. Esos problemas requieren comparaciones que no dependen de valores numéricos específicos. El tercer componente implica la estructura de la unidad didáctica, incluyendo elementos como el trabajo en grupo. El cuarto componente trata de la evaluación del conocimiento de los participantes. Los resultados indicaron que este método fue exitoso produciendo cambios en la comprensión de la razón y proporción de los maestros en formación.

En el estudio de Heaton y Mickelson (2002, en Ponte y Chapman, 2008), el enfoque se concreta en dos tareas concebidas con el objetivo de desarrollar el conocimiento estadístico de maestros de primaria en formación inicial. En la primera tarea los estudiantes tuvieron que desarrollar una investigación estadística, teniendo así que plantear preguntas, identificar variables, planear y llevar a cabo la recolección de datos, ordenarlos y discutir los resultados. En la segunda asignación, los participantes tuvieron que desarrollar y aplicar en un sitio de prácticas una unidad de investigación estadística que debían realizar los niños. El propósito de ambas tareas fue el mismo, implicar a los participantes en un aprendizaje auténtico de contenidos y procesos estadísticos a través de la investigación.

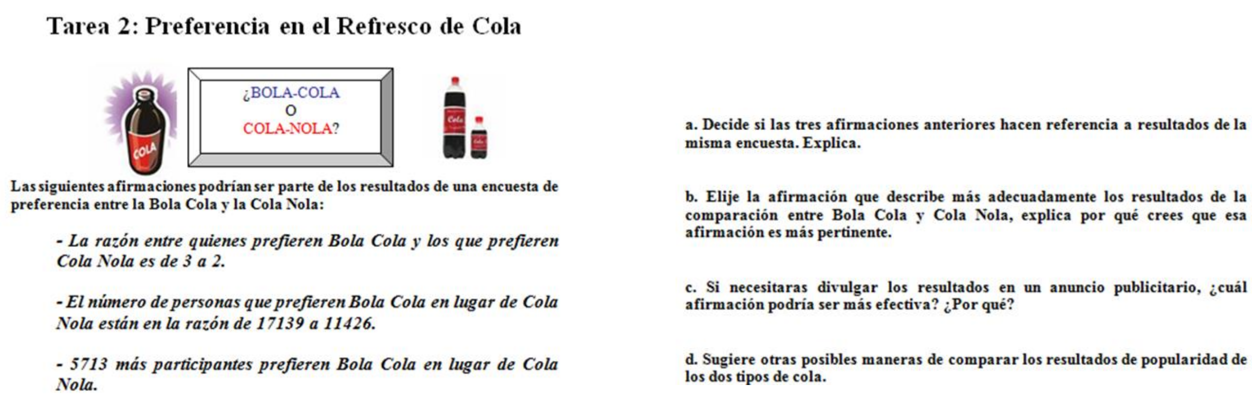
En el estudio de Chapman (2007, en Ponte y Chapman, 2008) se recurrió a la discusión colectiva de problemas aritméticos verbales como la base de un enfoque para facilitar el desarrollo del conocimiento matemático de futuros maestros de primaria en relación con la enseñanza de las operaciones aritméticas. Las tareas se agruparon en tres clases, según permitiesen a los estudiantes alcanzar alguno de los siguientes cometidos: (a) reflexionar sobre su conocimiento inicial, (b) explorar problemas verbales aritméticos desde múltiples perspectivas, y (c) aplicar el conocimiento resultante o adquirido. Los resultados de la investigación indican que las tareas realizadas pueden proporcionar una base efectiva para ayudar a los futuros maestros a desarrollar una profunda comprensión de las operaciones aritméticas, las relaciones entre éstas así como el conocimiento didáctico para la enseñanza de las operaciones aritméticas.

Descripción del Experimento de Enseñanza Realizado

Bajo el quinto enfoque descrito previamante, con el objetivo de estudiar el proceso de elaboración, puesta en práctica y análisis de una “secuencia de trabajo en el aula” que aborda la revisión y (o) reconstrucción de conocimientos asociados a la razón y la proporcionalidad, y de investigar cómo contribuye la secuencia de trabajo en el aula en el proceso de desarrollo de la competencia matemática de futuros maestros de primaria, se realizó un experimento de enseñanza usando un tipo específico de tareas matemáticas concebidas desde un enfoque funcional del conocimiento matemático con el fin de permitir a los futuros maestros comprender y reconstruir lo que saben en relación con la razón y la proporcionalidad con mayor profundidad y significado (Valverde, 2012). La investigación realizada consiste en un tipo de experimento de enseñanza (Molina, 2007) centrado en el desarrollo del conocimiento del profesor de matemáticas. Esta metodología de investigación establece un conjunto claro de acciones a seguir en las tres fases que la conforman: la elaboración, implementación y análisis del diseño instruccional.

La característica central del diseño instruccional elaborado en esta investigación es la inclusión de un conjunto de tareas matemáticas que abarcan distintos tipos de problemas de razón y proporcionalidad, las situaciones de estas tareas se sitúan en distintos escenarios del entorno cotidiano. Este diseño se fundamenta en la perspectiva funcional del conocimiento matemático considerado en el estudio PISA (OCDE, 2004).

Para la elaboración del mismo se ha utilizado el análisis didáctico (Gómez, 2007) como herramienta para la planificación y organización de la secuencia de trabajo en el aula. El diseño instruccional se concretó en cuatro sesiones y se implementó en condiciones naturales de desarrollo de una asignatura de Didáctica de las Matemáticas. Se utilizó una metodología de trabajo en el aula compuesta por cuatro fases: trabajo individual en clase, trabajo colaborativo, puesta en común y reconstrucción individual de la tarea fuera de clase. Todas ellas centradas en la misma tarea. A modo de ejemplo, para la primera sesión de aplicación se plantearon diversas expectativas de aprendizaje entre las que están: (1) reconocer el valor social de las razones como un medio para expresar información sobre comparaciones entre cantidades, (2) elaborar y aplicar diferentes estrategias que permitan interpretar y resolver problemas de situaciones cotidianas en los que se requiere de la aplicación del concepto de razón, (3) aplicar y justificar la relación de equivalencia entre razones, y (4) expresar una razón mediante distintas representaciones. Para promover el logro de estos fines se implementaron dos tareas matemáticas, siendo aquella titulada “Preferencia en el refresco de cola” la que posibilitó estudiar con mayor profundidad los conocimientos matemáticos y las competencias matemáticas promovidas en su resolución (Figura 1).


Tarea 2: Preferencia en el Refresco de Cola

¿BOLA-COLA O COLA-NOLA?

Las siguientes afirmaciones podrían ser parte de los resultados de una encuesta de preferencia entre la Bola Cola y la Cola Nola:

- La razón entre quienes prefieren Bola Cola y los que prefieren Cola Nola es de 3 a 2.

- El número de personas que prefieren Bola Cola en lugar de Cola Nola están en la razón de 17139 a 11426.

- 5713 más participantes prefieren Bola Cola en lugar de Cola Nola.

a. Decide si las tres afirmaciones anteriores hacen referencia a resultados de la misma encuesta. Explica.

b. Elije la afirmación que describe más adecuadamente los resultados de la comparación entre Bola Cola y Cola Nola, explica por qué crees que esa afirmación es más pertinente.

c. Si necesitaras divulgar los resultados en un anuncio publicitario, ¿cuál afirmación podría ser más efectiva? ¿Por qué?

d. Sugiere otras posibles maneras de comparar los resultados de popularidad de los dos tipos de cola.

Figura 1. Tarea “Preferencia en el refresco de cola”. Adaptada de Ben Chaim, Keret e Ilany (2012)

Se recogieron producciones escritas y orales del trabajo colaborativo realizado en pequeños grupos. Estas se analizaron con ayuda del programa de análisis de datos cualitativos MAXQDA, de manera concreta se realizó un análisis de contenido (Bardín, 1986). Se utilizaron categorías de análisis así como indicadores de desempeño procedentes de estudios previos así como nuevos indicadores propios del grupo de participantes. Debido a la demanda cognitiva de la tarea 2 se tuvo la oportunidad de conocer y estudiar, en las producciones de los estudiantes, conocimientos relacionados con las maneras de interpretar la razón 3:2, y concepciones relacionadas con las propiedades de las razones. Mediante un procedimiento previo a la implementación del diseño, se relacionaron las expectativas de aprendizaje, las competencias matemáticas y las tareas propuestas en el diseño. Este mecanismo posibilitó concluir acerca de las competencias matemáticas promovidas con esta tarea así como el nivel con que se logró este aspecto. De modo que, con base en el desempeño manifestado en la resolución y con usando los descriptores de las competencias matemáticas se llegó a concluir por ejemplo que la competencia *representar* se trabajó, aunque que de un modo incipiente motivo por el cual se afirma que se ha promovido en un nivel de reproducción.

A modo de Conclusión

La investigación realizada aporta una rica descripción de actuaciones manifestadas por los estudiantes de magisterio en el contexto de la razón y la proporcionalidad. Resalto, como aporte del estudio, la descripción de actuaciones vinculadas al razonamiento proporcional y a la comprensión de la proporcionalidad en el contexto de la formación de maestros, pues en la literatura existente sobre el tema, consultada, se encuentra la descripción de una gran variedad de actuaciones manifestadas por niños o estudiantes de secundaria y muy poca de maestros en formación. Por otro lado, el marco teórico del estudio PISA ha resultado pertinente para la investigación, la caracterización de la competencia matemática y los principios del enfoque funcional recogidos en el mismo han determinado la toma de decisiones en el diseño, puesta en práctica y análisis de la intervención. El estudio del logro de las expectativas de aprendizaje permitió extraer información acerca de la contribución de la experimentación al desarrollo de las competencias matemáticas y el procedimiento seguido ha sido eficaz para lograrlo.

Referencias Bibliográficas

Ball, D. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(2), 132-144.

Bardin, L. (1986). *Análisis de contenido*. Madrid: Akal.

Cramer, K. (2004). Facilitating teachers' growth in content knowledge. En R. R. Rubenstein y G.W. Bright (Eds.), *Perspectives on the teaching of mathematics* (pp. 180-194). Reston, VA: NCTM.

Gómez, P. (2007). Análisis didáctico. Una conceptualización de la enseñanza de las matemáticas (c apítulo 2). En P. Gómez (Ed.), *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (pp. 31-116). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Graeber, A., & Tirosh, D. (1988). Multiplication and division involving decimals: Preservice teachers' performance and beliefs. *Journal of Mathematical Behavior*, *7*, 263-280.

Hine, G. (2015). Strengthening pre-service teachers' mathematical content knowledge. En R. Atkinson & C. McBeath (Eds.), *Proceedings of the Teaching and Learning Forum 2015* (pp. 1-11). Perth, Australia: University of Westerns Australia. Disponibles en http://ctl.curtin.edu.au/events/conferences/tlf/tlf2015/contents-all.html

Ilany, B., Ben-Chaim, D. & Keret, Y. (2004). Implementation of a model using authentic investigative activities for teaching ratio and proportion in pre-service elementary education. En M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 81-88) Norway: Bergen University College.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Kokol-Voljc, V. (2007). Use of mathematical software in pre-service teacher training: The case of DGS. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27(3), pp. 55-60.

Molina, M. (2007). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual*. (Tesis Doctoral). Recuperada de http://funes.uniandes.edu.co/544/1/MolinaM06-2822.PDF

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: The Council.

OCDE (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de Problemas*. Madrid: Ministerio de Educación.

Poling, L., Goodson-Espy, T., Dean, C., Lynch-Davis, K., & Quickenton, A. (2015). Mapping the way to content knowledge. *Teaching children mathematics*, *21*(9), pp. 538-547.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 223-261). New York: Routledge.

Powers, R., & Blubaugh, W. (2005). Technology in mathematics education: Preparing teachers for the future. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, *5*(3-4), pp. 254-270.

Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*, 233-254

ESTUDIO DEL CONOCIMIENTO DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA SOBRE EL USO IDÓNEO DE RECURSOS MATERIALES

José Fernandes da Silva, Ruy Pietropaolo, Vicenç Font Moll
Instituto Federal de Minas Gerais, Campus São João Evangelista. (Brasil), Universidad Anhanguera de São Paulo (Brasil), Universitat de Barcelona (España)
jose.fernandes@ifmg.edu.br, rpietropaolo@gmail.com, vicencfont@ono.com

RESUMEN: El propósito de esta investigación fue analizar y comprender el conocimiento de futuros profesores de Matemática sobre el uso idóneo de medios materiales en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Godino (2009; 2014), Pino-Fan, Font, y Godino (2014) y Pino-Fan, Godino (2015) proporcionan el marco teórico. El estudio cualitativo fue realizado con cinco futuros profesores de una institución pública. Se realizaron entrevistas semiestructuradas y visitas al Laboratorio de Matemática de la institución formadora. Los resultados señalan que los futuros profesores participaron y reflexionan sobre prácticas de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos que buscaron la construcción y el uso de recursos materiales importantes.

Palabras clave: formación de profesores – conocimiento matemático – idoneidad mediacional

ABSTRACT: The purpose of this research was to analyze and understand the knowledge of future Mathematics teachers about the suitable use of material aids in the teaching and learning process. Godino (2009, 2014), Pino-Fan, Font, and Godino (2014) and Pino-Fan, Godino (2015) provide the theoretical framework. The qualitative study was carried out with five future teachers of a public institution. Semi-structured interviews were carried out as well as visits to the Mathematics Lab of the training institution. The results indicate that future teachers participated and reflected on teaching and learning practices of mathematical contents that sought the construction and use of important material resources.

Key words: teachers' training - mathematical knowledge - teaching aids suitability

Introducción

A partir de la década del 80' surgieron estudios importantes para la discusión sobre los conocimientos necesarios para el profesor, entre los cuales destacamos como pioneros los estudios de Shulman (1986; 1987). Otras investigaciones se ocuparon de promover avances teóricos con respecto a los conocimientos de los profesores. Los estudios de Ball, Thames y Phelps (2008), sobre el conocimiento matemático para la enseñanza, ampliaron los abordajes hasta entonces propuestos. Otro avance llegó con la perspectiva ampliada del conocimiento didáctico matemático, gestada por Godino (2009; 2014), Pino-Fan, Font, y Godino, (2014) y Pino-Fan, Godino, (2015), en el ámbito del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y de la Instrucción Matemática – EOS.

Buscamos explicitar datos de un estudio realizado con futuros profesores de Matemática, teniendo como objetivo principal investigar el conocimiento de estos futuros profesores de matemática sobre el uso idóneo de recursos materiales en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Como punto de partida, elaboramos la pregunta guía *"¿Qué conocimientos poseen los futuros profesores de Matemática sobre el uso idóneo de recursos materiales?"*

Marco teórico

Hasta la década del 80' pocos estudios buscaban investigar la formación de profesores. Shulman (1986) destacó que el conocimiento del contenido, el conocimiento pedagógico del contenido y el conocimiento del currículo serían necesarios para que el profesor desarrolle su profesión. En 1987, Shulman, amplió los conocimientos necesarios para el profesor.

Ball, Thames y Phelps (2008), propusieron las siguientes categorías de conocimiento: I) Conocimiento común del contenido - refiriéndose con él a un conocimiento que no es característico solo del profesor, sino común a las profesiones que se valen de los conocimientos matemáticos para desarrollar sus funciones; II) Conocimiento especializado del contenido - pudiendo ser definido como el conocimiento del contenido para la conducción del trabajo docente. Este es el tipo de conocimiento usado únicamente por los profesores; III) Conocimiento del horizonte del contenido – describe cómo los temas matemáticos están relacionados entre sí, sea dentro de la disciplina matemática o no. Para ello, el profesor debe conocer las posibles conexiones y articulaciones de los contenidos matemáticos; IV) Conocimiento de contenido y de alumnos - el profesor debe poseer habilidades para lidiar con el saber de los alumnos y el saber de la Matemática; V) Conocimiento de contenido y de enseñanza – evidencia el diálogo entre el saber matemático y el saber sobre la enseñanza.

Para Godino (2009), no existe un consenso en la literatura disponible para señalar los conocimientos y las competencias que los profesores movilizan durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos.

> Sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimientos que se ponen en juego en una enseñanza efectiva (proficiente, eficaz, idónea) de la Matemática. Él permitiría orientar el diseño de acciones formativas y la elaboración de instrumentos de evaluación de los conocimientos del profesor. (Godino, 2009, p. 19, traducción nuestra).

Como profundización sobre los conocimientos necesarios para el profesor, Godino (2009) propone un conjunto de facetas que son categorías que organizan y extienden estos conocimientos: I) Epistémica: es el conocimiento didáctico matemático sobre el propio contenido, la forma particular en que el profesor de matemática comprende y conoce la matemática; II) Cognitiva: conocimiento de cómo los alumnos aprenden, raciocinan y entienden la matemática; III) Afectiva: es la faceta que permite a los profesores lidiar con la parte afectiva que está comprendida por elementos relacionados a las actitudes, emociones, creencias y valores de los alumnos; IV) Mediacional*:* se refiere a los conocimientos del profesor relacionados a la capacidad de articular materiales y tecnologías para la enseñanza. Asimismo, el profesor necesita tener condiciones de delimitar tiempo para las acciones en el ámbito del proceso de enseñar un contenido; V) Internacional: se trata de la capacidad del profesor de comprender, prever, implementar y evaluar las interacciones que ocurren en el proceso de enseñanza y aprendizaje y VI) Ecológica: percibir el currículo como una ventana que establece enlaces con el entorno social, político y económico.

El modelo CDM evolucionó desde que fue propuesto por Godino (2009) pasando por otras investigaciones como Pino-Fan, L., Font, V.; Godino, J. D. (2014). Tales estudios proponen una reestructuración más refinada de los componentes de MKT, propuestos por Ball *et al* (2008) donde dejan claro el vínculo e interacciones entre las proposiciones y las seis facetas del CDM.

La relación establecida entre las proposiciones de Ball *et al.* (2008) y las facetas puede ser observada en la siguiente figura:

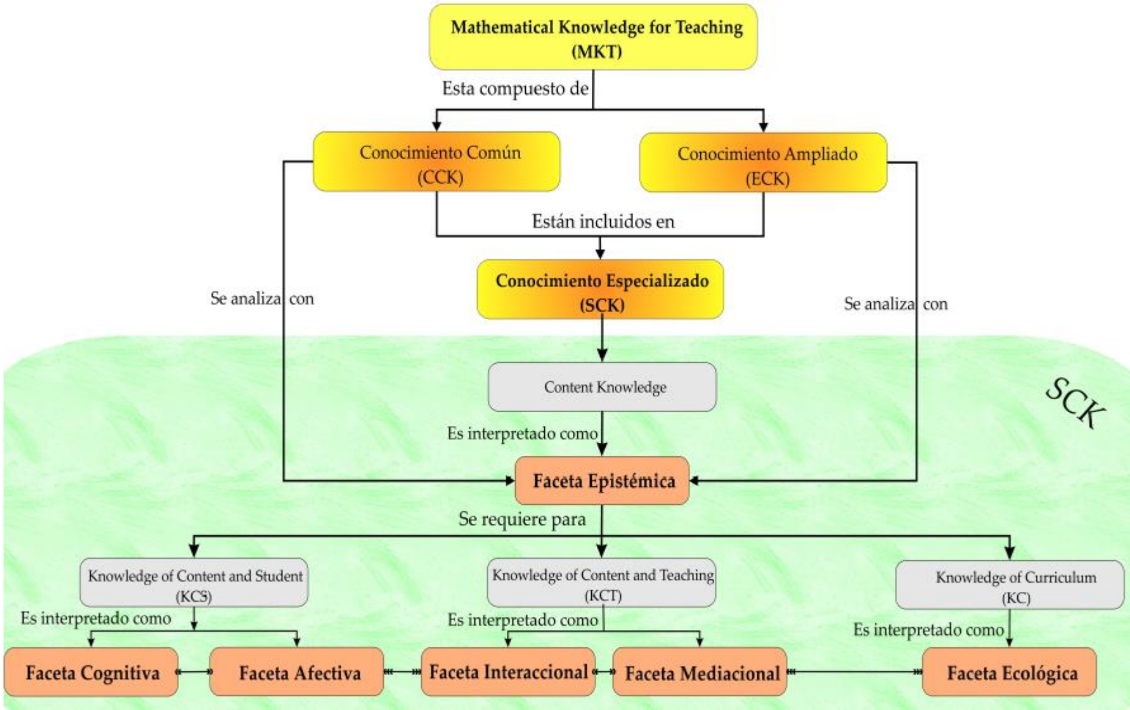


Figura 1. Relación entre las categorías del conocimiento de MKT y el CDM (Pino-Fan, Godino y Font, 2014)

De este aporte, utilizamos el concepto de faceta mediacional, que amplía el abordaje de conocimiento del contenido y de la enseñanza.

En el contexto del conocimiento ampliado del profesor de matemática la faceta mediacional se refiere a los conocimientos sobre los recursos y medios (materiales y tecnológicos) que pueden potenciar el aprendizaje de la Matemática.

Metodología

El estudio realizado es de cuño cualitativo, habiendo sido realizadas entrevistas semiestructuradas y visitas a un Laboratorio de Matemáticas – LM para la recolección de datos.

Participaron de la investigación cuatro futuros profesores del curso de Licenciatura en Matemática del Instituto Federal de Educación, Ciencia y Tecnología de Minas Gerais – Campus São João Evangelista, Brasil. Estos futuros profesores son participantes del Programa de Consolidación de la Licenciatura. Este programa es una política pública de la Coordinación de Perfeccionamiento de Personal de Nivel Superior – Capes, que tiene como foco el fomento de la innovación y la elevación de la calidad de los cursos de formación inicial de profesores. Según la Capes, este programa apoya proyectos de instituciones públicas de enseñanza superior.

Llevamos a cabo, en un primer momento, las entrevistas con cuatro futuros profesores (A, B, C y D) de matemáticas. Luego buscamos conocer sus producciones académicas relacionadas con las prácticas desarrolladas, y hemos seleccionado las más significativas.

Buscamos en Godino, Batanero, Rivas y Arteaga (2013) los componentes y los indicadores de idoneidad que estos elaboraron para evaluar programas de formación de profesores en didáctica de la Matemática. De esta forma, adoptamos los criterios en el ámbito faceta mediacional, en especial, el ítem que trata el uso de recursos materiales manipulativos para las prácticas pedagógicas realizadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Tabla 1. Indicadores de recursos materiales manipulativos

Componente:	***Indicadores:***
Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores)	• Se usan materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos y argumentaciones adaptadas al contenido pretendido • Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones

Resultados y discusiones

Los futuros profesores destacan la importancia del uso del Laboratorio de Matemáticas – LM, dado que usan este espacio para consolidar sus formaciones. Señalan la utilización de los recursos y materiales del LM para enriquecer prácticas de enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

> “El laboratorio de matemática propicia discusiones y análisis, [...] tanto de enseñanza, como de investigación, [...]. Además de poseer un material didáctico rico, varios libros didácticos que puede consultar, analizando la propuesta de los autores, se encuentran también materiales, y un ambiente, propicio, tecnologías con las que puede realizar sus trabajos, puede llevar a cabo investigaciones, puede estudiar, puede aplicar situaciones de materiales didácticos para alumnos de las escuelas con las que nosotros estamos directamente relacionados. Por ejemplo, usted va a demostrar que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180º, usa un papel colorido para incentivar, usa dobladuras, prepara un taller, y entonces todos los materiales del laboratorio, contribuyen para esa visión, en ese sentido de manipular. Son materiales concretos que así permiten un mejor aprendizaje”. (Futura profesora A).

En esta misma línea, el futuro profesor B, destaca la importancia de conocer recursos y medios que pueden facilitar el proceso de enseñar un determinado contenido matemático, esto es, la variedad de formas de organizar o exponer el contenido en el aula para presentar ideas clave y conceptos a los alumnos. En este contexto, la exposición del futuro profesor B está en consonancia con lo indicado por Ball, Thames y Phelps (2008) cuando afirman que al profesor no le basta solamente el conocimiento del contenido, sino sí, una interrelación entre éste y la pedagogía.

Una de las actividades desarrolladas por la futura profesora A y el futuro profesor B fue la construcción de una maqueta, junto a los alumnos de la educación primaria, en el proceso de enseñanza y aprendizaje del contenido de números enteros.

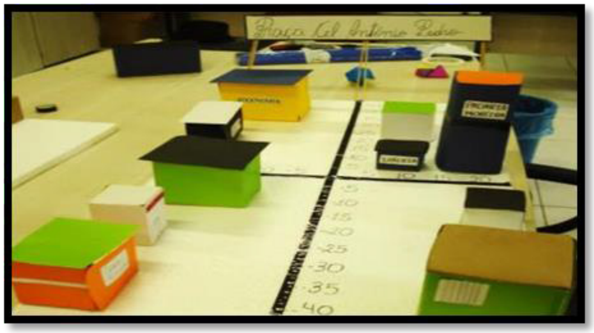


Figura 2. Maqueta construida por los futuros profesores

Otro aspecto de gran importancia fue la producción de materiales didácticos. En el contexto de la formación inicial de profesores de Matemática, posibilitar que los futuros profesores construyan materiales, secuencias y establezcan un planeamiento es fundamental para que se reflejen sobre la enseñanza y el aprendizaje de contenidos matemáticos. En este sentido, Godino (2009) destaca que en el contexto del conocimiento pedagógico del contenido y de la enseñanza se debe considerar la llamada faceta mediacional del proceso de enseñanza y aprendizaje.

El futuro profesor B, también destaca que tener el conocimiento matemático y el conocimiento pedagógico es indispensable para la vida profesional.

> "[...] no basta solo saber mucho contenido matemático y no tener la práctica ni didáctica de poder compartir aquello con el estudiante que yo voy a ser un profesor un día. Es importante también saber matemática, pero es importante que usted sepa la didáctica y saber lo que puedo hacer para que el alumno pueda tener una adquisición matemática que pueda utilizar en el día a día". (Futuro profesor B)

Dos futuras profesoras entrevistadas fueron tutoras de un alumno ciego que realiza, junto con ellas, el Curso de Licenciatura en Matemática. En este contexto, estas dos futuras profesoras dieron foco a sus trabajos realizados en el campo de la inclusión, en especial, destacando sus actuaciones en la creación y adaptación de materiales en diferentes contenidos, tanto en el campo de la educación básica, como en la enseñanza superior.

Entendemos que las experiencias de estas dos futuras profesoras contribuyen, significativamente, para comprender el desarrollo del conocimiento de contenido y de la enseñanza, en especial, y sus avances de acuerdo con el CDM en lo que concierne a la faceta mediacional que se ocupa de los recursos materiales, manipulativos, tecnológicos para el proceso de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos.

En las palabras de la futura profesora C:

> "[...] aprovechamos los materiales que allí poseen (en el LM) para algunas materias que él (el cursante de licenciatura no vidente) precisa manipular como, por ejemplo, el multiplan y figuras espaciales que son materiales del laboratorio". (Futura profesora C)

A continuación una imagen que representa el trabajo de la futura profesora con el alumno no vidente, utilizando el multiplan, en una actividad relacionada al contenido de cónicas:

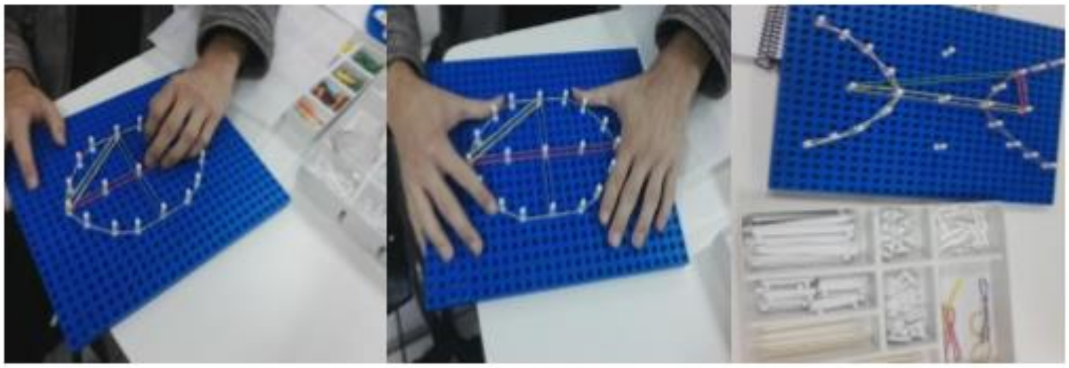


Figura 3. Actividad con el multiplan

Además de la adaptación de materiales didácticos para alumnos no videntes, las futuras profesoras destacan la importancia de estas experiencias para el ejercicio de la docencia en la educación básica. Los recursos creados por ellas se transforman en tecnologías para la enseñanza de contenidos matemáticos diversos. En el siguiente trecho la futura profesora D resalta la importancia de la actuación en la inclusión, en la construcción de materiales didácticos para este contexto:

> "[...] trabajamos en la investigación y confección de materiales manipulativos adaptados para alumnos con deficiencia visual en el sistema regular de enseñanza. [...] después de adaptado, esos materiales quedan

en el Laboratorio de Matemática, enriqueciendo aún más ese espacio importantísimo para la formación de profesores". (Futura profesora D)

Como ejemplo de materiales creados y depositados en el LM, las estructuras geométricas de los poliedros se destacan por la importancia que poseen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, pues posibilitan la visualización de elementos que no son, fácilmente, comprendidos cuando dibujados en una hoja de papel. Las estructuras geométricas son hechas con sorbetes de plástico y piolín. A continuación presentamos la estructura del octaedro y del icosaedro construidos por las futuras profesoras C y D:

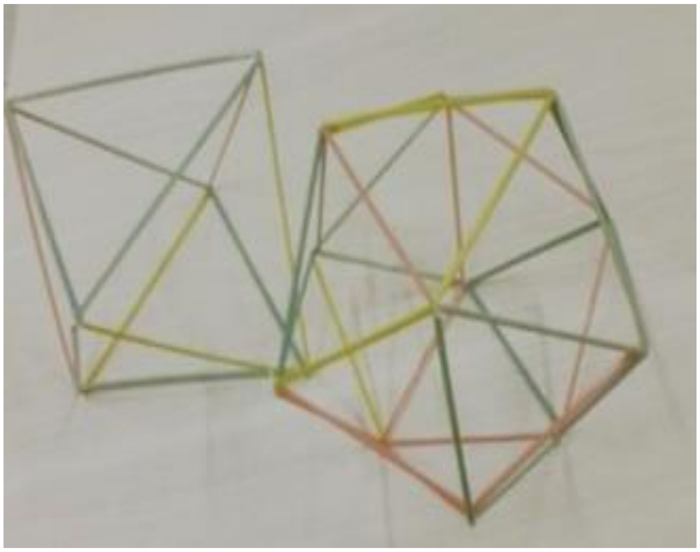


Figura 4. Representaciones de los Poliedros

La futura profesora D destaca la importancia de la utilización de materiales lúdicos para su práctica pedagógica. Para ella, el uso de los materiales manipulativos contribuye para la consolidación de conceptos matemáticos.

Los instrumentos y medios utilizados por los futuros profesores son parte de los elementos tecnológicos movilizados para el proceso de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos. En este sentido, las definiciones y propiedades deben ser contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones que posibiliten al estudiante, vidente o no, desarrollar niveles de abstracción y razonamiento lógico.

Consideraciones finales

El propósito de esta investigación fue analizar, comprender e investigar el conocimiento sobre el uso idóneo de medios materiales que emerge de la práctica profesional de los futuros profesores de matemática.

El análisis de los datos revela, asimismo, que los futuros profesores demuestran una preocupación importante por buscar recursos manipulativos para enseñar contenidos en las aulas.

Sin embargo, señalan que no todas las materias del Curso de Licenciatura en Matemática, les posibilitan experiencias y vivencias en el campo de la construcción y del uso de recursos materiales para enseñar Matemática.

Los resultados obtenidos señalan que los futuros profesores, además de haber vivenciado experiencias en el desarrollo y uso de recursos materiales para el proceso de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos, estos, reflexionan sobre tales prácticas.

Otras investigaciones podrán contribuir para caracterizar a qué punto los programas de formación de profesores han avanzado en lo que concierne al desarrollo de las diferentes facetas del conocimiento didáctico matemático de los futuros profesores.

Referencias bibliográficas

Ball, D. L., Thames, M. H., Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*. 59, 389-407.

Godino, J. D., Batanero, C., Rivas, H. y Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *REVEMAT*, *8* (1), 46-74.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN* - Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20, 13-31.

Pino-Fan, L., Font, V.; Godino, J. D. (2014). El conocimiento didáctico-matemático de los profesores: pautas y criterios para su evaluación y desarrollo. En C. Dolores, M. García, J. Hernández, y L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 137 – 151). México, D. F.: Ediciones D. D. S. y Universidad Autónoma de Guerrero.

Pino-Fan, L.; Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA, 36*(1), 87-109.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57* (1), 1-22.

Shulman, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, n. 15, p. 4-14.

CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DE LA RAZÓN COMO UN SIGNIFICADO DE LA FRACCIÓN. EL CASO DE UN PROFESOR EN FORMACIÓN INICIAL DE PRIMARIA

Ana María Reyes Camacho, Leticia Sosa Guerrero
Escuela Normal Rural 'Gral. Matías Ramos Santos'. (México), Universidad Autónoma de Zacatecas. (México)
anyreca0712@hotmail.com, lsosa@mate.reduaz.mx

RESUMEN: En este trabajo identificamos el conocimiento didáctico de un profesor en formación inicial para enseñar la razón como un significado de la fracción a través de un estudio cualitativo. Esta investigación se enfoca en el Modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés -*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*) para caracterizar el conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT, por sus siglas en inglés -*Knowledge of Mathematics Teaching*) en la entrevista semiestructurada que surge de una planificación. El profesor en formación inicial manifiesta conocer el papel del medio, situación de acción, formulación, validación e institucionalización; estos conocimientos le permiten diseñar actividades para el aula con el propósito de enseñar la razón en un grupo de quinto grado de la escuela primaria.

Palabras clave: conocimientos del profesor, primaria, razón

ABSTRACT: In this article, we identify the didactic knowledge of a trainee teacher to teach the ratio as a meaning of fraction, by means of a qualitative study. This research work is focused on the *Mathematics Teacher´s Specialized Knowledge* Model to characterize the *Knowledge of Mathematics Teaching,* during the semi structured interview, from a planning process. The trainee teacher expresses that he knows about the environment role, the action situation, the formulation, the evaluation and the institutionalization; such knowledge allows him to design classroom tasks, with the purpose of teaching the ratio in a fifth-grade group of the primary school.

Key words: teacher´s knowledge, primary school, ratio

Introducción

La Licenciatura en Educación Primaria bajo el enfoque del Plan de estudios 2012 (DOF, 2012) aspira a que los estudiantes se apropien de conocimientos disciplinares que favorezcan la gestión de contenidos, tal es el caso de las fracciones en el área de las matemáticas. En este sentido, Ríos (2007) señala: "[…] dominar más contenido del que se va a enseñar permite tener una visión amplia y profunda de cómo enseñar, hacer conexiones y transferencias entre los diversos saberes matemáticos" (p.121). Para algunos investigadores (e.g. Ávila, 2001; Llinares & Sánchez, 1997), las fracciones representan un tema complejo de abordar en las escuelas primarias debido a los diferentes significados que poseen: relación parte-todo y medida, cociente, razón y operador. Por lo tanto, se han incluido en los programas de las escuelas formadoras de docentes.

En el Plan de estudios 2012 de la Licenciatura en Educación Primaria, en el programa del curso de Aritmética: su aprendizaje y enseñanza, se plantea el estudio de las fracciones en la unidad III "Aspectos didácticos y conceptuales de los números racionales y los números decimales" , donde se enfatiza en el conocimiento del contenido común y especializado de los números racionales, los procesos de aprendizaje de los alumnos (errores y dificultades comunes, estrategias de aprendizaje, comprensión, evolución de su razonamiento y normas sociomatemáticas), el diseño y gestión de entornos de aprendizaje (situaciones didácticas, resolución de problemas, estudio de clases, procesos de matematización, uso de las TIC y evaluación de los aprendizajes), gestión del currículo (articulación entre el conocimiento del contenido y su tratamiento en el plan de estudios de la Educación Primaria) y reflexión y transformación de la práctica (sistematización y elaboración de textos a partir de la reflexión de la práctica en el análisis de casos). En la unidad IV "Desarrollo del razonamiento proporcional", se plantea el estudio de la noción de razón. Cabe mencionar que las ideas anteriores surgieron a partir de lo expuesto en la presentación del programa ya citado. En términos generales, la reforma en Educación Normal bajo el Plan de Estudios 2012, aspira a que los profesores en formación inicial adquieran el conocimiento disciplinar de matemáticas para contribuir al desarrollo de sus competencias docentes.

En esta investigación, se indaga sobre los conocimientos que tienen los profesores en formación en relación a la enseñanza de la razón como un significado de la fracción. Con frecuencia, el significado razón se designa como uno de los últimos de los significados que se aborda en la escuela primaria. En este sentido, la pregunta que guía la presente investigación es: ¿Cuáles son los conocimientos didácticos que un profesor en formación inicial asocia al significado razón?, cuyo propósito es caracterizar el conocimiento didáctico de un profesor en formación inicial para abordar el significado razón.

Referente teórico

Desde hace décadas se han realizado una serie de investigaciones en diferentes países con el propósito de avanzar en la definición y organización del conocimiento profesional de los profesores. En este sentido, Shulman (1986) realiza un trabajo sobre el conocimiento del contenido para la enseñanza, donde considera tres componentes esenciales de la materia que se va a enseñar: el conocimiento del contenido, el conocimiento pedagógico del contenido y el conocimiento curricular.

En Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán (2013) se presenta un modelo de conocimiento del profesor de matemáticas denominado el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés- *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*), el carácter de especializado se debe a que afecta a todos los dominios y subdominios que lo integran y no sólo a alguno de ellos, los cuales pretenden avanzar en el análisis y la conceptualización del conocimiento especializado que requiere el profesor de matemáticas para su enseñanza. En la Figura 1 se presentan los componentes del conocimiento especializado del profesor de matemáticas a través de la representación gráfica del modelo MTSK. Las siglas empleadas para los dominios y subdominios corresponden a su nombre en inglés. Cabe hacer mención que al interior de cada subdominio se han definido diferentes categorías que se presentan como producto de la elucubración teórica y de los datos empíricos trabajados en algunas investigaciones (Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar y Carrillo, 2014). Sin embargo, en la Figura 1 no se incluyen las categorías de cada subdominio.

En el dominio conocimiento matemático (MK), son considerados tres subdominios de conocimiento: conocimiento de la práctica matemática (KPM), conocimiento de la estructura matemática (KSM) y el conocimiento de los temas matemáticos (KoT). En lo que respecta al dominio conocimiento didáctico del contenido (PCK) hay tres subdominios: conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS) y conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT); este último es el objeto de estudio en el presente trabajo, el cual está integrado por tres categorías: conocimiento de teorías personales o institucionalizadas de enseñanza, conocimiento de recursos materiales y virtuales y, conocimiento de actividades, tareas, ejemplos y ayudas. En este momento sólo profundizaremos en el conocimiento de teorías personales o institucionalizadas de enseñanza que tiene un profesor en formación inicial para abordar la razón como un significado de la fracción.

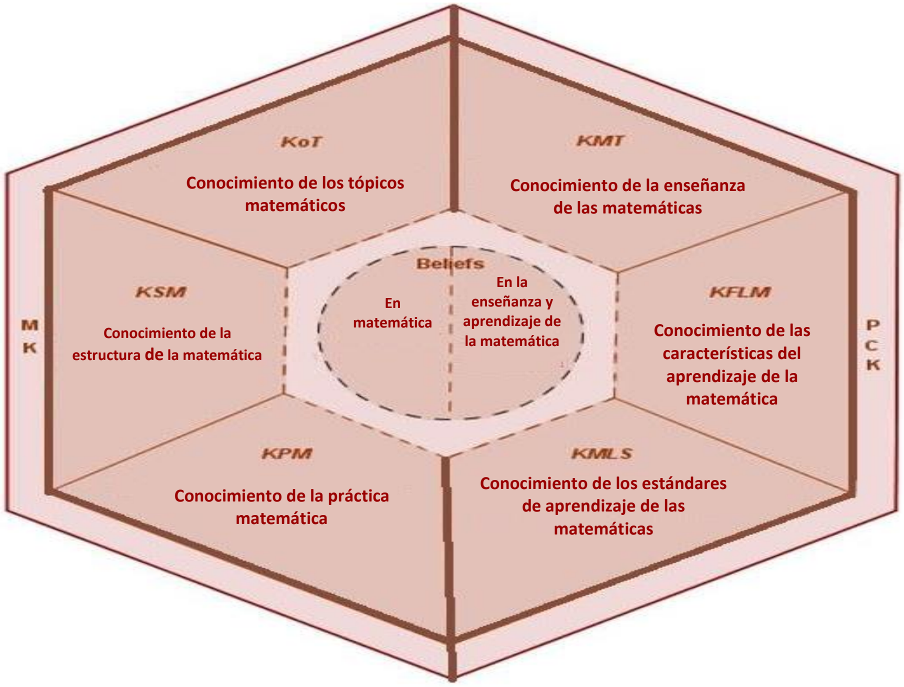


Figura 1. Diagrama del Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (*MTSK)* (Carrillo, Contreras y Flores, 2013)

Referente metodológico

La investigación educativa tiende a comprender situaciones particulares, pero no con el objetivo de generalizar (Albert-Gómez, 2007). Es en este espacio donde el enfoque interpretativo encuentra su lugar para indagar el significado de los fenómenos educativos. Por lo tanto, en este trabajo, se atiende a una investigación cualitativa, que propicia la orientación hacia la exploración, descripción y entendimiento de las prácticas plasmadas por un profesor en formación inicial. Según Rodríguez, Gil & García (1996):

> […] la investigación cualitativa propone estrategias de selección de informantes que suponen una *selección deliberada e intencional* […] las personas se eligen una a una de acuerdo con el grado en que se ajustan a los criterios o atributos establecidos por el investigador. (p.138).

Por lo tanto, para este trabajo de investigación se recurre a un Profesor en Formación Inicial (PFI) que cursa el sexto semestre de la Licenciatura en Educación Primaria con el enfoque del Plan de Estudios 2012. Este estudiante llevó todos los programas del área de matemáticas que se ubican en el trayecto formativo preparación para la enseñanza y el aprendizaje: Aritmética: su aprendizaje y enseñanza, Álgebra: su aprendizaje y enseñanza, Geometría: su aprendizaje y enseñanza y Procesamiento de la información estadística.

La fuente primaria para la recolección de información es una entrevista semiestructurada que surge de una planificación que se realizó para abordar la enseñanza del significado razón en una sesión de clase con un grupo de quinto grado de educación primaria. De acuerdo con Álvarez-Gayou (2012), las entrevistas semiestructuradas "[…] tienen una secuencia de temas y de preguntas sugeridas, además presentan una apertura en cuanto al cambio de tal secuencia y forma de las preguntas, en función de la situación de los entrevistados" (p.111). En este caso, la secuencia de los temas y las preguntas están en función de los dominios y subdominios del MTSK. Por otra parte, la entrevista semiestructurada realizada se graba con la finalidad de conservar con detalle toda la información. En este primer acercamiento al contenido de la entrevista semiestructurada aplicada se pretende caracterizar el KMT del profesor en formación que le permite abordar el significado razón.

Avances

En este trabajo, se caracteriza el KMT de un profesor en formación inicial para abordar el significado razón a partir de la información que arroja una entrevista semiestructurada. Cabe mencionar que previo a la aplicación de la entrevista el PFI diseñó un plan de clase, el cual es uno de los referentes para la formulación y organización de las preguntas, además de los dominios y subdominios del MTSK. En este momento, se aborda el subdominio Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT) como parte del dominio Conocimiento didáctico del contenido (PCK). Una de las primeras preguntas que se plantea al PFI es: ¿Cómo se favorece la enseñanza del significado razón en la escuela primaria?, a lo cual responde es a través de una preparación del medio, fase de acción, formulación, validación e institucionalización. Enseguida se le pide a PFI describa en qué consiste lo enunciado, situación que lo lleva a manifestar algunos conocimientos de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) en relación a lo que propone Brousseau (2007). Los conocimientos emitidos por el PFI lo llevan a profundizar en una de las tres categorías que componen el KMT: conocimiento de Teorías personales o institucionalizadas de enseñanza de donde emerge como subcategoría el conocimiento de la TSD.

En la Tabla 1 se enuncian algunos conocimientos que tiene el PFI en relación al dominio Conocimiento didáctico del contenido (PCK), de manera concreta sobre el subdominio Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT). En este sentido, se presentan conocimientos que manifiesta el PFI y se ubican en la categoría Conocimiento de Teorías personales o institucionalizadas de enseñanza, de la cual se desprende la subcategoría conocimiento de la TSD. A partir de la quinta fila se abordan cinco indicadores de conocimiento de la subcategoría ya citada. Frente a cada indicador se describe el conocimiento manifestado por el PFI durante la entrevista semiestructurada y las relaciones que, desde la perspectiva de las investigadoras, se establecen con la TSD; por lo cual se rescatan citas textuales de algunos materiales básicos que sustentan el estudio de la TSD.

Tabla 1. Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT) del PFI

Dominio:		Conocimiento didáctico del contenido (PCK)
Subdominio:		Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)
Categoría:		Conocimiento de Teorías personales o institucionalizadas de enseñanza
Subcategoría:		Conocimiento de la TSD
Indicador 1	-Conocimiento de la función del medio:	**PFI:** "[…] cuando se inicia la clase debemos rescatar los conocimientos previos de los alumnos en función del tema que vamos a estudiar, por ejemplo, en este caso el del significado razón. Además, se debe tomar en cuenta los materiales que se van a emplear y cómo se va a organizar el grupo para el trabajo en toda la clase, es decir, en forma grupal e individual". Brousseau (2007) plantea en el documento Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas que "para enseñar un conocimiento determinado se utilizan "medios" (textos, materiales, etc.). La ingeniería didáctica estudia y produce dichos medios" (p. 17). Al respecto, durante la entrevista, el PFI, menciona el nombre algunos materiales que empleará: caja con divisiones, botellas, hojas de trabajo con situaciones problemas cotidianas para los alumnos, relacionados con el uso del significado razón.
Indicador 2	-Conocimiento de la situación de acción:	**PFI:** "[…] después se les plantea una situación problemática que sería en sí la parte más fuerte de la clase, aquí los alumnos hacen lo que es la fase de acción, contestan el problema, sin ayuda del maestro, de manera individual, con lo que ya conocen". En este fragmento de entrevista el PFI1 identifica que el alumno debe tomar sus propias decisiones para la resolución del problema, sin la intervención del docente. Al respecto, Brousseau (2007) señala que en cada momento de la situación de acción el alumno toma decisiones que le permiten plantear estrategias nuevas para someterlas a la experiencia y poder rechazarlas o aceptarlas según la eficacia que observe.

Indicador 3	-Conocimiento de la situación de formulación:	**PFI:** "Enseguida los alumnos recurren a los conocimientos que tienen como base para formular posibles soluciones al problema y registran en una tablita sus procedimientos y su resultado, aquí comienza la situación de formulación […]". Como se puede apreciar, "la formulación de un conocimiento correspondería a una capacidad del sujeto para retomarlo (reconocerlo, identificarlo, descomponerlo y reconstruirlo en un sistema lingüístico)" (Brousseau, 2007, p.25).
Indicador 4	-Conocimiento de la situación de validación:	**PFI:** "[…] y ahora si nos vamos a lo que es socializar, a validar los resultados y a comparar […]". En relación a la validación se propone en términos de comparar los resultados y procedimientos empleados por los alumnos para resolver una tarea. Aquí se presenta "[…] un nuevo tipo de formulación: el emisor ya no es un informante, sino un proponente, y el receptor, un oponente. Se supone que poseen las mismas informaciones necesarias para tratar una cuestión" (Brousseau, 2007, p.26).
Indicador 5	-Conocimiento de la función de la institucionalización:	**PFI:** "[…] ya en la institucionalización se les va a decir que a esto que acabamos de hacer (señala 1:3) se le llama razón. Enseguida revisaremos los resultados para que ahora si establezcan el cómo se pueden representar de diferentes maneras las cantidades en lo que es la fracción y la razón. Por ejemplo, en la fracción en el primer planteamiento del pastel quedaría ¼ y en razón sería de 1 a 4. Aquí es en el momento que les digo que se puede leer de uno a cuatro o de uno a tres, lo cual van a representar con números y los puntitos". En el fragmento anterior, prevalece la participación del profesor para que los alumnos se apropien de conocimientos relacionados con las representaciones de la razón y la fracción. En este sentido, Brousseau (2007) menciona que después de validar, un grupo de maestros observó que necesitaban dar cuenta de lo que habían hecho los alumnos, describir lo que había sucedido y lo que estaba vinculado con el conocimiento en cuestión; situación que asocia con la necesidad de las situaciones de institucionalización.

Como se puede observar en la Tabla 1, el PFI expresa conocimientos sobre la función del medio, situación de acción, formulación, validación e institucionalización de una situación didáctica. En el indicador 1 (Conocimiento de la función del medio) y el indicador 5 (Conocimiento de la función de la institucionalización) los conocimientos que declara establecen una relación explícita con la razón como significado de la fracción. Para el caso de los indicadores 2 (Conocimiento de la situación de acción), 3

(Conocimiento de la situación de formulación) y 4 (Conocimiento de la situación de validación), los conocimientos que expone manifiestan una relación implícita con el significado razón, a partir de las actividades que señala realizarán los alumnos al tener como referente el contenido de su plan de clase, el cual no detalla en la entrevista.

En el siguiente apartado avanzaremos en la descripción de las conclusiones que surgen de estos avances de investigación.

Conclusiones

Las respuestas brindadas por el PFI ante algunas preguntas de la entrevista semiestructurada permiten caracterizar los conocimientos que manifiesta sobre el dominio *Conocimiento didáctico del contenido (PCK)*, en relación al subdominio *Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)*, de manera específica, expresa conocimientos sobre la categoría *Conocimiento de Teorías personales o institucionalizadas de enseñanza,* donde emerge como subcategoría el Conocimiento de la TSD, acompañada de cinco indicadores de conocimiento: 1) conocimiento de la función del medio, 2) conocimiento de la situación de acción, 3) conocimiento de la situación de formulación, 4) conocimiento de la situación de validación y 5) conocimiento de la función de la institucionalización. En el indicador 1 y 5 el PFI muestra conocimientos que establecen una relación explícita con el significado razón cuando lo toma como referente para la selección de materiales y cuando muestra conocimientos sobre la representación de la razón (1:4-relación entre dos cantidades) y la fracción (1/4 -parte-todo). Sin embargo, en los indicadores 2, 3 y 4, el PFI enuncia, de manera implícita, conocimientos asociados al significado razón a través de las actividades que expresa realizarán los alumnos en función del plan de clase que diseñó. Como se observa, los conocimientos que el PFI tiene sobre la TSD, hacen que se convierta en la teoría de referencia para enseñar la razón como un significado de la fracción en un grupo de quinto grado de educación primaria.

En términos generales, este trabajo manifiesta algunos conocimientos del subdominio KMT que un profesor en formación inicial posee en una entrevista semiestructurada, previo a la aplicación de su planificación para favorecer la enseñanza del significado razón. Sin embargo, en investigaciones posteriores será objeto de estudio en su clase y en otras entrevistas semiestructuradas que aporten evidencias de conocimientos de los diferentes dominios y subdominios del MTSK del futuro profesor.

Referencias bibliográficas

Albert-Gómez, M. J. (2007). *La investigación educativa: claves teóricas.* España: McGraw-Hill.

Álvarez-Gayou, J. (2012). *Cómo hacer investigación cualitativa*. México: Paidós Educador.

Ávila, A. (2001). *La experiencia matemática en la educación primaria. Estudios sobre los procesos de trasmisión y apropiación del saber matemático escolar* (Tesis de Doctorado no publicada) Universidad Autónoma de México, México.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Argentina: Libros del Zorzal.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Defining specialized knowledge for mathematics teaching. Actas del CERME8. Antalya, Turquía.

Carrillo, J., Contreras, L.C. y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina, & I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática* (pp. 193- 200). Granada, España: Comares.

Diario Oficial de la Federación. (2012). Acuerdo 649 por el que se establece el Plan de Estudios para la Formación de Maestros de Educación Primaria. México: Autor.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, Á. & Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, N. Climent, L.C. Contreras, M. Montes, D. Escudero-Ávila & E. Flores-Medrano (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 57-72). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Llinares, S. & Sánchez, M. (1997). *Fracciones*. España: Síntesis.

Ríos, Y. (2007). Una ingeniería didáctica aplicada sobre fracciones. *Revista Omnia*, 13 (2), 120-157.

Rodríguez, G., Gil, J. & García, E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. España: Ed. Aljibe, S. L.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

NIVELES DE RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO DE ESTUDIANTES DE PEDAGOGÍA EDUCACIÓN GENERAL BÁSICA DE UNA UNIVERSIDAD PERTENECIENTE AL CONSEJO DE RECTORES DE CHILE

Lilian del Carmen Vargas Villar
Universidad de Concepción. (Chile)
lilivargas@udec.cl

RESUMEN: La investigación cuantitativa con elementos cualitativos, de diseño pre-experimental de pre test, intervención y postest tiene como propósito mejorar el aprendizaje y los niveles de razonamiento geométrico de los estudiantes de segundo año de la Carrera de Educación General Básica de una universidad del Consejo de Rectores de Chile. Durante un semestre, se desarrollaron unidades de enseñanza diseñadas de acuerdo con los niveles y las fases del Modelo de Van Hiele, en la asignatura de Geometría de la malla curricular. Desde una perspectiva formativa, esta investigación ha revelado importantes carencias de los estudiantes para profesores, en cuanto a los niveles de razonamiento geométrico. Se evidencia que después de la intervención, los estudiantes avanzaron significativamente desde el nivel 1 de reconocimiento o visualización a un nivel de 3 de deducción informal u orden que podrían proyectar en sus prácticas en el aula.

Palabras clave: evaluación, modelo de enseñanza, razonamiento geométrico, niveles de razonamiento, formación inicial docente

ABSTRACT: This is a quantitative research with qualitative elements that includes pre-experimental design of pre-test, intervention and post-test. It was aimed at improving learning and geometric reasoning levels of second-year students majoring in General Basic Education at a university of the Council of Rectors in Chile. During a whole semester, teaching units, designed according to phases and levels of Van Hiele's Model, were developed in the subject Geometry of the curriculum. From a formative perspective this investigation has found important deficiencies of the students and teachers with respect to the levels of geometric reasoning. It is obvious, that after the intervention, the students progressed significantly from level 1 of recognition or visualization to level 3 of informal deduction or order that they could show in their practices in the classroom.

Key words: evaluation, teaching model, geometric reasoning, levels of reasoning, initial teaching training

Introducción

En los últimos años se viene apreciando una importante preocupación por la formación inicial docente (no sólo desde ámbitos pertenecientes al mundo de la educación, sino también desde ámbitos políticos). Uno de los ejes de la Reforma Educacional Chilena es abordar esta problemática, con normativas que contemplan el mejoramiento sustantivo de formación inicial docente, garantizando de este modo, el derecho de todo ciudadano a recibir una educación de calidad. El cambio más significativo que se pretende realizar en la formación inicial docente es mejorar la enseñanza universitaria. Esto nos lleva a un aspecto clave para el diseño y desarrollo de los procesos de formación inicial de profesores de Educación General Básica que atiende a estudiantes de primero a sexto año, donde las edades de los niños fluctuan entre 6 y 14 años: la selección y organización de los conocimientos, en función de los procedimientos, actitudes y destrezas que debe desarrollar un profesor.

Las investigaciones sugieren que en las aulas universitarias se debe implementar modelos de enseñanza que permitan a los estudiantes ser matemáticamente competentes, para que luego puedan ser replicados por los futuros docentes en sus propias prácticas docentes.

En Chile, el Ministerio de Educación ha implementado un plan de evaluación, utilizando la prueba INICIA como un instrumento que forma parte del Programa de Fomento de la Calidad de la Formación Docente. En general los resultados obtenidos en INICIA son preocupantes. En el año 2012 sólo un 44% de los egresados de la carrera de Educación General Básica tiene conocimientos disciplinarios sobresalientes o aceptables, en especial en Matemática y más específicamente en lo referido a Geometría; aporta evidencia sobre las dificultades en los procesos de identificación de propiedades de las figuras geométricas, clasificación, representación, argumentación y demostración.

Para que una persona pueda clasificar, representar, argumentar y realizar demostraciones de carácter deductivo en Geometría, debe tener un desarrollo profundo del razonamiento geométrico. El desarrollo de estas habilidades requiere entre otros, que los estudiantes participen de clases distintas a los modelos tradicionales, que se focalizan en la memorización y la utilización de mecanismos de resolución, que trabajen elementos que son considerados claves de la matemática, como son la visualización, el razonamiento y la construcción de los objetos geométricos y trabajar las representaciones, la exploración, la modelización, la argumentación y la demostración (Aravena & Caamaño, 2013).

Diferentes investigaciones (Usiskin, 1982, Aravena y Caamaño, 2013, Gutiérrez y Jaime, 2012, Gutiérrez y Jaime, 2015) concluyen que uno de los modelos que permite avanzar en el desarrollo del razonamiento geométrico, pasando por distintos niveles de jerarquización y preparar secuencias didácticas de aprendizaje, es el modelo de Van Hiele (1957, 1986), que permite, por un lado, medir los niveles de razonamiento de los estudiantes y por otro preparar secuencias didácticas, aplicando las fases de aprendizaje.

Este estudio examina en un contexto real, la implementación de un programa basado en la teoría de Van Hiele, donde se quiere verificar si: una secuencia didáctica para la enseñanza de la geometría basada en el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele permite que los estudiantes para profesor de Educación General Básica alcancen los niveles y el grado de adquisición de razonamiento requerido para su futuro desempeño profesional.

En este sentido y en atención al propósito de la investigación, que es mejorar los aprendizajes en geometría de los estudiantes en formación para profesores, se plantea el siguiente objetivo de estudio: Evaluar el desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico de acuerdo al Modelo de Van Hiele, obtenido por los estudiantes de segundo año de la carrera de Educación General Básica una Universidad de Chile, después de aplicar unidades de enseñanza diseñadas de acuerdo con los niveles y las fases de Van Hiele. Es así que nos planteamos dos objetivos específicos: 1) Describir el grado de adquisición inicial de los Niveles de Razonamiento Geométrico de acuerdo al Modelo de Van Hiele, que presentan los estudiantes de segundo año de Educación General Básica, 2) Identificar los avances en el desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico producto de la implementación de unidades de enseñanza diseñadas de acuerdo con los niveles y las fases de Van Hiele.

Marco teórico

En el campo de investigación de Didáctica de la Geometría, el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele ha representado durante los últimos años, una teoría importante para comprender cómo se construye el aprendizaje de la Geometría, identificando los distintos niveles de razonamiento matemático de los estudiantes y por otro lado, cómo guía para la elaboración de diseños de clases y selección de ejercicios adecuados, que permitan alcanzar con más facilidad un nivel superior de razonamiento.
Gutiérrez y Jaime (1998) proponen un conjunto de atributos distintivos en los procesos de razonamiento de cada uno de los 5 niveles de Van Hiele, que consideran: reconocimiento y descripción, uso de definiciones, formulación de definiciones, clasificación y demostración. Estos atributos permiten construir indicadores para determinar en qué nivel de razonamiento geométrico se encuentran los estudiantes, para luego organizar las secuencias didácticas de enseñanza que permita elevar el nivel de profundización del conocimiento geométrico.

A continuación, se presenta una descripción de las principales características de los 5 niveles de razonamiento planteados en el trabajo (Van Hiele, según Corberán et al, 1994 y Jaime y Gutiérrez, 1996, citados en Barrantes y Blanco, 2004):

Nivel 1 (reconocimiento): Los alumnos perciben las figuras como un todo global, en su conjunto. Se reconocen por sus formas visibles y no se reconocen las partes y componentes de las figuras y no se explicitan las propiedades determinantes de las figuras.

Nivel 2 (análisis): Los individuos pueden analizar las partes o elementos y propiedades particulares de las figuras. Las propiedades de las figuras se establecen experimentalmente mediante una serie de actividades como la observación, medición, corte o doblaje.

Nivel 3 (clasificación): En este nivel se puede usar cierto razonamiento lógico informal para deducir propiedades de las figuras. Las relaciones entre las propiedades de la figura y las relaciones entre figuras llegan a ser el principal objetivo de estudio.

Nivel 4 (deducción formal): Los individuos pueden desarrollar secuencias de proposiciones para deducir una propiedad de otra, es decir, realizar razonamientos lógicos formales. Las demostraciones tienen sentido y se siente su necesidad como único medio para verificar la verdad de una afirmación.

Nivel 5 (rigor): Este nivel tiene que ver con el aspecto formal de la deducción. Los individuos están capacitados para analizar el grado de rigor de varios sistemas deductivos.

Van Hiele en su modelo, propone los pasos que debe seguir un profesor para ayudar a sus estudiantes a subir al siguiente nivel de razonamiento. Estos pasos son etapas de graduación y organización de actividades que debe experimentar un estudiante para que logre llegar a un nivel de razonamiento mayor. Gutiérrez y Jaime (1998) señalan que: a lo largo de estas fases, el profesor debe procurar que sus alumnos construyan una red mental de relaciones del nivel de razonamiento al que deben acceder, creando primero los vértices de la red y después las conexiones entre ellos. Estas fases son:

Fase 1 (discernimiento o información): El docente determina la situación en la que se encuentran sus alumnos respecto del contenido a tratar, vale decir, un diagnóstico de ideas previas y, la forma que éstos tienen de razonar.

Fase 2 (orientación dirigida): El profesor propone una secuencia graduada de actividades a realizar y explorar.

Fase 3 (explicitación): Los estudiantes expresan de palabra o por escrito los resultados que han obtenido, intercambian sus experiencias y discuten sobre ellas con sus compañeros y el profesor, con el fin de que lleguen a ser plenamente conscientes de las características y relaciones descubiertas y afiancen el lenguaje técnico que se corresponde al tema objeto de estudio.

Fase 4 (orientación libre): Se desarrollan actividades más complejas, basadas fundamentalmente en la búsqueda de solución a un problema, es en esencia un proceso de investigación por parte de cada uno de los estudiantes.

Fase 5 (integración): El docente sintetiza los contenidos trabajados por los estudiantes, ordenando los resultados y haciendo una explicación final del objeto de estudio.

Método de investigación

Dadas las características, de la problemática que se aborda, esta investigación considera el enfoque cuantitativo con elementos cualitativos, con un diseño pre experimental. La población para el estudio está formada por los alumnos de segundo año de la carrera de Educación General Básica de una universidad chilena perteneciente al Consejo de Rectores. Para el estudio se utilizó muestreo por conveniencia, los estudiantes están accesible y cumplen con las condiciones que deben tener los sujetos de éste estudio que durante el semestre deben incorporarse a la asignatura de Geometría, esta muestra estuvo formada por 31 estudiantes que cursan la asignatura de Geometría del Triángulo y del Cuadrilátero.

Para el levantamiento de los datos, se aplicó un pre y post test, consistente en una prueba para medir el desarrollo del pensamiento geométrico, diseñado y validado por Corberán, R, Gutiérrez, A. y otros (1994). El pre y pos test están formado por 10 ítems cada uno, en ellos se recoge la información sobre los niveles de razonamiento geométrico y los conocimientos geométricos congruentes con los contenidos que se tratan en la asignatura de Geometría correspondiente al plan de estudio de la carrera, en éste caso cuestiones relativas a polígonos, triángulos y cuadriláteros.

Tabla 1. Resumen de las características del pre y pos test

Items	Niveles				Contenido geométrico
	1	2	3	4	
P1	◦	◦			Clasificar polígonos (regular, irregular, cóncavo y convexo)
P2	◦	◦	◦		Clasificar cuadriláteros (cuadrado, rectángulo, rombo)
P3		◦	◦		
P4		◦	◦		Usar definiciones de polígonos y Partículas lógicas
P5		◦	◦		
P6	◦	◦			Describir polígonos Definir triángulos
P7		◦	◦		
P8		◦	◦	◦	Demostrar que los ángulos de un triángulo suman 180º
P9		◦	◦		
P10		◦	◦	◦	Demostrar propiedades de polígonos.

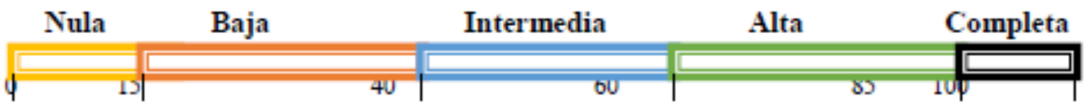
La codificación de los test se realiza de acuerdo con la caracterización de los tipos de respuesta de Gutiérrez, Jaime, Fortuny (1991). En ella se consideran como puntos centrales los siguientes elementos: 1) cómo los niveles de Van Hiele son de carácter continuo, se determina el grado de adquisición de los estudiantes en cada nivel, con el fin de describir la transición entre dos niveles 2) Se analiza la forma cómo el estudiante responde en conjunto a las diferentes cuestiones de cada ítem, lo que permite determinar el nivel de razonamiento empleado en dicha respuesta; 3) Se considera la calidad matemática de las respuestas como un indicador de seguridad con que el estudiante contesta el ítem esto es, la movilización de las destrezas propias del nivel de razonamiento empleado.

Para determinar el grado y el nivel en que se encuentra cada estudiante, se utiliza la siguiente escala propuesta por Gutiérrez (1994):

Por lo tanto cada respuesta a un ítem se evalúa desde una doble perspectiva: nivel de razonamiento y el tipo de respuesta.

Para la elaboración de las secuencias didácticas, se tomaron en consideración las características iniciales de los estudiantes y las fases del modelo de Van Hiele. Durante las clases los estudiantes participaron activamente en su aprendizaje, utilizando materiales de apoyo como regla, compás y materiales didácticos adecuados a cada tarea diseñada. La imagen 1 muestra cómo trabajan en cada clase, construyendo modelos y socializando las respuestas a los problemas planteados.

Imagen 1. Muestra actividades de aprendizaje realizadas por las estudiantes durante las clases



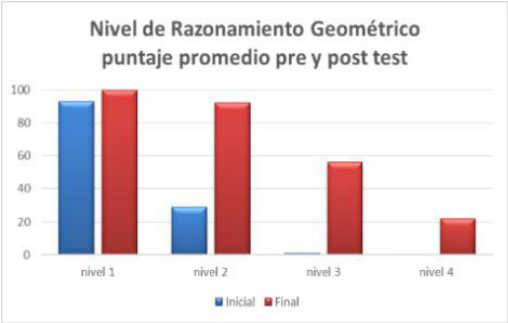
Resultados

En este apartado se presentan los resultados de los grados de adquisición de los niveles de razonamiento geométrico logrado por los estudiantes al inicio y término de la intervención desarrollada.

Tabla 2. Grado de adquisición (inicial y final) de niveles de razonamiento geométrico obtenido por los estudiantes

Nivel	Grado de adquisición de cada Nivel									
	NULA		BAJA		INTERMEDIA		ALTA		COMPLETA	
	INICIAL %	FINAL %	INICIAL %	FINAL %	INICIAL %	FINAL %	INICIAL %	FINAL %	INICIAL %	FINAL %
Nivel 1	0	0	0	0	0	0	9,7	0	90,3	100
Nivel 2	9,7	0	71	0	16,1	0	3,2	9,7	0	90,3
Nivel 3	96,8	3,2	3,2	19,4	0	32,3	0	38,7	0	6,5
Nivel 4	100	41,9	0	29	0	25,8	0	3,2	0	0

En la tabal 1 muestra un resumen de las respuestas en cada test, señalando el logro en cada nivel y el grado de adquisición de éste. Se observa que al inicio de la intervención, los estudiantes se encuentran en un alto grado de adquisición del nivel 1 de razonamiento geométrico, en cambio el 71% sólo tiene una baja adquisición del nivel 2, mientras que no responden a los item de nivel 3 y 4. En cuanto a los grados de adquisición logrados en el postest, se observa un avance significativo en estos niveles.



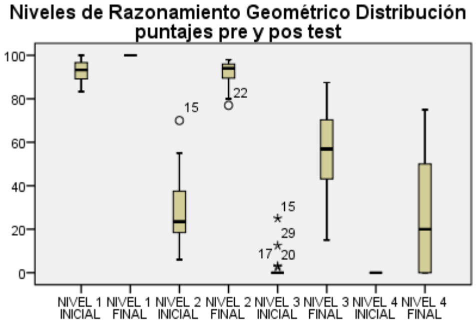


Gráfico 1. Niveles de Razonamiento geométrico obtenido por los estudiantes al inicio y término de la implementación del modelo.

Al inicio de la intervención los estudiantes presentan un nivel de desarrollo geométrico muy bajo, en el gráfico 1, se observa una adquisición completa del nivel 1 y una baja adquisición del nivel 2, con ausencia de los niveles 3 y 4. En cambio al finalizar el período de aplicación de la secuencia didáctica para la enseñanza de la geometría basada en el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, los estudiantes presentan un avance estadísticamente significativo según prueba t (valor-p = .000) considerando $\alpha = 0.005$, en la adquisición de los niveles 2 y 3 donde el nivel de razonamiento deductivo comienza a emerger.

Conclusiones

De acuerdo a los resultados obtenidos en pre test al inicio del programa de intervención, el nivel de desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes de pre grado es a nivel de reconocimiento, manejan solamente información visual, cuya forma de razonamiento no puede ser considerada como propiamente matemática, están recién iniciando el reconocimiento de propiedades matemáticas de los objetos. Una vez finalizado el período de aplicación de la intervención, evidencian un avance importante. Todos los estudiantes logran desarrollar el nivel 2 con un alto grado de adquisición completo, en lo referido al nivel 3 a pesar que algunos de ellos no logran adquirir el desarrollo que requiere este nivel, hay un porcentaje importante (45,2%) que alcanza la adquisición de este nivel (38,7% alto y 6,5% completa), sin embargo solo 29% logra el nivel 4.

La enseñanza de la geometría utilizando el modelo de Van Hiele ha permitido que este grupo mejore su razonamiento geométrico y aprendan significativamente, logrando avanzar a niveles más profundos de razonamiento geométrico, lo que probablemente mejorará su desenvolvimiento como profesores en la asignatura de matemática. En este sentido, se tendría a un profesional más crítico, analítico, creativo y participativo, que no se conforma con una enseñanza mecanicista de esta ciencia.

Desde una perspectiva formativa, esta investigación ha revelado las importantes carencias de los estudiantes para profesores después de un año de formación en la universidad, no son capaces de generalizar las características que reconocen en una figura a otras de su misma clase, no reconocen explícitamente como tales las propiedades Matemáticas de las figuras, aunque pueden reconocer algunas propiedades o elementos, éstas no juegan un papel apreciable en el reconocimiento de dicha figura, presentan una nula adquisición de los niveles 3 (clasificación) y nivel 4 (De deducción formal), lo que no les permite reconocer que unas propiedades de las figuras geométricas se deducen de otras y de deducir esas implicaciones, no pueden construir una demostración formal, justificando sus pasos con los axiomas adecuados, no saben cómo razonar con la fuerza de la lógica formal; en particular, no distinguen con claridad una implicación ($p \rightarrow q$) de su recíproca ($q \leftarrow p$), no pueden clasificar lógicamente diferentes familias de figuras a partir de propiedades suyas ya conocidas formuladas con precisión matemática. Considerando que estas son competencias que deben tener los profesores para poder enseñar a los estudiantes de Educación General Básica, se hace necesario generar nuevas investigaciones que aporten más evidencia de cómo desarrollar éstas en las aulas universitarias implementando el modelo de Van Hiele.

Referencias bibliográficas

Aravena, M., Caamaño C. (2013). Niveles de Razonamiento Geométrico en Estudiantes de Establecimientos Municipalizados de la Región del Maule, *Revista Latinoamericana de Investigación en matemática educativa, 16(2),* 139- 178.

Barrantes, M. y Blanco, L. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar. *Revista Enseñanza de las Ciencias 22(2),* 241-250.

Gutiérrez A, (1994). Diseño de Evaluación de Una Propuesta Curricular de Aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Secundaria Basada En el Modelo de Van Hiele, *Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia*, CIDE, Madrid.

Gutiérrez, A., Jaime, A. (1998): On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning, *Focus on Learning Problems in Mathematics, 20*(2/3), 27-46

Gutiérrez A, Jaime A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria, *publicada en las memorias del XX Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones,* Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 23 a 25 de junio de 2011.

Gutiérrez, A., Jaime, A. (2015): Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional, *PNA, 9*(2), 53-83

Gutierrez, A., Jaime, A. Y Fortuny, J. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of de Van Hiele levels. Journal for Research in Mathematics Education, 22(3), pp. 237-251.

Jaime, A. (1993): Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento (tesis doctoral). *Valencia, España: Universidad de Valencia. Recuperado de http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/Jai93.pdf.*

Manzi, J. (2010). ¿Qué características de la formación inicial de los docentes se asocian a mayores avances en su aprendizaje de conocimientos disciplinarios? http://www.comunidadescolar.cl/

documentacion/FONIDE/Informe%20Final-Jorge%20Manzi-PUC-511015.pdf

OCDE (2004). Revisión de políticas nacionales de Educación. Santiago de Chile: Ministerio de Educación.

Pedraja, L; Araneda, C.; Rodríguez, P. Y Rodríguez, J. (2012). Calidad en la Formación Inicial Docente: *Evidencia Empírica en las Universidades Chilenas. Formación Universitaria,* 5(4), 15-26.

Usiskin, Z. (1982). Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry (CDASSG project). Chicago, EE.UU.: University of Chicago, Department of Education.

EFECTOS DEL USO DEL PORTAFOLIO PARA DESARROLLAR LA COMPETENCIA REFLEXIVA EN FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA

María José Seckel, Vicenç Font Moll
Universidad Católica del Maule (Chile), Universidad de Barcelona (España)
mjseckel@ucm.cl, vfont@ub.edu

RESUMEN: El trabajo que se presenta a continuación corresponde a un estudio de caso único que siguió una metodología cualitativa. Se busca profundizar sobre el uso del portafolio para desarrollar la competencia reflexiva en futuros profesores de primaria con mención en matemática. Los datos analizados se obtuvieron a partir de entrevistas y análisis de documentos, pudiendo evidenciar el progreso en el desarrollo de la competencia en estudio en algunos estudiantes y los tipos de obstáculos presentes durante la elaboración del portafolio.

Palabras clave: formación de profesores, competencia reflexiva, portafolio

ABSTRACT: This paper deals with a case study based on a qualitative methodology. It seeks to deeply analyze the use of portfolio in order to develop the reflexive competence of future primary school teachers majoring in mathematics. The data analyzed were obtained from interviews and documentary analysis. It was possible to show the progress in the development of some student’s reflexive competence as well as the types of obstacles they face when elaborating the portfolio.

Key words: teacher training, reflexive competence, portfolio

Introducción

En el ámbito de la formación inicial del profesorado, el uso del portafolio se justifica a través de lo planteado en distintas investigaciones en las que se sostiene que no solo es un instrumento adecuado para evaluar si no que, además, se reconoce como un instrumento facilitador de la reflexión que permite alcanzar un aprendizaje donde se integra la teoría y la práctica (Cano, 2005; Seldin, 2004).

Según Rodríguez (2013) podemos encontrar tres tipos de portafolios dependiendo de la finalidad que se le asigne: 1) evaluativos, 2) de seguimiento de procesos y 3) reflexivos. En el caso que hemos analizado, el trabajo de portafolio implicó características de los tres tipos, es decir, tenía como finalidad el desarrollo de la competencia reflexiva en el periodo de un semestre académico (que implica seguir el proceso y diseñar tareas para la reflexión) y la evaluación de su desarrollo.

Asimismo, Barberá (2005) y Rodríguez (2013), presentan algunos elementos claves para llevar a cabo un trabajo en base a un portafolio, coincidiendo en tres aspectos que tienen relación con el rol del profesor durante el proceso formativo: 1) la motivación para el trabajo, 2) la calidad de la retroalimentación y 3) criterios claros de evaluación. Estos tres elementos nos permiten comprender que trabajar por medio de un portafolio es una tarea compleja no solo para los estudiantes, sino que también para el formador, quien es el encargado de diseñar las tareas, gestionar los espacios de trabajo y evaluar el progreso de los alumnos.

Respecto a la utilización de este recurso en la formación inicial del profesorado, nos encontramos con evidencias que permiten sostener que dicho recurso suele ser utilizado en el periodo de prácticas profesionales de los futuros profesores (Farías y Ramírez, 2010; Cebrián, 2011), sin embargo, al ser su objetivo un tipo de evaluación auténtica, consideramos que también es una herramienta útil en aquellas cátedras que contemplan el desarrollo de competencias, por lo que resulta interesante analizar el efecto del uso del portafolio en una asignatura de matemática, específicamente la asignatura “Aplicaciones didácticas y metodológicas de la proporcionalidad en el segundo ciclo de la educación básica”.

Marco de referencia

El auge de las competencias en el ámbito educativo genera la necesidad de tener recursos evaluativos coherentes con la complejidad de las mismas. Distintos autores proponen que para evaluar competencias es necesario recurrir a la evaluación “auténtica” (Palm, 2008; Marín, Arbesú, Guzmán y Barón, 2012), entendida como una evaluación que pretende evaluar lo que las personas hacen en el contexto de una situación real. Desde esta perspectiva, en el ámbito de la educación superior, evaluar competencias implica plantear estrategias evaluativas que se centren en la realización, por parte de los estudiantes, de tareas con un grado de dificultad adecuado a su momento formativo (Fernández, 2010). En el caso de la formación del profesorado, Opazo, Sepúlveda y Pérez (2015) manifiestan que los futuros profesores valoran el uso del portafolio como un instrumento de evaluación que promueve el desarrollo de tareas que se sustentan en contextos reales.

Asimismo, el portafolio es considerado un recurso que permite una excelente experiencia reflexiva, ya que su construcción favorece los procesos de retroalimentación y promueve procesos reflexivos en los futuros profesores, permitiendo que estos evalúen y mejoren su práctica (Shulman, 1999). En Chile, a partir del año 2003, el portafolio se ha transformado en un recurso que ha permitido evaluar el desempeño profesional de los profesores chilenos y, a la vez, se convirtió en un recurso muy utilizado durante la formación inicial de dichos profesionales.

Como hemos señalado en párrafos anteriores, el portafolio es un instrumento que requiere, por parte del profesor, del diseño de tareas que permitan, a sus estudiantes, movilizar las competencias esperadas para un buen desempeño profesional. En un estudio realizado por Pochulu, Font y Rodríguez (2016), se señala que los criterios de idoneidad didáctica propuestos en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006) son útiles para analizar las tareas resueltas por profesores o futuros profesores, así como también para orientar las reflexiones que ellos realizan sobre prácticas matemáticas implementadas o planificadas.

De acuerdo a esto, y dado que la profesora que participó en el estudio utilizó dichos criterios de idoneidad para desarrollar la competencia de reflexión en un grupo de futuros profesores de Educación Básica con Mención en Matemática, se considerarán los seis criterios de idoneidad propuestos, estos son:

- Idoneidad Epistémica: se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de un significado de referencia.
- Idoneidad Cognitiva: expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.
- Idoneidad Interaccional: grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje.
- Idoneidad Mediacional: grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje.
- Idoneidad Emocional: grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio.
- Idoneidad Ecológica: grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social, etc.

Ahora bien, dado que las competencias tienen un carácter dinámico, lo que implica un desarrollo gradual de ellas, se ha considerado la caracterización de competencia reflexiva, con tres niveles de desarrollo (ver tabla 1), propuestos en Seckel y Font (2015).

Tabla 1. Niveles de desarrollo para la competencia reflexiva en futuros profesores de Educación Básica con Mención en Matemática. (Seckel y Font, 2015)

Competencia de reflexión sobre la práctica, propia o ajena: **Analiza críticamente su práctica pedagógica y la de otros docentes en función de su impacto en el aprendizaje de los estudiantes, y propone y fundamenta cambios para mejorarla.**		
Nivel 1	**Nivel 2**	**Nivel 3**
D1. Conoce el sistema educativo nacional, sus fines y objetivos, su estructura, la normativa que lo rige, sus principales logros y los desafíos y metas que tiene. **D2.** Posee herramientas implícitas para la observación y las tiene presente en el análisis de una práctica.	**D3.** Analiza la práctica pedagógica en función de su impacto en el aprendizaje de los estudiantes. **D4.** Utiliza de manera explícita criterios de calidad para valorar procesos ya realizados de enseñanza y aprendizaje de matemática.	**D5.** Analiza críticamente la práctica pedagógica en función de su impacto en el aprendizaje de los estudiantes considerando el contexto institucional. **D6.** Explica los fenómenos didácticos observados en los procesos de aprendizaje. **D7.** Posee herramientas para observación y evaluación de clases que le permiten proponer y fundamentar cambios para mejorar la práctica.

Los descriptores que se muestran en cada nivel de la tabla 1 nos sugieren el tipo de evidencia que se deben buscar en cada tarea para determinar el nivel de competencia de un futuro profesor. Por ejemplo, el descriptor 1, siguiendo la terminología utilizada en el EOS, necesita evidencias relacionadas, sobre todo, con la faceta ecológica (aunque también con la faceta epistémica dado que una parte de este conocimiento curricular tiene que ver con las matemáticas). En cambio el D7 necesita evidencias relacionadas con las seis facetas.

Metodología

Se trata de un estudio cualitativo que trabaja a través de un estudio de caso (Stake, 2007) compuesto por una profesora y 15 estudiantes que cursaban su cuarto año de formación (cinco en total). El portafolio tenía por finalidad desarrollar la competencia reflexiva vinculando los contenidos que se estaban estudiando en la asignatura “Aplicaciones didácticas y metodológicas de la proporcionalidad en el segundo ciclo de la educación básica” con las experiencias de práctica pedagógica que los futuros profesores estaban adquiriendo en diversos centros escolares.

Dado que la profesora utilizó como marco de referencia los criterios de idoneidad didáctica propuestos en el EOS para orientar la reflexión de sus estudiantes, analizamos el progreso de la competencia en estudio (análisis documental de siete tareas solicitadas en el portafolio) a través de la caracterización de competencia reflexiva propuesta en Seckel y Font (2015), donde los criterios de idoneidad didáctica se consideran como categorías de análisis. Asimismo, para relacionar los tipos de evidencia con un nivel de desempeño, fue necesario considerar las relaciones que se muestran en la tabla 2.

Tabla 2. Relación entre descriptores y tipos de evidencia. (Seckel y Font, 2015)

Descriptor	Tipo de evidencia
D1	Ecológica y, en menos grado, epistémica.
D2	La observación realizada ha de permitir inferir la presencia implícita de alguna (o algunas) de las seis facetas.
D3	Cognitiva
D4	El tipo de observación realizada ha de permitir inferir una presencia explícita de las seis facetas.
D5	Cognitiva y ecológica
D6	El tipo de observación realizada ha de permitir inferir una presencia explícita de las seis facetas.
D7	El tipo de observación realizada ha de permitir inferir una presencia explícita de las seis facetas.

Por otra parte, para comprender en profundidad el trabajo realizado por la profesora en relación al uso del portafolio, analizamos los datos obtenidos de una entrevista realizada a la profesora, dos entrevistas a estudiantes que entregaron el portafolio y otras dos a estudiantes que no realizaron la entrega del portafolio para, posteriormente, hacer una triangulación de datos que permitió determinar los obstáculos presentes durante el proceso de formación.

Resultados

De acuerdo con lo que nos hemos planteado, tenemos dos tipos de resultados, uno que tiene relación con el progreso o desarrollo de la competencia reflexiva en los futuros profesores y, otro, que tiene relación con los obstáculos que se encuentran en el uso que se le dio al portafolio y que afectó el progreso en el nivel de competencia de un número importante de estudiantes (9 estudiantes).

Progreso en el nivel de competencia

Para determinar el nivel de competencia alcanzado con las siete tareas propuestas por la profesora, se analizó el portafolio del único grupo de estudiantes que desarrollo todas las tareas, es decir, se analizaron las siete tareas de un portafolio. En la tabla 3 podemos ver una síntesis de dicho análisis.

Tabla 3. Análisis de las tareas del portafolio)

Estado	Tareas	Tipos de evidencias	Descriptor(es) presente(s)	Nivel de reflexión
Inicial	Nº1	Cognitiva, ecológica y emocional	D2: Conoce algunos constructos del área de educación Matemática que permiten la reflexión sobre la práctica	Nivel 1
	Nº2	Epistemica, cognitiva, interaccional, mediacional y emocional.	D3: Realiza análisis poco elaborados de procesos de instrucción, con observaciones generales en las que se tiene poco en cuenta la especificidad de las matemáticas.	
Final	Nº0	Ecológica y, en menor medida, epistémica.	D1: Conoce el sistema educativo nacional, sus fines y objetivos, su estructura, la normativa que lo rige, sus principales logros y los desafíos y metas que tiene.	Nivel intermedio, entre el nivel 1 y nivel 2 de desarrollo. A pesar de que Presentan evidencias del nivel 2 (D4 y D6), sus reflexiones aun no tienen en cuenta la especificidad de las matemáticas.
	Nº3	Considera las facetas epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, interaccional y ecológica.	D4. Conoce constructos del área de Educación Matemática que permiten la reflexión sobre la práctica y la valoración de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.	
	Nº4	Cognitiva	D3. Realiza análisis poco elaborados de procesos de instrucción, con observaciones generales en las que se tiene poco en cuenta la especificidad de las matemáticas.	
	Nº5	Considera las facetas epistémica, cognitiva,	D4. Conoce constructos del área de Educación Matemática que permiten la reflexión sobre la práctica y la valoración de los procesos de	

		mediacional, emocional, interaccional y ecológica.	enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.	
	Nº6	Emocional y cognitiva	D6. Propone cambios para mejorar la práctica futura con poca fundamentación teórica.	

Las tareas 1 y 2 correspondían a tareas que buscaban evidenciar el estado inicial de la competencia en estudio y, dado al tipo de evidencia encontrada, se pudo determinar que su nivel inicial era el 1. El resto de las tareas tenían como propósito evidenciar el progreso de la competencia reflexiva, donde se puede observar (dado el tipo de evidencias) que los estudiantes han pasado del nivel 1 a un nivel intermedio, entre el nivel 1 y 2, mostrando un ligero progreso.

Obstáculos presentes en el uso del portafolio

A través de la triangulación de datos recogidos con las entrevistas, pudimos evidenciar que los obstáculos que provocaron el abandono al trabajo solicitado en algunos estudiantes eran de tipo epistémico, cognitivo, interaccional, emocional y mediacional. A continuación damos algunos ejemplos de las intervenciones de los futuros profesores (FP) y la profesora (P) que evidencias cada uno de los obstáculos.

- Obstáculo epistémico
- FP: “era complicado hacer una reflexión epistémica, nunca me sentí segura de lo que escribía”.
- P: “yo creo que uno como profesor tiene que hacer un mayor esfuerzo para que ellos se involucren mejor en lo de complejidad matemática”.
- Obstáculo Cognitivo
- FP: “no logré comprender el mapa de complejidad matemática de la proporcionalidad, ni para qué servía”.
- P: “Yo fui dando las tareas pero el curso no fue respondiendo”.
- Obstáculo Interaccional
- FP: “Faltó más acompañamiento por parte de la profesora, que pudiéramos discutir si lo que nosotros pensábamos estaba bien o no, la pauta era buena, pero a veces era necesario discutir cosas con ella”.

    P: “Yo les insistía en que recordaran que tenían tal fecha para entregar el portafolio, que se podían acercar para hacer preguntas, pero no, no hacían consultas”.
- Obstáculo emocional

FP: "un día agregó otra tarea al portafolio, después dijo que el portafolio tendría más porcentaje de nota, eso ya me aburrió".

P: "transmitir el entusiasmo por las actividades, como que eso no me funciona".

- Obstáculo mediacional

FP: "algunas tareas requerían más tiempo, pero más tiempo en la sala, para poder consultar".

P: "El manejo del tiempo, manejar mejor el tiempo en el que se van a realizar las tareas" (respecto a las mejoras que realizaría al ciclo formativo).

Consideraciones finales

En el análisis del discurso, logramos ver que el obstáculo emocional fue el que tuvo mayor frecuencia en el discurso de los participantes (tanto en la profesora como en los estudiantes). Esto nos lleva a plantear la posibilidad de una futura investigación donde se analice con profundidad cómo afecta la dimensión emocional en el desarrollo de la competencia matemática en futuros profesores de educación básica. A la vez, consideramos que de ser abordadas las dificultades detectadas, es posible lograr mayor involucración por parte de los futuros profesores y mayor progresión en el desarrollo de la competencia reflexiva.

Referencias Bibliográficas

Barberá, E. (2005). Calificar el aprendizaje mediante la evaluación por portafolios. *Perspectiva Educacional, formación de profesores*, *45*, 70-84.

Cano, E. (2005). *El portafolio del profesorado universitario. Un instrumento para la evaluación y para el desarrollo profesional*. Barcelona, España: Octaedro/ICEUB.

Cebrián, M. (2011). Supervisión con el portafolio y su impacto en las reflexiones de los estudiantes en el practicum. Estudio de caso. *Revista de Educación*, *354*, 183-208.

Farías, G., & Ramírez, M. (2010). Desarrollo de cualidades reflexivas de profesores en formación inicial a través de portafolios electrónicos. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *15*(44), 141-162.

Fernández, A. (2010). La evaluación orientada al aprendizaje en un modelo de formación por competencias en la educación universitaria. *Revista de Docencia Universitaria*, 8(1), 11-34.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V., & Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, 27 (2), 221-252.

Marín, R., Arbesú, M.I., Guzmán, I. & Barón, V. (2012). El empleo del portafolio en la formación-evaluación de competencias docentes. *Voces y silencios: Revista latinoamericana de Educación*, *3*(1), 5-21.

Opazo, M., Sepúlveda, A., & Pérez, M. L. (2015). Estrategias de evaluación del aprendizaje en la universidad y tareas auténticas: percepción de los estudiantes. *Diálogos Educativos*, *15*, 19-33.

Palm, T. (2008). Performance Assessment And Authentic Assessment: A conceptual analysus of the literatura. *Practical Assessment Research & Evaluation*, *13*(4), 1-11.

Pochulu, M., Font, V. & Rodríguez, M. (2015). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *19*(1), 71-98.

Rodrigues, R. (2013). El desarrollo de la práctica reflexiva sobre el quehacer docente, apoyada en el uso de un portafolio digital, en el marco de un programa de formación para académicos de la Universidad Centroamericana de Nicaragua. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Barcelona.

Seckel M. J. & Font V. (2015). Competencia de reflexión en la formación inicial de profesores de matemática en Chile. *Práxis educacional*, *19*, 55-75.

Seldin, P. (2004). *The teaching portfolio. A practical guide to improved performance and promotion/Tenure Decisions*. Boston, Massachusetts: Anker Publishing Company, Inc.

Shulman, L. (1999). Portafolio del docente: una actividad teórica. En N. Lyons (Comp.*), El uso de portafolio. Propuestas para un nuevo profesionalismo docente* (pp. 45-62). Buenos Aires, Argentina: Amorrortu.

Stake, R.E. (2007). *Investigación con Estudios de Casos.* (4 Ed.). Madrid, España: Morata.

EL USO DE LIBROS DE MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN DOCENTE

Cecilia Crespo Crespo, Patricia Lestón
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" Buenos Aires. (Argentina)
crccrespo@gmail.com, patricialeston@gmail.com

RESUMEN: Esta investigación se propone indagar acerca de los criterios utilizados por los estudiantes de profesorado de matemática para seleccionar libros de matemática y la finalidad de tal selección. Los textos de matemática, tienen diversos usos: consultas, textos básicos de estudio, ejercitación, aplicaciones o bien no son utilizados y simplemente los exámenes son preparados utilizando únicamente apuntes de clase. Sus selecciones y usos, denotan que para los alumnos, los libros de matemática ofrecen distintos recursos que son aprovechados en la construcción del conocimiento matemático. En esta etapa presentamos resultados de la indagación sobre usos y criterios de selección.

Palabras clave: libros de texto, formación docente

ABSTRACT: This research work attempts to inquire about the criteria that math students from the teaching training college have to choose mathematics books, as well as the purpose of such selection. Math books have different uses: there are basic textbooks, complementary books, booklets of exercises, task-based books. But sometimes they are not used and the examinations are prepared by using the notes they have taken in class. Mathematics books selection and use show that the students do not take advantage of the different sources books provide for the construction of the mathematical knowledge. In this stage we show results about book uses and their selection criteria.

Key words: textbooks, teaching training

La problemática abordada

El presente trabajo forma parte de una investigación en la línea de la construcción social del conocimiento con enfoque socioepistemológico, centrada en analizar las características del discurso matemático escolar, a través del uso de libros de texto como elementos fundamentales del mismo.

Es usual oír quejas acerca de estudiantes que no leen lo suficiente y no estudian utilizando libros de texto. Según especialistas,

> la tarea académica en la que los profesores solemos ubicar a los alumnos en clase es la de escuchar nuestras explicaciones y tomar apuntes (de los que nos desentendemos). Asimismo, esperamos que los estudiantes –fuera de la clase– lean la bibliografía proporcionada (pero no nos ocupamos de ello). Es decir, concebimos nuestro rol como transmisores de información; recíprocamente, los alumnos se ven a ellos mismos como receptores de nuestros conocimientos. A pocos sorprende este esquema porque es al que nos hemos acostumbrado (Carlino, 2005, p.3).

Los textos de matemática poseen características distintas de otros libros de textos. Los estudiantes los consultan, los utilizan como textos básicos de estudio, o no los utilizan y se restringen a preparar sus exámenes utilizando únicamente apuntes de clase.

Surgen a partir de estas observaciones preguntas sobre cuáles son los criterios con que seleccionan los estudiantes, futuros profesores de matemática, sus libros de matemática durante su formación, cuáles son los usos que les dan (libros de estudio, consulta, ejercitación, etc.) y la manera en que relacionan esos textos con técnicas de estudio.

El rol de los libros de texto: algunas miradas

Las características de los libros de matemática han cambiado a lo largo de la historia. Reflejan visiones diversas de la matemática y de la transmisión del conocimiento. En esa transmisión se utilizan recursos verbales y gráficos que denotan posiciones de los autores y la sociedad acerca de la ciencia y la didáctica. Los textos escolares son, entonces, un reflejo de la sociedad que los produce, son vehículos de transmisión de una determinada concepción del mundo, cultura, estado de los conocimientos, estereotipos de la sociedad, poder económico, entre otras cosas (Güemes Ardiles, 1994). Esta investigación está centrada sobre los libros de matemática como recurso para el proceso de construcción del conocimiento.

La comunicación de ideas en matemática, se lleva a cabo en las instituciones educativas a través del discurso matemático escolar. El papel de los libros en la transmisión escrita del conocimiento ha sido durante siglos fundamental. En la actualidad, han surgido otras formas de transmisión del conocimiento, pero la importancia de los libros, sigue siendo indudable. Algunos libros hacen hincapié en la formalización de conceptos, otros, en la ejercitación o la síntesis de ideas o en las aplicaciones.

En algunos textos, se presentan representaciones gráficas que utilizan fuertemente en las explicaciones, otros hacen énfasis en explicaciones verbales o simbolismos. Buscamos conocer qué libros prefieren los estudiantes, en qué basan sus preferencias, con qué finalidad hacen uso de los libros de matemática y cómo utilizan sus recursos para construir los conocimientos matemáticos.

Existen investigaciones acerca de los usos de los libros de texto en el aula por parte de los docentes (Güemes Ardiles, 1994), y acerca de la alfabetización académica y el papel de los libros en la universidad (Carlino, 2005). Estos trabajos no se focalizan en ciertas disciplinas, no se refieren a libros de matemática, sino a los usos de los libros en general, en el aula. Por otra parte, se han realizado publicaciones que hacen referencia a las características de los libros de texto de matemática y al uso que dan los docentes a los mismos (Cadoche y Alberto, 2002) que reconocen al libro de texto como guía y auxiliar de los procesos de enseñanza y aprendizaje, a través de distintas funciones y visiones que sobre él tiene el docente. Otras publicaciones se han ocupado de analizar las características de las presentaciones que realizan algunos libros de texto de matemática sobre temas en particular (Gatica, Carranza, May, y Coseí, 2002; Juan, 2007). En estos es posible apreciar la existencia de distintos tipos de argumentaciones en la transmisión del saber enseñado por los textos escolares de matemática de los diversos niveles. Sin embargo, en todas las publicaciones anteriormente mencionadas, la temática de los libros de matemática se ha abordado desde la óptica del docente, no desde la del alumno. Esto hace que no se conozcan los criterios que utilizan los alumnos en la elección de los libros, ni cuáles son los recursos de los mismos que ellos ven valiosos para lograr sus aprendizajes. Es esta visión la que interesa analizar en esta investigación, pues es el estudiante quien lee o no lee los libros y quien decide qué libros pedir en la biblioteca y de qué manera los utiliza para su estudio.

Marco teórico

El marco teórico desde el que se realiza esta investigación es la socioepistemología que comprende a la matemática como una construcción sociocultural. Esta aproximación teórica aborda, desde una perspectiva sociocultural, el problema de la construcción de conceptos matemáticos, así como los fenómenos asociados a la enseñanza y aprendizaje de los mismos, y permite explicar la naturaleza del discurso matemático escolar (Cantoral, 1995). Es un marco teórico que propone una visión sistémica y situada de la investigación realizando un análisis integral de cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión social, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza (Cantoral & Farfán, 2003).

En esta investigación, las cuatro componentes del análisis socioepistemológico se ponen de manifiesto de la siguiente manera: en lo epistemológico, indagaremos acerca de los significados que transmiten los libros de matemática, de las diferencias que existen entre los libros de matemática que se refieren a distintas ramas de esta ciencia; en lo didáctico, acerca de la accesibilidad de su vocabulario, de los ejemplos y gráficos que utilizan; en lo social, acerca del uso que dan los estudiantes a los libros, de las diferencias de criterios según las carreras de estudian; en lo cognitivo, acerca de las construcciones mentales que favorecen o de las dificultades que se detectan de su uso. Esta es la manera en la que el marco teórico que hemos elegido orientará la investigación.

El docente, al igual que los libros de texto, entra como autoridad transmisora y reproductora de saberes, y en su acción se desarrollan resultados nuevos, que nunca son exactamente iguales a los contenidos dispuestos anteriormente. El análisis de la transposición didáctica, abre un amplio espectro para profundizar e indagar acerca de la manera en la que los libros de texto son condicionados por los escenarios socioculturales y la manera en la que su elección influye en el aula. Los textos escolares deben ser comprendidos como reflejo de la cultura en la que se generan, pero también su elección pone de manifiesto necesidades y concepciones del alumno que recurre a él para construir el conocimiento.

Metodología de la investigación

A partir de las preguntas de investigación que se formularon surge la hipótesis de que los criterios que aplican los estudiantes en la selección de los textos de matemática no siempre coinciden con los que aplicamos los docentes. Los usos que dan los alumnos a los libros de matemática y demás recursos para el estudio de las asignaturas de matemática en la carrera docente ponen de manifiesto cuáles son las formas de argumentación y presentación de los contenidos matemáticos que ellos consideran favorecen a su construcción.

Algunas de las variables que han sido identificadas son: los criterios de selección de los libros de matemática que aplican los estudiantes (facilidad de lectura, utilización de lenguaje gráfico en explicaciones, ejercitación, recomendación de la cátedra, etc.), los tipos de uso que dan a los libros de matemática (estudio, práctica, consulta, preparación de exámenes, etc.) y el tipo de asignatura matemática que cursan (Análisis, Álgebra, Geometría, etc.). Aparte de estas variables de tipo nominal, se utilizarán variables de tipo ordinal como el año de cursado en que se encuentran, con el fin de analizar si influye en criterios de selección y en los usos que dan a libros de matemática. La muestra con que se trabajó en esta primera etapa de la investigación corresponde a los alumnos del Profesorado de Matemática del Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González” de la Ciudad de Buenos Aires, Argentina.

Primeras preguntas y respuestas obtenidas

A continuación, se presentan las preguntas que se aplicaron a los estudiantes en esta primera parte de la investigación, y las respuestas obtenidas en cada caso. El primer nivel de análisis que hicimos es de tipo cuantitativo, con intención de organizar los datos y comenzar a indagar sobre los procesos específicos que movilizan las decisiones de los estudiantes. Queda aún pendiente en este trabajo una indagación de tipo cualitativa con algunos de los estudiantes para poder profundizar en estas cuestiones.

Cuestionario

1. ¿Qué material suele consultar durante su formación en el Profesorado? (libros de texto de nivel superior, libros de texto de secundaria, apuntes propios, apuntes de compañeros, fotocopias de libros, artículos, Internet, etc…)
2. ¿Consulta o consultó libros de nivel medio para abordar algunas de las temáticas desarrolladas durante su formación en el profesorado? ¿En qué contexto? ¿Por qué?
3. ¿A qué ramas de la matemática pertenecen los libros de nivel superior que consulta?
4. ¿Cuáles son los motivos por los cuales decide trabajar con un libro de matemática?

    a. Consulta
    b. Profundizar las explicaciones
    c. Ejercitación
    d. Otros. . . (Indique cuál o cuáles)

5. ¿Cuántos libros de matemática ha consultado o leído este año?

    a. Ninguno
    b. Entre uno y cinco libros.
    c. Entre seis y diez libros.
    d. Más de diez libros.

6. ¿Cuántos libros de matemática nivel superior tiene en su casa?

    a. Ninguno
    b. Entre uno y cinco libros.
    c. Entre seis y diez libros.
    d. Más de diez libros.

7. ¿Cuáles son las razones por las cuales dispone de estos libros?

    a. Por recomendación de un docente
    b. Por recomendación de un compañero
    c. Regalo
    d. Por elección propia.
    e. Otras razones. . . (Indique cuál o cuáles)

8. Si su respuesta a la pregunta 6 fue “por elección propia”, ¿qué lo motivó a hacerlo?
9. Si su respuesta a la pregunta 6 fue “por recomendación de un docente”, ¿fue el único que le recomendaron? ¿Por qué se decidió a comprarlo?
10. ¿Qué características generales debería tener un libro de texto para que resulte útil para la construcción de conceptos?
11. Además de los libros de matemática, ¿qué otros recursos utiliza o utilizó para preparar los exámenes y resolver las prácticas de las distintas asignaturas del Profesorado?

Primeras respuestas

Aplicamos este cuestionario a un grupo de estudiantes del profesorado, como encuesta semiestructurada y en base a ello realizamos las siguientes tablas para comenzar a comprender la información que de esos datos surgen.

Pregunta 1	Opciones	%
¿Qué material suele consultar durante su formación en el Profesorado?	Libros de nivel superior	19
	Apuntes propios	24
	Apuntes de compañeros	11
	Internet	22
	Fotocopias de libros	11
	Libros de texto de secundario	13

En esta primera pregunta, se puede observar que el 35% de los estudiantes consultados recurre a apuntes, o sea, notas de clase. Y un 22% además confía para estudiar en Internet, lo que nos indica que al menos un 57% de los estudiantes no recurre a libros. Evidentemente el reclamo los docentes tiene correlato con la realidad, los estudiantes no van a los libros, no los requieren. Y esa es la cuestión que interesa en esta investigación.

Pregunta 2	Opciones	%
¿Consulta o consultó libros de nivel medio para abordar algunas de las temáticas desarrolladas durante su formación en el profesorado?	sí	95
	no	5
¿En qué contexto?	Trigonometría	27
	Geometría	32
	Funciones	41
¿Por qué?	Entender mejor	2
	Explican más claro	4
	Dan más ejemplos	3
	Tienen más ejercitación	3
	Amplían conceptos	23
	Más didácticos	30
	Preparar clases	35

La mayoría de los estudiantes, a pesar de haber excluido los libros en la primera pregunta como opción, reconocen el uso de libros de nivel medio. El contexto más habitual es el de funciones, que en el caso de la escuela argentina, es de los temas centrales en la matemática escolar del nivel medio. Puede destacarse en el caso de los motivos que los llevan a esos libros, que mayoritariamente es para ampliar conceptos que no han entendido y les resultan más “didácticos”. El otro motivo por el cual se buscan estos libros es para preparar clases, pero esta opción cae por fuera de la intención de esta investigación, ya que no es el interés centrarnos en la práctica profesional, sino en la construcción de conocimiento matemático.

Pregunta 3	Opciones	%
¿A qué ramas de la matemática pertenecen los libros de nivel superior que consulta?	Álgebra	35
	Análisis Matemático	30
	Geometría	20
	Pedagogía	5
	Didáctica	5
	Estadística	5

De entre aquellos estudiantes que han manifestado el uso de libros de nivel superior, podemos observar que, de forma muy pareja, son los espacios más “clásicos”, los que los llevan a recurrir a ellos. Con una mínima diferencia, aparecen álgebra, análisis matemático y geometría como espacios curriculares que los llevan a consultar libros de nivel superior.

Pregunta 4	Opciones			
¿Cuáles son los motivos por los cuales decide trabajar con un libro de matemática?	Consulta	Profundizar las explicaciones	Ejercitación	Otros (teoría)
	36	36	25	3

Como se puede observar, el principal motivo de consulta parece ser “completar” lo que se dijo en clase, ya sea buscando respuestas de preguntas que no se han resuelto, profundizando las explicaciones que se dieron, o buscando ejercicios, ya sea para hacer o para ver cómo se han hecho. Es el espacio de la clase el que empuja hacia el libro, en la búsqueda de que la clase se pueda terminar de cerrar.

Pregunta 5	Opciones			
¿Cuántos libros de matemática ha consultado o leído este año?	Ninguno	Entre uno y cinco libros.	Entre seis y diez libros.	Más de diez libros.
	20	60	20	0
Pregunta 6	**Opciones**			
¿Cuántos libros de matemática nivel superior tiene en su casa?	Ninguno	Entre uno y cinco libros.	Entre seis y diez libros.	Más de diez libros.
	0	50	10	40

De las dos preguntas anteriores, llama la atención observar que los valores más altos se dan en el tener los libros en casa, en lugar de en consultarlos. Se puede decir que no es la inaccesibilidad lo que hace que los libros no se consulten: declaran tenerlos en sus casas. Sin embargo, aún así, un 20% de los consultados, no ha leído nada en el año. ¿Qué es de esos libros que no resultan *atractivas* a los estudiantes?

Pregunta 7	Opciones				
¿Cuáles son las razones por las cuales dispone de estos libros?	Por recomendación de un docente	Por recomendación de un compañero	Regalo	Por elección propia	Curiosidad
	38	20	6	31	5

Se hace evidente que las recomendaciones pesan al momento de elegir la bibliografía, ya sea de un docente o de un compañero. Las elecciones personales son responsables de un tercio de las compras.

Este tipo de respuesta será base para pensar a posterior qué resultados han dado esas recomendaciones o elecciones.

Pregunta 8	Opciones			
Si su respuesta a la pregunta 6 fue "por elección propia", ¿qué lo motivó a hacerlo?	clases particulares	profundizar temas	elegí entre varios	necesidad
	12	25	25	38
Pregunta 9	**Opciones**			
Si su respuesta a la pregunta 6 fue "por recomendación de un docente", ¿fue el único que le recomendaron? ¿Por qué se decidió a comprarlo?	curiosidad	profundizar temas	elegí entre varios	necesidad
	17	33	33	17

Resulta de estas preguntas que los criterios de selección no son tan determinantes como se espera. La búsqueda de temas en particular, la opción posiblemente azarosa de uno entre varios, o la necesidad de encontrar alguna información en particular; se reparten los criterios.

Pregunta 10	Opciones					
¿Qué características generales debería tener un libro de texto para que resulte útil para la construcción de conceptos?	fácil lectura	ejemplos	definiciones claras	brevedad y concisión	ejercitación con respuesta	ser claro y didáctico
	10	25	20	15	20	20

En este caso, las respuestas están bien repartidas. No existe un criterio uniforme en el sentido de la utilidad, puede ser la presencia de ejercicios, en especial con respuestas; así como explicaciones claras, breves y didácticas.

Pregunta 11	Opciones						
Además de los libros de matemática, ¿qué otros recursos utiliza o utilizó para preparar los exámenes y resolver las prácticas?	internet	apuntes	videos	guías de ejercicios	libros prestados	mapas conceptuales	calculadora
	40	32	14	3.5	3.5	3.5	3.5

En este caso, una vez más, surgen de manera evidente algunas opciones por encima de las otras. El uso de internet, incluyendo los videos, junto con los apuntes, ampliamente ponen de manifiesto las elecciones de los estudiantes.

Reflexiones finales hasta ahora

A partir de los resultados que se han obtenido, es posible comprender el uso social de los textos de matemática en la formación docente en matemática. Se puede comprender con mayor claridad las características de las formas de comprender la matemática y construir sus objetos que utilizan los alumnos. Esta investigación, permitirá a futuro que los docentes de institutos de formación docente colaboremos en el desarrollo de una posición crítica del uso de distintos materiales de estudio de matemática por parte de los alumnos. Puede decirse a partir a lo indagado que el libro de texto no tiene un papel principal en el discurso matemático escolar actual, y en su lugar parecieran aparecer con fuerza, recursos de internet, videos y fuertemente el uso de apuntes propios o de compañeros.

Entre los estudiantes que usan libros, se observa que buscan en mayor medida que sean claros, breves, fáciles de leer y con mucha ejercitación. Al momento de elegirlos, las recomendaciones pesan, sin embargo, no se logran detectar criterios que los hagan definirse por algunos libros en particular. Lo que nos queda pendiente es pensar en cómo colaboramos en el desarrollo de esos criterios.

Referencias bibliográficas

Cadoche, L., Alberto, M. (2002). Descripción de situaciones didácticas desde los libros de textos (en los últimos veinticinco años). En C. Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 15*, 1222-1227. México: Iberoamérica.

Cantoral, R. (1995). Matemática, matemática escolar y matemática educativa. *En R. Farfán (Ed.), Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*, 1. 1-10. La Habana, Cuba: Ministerio de Educación.

Cantoral, R., Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. En *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 6 (1), 27-40.

Carlino, P. (2005). *Escribir, leer y aprender en la universidad. Una introducción a la alfabetización académica.* Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.

Gatica, N.; Carranza, M.; May, G., Coseí, A. (2002). El concepto de función en los libros de texto universitarios. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 15*, 132-137. México: Iberoamérica.

Güemes Ardiles, R. (1994). *Libros de texto y desarrollo del currículo en el aula. Un estudio de casos.* Tesis doctoral sin publicar. Universidad de La Laguna, España.

Juan, M. T. (2007). Libros de texto de nivel medio y enfoque de enseñanza de la geometría. *Premisa* (9), 34, 37-45.

REFLEXIONANDO SOBRE EL PAPEL DE LA DEMOSTRACIÓN EN EL CONTEXTO ESCOLAR; EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Magdalena Rivera Abajan, Gema R. Moreno Alejandrí
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
mrivera@uagro.mx, grmoreno@uagro.mx

RESUMEN: Como formadores de profesores nos interesa ayudar a construir y/o resignificar el conocimiento profesional para la enseñanza de las Matemáticas, confeccionando y gestionando actividades que permitan la reflexión sobre el conocimiento de los contenidos matemáticos acorde al nivel educativo donde laboran o laborarán los profesores de matemáticas. Este taller tiene como objetivo reflexionar acerca del conocimiento del profesor de matemáticas ante la demostración en contexto escolar. Se presentaron tres actividades que nos permitieron observar el conocimiento del profesor y sus creencias acerca de la demostración. En el taller los profesores reconocieron que la demostración es importante en todos los niveles educativos, aunque no en todos los niveles debe tener el mismo rigor. En la actividad de valoración de resultados a estudiantes se observó como estas creencias estaban presentes en la misma.

Palabras clave: demostración, conocimiento del profesor de matemáticas

ABSTRACT: As teaching trainers we are concerned with the professional knowledge construction and re-signification for Math teaching through the design and management of activities that allow reflecting about the knowledge of math contents, in correspondence with the educational level where math teachers work or will work. This research aims to think about the math teacher’s knowledge in the face of demonstration in the school context. We proposed three activities that allowed us to observe the teacher`s knowledge and beliefs about demonstration. In the workshop, the teachers recognized that demonstration is important in all educational levels, although not all the levels require the same rigor. When assessing students’ results we observed the presence of such beliefs in the activity.

Key words: demonstration, math teacher`s knowledge

Introducción

El conocimiento y desarrollo profesional de los profesores de matemáticas son temas que por las distintas reformas educativas que se han originado en los últimos años, están teniendo un lugar destacado en las investigaciones en la disciplina de Educación Matemática o Matemática educativa. Algunas de estas investigaciones asumen, en particular, la perspectiva de relacionar dicho desarrollo profesional con las creencias /concepciones que los profesores poseen y/o revelan; el conocimiento que demuestran; la participación en grupos de trabajo colaborativo; la reflexión para una mejora de la práctica o la comunicación matemática en el aula (Climent, 2005; Menezes, 2004; Muñoz Catalán, 2009), etc.

La Dirección General de Bachillerato, en México, a partir del ciclo escolar 2009-2010 incorporó, en su plan de estudios, los principios básicos de la Reforma Integral de la Educación Media Superior cuyo propósito es fortalecer y consolidar la identidad de este nivel educativo, en todas sus modalidades y subsistemas; proporcionar una educación pertinente y relevante al estudiante que le permita establecer una relación entre la escuela y su entorno; y facilitar el tránsito académico de los estudiantes entre los subsistemas y las escuelas.

La Dirección General del Bachillerato del sistema educativo mexicano, menciona que se debe:

> propiciar el desarrollo de la creatividad, el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes, mediante procesos de razonamiento, argumentación y construcción de ideas que conlleven el despliegue de distintos conocimientos, habilidades, actitudes y valores, en la resolución de problemas matemáticos que en sus aplicaciones trasciendan el ámbito escolar (SEP, 2013, p. 6).

Y dentro de las actividades de enseñanza establece que el profesor demostrará a los alumnos el teorema de Pitágoras, el teorema de Thales, entre otros, situación que hace necesaria la reflexión sobre el papel de la demostración escolar.

Nuestra reflexión gira alrededor del conocimiento matemático y didáctico de la misma por parte del profesor de matemáticas. Así el objetivo de este taller fue reflexionar con los participantes acerca de su conocimiento como profesor de matemáticas ante la demostración en contexto escolar.

Marco referencial

El conocimiento y desarrollo profesional de los profesores de matemáticas en los últimos años ha sido un tema de gran interés en la Matemática educativa, al plantearse como necesidad social la formación de profesores activos, críticos, reflexivos y sobre todo conocedores de los contenidos matemáticos que tienen o tendrán que enseñar. Así, algunas investigaciones muestran el desarrollo profesional en relación con las concepciones y/o creencias que los profesores poseen o manifiestan, otras respecto al conocimiento que demuestran los profesores y otras más sobre la reflexión para la mejora de la práctica docente (Ponte, 1999; Sosa y Carrillo, 2010; Schön, 1987).

Desde nuestro posicionamiento como formadores de profesores nos interesa ayudar a construir y/o resignificar el conocimiento profesional para la enseñanza de las Matemáticas, al confeccionar y gestionar actividades para tal fin, reflexionando sobre el conocimiento de los contenidos matemáticos acorde al nivel educativo donde laboran o posiblemente laboraran, para ello retomamos lo declarado por Ribeiro (2010) al considerar que el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas consiste en una conjunción de todos los saberes y experiencias que estos poseen y del que hacen uso en el desarrollo de su trabajo docente. Conocimiento es ese que se va construyendo durante toda su carrera docente en una perspectiva de aprendizaje a lo largo de su vida, siendo por tanto un proceso de apropiación de los saberes y vivencias personales.

En este sentido el conocimiento didáctico del contenido aparece como uno de los elementos centrales del saber del profesor. Representa la combinación adecuada entre el conocimiento de la materia a enseñar y el correspondiente conocimiento pedagógico y didáctico necesario para el hacer (Marcelo, 2009).

Shulman (1986) definió el conocimiento didáctico del contenido (CDC) como la interpretación y la transformación que el profesor hace del conocimiento de la materia disciplinar en un contexto facilitador del aprendizaje de los alumnos, un conocimiento que se presenta como la capacidad de comprensión profunda de la materia a enseñar, permitiendo encontrar las maneras más adecuadas de facilitar el aprendizaje. Este conocimiento comprende, en su opinión, las formas más útiles de representación de ideas, las analogías más importantes, las ilustraciones, ejemplos, explicaciones, demostraciones, en una palabra, la forma de representar y formular la materia para que se vuelva comprensible para los alumnos.

Metodología del taller

El taller se presentó en tres etapas que se muestran en el siguiente diagrama:

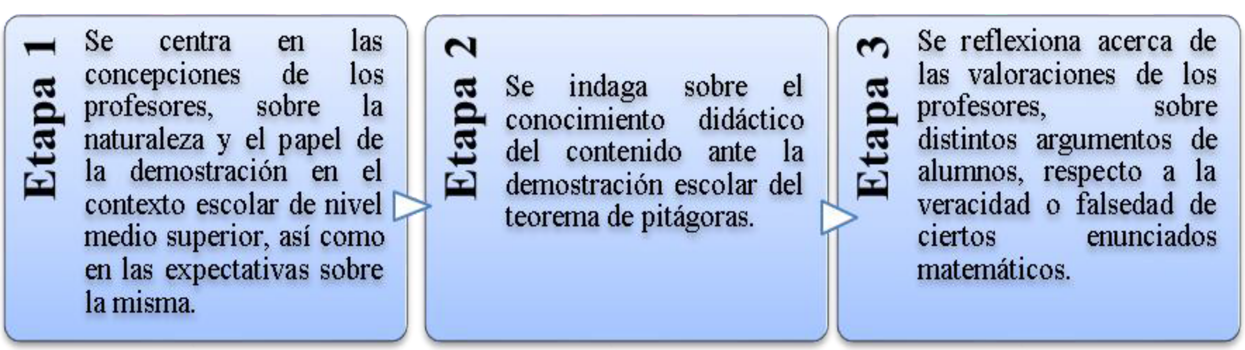


Diagrama 1. Etapas del desarrollo del taller

Cada una de las etapas se llevó a cabo en aproximadamente una hora y constó de actividades de opinión, reflexión y valoración de argumentos sobre algunos ejemplos de demostración escolar. A continuación, describimos algunos de los resultados obtenidos en cada una de las etapas del taller.

Desarrollo del taller y algunos resultados

Etapa 1: Preguntas de opinión acerca de la demostración escolar

En esta fase se identificó la importancia y las funciones que le otorga el profesor a la demostración matemática. Se les pidió a los participantes que, desde su postura como profesor de matemáticas, contestaran las siguientes preguntas:

En tu opinión, como profesor de matemáticas:

a) ¿En qué momento consideras que deben los estudiantes introducirse a las demostraciones matemáticas?
b) El programa de estudios de bachillerato (o equivalente), ¿contempla la demostración?
c) ¿Qué opinas de ello?
d) ¿Cómo lo interpretas en tu práctica docente?

La siguiente imagen muestra las respuestas de uno de los participantes (Imagen 1):

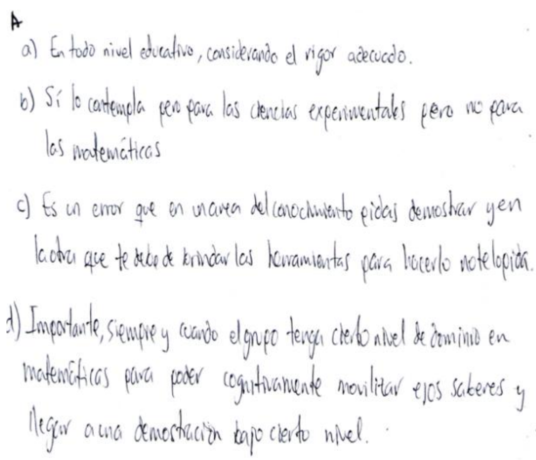

A
a) En todo nivel educativo, considerando el rigor adecuado.
b) Sí lo contempla pero para las ciencias experimentales pero no para las matemáticas
c) Es un error que en un área del conocimiento pidas demostrar y en la otra que te debe de brindar las herramientas para hacerlo no te lo pidan.
d) Importante, siempre y cuando el grupo tenga cierto nivel de dominio en matemáticas para poder cognitivamente movilizar esos saberes y llegar a una demostración bajo cierto nivel.

Imagen 1. Respuestas obtenidas de los asistentes al taller respecto a la demostración y su pertinencia

En términos generales los profesores mencionaron que la demostración es importante en todos los niveles educativos, aunque mencionan que no en todos los niveles debe tener el mismo rigor, así mismo mencionan que en los programas de estudio hacen referencia, en algunos contenidos, a la demostración como actividad de enseñanza y que sería importante que también estuviera presente en otros.

Etapa 2: Valoración de demostraciones alternativas de una proposición

Esta etapa se centra esencialmente sobre la demostración en el contexto escolar. Se les presentaron distintos argumentos opcionales que pretendían demostrar el teorema de Pitágoras. Se les solicitó que desde su punto de vista contestaran cuáles de las opciones (Imagen 2) representaban una demostración del teorema (y cuáles no), una demostración en contexto escolar del teorema (y cuáles no), y cuál les parecía más convincente a ellos y cuál más convincentes para los alumnos, se les pidió justificar su respuesta.

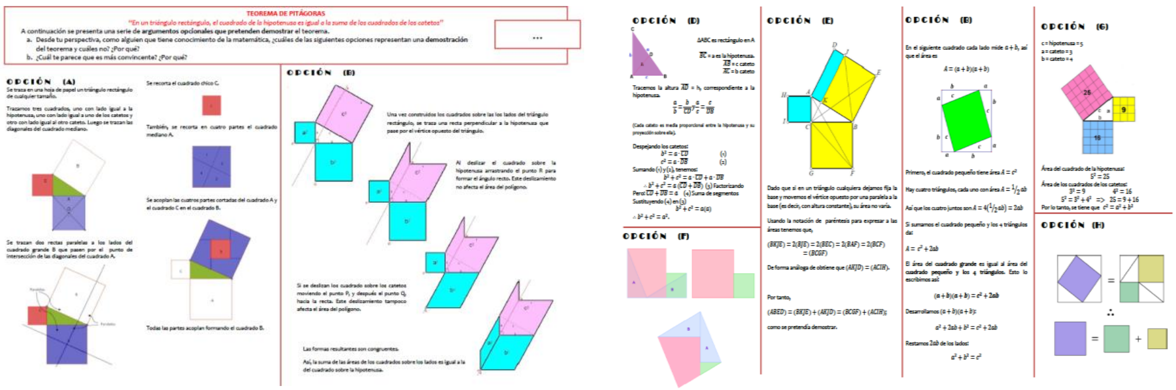


Imagen 2. Distintas opciones sobre la demostración del teorema de Pitágoras presentadas a los profesores durante el taller

Los profesores trabajaron en parejas y después de ponerse de acuerdo argumentaron sus hallazgos (imagen 3).

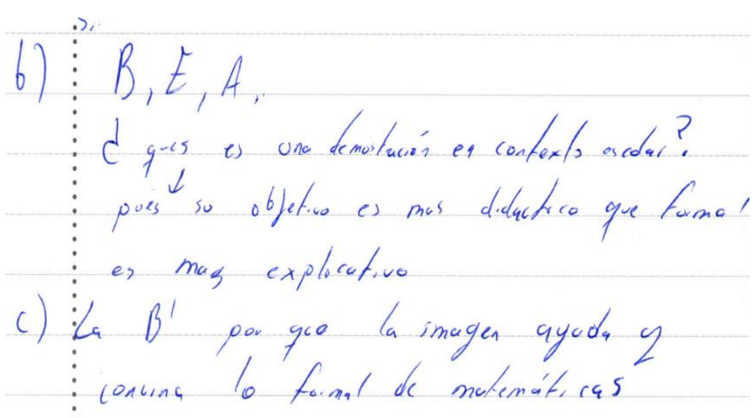

b) B, E, A,
¿ qués es una demostración en contexto escolar?
pues su objetivo es más didáctico que formal
es más explicativo
c) La B' por que la imagen ayuda y
convence lo formal de matemáticas

Imagen 3. Respuestas de los profesores hacia distintas valoraciones alternativas del teorema de Pitágoras.

Etapa 3: Valoración de argumentaciones de estudiantes en una situación de validación

Con esta etapa se cerró el taller al llevar a los participantes hacia la reflexión sobre su papel como profesores ante las argumentaciones de los estudiantes en la clase de matemáticas.

Se les plantea la siguiente situación:

En su clase de geometría la profesora María está trabajando triángulos y sus propiedades. En ese sentido ha preparado un conjunto de tareas con el objetivo de discutir dichas propiedades y el conocimiento matemático asociado a su comprensión. Después de pedirles explorar la veracidad o falsedad del enunciado acerca de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, María ha seleccionado algunas de las respuestas que se les presenta a continuación (Imagen 4):

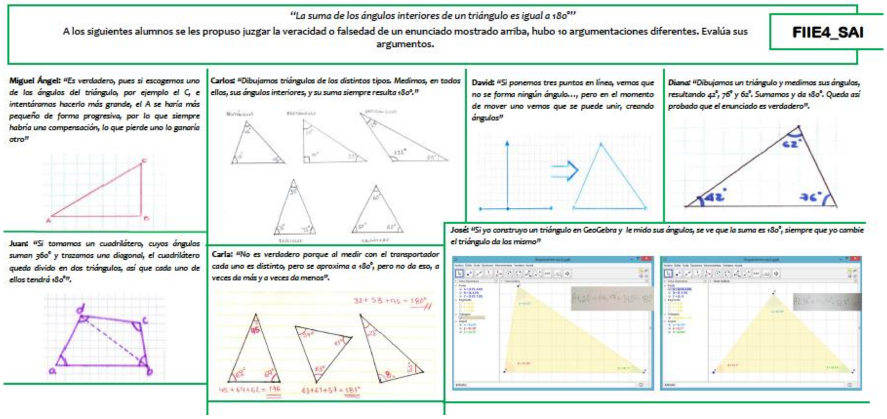


Imagen 4. Distintas argumentaciones de alumnos sobre la afirmación de las sumas de los ángulos interior de un triángulo presentada a los profesores durante el taller

Así mismo se les solicitó que:

1. Para cada uno de los casos de los alumnos identificaran el argumento "Clave" que lo justifica.
2. Indica si consideras Matemáticamente correcto o no el argumento, justificando tu valoración.
3. Para terminar más que valorar si el argumento es falso o verdadero hacer una retroalimentación con los profesores participantes acerca de su propuesta llevándolos a reflexionar sobre el significado percibido de las argumentaciones presentadas por los estudiantes.
4. Los profesores analizaron caso por caso justificando cado uno de los argumentos y valorando los mismo, en este caso se observa como las creencias acerca de la demostración se percibe en las mismas. La siguiente tabla (Tabla 1) muestra la valoración de uno de los equipos de los profesores.

Tabla 1. Valoración presentada por uno de los equipos

Caso	Argumento del estudiante que identificas	Valoración que le otorgas	Otras Observaciones
Miguel Ángel	Si se estaría un punto del triángulo, el ángulo que se deforma es recompensado en el otro de forma proporcional	Creemos que hizo un argumento aceptable	
Carlos	Medir los ángulos de todos los tipos de triángulos y probó siempre daba 180º	También esta es una argumentación aceptada	
Diana	Medir los 3 ángulos del triángulo y probar que da 180º	Es un argumento muy simple, no generaliza mucho	
David	Sabes que tres puntos alineados no forman un ángulo y sabes que al unir los puntos se determina un ángulo llano	Este es un argumento muy profundo.	Conoce que el ángulo llano mide 180º y que si se mueve cualquiera de los puntos, entre los puntos se pueden unir.
Juan	Ya conocen cuanto suman los ángulos interiores de un cuadrilátero y traza una diagonal para dividir en dos triángulos	Esta es una argumentación aceptable	
Carla	Medir los ángulos para probar que no es verdadero	Su argumentación tiene la debilidad de medir ángulos	

Reflexiones finales del taller

El conocimiento didáctico del contenido está profundamente entrelazado al trabajo cotidiano del profesor. En tanto que no se opone al conocimiento teórico que engloba tanto la teoría aprendida por el profesor durante su formación inicial como de las experiencias adquiridas en el trabajo desarrollado a lo largo de la carrera del profesor. Este conocimiento teórico y práctico se desarrolla sobre la influencia de factores relacionados como las experiencias previas de los profesores y el alumno, además de eso por el contexto donde el profesor está insertado.

En este sentido la actividad demostrativa tiene sentido para el profesor dependiendo de factores como sus antecedentes académicos, sus creencias acerca de la importancia de la demostración para él y para él como profesor. La forma tanto de ser llevada a cabo la actividad demostrativa, así como el contenido abordado dependen del conocimiento didáctico del contenido por parte del profesor.

El objetivo de este taller fue reflexionar con los participantes acerca de su conocimiento como profesor de matemáticas ante la demostración en contexto escolar y se logró la reflexión parcialmente, por falta de tiempo. La actividad de la etapa 3 generó mayor discusión, al buscar valorar las argumentaciones de estudiantes en una situación hipotética de validación. En particular, el caso de David fue el más comentado, distinguiéndose en los argumentos presentados por los profesores dos aspectos: a) los profesores que defendían la rigurosidad de la demostración, y por lo tanto, determinado argumento no era aceptable por los errores matemáticos que presentaba y/o los elementos matemáticos obviados, y, b) el grupo de profesores que argumentaban la potencialidad del mismo argumento en términos de las posibilidades que el alumno podría estar visualizando y las generalizaciones que podría, con la ayuda del profesor desarrollar.

Para finalizar podemos comentar que los elementos obtenidos durante el taller nos aportaron información valiosa para el rediseño del mismo el cual podrá ser incorporado dentro de la formación continua de profesores de matemáticas. Actualmente estamos promoviendo su incursión en otros escenarios.

Referencias Bibliográficas

Climent, N. (2005). El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso. Unpublished PhD Dissertation, (Publicada en 2005. Michigan: Proquest Michigan University. www.proquest.co.uk).

Marcelo, C. (2009). Desenvolvimento Profissional Docente: passado e futuro. *S.sifo. Revista de Ciencias da Educacao* 08, 7-22.

Menezes, L. (2004). Investigar para ensinar Matemática: Contributos de um projecto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional de professores (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: Associação de professores de Matemática, Colecção Teses.

Muñoz Catalán, M. C. (2009). El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel. (Publicada en 2010. Huelva: http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/2949).

Moreno G., Ramos, M., & Marmolejo, E., (2015) Concepciones de Profesores de Bachillerato sobre la Demostración Matemática en contexto escolar. En las *Memorias de la XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, ICMI. Disponible en http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem

Ponte, J. P. (1999). Teacher's beliefs and conceptions as a fundamental topic in teacher education In K. Krainer & F. Goffree (Eds.), *On research in teacher education: from a study of teaching practices to issues in teacher education*. Osnabruck, Dutschland: Forschungsintitut fur Mathematikdidaktik.

Ribeiro, C. M. (2010). O desenvolvimento profissional de duas professoras do 1.º Ciclo, envolvidas num grupo de trabalho colaborativo, partindo da modelação das suas aulas de matemática. Tese de Doutoramento, universidad de Hueva. Dpto. Didáctica de las Ciencias y Filosofía.

Schön, D. (1987). *Educating the reflective practitioner: Toward a new design for teaching and learning in the professions*. San Francisco, CA: Jossey Bass.

SEP. (2013). Serie *Programas de estudios Matemáticas*. México: DGB

Sosa, L. & Carrillo, J. (2010). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de matrices en bachillerato In M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo & T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XIV (pp. 569-580). Lleida, España: SEIEM.

Shulman, L. (1986). Those who understand, knowledge growth in teaching. *Educational Researcher* 15(2), 4-14.

NARRATIVAS DE PROFESORES DE SECUNDARIA DE OMETEPEC GUERRERO; ¿CÓMO LLEGUÉ A SER PROFESOR DE MATEMÁTICAS?

Magdalena Rivera Abrajan, Lourdes Soto Velásquez, Raúl Salas Vega
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
mrivera@uagro.mx, love.soto@hotmail.com, rasve@hotmail.com

RESUMEN: Reportamos un avance de una investigación de corte cualitativo que tiene por objetivo buscar las experiencias, desde los relatos de vida de siete profesores de Matemáticas en servicio, que fueron factores importantes que los llevaron a convertirse en los profesores que actualmente son. Los datos se obtuvieron de los relatos de vida profesionales de los participantes y se analizaron a través de un análisis tematizado que permitió identificar aquellos temas cruciales en la definición del proceso. Los temas encontrados fueron: Oportunidad de una estabilidad laboral, Estar frente a grupo, Estudiar la licenciatura en Matemática educativa, Ruptura de vocación, Ser profesor como proyecto de vida.

Palabras clave: narrativas, ser profesor de matemáticas, secundaria

ABSTRACT: We report an advance of a qualitative research that is aimed at finding the experiences, from the life retailing of seven Mathematics teachers who are on active service; these experiences were important factors that allow them to become the professors they are today. The data were obtained from their professional stories and were analyzed by means of a thematic study that allowed identifying those topics which were essential ones to define the process. The found topics were: the opportunity of work stability, to be in front of a group, to take a degree in Mathematics Education, to find the true vocation, to consider being a teacher as a life project.

Key words: retailing, to be a mathematics teacher, junior high school

Introducción

La formación del profesor de matemáticas es un proceso que involucra elementos en interacción, elementos *formales* como: contenidos, enfoques de los planes y programas de estudio, políticas académicas y normas universitarias; y elementos *informales* como: tipos de conocimiento, creencias, actitudes, valores, contextos del aprendizaje, roles, intereses, etc. (Walshaw, 2004, Brown y McNamara, 2005, 2011). Así, se habla de la cantidad y naturaleza de los conocimientos matemáticos que necesitan saber los profesores para enseñar o de las orientaciones pedagógicas que debe conocer para realizar una planeación o realizar la evaluación de los estudiantes (Ball, Lubienski y Mew- born, 2001). Sin embargo, los profesores se enfrentan a la práctica profesional no sólo con su conocimiento matemático y didáctico, sino también con lo "que son", es decir, quiénes son, cómo se ven a sí mismos como maestros en su relación con sus futuros estudiantes y frente a los problemas (Ponte y Chapman, 2008).

Palmer (1997) argumenta que la buena enseñanza no puede reducirse a la técnica ya que proviene de la identidad y la integridad del profesor. El autor sostiene que la complejidad de la enseñanza tiene tres fuentes importantes: contenido, estudiantes y profesor. Las dos primeras fuentes son comúnmente estudiadas, la tercera, que considera la más importante y poco estudiada, habla acerca de la parte subjetiva de la persona donde el cómo soy se vuelve elemento primordial del cómo enseño. Por lo tanto, conocerse a sí mismo es tan crucial para la buena enseñanza como conocer a los estudiantes y el tema.

El estudio de la identidad del profesor de Matemáticas se convierte, en este sentido, como algo primordial, para comprender las prácticas educativas, y las experiencias vividas en el día a día como profesor de matemáticas. Nuestro estudio es de tipo exploratorio y nos interesan encontrar las experiencias que los profesores vivieron, que los llevaron a convertirse en profesores de Matemáticas, así la pregunta que guía la investigación es ¿Cuáles son las experiencias de un grupo de 7 profesores de Matemáticas de secundaria del estado de Guerrero que los llevaron a ser profesores?

Nuestro objetivo es analizar las biografías profesionales de 7 profesores de Matemáticas de secundaria acerca del proceso que los llevaron a ser profesores de Matemáticas, identificando, por medio de un análisis tematizado, aquellas experiencias fundamentales que nos permitirán, más adelante, comprender la configuración de la identidad profesional del profesor de matemáticas.

La identidad profesional

En los últimos años, la identidad se ha convertido en un importante campo de la formación docente, esta importancia se asocia a la idea de que la configuración de la identidad del profesor se muestra como la encarnación tanto del conocimiento de las matemáticas y de la enseñanza de las mismas aunado a factores tales como valores, hábitos, normas, disposiciones y, en general, formas de ser un maestro (Ponte y Chapman, 2008).

Wenger (1998) menciona que la identidad incluye nuestras experiencias y conocimientos, nuestra percepción de nosotros mismos, las percepciones de los otros sobre nosotros, y nuestras percepciones de los demás. Estas percepciones se construyen en nuestras experiencias, a medida que interactuamos con los demás y regula nuestra participación en el grupo, desarrollando creencias, compromisos e intenciones, ajustada a una comunidad en particular.

Para Sfard y Prusak (2005) la identidad de una persona son las historias y relatos que las personas construyen sobre los demás, las historias son la identidad porque dan cuenta de las decisiones y acciones anteriores de los individuos y proporcionan orientación para sus decisiones presentes y futuras.

Nosotros consideramos la identidad del profesor de Matemáticas como un conjunto de relatos significativos sobre sí y en relación a los demás, a través de los cuales se representa como profesor de Matemáticas y sus experiencias adquieren sentido, la identidad profesional de un profesor de matemáticas se expresa en su participación en los procesos de interacción y la colaboración con otros profesores al reflexionar sobre su propia actividad y sobre sí mismos como maestros.

Metodología

Recolección de datos

En las ciencias sociales y la investigación educativa ha sido reciente un aumento en el uso de diferentes formas de investigación narrativa, ya que, entre otras cosas, la narrativa no sólo expresa importantes dimensiones de la experiencia vivida, sino que, más radicalmente, media la propia experiencia y configura la construcción social de la realidad, no es sólo una metodología; es una forma de construir la realidad (Bruner, 1986).

Por la conceptualización de identidad que asumimos en esta investigación y para acceder a los relatos que constituyen la identidad de los profesores de matemáticas recurrimos a la técnica autobiográfica profesional, donde se les pide a los profesores que escriban una narración de cómo llegaron a ser profesores de Matemáticas de secundaria. Además, se les pidió su apoyo para la realización de entrevistas a profundidad posteriores a medida que el estudio lo necesitara.

Participante y contexto

En el marco del programa de la Licenciatura en Matemática Educativa de la Unidad Académica de Matemáticas se les ofrece a profesores de Matemáticas en servicio, con perfil diferente o con carreras truncas, a cursar dicha licenciatura otorgándoles una profesionalización y el perfil deseado para las instituciones educativas de nivel secundaria. Los siete profesores participantes se encontraban en el último semestre de la carrera, cinco de ellos son del municipio de Ometepec, Guerrero y dos de localidades cercanas. Los perfiles de los participantes se muestran en la tabla 1.

Tabla 1. Perfiles de los profesores participantes

Autodefinición	Observaciones
Juana. 3 años de ser profesora de Matemáticas**.** Me considero una persona que lucha por lo que quiere ser hasta lograrlo; como persona soy de carácter fuerte, pero también me gusta servir a quienes me necesitan; como maestra trato de cumplir con el programa de estudios, con mis alumnos estoy dispuesta siempre a ayudarlos, aunque ya no sean horas de clases, con mis compañeros me gusta respetarlos para que me respeten.	La profesora Juana trabajó durante 12 años como prefecta y hace apenas tres como profesora de Matemáticas. Desde pequeña soñó con ser maestra de Matemáticas.
Mariela. 3 años de ser profesora de Matemáticas**.** Soy una persona sociable que me gusta convivir, amo a mi familia, soy responsable, soy idealista y siempre busco el lado bueno de las cosas, me gusta leer, escuchar a los demás, sin emitir juicios.	Sus padres son profesores, los considera su ejemplo y la motivaron a ser profesionista.
María del Carmen. 15 años de ser profesora de Matemáticas. Me consideró una persona que cada día que amanece aprende cosas nuevas y siempre busco lo positivo a la vida. Responsable, paciente, tolerante, capaz de vencer cualquier obstáculo.	Su gusto hacia las Matemáticas fue a partir de la secundaria, al tener una profesora que enseñaba y explicaba con dedicación y paciencia.
Martín. 18 años de ser profesor de Matemáticas**.** Me defino como un hombre poco serio y responsable. Trato de ser metódico y ordenado en mi trabajo, en la escuela, casa o familia, me gusta respetar, soy muy tolerante, paciente, me cuesta trabajo ser sociable. Intento conseguir mis objetivos con firmeza y esfuerzo.	Estudió Matemáticas porque le parecieron un reto, al tener compañeros de clases que obtenían excelentes calificaciones y él no.
Reina. 11 años de ser profesora de Matemáticas**.** Soy de carácter fuerte pero también soy muy sociable, me gusta hacer amistad con personas desconocidas, además soy responsable de mis actos, trato de ser como persona mejor cada día, a diario aprendo algo.	Su proyecto de vida era ser ingeniero civil, pero por asuntos familiares estudió para ser profesora de primaria. Labora como administrativo en una escuela secundaria y es ahí donde comienza a cubrir la asignatura de Matemáticas.
Víctor. 17 años de servicio. Como profesor soy amigo, guiador de los conocimientos significativos. Me gusta participar, proponer ideas y sobretodo cumplir con todo.	Se formó la idea de ser profesor de Matemáticas a raíz de querer imitar a su maestro que le parecía muy bueno dando clases.
María Luisa. 20 años de servicio. Con mis alumnos me siento identificada, mi acercamiento hacia ellos me ha permitido tener mayor comunicación, permitiéndome apoyar a los alumnos que, de alguna manera, tienen problemas de aprendizaje.	Es contador público.

Análisis temáticos de datos

Para el análisis cualitativo de los datos se transcribieron textualmente las narraciones de los profesores y recurrimos al análisis temático siguiendo las etapas mencionadas por Braun y Clarke (2006,1012) quienes consideran seis etapas que se describen a continuación: (1) familiarizándose con los datos, (2) generando códigos iniciales, (3) buscando los temas, (4) revisando temas, (5) definiendo y nombrando los temas, y (6) produciendo el reporte.

El proceso del análisis está sintetizando en la tabla 2. Hasta el momento de este reporte solo se tiene concluida hasta la etapa 4 sin embargo en la tabla se describe lo que se hará para las etapas 5 y 6.

Tabla 2. Fases del análisis temático

Fases del análisis	Descripción de la Fase
Fase 1: familiarizándose con los datos	Las entrevistas fueron transcriptas en su totalidad por los autores de la investigación. Se leyeron repetidamente las transcripciones de las entrevistas para familiarizarme con los datos. Se realizó un primer acercamiento a aquellos extractos de las entrevistas donde los profesores narraban aquellas experiencias vividas hasta llegar a ser profesores de matemáticas.
Fase 2: Generando códigos iniciales	Cada entrevista fue analizada por cada uno de las investigadoras por separado. Se identificó los extractos de las entrevistas, donde los profesores narraban aquellas experiencia que consideraban significativas para llegar a ser profesores de matemáticas. Se propuso una primera codificación.
Fase 3: Buscando los temas	Se revisó nuevamente los datos proponiendo una segunda codificación, por parte de los tres autores y se propusieron temas posibles a las familias de códigos propuestas regresando a los datos, si era preciso, para verificar la correcta asignación de los temas potenciales.
Fase 4: Revisando los temas potenciales	Con los temas potenciales identificados en la fase anterior, discutimos su correspondencia con los datos, reagrupando algunos temas y viendo la posibilidad de subtemas. Establecimos agrupaciones de temas iniciales.
Fase 5: Definiendo y nombrando los temas	Se establecerán, en conjunto, los nombres de los temas analizando los códigos y proponiendo nombres que definan finalmente los mismo con claridad, así mismo se hará su descripción.
Fase 6: Produciendo el reporte	Finalmente se producirá el reporte, para ser presentado y comunicado a la comunidad.

Algunos resultados

Durante el análisis tematizado se localizaron cinco temas que agruparon 82 códigos, los temas encontrados fueron: Ruptura de vocación, Estudiar la licenciatura en Matemática educativa, Oportunidad de una estabilidad laboral, estar frente a grupo y Ser profesor como proyecto de vida.

En la tabla 3 presentamos los temas potenciales encontrados y presentamos algunos extractos de las narrativas que sustentan los resultados encontrados hasta este momento.

Tabla 3. Temas encontrados en las narrativas de los profesores

Temas	Evidencia
Ruptura de Vocación	Trabajaba en mi área y tuve problemas laborales, me quedé sin trabajo, ante esto y la insistencia de mi madre le proporcioné mis documentos para que me dejara su plaza como profesora (Mariela) Por falta de recursos no tuve la oportunidad de ingresar a la preparatoria como era mi intención, para después ingresar a la universidad y ser médico, esto me llevó por el camino de la docencia como única oportunidad y última (Pedro)
Estudiar la licenciatura en Matemática educativa	Lo mejor fue formar un grupo de licenciatura de Matemáticas Educativa en el cual todavía estamos (Juana) He tomado los cursos de formación continua ofrecidos por la SEP, diplomados, desarrollo humano y la enseñanza de las Matemáticas en la escuela secundaria, formar un grupo y estudiar la licenciatura en Matemáticas Educativa me lleva a ser mejor profesora (María del Carmen)
Oportunidad de una Estabilidad Laboral	Me dieron una carta de recomendación para alguien que se encontraba en la ciudad de México con un cargo en la SEP con su valioso apoyo me mandan a una secundaria técnica a cubrir 8 horas de Matemáticas (Víctor) Después de dos años de trabajo en mi área me invitaron a dar clases de Contabilidad en el CETIS de la Capital del Estado (Chilpancingo), lo cual me despertó el interés por la docencia y me dio una estabilidad (María Luisa)
Estar frente a grupo	Después de dos años, logré mi objetivo, de tener horas frente a grupo, pero ahora mi reto era prepararme para hacer un buen papel, ya que mi perfil no era de docente, y no contaba con la preparación pedagógica y didáctica que tienen los maestros de secundaria (María Luisa). Creo que de ahí empecé a sentirme profesor. Puesto que a pesar de todas las carencias del lugar me sentía a gusto con los niños y con la gente del lugar, aún con características y costumbres diferentes (Pedro).
Ser profesor como proyecto de vida	En tercer grado de prepa me dio clases un buen maestro de matemáticas, comencé a imitarlo, me fui formando la idea de ser un profesor de matemáticas (Víctor) Por cuestiones económicas no podía estudiar la prepa esto me llevó por el camino de la docencia como única oportunidad (Pedro)

Reflexiones finales

En este punto de nuestra investigación solo podemos presentar algunas reflexiones muy generales sobre la configuración de las identidades profesionales de los profesores, con base en la tematización encontrada.

Las identidades profesionales están compuestas por narrativas cambiantes sobre sí mismo, a través de las cuales uno se representa, representa a los demás y sus propias experiencias adquieren sentido, particularmente, los profesores de matemáticas que no son formados para ello, experimentan circunstancias que los llevan a la confrontación de quienes son, que quieren ser y sus metas profesionales futuras, tomando decisiones radicales en su vida personal y profesional.

Los profesores participantes cuando construyeron sus relatos en torno a las experiencias que los lleva a ser los profesores de Matemáticas, lo hacen desde una mirada del presente que rescataba y reconstruía fragmentos del pasado. Su ahora estaba mediado por el recuerdo (la reconstrucción) de lo vivido y era desde esos episodios, en este caso vinculados con sus experiencias y relaciones personales y profesionales desde donde hilvanaban los significados que daban sentido al aprendizaje de su profesión a la configuración de su identidad como profesores de Matemáticas.

Un elemento importante en la asunción del rol de profesor es la parte académica, donde a pesar de los años que han estado como profesores y del reconocimiento de los demás como profesores de Matemáticas ellos no se sienten profesor de Matemáticas, por no tener los estudios adecuados para tal fin, por lo que el regreso a la escuela y la culminación de sus estudios es un elemento que ellos consideran necesario para ser profesores de Matemáticas.

Referencias bibliográficas

Ball, D. Lubienski, S. y Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problems of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), Handbook of research on teaching, 433-456. Washington, DC: AERA.

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*, 77–101. http://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Braun, V., & Clarke, V. (2012). Thematic analysis. In H. Cooper (Ed.), *APA Handbook of Research Methods in Psychology* (Vol. 2, pp. 57–71). Washington, DC: American Psychological Association. http://doi.org/10.1037/13620-004

Brown, T y Mcnamara, O. (2005). *New teacher identity and regulative government: the discursive formation of primary mathematics teacher education.* New York: Springer

Brown, T. y McNamara, O. (2011). *Becoming a mathematics teacher. Identity and identifications.* New York: Springer.

Bruner, J. (1986). *Actual minds, possible worlds*. London: Harvard University Press.

Ponte, J. y Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. *Handbook of International Research in Mathematics Education*.

Palmer, P. (1997) *The courage to teach: Exploring the inner landscape of a teacher's life*. San Francisco Ca.: Iossey-Bass.

Sfard, A. & Prusak, A. (2005). Telling identities: In search of an analytic tool for investigating learning as a culturally shaped activity. *Educational Researcher*, *34*(4), 14–22.

Walshaw, M. (2004). Pre-service Mathematics teaching in the context of schools: an exploration into the constitution of identity. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 7, 63-86.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity,* 2–3. Cambridge: University Press.

EL SEMINARIO DE PRAXIS E IDENTIDAD DOCENTE MATEMÁTICA, UN ESPACIO PARA EL APRENDIZAJE

José Trinidad Ulloa Ibarra, Gessure Abisaí Espino Flores, David Zamora Caloca
Universidad Autónoma de Nayarit. (México)
jtulloa@uan.edu.mx, abisai_8282@hotmail.com, david.zamora@uan.edu.mx

RESUMEN: Damos evidencia del desarrollo del Seminario de Praxis e Identidad Docente Matemática, cuyo principal objetivo es el de ser un espacio de encuentro entre los investigadores de matemática educativa y docentes del nivel medio superior del estado de Nayarit, México, el cual ha trascendido a otros niveles educativos y a docentes en otros estados de la República Mexicana contando con registros de 94 docentes en la conferencia virtual en directo. Se realizó un análisis de las participaciones en los foros de discusión y de las hojas de cotejo que los participantes registrados elaboran en cada sesión, percibiéndose un cambio notable en su discurso, el cual sin duda está repercutiendo en su quehacer docente.

Palabras clave: seminario, praxis, identidad docente

ABSTRACT: We provide evidence of the Praxis and Mathematical Teaching Identity Seminar, whose main objective is to propitiate the meeting of educational mathematics researchers and teachers of the upper middle level of Nayarit State in Mexico. It has been extended to other educational levels and to teachers of other states from the Mexican Republic, with records of 94 teachers in the virtual live conference. An analysis of the participations in the discussion forums and of the comparison sheets that the registered participants elaborated in each session was carried out; perceiving a remarkable change in the teacher's speech, which undoubtedly is impacting on his teaching work.

Key words: seminar, praxis, teaching identity

Introducción

La formación y actualización de docentes en el Nivel Medio Superior (NMS) de Nayarit, México es una asignatura que a pesar de ser considera como necesaria en la Reforma Integral del Bachillerato, se encuentra a la fecha más en el discurso que en la realidad, con el propósito de contribuir a ese proceso tan importante en la formación y actualización de los docentes, se inició el Seminario de Praxis e Identidad Docente Matemática (SPIDM) cuyo objetivo es el de conocer las investigaciones y trabajos que realizan los investigadores en Matemática Educativa en el país y en América Latina y ponerlos en contacto con el docente cuya labor en el aula puede beneficiarse de los trabajos de punta en el área. Después de 20 meses en los que se ha logrado la participación de docentes no sólo del estado de Nayarit, sino que se han incorporado de otros estados de la República Mexicana como Chiapas, Tabasco, Nuevo León, Baja California, Sonora, Jalisco y Michoacán se cuenta con evidencias que permiten inferir que la metodología de trabajo ha permitido el intercambio de ideas, la actualización de docentes, el intercambio de experiencias entre investigadores y maestros enriqueciendo de esta manera el trabajo de ambos, así como la utilización de metodologías específicas para problemas específicos del quehacer docente en el bachillerato.

La problemática

Hasta antes de la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS), los docentes del Nivel Medio Superior en el estado de Nayarit y en general en todo México eran contratados con base en el perfil profesional, aunque en muchos de los casos no se respetaba, lo que origina una problemática que se acentúo con el transcurso del tiempo. Sin embargo, la Secretaría de Educación Pública (SEP), con la Reforma Integral a la Educación Media Superior (RIEMS) en 2008, emprendió acciones de reorientación en este nivel educativo, no sólo en materia curricular (SEP, 2008) sino también en materia de perfiles docentes (SEP, 2008 y 2013).

Si bien es cierto que la RIEMS en el país ha cambiado muchos aspectos como el de la contratación de docentes a través del examen de ingreso a la docencia, la planta docente contratada con anterioridad a la reforma de manera general desconocen técnicas pedagógicas y didácticas para el mejor desempeño de la función docente, motivo por el cual consideramos urgente la implementación de programas de formación, capacitación y actualización y con ello contribuir a la profesionalización de los profesores de matemáticas.

Con respecto a la profesionalización de la actividad docente, Darling y Bensford (2005, p. 375) señalan que “la profesionalización no constituye el estado final al que se encaminan las ocupaciones, sino que es más bien un proceso continuo en persecución de un ejercicio útil y responsable de la misma”. Esta idea de proceso, alejada del concepto tradicional y clásico de comparación con las profesiones más valoradas socialmente (abogacía, medicina, etc.), reclama una atención hacia aspectos del desarrollo profesional de los docentes. Como adultos inmersos en la sociedad del conocimiento, más allá del rol tradicional de transmisores de contenidos, se demanda que los profesores actúen como guías del conocimiento de sus alumnos, como orientadores del proceso de aprendizaje.

Un aspecto interesante de la profesionalización, como nos recuerdan Zeichner y Noffke, (2001) tiene que ver con su relación con la investigación de los profesores. Nos advierten que si la profesión docente, en los diferentes niveles educativos, quiere abandonar la infancia y hacerse adulta como profesión, los profesores necesitan asumir la responsabilidad adulta de investigar, de forma sistemática y crítica, su propia práctica.

En la concepción flexible de la profesionalización la clave está en la cultura de colaboración que surge en las comunidades de práctica. Así, dado que el conocimiento científico base sobre la educación –entendido en el sentido que tiene en las ciencias naturales- presenta problemas epistemológicos, se promocionan comunidades de profesionales que trabajan colaborativamente. Estas comunidades profesionales trabajan en sus contextos particulares, sobre sus áreas específicas, compartiendo sus problemas e inquietudes de forma dialogada y con vistas a la mejora de su labor docente. Esta mejora de su función docente se produce mediante la construcción compartida de los significados de su práctica profesional (Eirín, García y Montero, 2009).

La necesidad de profesionalización de la enseñanza, la formación y actualización docente se fundamenta en varias razones. La primera está en la percepción de severas deficiencias dentro del modelo tradicional de enseñanza de profesores, lo que en el NMS adquiere connotaciones más profundas, debido a que la mayoría de los profesores son profesionistas contratados en el mejor de los casos por su perfil profesional en que se incluyen varios cursos de matemáticas. La segunda razón se sustenta en la fuerte necesidad de mejorar y reformar la educación para cumplir con los retos establecidos en la RIEMS para cumplir con los retos que debe enfrentar la educación en una sociedad en constante cambio. En tercer lugar, se tiene la creencia en los beneficios de la modernidad, tal como el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

Planteamiento del problema

Ya se mencionó que los docentes del nivel medio superior en el estado de Nayarit tienen una cultura matemática apegada a la profesión que estudiaron pero que, de manera específica, ésta es insuficiente para lograr un desempeño docente acorde a los planteamientos de la RIEMS, por ello se propone aproximar los proyectos de investigación en matemática educativa a la práctica docente y así propiciar el desarrollo de las competencias docentes relativas a la innovación educativa, entre otras.

Con el desarrollo del proyecto se pretende responder la pregunta ¿Las acciones que se generan en el Seminario, contribuyen a la formación del docente y permiten la construcción colaborativa del conocimiento matemático?

¿Qué es el Seminario de Praxis e Identidad Docente Matemática?

El Seminario de Praxis e Identidad Docente Matemática, SPIDM surge a iniciativa de la Red Estatal de Investigadores del Nivel Medio del Estado de Nayarit, México con el apoyo del Cuerpo Académico de Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Nayarit y el Centro de Investigación en Matemática Educativa (CIMATE) Nayarit.

El SPIDM es un espacio de concurrencia y confrontación de las perspectivas del docente y el investigador educativo en el área de matemáticas para avanzar en su profesionalización aprovechando el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. La matemática, como una de las disciplinas que juega un papel primordial en la formación intelectual del alumno y que incide directamente sobre las estructuras mentales, requiere un proceso de enseñanza y aprendizaje adecuado que facilite al estudiante del NMS un desarrollo lógico matemático apropiado, pero que a la vez satisfaga sus necesidades. Partiendo de las premisas anteriores, cabe peguntarse: ¿Cuál es el papel que desempeñan las TIC en el ámbito educativo en general?, ¿Cuál es la relación TIC y enseñanza de la matemática en el nivel de Educación Media Superior?, ¿Cómo aplicar las TIC en la enseñanza de la matemática? Atendiendo a estas interrogantes, y con el propósito de dar respuestas desde la academia a algunas de estas interrogantes, es que se plantea el Seminario de Praxis e Identidad Docente Matemática (SPIDM), espacio que aprovechando la virtualidad ha propiciado la participación de investigadores, docentes y personas interesadas para externar dudas e inquietudes a las que seguramente el colectivo dará respuesta.

El Seminario está diseñado en la modalidad de videoconferencia, en la primera parte de cada sesión se realiza la conferencia e inmediatamente después se inicia un diálogo entre un profesor y el investigador en Matemática Educativa, alrededor de una problemática concreta en la que el investigador ha obtenido resultados publicados en artículos o tesis de posgrado. Con la finalidad de asegurar los diálogos se invitan a docentes para que cuestionen al conferencista ya que se ha observado que muchos docentes no pueden participar de manera sincrónica.

En la segunda parte, se responden preguntas de los participantes (ya sea en forma presencial, vía internet, videoconferencia o teléfono) en torno a la temática en cuestión. Todas las participaciones quedan registradas en un foro que permanece abierto para la continuación asincrónica de las discusiones, ya que, poco tiempo después de realizada la sesión presencial por videoconferencia, se pone a disposición de los interesados el video del diálogo.

Puesto que ni la Red Estatal de Investigadores, ni el Cuerpo Académico, ni el CIMATE Nayarit cuentan con infraestructura para transmitir las videoconferencias se recurrió a la utilización del servicio de Google+ (Google Hangouts) con el que se pueden establecer salas de videoconferencia y ésta queda alojada directamente en YouTube con lo que se garantiza el acceso asíncrono para aquellos participantes que no pueden estar de manera sincrónica. Los materiales que se utilizan para las actividades quedan a disposición en la página de la Red Estatal de Investigadores.

Los objetivos que se establecieron para este proyecto son:

1) Transformar la práctica docente por medio de la actualización de conocimientos matemáticos
2) Propiciar la vinculación entre la investigación en Matemática Educativa y la práctica docente, considerada como eje fundamental de la profesionalización de la docencia.
3) Aportar información pertinente, basada en trabajos de investigación en matemática educativa, para sustentar el diseño de secuencias de aprendizaje en los diferentes planteles del nivel medio superior.
4) Crear una comunidad de aprendizaje en la que los profesores intercambien sus propuestas, bien fundamentadas, en torno a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Perspectivas teóricas

El sustento para el desarrollo del trabajo se centró en la Socioepistemología y en la construcción colaborativa del conocimiento. La primera de ellas nos proporciona el fundamento para el estudio del trabajo en grupos sociales ya que se plantea el examen del conocimiento matemático, social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión (Cantoral & Farfán, 2004). Mientras que, las "*actividades de aprendizaje colaborativo*" no se comprometen directamente en la construcción del conocimiento, sino que se centran en actividades que se espera que lleven a la construcción del conocimiento. Se articulan actividades, tareas de *aprendizaje colaborativo*, entendiendo por el mismo "*una metodología de enseñanza basada en la creencia de que el aprendizaje se incrementa cuando los estudiantes desarrollan destrezas para aprender y solucionar los problemas y acciones educativas en las cuales se ven inmersos*" (Gros, 2008, citado en Herreros, 2009). La investigación en matemática educativa en nuestro país cuenta con más de dos décadas en las que se han producido información suficiente y valiosa que aporta un marco referencial vasto. Los investigadores manifiestan disponibilidad y entusiasmo por establecer interacción con los profesores del nivel medio superior.

Metodología

Queremos tender puentes entre el docente y el investigador para ello planteamos seis fases:

Figura 1. Metodología de la ejecución del Seminario

La primera fase generalmente se determina con base en las temáticas que impactan la reforma y de contar con disponibilidad de algún investigador de la matemática educativa que esté desarrollando trabajos acordes al tema, con lo cual se finaliza la búsqueda, acordándose luego la sesión de trabajo. La videoconferencia se lleva por medio de Google Hangouts, al término de la cual se cuenta con un panel de dialogantes que externan al investigador dudas, posteriormente se activa el foro para la participación asincrónica

Retos

- Hacer llegar el Seminario a un número mayor de profesores, mediante invitación directa.
- Lograr la participación de las academias de matemática de los planteles del NMS del estado de Nayarit.
- Crear un repositorio de consulta con los materiales que se trabajen en cada una de las sesiones.
- Propiciar el uso responsable de los resultados de investigación en matemática educativa que los investigadores pongan a disposición del Seminario.
- Lograr y consolidar la participación de diferentes directivos de áreas académicas y de apoyo para consolidar la institucionalización del Seminario.

Resultados

Con base en 20 sesiones del SPIDM se inició el análisis de la influencia del seminario en el discurso matemático de los profesores, se revisaron las participaciones de los foros en tres fases. En la primera se estudiaron las características generales de todas las sesiones: el número de participantes y el número de participaciones de cada uno de ellos, así como la interacción. En la segunda se realiza el análisis de 2 foros de discusión, uno de cada ciclo, para analizar con más detalle el tipo de participación en el proceso de construcción de conocimientos y, en una tercera, se observaron las intervenciones de un participante habitual y se describió la evolución del lenguaje para crear conocimiento, así como los tipos de orientación cognitiva que adopta hacia los demás. Uno de los casos representativos de la participación en los foros es el relativo a la tercera sesión del primer ciclo del seminario. Esta conferencia se denominó: Los laboratorios virtuales de matemáticas en el nivel medio superior de México, impartido por el Dr. Jaime Arrieta Vera de la Universidad Autónoma de Guerrero. En uno de los tres foros que se alojaron en http://spidm.foroactivo.mx/t8-laboratorios-3, se registraron participaciones de mucho interés como el de la profesora Paty que escribió que para el éxito de los laboratorios virtuales “son indispensables los diseños de aprendizaje, donde de forma secuencial y objetiva se concreten las competencias a desarrollar, el propósito de aprendizaje, cómo se alcanzará y enfocado a los diversos tipos de aprendizajes, recordemos que los grupos de clases no son homogéneos y por tanto debe considerarse; un factor importante involucrar saberes previos y centrar el aprendizaje en los estudiantes”.

La evaluación específica de los foros, se lleva a cabo a través de una rúbrica y una lista de cotejo. Ambos instrumentos se han conservado sin modificaciones significativas de un Seminario al otro. La elección de la rúbrica se debe a que esta herramienta tiene como principal ventaja la posibilidad de mostrar a los agentes participantes del proceso, lo que se espera de ellos para lograr el desarrollo en una situación óptima (Gómez, 2007), permitiendo que cada uno haga un análisis de hacia dónde debe enfocar sus propios esfuerzos.

Estos materiales lo mismo que las indicaciones generales se encuentran disponibles en la página del seminario: http://enlace100.net/seminario.htm y consisten en:

- Reporte de Lectura
- Lineamientos para la participación en el foro
- Auto Rúbrica Foro
- Guía para hacer el ensayo
- Formato de Inscripción
- Tutorial para video – conferencia

Como ya se citó anteriormente, los videos quedan alojados en YouTube, se enumeran algunas de las conferencias en relación con el número de vistas:

- La formación de docentes en matemáticas para el nivel medio superior en el marco de las reformas. 421 vistas
- Aprender matemáticas participando en prácticas socialmente compartidas. 1,020 vistas
- La modelación en el aula como estrategia de aprendizaje. 401 vistas
- Los exámenes estandarizados. 219 vistas

- Docencia, Investigación y Práctica.209 vistas
- Aula extendida y cultura: Elementos para el cambio educativo. 102 vistas
- Una alternativa de enseñanza de la matemática para estudiantes con deficiencia visual. 168 vistas
- Enseñar Matemáticas a través de la Modelación y Simulación Computacional: teoría y realidad en el aula escolar. 265 vistas

Conclusiones

El Seminario SPIDM ha aglutinado a los docentes de matemáticas del NMS de Nayarit y sin ser un objetivo se han unido docentes de otros estados de la república mexicana. Los foros de discusión constituyen un espacio para el fortalecimiento del pensamiento crítico y el aprendizaje colaborativo; en ellos se generan actitudes de autonomía, responsabilidad e iniciativa, y se desarrollan habilidades de solución de problemas y se construye conocimiento, lo cual redunda en una actualización de los docentes participantes. En los foros se han registrado 32 participantes, lo que constituye un buen número, con el transcurso de las sesiones se observa un cambio en las actitudes y aptitudes de ellos. Del análisis realizado se desprende que los foros de discusión asíncronos constituyen un medio que permite describir la evolución de la calidad de la interacción docente - investigador en la construcción colaborativa de conocimiento.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. & Farfán, R. (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didatique des Mathématiques*, 24 (2.3), 137 – 168.

Darling, H. y Bensford J. (Eds.) (2005). *Preparing teachers for a changing world: What teachers should learn and be able to do*. Hoboken-New Jersey: Jossey-Bass/Wiley.

Eirín, R., García, H. y Montero, L. (2009). Desarrollo profesional y profesionalización docente. perspectivas y problemas. Profesorado. *Revista de currículum y formación del profesorado*, 13(2), 1-13.

Gómez, A. (2007). Evaluación en actividades con uso de tecnología. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Herreros, M. 2009. Construcción del conocimiento. Investigación en entornos digitales: enfoque sociocultural. Recuperado el 10 de febrero de 2016 de https://mherrena.wordpress.com/tag/construccion-colaborativa-del-conocimiento/

Secretaría de Educación Pública (2008). Acuerdo 442, por el que se establece el Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de la diversidad. Diario Oficial de la Federación.

Secretaría de Educación Pública (2013). Acuerdo número 712 por el que se emiten las Reglas de Operación del Programa para el Desarrollo Profesional Docente. Diario Oficial de la Federación.

Zeichner, K. M., y Noffke, S. E. (2001). Practicioner Research. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching*. New York: McMillan. 298-330.

EL PROFESOR DE BACHILLERATO FRENTE A LOS PROBLEMAS DE GEOMETRÍA: UN ESTUDIO DE CASOS

Arcelia Cecilia Moreno Verdugo, José Luis Soto Munguía, Ana Guadalupe del Castillo Bojórquez
Universidad de Sonora. (México)
arcelia103@outlook.com, jlsoto@mat.uson.mx, acastillo@mat.uson.mx

RESUMEN: Se reporta aquí una investigación cualitativa sobre las estrategias heurísticas y las habilidades relacionadas con el control, que muestran profesores de matemáticas del bachillerato mexicano (estudiantes de 16-18 años), al resolver un problema de Geometría. El trabajo está basado en las contribuciones teóricas de Alan Schoenfeld sobre la resolución de problemas, y está enmarcado en los retos planteados por los planes y programas de estudio de bachillerato vigentes en México, al profesor de matemáticas de este nivel educativo. El problema fue abordado por dos profesores de Geometría durante una entrevista semi-estructurada basada en tareas. Ambos profesores mostraron recursos heurísticos limitados y ninguno de ellos pudo verificar apropiadamente la solución encontrada.

Palabras clave: resolución de problemas, profesores, geometría

ABSTRACT: This paper deals with a qualitative research on heuristic strategies and control related skills that Math teachers of Mexican high school (16-18 year-old students) show when solving a problem of Geometry. The work is based on Alan Schoenfeld's theoretical contributions on problem solving. It is framed in the challenges posed by Mexican high school plans and programs, to mathematics teachers of this educational level. The problem was addressed by two Geometry teachers during a task-based semi-structured interview. Both teachers showed limited heuristic resources and none of them could properly verify the found solution.

Key words: problem-solving, teachers, geometry

Introducción

La resolución de problemas es considerada por muchos como la esencia de las matemáticas, y lo ha sido a lo largo de su desarrollo, pues desde tiempos remotos los problemas han sido el motor para la generación y el refinamiento de los conceptos matemáticos. La formación de estudiantes que puedan resolver problemas de su vida cotidiana, ha sido uno de los objetivos generales de la educación para la vida. Particularmente en los planes y programas de estudio de matemáticas, vigentes para el bachillerato mexicano desde el año 2008, se privilegia la resolución de problemas en el aula. La Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS) presupone que el profesor transformará sus prácticas docentes, dejando de ser un expositor de conceptos y procedimientos matemáticos para convertirse en un mediador y conductor de los procesos de resolución de problemas.

Sin embargo, la importancia conferida a la resolución de problemas matemáticos en el salón de clases no se corresponde ni con el papel que los problemas matemáticos han jugado en el desarrollo histórico de las matemáticas, ni con el objetivo educativo general antes mencionado. Los profesores han tenido serias dificultades para modificar sus prácticas docentes, en la dirección señalada por la RIEMS; las causas que pueden explicar estas dificultades son muy diversas, pero una pregunta básica que nos ha interesado es: ¿cómo resuelve los problemas matemáticos el profesor mismo?

La investigación reportada aquí, ha tenido el propósito de responder parcialmente la pregunta antes mencionada, por lo menos en lo que se refiere a las estrategias que el profesor utiliza y a las decisiones que toma durante el proceso de resolución de un problema. Por ello nos hemos planteado la pregunta de investigación: ¿qué estrategias heurísticas y qué habilidades de control muestran los profesores al resolver problemas?

Marco conceptual

Para llevar a cabo la investigación, se usaron como referencia teórica las contribuciones de Alan H. Schoenfeld sobre resolución de problemas, principalmente las que ha integrado en su libro más conocido (Schoenfeld, 1985), en el que identifica cuatro categorías del conocimiento y del comportamiento, que entran en juego durante el proceso de resolución de un problema. Dichas categorías son:

1. Recursos. Son los conocimientos matemáticos que posee un individuo y que puede utilizar cuando resuelve un problema (hechos matemáticos, conocimientos intuitivos, procedimientos algorítmicos, etc.)
2. Heurísticas. Son las estrategias y técnicas que permiten progresar cuando se intenta resolver un problema (dibujar figuras, adoptar una notación apropiada, aprovechar problemas relacionados, reformular el problema, etc.)
3. Control. Son las decisiones globales con respecto a la selección y aplicación de los recursos y las heurísticas (planeación, monitoreo, evaluación, toma de decisiones, etc.).

4. Sistemas de creencias. Es la visión del mundo matemático que posee el individuo y que determina el uso que hará de las primeras tres categorías (creencias acerca de sí mismo, de la matemática, de los problemas matemáticos, etc.)

Nuestro estudio se ha centrado en la segunda y la tercera de las categorías anteriores. Hemos puesto menos atención a los recursos y a las creencias; porque, en relación con la primera categoría, el problema planteado es de Geometría y los profesores observados son ambos profesores de este curso y porque, en relación con la última categoría, las creencias no son directamente observables durante la resolución de un problema.

Método

El estudio es de carácter cualitativo, en el que participaron dos profesores de matemáticas de bachillerato (que llamaremos aquí A y B), ambos con más de 20 años de experiencia docente, egresados de Ingeniería Química y con estudios de posgrado en educación. Al momento de la investigación, ambos impartían el curso de Geometría. A los dos profesores se les planteó el mismo problema para que lo resolvieran a lápiz y papel, y se diseñó una entrevista semi-estructurada, basada en tareas (Maher y Sigley, 2014), para observar el proceso de resolución; las dos entrevistas fueron grabadas en video y tuvieron una duración aproximada de una hora en cada caso.

El problema ha sido seleccionado tomando en cuenta las características siguientes:

a) Que el problema, siendo no rutinario, pueda resolverse con los recursos a enseñar en un curso de Geometría del bachillerato.
b) Que sea un problema de los que Polya (1965) llama “por resolver”, que son los que se plantean con mayor frecuencia en los cursos de bachillerato.
c) Que se preste para ser resuelto con diversas estrategias.

Después de plantear algunos problemas geométricos a estudiantes universitarios, para verificar si cumplían con las características establecidas, se eligió el problema siguiente:

Problema. En la figura siguiente (Figura 1), $ABCD$ es un cuadrado de lado 3, la circunferencia es tangente a dos de los lados de este cuadrado y pasa por el vértice del cuadrado de lado 1. Encuentre la medida del radio del círculo.

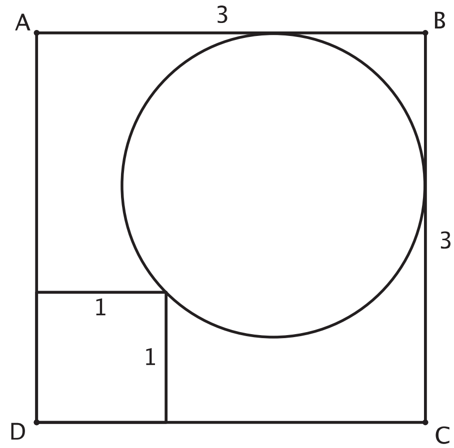


Figura 1.

Antes de plantear el problema a los profesores, lo hemos resuelto de todas las formas posibles, con el propósito de confirmar el criterio c) y de facilitar la intervención de los entrevistadores durante el proceso de resolución del problema. Diez estrategias de resolución han sido identificadas y agrupadas según la heurística inicial: 1) Descomposición de la diagonal BD (seis variantes), 2) descomposición de un lado del cuadrado $ABCD$ (dos variantes) y 3) descomposición en otras figuras del cuadrado $ABCD$ (dos variantes).

Discusión de los resultados

El análisis del proceso de resolución de los profesores se hace por fragmentos tomados de la transcripción de la entrevista, los cuales fueron elegidos de acuerdo con la toma de decisiones respecto al cambio de estrategias. Así mismo, hemos construido un esquema de la estrategia general para cada uno de los profesores A y B, comparando este esquema con el propuesto por Schoenfeld para el resolutor ideal (Schoenfeld, 1985). En dicho esquema aparecen cuatro etapas, a saber: el análisis, la planificación, la exploración, la implementación y la verificación de la solución.

Profesor A

El proceso de resolución del profesor A fue dividido en cuatro fragmentos, ya que la toma de decisiones influyó tanto positiva como negativamente, teniendo como consecuencia que empleara cuatro estrategias; algunos intentos fueron fallidos, lo cual lo llevó a implementar nuevas estrategias. Durante gran parte de este proceso él hace exploraciones, entre las que se destaca la heurística de introducir trazos auxiliares. El profesor busca relaciones entre los trazos que tiene en el dibujo y los que hace, lo cual le es útil para plantearse subobjetivos, tales como calcular un radio a partir de las relaciones entre el centro y los trazos auxiliares que hace. Algunas de las estrategias que percibe a partir de las relaciones que hace son: 1) calcular el radio conociendo la medida de una cuerda de la circunferencia (ver Figura 2); 2) descomponer la diagonal BD en la diagonal del cuadrado de lado 1, el diámetro, y el segmento que hemos encerrado en una elipse en la Figura 3; 3) descomponer la diagonal del cuadrado de lado $2r$ en el diámetro y los dos segmentos que hemos encerrado en una elipse en la Figura 4.

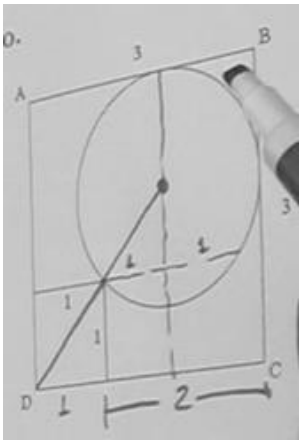


Figura 1.

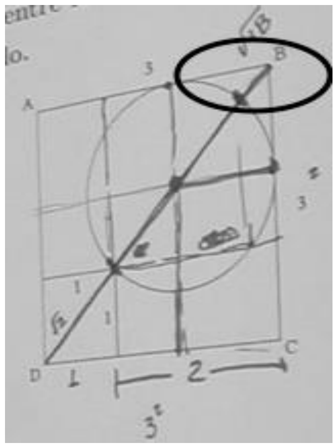


Figura 2.

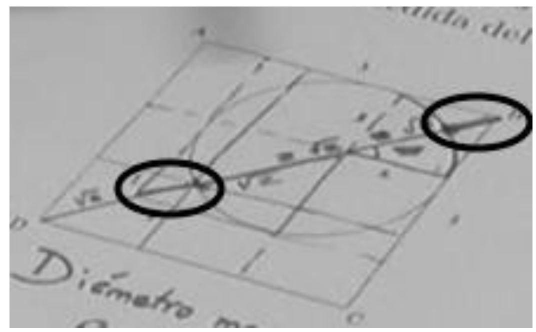


Figura 3.

No obstante, la mayoría de las relaciones que A establece son incorrectas, y no alcanza a generar estrategias exitosas en las que se requiera hacer procedimientos algebraicos; limitándose así, a estrategias y relaciones en las que solamente se ven involucrados datos numéricos. En otros casos, cuando la estrategia es exitosa no alcanza a concretarla adecuadamente, tal como sucede durante el fragmento 2 del proceso. En la Figura 5, se presenta una comparación entre el esquema del proceso de resolución de un resolutor ideal (izquierda) y el esquema del fragmento 2 del proceso de resolución del profesor A (derecha).

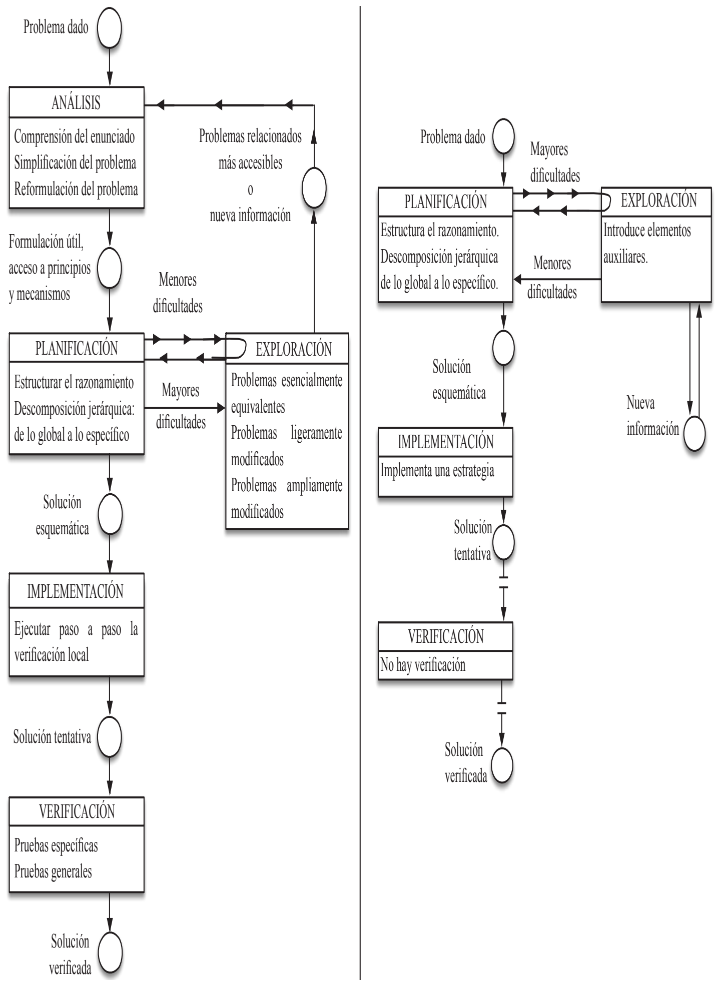


Figura 5.

Una de las principales diferencias que se observa en los esquemas de la Figura 5, es el papel central que juega la planificación en el caso del resolutor ideal; de manera contraria, en el esquema del profesor A y durante todo el proceso, la exploración es el "corazón" de éste, debido a que sus intentos por elaborar un plan son muy débiles, lo cual lo lleva una y otra vez a la exploración, porque no puede generar una estrategia exitosa.

Otra diferencia que se destaca entre ambos procesos tiene que ver con la verificación de la solución, la cual forma parte del proceso del resolutor ideal, probablemente porque tiene claro en qué consiste hacerlo, lo cual le permite tener la seguridad de que cuenta con una solución correcta. De manera contraria, durante el fragmento 2, el profesor A plantea una ecuación en términos de r y pareciera que dicha ecuación le resulta suficiente y no se da cuenta de que el radio es un número que aún no encuentra (ver Figura 6). Más adelante él intenta verificar dicha solución, pero en su “verificación” no busca la consistencia entre los datos y la solución; se limita a revisar que cada uno de los pasos que siguió para llegar a ésta han sido correctos.

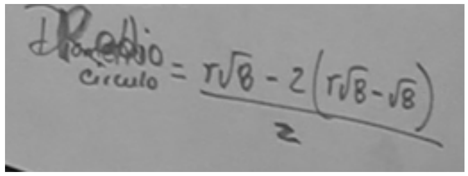


Figura 6.

Con frecuencia a lo largo de todo el proceso de resolución, el profesor A muestra comportamientos de Tipo A y de Tipo B (Schoenfeld, 1985), los cuales tienen que ver respectivamente con realizar búsquedas innecesarias ignorando direcciones útiles hacia la solución, y con detener dichas búsquedas a tiempo pero sin explotar los recursos con los que se cuenta.

Profesor B

Respecto al proceso de resolución del profesor B, éste fue dividido en tres fragmentos; él implementa tres estrategias, dos de ellas exitosas. Durante todo el proceso, pareciera que el profesor B no tiene dificultades para establecer relaciones y generar estrategias; algunas de éstas consistieron en: 1) descomponer el lado AB (ver Figuras 6, 7 y 8), y 2) descomponer la diagonal BD en los segmentos m, r y k (ver Figura 9).

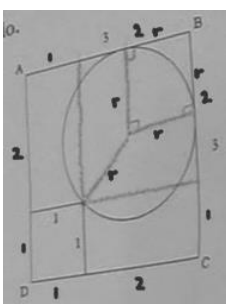


Figura 7.

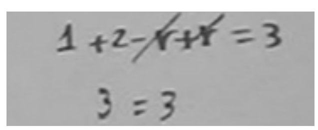


Figura 8.

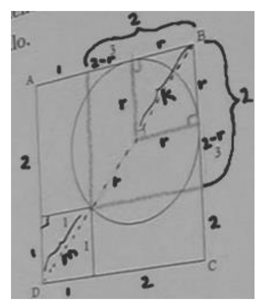


Figura 9.

En la Figura 10, se presenta un contraste entre el esquema del proceso de resolución de un resolutor ideal y el del fragmento 1 del profesor B, correspondiente a su primera estrategia. Como se puede ver en la Figura 10, por una parte, una similitud entre ambos procesos tiene que ver con el éxito que tienen ambos al resolver el problema, lo cual puede deberse a la presencia de los mecanismos de control.

Por otra parte, una diferencia entre ambos procesos es el centro del proceso de resolución. Respecto al proceso del resolutor ideal, el centro es la planificación y la exploración una etapa de apoyo en la que entran en juego distintas heurísticas. Contrariamente en el proceso del profesor B el centro es la exploración; él tiene menores dificultades para establecer un plan, pero para refinarlo recurre con frecuencia a dicha etapa, ya que le resulta útil para justificar sus decisiones respecto a cómo y cuándo implementar un plan. En la etapa de exploración, por parte del profesor B se destaca la heurística de introducir trazos auxiliares, siendo otra diferencia entre ambos procesos, ya que el resolutor ideal parece tener un amplio inventario de heurísticas.

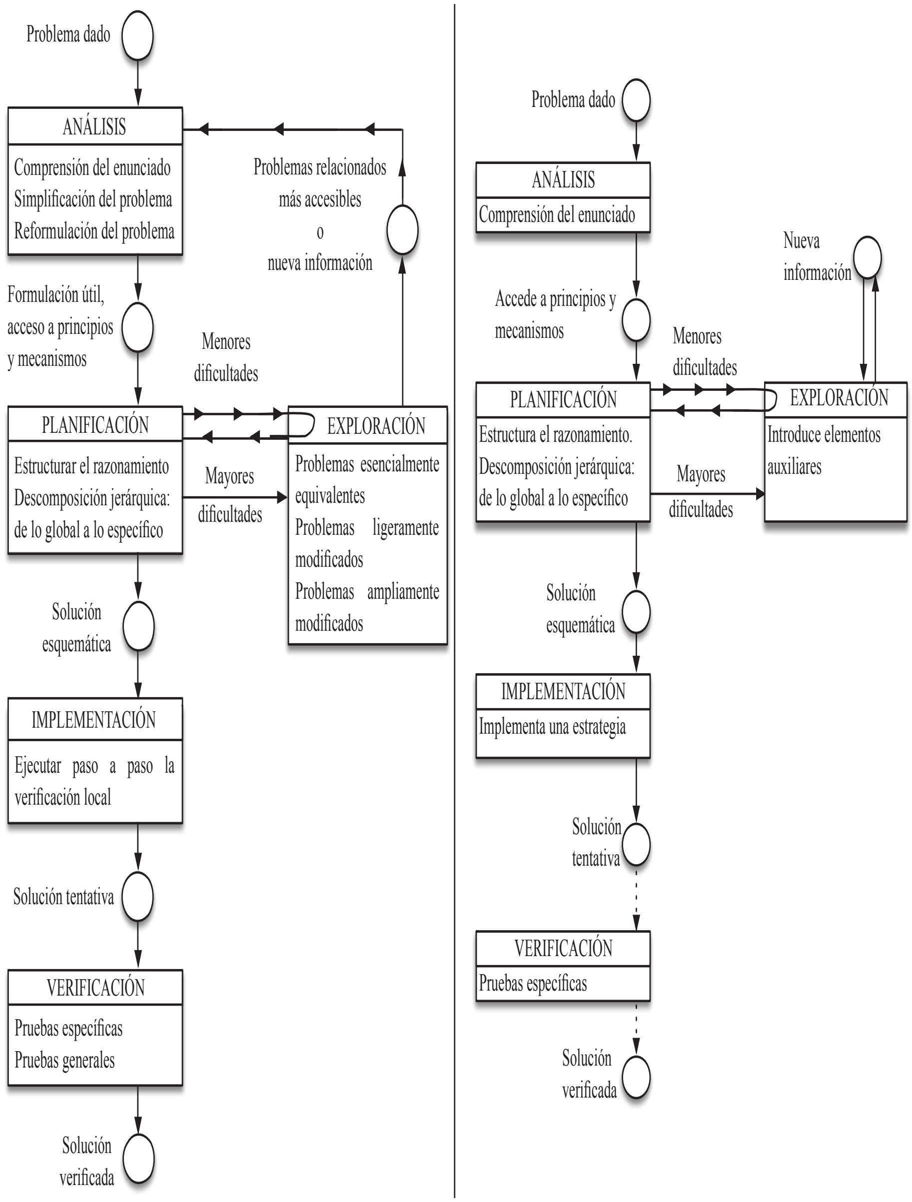


Figura 10.

En las comparaciones que se hicieron entre ambos procesos, el profesor B parece estar muy cerca de ser un resolutor ideal, o bien, experto, ya que con frecuencia, durante todo el proceso muestra un comportamiento de Tipo C (Schoenfeld, 1985). Dicho comportamiento tiene que ver con la influencia positiva de las decisiones, que se percibe en el proceso cuando él hace un cuidadoso monitoreo, para tomar decisiones para elegir o desechar recursos y estrategias, hasta para justificar por qué lo hace. Sin embargo, en algunos momentos este cuidadoso monitoreo está ausente, especialmente en la etapa de verificación de la solución, en la que utiliza una ecuación con una infinidad de soluciones, sin percatarse de tal particularidad; por lo que la verificación de la solución no es válida (ver Figura 11), donde $\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ y $r\sqrt{2}$ son la medida del radio y del segmento k de la Figura 9, respectivamente).

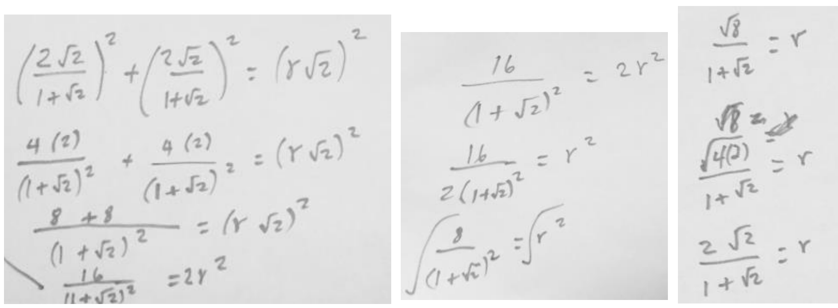


Figura 11.

Conclusiones

Las conclusiones de este estudio pueden resumirse de la siguiente manera:

1) Ninguno de los dos profesores ha tenido dificultad para comprender en qué consiste el problema. Sin embargo, el profesor A pareciera tener más dificultades para comprender algunos de los datos implícitos de éste.
2) La exploración es la etapa a la que le dedican más tiempo ambos profesores.
3) Los recursos heurísticos de los profesores han resultado en general pobres, limitándose así a heurísticas como la de establecer subobjetivos e introducir elementos auxiliares durante la exploración.
4) Ambos profesores utilizaron la descomposición de la diagonal BD como estrategia heurística, pero han tenido algunas dificultades para aplicarla, sobre todo el profesor A, que no pudo resolver el problema sin ayuda del entrevistador. Otras estrategias consisten en la descomposición de una cuerda en dos segmentos, de la diagonal del cuadrado circunscrito, y del cuadrado *ABCD* en áreas.
5) En ambos procesos, con frecuencia se puede deducir a partir de la implementación que existe un plan; salvo en algunos momentos que en el proceso del profesor A se describe explícitamente un plan.

6) Ninguno de los dos profesores ha logrado verificar que la solución encontrada era la correcta. Ambos tienen dificultades en la verificación: para el profesor A consiste en revisar paso a paso los procedimientos, o bien reconstruir la estrategia. El profesor B, aunque sabe en qué consiste la verificación de la solución, utiliza recursos inadecuados.
7) Algunas de las acciones que llevan a cabo los profesores para resolver el problema son: 1) hacer y desechar conjeturas, 2) establecer relaciones, 3) descomponer segmentos, 4) supervisar el proceso de resolución, 5) apelar a recursos en la memoria de largo plazo, entre otras.
8) Respecto a la influencia de la toma de decisiones cuando se presentan dificultades o se requiere emplear otra estrategia durante el proceso de resolución, el profesor A abandona estrategias fallidas y desecha sus conjeturas falsas, por lo que el proceso se ve detenido en repetidas ocasiones. En el proceso de resolución, el profesor B generalmente hace una supervisión constante de sus acciones, lo cual muestra en el constante y cuidadoso monitoreo que realiza para justificar sus decisiones.

Referencias bibliográficas

Maher, C. A. & Sigley, R. (2014). Task-based interviews in mathematics education. In S. Lernman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Dordrecht: Springer

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

NIVELES DE PENSAMIENTO GEOMÉTRICO IDENTIFICADOS POR DOCENTES DE MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN CONTINUA

Jesús Victoria Flores Salazar, Daysi García, Saddo Ag Almouloud, Maria José Ferreira da Silva
Pontificia Universidad Católica del Perú (Perú). Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas, IREM-PUCP (Perú). Pontificia Universidad Catolica de São Paulo (Brasil)
jvflores@pucp.pe, garcia.daysi@pucp.pe, saddoag@pucsp.br, zeze@pucsp.br

RESUMEN: La presente investigación evidencia resultados de una formación continua de profesores en geometría, que consta de cuatro encuentros y en el que participan dieciséis docentes peruanos de Educación Básica Regular - nivel secundario. Basados en una secuencia de actividades y en el enfoque teórico de Parzysz, específicamente en los niveles de geometría, los docentes desarrollan diversas estrategias de resolución de las actividades y realizan un análisis matemático y didáctico de las mismas. Para este reporte presentamos el desarrollo de dos de las actividades realizadas en el primer encuentro. En cuanto a los resultados de la formación notamos que los docentes participantes utilizan estrategias de resolución en los niveles de geometría concreta y, geometría espacio-gráfica, de acuerdo con Parzysz, sin embargo, aún presentan confusión entre los tipos validaciones perceptivas y deductivas.

Palabras clave: geometría, pensamiento geométrico, formación de profesores

ABSTRACT: The present research provides the outcomes of Geometry teachers' continuous training that consists of four meetings where sixteen Peruvian teachers, of secondary school- regular basic education, participated. Based on a sequence of activities and the theoretical approach of Parzysz, specifically, in the levels of geometry, teachers develop different strategies for solving activities and analyzed them from a mathematical and didactic perspective. In this report we show the development of two of the activities carried out in the first meeting. Regarding the results of the training, we noted that the teachers use solving strategies in the levels of concrete geometry, and in space-graph geometry in accordance with Parzysz; however, they are still mixed-up with respect to perceptive and deductive types of validations.

Key words: geometry, geometric thinking, teacher training

Consideraciones iniciales

En el presente artículo mostramos un recorte de una formación de profesores de matemáticas que forma parte del proyecto internacional "*Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática em ambientes tecnológicos*" desarrollado entre investigadores de la PUC-SP y la PUCP. Este proyecto, de forma general, tiene como finalidad analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; dar herramientas teóricas al trabajo de profesores e investigadores interesados en la integración de investigaciones en educación matemática; producir conocimiento en el área de formación de profesores de matemáticas, entre otros objetivos.

Es por ello, que presentamos un recorte del proyecto (primer encuentro) pues queremos dar elementos teóricos y prácticos a los profesores en formación continua que están comprometidos con la integración de la educación matemática en su práctica docente.

Aspectos teóricos de la formación

Sobre formación continua de profesores, André (2000) señala que este tipo de formación es considerada indispensable para el profesor tanto para actualizar conocimientos y técnicas del área en la cual trabaja, como para desarrollar competencias y actitudes.

En esa misma línea de pensamiento, Pacheco y Flores (1999) explican que la tarea fundamental del profesor es seleccionar y organizar actividades didácticas adaptándolas a situaciones específicas de su área en ejercicio y que todo esto debe realizarse por medio de una reflexión en la acción.

Por otro lado y, en consonancia con lo afirmado por André (2000) en cuanto a los conocimientos del área, presentamos aspectos del enfoque teórico de Parzysz (1989) que identificó diferentes niveles de geometría y estudió los procesos y mecanismos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en primaria y secundaria y plantea una clasificación que toma en cuenta los objetos en el juego: físicos o teóricos y las formas de validación: perceptiva (basadas en las representaciones) o deductiva (con base en aspectos teóricos). El investigador, presenta la siguiente clasificación:

Concreta (G0) en el que se parte de la realidad, de lo concreto y es donde los objetos matemáticos en estudio son materializados.

Espacio-gráfica (G1) es la geometría de representaciones figurales y gráficas; en la que los objetos son bidimensionales. La justificación de las propiedades de los objetos representados es hecha por lo que se ve.

Proto-axiomática (G2), en este tipo los objetos son teóricos y las demostraciones de los teoremas son hechas a partir de propiedades y/o características de los mismos, no habiendo la necesidad de explicitar un sistema de axiomas. En G2 las validaciones son realizadas por medio de propiedades del objeto matemático representado y;

Axiomática (G3) en la que los axiomas son explicados completamente.

De acuerdo con el autor, en G0 y G1 los objetos son concretos y las justificaciones y validaciones son perceptivas, mientras que en G2 y G3 los objetos son teóricos y las validaciones son deductivas.

Parzysz (2001;2006) señala que se debe tomar en cuenta que este enfoque teórico no describe un desarrollo progresivo de niveles de geometría, sino que permite identificar los niveles que se evidencian al resolver un problema que envuelve contenidos de geometría.

Con base en lo anterior, exponemos en seguida el desarrollo de las dos actividades que forman parte del primer encuentro.

Desarrollo de la formación

La formación fue realizada en 2015 y constó de cuatro encuentros, los cuales estuvieron a cargo de los investigadores de la PUC-SP, Prof. Saddo Ag Almouloud y la Prof. Maria José Ferreira da Silva y, en los que colaboraron también investigadores de la PUCP y además, participaron dieciséis profesores peruanos de matemática del nivel secundario.

Tabla 1. Estructura del primer encuentro

Actividad	Nombre de la actividad
1	Una introducción al estudio de diferentes geometrías
2	Menor distancia

La tabla 1 muestra las dos actividades del primer encuentro que presentaremos en este artículo. En la primera actividad llamada “una introducción al estudio de diferentes geometrías” los formadores explicitan aspectos del enfoque teórico de Parzysz (1989) que servirá de base para la segunda actividad llamada “menor distancia” en la que se les solicita a los profesores, realizar un análisis matemático y didáctico de la misma.

En relación a la colecta de datos, estos fueron colectados por medio de fichas de trabajo y grabación de video.

Subrayamos que el material de las dos actividades que presentamos en este reporte fue elaborado y desarrollado por los profesores investigadores Saddo Ag Almouloud y María José Ferreira da Silva, ambos de la PUC-SP.

Actividad 1

Probar/demostrar que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180º. ¿Cuál sería una estrategia de resolución ubicada en el: G0, G1, G2, G3?

- En el G0, se puede confeccionar un triángulo de papel y luego recortar con una tijera los tres ángulos, formando con ellos un semicírculo. En este caso, el docente estará en G0 que corresponde a la geometría concreta, según el investigador, porque manipula un pedazo de papel de forma triangular y lo recorta.
- Por otro lado, se puede dibujar un triángulo o construir un triángulo con la ayuda de un software (ver figura 1), medir los tres ángulos y observar la suma de sus medidas comparándola con el resultado de sus colegas, en este caso el docente estará en G1 (geometría espacio-gráfica), pues conjetura el resultado y lo comprueba empíricamente en la comparación con los resultados de otros sujetos.

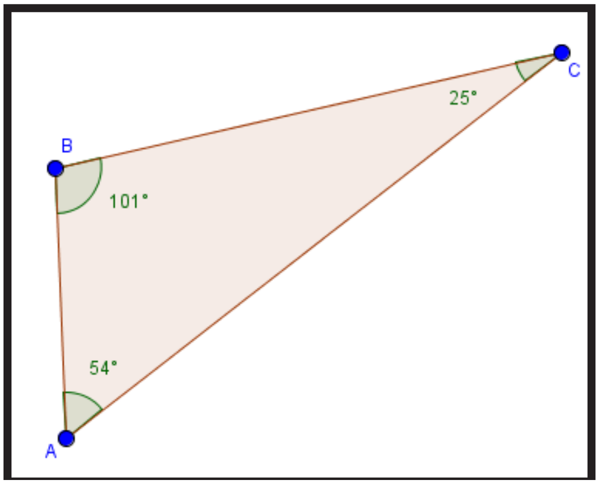


Figura 1. Estrategia de resolución en G0

- Si el docente traza una recta paralela en uno de los lados (ver figura 2) y señala que las retas paralelas determinan ángulos alternos internos congruentes para probar que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180º, él estaría en el G2 (geometría proto axiomática, pues traza una recta paralela, usa la congruencia de los ángulos alternos internos y realiza deducciones en base a estos trazos auxiliares realizados en la figura.

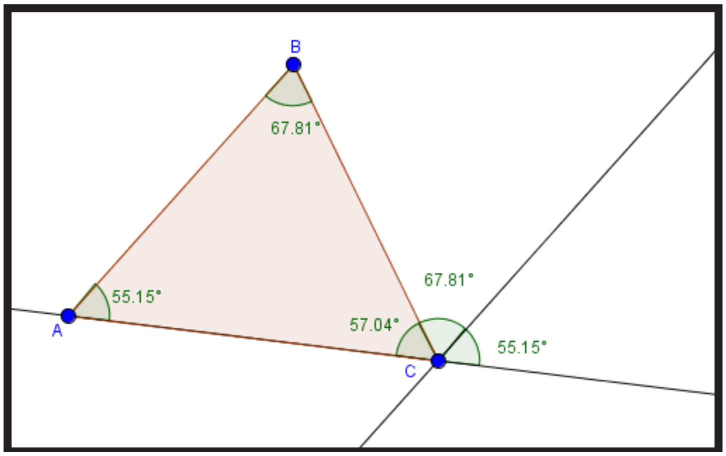


Figura 2. Estrategia de resolución en G1 (material de formación 2015, p. 3)

- En caso de que el docente realice una demostración basada en un sistema axiomático de referencia, él estará en el G3 (geometría axiomática).

En consonancia con el enfoque teórico, notamos que lo percibido pauta (conjetura) y controla (verificación) lo sabido, pero no lo comanda.

A continuación, presentamos la actividad “menor distancia” en la que se pide hacer un análisis matemático didáctico según el enfoque de Parzysz. Esta reflexión didáctica fue realizada por los docentes e investigadores que participaron en la formación.

Actividad 2

Los paralelogramos *ABCD* y *LMNO* de la figura 3 son tales que *AB* = *LM*. ¿Los dos paralelogramos tienen la misma área? ¿Y el perímetro? Justifique sus respuestas.

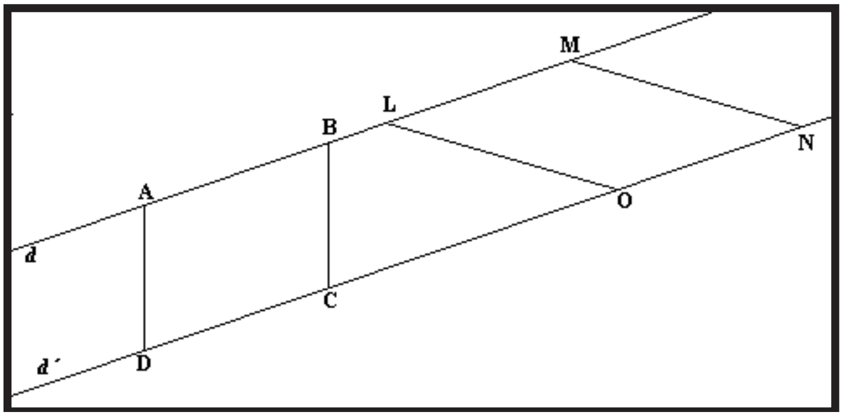


Figura 3. Actividad “menor distancia” (material de formación 2015, p. 5)

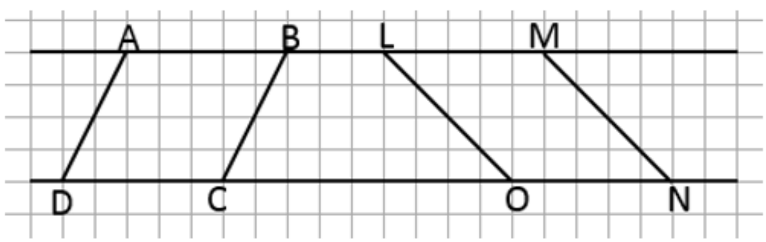
Presentamos, para este artículo el desarrollado de la actividad 2 realizada por un docente participante al que llamaremos Alejandro para resguardar su identidad.

Resolución

Nivel G0: *para este nivel procedemos de la siguiente manera:*

a) Respecto al área:

Se puede recortar el paralelogramo ABCD (regular) y llevar sobre el paralelogramo LMNO



Se realiza un nuevo recorte, se traslada una región triangular y se comprueba que el área del paralelogramo ABCB es igual al área del paralelogramo LMNO.

Figura 4. Parte a) de la actividad realizada por Alejandro

La figura 4, muestra el trabajo realizado por el profesor y la transcripción de lo escrito por él dadas las condiciones de la actividad los paralelogramos ABCD y LMNO tienen la misma medida de área, el profesor Alejandro explicó que podría recortar la representación del paralelogramo ABCD y después superponer esta figura a la del paralelogramo LMNO, estrategia que el mismo profesor identificó en G0 (geometría concreta).

En seguida, sugiere el docente realizar un nuevo recorte con el fin de trasladar la región triangular y comprobar que ambas figuras poseen la misma área.

En cuanto al perímetro, parte b) que se muestra en la figura 5, se presenta la resolución realizada por el docente, esta afirmación la realiza basado en los conocimientos matemáticos que moviliza.

Resolución

b) En relación al perímetro:

Después de realizar el corte se comparan los lados de los paralelogramos, encontrándose que AB = LM, CD = MO; pero AD <LO y BC < MN. Por lo tanto, el perímetro de ABCD es menor que el perímetro de LMNO

Figura 5. Parte b) de la actividad realizada por Alejandro

Sin embargo, para que esté configurado el G0, las validaciones deben ser perceptivas y no teóricas y por la afirmación que observamos el docente realiza una validación "deductiva" que correspondería al G2 (geometría proto axiomática).

El profesor Alejandro en la figura 6, para resolver la misma actividad, pero ahora en G1 realiza trazos auxiliares, es decir, se vale de una cuadrícula para descomponer las figuras (los dos paralelogramos) y luego recomponer para validar que ambos tienen la misma área.

Como lo explica en la figura 6.

Nivel G1:

En este nivel se puede proceder en ambos paralelogramos (regiones) mediante descomposición y reconfiguración de formar rectángulos, descomponerlos en unidades cuadradas, contarlas y compararlas.

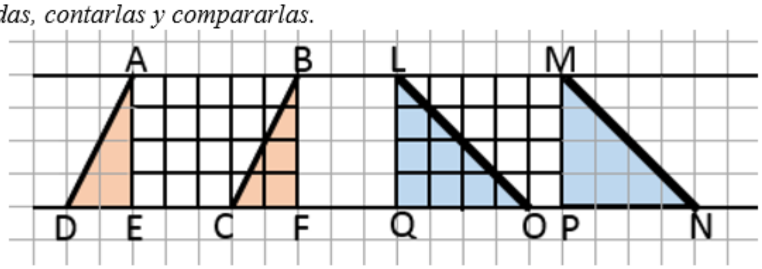


Figura 6. Actividad realizada por Alejandro-nivel G1

Sin embargo, con esta estrategia no consigue responder, que sucede con el perímetro de los paralelogramos.

La estrategia de solución de la actividad en G1, con relación al área de los paralelogramos parece la adecuada pues el profesor Alejandro realiza la justificación del área de los paralelogramos representados por lo que ve y no por lo que sabe.

Consideraciones Finales

Notamos que lo realizado por el docente Alejandro muestra que consigue desarrollar estrategias para G0 y G1, es decir para la geometría concreta y espacio-gráfica por tal razón solamente realiza validaciones perceptivas, en el sentido de Parzysz.

En cuanto al grupo de profesores, podemos afirmar que diez de los dieciséis profesores desarrollaron estrategias similares a las presentadas por el profesor Alejandro, lo cual los ubica en los mismos niveles que él.

En relación a los otros seis profesores del grupo, justificaron sus respuestas con algunas propiedades de paralelogramos y semejanza de triángulos, por lo que pensamos que se encuentran en el tránsito de G1 a G2.

En ese sentido, observamos de manera general que los docentes confunden las validaciones perceptivas con las deductivas y no consiguen desarrollar una “estrategia” basada fundamentalmente en las propiedades y/o características del objeto matemático representado.

Referencias bibliográficas

André, M.E.D.A. (2000). A pesquisa sobre a formação de professores no Brasil – 1990-1998. En M. Candau (Org.). *Ensinar e aprender: sujeitos, saberes e pesquisa* (p. 83-99). Rio de Janeiro: DP&A.

Pacheco, J. A. y Flores, M. A. (1999). *Formação e avaliação de professores.* Portugal : Porto.

Parzysz, B. (1989*). Représentations planes et enseignent de géométries de l`espace au lycée. Contribution à l`étude de la relation voir/savoir* (Tesis de doctorado). Universidad Paris 7, Paris, Francia.

Parzysz, B. (2001). *Articulatión entre perception et deduction dans une demarche geométrique em PE1*. Extrait du coloque de la COPIRELEM – Tours

Parzysz, B. (2006*).* La géométrie dans l’enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles: de quoi s’agit-il? *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 17. 128-151.

LA COMPRENSIÓN DE LOS CONCEPTOS DE ÁREA Y PERÍMETRO EN PROFESORES DE PRIMARIA. EL CASO DE LA ESCUELA MIGUEL HIDALGO Y COSTILLA.

Elsa Dávila Rodríguez
Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Estado de México (ISCEEM). (México)
davila7elsa@gmail.com

RESUMEN: En este reporte documentamos un avance de la investigación que pretende dar respuesta a la pregunta: ¿Qué niveles de comprensión de los conceptos de área y perímetro tienen los profesores en la escuela primaria en México? Esta investigación es de tipo cualitativo y en ella participaron seis profesores de una escuela primaria en el Estado de México. Para la exploración diseñamos un cuestionario integrado por preguntas abiertas, cerradas y problemas no rutinarios. Para completar la indagación se realizarán entrevistas y observaciones en el salón de clases. Para interpretar los niveles de comprensión de los profesores consideramos el desarrollo conceptual de ambos conceptos, así como las ideas de Sierpinska, Carpenter y Lehrer.

Palabras clave: comprensión en matemáticas, área, perímetro

ABSTRACT: In this report we set out an advance of the research that tries to give answer to the question: What levels of understanding of the concepts of area and perimeter do primary school teachers have in Mexico? This research is of qualitative type and it included six teachers of a primary school in the State of Mexico. For the investigation, we designed a questionnaire composed of open/ closed questions and non-routine questions. To complete the inquiry, interviews and observations will be carried out in the classroom. In order to interpret the teachers' levels of understanding we consider the conceptual development of both concepts, as well as the ideas of Sierpinska, Carpenter and Lehrer.

Key words: comprehension in mathematics, area, perimeter

Introducción

En este reporte documentamos parte de una investigación acerca de la comprensión que tienen los profesores de educación primaria en México, de los conceptos de área y perímetro. Considerando por un lado los bajos niveles de desempeño que los estudiantes mexicanos muestran en las evaluaciones internacionales y nacionales en matemáticas (edomex.gob., 2013) y, por otro lado, que la forma en que los estudiantes son conducidos en su aprendizaje de las matemáticas está relacionada con lo que comprenden sus profesores de los conceptos matemáticos, nos planteamos la pregunta ¿Qué niveles de comprensión de los conceptos de área y perímetro tienen los profesores de educación primaria? La comprensión de los profesores en matemáticas sobre algunos conceptos matemáticos en México ha sido documentada en algunas investigaciones (De la Peña, 2002, Díaz, 2011, Díaz, 2015); sin embargo, la comprensión en matemáticas ha sido estudiada desde hace bastante tiempo por investigadores de todo el orbe; en esta línea destacan los trabajos del profesor Skemp (1999), de Ana Sierpinska (1996) y de Carpenter y Lehrer (1999), por citar algunos. En relación a la comprensión de los conceptos geométricos encontramos los realizados por Van Hiele (1990); D´Amore y Fandiño (2007); Nortes & Nortes (2013) y Battista (2007).

La Comprensión en Matemáticas

Para entender la importancia de la comprensión en matemáticas empezamos con revisar la noción de obstáculo epistemológico de Bachelard (2000) y, luego, para comprender los niveles, tipos y la evaluación de la comprensión, recurrimos a las ideas de Carpenter y Lehrer (1999) plasmadas en: *Mathematics Classroom that Promote Understanding* donde reportan resultados de un trabajo realizado durante cinco años en el National Center for Research in Mathematical Sciences Education (NCRMSE). Aquí los autores proponen cinco formas de actividad mental para el desarrollo de la comprensión: construcción de relaciones, extensión y aplicación de conocimiento matemático, reflexión sobre las experiencias, articulación de lo que el individuo conoce y apropiación del conocimiento matemático; para la evaluación de la comprensión sugieren poner atención a: los errores de los estudiantes, las conexiones hechas entre los símbolos, los procedimientos simbólicos y los referentes correspondientes, las conexiones realizadas entre los procedimientos simbólicos y las situaciones de solución a problemas informales y las conexiones realizadas entre los sistemas simbólicos (Hiebert & Carpenter, 1997). Para evaluar la comprensión que tienen los profesores del nivel primaria de los conceptos de área y perímetro, nos aproximamos al desarrollo conceptual de estos objetos matemáticos; esto lo hicimos a partir de la idea fundamental del área de un rectángulo y "mostrar" que cualquier figura cerrada es *rectangulable.* En lo que sigue ilustramos esta trayectoria. Iniciamos con un rectángulo de lados a y b, cuya área A (medida de la superficie) está dada por el producto de su base por su altura: $A=ab$. Después consideramos el caso del triángulo equilátero de lado a y altura h como se muestra en las figuras 1 y 2.

Figura 1.

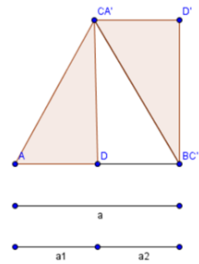


Figura 2.

Después pasamos a los cuadriláteros, utilizando la descomposición y el movimiento de figuras, como se muestra en las figuras 3, 4 y 5

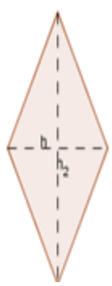


Figura 3.

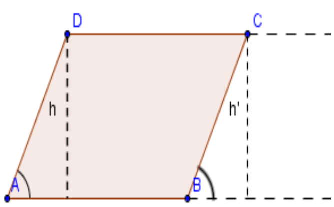


Figura 4.

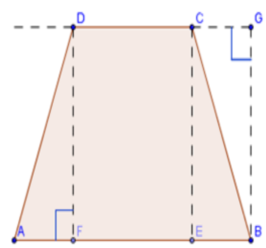


Figura 5.

Posteriormente nos preguntamos ¿Cómo calcular el área y perímetro de figuras no rectilíneas? Una forma sería la descomposición de la figura en figuras conocidas como las que se muestran en la figura 6. Intuitivamente pensamos que una manera relativamente fácil sería la utilización de una cuadrícula susceptible de refinarse, como observamos en las figuras 7 y 8.

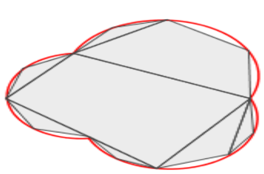


Figura 6.

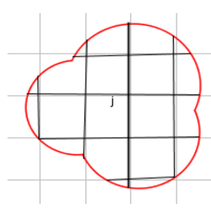


Figura 7.

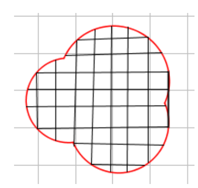


Figura 8.

Después de este acercamiento nos percatamos de la necesidad de incorporar otros objetos matemáticos para calcular el área, estos objetos fueron: un sistema de referencia, la noción de función y de partición. Un ejemplo de ello es el cálculo del área de un triángulo como se muestra en las figuras 9,10,11 y 12.

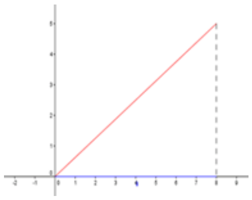


Figura 9.

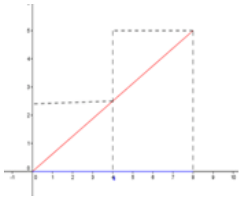


Figura 10.

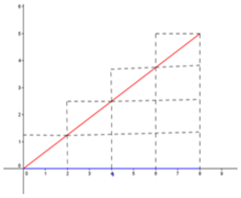


Figura 11.

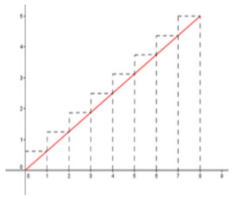


Figura 12.

Con estas ideas surgieron de manera natural sumas infinitamente grandes de cantidades infinitamente pequeñas.

Metodología

Esta investigación de corte cualitativo y referente empírico, la realizamos con seis profesores que laboran en una escuela primaria de la zona conurbada de la ciudad de Toluca, perteneciente al Estado de México, y que accedieron a participación voluntariamente.

Para la exploración diseñamos un cuestionario integrado por dos partes: la primera orientada al descubrimiento del perfil profesional del docente el cual resumimos en la siguiente tabla.

Tabla 1. (Dávila, 2016)

NP	Nomenclatura	Profesor (a)
1	M55NE34P1	Mujer, 55 años de edad, con Normal Elemental, 34 años de experiencia, nivel primaria, actualmente primer grado
2	M54MT35P1	Mujer, 54 años de edad, con Maestría, 35 años de experiencia, nivel primaria, actualmente primer grado
3	M43MT22P2	Mujer, 43 años de edad. Con Maestría, 22 años de experiencia, nivel Primaria. segundo grado

4	H50NE32P3	Hombre, 50 años de edad, con Normal Elemental, 32 años de experiencia, nivel primaria, tercer grado
5	M24LI2P4	Mujer, 24 años de edad, con Licenciatura (UPN), 2 años de experiencia, cuarto grado
6	M38MT17P6	Mujer, 38 años de edad. Con Maestría, 17 años de experiencia, sexto grado

La segunda parte está orientada a explorar la comprensión que tienen los profesores sobre los conceptos de área y perímetro, esta parte integra preguntas abiertas y cerradas, además de una sección de problemas. Esta parte la reproducimos en seguida:

A. Conteste las siguientes preguntas

1. ¿Qué es el área?
2. ¿Qué es el perímetro?

B. Calcule el área y el perímetro de las siguientes figuras

Figura 13.

C. Resuelva los siguientes problemas:

1. El lado de un cuadrado es el doble del de un triángulo equilátero. ¿Cuánto mide su área y perímetro respectivamente?
2. El largo de un rectángulo es dos veces el lado de un cuadrado. Qué medida debe tener el ancho para que se verifique lo siguiente:
   a) área del cuadrado **>** área del rectángulo
   b) área del cuadrado **<** área del rectángulo
   c) área del cuadrado **=** área del rectángulo

a) perímetro del cuadrado > perímetro del rectángulo
b) perímetro del cuadrado < perímetro del rectángulo
c) perímetro del cuadrado = perímetro del rectángulo

3. Sea el cuadrado de vértices $ACDF$, que tiene de área $1m^2$. B y E son puntos medios de AC y FD, respectivamente. Calcule el área de la región de vértices $BCEF$.
4. ¿Cuál de las siguientes relaciones se verifica entre las áreas de los paralelogramos dados? (Argumente)

$ADCB > EDCF$
$ADCB < EDCF$
$ADCB = EDCF$

5. El piso de la cocina de la casa de Inés es rectangular y está cubierto de losetas. Cada loseta es un cuadrado de 20 cm de lado. Inés ha contado las losetas y le resultan 20 en el lado más largo de la cocina y 15 en el lado más corto.
 ¿Cuántas losetas hay en el piso de la cocina?

 ¿Cuál es el perímetro (en metros) del piso de la cocina de Inés? ¿Cuál es su área?

Discusión de los resultados

Después de la aplicación del cuestionario concentramos la información y, después de un primer análisis de las respuestas llegamos a los siguientes resultados.

De la sección A donde se plantean preguntas abiertas, orientadas a las concepciones que tiene los profesores del área y perímetro encontramos que; de los seis cuestionarios aplicados una profesora, confundió los conceptos área y perímetro.

M55NE34P1

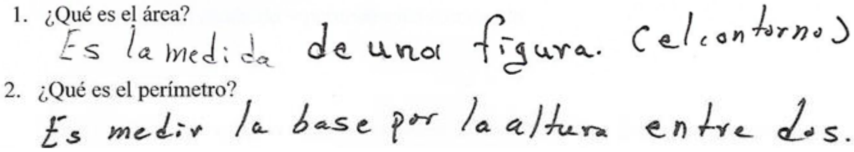

1. ¿Qué es el área?
Es la medida de una figura. (el contorno)
2. ¿Qué es el perímetro?
Es medir la base por la altura entre dos.

Figura 14.

Tres profesores dieron respuestas similares, las cuales se han considerado como concepciones geometrías pues comprenden el área como el lugar que ocupa la superficie en el plano.

M43MT22PyS2

1. ¿Qué es el área?

Es el espacio que ocupa cualquier cuerpo

Figura 15.

H50NE32P3

1. ¿Qué es el área? Es la superficie qui se encuentra dentro de cualquier figura geométrica.

Figura 16.

M38MT17P6

1. ¿Qué es el área?

Superficie de una figura.

Figura 17.

Dos profesoras le atribuyen un número al área, concibiéndola como una medida, pero sin hacer referencia a su unidad. En una concepción relativamente distinta se manifiesta un aspecto geométrico, ya que dibuja un cuadrado marcando el interior.

M54MT35P1

1. ¿Qué es el área? Es lo que mide por dentro una figura

Figura 18.

M24LI2P4

1. ¿Qué es el área?

Medición de la superficie de una figura

Figura 19.

En relación a la concepción de perímetro encontramos respuestas que lo consideran como una línea que limita una figura, pero sin atribuirle la magnitud:

H50NE32P3

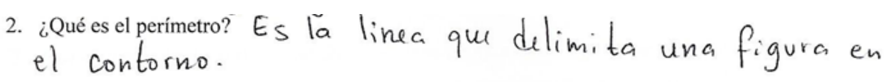

2. ¿Qué es el perímetro? Es la linea que delimita una figura en el contorno.

Figura 20.

En la sección B donde se pedía calcular el área y perímetro de las figuras, cuatro profesores lo intentan utilizando fórmulas conocidas, sin atender al aspecto curvilíneo de algunas.

M54MT35P1

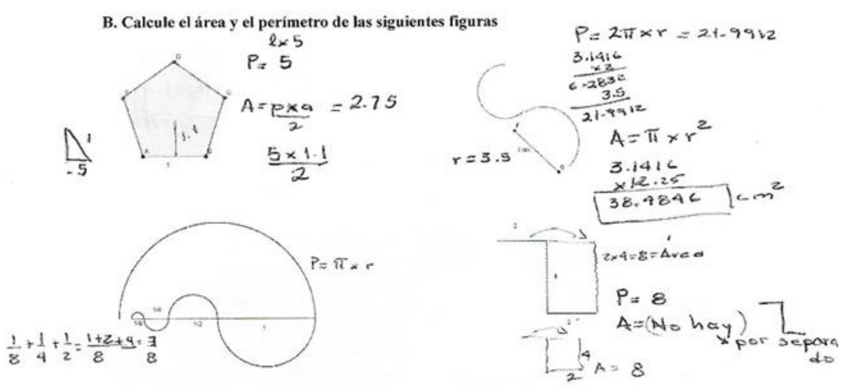


Figura 21.

Dos profesoras indican que no lo pueden realizar.

Figura 22.

En la sección de los problemas encontramos que los profesores resuelven estos utilizando herramientas geométricas y numéricas.

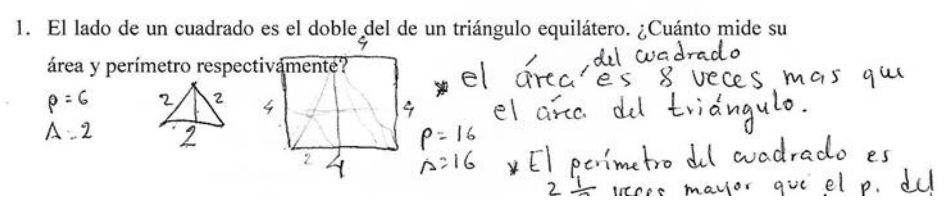
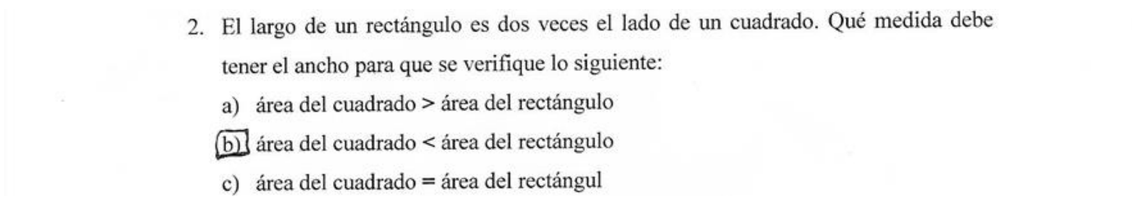

1. El lado de un cuadrado es el doble del de un triángulo equilátero. ¿Cuánto mide su área y perímetro respectivamente?

Figura 23.

En algunos de los problemas los profesores mostraron dificultad para resolverlos, como es el caso en que el profesor sólo seleccionó el que consideró correcto.


2. El largo de un rectángulo es dos veces el lado de un cuadrado. Qué medida debe tener el ancho para que se verifique lo siguiente:

a) área del cuadrado > área del rectángulo

b) área del cuadrado < área del rectángulo

c) área del cuadrado = área del rectángul

Figura 24.

Después de este primer análisis encontramos que los profesores tienen cierta comprensión de estos objetos matemáticos. Hemos identificando algunas respuestas similares entre los profesores, otras donde reconocemos que algunos tienen mejor comprensión que otros y otras más donde evidencian dificultades en la solución de problemas.

Referencias Bibliográficas

Bachelard, G. (2000). *La Formación del Espíritu Científico* (vigesimotercera ed.. México: Siglo XXI. Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. k. Lester,

Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 843-908). U.S.A.: Information Age Publishing Inc.

Battista, M. T. (2004). Applying Cognition-Based Assessment to Elementary School Students' Development of Understanding of Area and Volume Measurement. *Mathematical Thinking and Learning 6 (2)*, 185-204.

Carpenter, T., & Lehrer, R. (1999). Teaching and Learning Mathematics with Understanding. En E. Fennema, & T. Romberg, *Mathematics Classroom That Promote Understanding* (pp. 19-32). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. En *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan Publishing.

Corberán, R. M. (1996). *Análisis del concepto de Área de Superficies Planas*. Recuperado el 9 de Diciembre de 2015, de http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/Corberan96.pdf

D´Amore, B., & Fandiño, I. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(1), 39-68.

De la Peña, J. A. (2002). *Algunos Problemas de la Educación en Matemáticas en México*. México: Siglo XXI.

Díaz, M. (2011). *La comprensión de la derivada y sus significados. Un estudio de caso con los profesores de bachillerato*. México: CINVESTAV.

Díaz, M. (2015). La comprensión en matemáticas del profesor de educación básica en México. El concepto de razón de cambio. Proceedings XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática.Tuxtla Gutiérrez, México.

edomex.gob. (2013). ENLACE. Recuperado el 29 de Septiembre de 2014, de

http://www.evaluaciones nacionales/enlace/basica/resultados2013

Fennema, E., & Romberg, T. A. (1999). *Mathematics Classroom that Promote Understanding*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Hiebert, J. (1997). *Making Sense. Teaching and Learning Mathematics with Understanding*. Portsmouth, NH, USA: Heinemann.

Nortes, R., & Nortes, A. (2013). Perímetro y área. Un problema en futuros maestros. *Números 84*, 65-85.

Sierpinska, A. (1996). *Understanding in Mathematics* (Reimpresión ed.). Bristol, PA, USA: The Falmer Press.

Skemp, R. R. (1999). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas* (Tercera ed.). Madrid: Morata.

Van Hiele, P. M. (1990). *El problema de la comprensión. En conexión con la comprensión de los escolares en la comprensión de la geometría*. Recuperado el 17 de Noviembre de 2014, de http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/VanHiele57.pdf

EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS Y EL TEOREMA DE BAYES

Jesús Enrique Pinto Sosa, Jorge Carlos Tuyub Moreno, Javier Lezama Andalón
Universidad Autónoma de Yucatán. (México), Instituto Tecnológico Superior de Huichapan. (México), Instituto Politécnico Nacional-CICATA. (México)
psosa@correo.uady.mx, jctuyub@iteshu.edu.mx, jlezamaipn@gmail.com

RESUMEN: El presente trabajo brinda evidencia sobre la construcción de significados asociados a los objetos matemáticos y que son la base de las propuestas didácticas y el DME que se difunde en el aula. Se analiza la interacción del profesor de matemáticas y el teorema de Bayes identificando la construcción de significados del saber para su enseñanza. Se realizó un estudio de corte cualitativo con un método de estudio de casos con profesores de bachillerato del estado de Yucatán, México. El estudio pretende resaltar la importancia del conocimiento matemático que poseen los profesores y la necesidad de generar espacios para que los profesores de matemáticas reflexionen sobre aquello que conocen y enseñan.

Palabras clave: teorema de Bayes, significados, profesor de matemáticas

ABSTRACT: The present work provides evidence on the construction of meanings associated to mathematical objects which are the basis of the didactic proposals and the DME that is spread in the classroom. We analyze the interaction of the mathematics teacher and Bayes' theorem by identifying the construction of knowledge meanings for teaching. A qualitative study was carried out with a case study method with high school teachers from the state of Yucatan, Mexico. The study aims to highlight the significance of mathematical knowledge teachers have and the need to create spaces for mathematics teachers to reflect on what they know and teach.

Key words: **Key words:** Bayes' theorem, meanings, math teacher

Introducción

Actualmente los diversos sistemas de bachillerato que operan en México cuentan con una asignatura obligatoria dentro de su curricular dedicada a la formación de estocásticos, como respuesta a la demanda de formación de individuos críticos y reflexivos de la realidad en la que se encuentran, capaces de tomar decisiones a través de la recopilación de información de su entorno bajo condiciones de incertidumbre. (Azcárate y Cardeñoso, 2003; Rocha, 2007; Del Pino y Estrella, 2012; Ortiz, 2014).

Si bien, los estocásticos son consideradas como parte de las matemáticas, esta requiere de un tipo de pensamiento diferente a las que se encuentran presentes en otras áreas de la misma (Azcárate, 2006; Rocha, 2007; García, Medina, y Sánchez, 2014; Elizarrarás, 2014). El pensamiento estocástico tiene un grado de complejidad diferente al que presentan el determinista; se basa en el desarrollo de la capacidad de tomar decisiones bajo condiciones de incertidumbre mediante la interpretación y uso de la información que se obtienen en un fenómeno, remarcando que dicha decisión deber ser bajo una base racional, científica y ética (Elizarrarás, 2014; Salcedo, 2006).

Por otro lado, se han realizado investigaciones que dan cuenta de la importancia de fijar la atención más en el profesor y lo que genera su práctica dentro del aula, haciendo énfasis en el conocimiento sobre lo que enseña y el objeto matemático a fin de reflexionar sobre su construcción, sus procesos de institucionalización y de inserción en el ámbito escolar. Se asume que una continua interacción del profesor con los estocásticos debería permitirle profundizar sobre lo que son, su construcción, su difusión y reproducción, a fin de proponer escenarios dentro del aula donde se vive el conocimiento funcional, útil y lo más honesto posible.

Esto último conduce a cuestionamientos sobre la propuesta didáctica que el profesor de matemáticas diseña para su implementación en el aula, en particular, sobre el teorema de Bayes. El proyecto de investigación tuvo por objetivo identificar los significados que el profesor de matemáticas le atribuye al teorema de Bayes y describir la propuesta generada por estos significados.

El conocimiento del profesor de matemáticas

El interés en el conocimiento del profesor se debe a que las propuestas sobre los estocásticos dentro del aula dependerán exclusivamente de lo que conocen sobre los objetos, al respecto Díaz, Contreras, Batanero y Roa (2012) al citar a Ma (1999), señalan:

> los profesores no necesitan un conocimiento probabilístico abstracto, sino requieren una comprensión profunda de la probabilidad básica, de las interconexiones y relaciones entre los diferentes conceptos probabilísticos y sus aplicaciones

Por tanto, el conocimiento sobre los estocástico está relacionado con esas construcciones del saber lo más honestas posibles, que se llevan a cabo en los diferentes momentos en que profesor interactúa con el saber matemático; siendo estas interacciones las que conforman, construyen y deconstruyen los significados que se promueven en el aula, se estructuran en un plan de clase y sirven de base para tomar decisiones sobre los recursos didácticos que se implementarán para el aprendizaje. (Figueroa, Baccelli, Prieto y Moler, 2013).

En términos de la investigación, el interés está en el conocimiento que el profesor usa para la enseñanza y se distingue por un conocimiento sobre aquello que enseña y el conocimiento de las formas de construir, difundir y negociar dentro del aula; dicho conocimiento es denominado Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) caracterizado por las formas en que el profesor representa y formula un saber matemático para hacerlo comprensible a otros bajo un contexto específico de enseñanza (Pinto, 2010).

En específico, son dos componentes del CDC que nos permiten comprender los significados asociados al saber: 1) El conocimiento del contenido a enseñar, se basa en el supuesto de que el profesor debe ser consciente de la naturaleza de los saberes matemáticos que le permitan tomar decisiones respecto a su enseñanza y sobre los contexto que propone para su aprendizaje y 2) Conocimiento de la didáctica específica, establece que un conocimiento de las matemáticas no lo es todo en la labor profesional del profesor, también es pertinente conocer las formas en que este conocimiento puede ser llevado al aula, los momentos apropiados, las formas de relacionarnos, las dificultades, las secuencias didácticas más apropiadas, las representaciones y las actividades que faciliten a los alumnos aprehender matemáticas

El teorema de Bayes en relación al conocimiento del profesor

La incorporación del teorema de Bayes en contextos escolares ha tenido fuertes implicaciones en cuando a su enseñanza, algunas veces limitado a una explicación más determinista o bien frecuentista de la probabilidad; aunado a ello se le atribuye al teorema una complejidad debido a su matematización que involucra propiedades, definiciones y conceptos como la probabilidad simple, compuesta, condicional, particiones, eventos mutuamente excluyentes, eventos independientes, regla del producto, regla de la adición, entre otros (Díaz, Ortiz y Serrano, 2007), tópicos que debido a la estructura temática se ven aislados y sin relación uno con otro, dificultando la comprensión del teorema de Bayes.

Contrario a la escuela, los tratados de Bayes y Price (1763) señalan que el propósito de este teorema era proponer una estrategia para el cálculo de una probabilidad simple (la razón de éxito de un evento y posibles) de forma inversa. Bayes propone el hecho de pensar que si ocurrió un evento, este podría ser explicado bajo diversas causas o bien diversas hipótesis, por tanto era necesario hacer inferencia sobre la posibilidad de que una de esas causas o las causas generaron dicho evento.

El pensamiento de Bayes, tiene la intención de expresar que a todo suceso corresponde una causa que ha determinado dicho efecto, de ser así, es posible encontrar un método que permita establecer resultados acerca de la probabilidad que tiene de ocurrir un suceso bajo cierta causa o circunstancia, basado en la experiencia que se tiene en los efectos que han provocado un número de veces y han intervenido en su no ocurrencia otro cierto número de veces. Para Bayes la experiencia adquirida a partir de la repetición de un evento se postula como una hipótesis acerca de su comportamiento futuro; estas adquiridas mediante la observación se establecen como probabilidad a priori, y la hipótesis, que en el momento no es observable, luego de ser comprobada se establece como una probabilidad a posteriori.

$$P(a \mid b) = \frac{P(b \mid a)P(a)}{P(b)} \qquad (1)$$

En la ecuación 1, se resalta que $a|b$ es la hipótesis de que un suceso a haya ocurrido bajo ciertas circunstancias b, para esto se conoce los datos empíricos de b denominados las probabilidades a priori; dichas probabilidades determinan un valor de éxito en que el evento $a\ y\ b$ ocurren simultáneamente $(a \cap b)$ bajo condiciones de dependencia dando lugar a calcular la probabilidad de la razón de la posibilidad de que ocurre a y la ocurrencia de b cuando el suceso a ocurrió, dividido entre la ocurrencia de la circunstancia b ya que es la que nos interesa. Esta probabilidad va acorde a la probabilidad clásica, ya que la ocurrencia simultánea $(a \cap b)$ es las causas favorables y la ocurrencia de b las causas posibles de nuestro interés.

En efecto, lo que hay detrás del teorema de Bayes, es un cambio de creencias respecto a la o las causas de un evento, estas creencias están basadas en información empírica. Cuando evaluamos las causas condicionándolo al evento sucedido, se realiza una hipótesis previa, la cual después de ser valorada, evidentemente provocará un cambio de creencias con respecto a las causas que originan dicho evento. El teorema, permite observar el grado de racionalidad con la que una persona cambia sus creencias cuando consigue nueva información, este cambio de creencias debería ayudarlo a tomar una decisión de cómo actuar ante tal evento.

Marco Metodológico

De acuerdo al objetivo, se consideró el desarrollo de una investigación de corte cualitativo; este enfoque permite comprender la realidad del conocimiento del profesor de una forma dialéctica y sistémica, y más aún cuando se considera que los significados surgen de aquello que conoce sobre el saber (sus constructos, nociones, naturaleza, etc.) en un contexto de la enseñanza y aprendizaje bajo un paradigma naturalista e interpretativo.

En cuanto al método, se eligió un estudio de casos debido a que puede ser: 1) Descriptivo si lo que se pretende es identificar y describir la relación que tienen los diferentes factores que influyen en el fenómeno, y 2) Exploratorio cuando pretende vincular la teoría con la realidad del objeto de estudio (Martínez, 2006).

En cuanto a los casos se contaron con profesores con la misma formación inicial, que estuvieran laborando en una institución de educación media superior, que en el período de la investigación estuviera impartiendo la materia relacionada con los estocásticos.

Para el establecimiento de las unidades de análisis se consideró la propuesta de Pinto (2010) sobre la perspectiva teórica del Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC). Dicha propuesta surge del análisis y reflexión sobre diferentes investigaciones de carácter sistémico y con rigor científico, que han establecido algunos aspectos que componen y caracterizan el CDC. En su propuesta se dividen las tres componentes en dimensiones, que son las formas en que se divide cada componente y que son las unidades de análisis; a su vez estas dimensiones se segmentan y codifican en indicadores, las que permiten recolectar los datos y categorizar todo lo observado dentro CDC. De tal forma que los componentes quedan particionados de la siguiente manera:

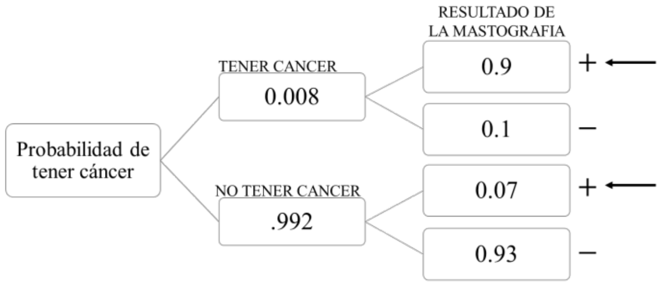
- El conocimiento del contenido a enseñar: contiene 6 dimensiones, 18 indicadores y 25 subindicadores
- El conocimiento de las estrategias y representaciones instruccionales: contiene 6 dimensiones, 24 indicadores y 19 subindicadores

Partiendo del estudio del teorema de Bayes y el sistema de dimensiones e indicadores del CDC de Pinto, se establecieron tres tipos de instrumentos de recolección de información: 1) una entrevista en profundidad, 2) entrevista basada en un problema típico y 3) los materiales utilizados por los profesores en su enseñanza.

Resultados

En cuanto a los resultados se discute el caso de Ana, sus significados y la propuesta de enseñanza sobre el teorema de Bayes. Respecto a la propuesta de enseñanza se propone discutir sobre un ejemplo concreto:

> Se sabe que 0,8 % de las mujeres adultas pueden tener cáncer de mamas. Si una mujer tiene cáncer de mamas, hay un 90 % de probabilidad que tenga una mastografía positiva. Si una mujer no tiene cáncer de mamas, todavía existe un 7 % de probabilidades que tenga una mastografía positiva. Si una mujer va al control anual y tiene su mastografía positiva ¿Cuál es la probabilidad de que tenga cáncer? (Strogatz, 2010)



$$\frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{0.008(0.90)}{0.008(0.9) + (0.992)(0.07)} = \frac{0.0072}{0.07664} = 0.0939$$

SUBTOTAL

Figura 1. Trascripción de la propuesta de Ana para la enseñanza del teorema de Bayes

La figura 1, representa el modelo que Ana promueve en el salón de clases, su propósito es la reducción de la fórmula del teorema de Bayes a la forma clásica de la probabilidad, casos favorables entre casos posibles. Para dicha reducción, tiene que llenar cada una de las ramificaciones con la información proporcionada y suponer que cada evento tiene su contraparte: Si el evento A: tiene cáncer, A': está determinado por no tener cáncer; sí B: tiene una mastografía positiva, B': tiene una mastografía negativa; dicha organización del contenido responde a la experiencia en el cotidiano. Sin embargo Ana no distingue en que la naturaleza de esta organización responde a que el espacio muestra está conformado por subespacios equiprobables, mutuamente excluyentes y exhaustivos.

Por otra parte, ella sabe que debido a que el teorema de Bayes es una fórmula para calcular probabilidades, debe poder reducirse a su forma más clásica aunque la profundidad de dicha aseveración es basada en su experiencia. Para el cálculo de los casos favorables entre los casos posibles se reducen las opciones a considerar de acuerdo al evento que ya sucedió, es decir, Ana asume que el teorema de Bayes es una probabilidad condicionada. Dicha condición nos permite el cálculo de lo que ella denomina subtotal, mediante las multiplicaciones de las probabilidades en cada ramificación y la suma de todos los casos en los que, según el ejemplo, se obtiene una mastografía positiva. Cuando se le cuestionó del por qué hay que multiplicarlos y no sumarlos, su respuesta fue debido a que estos eventos dependen de lo que paso antes. Del subtotal la información pedida responde a un caso, que se convierte automáticamente en la probabilidad del caso favorable.

Cabe señalar, que para Ana el teorema de Bayes se convierte en una generalidad de la probabilidad condicionada, ya que en sus palabras “Es calcular una probabilidad condicionada, teniendo otras posibilidades condicionadas”, este aspecto es cuestionable sobre cuál sería la diferencia entre ambas nociones la probabilidad condicionada y el teorema de Bayes.

La figura 2, enfatiza los significados asociados al teorema de Bayes por la profesora Ana, que continuamente estuvieron presentes en su discurso y que son los que comunica y de los que se apoya para dar validez al modelo que propone.

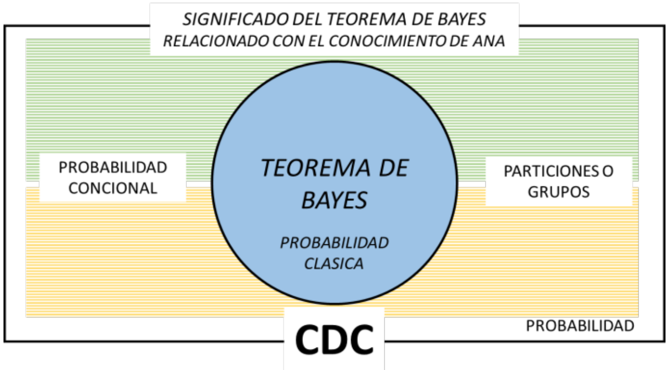


Figura 2. El significado del teorema de Bayes

La propuesta de Ana es acorde al enfoque determinista de la probabilidad, pues permite establecer procedimientos y algoritmos que tienden a enfocarse en el cálculo de probabilidades, y nuevamente cumple con el requerimiento escolar. La propuesta de Gómez (2000), que es la propuesta de Ana, señala que en el diagrama se haga mención de elementos como eventos dependientes, excluyentes, cálculo de probabilidad conjunta, etc., como parte comprender porque la asignación de probabilidades en cada una de las ramificaciones y el cálculo de los casos favorables entre los casos posibles.

Conclusiones

Con base en lo anterior, sobresale la afirmación de Llinares (1989), quien señala la importancia de los significados que los profesores le otorgan a los saberes, ya que estos determinan el modo en el que una persona ve a los saberes, los usos que les da, los contextos en que decide utilizarlo y también la forma en que los trasmite o habla sobre ellos. La propuesta de Ana responde a los significados que ella ha asociado al teorema de Bayes, debido a que su interacción se reduce a la información que se encuentra en la mayoría de los libros de texto, asimismo su desarrollo es meramente empírico y tiende a ser lógico, común a la toma de decisiones que se hace en el cotidiano y donde solo es necesario saber que la probabilidad puede resumirse en una razón de casos favorables entre casos posibles.

Estos resultados apoyan la idea de que es mediante la interacción continua con el saber matemático que los profesores construyen su conocimiento alrededor de un saber específico, pues dependen de aquellos significados que construyan y reconstruyan en cada momento que ellos se acerquen y conozcan esos saberes, no solo en el ámbito escolar, sino en diversos ámbitos donde es funcional;

mirar los saberes solo en el contexto escolar, es solo mirar un objeto matemático producto de una transposición didáctica que ha perdido mucho de aquello que le brinda significado.

Por tanto, la profundidad de los saberes se logrará cuando se permita al profesor reflexionar y problematizar lo que conoce del saber, de interactuar con él en diferentes escenarios y en profundizar sobre la epistemología del saber. Esta profundidad brinda autonomía en la práctica lo que permite al profesor diseñar propuestas, rediseñar el discurso matemático escolar y cambiar el paradigma de enseñanza de los estocásticos, pasando de la centración del objeto a la centración del saber, de la trasmisión de conocimiento a la construcción colectiva de los saberes.

Con lo anterior, se busca enfatizar la importancia de estudios que den evidencia del conocimiento del profesor, de la necesidad de proponer espacios y mecanismos para la interacción y sobre entender el conocimiento del profesor basado en los significados que le otorgan a los saberes, y más aún cuando estos determinan el modo en el que una persona ve a los saberes, los usos que les da, los contextos en que decide utilizarlo y también la forma en que los trasmite o habla sobre ellos.

■ Referencias bibliográficas

Azcárate, P. y Cardeñoso, J. (2003). Conocimiento Profesional de referencia con relación al conocimiento probabilístico. Una aproximación a las ideas de los futuros profesores de primaria sobre el mismo. *Acta del Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. 27*, 941-984

Azcárate, P. (2006). ¿Por qué no nos gusta enseñar estadística y probabilidad? Universidad de Cádiz. Recuperado de: http://www.earlystatistics.net/.../files/Azcarate_thales2006_Conferencia.doc

Bayes, T. y Price, M. (1763). An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances. By the late Rev. Mr. Bayes, FRS communicated by Mr. Price. In a letter to John Canton, AMFRS. *Philosophical Transactions* (1683-1775), 370-418.

Del Pino, G. y Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. Pensamiento Educativo. *Revista de Investigación Educacional Latinoamericana, 49(1)*, 53-64.

Díaz, C., Contreras, J., Batanero, C. y Roa, R. (2012). Evaluación de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en futuros profesores de educación secundaria. *Boletim de Educação Matemática, 26(44)*, 1207-1225.

Díaz, C., Ortiz, J., y Serrano, L. (2007). Un estudio experimental de las dificultades de los estudiantes en la aplicación del Teorema de Bayes. *Investigación en Educación Matemática XI*. 199-208.

Elizarrarás, S. (2014). El pensamiento estocástico y el pensamiento pedagógico en la formación de docente para la educación básica: Viabilidad, Trascendencia y Pertinencia. *Libro de avances de investigación en la mejora de la educación en la formación de docentes, 2*, 15-27

Figueroa, S., Baccelli, S., Prieto, G., y Moler, E. (2013). Funciones semióticas asociadas a los errores más frecuentes en la resolución de problemas Bayesianos. *Revista de Educación Matemática*.

García, J., Medina, M., y Sánchez, E. (2014). Niveles de razonamiento de estudiantes de secundaria y bachillerato en una situación-problema de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 6*, 5-23.

Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso estrategia metodológica de la investigación científica. *Revista científica Pensamiento y Gestión*, (20)

Ortiz, J. (2014). Estudio de las situaciones problemas de probabilidad en libros de texto de bachillerato. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 503-511). Salamanca: SEIEM

Pinto, J. (2010). Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: Estudio de casos con profesores de estadística en carreras de psicología y educación. *Tesis doctoral no publicada*. Universidad de Salamanca

Rocha, P. (2007). Epistemología del razonamiento estadístico y aleatorio y su desarrollo a partir de proyectos de trabajo estadístico como innovación en la enseñanza de los objetos de estudio estocásticos. *Memorias del ENAES*. Bogotá.

Salcedo, A. (2006). Didáctica de la Estocástica. Universidad Nacional Abierta. Caracas.

CONOCIMIENTO COMÚN Y ESPECIALIZADO DE PRODUCTOS NOTABLES DE LOS FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Judith Alejandra Graciano Barragán, Lilia Patricia Aké Tec
Universidad de Colima. (México)
judith.graciano1c@gmail.com, lake86@gmail.com

RESUMEN: Esta investigación de corte cualitativo tiene por objetivo describir aspectos parciales del conocimiento común y especializado de productos notables de los futuros profesores de matemáticas, en el marco del Conocimiento Matemático para la Enseñanza, propuesto por Hill, Ball y Schilling en el 2008. La investigación se desarrolla con estudiantes de la Licenciatura en Educación Media Especializado en Matemáticas de la Universidad de Colima. El interés es la búsqueda de aportaciones para la formación de profesores y la mejora de la práctica en el aula. Al respecto, los resultados que se obtuvieron a través de un cuestionario de respuesta abierta, rescatan inconsistencias principalmente en el conocimiento especializado del contenido de productos notables, pero también se reconocen áreas de oportunidad para su fortalecimiento.

Palabras clave: conocimiento matemático para la enseñanza, productos notables, formación de profesores

ABSTRACT: This qualitative research aims to describe partial aspects of the common and specialized knowledge of future math teachers with respect to notable products, within the framework of Mathematical Knowledge for Teaching, proposed by Hill, Ball and Schilling in 2008. The research was carried out with High Education Degree students, majoring in mathematics at the University of Colima. It is concerned with the search of contributions for teachers' training and the improvement of practice in the classroom. In this regard, the results obtained through an open-ended questionnaire, rescue inconsistencies mainly in the specialized knowledge of the content of notable products, but also recognize areas of opportunity for its strengthening.

Key words: mathematical knowledge for teaching, notable products, teachers' training

Introducción

El álgebra representa un área de difícil acceso conceptual para los estudiantes, situación que suscita la incidencia en errores de manera reiterada y que por tanto restringe el aprendizaje de los contenidos de esta materia por parte de los aprendices (Carpenter, Frankie & Levi, 2003). En particular, el tema de productos notables es percibido por los alumnos como una barrera que limita sus estudios (Chang & Tsai, 2005), dado que es un contenido matemático importante para continuar con éxito los diversos temas del currículo de matemáticas tales como: simplificaciones de expresiones, operaciones con fracciones algebraicas y límites (Vega, 2010) por mencionar algunos ejemplos.

Dada la complejidad del estudio de los productos notables y bajo la consideración de que los conocimientos que el profesor exhibe tienen un efecto en lo que los estudiantes aprenden (Hill, Rowan & Ball, 2005), es que el presente estudio se interesa por el conocimiento del profesor en el contexto de su formación inicial.

Estudiar la formación del profesorado de matemáticas es de particular interés para los estudiosos de la matemática educativa, ya que es necesario identificar los conocimientos que un profesor debe desarrollar durante su formación profesional (Rojas, Flores y Carrillo, 2013). Sobre todo, porque se considera que el docente debe saber mucho más de lo que se espera que enseñe en determinado nivel educativo (Hill, Sleep, Lewis & Ball, 2007) y que como profesional de la enseñanza debe tener un conocimiento específico que lo distinga.

Es en este sentido, que se pretende caracterizar el conocimiento de los profesores de matemáticas teniendo como referente al Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT por sus siglas en inglés: Mathematical Knowledge for Teaching) propuesto Hill, Ball y Schilling en el 2008, teniendo como guía la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuál es el conocimiento común y especializado de productos notables de los futuros profesores de matemáticas que cursan la Licenciatura en Educación Media Especializada en Matemáticas?

Marco Teórico

Dentro del marco de la formación de profesores, una perspectiva utilizada para abordar los estudios sobre el conocimiento del profesor de matemáticas se basa en los trabajos de Ball y colaboradores (Ball, 2000; Hill, Ball y Schilling, 2008; Ball, Thames, & Phelps, 2008), en los cuales se propone el modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza. Dicho modelo es ampliamente considerado para el análisis del conocimiento del profesor y para el diseño de tareas que mejoren su práctica (Carrillo et. al, 2013), y es que para afrontar profesionalmente las actividades que su labor conlleva, el profesor de matemáticas, debe poseer un conocimiento profesional específico (Sosa, 2011). De este modo, se asume que el conocimiento matemático para la enseñanza es un elemento clave en el conocimiento profesional del profesor.

El MKT es definido como “el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno” (Hill, Ball, & Schilling, 2008, p. 374) y se encuentra conformado en dos categorías denominadas, conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido tal y como se puede observar en la figura 1.

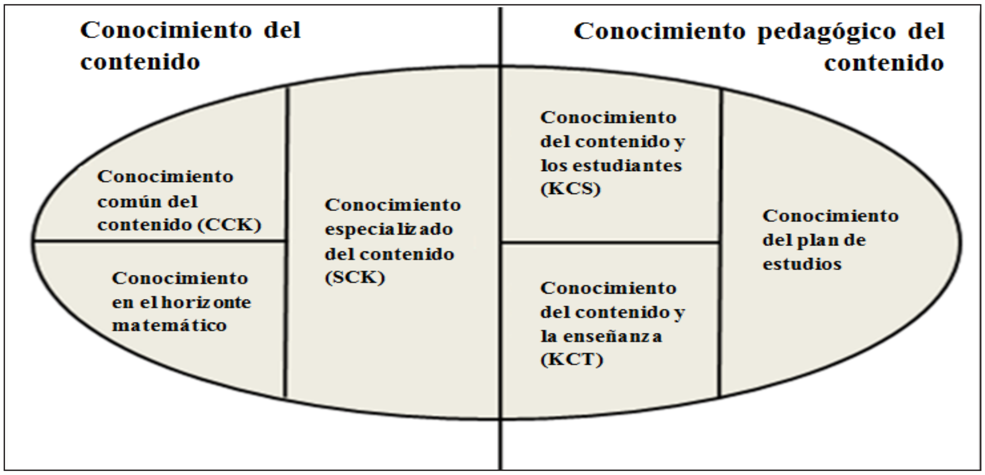


Figura 1. Conocimiento matemático para la enseñanza (traducido de Hill et al, 2008, p.337)

El conocimiento del contenido se divide en tres subdominios: conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento en el horizonte matemático, los cuales se describen a continuación.

- *Conocimiento común del contenido:* es el conocimiento matemático en conjunto con las habilidades para dar respuesta a las tareas y actividades que como docente pones a realizar a los alumnos (Ball, Thames, & Phelps, 2008)
- *Conocimiento especializado del contenido:* es el que permite dar explicaciones sobre las reglas y procedimientos de los temas de la asignatura, al igual que analizar los métodos propuestos por los alumnos a ver si pueden funcionar de manera general (Hill et al, 2008).
- *Conocimiento en el horizonte matemático*: Sosa en el 2011 lo describe como el conocimiento de un contenido específico en relación a las diferentes etapas educativas, incluyendo las habilidades para comprender la importancia del contenido en su trayectoria curricular.

Por otra parte, el conocimiento pedagógico del contenido se fragmenta en: conocimiento del contenido y los estudiantes, conocimiento del contenido y la enseñanza y conocimiento del plan de estudios. A continuación, se realiza una interpretación en base a los autores de cada subdominio.

- *Conocimiento del contenido y los estudiantes:* es el conocimiento sobre como los estudiantes piensan, conocen y aprenden el contenido, por esa razón además se incluye la identificación de dificultades y concepciones erróneas (Hill et al, 2008).
- *Conocimiento del contenido y la enseñanza:* es descrito por Ball et al (2008), como el conocimiento que involucra discriminar entre los ejemplos para comenzar el contenido y terminar, los ejercicios a utilizar y el saber que representaciones son las adecuadas para enseñar cierto tema específico.
- *Conocimiento del plan de estudios:* trata sobre el conocer el plan de estudios, es decir los objetivos, contenidos que se imparte de acuerdo al nivel educativo, evaluaciones, orientaciones curriculares, recursos y materiales que permiten guiar la práctica para lograr el aprendizaje de los estudiantes (Ball et al, 2008)

Este estudio, particularmente se centra en describir e identificar aspectos parciales del conocimiento común y especializado de productos notables de los futuros profesores de matemáticas que cursan la Licenciatura en Educación Media Especializada en Matemáticas (LEMEM).

Método

La investigación tiene un enfoque primordialmente cualitativo ya que se pretende identificar y describir el proceso de formación de los futuros profesores de matemáticas a nivel bachillerato en cuanto a la adquisición del conocimiento común y especializado de productos notables en el marco del modelo MKT.

La selección de la muestra es intencional, por tanto, no aleatoria ya que se eligió al grupo de quinto semestre de la LEMEM de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Colima, con un total de 30 estudiantes. Se aplicó un cuestionario de respuesta abierta como instrumento de recogida de datos, con el que se pretende analizar los dos subdominios del conocimiento antes mencionados.

En este sentido, vale la pena reiterar que dicho cuestionario se encuentra articulado desde las propuestas del conocimiento del profesor de matemáticas en relación al MKT, pero también se ha considerado en su diseño la articulación de preguntas específicas, según la lógica de Godino (2009), para analizar en este caso el conocimiento especializado.

Para el análisis de las respuestas al cuestionario se llevó a cabo una clasificación de las producciones de los futuros profesores tomando como referencia el análisis de los conceptos y procedimientos utilizados en la resolución.

Descripción de los resultados

El cuestionario, que consta de 5 tareas, fue aplicado en dos etapas. En la primera etapa se indaga sobre el conocimiento común, a través de las tareas 1 y 2; mientras que, en la segunda etapa del cuestionario, a través de las tareas 3, 4 y 5, se indaga sobre conocimiento especializado del contenido utilizando preguntas específicas. A continuación, se describen sucintamente cada una de las tareas implicadas en el cuestionario:

La tarea 1 consta de 3 ítems (1A, 1B y 1C) que plantean la simplificación de fracciones algebraicas.

La tarea 2 consta de 3 ítems (2A, 2B y 2C) que plantean el cálculo de límites aparentemente indeterminados.

La tarea 3 plantea la respuesta hipotética de un estudiante a la simplificación de una fracción algebraica en la que se evidencia la aplicación de la división para obtener la respuesta. Se cuestiona sobre la viabilidad de la utilización de la división en dicho contexto.

La tarea 4 plantea la respuesta hipotética de un estudiante al desarrollo de un binomio al cubo. Respecto a esa solución dada se solicita la identificación de conceptos de tipo algebraicos implicados en la respuesta del estudiante.

La tarea 5 plantea el producto notable en el contexto aritmético y se solicita una justificación sobre su grado de corrección.

Para resolver las tareas planteadas en la primera etapa del cuestionario vinculado con el conocimiento común, el futuro profesor tiene que identificar el producto notable, sin la necesidad de realizar la multiplicación indicada en las expresiones. Autores como Hoch y Dreyfus (2004) denominan a esto como sentido estructural.

En el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes a las tareas vinculadas al conocimiento común, se identificaron tres tipos de producciones: a) Identifica el producto notable y realiza la simplificación de fracciones o el cálculo del límite aparentemente indeterminado de manera correcta; b) no identifica el producto notable pero determina la respuesta correcta, dado que se desarrolla las multiplicaciones indicadas para comprobar si efectivamente es posible realizar una simplificación; c) no identifica el producto notable y presenta errores que no permiten llegar a la resolución del ítem de la tarea.

También se categorizó bajo la etiqueta “sin contestar” aquellas producciones de estudiantes que se encontraron en blanco. Al respecto, en la figura 2 se registra las frecuencias de los estudiantes considerando la categorización previa.

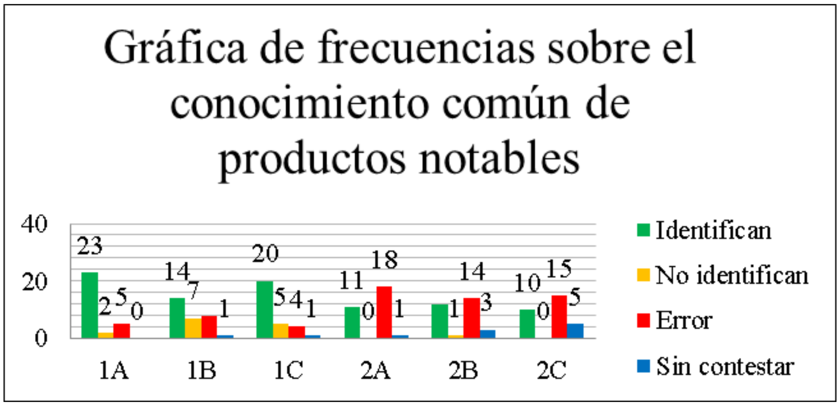


Figura 2. Gráfica de frecuencias del conocimiento común del contenido

De la gráfica de frecuencias se colige que el mayor número de errores tuvieron lugar en el contexto del cálculo de límites aparentemente indeterminados. En este caso, los estudiantes no reconocen el producto notable pero también cometen errores que no les permite obtener una respuesta satisfactoria. Particularmente la tarea 2 en su ítem c, resultó compleja para los futuros docentes de bachillerato dado que 20 respuestas de 30, no reflejan la determinación de una respuesta correcta. Llama la atención, el ítem 1B en el que 21 estudiantes obtienen la respuesta correcta a la simplificación de fracciones algebraicas, pero 7 de ellos se vieron en la necesidad de comprobar el producto notable realizando la operación indicada.

Por ejemplo, en la figura 3 se muestra un caso específico del estudiante 25, se aprecia el desarrollo de las multiplicaciones de los binomios conjugados $(2x + 1)(2x - 1)$ que se encuentran en el denominador. Después, a partir del desarrollo de los binomios conjugados se obtiene la diferencia de cuadrados $4x^2 - 1$, la cual es igual a la que se encuentra en el numerador. Por lo tanto, realizan la cancelación de términos obteniendo el resultado correcto.

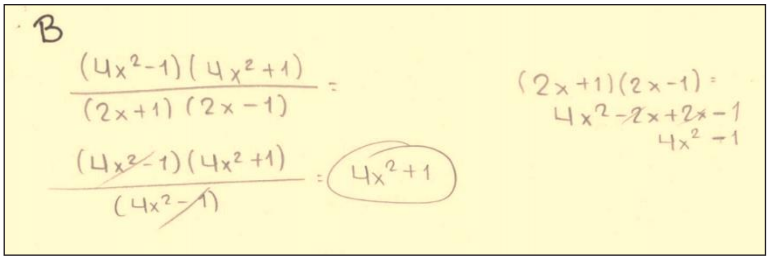


Figura 3. Estudiante 25, comprueba el desarrollo de los binomios conjugados

De manera general los futuros profesores, aunque resuelven la tarea de manera correcta presentan limitaciones en el conocimiento que debe ser compartido con sus estudiantes en cuanto al reconocimiento de la estructura del producto notable en cuestión esto podría imposibilitar la realización de las tareas que como profesores les pueden asignar a sus alumnos.

La segunda etapa del cuestionario constaba de las tareas 3, 4 y 5 vinculadas al conocimiento especializado. Para realizar el análisis de estas tareas se determinaron categorías que permitieron discernir entre las respuestas de los estudiantes y que permitieron ubicar su conocimiento especializado como en vías de desarrollo, parcialmente desarrollado y desarrollado (tabla 1).

Tabla 1. Categorías de análisis del conocimiento especializado (Elaboración propia)

Categoría	Interpretación
Desarrollado	En la tarea 3, argumenta los métodos que facilitarían a los alumnos la simplificación de fracciones e identifica las dificultades y errores que el método de división puede propiciar. En la tarea 4, identifica los conceptos algebraicos que se ponen en manifiesto al resolver el ejercicio de binomio al cubo. En la tarea 5, realiza explicaciones y argumentaciones sobre los procedimientos empleados en relación a la resolución de la expresión aritmética que involucra el binomio al cuadrado, pero haciendo hincapié en icho producto notable.
Parcialmente desarrollado	En la tarea 3, efectúa argumentaciones inconsistentes sobre la utilización de la división como método para simplificar fracciones algebraicas. En la tarea 4, identifica algunos de los conceptos empleados en la resolución del ejercicio de binomio al cubo. En la tarea 5, realiza explicaciones sobre la expresión aritmética que involucra el binomio al cuadrado, pero basándose en procedimientos puramente aritméticos y no en la estructura del producto notable.
En vías de desarrollo	En la tarea 3, falta de argumentos que justifiquen la respuesta del futuro profesor respecto a la simplificación de fracciones utilizando la operación de división. En la tarea 4, falta de identificación de conceptos algebraicos plasmados en el ejercicio sobre el binomio cubo. En la tarea 5, realiza explicaciones realizadas sin percatarse de la estructura del producto notable y cometiendo errores en dichas explicaciones.

En la figura 4 donde se aprecian las frecuencias de los ítems en relación al desarrollo del conocimiento especializado, podemos observar que sobresale el conocimiento en vías de desarrollo para el caso de la tarea 5 debido a que se presentan inconsistencias en las explicaciones y argumentaciones sobre las reglas y procedimientos. Además, en la tarea 4 el profesor en formación presenta dificultades para la identificación de conceptos de tipo algebraicos presentes en dicha tarea.

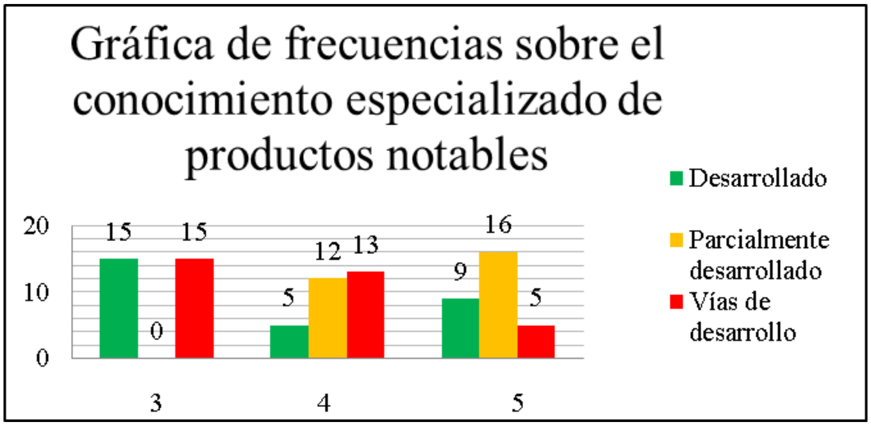


Figura 4. Gráfica de frecuencias del conocimiento especializado

En este sentido, es posible que el futuro profesor se encuentre con dificultades al momento de realizar adaptaciones, explicaciones y justificaciones a los procedimientos reglas y conceptos a enseñar.

Conclusiones

Se advierte que los futuros profesores de matemáticas presentan inconsistencias en el conocimiento común del contenido ya que tienen dificultades para reconocer la estructura del producto notable y recurren a realizar la operación indicada. El conocimiento especializado puede ser potencializado a partir del análisis de situaciones como las que se presentan en el cuestionario aplicado a los maestros en formación. Aunque se encontraron limitaciones, se enfatiza que, a partir de este estudio, es posible aportar información que ayude a tomar decisiones sobre qué contenidos son necesarios abordar en la formación de profesores, así sobre cómo se precisa desarrollarlos. En el contexto mexicano, alcanza mayor relevancia, dado que han comenzado a emerger licenciaturas orientadas a formar a profesores de matemáticas. Tiene sentido entonces reflexionar sobre una formación específica para los docentes de matemáticas de primaria, de secundaria y de bachillerato que conduzca al reconocimiento de una formación homogénea en la que el modelo MKT puede ser orientador.

Referencias bibliográficas

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, *51*, 241-247.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389 - 407.

Carrillo, J., Flores, E., Climent, N., Contreras, L., Aguilar, A., Escudero, D. & Montes, M. (2013). Investigación sobre el profesor de matemáticas. En C. Dolores, M. García, J. Hernández & L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 97-116). Guerrero, México: Díaz de Santos Ediciones, S. A.

Carpenter, T. P., Frankle, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically. Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Chang, C. & Tsai, Y. (2005). An alternative Approach for the Learning of (a+b)2= a2+2ab+b2. *The 3er East Asia Regional Conference in Mathematics Education.* Recuperado de http://ir.ncue.edu.tw/ir/handle/987654321/14569

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de educación matemática, 20*, 13-31.

Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal of Research in Mathematics Education, 39*(4), 372 - 400.

Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. L. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American educational research journal, 42* (2), 371- 406.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M. & Ball, D. L. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge: What Knowledge Matters and What Evidence Counts? En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111- 155). Charlotte, USA: NCTM, Age publishing.

Hoch, M. & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra. The effect of brackets. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, Vol. 3, (pp. 49-56). Bergen, Normay: Bergen University College

Rojas, N., Flores, P. & Carrillo, J. (2013). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales*. Avances de Investigación en Educación Matemática-AIEM, 4*, 47-64.

Sosa, L. (2011). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato: un estudio de dos casos* (Tesis de doctorado no publicada). Universidad de Huelva, España.

Vega, D. C. (2010). *Sentido estructural manifestado por alumnos de 1° de bachillerato en tareas que involucran igualdades notables* (Tesis de doctorado no publicada). Universidad de Granada, España.

LOS RECURSOS SEMIÓTICOS DEL PROFESOR DE ESTADÍSTICA ASOCIADOS AL RENDIMIENTO ACADÉMICO DE LOS ESTUDIANTES

Guadalupe Corona-Rafael, Eduardo Alejandro Escotto-Córdova, José Gabriel Sánchez-Ruíz
Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, Universidad Nacional Autónoma de México
(México)
guadalupe.unam.cr@gmail.com, aescotto@unam.mx, josegsr@unam.mx

RESUMEN: El objetivo del trabajo fue identificar qué recursos semióticos utilizan los profesores de estadística de la Carrera de Psicología de un campus de la UNAM-México en sus clases y conocer su relación con el rendimiento académico en los alumnos. Participaron trece estudiantes de la FES Zaragoza. Se trabajó con observación participante y grupos de discusión. El indicador del rendimiento académico fueron las calificaciones obtenidas en el curso de estadística. Las sesiones de los grupos de discusión fueron grabadas, transcritas y analizadas. Los resultados obtenidos evidenciaron que el recurso semiótico no formal tiene relación con un mejor rendimiento académico en los alumnos.

Palabras clave: recursos semióticos, estadística, rendimiento académico

ABSTRACT: The aim of this work was to identify which semiotic resources Statistics teachers of the Psychology degree at the National Autonomous University of Mexico (UNAM) use in their classes and to know their relation with the students' academic performance. Thirteen students from Zaragoza FES participated. We used active observation and discussion groups. The marks obtained in the statistics course constituted the academic performance indicator. The sessions of the discussion groups were recorded, transcribed and analyzed. The outcomes showed evidenced that the non-formal semiotic resource is related to a better academic performance in the students.

Key words: semiotic resources, statistics, academic performance

Introducción

De acuerdo con Ramírez (2015), la reprobación en la educación se debe a cuatro posibles causas: la primera es la motivación, sus indicadores son la falta de interés en las clases, en los temas, en la falta de comprensión de la utilidad de lo aprendido, el no ir a clases, no cumplir con tareas o trabajos; la segunda causa es la emocional, que como su nombre lo indica, puede haber en el estudiante problemas de frustración, estrés, depresión, etc., desarrollados a nivel personal, social o familiar; el tercer factor es a nivel académico, el cual considera que hay temas complejos, difíciles de comprender y por lo tanto implican dificultad de aplicar lo aprendido a situaciones prácticas, y por último el factor pedagógico, en el cual hay dificultad en la forma en que los profesores exponen los temas, resuelven dudas y en la forma en que dirigen una clase (Talavera, 2006 y Ríos, 2008). Además de la lectura y la escritura, las matemáticas son uno de los aprendizajes fundamentales de la educación, y no solo para el ámbito educativo, sino que son consideradas una herramienta para la vida diaria (Salett y Hein, 2004). En México, de acuerdo con los resultados presentados por la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2013 y 2014), en la Evaluación Nacional del Logro Académico en las Escuelas (ENLACE), existe un porcentaje alto de estudiantes de Nivel Básico y Media Superior que muestran un bajo dominio de conocimientos y poseen pocas habilidades en Español, Formación Cívica y Ética y sobre todo en Matemáticas. Por ello las matemáticas son consideradas una de las materias con mayor rezago educativo (Gil, Blanco y Guerrero, 2006).

Para Rockwell (1995) al maestro se le asigna un papel central en la creación de cualquier plan educativo, pues son los maestros los que en las aulas construyen la educación. Debido a su importancia existen diversas investigaciones que han tratado de resolver cuál es el mejor método para su aprendizaje. Para Duval (2000) el aprendizaje de las matemáticas involucra un análisis de procesos cognitivos como es la conceptualización, para ello se ayuda de la representación semiótica la cual define como producciones constituidas por el empleo de signos, es decir, son el medio por el cual disponen los individuos para exteriorizar sus representaciones mentales, para hacerlas visibles y accesibles a otros. Entendiéndose por signo “todo aquello que representa a otra cosa, es decir, lo que está en lugar de otra cosa” (Beuchot, 2004, p. 7). Los signos más utilizados son el lenguaje y la escritura. El signo es usado para reemplazar al objeto representado por los individuos y transmitido a los demás por medio de la comunicación. Al ser importante la comunicación, el lenguaje se vuelve un intercambio semiósico, por lo que algunos autores como Godino (2004), consideran que el lenguaje en el proceso de enseñanza-aprendizaje tiene un papel fundamental debido a que se vuelve el medio principal para comunicar y transmitir el conocimiento, siendo visto éste como un recurso semiótico (formal y no formal) con que los profesores cuentan a la hora de interactuar con los estudiantes.

Si hablamos de lenguaje, a las matemáticas se les suele atribuir su propio lenguaje debido al uso de conceptos, formulas, signos, números, figuras, diagramas, etc., por lo que se considera que es una de las materias más complejas y abstractas. Tamayo (2006) destaca la importancia de orientar los procesos de enseñanza desde una perspectiva multimodal en la que se propicie la construcción de diferentes representaciones por parte de los estudiantes y frente a las cuales los profesores actúen de manera intencionada y consciente en su proceso de enseñanza, para ello habló de las representaciones semióticas, haciendo referencia a todas aquellas construcciones de sistemas de expresión y representación que pueden incluir diferentes sistemas de escritura, como números, notaciones simbólicas, representaciones tridimensionales, gráficas, diagramas, esquemas, cumpliendo funciones de comunicación, expresión, objetivación y tratamiento. Bajo esta idea Macías (2014) estudió la importancia que se le da a los registros de representación semiótica y a la coordinación entre ellos en la enseñanza obligatoria. Para ello analizó los currículos oficiales, centrándose en el análisis de los contenidos y criterios de evaluación del Decreto de Enseñanzas Mínimas de Educación Primaria para el área de Matemáticas en España. Encontró que la lengua natural juega un papel importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje y que, en el caso de la enseñanza en matemáticas, el empleo de símbolos, tablas, gráficas, figuras, construcciones geométricas, etc., favorece las operaciones cognitivas, dando como resultado una mejor comprensión y mayor adquisición de conocimientos en el estudiante.

A su vez Manghi (2010) mencionó los principales recursos semióticos utilizados por los docentes para la regulación del conocimiento disciplinar. Llevó a cabo un estudio de casos múltiples constituido por dos profesores de primer año de enseñanza media en matemáticas. Los resultados arrojaron que los recursos semióticos principales son el habla y los gestos deícticos, los cuales son utilizados en objetivos determinados.

En la enseñanza de la Estadística los profesores utilizan recursos semióticos que pueden ser formales o no formales. Los formales son palabras y oraciones que refieren letras (en calidad de literales o variables), números (en el contexto de un cálculo aritmético o de una expresión aritmética, estadística, geometría, etc.), operaciones matemáticas y fórmulas escritas o habladas. Los no formales son el uso de cualquier signo-significado que no incluye recursos semióticos formales (letras como variables, números, operaciones matemáticas y fórmulas). El recurso más amplio es el lenguaje oral, escrito, kinésico y proxémico, pero pueden estar presentes signos en forma de objetos, imágenes, figuras, etc. (Proyecto PAPIME, 2015).

Siendo el lenguaje el medio principal por el cual los individuos nos comunicamos y debido a que, en la Carrera de Psicología de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza-UNAM, la asignatura de estadística es la materia donde se observa bajo rendimiento académico surgió la necesidad de tener un mayor conocimiento acerca del uso de los recursos semióticos formales y no formales que utilizan los docentes en la enseñanza de la estadística. En relación con el concepto de rendimiento académico, debido a la variedad de definiciones, existe un consenso respecto a entenderlo como una medida estimada de las capacidades que una persona ha adquirido durante algún proceso de formación (Pizarro, 1985). La forma habitual o común de operacionalizar el rendimiento académico en el contexto escolar es mediante el uso de las calificaciones o notas escolares (Cascón, 2000; Pérez, Ramón y Sánchez, 2000, Rodríguez, Fita y Torrado, 2004). Para Cascón (2000) las calificaciones escolares son el reflejo de las evaluaciones y de los exámenes en donde el alumno demostrará sus conocimientos sobre las distintas áreas de aprendizaje y sobre cómo las aprendieron.

Pregunta de Investigación: ¿El rendimiento académico en las clases de estadística está relacionadas con los recursos semióticos utilizados por el profesor?

Objetivo: Identificar qué recursos semióticos utilizan los profesores de estadística de la carrera de psicología de un campus de la UNAM en sus clases y conocer su relación con el rendimiento académico (calificaciones) en los alumnos.

Método

Tipo de investigación: Se realizó una investigación mixta, que incluyó una triangulación a través de la técnica de observación participante, grupos de discusión (Quecedo y Castaño, 2002). Como indicador de rendimiento académico se consideraron las calificaciones finales asignadas por los profesores de estadística a los estudiantes.

Participantes: En el estudio intervinieron trece estudiantes divididos en dos grupos de discusión. El primer grupo, denominado Grupo A, estuvo constituido por ocho pasantes expertos, es decir, estudiantes que conocían la teoría e identificaban los recursos semióticos. En el segundo grupo estuvieron cinco estudiantes de dos profesores, identificados como profesor A y profesor B, que imparten la asignatura de estadística en la Carrera de Psicología, el cual fue identificado como Grupo B. El tipo de muestreo utilizado fue no probabilístico, intencional y por conveniencia.

Procedimiento: Los participantes observaron dos clases de cada uno de los profesores de estadística. Posteriormente se realizaron los grupos de discusión. A los participantes del Grupo “A” se les preguntó qué recursos semióticos identificaron en los profesores y en qué proporción, de acuerdo a su opinión, consideran que utilizan los recursos. En el Grupo “B” la discusión se orientó mediante preguntas para indagar y conocer cómo, en las clases durante un semestre, los profesores explican los temas, cómo ejemplifican conceptos, fórmulas y cualquier otro aspecto relacionado con el plan de estudios de la materia, también se les preguntó qué porcentajes le daban a los docentes sobre el uso de recursos semióticos formales y no formales, para corroborar la información antes mencionada. Las sesiones de los grupos de discusión fueron grabadas, transcritas y analizadas.

Análisis de los datos: Se hizo una relación de la información obtenida en los grupos de discusión con las calificaciones logradas en el curso de estadística de cada uno de los profesores. Para corroborar si los profesores difieren de manera significativa en el rendimiento académico de los alumnos se hizo un análisis estadístico.

Resultados

Los resultados quedaron de la siguiente manera:

Para el Profesor “A”, los participantes del Grupo “A” dijeron que él utiliza en un 20% los recursos semióticos no formales y en un 80% los recursos semióticos formales (Figura 1). Los alumnos del

Grupo “B” indicaron que el profesor utiliza tanto en un 50% los recursos semióticos formales, como los recursos semióticos no formales (Figura 2). En cuanto al rendimiento académico en matemáticas la calificación media del grupo en el curso fue de 7.61.

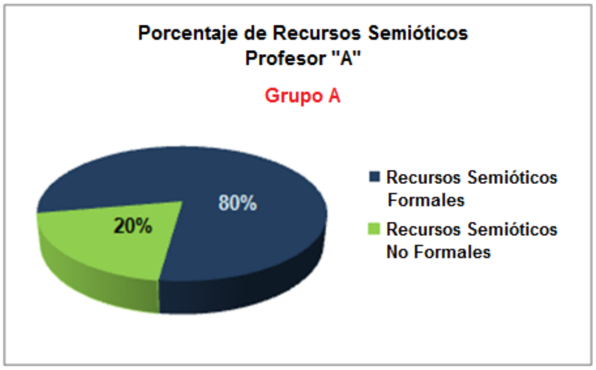


Figura 1. Porcentaje de recursos usados por el profesor A según el Grupo A.

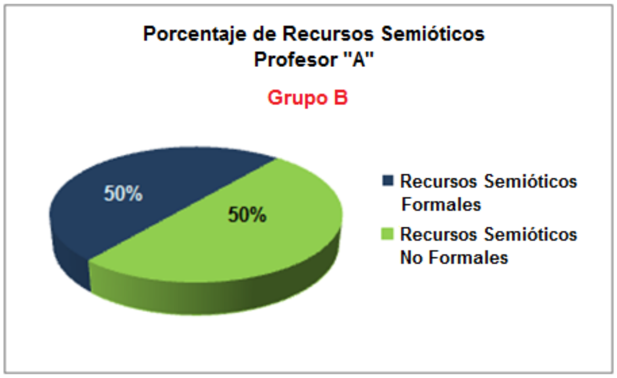


Figura 2. Porcentaje de recursos usados por el profesor A según el Grupo B.

Para el profesor “B”, el Grupo “A” mencionó que el profesor utiliza en un 20 % los recursos semióticos formales, y en un 80% los recursos semióticos no formales (Figura 3). Por su parte el Grupo “B” menciona que el profesor utiliza equitativamente los recursos semióticos, es decir, en un 50% los recursos semióticos formales y 50% los recursos semióticos no formales (Figura 4). La media del rendimiento en matemáticas del grupo fue de 8.81.

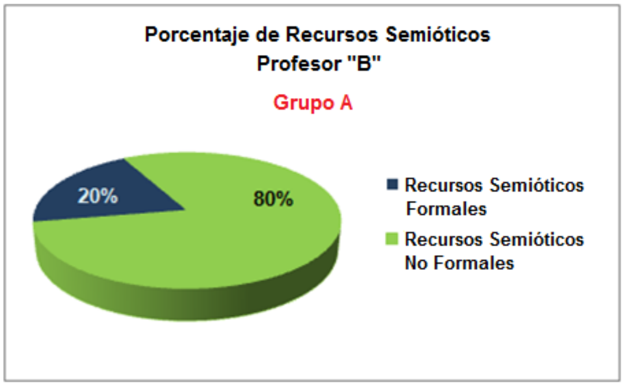


Figura 3. Porcentaje de recursos usados por el profesor B según el Grupo A

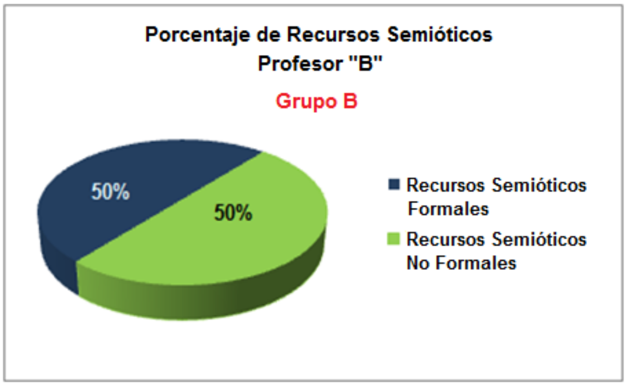


Figura 4. Porcentaje de recursos usados por el profesor B según el Grupo B

Un análisis estadístico evidenció diferencias estadísticamente significativas entre el rendimiento académico en matemáticas que lograron en los alumnos los dos profesores participantes (t = -3.08, gl = 32, p = .005).

Discusión

Castañeda (2004) sugiere que la reprobación en matemáticas no tiene que ver con las capacidades, habilidades, y aptitudes hacia ellas, sino más bien con las disposiciones de los alumnos y del maestro en la enseñanza de las matemáticas. Dentro de esta misma línea de investigación, Reséndiz (2010) analizó el discurso docente y el aprendizaje en las matemáticas en un estudio de caso, concluyendo que la interacción social y el rol del lenguaje son factores importantes en el desarrollo de la comprensión en matemáticas.

En esta investigación, los factores abordados fueron los recursos semióticos de los profesores (formales y no formales), pues son considerados como determinantes que influyen de manera directa en el rendimiento académico de los alumnos, refiriéndose a la forma en que el profesor expresa los contenidos en las clases. Los resultados obtenidos muestran que el recurso semiótico del profesor “A” fue identificado como formal, debido a la manera de explicar los contenidos de sus clases y de resolver dudas acerca de los temas y/o ejercicios vistos. Mientras que en el profesor “B” los alumnos mencionaron que en él prevalece el recurso semiótico no formal por la manera en que combina los temas cotidianos, los temas relacionados con la psicología y con temas de interés entre la población estudiantil.

En cuanto a las calificaciones obtenidas de los estudiantes del profesor “A” promediaron en 7.6. Mientras que las calificaciones de los estudiantes del profesor “B” promediaron en 8.81, observándose que existe una diferencia entre cada uno de los grupos. Por lo que se podría afirmar que el rendimiento académico de los alumnos del profesor “B” es más alto que el rendimiento académico de los alumnos del profesor “A”.

Conclusión

Los resultados obtenidos evidenciaron que hay una diferencia entre la predominancia del uso de los recursos semióticos formales o no formales y el rendimiento académico logrado por los alumnos. Es decir, la disposición de los profesores para enseñar en las clases ya sea con mayor uso de recursos semióticos formales o no formales va a repercutir en dicho rendimiento académico. Por lo que es importante promover entre los profesores de estadística el uso más extendido de recursos semióticos no formales, como lo son el lenguaje natural, ejemplos de uso cotidiano, gráficas, esquemas, imágenes, colores, objetos.

Referencias bibliográficas

Beuchot, M. (2004). *La semiótica: teorías del signo y el lenguaje en la historia*. México: FCE.

Cascón, I. (2000). Análisis de las calificaciones escolares como criterio de rendimiento académico. *Colegio Público Juan García Pérez.* Recuperado de https://campus.usal.es/~inico/investigacion/jornadas/jornada2/comun/c17.html

Castañeda, A. & Álvarez, M. (2004). La reprobación en matemáticas, dos experiencias. *Tiempo de Educar*, 5(9), 141-172. Recuperado de http://www.redalyc. org/articulo.oa?id=31100906

Duval, R. (2000). Basic issues for research in mathematics education. En T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of*

Mathematics Education, vol. 1, pp. 55-69. Hiroshima: Hiroshima University. Recuperado http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED466737.pdf

Gil, N., Blanco, L. & Guerrero, E. (2006). El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*. (4), 47-72. Recuperado de http://redalyc.org/articulo.oa?id= 293123488003

Godino, J. (2004). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros*. Granada: Proyecto Edumat-Maestros.

Macías, S. J. (2014). Los registros semióticos en Matemáticas como elemento personalizado en el aprendizaje. *Revista de Investigación Educativa Conect@2,* 4(9): 27-57. Recuperado de http://www.revistaconecta2.com.mx/archivos/revistas /revista9 /9_2.pdf

Manghi, H. D. (2010). Recursos semióticos del profesor de matemática: funciones complementarias del habla y los gestos para la alfabetización científica escolar. *Estudios pedagógicos*, 36(2), 99-115. Recuperado de http://www.scielo.cl/scielo.php?Script =sci_arttext&pid=S0718070520100

00200006&lng=es&tlng=es.10.4067/S0718-7052010000200006

Pérez, A., Ramón, J. & Sánchez, J. (2000). *Análisis exploratorio de las variables que condicionan el rendimiento académico*. España: Universidad Pablo de Olavide.

Pizarro, R. (1985). Rasgos y actitudes del profesor efectivo. Tesis no publicada para optar al grado de Magister en Ciencias de la Educación. Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile.

Proyecto PAPIME 302915 (2015). *El uso didáctico del lenguaje natural en la enseñanza del lenguaje formal de la estadística de la carrera de Psicología.* Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Estudios Superiores Zaragoza. México: CDMX.

Quecedo, L. y Castaño, C. (2002). Introducción a la metodología de investigación cualitativa. *Revista de Psicodidáctica*. (14) 1-27. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=17501402.

Ramírez, N. (2015). *Tic para abordar factores asociados a la reprobación de estadística de la carrera de Psicología.* Tesis de Licenciatura. México: Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Estudios Superiores Zaragoza. Recuperada de

Reséndiz, E. (2010). El discurso en la clase de matemáticas y los acuerdos sociales. La noción de variación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 13(4), 99-112. Recuperado de http://www.clame.org.mx/ relime/201006d.pdf

Ríos, P. (2008). *Psicología. La aventura de conocernos*. Venezuela: Editorial Cognitus.

Rockwell, H. (1995). *La escuela cotidiana*. México: Fondo de Cultura Española.

Rodríguez, S., Fita, S. & Torrado, M. (2004). El rendimiento académico en la transición secundaria-universidad. *Revista de Educación*. 391-414. Recuperado de http://www.revistaeducacion.educ

acion.es/re334/re334_22.pdf

Salett, M. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16, 105-125. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40

516206

SEP (2013). *Resultados históricos nacionales* 2006-2013. México: Secretaría de Educación Pública. Recuperado de: http://www.enlace.sep.gob.mx/content/gr/docs/2013/historico/00_EB_2013.pdf

SEP (2014). *Resultado Nacional ENLACE 2014, último grado de bachillerato*. México: Secretaría de Educación Pública. Recuperado de: http://www.enlace.sep.gob.mx/ content/gr/docs/2014/histor

ico/ENLACE_Media_2014_nacionales_e_historicosMod.pdf

Talavera, N. M. (2006). *Factores que afectan la reprobación en estudiantes de la Facultad de Contaduría y Administración, UABC–Unidad Tijuana. VI Congreso Internacional – Retos y Expectativas de la Universidad Puebla.* Tijuana: México. Recuperado de http://www.congresoretosyexpectativas.udg.mx/Congreso%206/Eje%202/Ponencia_82.pdf.

Tamayo, O. (2006). Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. *Revista Educación y Pedagogía*. 18(45): 37-49.

PRÁCTICAS MATEMÁTICAS DEL PROFESOR DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN TORNO A LAS FRACCIONES

Hipólito Flores Carrillo, Hermes Nolasco Hesiquio.
Universidad Pedagógica Nacional. (México), Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
hipolito.fc@hotmail.com, nolascohh@hotmail.com

RESUMEN: El estudio presentado en este artículo es parte de una investigación en curso, centrada en la práctica del profesor en torno a la enseñanza de las fracciones en la Educación Primaria. Nos preguntamos en qué medida la práctica matemática facilita la enseñanza de las fracciones. Nuestro objetivo es analizar el trabajo docente del profesor de Educación Primaria, sobre la enseñanza de las fracciones. Adoptamos como marco teórico las herramientas teóricas de Sfard (2007). Nuestra investigación está enmarcada en el paradigma cualitativo, basada en el método de estudio de casos.

Palabras clave: práctica matemática, fracciones

ABSTRACT: The study presented in this article is part of an ongoing research, focused on teacher practice with respect to the teaching of fractions in Primary Education. We ask how much mathematical practice facilitates the teaching of fractions. Our objective is to analyze the teaching work of the Primary Education teacher, on the teaching of fractions. We adopt as theoretical framework the theoretical tools of Sfard (2007). Our research is framed in the qualitative paradigm, based on the case-study method.

Key words: mathematical practice, fractions

Introducción

El estudio sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas es un tema prioritario en la agenda internacional de investigación en Matemática Educativa (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2016). En esa dirección, vamos a centrarnos en un aspecto particular de este amplio espectro del conocimiento profesional: La práctica profesional del profesor en torno a la enseñanza de las fracciones en la Educación Primaria. Además, la práctica profesional se ve como un conjunto de actividades que genera cuando realiza las tareas que definen la enseñanza de las matemáticas y la justificación dada por el profesor (Llinares, 2000).

En los últimos años, se ha incrementado notablemente el número de investigaciones que se han ocupado de comprender la práctica del profesor de matemáticas (Nolasco-Hesiquio et al., 2016). Algunos trabajos están orientados a identificar la influencia de los diferentes dominios del conocimiento del profesor en relación con la práctica social (Gavilán et al., 2007; Barboza y Zapata, 2013). También desde la teoría de situaciones didácticas y la transposición didáctica algunos investigadores analizan las prácticas del profesor en clases ordinarias (Perrin Glorian y Hersant, 2003; Herbst et al., 2011; Brousseau et al., 2014). Diversos estudios desde la perspectiva interaccionista (Bauersfeld, 1995; Knipping, 2008; Krummheuer, 2011) han definido formatos o patrones de interacción del profesor con sus estudiantes, en el que por medio del discurso los significados matemáticos son construidos interactivamente en el salón de clase.

Por otro lado, en investigaciones realizadas por Gavilán, García y Llinares (2007), analizan la práctica del profesor de matemáticas que conlleva a explicitar un modelo de aprendizaje del estudiante (construcción de conocimiento matemático), y generan herramientas analíticas que permitan explicarla de manera coherente con el modelo de aprendizaje asumido. Desde un enfoque cognitivo, Simón y Tzur (1999) señalan que la práctica del profesor no son sólo las cosas que los profesores hacen (planificar, evaluar, interactuar con los estudiantes) sino también las cosas que piensan, conocen, creen sobre lo que ellos hacen.

La noción de práctica es un referente primordial en nuestra investigación, Godino y Batanero (1994) conciben como práctica matemática a cualquier acción o manifestación que lleva a cabo un sujeto para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución a otros sujetos, así como para validar y generalizar la solución a otros contextos y problemas. En este sentido, el análisis de la práctica del profesor y alumnos participantes en la interacción, nos ayuda a entender cuáles son las condiciones de significación que se crea en la clase ordinaria cuando se pretende enseñar las fracciones.

Esta investigación asume como problemática a la práctica profesional del profesor de Educación Primaria, enfocándose a identificar las prácticas matemáticas que se generan durante el proceso enseñanza-aprendizaje de los contenidos de fracciones. Las preguntas que orientan este estudio son las siguientes: ¿Cómo es la práctica del profesor en el proceso enseñanza-aprendizaje de las fracciones? ¿Qué actividades establece el maestro en el aula, para la enseñanza de las fracciones? ¿Cuáles son las dificultades que enfrenta el profesor para su enseñanza? En específico, nos planteamos como objetivo, identificar prácticas matemáticas que regulan los conocimientos que pone en acción durante su práctica docente. Poniendo énfasis en la actuación o manifestación (lingüística o no) del profesor al abordar contenidos de fracciones y al momento de argumentar, validar y comunicar la solución a sus alumnos.

Marco teórico

Como sustento teórico de esta investigación, seguimos la propuesta de Sfard (2007) que considera que las matemáticas son un tipo especial de discurso y aprender matemáticas significa cambiar el discurso matemático, en particular considera que el discurso matemático, es aquel que incluye palabras relacionadas con cantidades y figuras o símbolos creados, especialmente para facilitar esta forma particular de comunicación. En específico, consideramos las herramientas teóricas para caracterizar el discurso matemático como: palabras matemáticas, mediadores visuales, narrativas asumidas y rutinas. Con el objetivo de caracterizar las prácticas matemáticas del profesor de Educación Primaria en torno a las fracciones.

Palabras matemáticas: son aquellas utilizadas en todo discurso matemático, incluyendo términos no propiamente matemáticos, con significado matemático y utilidad matemática, por ejemplo: problemas de reparto, el uso de medidas convencionales (longitud, peso, capacidad). Estos pueden ser utilizados en la vida coloquial y en el contexto escolar, en este último las palabras matemáticas tienen un orden más disciplinado.

Mediadores visuales: son los medios con los que los participantes o actores identifican los objetos de los que están hablando y coordinan su comunicación, los mediadores visuales se visualizan como los artefactos simbólicos y gráficos. Ejemplo el modelo del pastel para representar fracciones.

Narrativas asumidas: son entendidas como cualquier texto hablado o escrito de una descripción de los objetos, de relaciones entre objetos, o de actividades con los objetos y que está sujeta a la aceptación o rechazo. Las narrativas asumidas, se utilizan para referirse a las que se etiquetan como verdaderas por una comunidad dada en un momento determinado, por ejemplo: definición de fracción, la fracción y sus múltiples interpretaciones, etc.

Rutinas: son patrones repetitivos bien definidos en las acciones de los interlocutores, característicos de un discurso dado, las rutinas pueden ser de naturaleza algorítmica, como en los cálculos numéricos de operaciones, por ejemplo: resolución de sumas y restas de fracciones sin significado, el uso reiterado del modelo del pastel o de figuras regulares, para enseñar fracciones, etc.

La noción de práctica de Godino y Batanero (1994) así como las herramientas teóricas de Sfard (2007), nos permitirá estudiar la práctica profesional del profesor, durante el proceso de enseñanza aprendizaje de los contenidos sobre las fracciones.

Metodología

Nuestra investigación está enmarcada en el paradigma cualitativo, se inscribe en el estudio de casos, el cual implica un proceso de indagación que se caracteriza por el examen detallado, comprensivo, sistemático y en profundidad del caso objeto de interés, en el estudio de caso uno de los objetivos es diferenciar los límites de su entorno, para establecer que constituye un caso Sautu (2005). En el estudio colaboraron tres profesores, dos profesores de quinto grado y una profesora de sexto grado, que laboran en escuelas públicas de la Ciudad y Puerto de Acapulco. En cada aula, se videograbaron sesiones de 50 minutos similares a las que cotidianamente se desarrollan en clase. Las sesiones observadas pertenecen al contenido temático sobre las fracciones.

Los profesores que participaron lo hicieron de manera voluntaria y consintieron la intromisión en sus tareas docentes (observación de clases, grabación de video y audio, etc.). Los alumnos participaron a petición de su profesor. La elección de los profesores y de los alumnos que fueron grabados en video no se realizó bajo un criterio específico, sino que simplemente se tuvo en cuenta su valiosa disponibilidad para colaborar y la posibilidad de acceso al salón durante sus clases.

Se procuró hacer descripciones muy detalladas del desarrollo de cada clase, así también se consideraron las interacciones verbales entre maestro-alumno y alumno-alumno y en cada momento, se revisaron los trabajos realizados en los cuadernos de los niños, para identificar situaciones de reelaboración de significados matemáticos ocurridas bajo la influencia de la interacción de la clase.

Resultados

En nuestros análisis, considerando las herramientas teóricas (palabras matemáticas, mediadores visuales, narrativas asumidas y rutinas), se identificaron sus respectivas prácticas matemáticas de los profesores observados, que a continuación se ejemplifican:

Cuadro 1.

Categoría general	Prácticas matemáticas
A. Palabras matemáticas	A1. El profesor hace uso de la regla de tres A2. La interpretación de la fracción como expresión decimal A3. El uso de medidas convencionales (longitud, peso y capacidad)
B. Mediadores visuales	B1. Ejemplifica con la recta numérica B2. Figuras geométricas que representan una fracción determinada B3. El círculo como parte-todo y algunas partes
C. Narrativas asumidas	C1. Las fracciones y sus múltiples interpretaciones C2. Definición de fracción C3. La fracción y la simplificación de su resultado
D. Rutinas	D1. Poner ejemplos y contraejemplos de suma y resta de fracciones D2. Resolución de sumas y restas de fracciones sin significado D3. Manipulación de material recortable para la enseñanza de la suma de fracciones

La maestra Gabriela participa en el siguiente episodio, iniciando la clase con la noción de fracción decimal, menciona algunos elementos para que los alumnos resuelvan un ejercicio

Tabla 1.

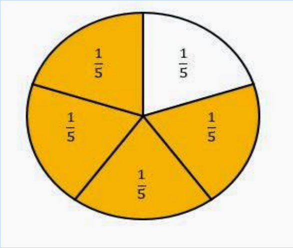
Categoría general: **palabras matemáticas**	**Práctica matemática:** **La interpretación de la fracción como expresión decimal**
Episodio 1 **Maestra:** No se les olvide qué es una fracción decimal, deben tenerlo presente porque viene en el examen, ahorita van a realizar un ejercicio	**Descripción** En este episodio, la maestra hace uso de las fracciones decimales, estableciendo comparaciones entre la expresión decimal y

sobre este tema. (*La profesora borra el pizarrón y escribe*) ¿0.5 litro equivale a 1/5?, sí o no y ¿Por qué? **Alumno:** Yo paso a resolverlo **Maestra:** De acuerdo puedes pasar **Alumno:** No son iguales (*escribe en el pizarrón*) 0.5 = 5/10 y 1/ 5 = 0.2 **Maestra:** ¿Por qué no son iguales? **Alumno:** Porque las cantidades son diferentes. 0.5 es igual a cinco decimos y 1/5 es igual a dos décimos. **Maestra:** De acuerdo	la fracción (a/b), a su vez establece equivalencias entre cantidades de capacidad las cuales no son iguales. El uso de medidas convenciones (longitud, peso y capacidad) se caracteriza por vincularse en el contexto escolar y en la vida coloquial. Se logra establecer en varios de los alumnos el propósito del cálculo mental y la estimación de resultados, así como, la conversión de fracciones decimales a escritura decimal y viceversa.

En el siguiente episodio el profesor Carlos pretende representar a las fracciones con figuras realizadas en el pizarrón, la importancia es que se comprenda como se pueden representar las fracciones en una figura.

Tabla 2.

Categoría general: **Mediadores visuales**	**Práctica Matemática:** **El círculo como parte-todo y algunas partes**
Episodio 2 **Maestro:** Busquen fracciones que tienen el mismo denominador para encontrar un entero, por ejemplo ¿cuántos quintos me da un entero? **Alumno:** Cinco **Maestro:** ¿Cuántos? **Alumno:** Cinco	**Descripción** En relación con los mediadores visuales, el profesor se apoya de un círculo para hacer más comprensible el tema de las fracciones. El maestro plantea una pregunta y presiona a los alumnos para que respondan, de tal forma que la respuesta que quería el profesor la representa en el pizarrón con una figura. Podemos observar que las figuras del cuadrado, rectángulo y círculo son empleadas en los contenidos de las fracciones, así como también el modelo de repartir pastel se considera para estos temas.

Maestro: Entonces anotamos, con los cinco quintos me da un entero, ya tengo una fracción que es 5/5 y la podemos representar con un círculo. (*El profesor dibuja en el pizarrón*). 	

En este episodio el maestro Cesar, considera que después de realizar la suma de fracciones, es importante que el alumno comprenda que es la simplificación de una fracción.

Tabla 3.

<u>Categoría general:</u> **Narrativas asumidas**	<u>Práctica matemática:</u> **La fracción y la simplificación de su resultado**
<u>Episodio 3</u> **Alumno:** Maestro ya termine de realizar la suma (*la suma de fracciones está en el pizarrón*) $\frac{9}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{108+36+48}{144}=\frac{192}{144}$ **Maestro:** ¿Cuánto es la mitad de 192? **Alumnos:** 96 **Maestro:** ¿Cuánto es la mitad de 144? **Alumnos:** 72 **Maestro:** Entonces queda 96/72 , se puede seguir reduciendo **Alumnos:** Si **Maestro:** Mitad de 96	**<u>Descripción</u>** En este episodio podemos observar como en el desarrollo de la suma de fracciones con diferente denominador se relacionan varios elementos, el profesor hace valida esta forma de resolver la suma de fracciones y argumenta que se pueden sacar enteros o reducir el resultado de la fracción. Por lo tanto, se puede observar otro aspecto de la suma de fracciones, es decir, realizar la reducción o simplificación del resultado que se obtuvo. En este sentido se puede etiquetar como narrativa asumida diferentes procesos para resolver una suma de fracciones o las fracciones y sus diferentes interpretaciones.

Alumnos: 48 **Maestro:** Mitad de 72 **Alumnos:** 36 **Maestro:** Entonces queda 48/36, se puede seguir reduciendo **Alumnos:** Si **Maestro:** Mitad de 48 **Alumnos:** 24 **Maestro:** Mitad de 36 **Alumnos:** 18 **Maestro:** Entonces queda 24/18, se puede seguir reduciendo **Alumnos:** Si	

En el siguiente episodio el maestro Carlos desarrolla el juego de encontrar “un entero y un medio” con tres fracciones impresas (material recortable), que proporciona el libro de texto.

Tabla 4.

Categoría general: **Rutinas**	**Práctica matemática:** **Manipulación de material recortable para la enseñanza de la suma de fracciones**
Episodio 4 **Maestro:** Ya tenemos tres fracciones **Alumna:** Maestro le traigo otra fracción (*material recortable*) **Maestro:** Pero ya tengo tres fracciones, no podemos poner cuatro, porque la consigna es que con solo tres fracciones obtengamos el resultado de un entero y un medio. **Alumna:** ¿Por qué no lo hacemos con cuatro? **Maestro:** ¿Con cuartos? **Alumna:** No con cuatro fracciones	**Descripción** Profesor y alumnos estaban alrededor del escritorio, los niños buscaban las fracciones y se las daban al maestro. En esta actividad se buscan las características idóneas para completar la consigna de un entero y un medio, esto es una de las formas adoptadas por la rutina identificar relaciones entre características de los objetos. Otra rutina que podemos etiquetar es la manipulación constante del material recortable que traen los libros de texto.

Maestro: Recuerden que el juego consiste en emplear tres fracciones nada más. 	

Conclusiones

A partir del análisis y reflexiones de los resultados, podemos llegar a las siguientes conclusiones:

1. Los profesores hacen verídico las acciones que desarrollan para la enseñanza de las fracciones al vincular los contenidos de aprendizaje con la vida coloquial
2. Los profesores solo presentan en la clase ejemplos de los ejercicios que aportan los libros de texto.
3. El uso del material didáctico es utilizado como recurso para motivar a los alumnos en el aprendizaje de las fracciones.
4. Los propósitos de los contenidos en cierta forma se cumplen, porque se realiza el cálculo mental, aunque las operaciones en su mayoría son realizadas mecánicamente solo para obtener el resultado.

Podemos afirmar que las herramientas teóricas facilitan el análisis de las prácticas matemáticas que realiza el profesor, cuando realiza el proceso enseñanza aprendizaje de las fracciones.

Referencias bibliográficas

Barboza, J. A. y Zapata, H. A. (2013). El Estudio de clase, Estrategia y Escenario para la Cualificación del Profesor de Matemáticas, *Formación Universitaria,* 6(4), 49-62.

Bauersfeld, H. (1995). Language games in mathematics classroom: Their function and their effects. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 271-292) New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Brousseau, G., Brousseau, N. y Warfield, V. (2014). *Teaching fractions through situations: A fundamental experiment.* New York, Estados Unidos: Springer.

Charalambous, C. y Pitta-Pantazi, D. (2016). Perspectives on priority Mathematics Educations. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 275-295), New York, Estados Unidos: Springer.

Gavilán, J., García, M. y Llinares, S. (2007). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas, Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las ciencias*, 25(2), 157-170.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 127-135.

Herbst, P., Nachlieli, T. y Chazan, D. (2011). Studying the Practical Rationality of Mathematics Teaching: What Goes Into "Installing" a Theorem in Geometry? *Cognition and Instruction,* 29(2), 218-255.

Knippling, C. (2008).A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. *Mathematics Education,* 40, 427-441.

Krummheuer, G. (2011). Representation of the notion "learning-as-participation" in everyday situations of mathematics classes, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM), 43(12), 81-90.

Llinares, S. (2000). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En J. Ponte y L. Serrazina (Eds.), *Educaçao matemática em Portugal, Espanha e Itália* (pp. 109-134): Lisboa, Portugal: Secçao de Educaçao Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educaçao.

Nolasco-Hesiquio, H., Cabañas., G., Rojas, O. Y Sigarreta, J. M. (2016). Geometría: Patrones de Interacción Discursivos en la Enseñanza Media. *Formación Universitaria.* 27(6), 215-226.

Perrin Glorian, M. y Hersant, M. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(2), 217-276.

Sautu, R. (2005). *Todo es teoría: objetivos y métodos de investigación*. Buenos Aires. Lumiere.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: making sense of Mathematics learning from a commognitive standpoint. *Journal of the Learning Sciences, 16*(4), 565-613. Doi: 10.1080/10508400701525253.

Simón, M.A. y Tzur, R. (1999). Explicating the Teachers' Perspective from the Researcher' Perspectives: Generating. Accounts of Mathematics Teachers' Practice. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(3), 252-264.

CREENCIAS DE DOCENTES DE BACHILLERATO SOBRE LA ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Ana María Castillo Juárez, José Gabriel Sánchez Ruíz, José Antonio Juárez López
BUAP-FCFM. (México), FES Zaragoza-UNAM. (México), BUAP-FCFM. (México)
castillojuarez81@gmail.com, josegsr@unam.mx, jajul@fcfm.buap.mx

RESUMEN: Se identificaron y analizaron las *creencias acerca de la naturaleza de la matemática, creencias que detecta en los alumnos acerca de su enseñanza y propuestas para mejorar su enseñanza* de un grupo de profesores de nivel bachillerato de México. Asimismo, se obtuvo información para conocer sus creencias acerca de la enseñanza de las matemáticas mediante la resolución de problemas matemáticos. Se emplearon instrumentos para obtener información cualitativa, una entrevista semiestructurada, y cuantitativa, un cuestionario.

Palabras clave: creencias, enseñanza-aprendizaje, problemas matemáticos, bachillerato

ABSTRACT: This research has identified and analyzed the beliefs about the mathematics nature; beliefs students have about teaching, and also proposals to improve teaching in a group of high school teachers in Mexico. Besides, information was also obtained to know teachers' beliefs about mathematics teaching, by using the problem solving approach. Research tools were used in order to obtain qualitative information, such as a semi- structured and quantitative interview and a questionnaire.

Key words: beliefs, teaching-learning, mathematical problems, high school

Introducción

Las creencias de los profesores hacia la enseñanza de las matemáticas son entendimientos y premisas acerca del mundo e implican códigos personales cognoscitivos y afectivos que los disponen hacia ciertas formas de actuación, además, el contexto en el que trabajan los profesores, el tiempo limitado para trabajar en el aula y la presión por cubrir los programas de estudio, son factores que influyen en la adopción de prácticas tradicionalistas en el aula (Lebrija, Flores y Trejos, 2010). El término creencia se utiliza en diversas áreas de conocimiento con distintos significados, características, connotaciones y acepciones, por lo que Pehkonen y Törner (1996) consideran que es un concepto muy ambiguo del cual se pueden encontrar más referencias implícitas que definiciones formales explícitas. Para Vila y Callejo (2005, p. 51) las creencias son:

> Un tipo de conocimiento subjetivo referido a un contenido concreto sobre el cual versan; tienen un fuerte componente cognitivo, que predomina sobre el afectivo y están ligadas a situaciones. Aunque tienen un alto grado de estabilidad, pueden evolucionar gracias a la confrontación con experiencias que las pueden desestabilizar: … se van construyendo y transformando a lo largo de la vida.

Las creencias permiten entender lo que los docentes hacen en clase y por qué lo hacen, así como las decisiones y acciones que consideran pertinentes (Lebrija et al., 2010). Thompson (1992) considera que los profesores desarrollan y mantienen teorías implícitas acerca de sus estudiantes, sobre el tema que enseñan y sobre el rol, las funciones y responsabilidades que deben adoptar en clase y que dichas teorías no se encuentran documentadas en libros de texto o apuntes de clase, más bien, tienden a ser reglas de oro obtenidas a partir de la experiencia personal, las creencias, los valores, las influencias y los prejuicios.

En un estudio realizado en México, De la Peña (2002) encontró que las creencias de los docentes de bachillerato acerca de las matemáticas propician frecuentemente el rechazo de los estudiantes hacia las matemáticas.

Ernest (1988, cit. en Thompson, 1992), indica que los enfoques de enseñanza de las matemáticas dependen fundamentalmente del sistema de creencias de los docentes, principalmente en sus concepciones de la naturaleza y el significado de las matemáticas, y en sus modelos mentales de la enseñanza y aprendizaje de las mismas. En este mismo sentido, Leder, Pehkonen & Töner (2002) plantean que las creencias del profesor regulan sus decisiones, la planificación, el desarrollo y la evaluación de los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas y que las creencias y las prácticas en la clase forman un círculo difícil de romper.

Chacón, Op't Eynde, & De Corte (2006), al igual que otros autores, consideran que una creencia nunca se sostiene con independencia de otras por lo que señalan la pertinencia de hablar más de sistemas de creencias que de creencias aisladas ya que están constituidos por creencias sobre la educación matemática, sobre sí mismos y sobre el contexto.

Vila y Callejo (2005) indican que las creencias de un sujeto son importantes porque sirven como indicadores de aspectos que no son directamente observables ya que a partir de ellas, se puede inferir la visión que tiene cada individuo de las matemáticas o las experiencias que tuvieron con esta ciencia y porque actúan en los individuos como un sistema regulador de su estructura de conocimiento, es decir, influyen en su manera de pensar, actuar y de afrontar la resolución de problemas matemáticos. La aproximación sociocultural de las creencias por parte de diversos investigadores (Chacón, Op't Eynde, & De Corte, 2006) señala que existen cinco aptitudes que permiten que los estudiantes tengan buena disposición en matemáticas: *conocimiento matemático, métodos heurísticos, habilidades de autorregulación, metaconocimientos, y creencias positivas sobre la matemática y su aprendizaje*; además, que gran parte de la complejidad de aprender y enseñar matemáticas radica en la interconexión que debe establecer el estudiante entre dichas aptitudes, en cómo determinar elementos operativos que favorezcan dicha conexión y en cómo favorecer que el profesor sea un agente de cambio. Por lo que, Muis y Lester (2004, 2002, cit. en Chacón, Op't Eynde, & De Corte, 2006) opinan que urge hacer más investigaciones que examinen las relaciones entre creencias de los estudiantes y ambientes de clase.

Por otra parte, se ha planteado que la matemática es una materia idónea para ejercitar el arte de pensar y que el método basado en la resolución de problemas permite modificar el desarrollo habitual de las clases de matemáticas y poner énfasis en los alumnos (Vila & Callejo, 2005). Según Polya (1985) un profesor de matemáticas es capaz de despertar el gusto por el pensamiento independiente de sus alumnos a partir de la resolución de problemas matemáticos, siempre y cuando estimule en ellos la curiosidad, de lo contrario, provocará desinterés y un desarrollo intelectual inadecuado. Es decir, la resolución de problemas tiende a ser un eje fundamental en la enseñanza de las matemáticas (Giné y Deulofeu, 2014). Vila (2001) considera que existen dos tendencias claras en cuanto a la enseñanza de las matemáticas, según las creencias acerca de la resolución de problemas: 1) se pone atención en los contenidos matemáticos y la resolución de problemas se vuelve suplementaria a dichos contenidos, 2) los problemas son a la vez objeto e instrumento de estudio. Para Giné y Deulofeu (2014, p. 194) “estos sistemas de creencias, en torno a la idea problema de matemáticas y su papel, conducen al profesorado a un conjunto de decisiones (a veces, incluso inconscientes) en torno a la tipología de enunciados de las cuestiones que deben ser propuestas en el aula”. Sin embargo, llama la atención que a pesar de la importancia de la resolución de problemas, y del papel de las creencias sobre esta, en la enseñanza de las matemáticas no se aprecia una atención considerable en cuanto al desarrollo de investigaciones con profesores en este tema. Aunque sí algunos trabajos realizados con estudiantes, como el de Vila (2001) y Callejo y Vila (2003).

Considerando el papel de las creencias de los profesores en su práctica profesional, así como la falta de estudios en esta temática en población mexicana, el objetivo de este estudio fue identificar y analizar en profesores mexicanos de nivel bachillerato sus creencias acerca de la naturaleza de la matemática, creencias que percibe en sus alumnos acerca de su enseñanza y propuestas para mejorar su enseñanza de las matemáticas, asimismo, conocer sus creencias acerca de la enseñanza de las matemáticas mediante la resolución de problemas matemáticos. Preguntas de investigación ¿Cuáles son las creencias de algunos docentes de bachillerato acerca de la enseñanza de las matemáticas y de la resolución de problemas matemáticos en clase de matemáticas?

■ Método

La metodología de esta investigación es de tipo exploratorio con un enfoque mixto.

Participantes

En total 24 docentes de matemáticas. Los docentes que participaron en el estudio fueron elegidos de acuerdo con su disponibilidad los días que se llevó a cabo el estudio, en horario laboral en sus centros de trabajo. De los profesores, fueron 7 maestras y 17 maestros provenientes de 14 escuelas diferentes, de 3 distintos tipos de escuela: 19 públicas, 4 privadas y 1 concertada; las cuales, en general, cuentan con infraestructura adecuada y se encuentran ubicadas en el Estado de Puebla y Tlaxcala-México. Trece profesores cuentan con estudios de nivel licenciatura, 6 se encuentran estudiando la Maestría y 5 tienen Maestría. La experiencia docente del total de maestros, oscila entre 1 y 40 años.

Es importante destacar que en México casi el 90% de las escuelas pertenecen al sector público, por esa razón en este estudio prevalece la participación de casi un 80% de profesores de escuelas públicas, cerca del 16% de los profesores participantes pertenecen al sector privado y sólo el 4% al sector concertado.

A pesar de que uno de los requisitos emitidos por el ministerio de educación media superior en México es la profesionalización docente, se observa que la mayoría de los profesores participantes, 58% de ellos, cuenta con estudios de nivel licenciatura, de los cuales sólo el 14% cuenta con preparación académica para la enseñanza. Se concluye que muy pocos de los profesores que participan en este estudio, cuentan con estudios específicos en la enseñanza de las matemáticas. Esto puede deberse a que en México está permitido que los egresados de cualquier tipo de escuela a nivel licenciatura, sean posibles candidatos para ser maestros de nivel medio superior. En el caso específico de docentes para la enseñanza de las matemáticas, esto aplica siempre y cuando el certificado de estudios del egresado, contenga materias afines a esta ciencia.

Instrumentos

Se aplicó el cuestionario *Enseñar matemáticas* (Gómez-Chacón, Op't Eynde & De Corte (2006) a todos los profesores participantes y una entrevista semiestructurada, basada en De la Peña (2002), a 10 de los 24 profesores participantes, en los meses de mayo y julio respectivamente, mediante la cual se detectaron algunas de sus creencias acerca de la resolución de problemas matemáticos. *Enseñar matemáticas* permite detectar creencias de los profesores y aspectos metodológicos desarrollados en el aula tales como *creencias acerca de la naturaleza de la matemática, creencias que detecta en los* *alumnos acerca de su enseñanza y propuestas para mejorar su enseñanza*. Con el primer instrumento se obtuvieron datos cuantitativos y cualitativos mientras que con la entrevista información cualitativa.

Resultados

Se realizó un análisis de frecuencias de las respuestas obtenidas acerca de las creencias de los profesores sobre la naturaleza de las matemáticas. Las creencias predominantes fueron lógica, resolución de problemas, construible, secuencial, reglas y operaciones (Figura 1).

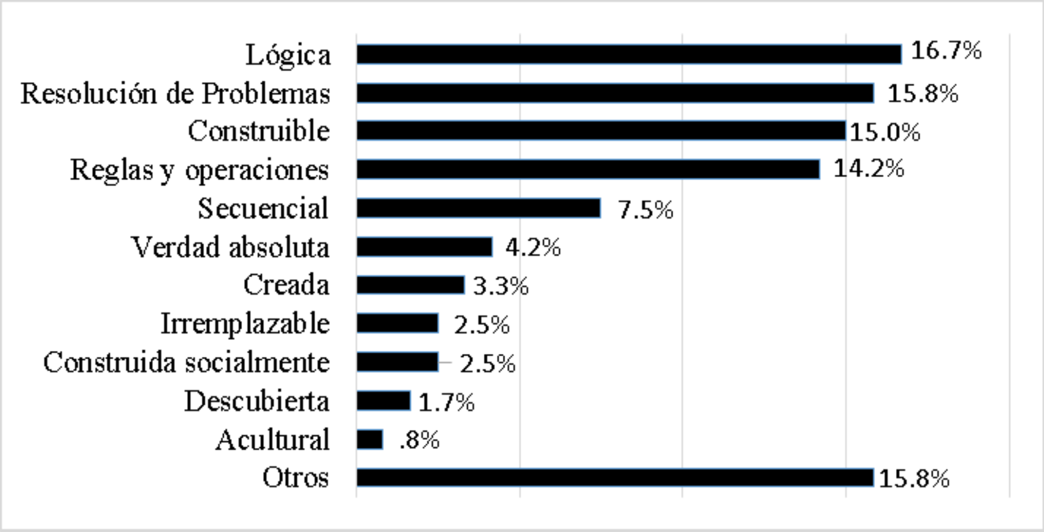


Figura 1. Porcentaje de las creencias de los profesores acerca de la naturaleza de las matemáticas.

Thompson (1992) señala que los docentes que conciben a las matemáticas como una disciplina caracterizada por tener resultados precisos y procedimientos infalibles, saber matemáticas es equivalente a ser hábil y eficiente en la realización de procedimientos matemáticos. Además, que estas creencias implican que los docentes se esfuercen por explicar la clase de forma clara y precisa, con instrucciones que conllevan a un excesivo énfasis en la manipulación de símbolos sin significados verdaderos para los estudiantes, ya que en su enseñanza prevalece la idea de que deben transmitir reglas a través de la resolución de ejercicios con procedimientos rutinarios.

También se halló que la mayoría de los profesores señalan cuatro creencias como prioritarias en cuanto a su preocupación como profesores de matemáticas. Las más significativas fueron lograr que los estudiantes se interesen por las matemáticas, aprendan matemáticas y eliminen malos hábitos. Por otro lado, se observa que algunos de ellos reconocen y aceptan que les hace falta mejorar la calidad de su enseñanza en diversas cuestiones, tales como, el conocimiento matemático, la mecanización de algunos procesos matemáticos, el desconocimiento del uso de software para favorecer lo visual, etc. (Figura 2).

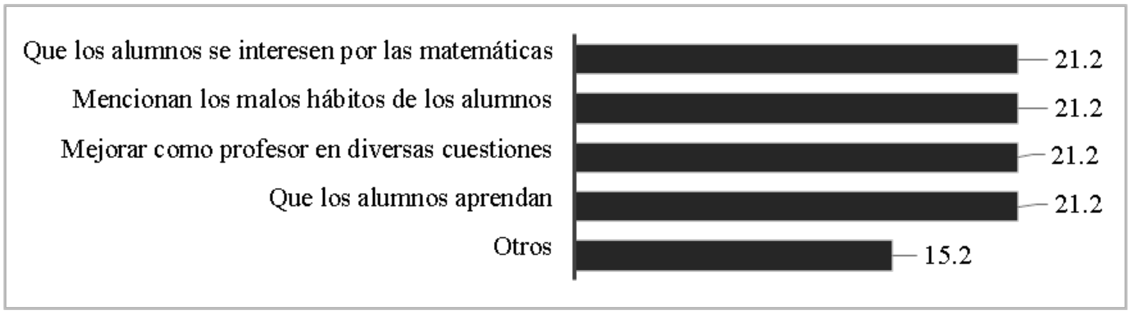


Figura 2. Porcentaje de respuestas obtenidas a ¿cuál es su mayor preocupación como profesor de matemáticas?

En cuanto a las respuestas de los docentes sobre su forma de enseñar matemáticas se observó que principalmente señalaron que es con ejercicios y práctica, de manera lógica, usando el pizarrón, creativa y de forma ordenada (Figura 3). Estos resultados coinciden nuevamente con los señalamientos de Thompson (1992).

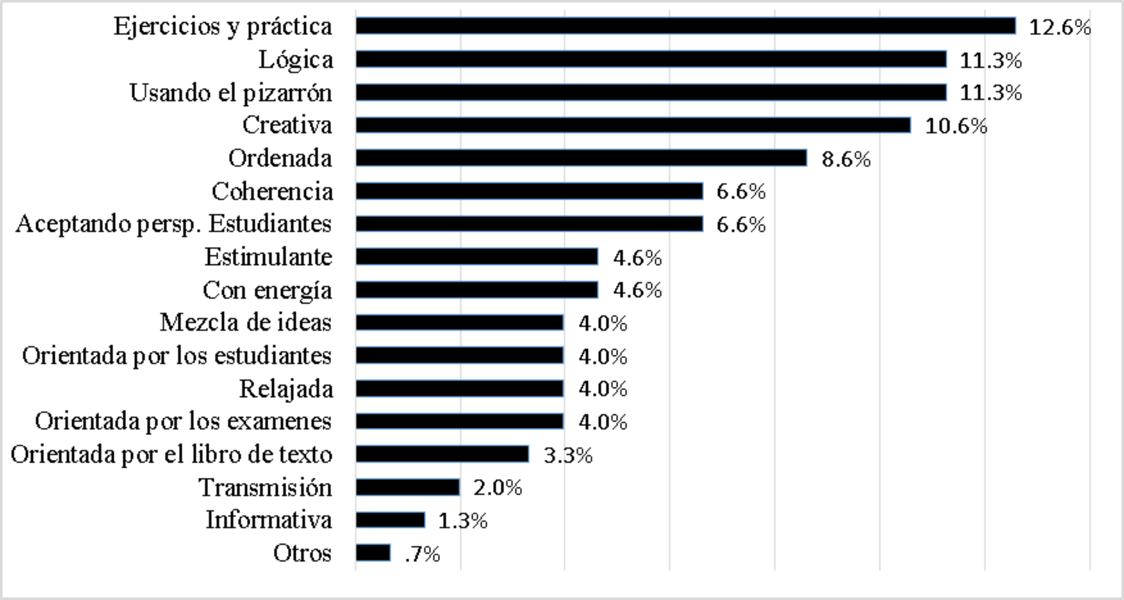


Figura 3. Porcentajes de creencias de profesores respecto a su forma usual de enseñar matemáticas.

Cuando se les pidió a los profesores que indicaran cómo creen que sus estudiantes describirían su forma de enseñar las matemáticas respondieron de mayor a menor: con ejercicios y práctica, usando el pizarrón, transmisión, lógica y ordenada (Figura 4).

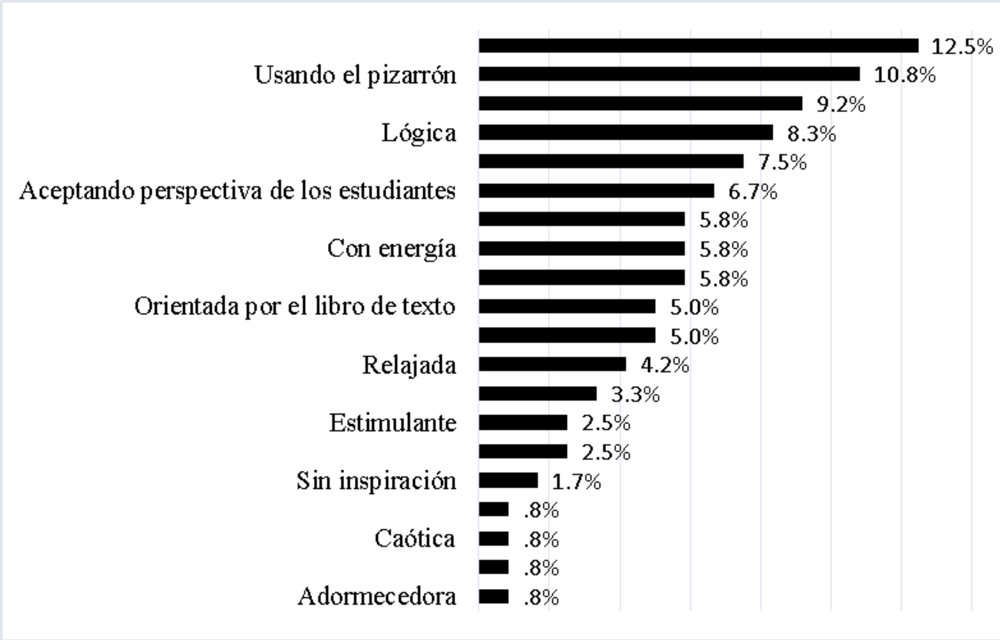


Figura 4. Porcentajes de respuestas de docentes respecto a cómo creen que sus estudiantes describirían su forma de enseñar matemáticas.

Según Kuhs y Ball (1986, cit. en Thompson, 1992) los docentes que tienen una visión instrumentalista de las matemáticas organizan los contenidos de acuerdo con una jerarquía de habilidades y conceptos los cuales presentan secuencialmente en la clase. Además, que el papel del profesor es demostrar, explicar y definir el material con un estilo expositivo, así mismo y como consecuencia, el papel de los estudiantes es escuchar, responder a las preguntas del profesor y hacer los ejercicios que les encomienda su profesor, empleando procedimientos enseñados por el profesor y/o similares a los del libro de texto.

Al inquirir a los profesores acerca de cómo podrían mejorar su enseñanza, principalmente refirieron que mediante la actualización docente, seguida de empleando más tecnología en sus aulas, evitando malas prácticas docentes, tomando en cuenta las necesidades de sus alumnos, entre otros (Figura 5).

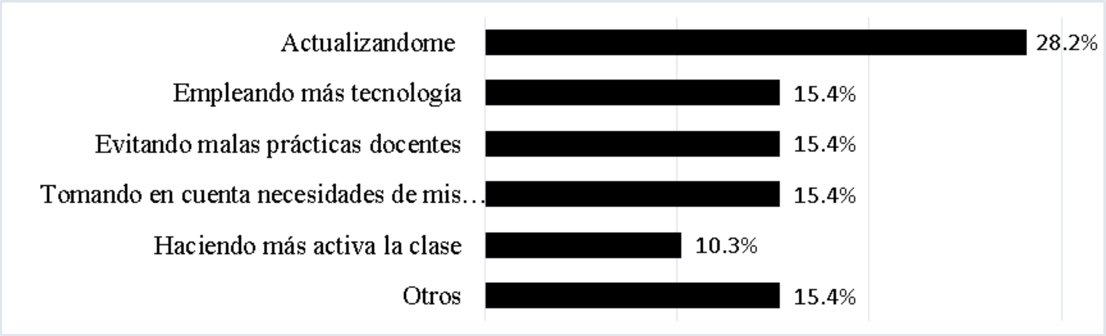


Figura 3. Distribución de porcentaje de las respuestas a ¿cómo podrías mejorar tu clase de matemáticas?

La entrevista que se aplicó a 10 de los profesores para obtener información de sus creencias acerca de la resolución de problemas matemáticos reveló que nueve de ellos creen que incorporar la resolución de problemas en el proceso enseñanza aprendizaje de las matemáticas permite desarrollar habilidades como la lógica y el razonamiento matemático. Sin embargo, 8 de ellos mencionó que no le dan prioridad a la estrategia de resolución de problemas matemáticas en sus clases, debido a 3 razones: 1) creen que el tanto el contenido matemático como la resolución de problemas matemáticos tienen la misma importancia en sus clases, 2) creen que para que los alumnos puedan resolver problemas matemáticos, es necesario que primero aprendan los contenidos matemáticos y 3) porque creen que no se pueden emplear problemas matemáticos en todos los contenidos matemáticos, lo cual reveló que la mayoría de ellos, considera que son más importantes los contenidos matemáticos que la resolución de problemas matemáticos. Asimismo, se encontró que la mayoría considera que un ejercicio de mecanización es aquel que permite ejercitar lo visto en clase, mientras que la resolución de problemas matemáticos permite que los estudiantes desarrollen su razonamiento matemático, su creatividad y que apliquen sus conocimientos matemáticos previos. Al respecto, se retoma lo referido por tres de los profesores participantes:

P21 *No, yo creo que va equilibrado,… para que la matemática se aprenda o se enseñe bien, se debe de conocer a fondo,…en general… ni más para resolución de problemas ni más para pensamiento creativo.*

P12 *Pues yo siento que es la parte final… primero iniciar con lo teórico, la base fundamental para tener los conocimientos. Y la resolución de problemas,… es la parte final,… lo más culminante.*

P23 *…creo que, no todos los temas se prestan para poder contextualizarlos en problemas,…*

Conclusiones

Los resultados obtenidos están en concordancia con algunos autores (Ernest, 1988, cit. en Thompson, 1992) respecto al impacto de las creencias en la enseñanza de las matemáticas y en que el comportamiento del profesor en la enseñanza de las matemáticas está matizado por las creencias de los profesores acerca de las matemáticas y su aprendizaje. Aunque hay una importante dificultad para identificar las creencias y concepciones referentes a las matemáticas y a la resolución de problemas matemáticos, el uso de instrumentos como los empleados en este trabajo facilitó aproximarse a su estudio. Se reflexiona acerca del influjo del tipo de creencias identificadas entre los profesores en aspectos como la búsqueda de estrategias didácticas que les permitan superar las dificultades y las exigencias de enseñanza. Una de las implicaciones de continuar con esta línea de investigación es que hará posible identificar con claridad las características del sistema de creencias del docente en torno a las matemáticas para, eventualmente, diseñar estrategias de intervención, por ejemplo, talleres, que promuevan un cambio hacia las creencias asociadas con estrategias de enseñanza más eficaces para el aprendizaje de las matemáticas.

Referencias bibliográficas

Callejo, Ma. L. y Vila, A. (2003). Origen y formación de creencias sobre la resolución de problemas. Estudio de un grupo de alumnos que comienzan la educación secundaria. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, No. 2, 173-194

De la Peña, J. (2002). *Algunos problemas de la educación en matemáticas en México*. México: Siglo XXI.

Giné, de L. C. y Deulofeu, P. J. (2014). Conocimientos y Creencias entorno a la Resolución de Problemas de Profesores y Estudiantes de Profesor de Matemáticas. *Bolema, Rio Claro (SP), 28* (48), 191-208.

Gómez-Chacón, I. M., Op't Eynde, P., & De Corte, E. (2006). Creencias de los estudiantes de matemáticas. La influencia del contexto de clase. *Enseñanza de las ciencias: Revista de investigación y experiencias didácticas, 24*(3), 309-324.

Lebrija, A., Flores, R. D. C., & Trejos, M. (2010). El papel del maestro, el papel del alumno: un estudio sobre las creencias e implicaciones en la docencia de los profesores de matemáticas en Panamá. *Educación Matemática, 22* (1), 31-55.

Leder, G., Pehkonen, E., & Töner, G. (2002). *Beliefs: A hidden variable in mathematics Education?* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Polya, G. (1985). *Cómo plantear y resolver problemas*. (13rd. de.). México: Trillas

Vila, A. (2001). *Resolució de problemes de matemàtiques: Identificació, origen i formació dels sistemes de creences en l'alumnat. Alguns efectes sobre l'abordatge dels problemes*. Tesis Doctoral

(Doctorado en didáctica de las matemáticas). Universidad Autónoma de Barcelona: Facultad de Educación.

Vila, C. A., & Callejo, M. (2005). *Matemáticas para aprender a pensar.* Madrid: Narcea.

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a síntesis of the research. En Grouws, D. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp. 127-146. New York: Macmillan.

PLANIFICACIÓN DE UNA UNIDAD DE ENSEÑANZA EN MATEMÁTICA

Ángel Míguez Álvarez, Ana Duarte Castillo
Universidad Nacional Abierta. (Venezuela)
amiguez@una.edu.ve, duarteann@gmail.com

RESUMEN: Se presenta el diseño de un esquema para la planificación de una Unidad de Enseñanza de la Matemática, donde están presentes elementos diferentes a los usados tradicionalmente en el Subsistema de Educación Básica venezolano, con el fin de mejorar la práctica de profesores de matemática en formación. El estudio se realizó con base en una revisión y análisis de formatos de planificaciones empleadas en el nivel de Educación Media General, el modelo de Serrano (2005) sobre Alfabetización Matemática y la Metodología para el Diseño Pedagógico de Míguez y Duarte (2014). Entre las consideraciones finales se presenta un esquema de planificación de las actividades didácticas que llevan a enriquecer la práctica del profesor de matemática en formación con el fin de superar el paradigma centrado en el ejercicio tal como lo plantea Skovsmose (2000).

Palabras clave: planificación, diseño pedagógico, formación de profesores

ABSTRACT: This paper shows the design of a schedule for planning a Mathematics teaching Unit with elements different from the ones traditionally used in Venezuelan Basic Education Subsystem, in order to improve the practice of mathematical trainee teachers. The study was based on the review and analysis of planning formats used at the General Middle Education level, Serranos's Model about Mathematical Literacy (2005), and the Methodology for the Educational Design by Míguez and Duarte (2014). Among the final considerations a didactic activity planning schedule is shown. It leads to enrich the mathematics trainee teacher's practice with the aim to supersede the paradigm centered on the exercise as Skovsformose states (2000).

Key words: planning, educational design, teachers' training

Introducción

La Ley Orgánica de Educación en Venezuela (2009), establece en su artículo 15, apartado 8 como uno de los fines de la educación, lo siguiente: "Desarrollar la capacidad de abstracción y pensamiento crítico mediante la formación en filosofía, lógica y matemática, con métodos innovadores que privilegien el aprendizaje desde la cotidianidad y la experiencia". (p. 14) [subrayado nuestro]

Para cristalizar el fin anterior, es necesario que el profesor tenga una formación diversificada y sólida, que le ayude a controlar y gestionar la complejidad de las relaciones entre teoría y práctica en el aula. El profesor de matemáticas necesita, además, conocimientos sólidos sobre los fundamentos teóricos del currículo de su disciplina, sin los cuales ve limitada sus funciones a las de mero ejecutor de un campo de decisiones cuya coherencia y lógica no domina, e incluso, a veces no entiende. Para contribuir, desde la matemática, a la puesta en práctica de un plan educativo o planificación de los aprendizajes, al profesor de matemáticas no le basta con dominar los contenidos de su materia (Rico, 1997, p. 377), éste necesita del conocimiento didáctico de la disciplina (Shulman, 2005)

Ahora bien, cuando el profesor de matemáticas inicia la puesta en práctica con un grupo de estudiantes necesita tomar una serie de decisiones de carácter general. Estas decisiones se concretan mediante criterios para la selección, secuencia y organización de los contenidos; criterios para la organización, desarrollo y control del trabajo en el aula; prioridades en el proceso de construcción del conocimiento y en la asignación de significados por parte del estudiante; y finalmente criterios para valorar los logros en el aprendizaje y para el tratamiento adecuado de los errores. Estos criterios se ajustan a cuatro componentes generales del currículo: contenido, metodología, objetivos y evaluación. (Rico, 1997)

Estos criterios están presentes en la mayoría de las planificaciones que realizan los profesores de matemática de Educación Media General, tanto en Venezuela como en otros países. Así lo refiere Rico (1997) cuando menciona que el esquema que aportan estas cuatro componentes es amplio y versátil; de hecho es el que utiliza la propuesta curricular del Ministerio de Educación y de las Conserjerías de Educación de las comunidades Autónomas en España. Esto puede inducir a que el profesorado adopte sin cautela el mismo esquema y trate de utilizarlo directamente en todos los niveles de planificación de una materia, curso o asignatura.

Esto debido, a que al revisar varias planificaciones nos encontramos un tratamiento metodológico, y evaluativo único para cada contenido matemático, lo cual no contribuye a mejorar la práctica en el aula.

En Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008) se hace referencia a que la planificación es una de las competencias profesionales clave para el profesor y que esta menos desarrollada en los planes de formación del profesorado. La información que aportan a la planificación docente los currículos de Educación Secundaria establecidos y las secuencias de contenidos que los boletines oficiales publican, se muestran claramente insuficientes para llegar al aula y decidir acerca de qué debe aprender un estudiante de secundaria en cada tema y cómo hacerlo operativo cada día. Los libros de texto que publican las editoriales y su complemento en forma de libro del profesor ocupan el espacio intermedio entre la secuencia general del Boletín Oficial del Estado y la planificación diaria de actividades que el profesor debe realizar, ya que responden a preguntas como ¿qué contenidos trabajo con mis alumnos? ¿Qué expectativas tengo respecto a su aprendizaje? ¿Cómo selecciono y estructuro las clases para que el alumno alcance las expectativas previstas?. La normativa educativa señala la obligatoriedad de elaborar documentos curriculares específicos para cada centro, que contengan instrumentos para tomar decisiones y propuestas para ajustar el contenido oficial del currículo a la realidad del alumnado de cada centro. Igualmente, enfatiza la necesidad de responder a la diversidad del alumnado en sus condiciones de vida, expectativas y conocimientos con variedad de actividades. Estas consideraciones, refuerzan la importancia del trabajo de programación y selección de tareas en la labor del profesor. La planificación, como competencia clave del profesor de matemáticas, demanda el desarrollo de capacidades específicas para identificar, organizar, seleccionar y priorizar los significados de los conceptos matemáticos mediante el análisis cuidadoso de su contenido, análisis necesario para establecer las expectativas de aprendizaje, previo al diseño de tareas y necesario para la elección de secuencias de actividades.

Mientras que Gómez y Restrepo (2012) realizaron un análisis de algunos documentos curriculares que se producen dentro de una institución, tomando en consideración los siguientes niveles de expectativas de aprendizaje: competencia, estándar, objetivo general, objetivo y capacidad. La problemática que se describe en este estudio, se centró en la caracterización de la dimensión cognitiva del currículo que se registra en una muestra de planes del área, de instituciones escolares de Bogotá y sus cercanías. Los documentos se caracterizaron atendiendo a: el nivel de generalidad con el que se trata, los términos que las instituciones utilizan para esta dimensión y la coherencia y la estructura con la que las instituciones la describen. El principal resultado que se obtuvo fue la constatación de la diversidad de aproximaciones al problema de la planificación en las diferentes instituciones.

Ahora bien, una buena práctica en la Enseñanza Escolar está basada en una buena planificación, en tener claro hacia dónde se debe conducir la actividad que queremos que desarrolle el estudiante para comprender la matemática que les proponemos conocer y de la que queremos que puedan usar en su vida de ciudadanos.

Es por ello que consideramos que la planificación debe ubicar el contexto en el que se desarrolla la enseñanza, permitir desarrollar todas las potencialidades posibles de nuestros estudiantes y debe orientar sobre qué evaluar para continuar mejorando el proceso de enseñanza de la matemática.

La planificación también debe orientar al profesor novel sobre los elementos que pueden enriquecer la planificación con miras a una actividad de enseñanza que sea rica en experiencias para el estudiante y permita desarrollar sus diferenciadas potencialidades.

Por lo cual, el objetivo de este estudio es proponer un esquema para la planificación de una unidad de enseñanza de la matemática, en donde estén presentes elementos diferentes a los usados tradicionalmente en el Subsistema de Educación Básica

Desarrollo

Caracterización de algunos elementos presentes en el esquema de planificación de una Unidad de Enseñanza de la Matemática

Para la caracterización se definieron tres espacios en la planificación, en el primero consideramos el conocimiento del entorno en el que la planificación se da y sus tres elementos constitutivos, estos los tomamos de la metodología del Diseño Pedagógico (Míguez y Duarte, 2014). El segundo espacio está asociado a las potencialidades a desarrollar en clase tomado de Serrano (2005) agregando un elemento que consideramos vital en una concepción de la actividad que debe desarrollar el estudiante para adquirir el conocimiento matemático y que denominamos Practicum. Y finalmente, el último es la evaluación vista en dos perspectivas descrita en la metodología del Diseño Pedagógico antes mencionada

Primer Espacio:

1. Contexto Curricular (Míguez y Duarte; 2014, p. 1)
    a. Se debe describir el año en el que se implementará la Unidad de Enseñanza de la Matemática y su correspondencia con el currículo nacional vigente.
    b. Se debe señalar cuáles son los criterios de evaluación establecidos en la institución educativa en la que se desarrollará la Unidad de Enseñanza de la Matemática.
    c. Se selecciona el tema contemplado en el plan de estudios en correspondencia con el currículo nacional vigente.
2. Contexto Escolar y Socio-económico
    a. Se debe señalar la ubicación territorial (espacio, comunidad) donde se encuentra ubicada la institución en la que se desarrollará la Unidad de Enseñanza de la Matemática.
    b. Edad promedio de los estudiantes.
    c. Estrato social promedio de los estudiantes.
    d. Formación académica de los padres de los estudiantes que participaran en la Unidad de Enseñanza de la Matemática.
    e. Si poseen o no el Libro de texto de la Colección Bicentenario y la computadora o Tablet Canaima.
    f. Cómo acceden al servicio de Internet.
    g. Condiciones pedagógicas del plantel o institución donde se desarrollará la Unidad de Enseñanza de la Matemática (aula, biblioteca, patio de recreo, cantina, comedor, auditorio, etc.).

3. Contexto Académico Estudiantil

   a. Cuál es el nivel académico de los estudiantes que usarán la Unidad de Enseñanza de la Matemática.

   b. Cuál es la disposición al estudio y hacia la matemática de los estudiantes que usarán la Unidad de Enseñanza de la Matemática.

   c. Cuál es el dominio de los contenidos académicos previos o requisito que deben poseer las estudiantes para abordar el estudio de la Unidad de Enseñanza de la Matemática a implementar.

Segundo Espacio:

4. Potencialidades a considerar para estructurar el desarrollo de la clase

   A. Matemática

   B. Metamatemática

   C. Social

   D. Axiológica

   E. Practicum

A. Matemática (Serrano, 2005, pp. 19-20)

La potencialidad matemática abarca el estudio y la comprensión de conceptos y técnicas matemáticas (algoritmos), el manejo del lenguaje matemático, la solución de problemas y la argumentación y demostración de propiedades (en correspondencia con el nivel educativo en que se encuentren las/los estudiantes). Abarca también la discusión y comunicación de ideas matemáticas con otros estudiantes, con la profesora o con otros miembros de la comunidad escolar en general, así como de dudas o errores; el desarrollo del pensamiento matemático, fundamentalmente de los procesos que este involucra, y la habilidad para interpretar y/o diseñar modelos matemáticos referidos a diversas situaciones de la realidad.

Tabla 1. Elementos para la planificación: Matemática (Serrano, 2005, p. 32)

Elementos	*Descripción*
Pensamiento matemático	Caracterizado por los procesos clasificar, representar, analizar, sintetizar, abstraer, conjeturar, inducir y formalizar, entre otros. El pensamiento matemático se puede entrever por medio de planteamientos como: ¿Qué relación hay entre...?, ¿qué condiciones deben

	cumplirse para que...?, ¿implica o garantiza esto que...?, ¿qué propiedades tiene...?,... hace pensar que posiblemente..., etc.; y por la manifestación de su lenguaje matemático.
Planteamiento y resolución de problemas	Resuelve y propone problemas relacionados con (1) la estructuración de partes del edificio matemático, (2) una realidad hipotética o semi-realidad y (3) con el contexto del aula, con la realidad. Esta resolución se enmarca en un ambiente de aprendizaje basado en la investigación.
Interpretación y/o estructuración de modelos matemáticos	Ante un problema o situación real o matemática las/los estudiantes abordan las cuestiones: ¿qué información es necesaria para resolver el o los problemas o para traducir la situación en un problema?, ¿cómo puede obtenerse esta información?, ¿cómo se traduce al lenguaje matemático?, ¿qué herramientas o ideas matemáticas pueden aplicarse?, ¿qué interpretación tienen los resultados?, ¿qué características tiene(n) el o los modelos estructurados?, ¿qué limitaciones tiene el modelo matemático?, entre otras.
Discusión y comunicación	Comunica y discute ideas matemáticas, dudas y errores con sus compañeros y con la o el profesor, así como con otros miembros de la comunidad escolar. Estos procesos (comunicar y discutir) son valorados como relevantes en el proceso aprendizaje/enseñanza de la matemática.

B. Metamatemática (Serrano, 2005, p. 34)

La potencialidad metamatemática tiene que ver con el conocimiento sobre el conocimiento matemático. Se refiere a una actividad de naturaleza intelectual en la que se reflexiona sobre la matemática como disciplina, en la que se evalúan los problemas de los que se ocupa, se piensa sobre la estructura lógica que sustenta las teorías matemáticas así como su evolución, y también sobre la verdad de las proposiciones matemáticas.

Algunos elementos de este aspecto para la planificación:

- ¿Qué ideas matemáticas sustentan este hecho?
- ¿De qué tipo de problemas se ocupa la matemática?
- ¿Cómo se dedujo este algoritmo?
- ¿Cómo se llegó a esta definición o a esta caracterización de este objeto matemático? ¿Existe otra caracterización?
- ¿Qué métodos tiene o ha desarrollado la matemática que sirvan a su propio desarrollo como disciplina?

C. Social (Serrano, 2005, p. 36)

La potencialidad social guarda relación con una diversidad de problemas de nuestra sociedad. Tiene que ver con el uso o aplicación de la matemática para estudiar problemas de la sociedad o del contexto de los estudiantes.

Algunos elementos para la planificación considerando este aspecto son:

- ¿Qué aplicación tiene este concepto o idea matemática en la realidad?
- ¿Cómo puede ayudar la matemática a comprender ciertos fenómenos sociales?
- ¿Qué tan fidedigna es la interpretación que brinda la matemática en la descripción de un fenómeno en particular?

D. Axiológica

La potencialidad axiológica guarda relación con una diversidad de valores que se desean promover en nuestra sociedad. Tiene que ver con el uso o aplicación de la matemática para desarrollar en los estudiantes los valores que le permitan potenciar su personalidad, su entorno familiar, comunitario. Se refiere al desarrollo del respeto, la justicia, la convivencia, la solidaridad, la cooperación, la responsabilidad, la coherencia entre acción y pensamiento.

Elementos para la planificación axiológica:

Respeto: Respeto al ser humano, respeto al conocimiento.

Responsabilidad: Responsabilidad en el estudio, en las acciones desarrolladas en cualquier ámbito, en las asignaciones escolares, en las labores familiares.

Coherencia: Las acciones desarrolladas para adquirir el conocimiento matemático se corresponden con sus valores intrínsecos de rigurosidad en el análisis y pensamiento.

Convivencia y cooperación: Emular en el trabajo matemático una metodología de trabajo que se puede desarrollar en cualquier actividad con amigos, familiares, vecinos y cualquier otro colectivo.

Justicia y Solidaridad: Valorar la equidad como un paso superior en las relaciones entre los seres humanos, tanto en el trabajo escolar, como el familiar y comunitario.

E. Practicum

La potencialidad relacionada con la actividad práctica guarda relación con la única forma de adquisición de conocimiento. Tiene que ver con la actividad intelectual, manual, corporal. Tiene que ver con la Acción Humana. La matemática requiere del uso del cuaderno y del lápiz como acción posterior del estudio, análisis y discusión de las ideas, pero su adquisición requiere del uso de todos los sentidos, de la tijera, de la cinta métrica, de la escardilla, del martillo de la visualización y de la graficación, del cómputo y la entrevista. Conversar, leer, caminar, explorar, escuchar.

Elementos para la planificación: actividad práctica

Toda actividad que pretenda que el estudiante adquiera conocimientos y habilidades matemáticas debe desarrollar el uso de todos los sentidos, la pasividad del pupitre estático viendo a la pizarra debe ceder espacios y lapsos al movimiento, la interacción, la visualización, escuchar y conversar y sobre todo hacer con las manos y en movimiento corporal en sus entornos. Como por ejemplo: Libros y bibliotecas, Fábricas y comercios, Parques y jardines, Patio, canchas y laboratorio, Calles y veredas

5. Evaluación (Míguez y Duarte, 2014, pp. 6-7)

La Evaluación debe analizar y determinar los logros alcanzados por los estudiantes, además de las bondades de las Actividades de Enseñanza desarrolladas por las profesoras con miras a realimentar el proceso de enseñanza y mejorar su planificación para una próxima aplicación en el aula.

a. Valoración de las Actividades de Enseñanza

Es importante tener criterios adecuados para la selección de tareas de evaluación con miras a realimentar el proceso de enseñanza. Estos criterios están estrechamente relacionados con los tres elementos que deben estar presentes en la actividad de enseñanza (Conceptos y procedimientos; Ejemplificación y contextualización; y Ejercicios, problemas y preguntas). Entre los criterios mencionamos:

Criterios
Relevancia práctica
La coherencia o fragmentación de las tareas
Rango de respuestas posibles
Extensión
Valor de la actividad
Modo de trabajar

b. Valoración de los Conocimientos y Habilidades de los Estudiantes

La evaluación de los conocimientos y habilidades y destrezas del estudiante en el tema se considerará formativa y sumativa. La primera debe diagnosticar e informar para permitir recuperación de deficiencias y la segunda expresa la agregación de los logros conseguidos por un estudiante y da lugar a una calificación.

Conclusiones

Más que un instrumento acabado tenemos un instrumento para el apoyo de la actividad del docente y para la transformación de la práctica educativa en la enseñanza de la matemática.

Este esquema para elaborar la planificación de una unidad de enseñanza de la matemática sólo se puede enriquecer, transformar y desarrollar a través de la práctica, la reflexión y la evaluación de sus resultados como herramienta de apoyo para la guía del profesor novel en el desempeño de sus funciones. Es por ello, que el siguiente paso en esta investigación es la indagación y sistematización de los resultados de su uso y aplicación en la Educación Media General y la evaluación de sus logros y reveses sobre la práctica cotidiana en el proceso de enseñar matemática para la formación de ciudadanos. Creemos que el producto diseñado y elaborado para apoyar el cómo enseñar matemática cuenta con suficientes elementos para facilitar el proceso de pensar las formas de abordar la enseñanza de la matemática a los estudiantes de todos los rincones del país en medio de sus peculiaridades y circunstancias, garantizando la posibilidad de tener una mirada enriquecedora de esa labor que trascienda al algoritmo y al ejercicio sin negarlos.

Referencias bibliográficas

Gómez, P. y Restrepo, A. (2012) *Procesos de Planificación en Matemáticas y Autonomía Escolar*. Presentado en el III Congreso Internacional y VIII Nacional de Investigación en Educación, Pedagogía y Formación Docente. ISBN: 978-958-8650-30-2

Ley Orgánica de Educación. Gaceta Oficial Extraordinaria N° 5929. Caracas, Venezuela. 15 de agosto de 2 009.

Míguez, Á y Duarte, A (2014). *Análisis Pedagógico*. Documento en construcción hecho público como material de apoyo para el desarrollo de la Unidades Curriculares: *Cantidad y su Didáctica* y *Cambio y su didáctica I* de la Micromisión Simón Rodríguez en el área de Matemática. MPPE.

Rico, L. y Lupiañez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Rico, Luis (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En Rico, L.; Castro, E.; Castro, E.; Coriat, M.; Marín, A.; Puig, L.; Sierra, M.; Socas, M. M. (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Madrid: ice – Horsori.

Serrano W. (2005). La alfabetización matemática. En: D. Mora (Ed.), *Didáctica crítica, educación crítica de las matemáticas y etnomatemática. Perspectivas para la transformación de la educación matemática en América Latina* (pp. 243-276). Bolivia-Venezuela: GIDEM-Campo Iris.

Shulman, L. (2005) Conocimientos y Enseñanza: Fundamentos de la nueva reforma Profesorado. *Revista de currículum y formación del profesorado*, 9 (2), 1-30

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de Investigación. *EMA*, 6(1), 3-26.

EXPERIENCIAS EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

María Esther Magali Méndez Guevara, Marcela Ferrari Escolá, Nancy Marquina Molina
Universidad Autónoma de Guerrero, Facultad de Matemáticas. (México)
memmendez@uagro.mx, mferrari@uagro.mx, nmarquina@uagro.mx

RESUMEN: El Sistema Educativo Nacional se hace explícito en el quehacer de sus profesores, pues son ellos quienes lo desarrollan, de ahí que sea preciso hacer investigación en torno a la profesionalización docente desde su formación inicial y continua. Este reporte comparte experiencias en la formación inicial del docente de matemáticas, en las cuáles se implementaron diseños de aprendizaje basado en elementos teórico-metodológicos de la socioepistemología y la investigación basada en diseños. Se trabajó con diseños de aprendizaje basados en modelación y covariación con estudiantes de Licenciatura en Matemáticas con perfil en Matemática Educativa con el objetivo de promover la reflexión sobre el quehacer docente y la identificación de elementos matemáticos y metodológicos esenciales en los diseños para lograr formular nuevas actividades matemáticas. Se recopilaron datos por medio de videos de clase y ensayos de los participantes sobre las actividades realizadas, esto dio luz sobre un posible modelo de desarrollo profesional docente.

Palabras clave: desarrollo profesional docente, modelación, covariación

ABSTRACT: The National Educational System is reflected in its teachers' work because they are the ones who develop it. Therefore, it is necessary to investigate about teacher professionalization, from its initial and continuous training. This report shares experiences in the initial training of the mathematics teacher, in which learning designs were implemented based on socio-epistemology theoretical-methodological elements, as well as on design-based research. We worked with models of learning based on modeling and co-variation with students of the Mathematics degree majoring in Educational Mathematics. It was aimed at encouraging the reflection on the teaching task and the identification of essential mathematical and methodological elements in the designs in order to create new mathematical activities. Data were collected through class videos and participants' essays on the activities carried out, which shed light on a possible model of professional teacher development.

Key words: teaching professional development, modeling, co-variation

El desarrollo profesional en la formación inicial de Matemáticos Educativos

Tedesco y Tenti Fanfani (2002, citado en Montecinos, 2003), hicieron un análisis sobre la evolución de la concepción de la profesión docente, y su relación con cambios del sentido y función de las sociedades Latinoamericanas, exhibieron que en un primer momento ser maestro era una vocación o apostolado, similar al sacerdocio, al cual uno se entregaba sin esperar grandes recompensas monetarias. Un segundo momento colocó a la docencia como un oficio aprendido, ahí con las reformas en los años 60 y 70, se buscó la modernización, enfatizando en la adquisición de competencias técnico-pedagógicas. En un tercer momento, se concibió como la profesión, así el profesor es un profesional que opera con cierta autonomía. Sin embargo, esto genera tensiones en torno a procesos sociales y las concepciones de profesionalismo. Por ello se ha consensado que la profesión docente ha pasado de ser un ejercicio individual al profesionalismo colectivo.

Esto último supone que el trabajo del docente contiene una actitud indagatoria, mientras que se aspiran a mantener cierta autonomía en la toma de decisiones y se resisten a obedecer solamente las órdenes de superiores. Esto genera tensión porque los cursos habituales que se proponen al profesorado, tienen una fuerte tendencia a saturar con teorías supuestamente de moda mundial, con múltiples tecnicismos que oscurecen el lenguaje y la comprensión del mensaje que se desea comunicar, más que convenir o co-construir. Esto lleva a que los maestros regresan a sus aulas con nuevas formas, pero con las mismas prácticas (CIDE 2001, citado en Montecinos, 2003).

Entonces, de acuerdo con lo reportado en Montecinos (2003), el desarrollo profesional docente debería proveer de una variedad de instancias formales e informales que ayudan a un profesor a aprender nuevas prácticas sobre su quehacer, a la par de permitirle desarrollar una nueva comprensión acerca de su profesión, su práctica y el contexto en el cual se desempeña.

Teniendo presente esto, y reconociendo como hecho social, que no depende del país, de postura teórica e incluso de la disciplina con la que lo observemos, es que cualquier Sistema Educativo Nacional se hace explícito en las prácticas docentes de sus profesores, pues son ellos quienes ponen en juego los elementos que se proponen en los planes y programas de estudio, de modo que el desarrollo profesional docente es inherente al desarrollo del conocimiento, matemático o de cualquier índole que queramos estudiar. Y sin embargo, según un el estudio realizado por Rico (1996, citado en Cardeñoso, & Pilar, 2001) las investigaciones sobre la formación didáctico–matemática de los profesores en aquel momento era un 10%, frente a otras líneas, cuyo objetivo principal era:

> […] delimitar los contenidos que deben configurar la formación inicial y permanente en función de su nivel profesional y, en consecuencia, las competencias profesionales que ha de desarrollar. En este grupo de investigaciones se pueden incluir todas aquellas investigaciones que analizan las concepciones y creencias de los profesores y su influencia en el desarrollo de su práctica educativa. Así como aquellas que analizan el conocimiento profesional, su estructura y su evolución. (p. 235)

Por su parte Cardeñoso y Pilar (2001) reconocen que el desarrollo profesional docente se nutre con los resultados de otras líneas de investigación, por lo que es importante repensar qué de esas investigaciones habrá de incluir en la formación inicial del profesor de matemáticas.

En un estudio sobre modelos innovadores de la formación inicial de docentes realizado por la OREALC/UNESCO (2006) se encontraron elementos comunes en dichos modelos los cuales son; Fomentar la investigación en la formación inicial de docentes como una manera de reorientar la reflexión y la mejora de la docencia.

En este mismo tenor, Battey, Kafal, Nixon y Kao (2007) invitan a reflexionar sobre una enseñanza matemática más inclusiva y una conceptualización del papel del profesor como un participante activo en la investigación e interpretación de aprendizaje de sus alumnos. Además se identifica que la transformación de las prácticas docentes, necesariamente va asociado a un proceso de reconstrucción profunda del significado de lo que es ser un profesor de matemáticas (Simon y Campbell, 2012).

Nuestra hipótesis es que la reconstrucción ocurre en interacción con otros, y es esta resignificación del sentido de enseñar matemáticas la que debe suceder para que ocurra una profesionalización docente. Esto sucederá vivenciando formas diferentes a las tradicionales de aprender matemáticas, experimentándolas, diseñándolas y comunicando las experiencias a sus pares. Este proceso es un proceso intenso de reflexión a partir de las evidencias empíricas y a la luz de las teorías de la matemática educativa.

En particular nuestra inquietud gira en torno a cómo formar un Matemático Educativo, qué elementos se requieren para que se apropien de su desarrollo profesional en tanto profesor-investigador.

Hemos realizado algunas exploraciones en las clases “habituales”, del área de Matemática Educativa, en donde se han incluido elementos teóricos y metodológicos por parte de sus profesoras para movilizar los conocimientos matemáticos y didácticos en los futuros profesores, aquí mostramos un par de experiencias.

■ Experiencia 1. La inclusión de elementos de una categoría de modelación escolar para el diseño de situaciones

Esta experiencia consistió en desarrollar cuatro fases a lo largo de tres unidades de aprendizaje, en cada una se realizaron actividades específicas sobre; el desarrollo de conocimiento matemático y análisis de elementos del diseño que los provocó, la inclusión de esos elementos en un rediseño, la puesta en escena y análisis de datos para finalizar con un reporte escrito y enviarlo evaluación por un comité externo (Méndez, 2016).

En este caso los elementos incluidos permitieron en su momento a los jóvenes reflexionar en las siguientes líneas:

Sus saberes matemáticos en torno a función, derivada, integral definida y modelación en tanto fueron participes en diseño de situaciones de aprendizaje basados en una categoría de modelación escolar (Tocto & Méndez, 2015).

Elementos teóricos – metodológicos sobre modelación escolar y su funcionamiento en diseños de situación de aprendizaje (Méndez & Cordero, 2014), reflexionando principalmente, desde lo que ellos hicieron en la primera fase, y con eso explicar que significan constructos como: uso de las gráficas, tablas de datos o expresiones algebraicas analíticas para el análisis puntual-loca-global, resignificación mediante desarrollo de usos, modelación escolar en sí, además de cómo se había formulado el diseño, es decir, las preguntas que orientaron sus resignificaciones.

Se planteó la propuesta de rediseñar o diseñar actividades intentando usar estos elementos teóricos-metodológicos, explicitando las expectativas que tienen sobre sus actividades, realizaron una puesta en escena de su diseño, recolectaron sus resultados y los analizaron, a la par que reflexionaron sobre sus propias prácticas al momento de desarrollar su actividad.

Esto permitió tener otra mirada sobre; preparar una actividad que provoque el desarrollo de saberes matemáticos, el rol como profesor-investigador en tanto que implementó su diseño con cierto objetivo, lo analizó y compartió su experiencia con sus pares.

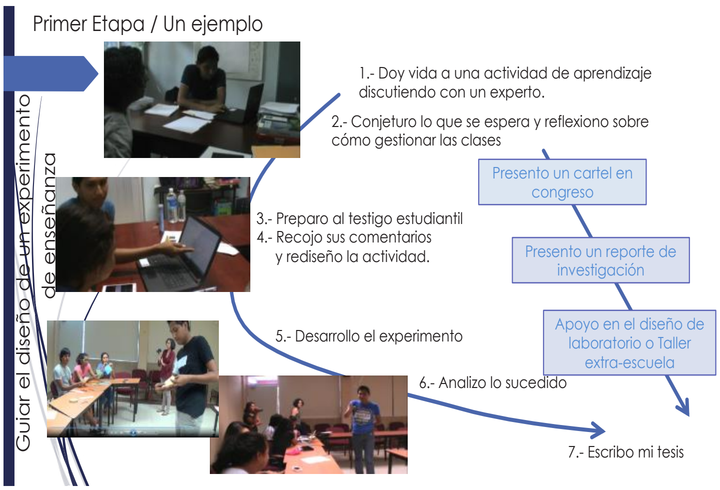
De esta experiencia, se logró incentivar a seis de los once jóvenes con los que se trabajó para la realización de tesis, todos enviaron en su momento trabajo a eventos de la disciplina a nivel estatal, nacional e internacional, en donde se aceptaron un cartel, dos ponencias y un taller. En sus ensayos fue recurrente leer frases como: *creí que en matemática educativa solo se leía, ya veo que también se hace matemáticas*; *No había visto el cálculo como ahora… la derivada y la integral en una gráfica*; *no tenía claro que era modelación;… ahora sé que ser profesor es más qué saber matemáticas*.

De esta experiencia nos nació la inquietud de estudiar el proceso del cual sin duda somos parte, la formación inicial del profesor de matemáticas. Se considera que con medios como la modelación escolar se logra resignificar los conocimientos matemáticos, pero hace falta analizar cómo el futuro profesor de matemáticas se apropia de ésta para provocar en otros la resignificación. Lo que observamos es que la reflexión sobre lo vivenciado es un medio potente. Además, promover rehacer o diseñar sus propias experiencias didácticas a los futuros profesores les genera una conciencia más profunda de su rol como profesor.

■ Experiencia 2. Acompañando a un estudiante en su formación inicial de un matemático educativo

Esta es una experiencia que da cuenta de un proceso de inclusión a la investigación. Mismo que nos lleva a compartir con estudiantes avances de investigación e invitarlos a ser parte de ellas, en tanto los formamos como profesores de matemáticas. Este ejercicio nos obliga a reflexionar sobre cómo guiarlos en tareas investigativas y cómo impacta en su formación como matemático educativo. En este caso, decidimos trabajar con un estudiante cuya única opción de titularse es por medio de tesis. Comenzamos invitándolo a reflexionar sobre una actividad *ad hoc* a la divulgación de las ciencias y diseñar una manera de invitar a todo público a involucrarse en la construcción de un caracol nautilus con papiroflexia, tarea que implica covariación logarítmica.

Luego de la experiencia vivida en el evento de divulgación "Expomatemática" en el Parque Papagayo de la ciudad de Acapulco, el alumno se interesa por continuar con la exploración de los elementos matemáticos involucrados en dicha tarea y se cuestiona sobre cómo generar un diseño de aprendizaje. Con estos elementos se le solicita que envíe su trabajo como cartel a un evento nacional, el cual es aceptado y ante su soltura y entusiasmo al presentarlo ante colegas, gana el primer lugar. Experiencia que lo motiva a seguir profundizando su estudio sobre el problema. La actividad de comentar con expertos sus ideas, lo conflictua y a la vez le permite destrabar elementos que profundiza en la preparación del intercambio y que al vivirlo lo lleva a un proceso de resignificación.



Esquema 1. Síntesis de las etapas

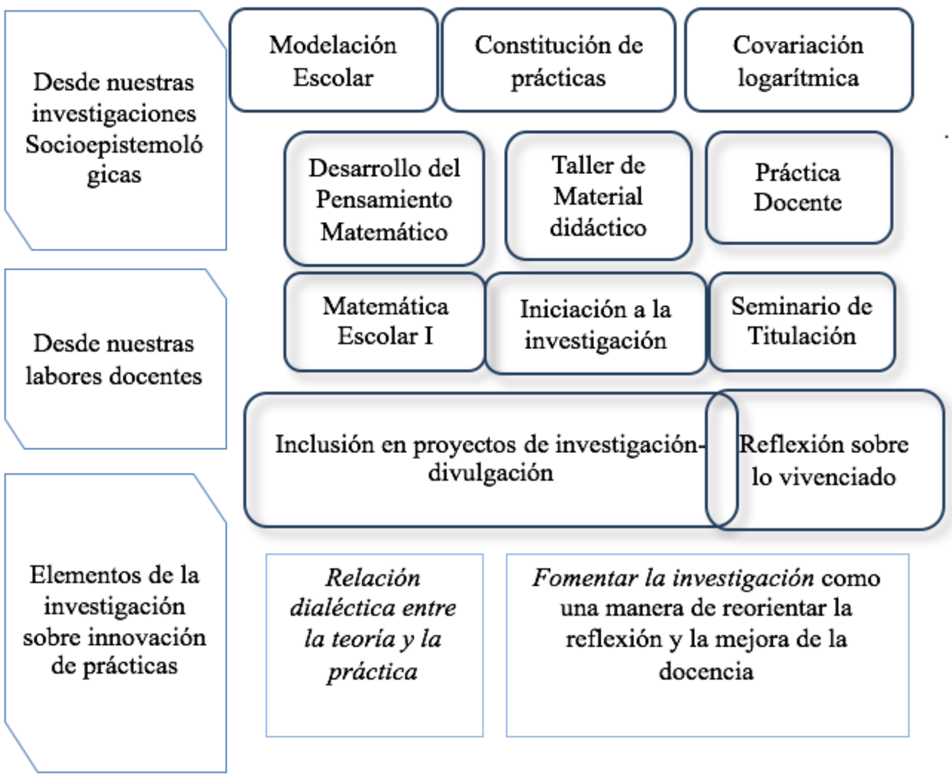
En otra etapa se diseña un experimento de enseñanza (Steffe & Thompson, 2000) y se genera su puesta en escena en el curso de Matemática Escolar I que impartía su asesora. La tarea fue realizar un pilotaje del diseño de aprendizaje con una de los estudiantes del curso, discutirlo con ella, escuchar las críticas y sugerencias (ver esquema 1). Además, se entrelazaron tareas de asesorías individuales y presentaciones en eventos locales, con esto se ha propiciado en el futuro profesor de matemáticas, una necesidad de ser crítico y profundizar su mirada a lo que está sucediendo con su diseño de aprendizaje, logrando a su vez, cierta independencia, seguridad y profundidad en sus reportes.

Reflexiones finales

Estas dos experiencias han provocado reflexionar sobre cómo generalizar este tipo de resultados en grupos de estudiantes, reflexiones que han desembocado en un proyecto que actualmente desarrollamos con dieciséis jóvenes de séptimo semestre de la licenciatura en matemáticas, área Matemática Educativa.

Así mismo nos produjeron identificar que una tarea de esta índole requiere de una articulación no sólo de unidades de aprendizaje, sino de elementos teóricos - metodológicos y de la conformación de un equipo que involucren a investigadores, con distintas líneas temáticas, estudiantes de posgrado y licenciatura en tanto son auxiliares de investigación. Esto permitiría fortalecer las líneas de investigación en reciprocidad de la formación inicial de Matemáticos Educativos.

Por ejemplo, un esquema inicial del proyecto que estamos desarrollando es el siguiente:



Esquema 2. Escenario de observación para la formación inicial del Matemático Educativo

Referencias bibliográficas

Battey, D., Kafal, Y., Nixon, A. S., & Kao, L. (2007). Professional development for teachers on gender equity in the sciences: Initiating the conversation. *Teachers College Record, 109*(1), 221–243.

Cardeñoso, J. & Pilar, P. (2001). El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación en educación matemática. En Gómez, P., y Rico, L. (Eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática*. Homenaje al profesor Mauricio Castro. Granada: Editorial Universidad de Granada. ISBN: 84-338-2757-9.

Méndez, M. (2016). Explorando la formación inicial. Reflexión sobre el diseño y aplicación de una situación de modelación escolar. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 29*. Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. ISSN: 2448-6469.

Méndez, M. & Cordero. F. (2014). La modelación. Un eje para la red de desarrollo de usos. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 27*. (Pp. 1603-1610) Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C

Montecinos, C. (2003). Desarrollo profesional docente y aprendizaje colectivo. *Psicoperspectivas, II*, (pp. 105 – 128).

OREALC/ UNESCO. (2006). *Modelos innovadores en la formación inicial docente*, en J. Murrillo (Coord.). Chile. ISBN: 956-8302-57-3

Ribeiro, M., & Carrillo, J. (2012). Discussing a teacher MKT and its role on teacher practice when exploring data analysis. *PNA, 6*(3), 105-114. Disponible en: http://hdl.handle.net/10481/19520.

Simon, S., & Campbell, S. (2012). Teacher Learning and Professional Development in Science Education. En B. Fraser, K. Tobin, & C. McRobbie (Eds.), *Second International Handbook of Science Education* (Vol. 24). Springer International Handbooks of Education. doi: 10.1007/978-1-4020- 9041-7.

Steffe, L. & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh, & A. E. Kelly (Eds.), *Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 267–307). Hillside, NJ: Erlbaum.

Tocto, M. & Méndez, M. (2015). Modelación y la emergencia de la integral. En F. Rodríguez & R. Rodríguez (Eds.) *Memoria de la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa.* La profesionalización Docente desde los Posgrados de Calidad en Matemática Educativa (pp. 226-231). Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.

INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA Y DOCENCIA

Ángel Homero Flores Samaniego (coordinador), Gabriela Buendía Abalos, Adriana Gómez Reyes, Liliana Suárez Téllez, Yacir Testa, José Trinidad Ulloa
Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM (México). CIECAS-IPN (México). CECyT 13-IPN. CCH-UNAM y IPN (México). CGFIE-IPN (México). Plan Ceibal. IPA (Uruguay). Universidad Autónoma de Nayarit, (México).
ahfs@unam.mx, buendiag@hotmail.com, orodelsilencio@yahoo.com.mx, lsuarez@ipn.mx, prof.yacirtesta@gmail.com, jtulloa@uan.edu.mx

RESUMEN: En 2006, Juan Díaz Godino escribió: “Existe un divorcio fuerte entre la investigación científica que se está desarrollando en el ámbito académico y su aplicación práctica a la mejora de la enseñanza de las matemáticas” (Godino, 2006, p. 3). Diez años después, nos preguntamos: ¿Los resultados de la investigación en Matemática Educativa influyen en la mejora de la docencia en matemática o sigue habiendo un divorcio entre investigación y docencia? ¿Qué esfuerzos se hacen para vincular investigación y docencia? ¿El docente, sobre todo de niveles básicos, es parte activa en las investigaciones? ¿Es posible hacer investigación en el aula por parte del docente? En el grupo de discusión se abordaron estas preguntas desde el punto de vista de la investigación y la docencia.

Palabras clave: investigación educativa, formación de profesores

ABSTRACT: In 2006, Juan Díaz Godino wrote: “There is a strong divorce between the scientific research being developed in the academic field and its practical applications to mathematics teaching improvement” (Godino, 2006, p.3). Ten years later, we ask ourselves: Do educational mathematics research outcomes influence on the improvement of mathematics teaching or is there still a divorce between teaching and research? What endeavors are being done to link teaching and research? Does the teacher, mainly at basic levels, actively take part in the research work? Can the teacher investigate in the classroom? Such questions were tackled in the discussion group from research and teaching view points

Key words: educational research, teachers’ training

Introducción

En su escrito, Godino (2006) definió *educación matemática* como un sistema social, heterogéneo y complejo en el que se distinguen tres componentes: la acción reflexiva sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática; la tecnología didáctica que desarrolla materiales y recursos, usando los conocimientos científicos disponibles; y la investigación científica que estudia el funcionamiento de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Según este autor, mientras la educación matemática se encarga de atender los tres aspectos señalados, la didáctica se encargaría sólo de los dos últimos.

Parte de su escrito lo destina a argumentar a favor de tres tesis (Godino, 2006):

1. La didáctica de la matemática ha logrado en la actualidad una posición consolidada desde el punto de vista institucional a nivel internacional, aunque no homogénea en las diversas regiones y países.
2. Existe una gran diversidad en las agendas de investigación y confusión en los marcos teóricos y metodológicos disponibles, situación propia de una disciplina emergente.
3. Existe un divorcio fuerte entre la investigación científica que se está desarrollando en el ámbito académico y su aplicación práctica a la mejora de la enseñanza de las matemáticas. (p. 3)

Y atribuye el ‘divorcio’ entre investigación y práctica a un desarrollo desigual de los tres componentes de la educación matemática y a una insuficiente articulación entre ellos.

En México la separación entre investigación y docencia es notoria, sobre todo en lo que a preparación académica se refiere con los posgrados *profesionalizantes* y *de investigación.* Y más aún con la distinción entre educación matemática y matemática educativa: la primera tiene que ver con las prácticas de enseñanza y aprendizaje (docencia) y la segunda con la investigación educativa en matemática. Esta distinción ha estado permeando desde México, donde se acuñó el término *matemática educativa*, a otros países de América Latina. Al respecto es significativa la caracterización de Matemática Educativa que ofrecen Cantoral y Frarfán (2003):

Este intenso proceso social de *culturización científica,* nos ha ayudado a reconocer la necesidad de implementar modificaciones educativas en el campo particular de las matemáticas con base en diseños mejor adaptados a las prácticas escolares. Del estudio sistemático de los efectos de tales procesos se ocupa la matemática educativa. (p. 28)

Es innegable la influencia que la investigación educativa ha tenido en la elaboración de materiales de apoyo como libros de texto y manuales para estudiantes y profesores de matemática; y en el diseño de programas de estudio: el enfoque por competencias que ha sido adoptado en la mayoría de nuestros países tiene una sólida base en la investigación educativa (Niss, 2015).

Pero también es innegable la concepción que muchos investigadores tienen sobre los profesores; Sergio Tobón (2006) afirma que los docentes, frecuentemente, dicen que las competencias es lo que ellos siempre han hecho. Este autor ve la afirmación de los docentes como una crítica al enfoque por competencias y termina diciendo: “Lo que hay en el fondo es una resistencia al cambio que impide a los docentes estudiar con profundidad este enfoque y comparar sus contribuciones con lo que se ha hecho tradicionalmente en la educación” (p.8).

No hay duda de que el objetivo de la investigación educativa en matemática es mejorar el aprendizaje de la materia, sin embargo, después de 40 años de investigación educativa en el área, el conocimiento matemático de nuestros estudiantes es cada vez menor como lo evidencian resultados de estudios comparativos como el TERCE: sólo 17% de los estudiantes alcanzaron los niveles III y IV de desempeño en los 14 países latinoamericanos participantes. (UNESCO, 2015).

Objetivo

El objetivo del grupo de discusión es hacer una reflexión sobre la influencia en la práctica docente de la investigación educativa en matemática. Esto con la clara intención de conformar un grupo de trabajo que se aboque a fortalecer las conexiones entre investigación educativa en matemática y docencia.

Como un primer acercamiento a la problemática planteada se hizo una reflexión, durante la RELME 30, llevada a cabo en Monterrey, México, en torno a la respuesta a las siguientes preguntas:

- ¿Los resultados de la investigación en Matemática Educativa influyen en la mejora de la docencia en matemática o sigue habiendo un divorcio entre investigación y docencia?
- ¿Qué esfuerzos se hacen para vincular investigación y docencia?
- ¿El docente, sobre todo de niveles básicos, es parte activa en las investigaciones?
- ¿Es posible hacer investigación en el aula por parte del docente?

Conformación del grupo de discusión y desarrollo de las sesiones

El grupo estuvo conformado por un coordinador y cinco participantes: cuatro investigadores y una profesora-investigadora de nivel bachillerato (edades de los estudiantes entre 15 y 17 años).

La discusión se dio en dos sesiones de hora y media cada una y se respondieron dos preguntas en cada sesión. En cada una de las sesiones se tuvo una primera intervención de los participantes, después se dio la palabra a los colegas que atendieron la discusión para, al final, hacer un cierre y definir lo que sigue.

La intención de esta estructura es dar voz a los asistentes y que la reflexión fuera más inclusiva. De esta manera es posible ir construyendo el grupo de trabajo con las colaboraciones de los asistentes interesados.

Más que hacer un recuento de lo sucedido y lo expresado en las dos sesiones, haremos una reflexión tomando en cuenta los aspectos más relevantes que surgieron con cada pregunta. Finalmente se hará una propuesta de trabajos futuros para la conformación del grupo de trabajo.

¿Los resultados de la investigación en Matemática Educativa influyen en la mejora de la docencia en matemática o sigue habiendo un divorcio entre investigación y docencia?

Al inicio se notó una cierta confusión entre los esfuerzos que se han hecho para acercar los aspectos de la Pedagogía Matemática con la influencia que la investigación ha tenido en la docencia.

Al final se tuvo consenso en que sí hay una influencia de la investigación en la docencia, pero ésta ha sido limitada. Las causas de esto son múltiples: desde la carga de trabajo de un docente, sobre todo en los niveles básicos, hasta su falta de preparación.

Una forma más o menos natural de que los resultados de la investigación lleguen a la práctica docente podría ser el currículo de matemática. El problema aquí es la forma en que están estructurados los programas de matemática y las medidas que se han tomado para que los docentes los interpreten más o menos de la misma forma. Su estructura es difícil de comprender en un primer acercamiento; y la formación de profesores sigue una estrategia poco efectiva.

Otra vía pueden ser los materiales de apoyo y los libros de texto. Pero parece ser que no han sido suficientes. Por ejemplo, en países como México, los libros de texto en el nivel obligatorio (básico y medio superior) se hacen siguiendo los lineamientos de la Secretaría de Educación Pública, esto debería garantizar que tuvieran el enfoque propuesto en los programas; sin embargo, la mayoría de los editores no han entendido este enfoque y sólo reproducen lo que dice la Secretaría como una serie de recetas a seguir y requisitos a cumplir. Se incluyen aquí a la Comisión Nacional del Libro de Texto (nivel primario) y las casas editoriales encargadas de diseñar los libros para secundaria y bachillerato.

Se habló de cambiar la forma de concebir la investigación educativa en nuestros países y qué ésta deje de ser incumbencia exclusiva de centros de estudios de posgrado; y la manera de concebir la docencia, como una actividad más o menos mecánica que un buen técnico puede realizar. Debe haber un acercamiento mutuo entre las dos actividades. El investigador debe dejar de considerar al profesor y su aula como un objeto de estudio; y el profesor debe asumir mayor responsabilidad en su quehacer docente.

Pero para que se dé lo anterior, también debe haber voluntad, sobre todo política, de autoridades y directivos, de tal modo que se den las condiciones necesarias para dicho acercamiento.

Todo lo anterior quedó como parte de una serie de conjeturas, sería necesario hacer un estudio sistemático sobre la influencia de la investigación educativa en la docencia y buscar indicadores diferentes a las pruebas estandarizadas.

¿Qué esfuerzos se hacen para vincular investigación y docencia?

Los esfuerzos han sido muchos, desde programas de formación de profesores diseñados por centros de investigación como el CINVESTAV, hasta la creación de ferias de la matemática.

Uno de estos esfuerzos es el Seminario Repensar las Matemáticas (SRM) diseñado y coordinado, desde 2004, por iniciativa de un grupo de profesores e investigadores del Instituto Politécnico Nacional que integraron la Red de Investigación e Innovación en Educación Estadística y Matemática Educativa (RIIEEME). La actividad se centra en vincular la investigación educativa, principalmente en matemática educativa, y la docencia haciendo el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (transmisión en línea, repositorio de documentos, foro de discusión, portal de comunicación, principalmente). La sesión es el elemento central (Ruiz y Suárez, 2015) que ofrece un diálogo entre un investigador y uno o dos docentes en servicio a través de un documento de referencia de autoría del investigador invitado. Después de varios años de actividad, el Seminario ahora tiene reconocimiento oficial del IPN y se ha transferido su metodología de trabajo a otras materias como Física, Química, Bioquímica, Cultura Financiera, Filosofía y Comunicación. Las charlas son una cada mes y actualmente se tiene cubierto hasta 2017. Ha contado con la participación de investigadores mexicanos, canadienses, uruguayos, españoles y de otros países, podemos mencionar entre muchas otras excelentes participaciones la de Michel Artigue (sesión 69) y la de Alan Schoenfeld (sesión 63). (Véase: http://repensarlasmatematicas.wordpress.com) A pesar del éxito aparente del Seminario, su influencia no está complemente potenciada. Profesores de México, Colombia y Argentina han seguido las sesiones en los últimos años, pero son pocos en comparación con la población de maestros de nuestros países.

Un esfuerzo similar es el del Seminario de Praxis Identidad Docente Matemática, de la Red Estatal de Investigadores de Nayarit, México. La estructura de sus actividades es prácticamente la misma que la del SRM, y su cobertura es nacional.

Se mencionaron las iniciativas nacionales como el Plan Ceibal del Uruguay que dotó de una tableta electrónica o una laptop a estudiantes y docentes de educación inicial, primaria y secundaria media públicos, y acceso a Internet en dichos Centros Educativos, así como en varios lugares públicos (plazas, centros sociales, etc.), plataformas para aulas virtuales y una plataforma adaptativa de matemática en un esfuerzo por promover la equidad de acceso a la tecnología y a materiales educativos de calidad: desde 2007 se tiene cubierta a toda la población estudiantil del país. No se dieron indicadores sobre la efectividad del Plan, pero todo apunta hacia una mejora de la calidad de la enseñanza. Venezuela es otro país que ha tenido una iniciativa de este tipo, pero con resultados irregulares.

Finalmente están los cursos de actualización docente que las diferentes escuelas promueven para mejorar la enseñanza, pero son pocos los que realmente toman en cuenta resultados de investigación en su diseño y muchos profesores los toman como un requisito impuesto que nada tiene que ver con su docencia.

Los esfuerzos han sido y son muchos; el uso de recursos es enorme, pero hay factores que impiden su efectividad, como la falta de interés y de recursos por parte del docente, el cambio periódico en las políticas educativas y la proliferación de teorías y paradigmas educativos, entre otros.

¿El docente, sobre todo de niveles básicos, es parte activa en las investigaciones?

Las respuestas y la discusión, en esta parte, fue un tanto ambigua. No quedó claro qué se entiende por parte activa.

Se mencionó el caso de docentes que estudian un posgrado y que forman parte activa de sus investigaciones bajo la dirección de su asesor de tesis. Pero también se habló de investigadores que ven el aula y sus componentes (profesor y estudiantes incluidos) como parte del sistema que están estudiando. Los investigadores tienen su propia agenda y no siempre entran los docentes en ella.

En todo caso, de lo anterior se puede inferir que los docentes no forman parte activa de las investigaciones puesto que no forman parte de un equipo de investigación con voz y capacidad de decisión.

Se aduce que la falta de formación del profesor y su carga de trabajo impide lo anterior, y se propuso un esquema de acompañamiento del docente.

¿Es posible hacer investigación en el aula por parte del docente?

Si es posible, pero no es obligación del profesor; necesita formarse pues le falta “marco teórico”. Fueron dos de las respuestas a esta pregunta.

Aquí surgió la idea del acompañamiento continuo del profesor, en cuanto a los resultados que obtiene cuando toma en cuenta investigaciones educativas. Uno de los problemas que se visualizan es que el docente no tiene intención ni capacidad de escribir, por tanto es difícil que comunique sus resultados.

Se mencionó también que es cuestión de contextos, por ejemplo, en Uruguay no hay investigador que no sea docente y con título de formación de grado. La pregunta que surge es ¿cuántos investigadores hay en Uruguay?

Se dijo que investigar es buscar respuestas a las siguientes preguntas: ¿Para qué enseñamos? ¿Qué necesitan? ¿Cuándo digo que ya aprendió? En este sentido todo docente hace investigación, lo que falta es que informe de sus resultados. Los profesores están ávidos de saber, de resolver sus problemas. Lo que se necesita es cooperación, es una quimera pensar que todo profesor va a ser investigador. Los investigadores deben cooperar con los docentes y viceversa.

La cuestión, aquí, es que se ve la actividad del docente como un acto aislado. Hay profesores que hacen investigación a partir de su docencia, ya sea porque tienen una preparación académica adecuada o porque tienen interés particular en la investigación. Pero la empresa es ardua, se necesita trabajo colegiado, cooperación, y un cambio de paradigma de la enseñanza.

Análisis y conclusiones

De inicio, una de las conclusiones es que la temática y su forma de abordarla despertó el interés de los asistentes cuya cantidad, en las dos sesiones, se mantuvo por arriba de 30 personas.

A partir de las intervenciones, tanto de los participantes invitados como de los asistentes, se pueden deducir dos posiciones:

Investigadores y docentes tienen roles diferentes; mientras que los investigadores pueden ejercer docencia, los docentes no pueden hacer investigación.

Los docentes pueden hacer investigación en el aula, pero se requieren recursos, preparación y trabajo cooperativo (o colaborativo).

Mientras unos dejan la responsabilidad de mejorar la enseñanza a los investigadores a través de “influir en el currículo, libros para aplicar el currículum, capacitación y formación de profesores y supervisar la evaluación”. Otros tienen la certeza de que la investigación se hace en el aula y, por tanto, los investigadores deben estar en ella: “Yo no puedo investigar en aula si estoy fuera de ella”.

A pesar de que en el Grupo de Discusión había una proporción aproximadamente igual de profesores en servicio, investigadores educativos y estudiantes de posgrado, cuyas intervenciones pudieron haber llevado a una consideración global de la problemática, ésta se quedó en el nivel de casos particulares. Por ejemplo, nunca se mencionó qué tipo de investigación es necesario hacer en el seno de un proceso particular de enseñanza-aprendizaje y cuáles, forzosamente, involucran un espacio más amplio como la escuela o el sistema escolar.

Otra concepción que se evidenció es que el investigador, por las circunstancias que sean, tiene una posición superior en la jerarquía educativa, pues es el que genera conocimiento y posee un “marco teórico”, y puede acompañar al docente para ayudarle cuando sea necesario.

Es evidente que se necesita un análisis más detallado y sistemático de la problemática planteada; y el primer paso debería consistir en la construcción de un marco de referencia en el cual ubicar los análisis subsecuentes sobre el tema.

Es necesario que se conforme un grupo de trabajo e investigación que aborde el problema de la vinculación entre docencia e investigación y que redunde en una real mejoría del aprendizaje matemático de nuestros estudiantes.

Como apuntó una de las invitadas a la discusión: “se requiere equipo de trabajo y cambio de paradigma”.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R., y Farfán, R. M. (2003). Matemática educativa: una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6*(1), 27-40.

Godino, J. D. (2006). Presente y futuro de la investigación en didáctica de las matemáticas. *Anais da 29ª Reunión Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação* (pp. 15-18). Caxambu, MG, Brasil: ANPED.

Niss, M. (2015). Mathematical competencies and PISA. In K. Stacey y R. Turner (Eds.), *Assessing Mmathematical literacy*: the PISA experience. Cham, ZG, Switzerland: Springer International Publishing. DOI 10.1007/978-3-319-10121-7_2.

Ruiz, B., y Suárez, L. (2015). Una propuesta de diálogo entre investigación y docencia: seminario repensar las matemáticas. *Opción, 31,* No. Especial 5, 833–855.

Tobón, S. (2006). Aspectos básicos de la educación basada en competencias. Talca: Proyecto Mesesup. Recuperado el 26 de septiembre de 2016 de http://www.urosario.edu.co/CGTIC/Documentos/aspectos_basicos_formacion_basada_competencias.pdf.

UNESCO. (2015). *Tercer estudio regional comparativo y explicativo*: informe de resultados. Chile. Recuperado el 29 de septiembre de 2016 de http://unesdoc.unesco.org/images/0024/002435/243532S.pdf.

EL DESARROLLO PROFESIONAL DOCENTE DESDE UN ENFOQUE SOCIOEPISTEMOLÓGICO: EL CASO OAXAQUEÑO

Daniela Reyes-Gasperini
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
dreyes@cinvestav.mx

RESUMEN: Oaxaca, México. Profesores de Secundaria que cursan un proceso de desarrollo profesional docente en la Maestría en la Enseñanza de la Matemáticas en la Educación Secundaria (MEMES) del Instituto Estatal de Educación Pública de Oaxaca. El caso puede considerarse de adversidad a partir de las situaciones educativas y estatales que sufren en dicha región, sin embargo, se evidencia cómo los profesores buscan alternativas de mejora con base en la discusión de la matemática escolar con la cual trabajan a diario. Las reflexiones a las que llegan y los diseños que proponen, son elementos que evidencian el proceso de empoderamiento por parte de este colectivo docente. Con base en un análisis socioepistemológica y la metodología de la Teoría Fundamentada, mostramos los elementos principales del dispositivo de intervención y damos algunos ejemplos de las transformaciones de la relación con el conocimiento matemático por parte de los profesores oaxaqueños.

Palabras clave: empoderamiento docente, problematización de la matemática escolar

ABSTRACT: Oaxaca, Mexico. Secondary teachers who attend a process of professional development teacher in the Masters in Teaching Mathematics in Secondary Education (MEMES) of the State Institute of Public Education of Oaxaca. The case can be considered adversity from the educational situations and state that suffer in that region, however, it is evident how the teachers look for alternatives of improvement based on the discussion of the school mathematics with which they work daily. The reflections to which they arrive and the designs they propose are elements that evidence the process of empowerment on the part of this teaching group. Based on a socio-epistemological analysis and the methodology of the Grounded Theory, we show the main elements of the intervention device and give some examples of the transformations of the relation with the mathematical knowledge by the Oaxacan teachers.

Key words: teacher empowerment, problematization of school mathematics

Introducción

En este artículo reflexionaremos respecto al desarrollo profesional docente y, en particular, nos referiremos a la postura de Ponte (1998), a saber: plantear actividades como proyectos, cambios de experiencias, lecturas, reflexiones; considerar un movimiento de “dentro hacia fuera”; tomar en cuenta lo que los profesores quieren hacer y llevar a la práctica –a lo que nosotros llamamos poner atención a sus potencialidades, más allá del señalamiento de sus falencias–; incorporar los aspectos cognitivos, afectivos y relacionales del profesor; consolidar la consideración de la teoría y la práctica de manera íntegra. Estos elementos son características intrínsecas que tuvo el diseño de la Maestría en la Enseñanza de la Matemáticas en la Educación Secundaria (MEMES) del Instituto Estatal de Educación Pública de Oaxaca.

Si bien se cuenta con un número especial en la Revista de Perfiles Educativos, cuya introducción se titula *educación alternativa: matemáticas y práctica social* (Cantoral, 2016), que dará al lector o lectora una profunda idea del proceso completo, en este escrito presentaremos los principales rasgos con los que contó el dispositivo de intervención que hizo de la propuesta, una innovación.

Apoyándonos en los estudios de Montiel (2009) y Lezama y Mariscal (2008), en (Reyes-Gasperini y Cantoral, 2014) habíamos dado evidencia de la necesidad de la problematización del saber matemático escolar para generar nuevas interacciones con el conocimiento matemático escolar en los procesos de desarrollo profesional docente. Sin embargo, tiempo después, en (Reyes-Gasperini y Cantoral, 2016) –a raíz de un perfeccionamiento teórico que precisábamos para hacer explícita la diferencia entre *matemática escolar, saber matemático* y *saber matemático escolar*– lo denominamos *problematización de la matemática escolar* (*pme*). Este último es considerado un recurso que abre una nueva postura frente al fenómeno del desarrollo profesional docente pues permite cuestionar, proponer acciones y evidenciar transformación de la práctica bajo la concepción con base en la matemática escolar. En síntesis, lo que postulamos es que si pretendemos mejorar la educación matemática, suponemos indispensable considerar al saber matemático y, en particular, su problematización, para hacer una inmersión y una propuesta de acción sobre el desarrollo profesional docente. Nuestra propuesta apuntó a lo que teóricamente se enuncia como el *cambio de relación con el conocimiento matemático escolar*, o bien, el *empoderamiento docente* (Reyes-Gasperini, 2016).

Desde un enfoque socioepistemológico, nos proponemos dos preguntas específicas al hablar del desarrollo profesional docente: ¿cómo promover el desarrollo profesional docente fortaleciendo las potencialidades?, ¿cómo propiciar una transformación en colectivo? Sus respuestas las hemos ido construyendo durante la investigación doctoral.

La estructura del dispositivo de intervención

El contexto sobre el cual se trabajó la propuesta de intervención oaxaqueña, cuya descripción a profundidad se encuentra en (Lezama, 2016), precisaba de la consideración del contexto de los estudiantes, a través de sus profesores. El objetivo final era la intervención en el sistema, por lo cual, fue indispensable desde el comienzo pensar en el diseño de *situaciones de aprendizaje contextualizadas* con base en quienes aprenden, sus estudiantes. Para ello, los participantes al problematizar la matemática escolar, buscarían las prácticas socialmente compartidas, entendidas como acciones intencionadas, normadas culturalmente, en las distintas regiones del estado de Oaxaca.

Entonces, para la organización del dispositivo de intervención, se trabajó con el desarrollo de los siguientes estilos de pensamiento matemático, mediante su problematización: pensamiento proporcional, pensamiento trigonométrico, pensamiento y lenguaje variacional, pensamiento exponencial y pensamiento funcional propio del Precálculo (Figura 1). Este proceso se consideró como un recurso para confrontar y desafiar la matemática escolar en los sistemas educativos, en *contextos de significancia* diferentes.

Para promover la *problematización de la matemática escolar* de los pensamientos mencionados, cada uno de los responsables de los seminarios realizó (o había realizado durante su carrera como investigador) una *problematización del saber matemático* (Farfán y Romero Wilfrido, 2016; Montiel Espinosa, 2016; Cantoral, Caballero-Pérez y Moreno-Durazo, 2016), es decir, un estudio a profundidad que permitió hacer del saber un problema a través de las cuatro dimensiones del saber que estudia la Teoría Socioepistemológica (Cantoral, 2013): social, epistemológica, cognitiva y didáctica, localizando y analizando su uso y su razón de ser, es decir, el estudio de la naturaleza del saber de manera sistémica.

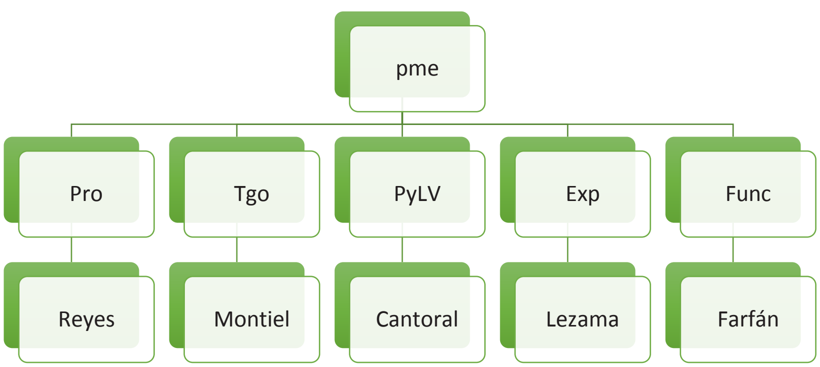


Figura 1. Seminarios de desarrollo del pensamiento matemático de la MEMES. Fuente: elaboración propia.

La *pme* propicia un *cambio de relación con el conocimiento matemático escolar* (Reyes-Gasperini, 2016; Reyes-Gasperini y Cantoral, 2014, 2016). Esta transformación, favorece una nueva dinámica ya sea en su gestión áulica —tareas encaminadas mediante *situaciones de aprendizaje* con *contexto de* *significancia* y *situacional* específicos—, así como en su práctica profesional, pues comienza a reconocer durante los procesos reflexivos, una disciplina de referencia que funge como disciplina *ad hoc* para repensar su práctica docente.

El dispositivo como transformación social

Cuando se concluyó el proceso, pudimos observar en él los tres momentos a los que se refieren Bacqué y Biewener (2015): etapa individual o interior, etapa interpresonal, organizacional o colectiva y etapa política o social, que a continuación se detallan:

> **Etapa individual o interior**: designa el proceso que permite a cada individuo desarrollar una "consciencia crítica" y su capacidad de acción. Esta pasa por la construcción de una imagen positiva de sí, por la adquisición de conocimientos y competencias que favorecen una comprensión crítica de su medio ambiente, por el desarrollo de recursos individuales y por la elaboración de estrategias para alcanzar objetivos personales y colectivos;
>
> **Etapa interpersonal, organizacional o colectiva**: designa el desarrollo de la capacidad de "actuar con" y de "actuar sobre";
>
> **Etapa política o social**: plantea la cuestión de la transformación de la sociedad en su conjunto, a través de la acción colectiva (Bacqué y Biewener, 2015, p. 41).

La trascendencia de la organización colectiva proviene del impacto social. Uno de los objetivos de la Maestría era ese: encontrar acciones de cambio y mejora para desarrollar procesos ascendentes de profesionalización (Vásquez, 2016), es decir, la transformación educativa a partir de la acción colectiva. Para ello, se precisaba la comprensión crítica y la constitución de herramientas para llevar a cabo una nueva propuesta educativa en un momento donde la situación estatal era compleja pues no se aceptaba la Reforma Educativa, ni tampoco, el Plan para la Transformación Educativa de Oaxaca (PTEO). Si bien existían estas herramientas en cuestiones gremiales, la intención de la Maestría fue discutir desde la práctica docente.

El dispositivo partió de las fortalezas de los interactuantes. De este modo se promovió la idea de una imagen positiva de sí mismos. En el trabajo con profesores, la etapa individual se considera indispensable, a la vez que se trata de una decisión personal. Los procesos de desarrollo profesional docente ofrecidos contemplan la aceptación y deseo de permanencia por parte de los participantes. Nótese que Bacqué y Biewener (2015) caracterizan a la *etapa colectiva* como incluyente en la etapa social.

■ El fundamento del dispositivo: cambio de relación con el conocimiento matemático escolar

En contraposición –no como dicotomía, sino como divergencia– a la *matemática escolar* que vive en el *discurso Matemático Escolar* y gracias a él, cuya construcción se sustenta en una *evolución conceptual* (centra en los objetos matemáticos); proponemos una dinámica diferente en el dispositivo de intervención que se sustenta en la *evolución pragmática* (Reyes-Gasperini, 2016) centrada en las prácticas asociadas a los objetos. Esta distinción, hace de la Socioepistemología, una teoría alternativa: la descentración del objeto es empezar por la evolución pragmática para significar la evolución conceptual.

Se clarifica la divergencia cuando alcanzamos la noción de *saber matemático escolar* como sustancia de enseñanza y aprendizaje, cuya construcción se sustenta en la visión alternativa denominada *evolución pragmática*. Años atrás hemos realizado esta diferencia, desde la Teoría Socioepistemológica, haciendo mención de ***la*** matemática y ***lo*** matemático, como, por ejemplo: la trigonometría y lo trigonométrico (Montiel, 2011); la variación y lo variacional (Caballero, 2012; Cantoral, 1990; Cabrera, 2009); la periodicidad y lo periódico (Buendía, 2010); la exponencial y lo exponencial (Lezama, 1999); el logaritmo y lo logarítmico (Ferrari y Farfán, 2010); entre muchos otros. Es decir, lo que durante años se ha denominado teóricamente como *el tránsito del conocimiento al saber*, como sintetizó Cantoral (2013), se hizo explícito en la diferenciación semántica de las terminologías para con el conocimiento matemático: el *lo* y el *la*, no es mera retórica.

En nuestra propuesta retomamos, a la vez que ampliamos y unificamos, la noción de *lo matemático* como la atención de *las realidades actuales* en tanto *cotidiano* (la vida cotidiana) del ciudadano (Gómez, 2015; Zaldívar, 2014), considerando a la sabiduría humana –como constructo filosófico más amplio– y, por tanto, el cotidiano forma parte de ella. Ya sea la pluralidad epistemológica, el cotidiano o la construcción social del conocimiento matemático, todos están contemplados en el núcleo de la concepción de la *sabiduría humana*.

Al mirar a la *matemática escolar* como parte del problema educativo, cuestionando su naturaleza como saber institucional, su inmutabilidad como aquello que “se debe enseñar y aprender”, estamos, de hecho, haciendo una *problematización*. De ahí que busquemos el trabajo en la práctica docente con el *saber matemático escolar*.

■ Parte del proceso: la autonomía o emancipación

Con base en la Teoría Fundamentada (Strauss y Corbin, 2002), hemos teorizado el proceso vivenciado a raíz del dispositivo de intervención de la Maestría (MEMES) y hemos condensado los resultados en un cuadro que da cuenta de las categorías y sus dimensiones encontradas (figura 2).

	Teorización del empoderamiento docente desde la TSME			Bacqué y Biwener (2015)
	Cuestionamiento de las estructuras objetivables del dME			Etapa individual o interior
	Autocrítica del discurso hablado	Autocrítica de la actividad áulica	Análisis crítico de documentos escolares	
	Reconocimiento de una disciplina de referencia			Etapa colectiva
Howe y Stubbs (2003)	Consideración de bibliografía especializada	Participación activa en espacios de desarrollo profesional	Análisis crítico de la información disponible	
	Aportaciones a la comunidad			Etapa social
Ponte (1998)	Trabajos fundamentados teóricamente	Diseño, implementación y análisis de situaciones de aprendizaje		
	Participación en espacios para la pme de colectivos docentes			
Amundsen y Martinsen (2014); Howe y Stubbs (2003)	Diálogo colectivo	Profesores tutores		

Figura 2. Empoderamiento docente desde la Teoría Socioepistemológica (Reyes-Gasperini, 2016).

Una de las principales características del empoderamiento es la autonomía o emancipación. Tal es así que Bacqué y Biewener (2015) hablan del empoderamiento como una práctica emancipadora. Exponer las fortalezas de los profesores significa mostrar las actitudes de transformación por su parte en cuanto a su relación con el conocimiento matemático, o bien, la innovación en situaciones de aprendizaje en donde se pongan en el centro las acciones del estudiante. Elegir un *contexto situacional* que propicie la construcción de un conocimiento específico que sea acorde a los estudiantes con quienes se está trabajando, que reconozca el espacio natural de construcción de conocimiento y la realidad del que aprende, aunado al *contexto de significancia* que parte de sus acciones, actividades y prácticas socialmente compartidas relativo al conocimiento, son características básicas de las propuestas que presentamos como ejemplo a continuación.

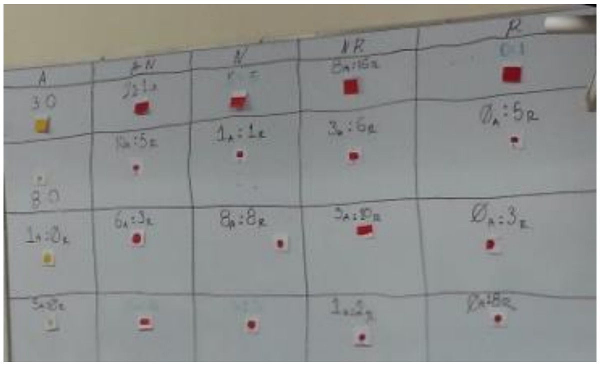
La propuesta de los colores: el caso de Rebeca

A Rebeca, una colega estudiante de la Maestría, le dieron el cargo de profesora de artes durante sus estudios. Al finalizar los estudios, articuló el trabajo realizado durante el seminario del desarrollo del pensamiento proporcional con el arte. Por iniciativa propia, propuso abordar el círculo cromático desde una mirada matemática: mezclando colores primarios, con razones diferentes, propuso formar los colores secundarios. Luego, a partir de las mezclas con el mismo color, trabajaría con la comparación entre las razones numéricas, correlacionando que los colores iguales tendrían razones equivalentes.

En esta propuesta, Rebeca había sistematizado la noción de *lo proporcional* como aquella relación adecuada entre magnitudes que mantengan un invariante, en este caso, el color, para que posteriormente se estudien los elementos característicos, tanto cualitativos como cuantitativos. De la acción de formar colores se pasó al análisis de los objetos matemáticos: la razón, proporciones y la constante de proporcionalidad.

Logró fundamentar teóricamente un diseño de intervención en cuanto a la manera en la que promueve la construcción de la noción de la proporcionalidad a través de las prácticas en la práctica de referencia del arte.

Fotos de la interacción con profesores y profesoras de la segunda generación de MEMES, en la sesión donde Rebeca puso en práctica su diseño



Reflexiones finales

El desarrollo profesional docente desde una visión socioepistemológica promueve el crecimiento profesional docente autónomo, ubicando al cuerpo docente en un rol activo, a partir de la problematización de la matemática escolar, aquello con lo que a diario trabajan en sus clases. El final reportado, así como los ejemplos de Cervantes Reyes y Reyes-Gasperini (2016) y de Acevedo Mendoza y Lezama (2016), marcan una iniciativa de transformación de su práctica en la cual incorporan los conocimientos y habilidades personales a su quehacer y reflexión docente, que da inicio en un diálogo colectivo: la MEMES. Asimismo, otros colegas también desarrollaron sus propuestas de intervención: entre ellas está el caso del profesor Rigoberto Díaz, quien trabajó con la unidad de medida de la jícara para construir la idea de volumen y capacidad. O bien, el caso de la profesora Isabel Sánchez, quien fundamentó teóricamente un diseño sobre la construcción de un papalote que ella misma trabajaba en sus clases; durante los cursos, mencionó, evidenciaba y explicitaba el pensamiento trigonométrico y proporcional que se ponía en juego en dicha construcción. El argumento fundamental que hemos detectado durante los años de colaboración con los colegas profesores oaxaqueños es la necesidad de un *acompañamiento*. Distíngase este de “dar cursos sistemáticos”, o crear una dependencia. Hablamos de un *acompañamiento* que promueva la emancipación, el desarrollo profesional autónomo.

Referencias bibliográficas

Acevedo Mendoza, A. y Lezama, J. (2016). Los saberes matemáticos en la cultura mixteca través del bordado como práctica de referencia. *Perfiles Educativos, XXXVIII* (Especial), 155–165.

Bacqué, M-H y Biewener, C. (2015/2013). *El empoderamiento. Una acción progresiva que ha revolucionado la política y la sociedad*. (Trad. Silvia Nora Labado, Título original *L´empowerment, une practique émancipatrice*). Buenos Aires, Argentina: Gedisa.

Buendía, G. (2010). Articulando el saber matemático a través de prácticas sociales. El caso de lo periódico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4), 129-158.

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Ciudad de México, México.

Cabrera, L. (2009). *El pensamiento y lenguaje variacional y el desarrollo de competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Ciudad de México, México.

Cantoral, R. (1990). Categorías Relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la Teoría elemental de las Funciones Analíticas. Simbiosis y

Predicción entre las nociones de “el Prædiciere” y “lo Analítico” (Tesis doctoral). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, CDMX, México.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Cantoral, R. (2016). Educación alternativa: matemáticas y práctica social. *Perfiles Educativos, XXXVIII* (Especial), 7–18.

Cantoral, R., Caballero-Pérez, M. y Moreno-Durazo, A. (2016). El desarrollo de argumentos visuales: Una experiencia de intervención didáctica con docentes de Oaxaca. *Perfiles Educativos, XXXVIII* (Especial), 140–154.

Cervantes Reyes, O. y Reyes-Gasperini, D. (2016). La construcción social de un lenguaje simbólico desde las prácticas. *Perfiles Educativos, XXXVIII* (Especial), 67–86.

Farfán, R. y Romero Wilfrido, F. (2016). El diseño de situaciones de aprendizaje como elemento para el enriquecimiento de la profesionalización docente. *Perfiles Educativos, XXXVIII* (Especial), 116–139.

Ferrari, M. y Farfán, R-M. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4), 53–68.

Gómez, K. (2015). *El fenómeno de opacidad y la socialización del conocimiento. Lo matemático de la Ingeniería Agrónoma.* Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México, México.

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial*. (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Lezama, J. y Mariscal, E. (2008). Docencia en matemáticas: hacia un modelo del profesor desde la perspectiva socioepistemológica. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21* (pp. 889-900). México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Lezama, J. (2016). Experiencias docentes en matemáticas: narrativas para la construcción de un discurso académico. *Perfiles Educativos, XXXVIII* (Especial), 87–100.

Montiel, G. (2009). Hacia el rediseño del discurso: formación docente en línea centrada en la resignificación de la matemática escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4-I), 69-84.

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico*. *Un estudio socioepistemológico*. México, D.F.: Díaz de Santos.

Montiel Espinosa, G. (2016). Condiciones para la innovación educativa en el posgrado. El caso de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria en Oaxaca. *Perfiles Educativos, XXXVIII* (Especial), 101–115.

Ponte, J. P. (1998). Da formação ao desenvolvimento profissional. In *Actas do ProfMat 98* (pp. 27-44). Lisboa, Portugal: APM.

Reyes-Gasperini, D. y Cantoral, R. (2016). Empoderamiento docente: la práctica docente más allá de la didáctica... ¿qué papel juega el saber matemático en una transformación educativa? *Revista de la Escuela de Ciencias de la Educación, 12*(11), 155–176.

Reyes-Gasperini, D. (2016). Oaxaca: Una transformación colectiva con impacto social y educativo. *Perfiles Educativos, XXXVIII* (Especial), 37–66.

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente y Socioepistemología. Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas*. Barcelona: Gedisa S.A.

Reyes-Gasperini, D. y Cantoral, R. (2014). Socioepistemología y empoderamiento docente: acciones para un cambio educativo. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 360-382.

Strauss, A. y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Facultad de Enfermería-Universidad de Antioquia, Bogotá, Colombia.

Vásquez, M. (2016). Orígenes y complejidades de una propuesta alternativa de formación continua para profesores de matemáticas y su articulación con el nivel de secundaria. *Perfiles Educativos, XXXVIII* (Especial), 19–36.

Zaldívar, D. (2014). *Un estudio de la resignificación del conocimiento matemático del ciudadano en un escenario no escolar*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. Ciudad de México, México.

CAPÍTULO 5

USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Ruth Rodríguez Gallegos
ruthrdz@itesm.mx

Sin duda alguna en la actualidad el uso de tecnología es una constante en nuestras vidas. En el ámbito académico, existen diversos trabajos desde la Matemática Educativa que permiten mostrar las diversas perspectivas sobre la importancia del uso de herramientas digitales para potencializar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en todos los niveles educativos. En la siguiente sección, seremos testigos de la riqueza de visiones teóricas y metodológicas sobre el uso de herramientas varias que permitan que nuestros alumnos y/o futuros profesores aprendan nociones matemáticas (desde las muy básicas hasta otras de una complejidad importante) y que las resignifiquen; la forma en que los profesores ya en servicio conocen e incorporan estas herramientas es también abordada en algunos trabajos que aquí se presentan.

Una constante interesante que se puede observar en los trabajos que se presentan a continuación, es la vinculación de esta enseñanza con problemas de la vida real que permitan a través de procesos de modelación matemática el enseñar Álgebra, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial e Integral de una y varias variables, Variable Compleja, y temáticas varias en diversos niveles: desde la educación básica hasta posgrado.

El uso de las herramientas de cada trabajo es también variado, por ejemplo, se puede ver como se privilegia el uso de software de acceso libre como Geogebra y Tracker entre otros, que permite el que sea posible el dar acceso a todos los que aprenden el usar este tipo de herramientas, u otros muy conocidos como Excel de amplio uso en la comunidad. Un tema importante es el diseño y la construcción de herramientas pensadas en la investigación educativa, pocos trabajos al respecto, pero muy relevantes para ser mencionados igualmente.

Al día de hoy la importancia del uso de dispositivos varios en el aula no es cuestionada, más bien la comunidad de colegas en Matemática Educativa dirige sus esfuerzos en entender cómo ésta puede permitir el desarrollo de ciertas competencias, el dotar de nuevos significados a las herramientas, de permitir “ver” mejor esas relaciones con la realidad del que aprende, de entender los conflictos cognitivos del alumno y profesor (en formación y/o en servicio), de cada vez conocer a mayor detalle cuáles son esos efectos positivos en el aprendizaje y cómo en estudios futuros podríamos vislumbrar un uso más universal y homogéneo a estas herramientas. Esperemos que la siguiente sección les permita construir y ver los avances en este tema de la comunidad y les ayude como alumno, profesor y futuro investigador a construir nuevas formas de pensar la tecnología en el aula.

EL PROCESO DE ENSEÑANZA - APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA CON UTILIZACIÓN DE ASISTENTES MATEMÁTICOS COMPUTACIONALES Y GESTORES INFORMÁTICOS DE CURSOS

Narciso Rubén de León Rodríguez, Martha Esperanza Grijalva Valencia, Lázaro Salomón Dibut Toledo, María de Lourdes Bravo Estévez

Pontificia Universidad Católica del Ecuador. (Ecuador), Universidad del Golfo de las Californias. (México), Universidad de Cienfuegos. (Cuba)

RESUMEN: La investigación fue realizada con el objetivo de desarrollar estrategias didácticas para el proceso de enseñanza - aprendizaje de la Matemática con utilización de asistentes matemáticos computacionales y gestores informáticos de cursos. El informe, artículo científico correspondiente, describe lo realizado con una propuesta que puede influir positivamente en la motivación de los estudiantes y por ende en los resultados docentes de los mismos en la disciplina Matemática. El artículo puede ser utilizado para el análisis y discusión por parte de profesores interesados en tratar la temática presentada en el mismo, y/o servir de punto de partida en el desarrollo de nuevas investigaciones científicas en este campo.

Palabras clave: estrategias didácticas, asistentes matemáticos computacionales

ABSTRACT: This research work was aimed at developing didactic strategies for the mathematics teaching learning process by using computer-aided mathematics tools and information technology managers. The scientific paper describes a proposal that can positively influence on students' motivation, and therefore, in their academic outcomes in mathematics. This article can be used for the analysis and discussion by the teachers concerned on the topic it approaches. It can also be a starting point for the development of new scientific researches in respect of this field.

Key words: didactic strategies, computer-aided mathematics tools

Introducción

Son conocidas las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de la Matemática, problemas que están presentes con regularidad en los distintos niveles de enseñanza. En las carreras universitarias, que incluyen la Matemática como disciplina básica, los estudiantes tienen dificultades significativas (debido fundamentalmente a deficiencias que traen de la enseñanza precedente) en la comprensión de conceptos y posterior aplicación de los mismos a la solución de problemas vinculados al perfil de los estudios superiores que realizan.

La problemática planteada en el párrafo anterior se fundamenta en los bajos resultados obtenidos por los estudiantes en los diagnósticos de entrada, y también en las evaluaciones sistemáticas, parciales y finales que se realizan en la etapa siguiente. Es evidente la necesidad de desarrollar sistemáticamente investigaciones para tratar de mejorar la preparación matemática de los estudiantes, de forma tal que sean capaces de aplicar lo aprendido en la profesión y en la cotidianidad; establecer vínculos con otras disciplinas; utilizar la computación como algo indispensable en la actualidad para el procesamiento de los modelos matemáticos; y potenciar la utilización adecuada de la lengua materna (y de otros idiomas), estableciendo para ello estrechos nexos entre lo afectivo – cognitivo y lo instructivo – educativo.

El proceso de enseñanza – aprendizaje (Vygotsky, 1985) de la Matemática no puede estar lejos, en todos los sentidos, de la vida social del estudiante pero teniendo siempre en consideración que el desarrollo del razonamiento lógico y el pensamiento abstracto también son aspectos inherentes a esta disciplina. Motivación puede ser la palabra de orden que resume lo anterior y no debe estar fuera del análisis diario del profesor de Matemática al desarrollar el quehacer docente.

La investigación es encauzada a partir del programa de la disciplina Matemática para la carrera de Contabilidad y Auditoría, y por ello, son los estudiantes de la misma los principales beneficiarios de sus resultados.

Fue definido como problema de investigación el siguiente:

- ¿Cómo influir positivamente en el proceso de enseñanza - aprendizaje de la Matemática para la carrera de Contabilidad y Auditoría?

La respuesta preliminar fue la que sigue:

- Con estrategias didácticas que consideren como algo fundamental la utilización de Asistentes Matemáticos Computacionales (AMC) y Gestores Informáticos de Cursos (GIC) (De León, 2011).

Los objetivos de la investigación fueron delimitados de la forma que se presenta a continuación:

Objetivo general

- Desarrollar estrategias didácticas para el mejoramiento del proceso de enseñanza - aprendizaje de la Matemática con utilización de asistentes matemáticos computacionales y gestores informáticos de cursos.

Objetivos específicos

- Caracterizar el objeto de investigación a partir de, estrategias didácticas: profundización en las acciones a realizar por parte del profesor; estrategias de aprendizaje: determinación de las acciones a desarrollar por parte del alumno; la gestión didáctica para concretar la concepción del estudio de la Matemática en la carrera de Contabilidad y Auditoría.
- Diagnosticar la problemática mediante el análisis de la situación didáctica: conocimientos precedentes de los estudiantes; características y relaciones entre los contenidos de Matemática recibidos con anterioridad por los estudiantes y los que requiere la carrera.
- Realizar el diseño teórico - pedagógico de estrategias para el mejoramiento del proceso de enseñanza - aprendizaje de la disciplina Matemática en la carrera.
- Implementar las estrategias diseñadas para el mejoramiento del proceso de enseñanza - aprendizaje de la disciplina Matemática en la carrera.
- Validar las estrategias diseñadas para el mejoramiento del proceso de enseñanza - aprendizaje de la disciplina Matemática en la carrera.

Marco teórico

Las estrategias didácticas deben proporcionar motivación, información y orientación para realizar el aprendizaje. En opinión de Pere (2001) deben tener en consideración los aspectos siguientes: características del estudiante, estilos cognitivos y de aprendizaje; motivaciones e intereses de los estudiantes, amenidad; organización del curso, espacio y tiempo; proporcionar la información necesaria cuando sea preciso, documentos y materiales didácticos; utilizar metodologías activas en las que se aprenda haciendo; adecuado tratamiento de errores, que sea punto de partida de nuevos aprendizajes; prever que el estudiante pueda controlar su aprendizaje; actividades de aprendizaje colaborativo, sin dejar de considerar que el aprendizaje es individual; evaluación del aprendizaje (De León, 2007).

Estrategias didácticas (ED)

Se define en este trabajo ED como un conjunto de acciones, previamente diseñadas y organizadas consecuentemente, que pueden ponerse en práctica durante el desarrollo del proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática.

En el contexto de la investigación se parte del criterio que en el proceso de enseñanza - aprendizaje de la disciplina Matemática el docente debe diferenciar (y trabajar en función de ello) que todo problema es un ejercicio, pero no siempre un ejercicio es un problema.

Al definir cada actividad docente deben ser precisados los objetivos de la misma y preparar los ejercicios y/o problemas que serán presentados al estudiante para el análisis y solución, teniendo presente los elementos de la estrategia didáctica que se presentan a continuación (y que son los aspectos fundamentales inherentes a la misma): utilización de GIC, Moodle es una propuesta; utilización de AMC, Wolfram Alpha es una propuesta; vínculo al perfil de la carrera universitaria, elemento básico de la Matemática como disciplina científica; desarrollo del razonamiento lógico y pensamiento abstracto, aspecto insoslayable de la Matemática como disciplina educativa; visualización gráfica, desarrollo de la imaginación espacial (Torres, Morales y Bravo, 2006).

Modelar, procesar e interpretar son tres palabras clave que no pueden estar ausentes al desarrollar estrategias didácticas en el proceso de enseñanza - aprendizaje de la disciplina Matemática del siglo XXI. Modelar matemáticamente situaciones de la vida cotidiana y vinculadas al perfil de la carrera, procesar (utilizando también AMC) el modelo matemático obtenido a partir del tema en estudio e interpretar de forma explícita el resultado obtenido en el procesamiento matemático.

Gestores Informáticos de Cursos (GIC)

En el desarrollo de la investigación se asume como GIC al sistema informático que permite el intercambio electrónico sistemático, a partir del diseño y organización previa del curso por parte del profesor, entre el docente y los estudiantes sin la necesaria presencia de las partes. El GIC que se utiliza como parte de la estrategia didáctica en esta investigación es el Moodle.

Moodle es un software diseñado para posibilitar la creación de cursos en línea de alta calidad, lo que posibilita que los docentes a partir de sus propias iniciativas y la correspondiente dedicación puedan utilizarlo en el desarrollo del proceso de enseñanza -aprendizaje. Está basado en el constructivismo donde la comunicación tiene un espacio significativo en el camino a la construcción del conocimiento, es un software libre y no requiere el pago de licencia.

Asistentes Matemáticos Computacionales (AMC)

En la investigación se considera como AMC al software que permite, de una u otra forma, y a partir de conocimientos informáticos básicos, procesar electrónicamente modelos matemáticos ya creados. El AMC que se utiliza como parte de la estrategia didáctica en esta investigación es el Wolfram Alpha.

El Wolfram Alpha es una herramienta casi gratuita al tratar contenidos inherentes a la disciplina Matemática, si se quiere explotar al máximo todas sus potencialidades hay que suscribirse a un costo poco significativo y con consideraciones especiales al respecto para estudiantes. Es un software en línea, o sea, no necesita ser instalado en la computadora e incluso puede ser utilizado desde un dispositivo electrónico móvil.

Materiales y métodos

La población en estudio está formada por los estudiantes que durante todo un semestre cursan las asignaturas Matemática I (MI) y Matemática II (MII) de la carrera de Contabilidad y Auditoría. Fue considerado como tamaño de la población la matrícula de los cursos. La cantidad de estudiantes es 44 (estadísticamente hablando, tamaño de la población), 22 de MI y 22 de MII. El estudio se realizó para toda la población divida inicialmente en dos estratos (estudiantes de MI y estudiantes de MII). El diagnóstico fue aplicado para las matrículas iniciales (todavía no estabilizadas) de cada parte, 29 y 37 respectivamente.

La investigación se desarrolla por etapas, procediendo de la forma siguiente:

Primera etapa

- Análisis de los programas de estudios de la disciplina Matemática en los distintos niveles de enseñanza (educación general básica, bachillerato, universidad); evaluación diagnóstico sobre aspectos de Matemática que debe conocer el estudiante; diálogo abierto grupal con cada una de las partes de la población para analizar los resultados de la evaluación diagnóstico y conocer posibles causas.

Segunda etapa

- Preparación del marco teórico de la investigación: caracterización del currículum de la disciplina Matemática en la carrera de Contabilidad y Auditoría; papel de las estrategias didácticas (De la Torre y Barrios, 2012) en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática; los asistentes matemáticos computacionales y los gestores informáticos de cursos en el proceso de enseñanza - aprendizaje de la disciplina Matemática.
- Diagnóstico de necesidades de estudiantes participantes en el proceso enseñanza - aprendizaje de la disciplina Matemática en la carrera de Contabilidad y Auditoría: diseño del diagnóstico de necesidades; análisis de los resultados del diagnóstico de necesidades.
- Diseño pedagógico de la estrategia (Bravo, 2005) para el mejoramiento del proceso de enseñanza - aprendizaje de la disciplina Matemática en la carrera de Contabilidad y Auditoría: preparación de la estrategia para el mejoramiento del proceso de enseñanza - aprendizaje de la disciplina Matemática en la carrera de Contabilidad y Auditoría.

Tercera etapa

- Estrategia didáctica para el mejoramiento del proceso de enseñanza - aprendizaje de la disciplina Matemática con utilización de asistentes matemáticos computacionales y gestores informáticos de cursos en la carrera de Contabilidad y Auditoría: implementación de la estrategia didáctica para la disciplina Matemática con utilización de asistentes matemáticos computacionales y gestores informáticos de cursos en la carrera de Contabilidad y Auditoría; encuesta a estudiantes que pertenecen a la población en estudio (44 estudiantes); utilización de métodos clásicos de Estadística Descriptiva para el análisis de los resultados de la encuesta; análisis de los resultados de la implementación de la estrategia didáctica en la disciplina Matemática con utilización de asistentes matemáticos computacionales y gestores informáticos de cursos en la carrera de Contabilidad y Auditoría.

En la investigación se definen dos variables, que son las siguientes. Variable independiente: estrategia didáctica (con utilización de asistentes matemáticos computacionales y gestores informáticos de cursos); variable dependiente: proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática en la carrera de Contabilidad y Auditoría.

Los indicadores fundamentales definidos para ser valorados son los que se presentan a continuación: utilización de Tecnologías (Cabero y Barroso, 2015) de la Información y la Comunicación (TIC) con énfasis en los gestores informáticos de cursos; utilización de asistentes matemáticos computacionales; enseñanza de la Matemática vinculada a la cotidianidad, vínculo al perfil de la carrera; la Matemática en el desarrollo del razonamiento lógico y el pensamiento abstracto; precisión en la definición de objetos matemáticos; modelar, procesar e interpretar como palabras clave en el proceso de enseñanza - aprendizaje de la disciplina Matemática.

Resultados y discusión

El diagnóstico. Los primeros resultados de la investigación aparecen al realizar una evaluación (anónima) diagnóstico (en la primera semana de clases) a todos los estudiantes que se inician en la asignatura Matemática de la carrera de Contabilidad y Auditoría.

Se realiza una evaluación escrita de 9 preguntas (con 5 respuestas en cada una de ellas para seleccionar la correcta) en las que se evalúa de una forma u otra los conocimientos que tiene el estudiante a través de una caracterización general sobre los aspectos siguientes: operaciones básicas; trabajo con variables; representaciones gráficas; razonamiento lógico y pensamiento abstracto; solución de problemas (modelar, procesar, interpretar).

El examen diagnóstico tiene un valor total de 20 puntos. Las preguntas están valoradas en dos o tres puntos (dos puntos es el valor de cada una de las siete primeras; tres puntos es el valor de cada una de las dos últimas, solución de problemas). A continuación se presentan el criterio de calificación

Figura 1. Criterio de calificación

Cantidad de puntos	Valoración
17 - 20	Excelente
12 - 16	Satisfactorio
8 - 11	Aceptable
0 - 7	Insatisfactorio

Figura 2. Resultados del diagnóstico

	MI	MII	MI y MII
Presentados	29	37	66
Aprobados	3	4	7

Figura 1 y los resultados de la evaluación diagnóstico en la **Figura 2.**

Los 7 estudiantes que resultan aprobados tienen resultado aceptable (entre 8 y 11 puntos); tienen resultado insatisfactorio 59 estudiantes.

Principales consideraciones emanadas de la calificación y del análisis grupal de los resultados: dificultades significativas en la solución de ejercicios y problemas (modelar, procesar, interpretar); no identificación de modelos gráficos clásicos; falta de motivación para estudiar Matemática, no gusta; se ve poco vínculo con la vida cotidiana.

El diagnóstico se convierte en importante punto de partida para el diseño y posterior desarrollo de la investigación que se resume en este artículo científico.

La encuesta es aplicada a los 44 estudiantes que permanecen en la carrera de Contabilidad y Auditoría durante todo el semestre y que conforman la población final en estudio, 22 de MI y 22 de MII. Son ellos los participantes directos en la implementación de la estrategia didáctica.

En la encuesta sometida a consideración de los estudiantes (después de implementada la estrategia) se presentan 9 interrogantes, 6 de ellas ofrecen la posibilidad de argumentar voluntariamente sobre la opción seleccionada. En la escala de valoración de la respuesta a cada pregunta el estudiante opta por una de las 5 opciones posibles dadas en la figura 4.

Toda encuesta, de una forma o de otra, está impregnada de elementos objetivos y subjetivos que pueden tener influencia directa en la interpretación de los resultados, y esta no es una excepción. El índice de aceptación ponderado que aparece después es un importante aporte de esta investigación en la búsqueda de confianza para los resultados de la misma.

Lo planteado en el párrafo anterior fue algo que se tuvo presente en el desarrollo de la investigación, y en función (a criterio de los investigadores) de someter a la opinión de los estudiantes aspectos que se consideran importantes a tener presente actualmente en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la disciplina Matemática (cuestiones presentadas en la estrategia) fueron diseñadas cada una de las preguntas de la encuesta y la escala de valoración uniforme correspondiente.

Se define, con el objetivo de integrar en un solo valor numérico porcentual el resultado para el indicador puesto a consideración en cada pregunta, un índice, denominado en el contexto de la investigación "Índice de Aceptación Ponderado (IAP)" a través del modelo matemático que se presenta en la figura 3.

Figura 3. IAP

$$IAP = S + 0{,}75\,CS + 0{,}50\,AV + 0{,}25\,MP \quad ; \quad 0 \leq IAP \leq 100$$

IAP: Índice de Aceptación Ponderado (%).
S: % de encuestados que responde Sí/Siempre.
CS: % de encuestados que responde Casi Siempre.
AV: % de encuestados que responde A Veces.
MP: % de encuestados que responde Muy Poco.
N: % de encuestados que responde No/Nunca.

Figura 3.

El "IAP" es el criterio definido y adoptado en la investigación para presentar de forma resumida e integrada los resultados correspondientes a cada indicador y poder establecer una comparación general entre ellos. El "Coeficiente de Ponderación (CP)" que antecede a cada variable independiente en el modelo matemático aparece definido en la tabla presentada anteriormente en la figura 4.

Figura 4. CP

Valoración	CP
Sí/Siempre	1
Casi Siempre	0,75
A Veces	0,50
Muy Poco	0,25
No/Nunca	0

Figura 4.

A continuación se presenta, por pregunta (P), la intención evaluadora de los investigadores con la realización de las mismas.

Las 9 preguntas presentadas a los estudiantes en la encuesta y la escala de valoración correspondiente, están en función de medir:
P#1: De forma no declarada si mejora la motivación después de aplicada la estrategia.
P#2: El grado de aceptación del sistema de acciones utilizadas por el profesor.
P#3: Precedentes en la utilización de gestores informáticos de cursos.
P#4: Grado de aceptación por la utilización del Moodle.
P#5: Precedentes en la utilización de asistentes matemáticos computacionales.
P#6: Grado de aceptación por la utilización del Wolfram Alpha.
P#7: Opinión sobre el nivel de aceptación por la utilización de AMC en el desarrollo del proceso de enseñanza - aprendizaje de la disciplina Matemática.
P#8: Opinión sobre el nivel de aceptación por la utilización de GIC en el desarrollo del proceso de enseñanza - aprendizaje de la disciplina Matemática.
P#9: Grado de oportunidad en el vínculo con el perfil de la carrera.

En la figura 5 se presentan, para toda la población, la distribución de frecuencias relativas (%) por pregunta.

Figura 6. Valor del IAP (%) por pregunta

Pregunta	IAP	Observaciones
1	63,1	Declarada mejora en la motivación después de aplicada la estrategia.
2	64,8	Nivel de aceptación por el sistema de acciones utilizadas por el profesor.
3	15,8	Poca precedencia en la utilización de gestores informáticos de cursos.
4	64,8	Nivel de aceptación por la utilización del Moodle.
5	9,7	Poca precedencia en la utilización de asistentes matemáticos computacionales.
6	59,7	Nivel de aceptación por la utilización del Wolfram Alpha.
7	73,3	Nivel de aceptación por la utilización de AMC en el desarrollo del proceso de enseñanza - aprendizaje de la disciplina Matemática.
8	75	Nivel de aceptación por la utilización de GIC en el desarrollo del proceso de enseñanza - aprendizaje de la disciplina Matemática.
9	69,3	Nivel de oportunidad en el vínculo con el perfil de la carrera de Contabilidad y Auditoría.

Figura 5.

En la figura 6 aparece, para toda la población, el IAP por pregunta.

Figura 5. Distribución de frecuencias relativas (%)

Pregunta	Valoración				
	No/Nunca	Muy Poco	A Veces	Casi Siempre	Sí/Siempre
1	6,8	13,6	20,5	38,6	20,5
2	2,3	13,6	20,5	50	13,6
3	68,3	15,9	4,5	6,8	4,5
4	0	18,1	25	36,4	20,5
5	77,3	13,6	4,5	2,3	2,3
6	9,1	15,9	22,7	31,8	20,5
7	2,3	2,3	27,2	36,4	31,8
8	2,3	2,3	27,2	29,6	38,6
9	4,5	2,3	31,8	34,2	27,2

Figura 6.

Parte del desarrollo de la investigación (y resultado importante de la misma) es el montaje en Moodle de las asignaturas MI y MII para la carrera de Contabilidad y Auditoría, su aceptación por parte de la población en estudio es significativa, 75 %. Otro resultado importante fue la utilización del Wolfram Alpha, el nivel de aceptación por parte de la población en estudio es considerablemente positiva, 73,3 %.

Conclusiones

El "IAP" como elemento importante en el procesamiento estadístico de la información recopilada durante el desarrollo de la investigación permite concluir que: La utilización de estrategias didácticas con adición a los AMC y GIC de otras acciones en función de la vinculación al perfil de la carrera, el desarrollo del razonamiento lógico y pensamiento abstracto y la visualización gráfica, puede influir positivamente en la motivación por la disciplina Matemática y la obtención de mejores resultados docentes.

Referencias bibliográficas

Bravo, M. L. (2005). Estrategia didáctica para la flexibilización del proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en la universalización de la Universidad. *Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación*, *3*, 153–160.

Cabero, J. y Barroso, J. (2015). *Nuevos retos en tecnología educativa*. Madrid, España: Síntesis.

De la Torre, S. y Barrios, O. (2012). *Estrategias didácticas innovadoras*. Barcelona, España: Octaedro.

De León, N. R. (2007). *Propuesta didáctica para desarrollar la evaluación del aprendizaje en la asignatura Matemática*. IX Conferencia Internacional de Ciencias de la Educación, Simposio de Matemática Educativa y Educación Virtual y II Encuentro Internacional de Educación en Valores. Camagüey, Cuba: Universidad de Camagüey.

De León, N. R. (2011). Utilización de plataformas interactivas, necesidad impostergable en el desarrollo del PDE de la nueva Universidad. Moodle vs. Microcampus, algunas consideraciones al respecto. *Anuario de la Universidad de Cienfuegos*, 625–633.

Pere, G. (2001). *La revolución educativa en la era de internet*. Barcelona, España: Praxis.

Torres, M., Morales, Y. y Bravo, M. L. (2006). *La capacidad de imaginación espacial: una estrategia didáctica para contribuir a su desarrollo en los estudiantes de ingeniería mecánica*. En V Congreso Internacional de Educación Superior "Universidad 2006". La Habana, Cuba: Palacio de Convenciones.

Vygotsky, L. (1985). *Interacción entre enseñanza y desarrollo*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

ANÁLISIS DEL IMPACTO DEL USO DEL GEOGEBRA EN RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO, EN ASIGNATURAS BÁSICAS DE INGENIERÍA

INGENIERÍA

Florencia M. Alurralde, Claudia M. Tapia, Julia M. Hurtado

Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Salta - CIUNSA. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta - Unas. (Argentina)

florencialurralde@gmail.com, claudiatapia880@gmail.com, julia_mhurtado@yahoo.com.ar

RESUMEN: Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación del Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Salta, surge de la preocupación por los bajos rendimientos académicos de estudiantes que ingresan a carreras de la Facultad de Ingeniería. Ante la necesidad de contribuir a un aprendizaje significativo de las matemáticas básicas y mejorar el rendimiento académico de los estudiantes, se incorpora en la enseñanza de la asignatura Álgebra Lineal y Geometría Analítica el uso del software de geometría dinámica Geogebra, y se muestra los resultados de una experiencia realizada en el tema Rectas y Planos en el espacio.

Palabras clave: geogebra, rectas, planos, rendimiento académico

ABSTRACT: This work is part of a research project of Salta National University Research Council.It arises from the concern for the low academic performance of the students who enter the degree courses in the engineering faculty. In order to contribute to basic mathematics significant learning as well as to improve the students' academic performance, Geogebra dynamic geometry software is used. The results of an experience carried out on the topic *Straight lines and Planes* are also shown.

Key words: geogebra, straight lines, planes, academic performance

Introducción

Es indudable que la presencia y el uso de la tecnología ha provocado cambios en nuestras vidas, en nuestros hábitos, en la forma de percibir la realidad y en la manera de interactuar con ella. En este escenario de cambio también se ven afectados los procesos de enseñanza y aprendizaje. Por ello se hace necesario reflexionar, de manera continua y crítica, sobre el efecto de los mismos en nuestras prácticas docentes cotidianas y en las formas de aprendizaje, de allí la importancia de complementar la enseñanza con las tecnologías de la información y la comunicación (TICs), aplicando estrategias que motiven a los estudiantes a desarrollar sus capacidades de creatividad, exploración, verificación y autoevaluación.

Considerando lo anterior y preocupados con los bajos rendimientos académicos de los estudiantes que ingresan a las carreras de ingeniería, surge la necesidad de hacer algún aporte como docentes, a través de cambios en las estrategias de enseñanza, que apunten a mejorar las condiciones para un aprendizaje significativo de las matemáticas básicas y una mejora en el rendimiento académico de los estudiantes.

En el presente trabajo, que forma parte de un proyecto de investigación del Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta (CIUNSa.), se muestra los resultados de una experiencia de incorporación del software de geometría dinámica Geogebra, como herramienta complementaria al papel y lápiz, en el aprendizaje de los estudiantes en la asignatura Álgebra Lineal y Geometría Analítica (ALGA) de las carreras de Ingeniería, específicamente en el tema Rectas y Planos en el espacio, con el objetivo de contribuir a la mejora del rendimiento académico de los alumnos que cursan la asignatura y favorecer la autonomía en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Son muchos los problemas de enseñanza y aprendizaje de Matemáticas que se presentan en el primer año universitario y constituye el campo de acción en esta investigación. Tanto para la enseñanza como para el aprendizaje de la geometría se presentan dificultades en el tratamiento de resolución de problemas ya que visualizar figuras geométricas, lograr conceptualizar e incorporar propiedades para justificar respuestas a los problemas es una tarea que por lo general ha sido reemplazada por actividades puramente algebraicas y aritméticas.

En la geometría no solo el uso de fórmulas es importante para resolver situaciones problemáticas, sino también visualizar y tener un razonamiento adecuado. En este sentido Sánchez Rosal (2012), recomienda una paulatina incorporación de los recursos tecnológicos como complemento de la enseñanza tradicional en el ámbito universitario y pone énfasis en la importancia de los procesos de visualización, que permite la asimilación de conceptos abstractos en base de imágenes o representaciones que las TICs proporcionan.

Cabe aclarar que si bien la incorporación de la tecnología en la formación de profesionales ingenieros resulta ser muy importante y beneficiosa, de ninguna manera se pretende reemplazar al conocimiento, sino colaborar e incentivar a la construcción del mismo. Por lo tanto, lo que se busca con la integración de las TIC a la educación universitaria es un aprendizaje significativo, favorecer la adquisición de competencias y aprovecharlas como elementos motivadores para el estudiante.

Como afirma Castellano (2010), no basta con aprender a operar aparatos ni dominar técnicas, de lo que se trata es de transformar la práctica docente integrando recursos y estrategias originales, pero no para satisfacer un requerimiento de modernización, sino convencidos de que la práctica innovadora provoca un salto de calidad en el aprendizaje, o tiene chances de hacerlo [64].

Marco Teórico

La enseñanza constructivista considera que el aprendizaje humano es siempre una construcción interior, aún en caso que el educador acuda a una exposición magistral, pues ésta no puede ser significativa si sus conceptos no encajan ni se insertan en los conceptos previos de los estudiantes. El propósito es precisamente facilitar y potenciar al máximo ese procesamiento interior con miras a su desarrollo.

La acción constructivista, según Ramírez Toledo (2013), se apoya en la estructura conceptual de cada estudiante: parte de las ideas y preconceptos que el estudiante trae sobre el tema de la clase. Así, cuando un individuo enfrenta una situación matemática debe recurrir a sus ideas sobre los conceptos involucrados en ella, haciendo una reconstrucción de su conocimiento como resultado de la reflexión sobre las condiciones del problema planteado. De esta manera puede reestructurar su conocimiento mediante una reorganización de las estructuras en un nivel más elevado, donde el nuevo conocimiento es asimilado.

Por lo tanto, una meta clara dentro de este marco teórico es ayudar a los estudiantes a que construyan las estructuras apropiadas para cada nuevo concepto. El sujeto construye y reconstruye significados de manera personal y en interacción con otros estudiantes y con el docente mismo, y tales construcciones no se pueden desvincular del contexto donde acontecen. Las funciones psicológicas superiores se ven modificadas y mediadas por el uso de instrumentos (entre otros las nuevas tecnologías) y por el lenguaje. (Santos y Stipcich, 2009).

Por otro lado, la enseñanza tradicional de la geometría, basada en nombres de figuras y cuerpos, en desmedro de la significación de los conocimientos, se convierte en una actividad repetitiva que no da lugar al debate de los procedimientos que los estudiantes realizan, ni permite desarrollar procesos cognitivos reflexivos y compartidos, ni a descubrir las diferentes maneras de resolver un mismo problema y mucho menos a validar cada uno de los procedimientos realizados.

A la luz de estas dificultades, se propone una investigación orientada a fortalecer las situaciones del nivel universitario que demandan más atención, en este caso, mediante el enriquecimiento de los contenidos de geometría utilizando las TICs y el estudio de sus efectos sobre el aprendizaje.

Objetivos

- Favorecer el aprendizaje significativo y el proceso de autoevaluación en los estudiantes de primer año de ingeniería.
- Contribuir a la mejora del rendimiento académico de los estudiantes de ingeniería en la asignatura ALGA, en el tema “Rectas y Planos en el espacio”.

Descripción de la Experiencia y Metodología

Este trabajo, que forma parte del Proyecto Nº 2197 del CIUNSA, se llevó a cabo en la Facultad de Ingeniería de la UNSa, en el segundo cuatrimestre de 2015, en la asignatura Álgebra Lineal y Geometría Analítica (ALGA), que es una materia de régimen cuatrimestral de las carreras de Ingenierías Química, Civil, Industrial y Electromecánica.

Se focaliza en el análisis del efecto producido por la incorporación a las clases teórico-prácticas del software de geometría dinámica "Geogebra", en el rendimiento académico de los estudiantes en el tema Rectas y Planos en el espacio, correspondiente al Trabajo Práctico Nº 4 de la asignatura. La experiencia se llevó a cabo en los horarios usuales de clase y participaron dos comisiones de trabajos prácticos.

Del total de estudiantes que cursaban en esa instancia la asignatura (300), se tomaron dos comisiones de 70 estudiantes cada una. Una de ellas denominada grupo experimental (en la cual se incorporó el uso de Geogebra como herramienta complementaria, en la verificación de los resultados de los problemas propuestos, en la visualización de las gráficas de las rectas y planos, en el estudio de la variación de parámetros y en la observación de los distintos casos y tipos de soluciones) y la otra denominada grupo de control (en la que se trabajó con la metodología clásica, resolución de la guía de trabajos prácticos con lápiz y papel).

Etapas de la experiencia

1. Resolución del Trabajo Práctico Nº 4, referido al tema Rectas y Planos en el espacio (teoría y práctica), fue desarrollado en ambas comisiones simultáneamente cada una con su metodología.
2. Finalizada la Unidad se realizó una Evaluación por Temas (cuestionario escrito) idéntica para ambas comisiones. En ésta etapa de la investigación se analizaron los resultados obtenidos por todos los estudiantes, haciendo un análisis cuantitativo y cualitativo de los resultados, con el objetivo de poder comparar el rendimiento académico que tuvieron los dos grupos, el experimental y el de control. Se procuró determinar así la influencia del uso del Geogebra en el aprendizaje de rectas y planos.

3. Finalizada las 5 primeras unidades de la materia se realizó el Segundo Parcial en el cual se incluye el tema Rectas y Planos en el Espacio. Se analizó el rendimiento de los estudiantes de las dos comisiones en el ejercicio relacionado al tema.
4. Al finalizar el cursado se realizó una encuesta anónima a los estudiantes de la comisión experimental acerca de su opinión sobre el uso del Geogebra en la asignatura ALGA.

Resultados

Evaluación por temas

Se indican los puntos evaluados en la Primera evaluación por temas de la asignatura ALGA, realizada a todos los estudiantes, sobre el tema Rectas y Planos en el espacio. Los puntos evaluados fueron:

1a) Halle el punto de la recta X = (1, 2, 1) + t (0, 1, 1) más próximo al punto B = (-1, 1,-1)
1b) Defina proyección vectorial de un vector sobre otro.

Se realizó un análisis cuantitativo y otro cualitativo sobre los resultados obtenidos en ésta evaluación por los dos grupos en estudio.

Análisis Cuantitativo

Para realizar éste análisis se calcularon las notas promedios obtenidas por el grupo experimental y el de control para cada uno de los ejercicios de la evaluación, las cuales se muestran en la tabla 1 y se representan en el gráfico de la figura1.

Debe tenerse en cuenta que el puntaje máximo de cada ejercicio es:

1a) Práctica. 25 puntos
1b) Teoría. 25 puntos

Se obtuvieron las siguientes notas promedio en la primera evaluación por temas:

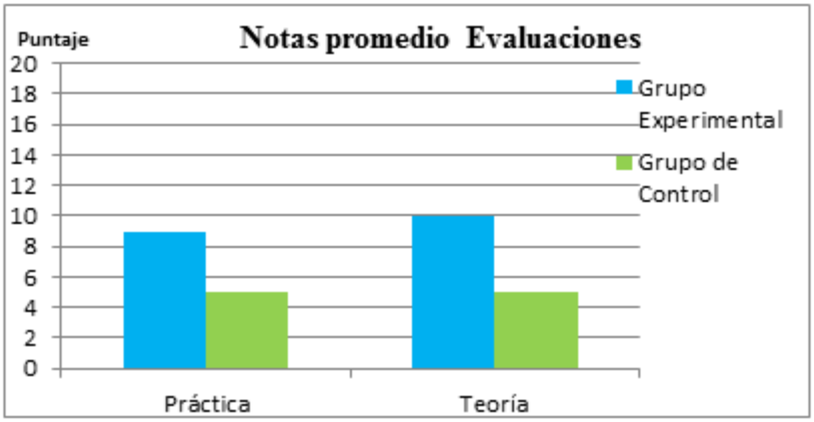


Figura 1. Nota promedio evaluaciones

Tabla 1. Nota Promedio Evaluaciones

Notas Promedio Evaluaciones		
Ejercicios	**Grupo Experimental**	**Grupo de Control**
Práctica	9	5
Teoría	10	5

Del análisis cuantitativo se observa que el grupo experimental tuvo en general un mejor rendimiento que el grupo de control, lo cual pudo observarse claramente en los gráficos de barras correspondientes a cada ejercicio.

Análisis Cualitativo

Se analizaron cada uno de los ejercicios de la Evaluación por Temas, como así también los conceptos solicitados en cada inciso de los mismos, adoptándose una escala cualitativa que tiene en cuenta si la respuesta del alumno está mal, regular, bien o muy bien. En el caso de resoluciones correctas y sin errores conceptuales se considera muy bien, si se observa alguna imprecisión simbólica o de expresión se considera bien, en caso de tener errores de cálculos o simbología pero no conceptuales se considera regular y mal en caso de presentarse errores de concepto.

Se presenta la Tabla 2 y los gráficos de barras 2a y 2b con los resultados obtenidos en ambos grupos.

Tabla 2. Evaluación por Temas

Evaluación por Temas	Ejercicio Práctico		Ejercicio Teórico	
	Grupo Experimental	Grupo de Control	Grupo Experimental	Grupo de Control
Muy bien	21	8	22	9
Bien	5	4	4	3
Regular	3	6	5	4
Mal	25	27	21	14
Vacío	16	25	18	40

Figura 2a. Ejercicio Práctico

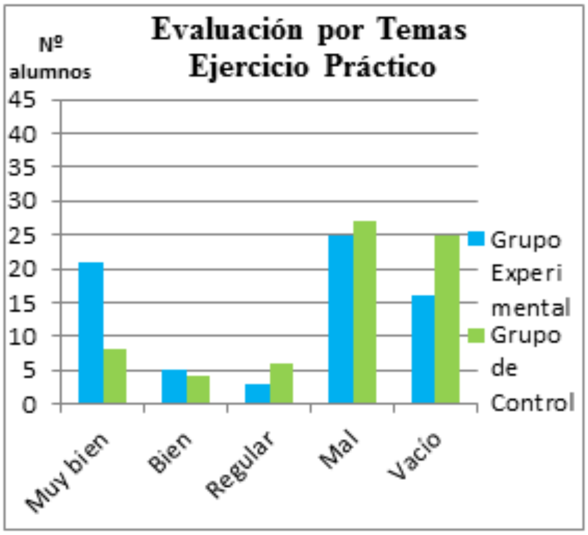
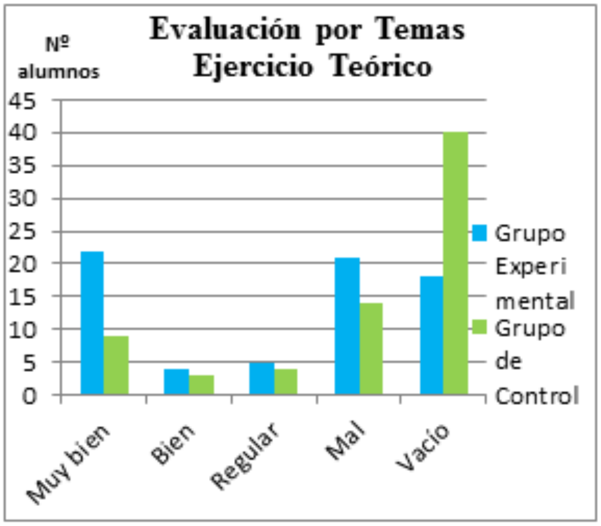


Figura 2b. Ejercicio Teórico



Del análisis cualitativo, se observa que el grupo de los estudiantes que resolvieron los ejercicios, el grupo experimental tuvo un mejor rendimiento que el grupo control.

En ambos grupos, sin embargo fue notorio el gran porcentaje de alumnos que no resolvieron o que lo hicieron mal (aproximadamente 70%), debido a errores de cálculo, de signo y de resolución de ecuaciones, observándose dificultades en el manejo de expresiones algebraicas.

Segundo Parcial

A continuación se indican los puntos evaluados sobre el tema Rectas y Planos en el espacio en el Segundo Parcial de la asignatura realizado a todos los estudiantes. Se tiene en cuenta para el análisis las dos comisiones: de control y experimental.

Los puntos evaluados fueron:

Ejercicio Práctico: Halle la ecuación cartesiana implícita del plano por P (1, 1,0) y que contiene a la recta $2-x=\frac{2y+4}{2}=1-z$. Indique a qué distancia se encuentra el plano del origen.

Ejercicio Teórico: Defina producto vectorial y deduzca una regla práctica para su cálculo.

Análisis Cuantitativo

Para realizar este análisis se calcularon las notas promedios obtenidas por el grupo experimental y de control para cada uno de los ejercicios de la evaluación, las cuales muestran en la tabla 3 y se representan en el gráfico de la Figura 3.

El puntaje máximo de cada ejercicio fue:

1a. Práctica. 13 puntos

1b. Teoría. 12 puntos

Se obtuvieron las siguientes notas promedio en el Segundo Parcial:

Tabla 3. Nota promedio Parcial

Notas Promedio de Parciales		
Ejercicios	Grupo Experimental	Grupo de Control
Practica	7	5
Teoría	4	3
Total	11	8

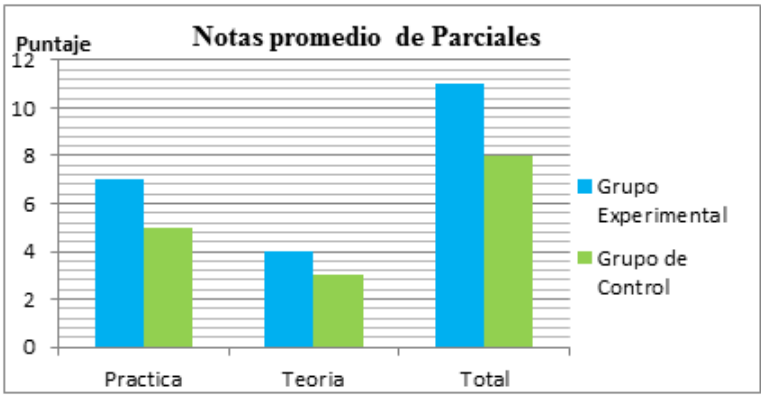


Figura 3. Nota promedio Parcial

Del análisis cuantitativo se observa que el grupo experimental tuvo en general un mejor rendimiento que el grupo de control, lo cual pudo observarse claramente en los gráficos de barras correspondientes a cada ejercicio.

Análisis Cualitativo

Se analizaron cada uno de los ejercicios del Parcial, considerándose la interpretación del problema, los conceptos solicitados en cada inciso y la resolución de los mismos, adoptándose una escala cualitativa que tiene en cuenta si lo que el estudiante contestó está: mal, regular, bien o muy bien de manera análoga a la evaluación por temas.

Se presenta la Tabla 4 y los gráficos de barras 4a y 4b con los resultados obtenidos en ambos grupos.

Tabla 4. Examen Parcial

Examen Parcial	Ejercicio Práctico		Ejercicio Teórico	
	Grupo Experimental	Grupo de Control	Grupo Experimental	Grupo de Control
Muy bien	28	20	12	11
Bien	4	6	4	3
Regular	7	6	3	3
Mal	24	22	29	29
Vacío	7	16	22	24

Figura 4a. Ejercicio Práctico

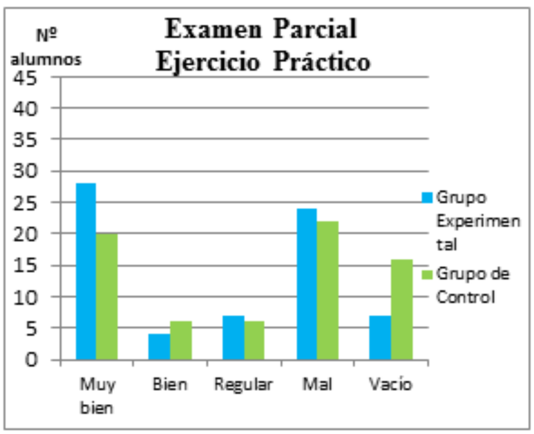
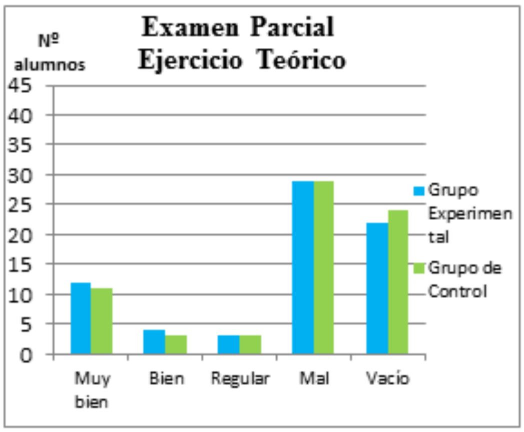


Figura 4b. Ejercicio Teórico



El análisis cualitativo permite observar que, de los que contestaron, el mejor rendimiento estuvo en el grupo experimental, sin embargo fue notorio el gran porcentaje (75%) de estudiantes de ambos grupos que no resolvieron o hicieron mal la parte teórica, debido a falta de estudio de las definiciones y dificultad para realizar deducciones.

En el análisis cualitativo se destaca en el grupo experimental mejor dominio conceptual y un porcentaje mayor de interpretación correcta de los enunciados propuestos en relación al grupo control. El 95% de los estudiantes del grupo experimental realizaron un gráfico para interpretar la situación planteada, en cambio solo el 40% de los estudiantes del grupo control lo hizo. Confusión en los distintos tipos de producto entre vectores y errores acerca de las distintas formas de ecuaciones de la recta en el espacio, solo se observaron en el grupo control.

Conclusiones

El análisis de los resultados indica que los objetivos se cumplieron parcialmente ya que los estudiantes que utilizaron Geogebra durante la realización del trabajo práctico de Rectas y Planos tuvieron un mejor rendimiento en el tema, tanto en las evaluaciones como en el parcial, además interpretaron mejor los enunciados con la ayuda de un gráfico para visualizar el problema, de lo que se podría inferir la importancia del uso del software en la mejor visualización de los problemas relacionados con rectas y planos en el espacio.

Una aportación importante observada en la realización de los trabajos prácticos con la ayuda del Geogebra, fue la posibilidad que tuvieron los estudiantes de verificar los resultados obtenidos trabajando con lápiz y papel, además de observar las infinitas soluciones que se podían presentar en algunos problemas propuestos y que son imposibles de visualizar sin la ayuda del software. Esto facilitó el tema de corrección de los prácticos a los docentes ya que los alumnos pudieron constatar sus resultados de manera autónoma.

La utilización del Geogebra resultó motivante según los comentarios vertidos en la encuesta final realizada a los estudiantes de la comisión experimental. El 98% de los encuestados remarcaron como muy positivo el uso del Geogebra en su aprendizaje, indicando la importancia de la vista gráfica en la comprensión del tema, lo que les permitió relacionar ideas sobre los conceptos involucrados.

Por ello se podría pensar que el uso del Geogebra favoreció la reconstrucción del conocimiento, y se espera el logro de un aprendizaje significativo. Esto alienta a seguir extendiéndolo a todos los temas de la asignatura y de otras asignaturas de primer año de las carreras de Ingeniería, como así también a proponer nuevas actividades en clase para lograr que los estudiantes obtengan mejores resultados y aprovechen eficientemente los recursos tecnológicos actuales.

Referencias Bibliográficas

Castellano, H. M. (2010). *Integración de la tecnología educativa en el aula enseñando con las TIC*. Buenos Aires, Argentina: Cengage Learning.

Ramírez Toledo, A. (2012). *El Constructivismo pedagógico*. Recuperado de http://www.educarchile.cl/Userfiles/P0001%5CFile%5CEI20.

Sánchez Rosal, A. (2012). Incorporación de las TIC en el aprendizaje de las matemáticas en el sector universitario. *Revista de Educación Matemática, 27*(3), 23-28.Unión Matemática Argentina. Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba.

Santos, N. & Stipcich, M. (07/2011). *La resolución de problemas de matemática y física con TIC*. Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta. Curso dictado en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta. Resolución N° 439 Consejo Directivo. Salta, Argentina: Universidad Nacional de Salta.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE SOFIA XT: UNA PLATAFORMA EDUCATIVA PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS A NIVEL PRIMARIA

Dino Alejandro Pardo Guzmán, Fernando Soto Camacho, Mercedes Serna Félix
XT Autodidactas Inteligentes S. A. de C. V. (México)
dino.pardo@gmail.com, fernandosotocamacho@gmail.com, msernafelix@gmail.com

RESUMEN: Desde el año 2011 un grupo de entusiastas profesionales hemos concebido, desarrollado y probado una plataforma web denominada Sofía XT, la cual provee espacios virtuales para el aprendizaje de las matemáticas de los niños de primaria. Sofía XT surgió de la necesidad de elevar el nivel de las matemáticas en México y es una herramienta interactiva, funcional y amigable que busca desarrollar las competencias de las matemáticas de una forma significativa y óptima. Sofía XT toma como base el programa que proporciona la Secretaria de Educación Pública enriqueciéndolo con contenidos innovadores para lograr el aprendizaje completo de las matemáticas y su uso.

Palabras clave: plataforma educativa, matemáticas, primaria

ABSTRACT: Since the year 2011, a group of enthusiastic professionals have conceived, developed and tested a web platform called Sofia XT which provides elementary school children with virtual spaces for mathematics learning. Sofia XT emerged from the need to increase math level in Mexico. It is a friendly, functional and interactive tool that attempts to develop math competences in a significant and optimal way. Sofia XT is based on the program that the Public Education Secretariat provides. Such program is improved with innovatory contents to achieve the whole learning of mathematics and its use.

Key words: educational platform, math, elementary

Antecedentes

Las TIC son motores del crecimiento e instrumentos para el empoderamiento de las personas que tienen hondas repercusiones en la evolución y el mejoramiento de la educación. Para que esta presencia sea total y eficaz, autores como Siraj-Blatchford y Whitebread (2003) citados por Kalaš (2010), consideran que es importante que los niños pequeños empiecen a desarrollar su alfabetización tecnológica. Las nuevas tecnologías pueden ser muy poderosas para apoyar el potencial creativo, ya que los niños pequeños aprenden de manera avasalladora mediante juegos, por lo que si se les deben presentar las TIC como juguetes tecnológicos y herramientas creativas pueden lograrse cambios importantes en el aprendizaje (Kalaš, 2010).

La digitalización ha comenzado a reestructurar la educación tradicional presencial, como parte de un cambio mediante el cual la educación ha ido incorporando un enfoque por competencias. En este sentido, la pedagogía informática apunta a impulsar el enfoque curricular por competencias y un aprender haciendo. Con ello, la dinámica educativa se está articulando a partir del uso de recursos digitales que permitan mejorar el nivel de retención y adquisición de competencias (Rama, 2012).

En el futuro cercano, la virtualidad será considerada parte de una misma educación. Tanto los medios tradicionales como los digitales proveerán los espacios adecuados para llevar el conocimiento a la sociedad. En este contexto el aprendizaje del siglo XXI se puede llevar a cabo desde cualquier lugar, cosa o persona; desde diferentes dispositivos electrónicos y mediante una variedad de modalidades educativas de formación digital: e-Learning, m-Learning, b-Learning y t-Learning; aunque no ha de perderse de vista que el aprendizaje es lo relevante, es decir el learning es el foco principal de lo virtual y no su prefijo (Navarro, 2010).

La educación personalizada es el gran reto de la educación de este siglo. El proceso de aprendizaje no dependerá del educador ni solo de la tecnología, sino de la metodología empleada para llegar a cada uno de los participantes del proceso de aprendizaje. La tecnología ayudará en gran medida a personalizar el aprendizaje de cada estudiante a través de la incursión en proyectos interactivos que les ayude a descubrir sus talentos y aumentar sus posibilidades.

Clayton et al (2008) predicen que la innovación disruptiva, que va a revolucionar el sistema educativo, será la instrucción personalizada con apoyo de las plataformas digitales. Los estudiantes necesitan motivación intrínseca para obtener el valor óptimo de su tiempo en clase, por lo que la instrucción debe apelar a los intereses individuales de cada alumno y de sus estilos de aprendizaje. Para esto, el estudiante utilizará la información con la que desea trabajar y administrará su ritmo de aprendizaje bajo la supervisión de un tutor quien habrá de seguir el rastro emocional de sus estudiantes (Levinson, 2013).

Siemens (2005) propone el Conectivismo como la teoría que ofrece una idea de las habilidades de aprendizaje y tareas necesarias para que los alumnos prosperen en la era digital, en la que el conocimiento y la manera en que se dan los intercambios de información, están creciendo de manera exponencial, además de que su adquisición no se da solo de manera lineal ni formal, en un tiempo en que la cantidad y accesibilidad a la información y al conocimiento está en rápida evolución, un tiempo en que el aprendizaje ya no es una actividad interna, individualista. El mayor reto estará enmarcado en la brecha cognitiva y el uso adecuado de los recursos tecnológicos para el propio crecimiento.

Fundamentación

La creación de la plataforma y su uso posterior busca desarrollar las capacidades cognitivas del estudiante mediante la ejercitación y práctica de los distintos conceptos y habilidades matemáticas, fomentar el aprendizaje colaborativo construyendo comunidades de aprendizaje y vencer la ansiedad hacia las matemáticas, mediante la gamificación del ambiente de aprendizaje creado a través de su interface.

De acuerdo a lo expuesto por Guedez (2005) la enseñanza de la matemática, comienza a caracterizarse por el uso de software como una herramienta didáctica, cuya evolución ofrece nuevas formas de enseñar, aprender y hacer matemática, brindando amplias posibilidades didácticas y propiciando la interacción del alumnado con situaciones de aprendizaje que lo conduzcan a construir conocimientos, con el fin de obtener una visión más amplia del contenido matemático.

El componente pedagógico de los materiales multimedia de acuerdo a lo planteado por Rodríguez et. al (2015) ha de estar definido por una serie de actividades de enseñanza aprendizaje y actividades de evaluación interactivas, que dirija el material digital hacia un fin educativo productivo. En el caso de la plataforma esta ha tomado como directriz el programa oficial; el grado de adaptación a los contenidos curriculares se garantizó mediante el diseño de las actividades de acuerdo a los contenidos de los libros de texto de la SEP, acorde a los seis grados escolares del nivel primaria, y a los temas que se revisan en el aula de clases programados por el docente; además de enriquecer la plataforma con ejercicios propios que refuerzan los contenidos planteados por el sistema de educación oficial.

De acuerdo al modelo constructivista el proceso formativo debe seguir un modelo de aprendizaje centrado en el estudiante, considerando sus intereses, habilidades para aprender y necesidades en el sentido más amplio (Castillo, 2008). Por lo tanto, no solo se centrará en contenidos sino también en competencias, por lo que las competencias sociales y comunicativas adquieren un gran valor en este escenario (Begoña y Noguera, 2013).

Gross (2000) refiere que “las experiencias de aprendizaje colaborativo asistido por las TICs, entienden el aprendizaje como un proceso social de construcción de conocimiento en forma colaborativa”, es decir como una estrategia de enseñanza y aprendizaje por la cual interactúan dos o más sujetos para construir conocimiento, a través de la discusión, reflexión y toma de decisiones, proceso en el cual los recursos informáticos actúan como mediadores.

Además de enriquecer el proceso formativo y fomentar la comunicación entre sus usuarios, un software educativo ha de motivar el aprendizaje. Los problemas de aprendizaje que se presentan en las matemáticas rebasan el ámbito escolar inmediato. Según el Reporte TALIS 2008 “Creating

Effective Teaching and Learning Environments" de la OCDE un aprendizaje insuficiente de las matemáticas hace que los estudiantes eviten carreras científicas o de ingeniería, afecta su autoestima, les genera ansiedad y afecta su rendimiento en otras materias.

Según Marquès (1999) "los espacios web deben resultar atractivos para sus usuarios, y especialmente los que sean de tipo «material didáctico» a fin de potenciar los aprendizajes, despertando el interés y manteniendo la curiosidad y el interés de los usuarios y dada la edad de estos, el fomento del aprendizaje a través del juego, conlleva un alto potencial de efectividad.

La gamificación incorpora técnicas de la psicología para fomentar el aprendizaje a través del juego, tales como la asignación de puntos y el feedback correctivo. Karl. M. Kapp (2012) Gabe Zichermann y Christopher Cunningham (2011), citados por Díaz y Troyano (2013) indican que a través del uso de ciertos elementos presentes en los juegos (como insignias, puntos, niveles, barras, avatar, etc.) los jugadores incrementan su tiempo en el juego, así como su predisposición psicológica a seguir en él.

La organización de los contenidos, el acceso a herramientas de comunicación (chat, foros, inbox) y la atractiva interface gráfica de una plataforma educativa, constituyen el mejor soporte para la mayoría de las actividades formativas que pueden realizarse en la red.

■ Sofía XT

El equipo de trabajo de Sofía XT conforma un centro de investigación con presencia en México desde hace cuatro años, ofreciendo una plataforma virtual con herramientas para incrementar el nivel de aprendizaje matemático de los alumnos de educación primaria.

El objetivo principal es influir positivamente para elevar el nivel académico y lograr un cambio estructural en el futuro de la sociedad latinoamericana a través de aplicaciones que brinden a nuestra infancia conocimientos y habilidades sólidas en matemáticas. Además, se busca ser un referente en servicios en línea para la asistencia y aprendizaje autodidacta de las matemáticas con un enfoque propositivo, participativo, divertido y social y ha sido diseñada para construir un ecosistema educativo centrado en el estudiante.

A la plataforma se puede acceder contando con un dispositivo electrónico con acceso a internet, por URL del sitio sofiaxt.com o www.sofiaxt.com. En la figura 1 se muestra la página de ingreso a la plataforma, la cual cuenta con un diseño atractivo que considera dos aspectos básicos: el didáctico (resolución de ejercicios, tareas del libro de texto y retroalimentación) y el social (muro, chat y avatar).

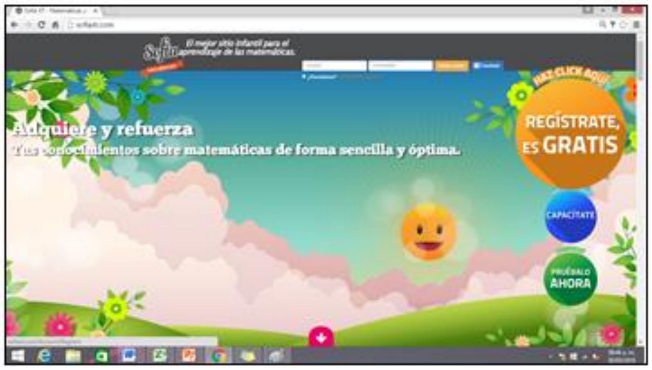


Figura 1. Página de ingreso a la plataforma Sofía XT

La plataforma le permite al profesor practicar con los alumnos, asignar actividades comunes y especiales para estudiantes rezagados, sin la sobre carga de trabajo que usualmente inhibe esta actividad, pues Sofía XT le presenta un reporte detallado de tareas calificadas automáticamente, con registro comentado de procesos.

Los padres de familia, igual que el maestro, pueden asignar tareas, del libro de texto oficial SEP o del catálogo Sofía XT. Esta es una herramienta que ha sido muy apreciada por padres de familia, principalmente, interesados en motivar más a sus hijos.

Al estudiante la plataforma le permite realizar sus tareas o práctica en un ambiente interactivo, atractivo visualmente. La plataforma evalúa además su estilo de aprendizaje, perfil de autoestima y ambiente escolar. El avatar altamente personalizable por el estudiante, las dinámicas de juego, las herramientas para medir ángulos, analizar figuras geométricas en 3D y lectura de mapas, nos han permitido proveer un ambiente lúdico de aprendizaje altamente efectivo. Provee además un sistema de logros mediante puntos y créditos con los que se premia la actividad del alumno, ofrece además la pertenencia a un grupo con el que tiene comunicación constante a través del chat.

La guía principal de los temas presentados en Sofía XT es el programa oficial de matemáticas de la Secretaría de Educación Pública en México. El análisis de esta referencia ha permitido la inclusión de nuevos temas que se consideran importantes, lo cual ha enriquecido significativamente la propuesta oficial.

1. Nuestros usuarios son alumnos que nacieron en la nueva era tecnológica y algunas de sus características más importantes a tomar en cuenta en el diseño de Sofía XT son: 1. Poseen un modo diferente de aprender, para ellos todo es visual.
2. Se consideran tecnológicamente dependientes, se encuentran enfocados a las tecnologías informáticas.

3. Sus comunicaciones giran en torno a dichas tecnologías.
4. Son impacientes y desean resultados inmediatos, están acostumbrados a tener toda la información en segundos gracias a la tecnología.
5. Su enfoque en las redes sociales les hace vivir creando un entorno virtual.

Tomando en base lo anterior a continuación se muestran diferentes pantallas a las que tienen acceso nuestros usuarios dentro de la plataforma. En la pantalla de inicio (Figura 2) se encuentra el acceso a los tres apartados más importantes: Concepto, Grado y Libros. En el primero se encuentra una lista de temas para practicar, en el segundo los temas están estructurados en relación a los grados y en el tercero se encuentran los libros de texto de la SEP.

Figura 2. Pantalla de inicio de la plataforma Sofía XT

Los ejercicios disponibles corresponden a los diferentes temas que se encuentran en los temarios oficiales, en la Figura 3 se muestran cuatro de los ejercicios dinámicos que se encuentran en la plataforma: uso del transportador (el niño puede mover el transportador para medir el ángulo indicado), conteo (el niño calcula el número de objetos y coloca la respuesta mediante los botones), dinero (el niño selecciona las monedas o billetes necesarios para completar la cantidad señalada) y la división (al niño se le evalúan todos los pasos necesarios para realizar la operación y se le proporciona retroalimentación cuando se detecta un error).

Figura 3. Ejemplos de ejercicios implementados en la plataforma Sofía XT

Además de los ejercicios, el usuario tiene un avatar que lo representa en la plataforma y es posible elegir diferentes tipos de ojos, pelo, boca, ropa o brazos. La práctica de ejercicios le asigna puntos y créditos, con los cuales el usuario puede adquirir accesorios para su avatar, como trajes especiales, espadas o capas. En Sofía XT se encuentran disponibles juegos didácticos mediante los cuales los alumnos practican las operaciones básicas, Figura 4.

Figura 4. Aspectos motivacionales de la plataforma Sofía XT

Las características de Sofía XT mencionadas anteriormente nos han permitido atraer y mantener el interés de los niños, logrando comentarios alentadores por parte de alumnos y maestros que nos motivan a seguir adelante en el desarrollo de la plataforma.

Resultados de la implementación

A partir de la narración de las experiencias de los usuarios con el software, podemos constatar que la plataforma Sofía XT es una herramienta que, mediante la innovación disruptiva en el aula de clases, contribuye al mejoramiento de la labor del docente, de la motivación del alumno y fomenta el incremento del rendimiento académico.

La interface de Sofía en el portal del alumno ofrece al niño un ambiente con un diseño colorido en el que el niño se siente seguro, interactúa con la plataforma mediante esta visualización de imágenes animadas que le van señalando los pasos a seguir, se apropian de un espacio en el que se identifican mediante su nombre y el avatar que ellos mismos han diseñado; esto les da un sentido de identidad y de propiedad: “voy a entrar a mi Sofía”.

A continuación, se muestran algunos de los testimonios más significativos de algunos de los maestros que utilizan la plataforma con sus alumnos:

- *Los alumnos la usan contentos (…) si vamos a hacer matemáticas, es muy diferente la reacción a que si dices: vamos a Sofía (…) los veo divertidos y motivados al realizarlo.*
- *Está muy bien, además de que viene acorde a nuestro contenido ayuda mucho a reforzar a los niños. También los motivó mucho eso del avatar, a mí también me gustó mucho porque los motiva a juntar puntos; lo que nosotros siempre hemos querido que le agarren a modo de juego a las matemáticas. Lo hemos intentado con hojas de colores, con otro tipo de dinámicas, pero no había funcionado, Ahorita lo que pega es la tecnología.*
- *La estructura y diseño de la plataforma la hace interesante, atractiva, lúdica y didáctica para alumnos y docentes.*

En la plataforma se encuentran implementadas encuestas que nos permiten conocer a nuestros usuarios, en la figura 5 se muestran algunos resultados. Se observa que el uso de la plataforma motiva positivamente a los niños (el 58.85% señalan que se sienten contentos), aproximadamente el 64% manifiestan que sí aprendieron y entienden mejor las matemáticas, el 81.82% perciben que sí aprendieron y ahora son mejores en matemáticas y el 93% consideran que Sofía XT les ayudó a entender mejor lo visto en clase.

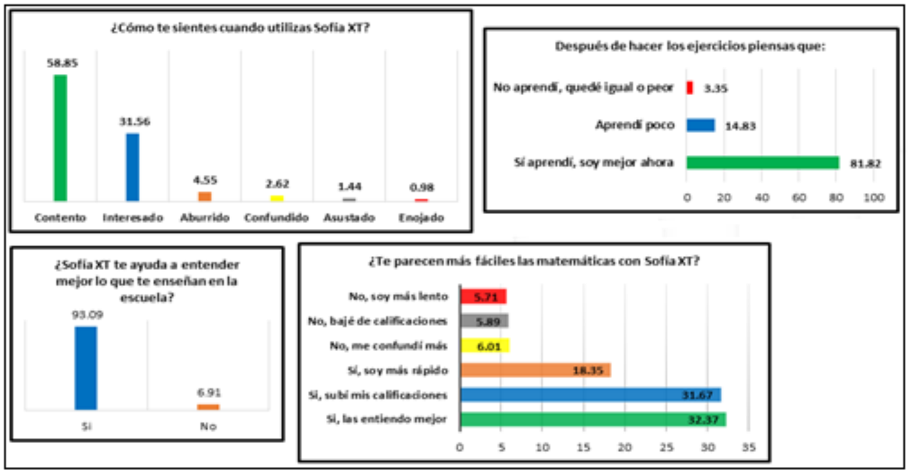


Figura 5. Caracterización de usuarios en la plataforma Sofía XT, resultados en porcentajes

Conclusiones

Nuestra meta operativa principal es reducir la ansiedad ante las matemáticas en el niño y los resultados preliminares nos señalan que las actividades que los niños realizan en la plataforma inducen actitudes positivas hacia esta materia. De hecho, contamos con niños introvertidos en el salón de clases, temerosos de participar en el aula que han visto en Sofía XT un espacio libre y donde su autoestima ha crecido al punto de reflejarse en cambios dentro de la misma aula, según entrevistas con maestros. Estos resultados nos motivan a seguir creciendo y mejorando la oferta de aprendizaje, tenemos mucho trabajo por delante.

Referencias bibliográficas

Begoña, Gros e Ingrid Noguera. (2013). Mirando el futuro: Evolución de las tendencias tecnopedagógicas en educación. *Campos Virtuales, 2*(2). Barcelona, España: Revista Científica de Tecnología Educativa.

Castillo, S. (2008). Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *11*(2), 171-194.

Clayton M. Christensen, Michael B. Horn, y Curtis W. Johnson. (2008). *Disrupting class*: How disruptive innovation will change the way the world learns. McGraw-Hill.

Díaz Cruzado, J., & Troyano Rodríguez, Y. (2013). El potencial de la gamificación aplicado al ámbito educativo. *Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Sevilla. Disponible en:*

https://fcce. us. es/sites/default/files/docencia/EL% 20POTEN CIAL% 20DE% 20LA% 20GAMIFICACI% C3% 93N% 20APL ICADO% 20AL, *20*, C3.

Gros Salvat, B (2000). *El ordenador invisible*. Hacia la apropiación del ordenador en la enseñanza. Cap. 1, Barcelona, España, Gedisa

Maita Guedez, M. (2005). El aprendizaje de funciones reales con el uso de un software educativo: una experiencia didáctica con estudiantes de educación de la ULA-Táchira. *Acción Pedagógica1, 4*(1), 38-49.

Kalaš, Ivan. (2010). *Recognizing the potential of ICT in early childhood education*. Analytical survey. UNESCO Institute for Information Technologies in Education.

Levinson, Stephen C. (2013). Recursion in pragmatics. *Language, 89*(1), 149-162.

Marquès Graells, P. (1999). Criterios para la clasificación y evaluación de espacios web de interés educativo. *Educar*, (25), 095-111.

Navarro, R. E. (2010). Entornos virtuales de aprendizaje. La contribución de “lo virtual” en la educación. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 15*.

Rama, C. (2012). *La reforma de la virtualización de la universidad*. El nacimiento de la educación digital. Universidad de Guadalajara Sistema de Universidad Virtual. México

Rodríguez, S. V., Gutiérrez, C. O., & Varela, O. A. (2015). Desarrollo y evaluación de un material didáctico multimedia para facilitar el aprendizaje de matemáticas. *Revista Facultad de Ciencias Básicas*, *11*(1).

Siemens, G. (2005). *Connectivism: A learning Theory for the digital age.* http://er.dut.ac.za/bitstream/handle/123456789/69/Siemens_2005_Connectivism_Alearning_theory_for_the_digital_age.pdf?sequence=1&isAllowed=y

AUTOAPRENDIZAJE DEL MODELO LINEAL EN UN AMBIENTE VIRTUAL

Lizzeth Aurora Navarro Ibarra, Omar Cuevas Salazar, Jaime Martínez Castillo
Instituto Tecnológico de Sonora (México), Instituto Tecnológico de Sonora (México), Universidad Veracruzana (México)
Lizzeth.Navarro@gmail.com, omar.cuevas@itson.edu.mx, jaimartinez@uv.mx

RESUMEN: Este trabajo expone la primera etapa en el diseño de un ambiente virtual para el tema de ecuaciones lineales de la asignatura Cálculo I para ingeniería. La investigación consiste en una propuesta didáctica con la construcción de recursos educativos digitales específicos que involucren texto, imágenes, video, audio, interacción y simulaciones, los cuales se colocarán en una página Web. Los programas informáticos utilizados son GeoGebra, Active Presenter, Wix y Google forms.

Palabras clave: modelo lineal, autoaprendizaje, tecnología

ABSTRACT: This paper describes the first stage of a virtual environment design for the topic of lineal equations in the subject Calculus I, for engineering. The research consists of a didactic proposal by using specific education digital aids, such as books, images, videos, audio materials, interactions and simulations, all of which will be included in a Web page. The computing programs used were: GeoGebra, Active Presenter, Wix, and Google Forms.

Key words: lineal model, self-learning, technology

Antecedentes

La tecnología tiene múltiples retos dentro de la educación, pero para lograrlos se debe comprender que no se trata de cambiar sino de la evolución de las formas de concebir, planear, implementar y evaluar las acciones educativas ya que no basta con disponer de recursos tecnológicos de punta, sino de formar usuarios y consumidores de tecnología según Edel-Navarro (2010). La finalidad es lograr mayor calidad utilizando estrategias didácticas que mejor respondan a las características del usuario, al conocimiento que queremos transmitir, a la organización y al contexto de la región, empleando herramientas de software que faciliten la interacción y las estructuras de información y conocimiento (Salinas, 2012).

La mediación didáctica que incluya a las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) beneficia el proceso de fijación de conceptos matemáticos según Zaldívar, Cruz y Gamboa (2015) al consolidar lo aprendido, demostrando solidez y durabilidad de los aprendizajes adquiridos. Además, para Díaz-Barriga (2013) el ambiente de aprendizaje en matemáticas debería integrar un conjunto de secuencias didácticas basadas en actividades significativas para el estudiante, que involucren temas, problemas o aspectos de la realidad que lo rodean, de tal manera que pueda articular el contenido que se va a trabajar con sus experiencias y conocimientos previos.

A su vez, Duval (1993) afirma que la habilidad para cambiar de registro cualquier idea u objeto matemático es fundamental para el aprendizaje. Es por ello que el objetivo de esta investigación es diseñar un ambiente virtual para el autoaprendizaje con comprensión del modelo lineal a nivel superior donde el alumno pueda a través de distintos medios interactuar con las situaciones problema en distintas representaciones matemáticas.

El estudio presenta el desarrollo de los recursos digitales que incluyen la manipulación y visualización de las variables. Además, se expone la estructura de la página Web y la navegación entre los diferentes elementos que la integran.

La perspectiva teórica en que se fundamenta el estudio es la propuesta de Duval (1993) que afirma que el acto cognitivo de la aprehensión conceptual de un objeto es inseparable de sus representaciones, sin confundirlo con ellas. De esta forma, la coordinación de registros favorece la comprensión y a su vez las transferencias y aprendizajes posteriores. A su vez, la expresión matemática debe ser identificable, permitir su transformación y conversión.

Además, en las matemáticas según Pape (2005) el aprendizaje autorregulado o autoaprendizaje permite a los estudiantes planear, guiar y evaluar sus procesos de razonamiento ante una situación problema, de forma que puedan profundizar en ella y resolverla de forma correcta. Así mismo, la planeación organizada de actividades con el objetivo de alcanzar una meta es prioritario en el área de las matemáticas y en la resolución de problemas (Pape & Wang, 2003).

Método

La investigación consiste en una propuesta didáctica con recursos educativos digitales para el aprendizaje del modelo lineal empleando la teoría de Duval (1993) y los elementos del autoaprendizaje (Pape, 2005). En la asignatura Cálculo I en el Instituto Tecnológico de Sonora los primeros dos temas del curso corresponden al modelo lineal y al cálculo del valor aproximado del cambio acumulado que hace uso de la linealidad por intervalos. Estos temas conformarán el estudio del modelo lineal para este trabajo, basándose en el libro de texto de Salinas et al, (2012). La población a la que se dirige la investigación son estudiantes universitarios de las licenciaturas de ingeniería.

La estructuración del espacio educativo se integró considerando las recomendaciones de Cabero et al, (2014), en el cual se describen los aspectos generales que debe cubrir una asignatura virtual, así como el abordaje de los temas e interacción de docentes y alumnos. De igual forma, específica como desarrollar las e-actividades por parte del docente y la estrategia de presentación ante los estudiantes.

Los recursos didácticos se desarrollaron en diferentes tipos de software dependiendo de la finalidad de la actividad. Los programas informáticos utilizados son GeoGebra, Active Presenter, Wix y Google forms, que tienen la característica de estar disponibles de forma gratuita en la red. En cada tema se elaboraron aplicaciones digitales específicas que se integraron en una página Web de acuerdo a una estructura que facilite el autoaprendizaje.

Resultados

La página Web que aloja el ambiente virtual de aprendizaje es Wix, que es una plataforma para la creación de sitios Web gratis. Además, no requiere conocimientos técnicos y es compatible con los motores de búsqueda. El sitio se diseñó sin utilizar plantillas. A su vez, la plataforma permite desplazarse por los contenidos por medio de un menú en la parte superior y de botones que proporcionan las opciones recomendadas al alumno.

El ambiente contiene apartados donde se le proporciona información al estudiante o actividades con las cuales pueden interactuar y recibir retroalimentación inmediata según sus acciones. La estructura de la página Web está integrada por una introducción general, mapa de actividades, introducción del tema y objetivo, lecciones de aprendizaje y autoevaluaciones para cada lección.

De igual forma, se presenta un resumen del tema, mapa conceptual, bibliografía básica y de consulta. Además, se adiciona una sección denominada “para saber más” donde se sugieren videos de YouTube con aportaciones sobre la temática en estudio.

Las tareas y evaluaciones de los temas también se contemplan en secciones diferentes. Igualmente, se dispuso de un apartado para comunicación entre el estudiante y el docente, por medio de mensajes y avisos.

La página de inicio presenta el tema en estudio y la competencia a la que contribuye el curso. La información se expuso a través de un texto y de un avatar que por medio de la voz y gestos comunica el mensaje. También, se hace mención del libro en el cual se basan los temas desarrollados, el cual corresponde al texto guía para los alumnos y docentes en las clases presenciales de Cálculo I (ver figura 1).

Figura 1. Página de inicio del ambiente virtual de aprendizaje

En cada tema se inicia con un espacio donde se describen los conceptos a abordar y el objetivo específico. De igual forma, se dan indicaciones y recomendaciones al estudiante para que conozca cómo está integrado el ambiente virtual y se le motiva a emplear las herramientas de comunicación ante cualquier duda.

Las lecciones son las explicaciones de los problemas de situaciones de la vida cotidiana que hace el profesor. El tema I, modelo lineal, está integrado de cuatro lecciones y sus respectivas autoevaluaciones, mientras que en el tema II, cálculo de valor aproximado del cambio acumulado, está conformado por tres lecciones. Cada lección se elaboró en Power Point con imágenes, texto, animaciones y audio. El texto y la voz van narrando y exponiendo paso a paso el problema planteado con sus diferentes interrogantes. Posteriormente, se grabó el archivo como un video de windows media (*.wmv) y se publicó en YouTube. Una vez agregado el video en la plataforma YouTube se procedió a incrustarlo dentro del ambiente virtual. Las lecciones en video se despliegan dentro de la misma página Web, es decir, no se abre otra pestaña.

Adicionalmente, antes de iniciar con el video de la lección, se proporciona al alumno un estimado del tiempo que le llevaría estudiarla y realizar la autoevaluación de la misma. La cantidad de tiempo que se indica considera que el estudiante puede detener los videos de las lecciones y regresarse a ver algún punto en específico. De igual forma, en las autoevaluaciones, el usuario puede devolverse y repetir el ejercicio según considere necesario para obtener la comprensión del concepto. En la figura 2 se muestra la pantalla de la lección 1 del tema I que aborda el problema de un automóvil desplazándose con una velocidad constante en una carretera recta.

Figura 2. Lección 1 del tema I, problema de un automóvil desplazándose a una velocidad constante

Las autoevaluaciones se diseñaron para cada lección y es donde el alumno puede practicar lo estudiado. Debido a la diferencia de los temas I y II, se desarrollaron las actividades de autoevaluación con distinto software. En todas las autoevaluaciones el estudiante interactúa con la aplicación y recibe un resultado inmediato. El usuario puede evaluar su respuesta e intentarlo de nuevo o solicitar una explicación con el cálculo correcto en su caso.

En el tema I las autoevaluaciones se construyeron con el software matemático GeoGebra, el cual tiene la característica de ser dinámico y de código abierto. Las actividades se integraron con texto, imágenes, casillas de captura y botones para ejecutar acciones. La interactividad con la aplicación y la retroalimentación inmediata se realizó empleando botones y las capas en las que se ubican los objetos.

En la figura 3 se expone la autoevaluación de la lección 1 del tema I. En esta pantalla se aprecia el planteamiento del problema y la pregunta del inciso b, donde el alumno responde capturando el valor estimado en una casilla. Al ingresar el valor y presionar la tecla "Enter", se genera el mensaje "¡Inténtalo de nuevo!" en caso de estar incorrecto y "¡Es correcto" si es acertado. También, se tiene el botón "Solución" que al momento de accionar por medio del botón izquierdo del ratón, se muestra la respuesta a la pregunta. El desplegado que expone el botón "Solución" incluye una explicación detallada y las operaciones necesarias para obtener el valor buscado.

Al finalizar la autoevaluación se le solicita al estudiante continuar con la siguiente lección, en este caso sería la lección 2, por ello se aprecia el botón que liga a esa lección. Sin embargo, el alumno puede elegir el icono de la "casa" para ir al mapa de actividades y desplazarse a través de él o por medio del menú horizontal.

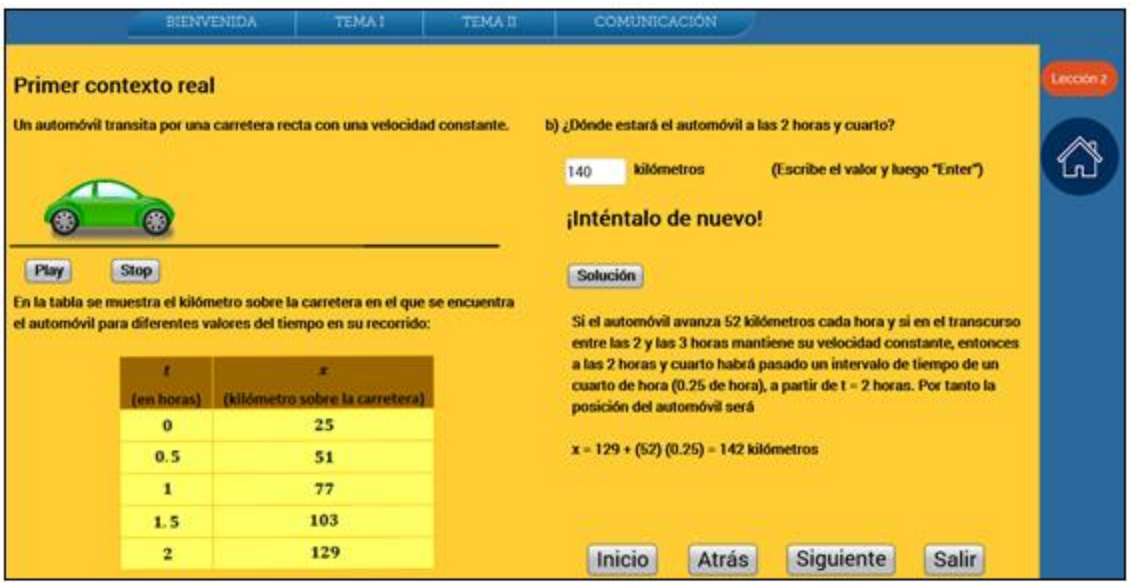


Figura 3. Autoevaluación primer contexto real del terma I

En la autoevaluación para la cuarta lección del tema I se agregó la interacción con la vista gráfica. Esta lección corresponde al contexto formal donde se expone la función lineal. La representación gráfica del modelo lineal para cada uno de los contextos reales proporciona al estudiante la opción de manipular los parámetros. El alumno puede desplazarse a través de la línea recta y observar las coordenadas de cada punto así como la razón de cambio constante. Al finalizar la actividad el usuario construye una función lineal mostrándose de forma simultanea su representación gráfica, la ordenada al origen y la pendiente de la recta (figura 4).

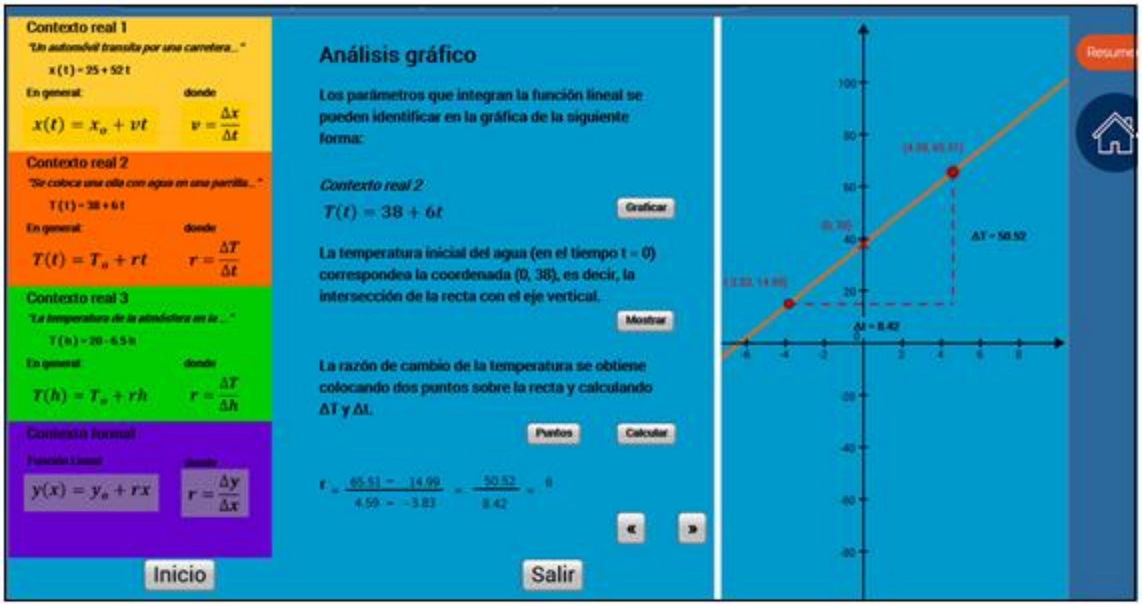


Figura 4. Autoevaluación contexto formal (función lineal) del tema I

La programación empleada para las casillas de entrada y los botones es el guion script de GeoGebra. Las actividades de autoevaluación se grabaron como archivos de GeoGebra (*.ggb) y después se compartieron en GeoGebra Tube con la opción de recurso privado. Esto permite que se genere el código para incrustar la actividad dentro del ambiente virtual. Las autoevaluaciones se despliegan dentro de la misma página Web sin abrir otra pestaña en el navegador.

En el tema II las autoevaluaciones se desarrollaron con el software Active Presenter cuya finalidad es crear tutoriales. La herramienta para la grabación de movimientos en pantalla facilita la edición y selección de secuencias que explicarán con detalle los puntos de interés. A su vez, se puede agregar audio en cada lámina por separado para explicar lo visto en pantalla. Esta aplicación también permite crear evaluaciones con casillas de entrada, selección de respuesta en opción múltiple, entre otras. La retroalimentación es inmediata y se puede estructurar con imágenes, cálculos matemáticos, además del texto.

En el Active Presentar el desplazamiento entre láminas o secuencias se puede hacer por tiempo o con botones que se programan para ejecutar una acción determinada. En los apartados de evaluación se puede establecer que el estudiante conteste la pregunta antes de poder avanzar a la siguiente sección, y para ello se muestra un letrero que le indica ésta acción. Las autoevaluaciones construidas con este software se guardan como archivos de Active Presenter (*.approj) y una vez concluida la edición se genera el archivo en Flash (*.swf). La página Wix permite insertar los archivos Flash y ejecutarse en la misma pestaña. Las actividades una vez en formato Flash se pueden detener, avanzar y retroceder al igual que un video.

El apartado de resumen presenta una sinopsis del tema y se encuentra al finalizar las autoevaluaciones. De igual forma, dentro del texto se recomienda revisar el mapa conceptual, las secciones de bibliografía y para saber más, antes de iniciar con la tarea. En la sección de bibliografía se enlista la bibliografía básica y la de consulta que forman parte del programa analítico de la asignatura Cálculo I.

Los libros indicados son los que tienen a su alcance los estudiantes dentro de la biblioteca de la universidad. La revisión de los videos del apartado “Para saber más” por parte del estudiante permitirá que se involucren en otros problemas de contexto, la formalización matemática y ampliar los conocimientos sobre el uso del recurso tecnológico empleado en el tema II.

El mapa conceptual se muestra al ingresar por medio de un botón dentro del resumen o por medio del mapa de actividades. La finalidad del mapa conceptual es integrar de forma visual los objetos matemáticos que se estudiaron en el tema y que el estudiante pueda reafirmar los conceptos clave.

En cada tema se elaboró una asignación con problemas similares a los estudiados en las lecciones. En el apartado, denominado “Tarea”, se describe el procedimiento a seguir para resolver los problemas y entregar las respuestas. En esta sección se adjuntó un archivo en PDF con el listado de problemas a solucionar, el cual se aconseja descargar y hacer los cálculos necesarios en cuaderno. Posteriormente, cuando ya se tengan los problemas terminados, se acciona el icono de “lápiz”, en este mismo apartado, para entregar la tarea.

La entrega de las tareas se diseñó tratando de facilitar el procedimiento para los estudiantes y además buscando una revisión y retroalimentación inmediata. La herramienta que se utilizó fue el formulario de Google enlazado con una hoja electrónica en Google Drive. También, se requirió instalar un complemento llamado Easy Quiz para enviar de forma automática la calificación y retroalimentación a cada uno de los alumnos.

Al accionar el icono de “lápiz” para entregar la tarea, se abre otra pestaña donde se solicitan datos de identificación al estudiante, como son: correo electrónico, matrícula escolar (ID), apellido paterno, apellido materno y nombre. El correo electrónico que el alumno registre será donde reciba la calificación y explicación detallada de cada uno de los incisos que integran los problemas de la tarea. La evaluación se desarrolló de forma similar a la sección tarea. La única diferencia es que no se tiene la opción de ver previamente los problemas a resolver. En el apartado de evaluación se describe el procedimiento a seguir y se presenta el icono de “lápiz” para empezar la evaluación.

En cuanto a la comunicación se creó una sección para realizarla de forma asincrónica entre docente y estudiantes. En el apartado denominado “Contacto”, el alumno puede enviar mensajes al profesor sobre dudas del tema, de la página o problemas técnicos. De igual forma, se proporciona la dirección de correo electrónico del docente para darle la opción al alumno de enviar mensajes desde su propio correo. También, se tiene un “pizarrón” de avisos, donde se pueden publicar anuncios para informar a todos los usuarios.

■ Reflexiones

El ambiente virtual está completo con todos los elementos que se planearon. Posteriormente, se realizará un piloteo para hacer los ajustes que surjan durante la interacción de los estudiantes con el ambiente virtual. La implementación de la propuesta dentro de un curso de Cálculo I permitirá identificar el nivel de aprendizaje de los alumnos al interactuar con recursos digitales y valorar la pertinencia de extender su aplicación.

■ Referencias bibliográficas

Cabero, J., González, N., Trinidad, A., Ramírez, L., Neris, T., y Fernández, V. (2014). *Manual para el desarrollo de la formación virtual en el Instituto Tecnológico de Santo Domingo*. Libro de Estilo. Santo Domingo, República Dominicana: R. D. INTEC.

Díaz-Barriga, A. (2013). TIC en el trabajo del aula. Impacto en la planeación didáctica. *Revista Iberoamericana de Educación Superior Universia, 4*(10), 3-21.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65. IREM de Strasbourg. Traducción para fines educativos (Hitt F., Ojeda A.). México, DF: Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN.

Edel-Navarro, R. (2010). Entornos virtuales de aprendizaje. La contribución de “lo virtual” en la educación. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 15*(44), 7-15.

Pape, S. J. (2005). Interventions that support future mathematics learning: Developing self-regulated learners in K-12 classrooms. En: S. Wagner (Ed). *Prompt Intervention in Mathematics Education* (pp. 77-97). Ohio, USA: Ohio Resource Center for Mathematics, Science, and Reading and Ohio Department of Education.

Pape S. J. y Wang, C. (2003). Middle school children’s strategic behavior: Classification and relation to academic achievement and mathematical problem solving. *Instructional Science, 31*(6), 419-449.

Salinas, J. (2012). La investigación ante los desafíos de los escenarios de aprendizaje futuros. *RED Revista de Educación a Distancia, 32*(1), 1-23.

Salinas, P., Alanís, J., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J. y Garza, J. (2012). *Cálculo Aplicado. Competencias matemáticas a través de contextos. Tomo I*. México, DF: Cengage Learning Editores.

Zaldívar, L., Cruz, Y. y Gamboa, M. (2015). Mediación didáctica contextualizada de las tecnologías de la información y la comunicación pasa la fijación de los conceptos matemáticos. *Revista Didasc@lia: Didáctica y Educación, 6*(1), 49-68.

GRAFICACIÓN Y VISUALIZACIÓN CON EL USO DE TECNOLOGÍA PARA LA SIGNIFICACIÓN DEL CÁLCULO

Jesús Eduardo Hinojos Ramos, Diana del Carmen Torres Corrales, Rafael Antonio Arana Pedraza
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México). Instituto Tecnológico de Sonora. (México)
jesus.hinojos@cinvestav.mx; diana.torres@cinvestav.mx, rafael.arana@itson.edu.mx

RESUMEN: Este taller busca mostrar que las acciones de interpretar, decodificar, relacionar y vincular, son necesarias en el desarrollo de la habilidad de visualización para el Cálculo Diferencial, como fuentes que propician la construcción social del conocimiento del cambio y la variación. Concretamente en ambientes tecnológicos, la graficación funge como una práctica que permite predecir el comportamiento de funciones. Las actividades se separan en dos momentos, el uso de applets de GeoGebra y el uso de la calculadora ClassPad fx-CP400 para llevar a cabo trabajos de resolución y resignificación de problemas de optimización por métodos gráficos. De esta manera se pretende comprobar que las gráficas obtenidas con GeoGebra y las opciones de la calculadora son congruentes entre sí y pueden utilizarse de manera complementaria para propiciar la construcción social del conocimiento.

Palabras clave: visualización, cálculo diferencial, tecnología

ABSTRACT: This workshop seeks to show that the actions of interpreting, decoding, relating and linking are necessary to develop the visualization skill for Differential Calculus as sources that lead to the social construction of knowledge, change and variation. Particularly, in technological contexts, graphing is used as a practice that allows predicting the behavior of functions. The activities are divided into two moments: the use of the GeoGebra applets and the use of CassPadfx-CP400 calculator to carry out actions for solving and reinterpreting optimization problems, by using graphic methods. Therefore, the research attempts to demonstrated that the graphs obtained by GeoGebra and the calculator options are congruent with each other and they can be used in a complementary way to foster the social construction of knowledge.

Key words: visualization, differential calculus, technology

Introducción

El discurso Matemático Escolar (dME) del Cálculo Diferencial presenta una fuerte inclinación hacia el trabajo algebraico, lo que deja de lado elementos de graficación y visualización para el análisis y resolución de problemas. La situación descrita conlleva a una pérdida de elementos que ayudan a significar sustancialmente la matemática, ejemplo claro lo son las dificultades que tienen los estudiantes del nivel medio superior que transitan al nivel superior en ingeniería. Por tanto, se plantea un espacio que permita el desarrollo de elementos de graficación y visualización para la significación del Cálculo Diferencial con el uso de tecnología como facilitador.

El presente trabajo se centra principalmente en dos apartados como fundamentación: la graficación desde el punto de vista de Suárez (2014) y la visualización desde la postura de Acuña (2012), así como la base en el modelo de anidación de prácticas de Cantoral (2013) para definir acciones, actividades y prácticas desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa.

Graficación

La graficación es de especial interés para el estudio de las funciones, porque su uso en el sistema escolar se justifica por la necesidad de vincular las distintas representaciones de un objeto matemático, en particular la correspondencia existente entre las gráficas y las expresiones algebraicas, cuyo uso permite la significación de los conceptos del Cálculo Diferencial: cambio y variación (Leinhardt, Stein y Zaslavsky, 1990).

El uso de las gráficas tiene un desarrollo que sustenta una construcción del conocimiento matemático, en especial por el interés que se tiene en la línea de investigación sobre el Cálculo (Suárez, 2014).

La construcción del conocimiento matemático en Cálculo, según Cordero (2001) debe estar articulada en la modelación y uso de la matemática, es decir, con el uso de herramientas que resultan de la actividad humana.

En el caso de la graficación, Suárez (2014) identifica tres formas en las que ésta se da en ambientes escolares:

- La construcción de gráficas utilizando la relación existente entre dos variables de una ecuación (utilizar tablas de valores como parejas de puntos que se ubican en un plano cartesiano).
- La graficación a través de operaciones gráficas (aplicar transformaciones a una gráfica base a partir de la modificación de ciertos parámetros en la ecuación).
- El uso de la graficación por medio de simulaciones utilizando tecnología.

Visualización

Acuña (2012) explica que la visualización es una habilidad cuya función es construir significados, como un mediador entre lo que se ve y se aprende, lo cual indica que se trata de un proceso que no se restringe a simplemente mirar y captar información, sino que debe articular lo que se ve y se sabe.

En las matemáticas, el llamado proceso de visualización involucra: (1) un sujeto que mira y (2) un objeto que es visto; pero en matemáticas, el objeto no se *ve* directamente, sino a una representación suya que es un signo que el sujeto tiene próximo a él; la actividad de visualizar requiere la construcción de un espacio de referencia, en la que las representaciones de los objetos matemáticos son interrelacionadas (Acuña, 2012).

Lo anterior se sustenta en la teoría de Representaciones Semióticas de Duval, que nos dice que un objeto matemático es un ente abstracto al cual se puede acceder mediante alguna de sus múltiples representaciones, pero sin olvidar que la representación no es el objeto en sí.

Cabe aclarar que, en Matemática Educativa, desde que los recursos computacionales son accesibles a la comunidad en general, la mayoría de los trabajos referentes a visualización incorporan el uso de recursos tecnológicos, como un agente que propicia actividades cognitivas de orden superior.

Objetivo del taller

Nuestro propósito en este taller, es que el espacio de referencia para llevar a cabo la actividad de la visualización sea la graficación, con el apoyo de recursos tecnológicos para la significación del cambio y la variación en el Cálculo Diferencial.

Fundamentos teóricos

Se plantea este taller desde la Teoría Socioepistemológica con el uso del modelo de prácticas anidadas de Cantoral (2013), en el cual se pretende reconocer lo siguiente:

La existencia de *acciones* (interpretar, decodificar, relacionar y vincular, que menciona Acuña (2012)), para llevar a cabo la *actividad* de la visualización a través de la *práctica* de la predicción del comportamiento gráfico de las funciones, tomando como *práctica de referencia* la graficación presente en el Cálculo Diferencial (Suárez, 2014), normada a través de la *práctica social* del Prædiciere de Cantoral (2013).

Lo anterior se muestra en la figura 1, donde se ilustra el modelo de prácticas anidadas y su correspondencia con lo pretendido en el desarrollo del taller:

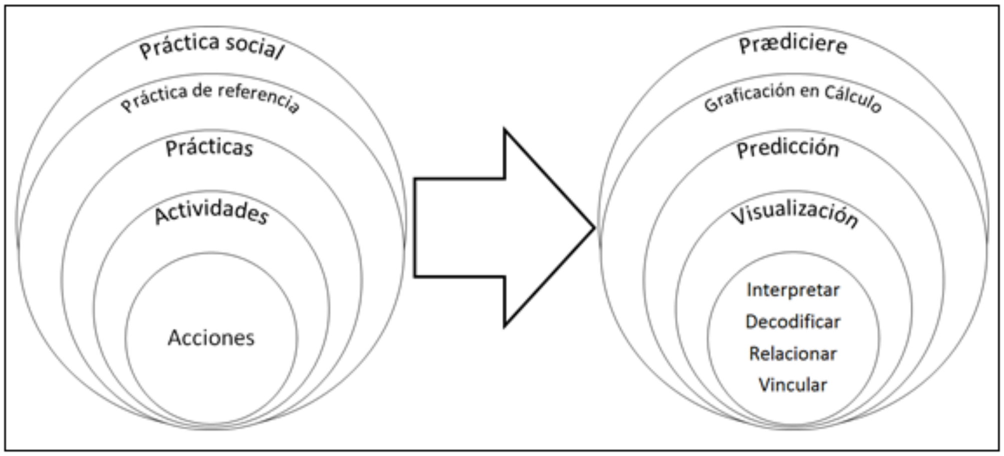


Figura 1. Modelo de prácticas anidadas para el taller de visualización y graficación

Actividades del taller

Este taller se dirige a estudiantes y profesores de los niveles medio superior y superior interesados en el Cálculo Diferencial. En el cual se analizará el cambio y la variación con el uso de recursos tecnológicos: la calculadora ClassPad fx-CP400 y GeoGebra.

En el primer momento se realizará la construcción de un *applet* de GeoGebra que permita visualizar de manera dinámica, la relación existente entre la recta tangente de una función y la construcción de la derivada de la función a través del movimiento de dicha tangente.

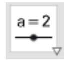
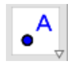
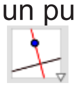
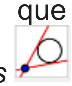
En el segundo momento se utilizará la calculadora ClassPad fx-CP400, a través de las herramientas de cálculo simbólico (CAS) para determinar la derivada de una función y evaluarla en distintos puntos, con la posibilidad de graficarla; de ésta manera se pretende comprobar que su gráfica obtenida con el uso de GeoGebra y las opciones de la calculadora son congruentes entre sí y que ambas herramientas pueden utilizarse de manera complementaria para desarrollar el pensamiento matemático y propiciar la construcción social del conocimiento.

Extracto del material del taller

Para GeoGebra 5.0

En esta guía se elaborará un Applet por medio del cual se pretende profundizar en el concepto de la derivada como el valor de la pendiente de la recta tangente a un punto en una función.

1. Abra el programa GeoGebra.
2. En la parte inferior de la pantalla, ubique la *Barra de Entrada* y en ella escriba: f(x)=x.

3. Ubique la herramienta *Deslizador*  y de clic sobre el triángulo que se ubica en la esquina inferior derecha del mismo (deberá iluminarse de color rojo al pasar el mouse sobre él), seleccione la herramienta *Casilla de Entrada* y de clic sobre la *Vista Gráfica*.
4. Al dar clic sobre la *Vista Gráfica*, se mostrará una ventana emergente; en Título escriba f(x)= y en la lista de Objeto Vinculado seleccione la función f(x)=x, una vez hecho esto, presione **Ok**.
5. Lo hecho anteriormente nos permite cambiar la función que estemos utilizando por cualquier otra, pruebe escribiendo en ella x^3+2.
6. Ubique la herramienta *Punto* , selecciónela y de clic sobre la función f(x) en la *Vista Gráfica*, sobre ella deberá visualizarse un punto (llamado ***A***) de color azul claro.
7. Ubique la herramienta *Perpendicular*  y de clic sobre el triángulo que se ubica en la esquina inferior derecha del mismo, seleccione la herramienta *Tangentes* , con ella de clic sobre el punto ***A*** y posteriormente sobre la función f(x), de esta forma se insertará la recta tangente a la función ***f(x)*** en el punto ***A***.
8. Ubique la herramienta *Ángulo* , de clic sobre el triángulo que se ubica en la esquina inferior derecha del mismo, seleccione la herramienta *Pendiente* , de clic sobre la recta tangente, deberá aparecer un triángulo rectángulo sobre la recta con una letra m indicando el valor de la pendiente de la recta tangente (figura 4).
9. En la *Barra de Entrada*, escriba lo siguiente (x(A),m), esto generará un punto llamado ***B*** en color negro, cuyas coordenadas son x=coordenada x del punto A y y=m, pendiente de la recta tangente.
10. Presione la tecla ***Esc*** en su teclado, después de clic sobre el punto ***A*** y arrástrelo, para observar los movimientos de la recta tangente sobre la función, cuando pueda visualizar en pantalla el punto ***B***, de clic derecho sobre él y seleccione la opción *Rastro*, esto permitirá al punto *pintar* su recorrido sobre la *Vista Gráfica*, pruébelo moviendo el punto ***A*** sobre la función para pintar el recorrido de ***B***.
11. En la *Barra de Entrada*, escriba Derivada[f], compruebe que todo el recorrido del punto ***B***, coincide con la gráfica de la derivada de la función.
12. En la *Vista Algebraica* (parte izquierda de la pantalla de GeoGebra), ubique los puntos de color azul enseguida de cada objeto, de clic sobre los puntos enseguida de f(x), m, A, B y la recta g, esto hará invisibles (ocultará) todos los objetos, de tal manera que sólo se pueda visualizarse la derivada de f(x) en la *Vista Gráfica*.
13. Repita los pasos del 6 al 10 para generar el rastro de la segunda derivada de la función, las diferencias son: Se generará un punto ***C*** sobre la recta, en el paso 9 se escribirá (x(C), m_1), esto generará un punto llamado ***D*** y se activará el rastro del punto ***D***.
14. En la *Barra de Entrada*, escriba Derivada[f,2], compruebe que todo el recorrido del punto B, coincide con la gráfica de la segunda derivada de la función.

La construcción final se puede observar en la figura 2, donde se visualizan tanto la función como sus dos derivadas y los rastros de los puntos, de esta forma puede profundizarse en el concepto de la derivada de una función como el lugar geométrico formado por los valores de la pendiente de la recta tangente a un punto en particular sobre la función.

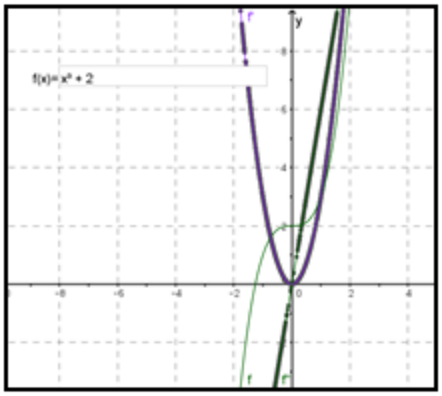


Figura 2. Construcción final

Para la calculadora ClassPad fx-CP400

1. Escriba la siguiente ecuación: 1/2*x^2+3*x+8, una vez que termine presione el botón EXE, en la pantalla deberá aparecer lo que se muestra en la figura 3.

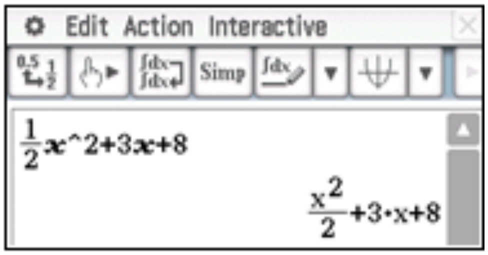


Figura 3. Pantalla de la calculadora ClassPad fx-CP400 con la ecuación escrita

2. Escriba utilizando el teclado el comando: *diff(*.

3. Una vez que haya escrito, utilice el stylus y posiciónelo en la ecuación escrita anteriormente, presione sobre la pantalla y arrastre el stylus, de modo que se seleccione la ecuación (se

subrayará de color azul), arrástrela enseguida del paréntesis que abrió al escribir *diff(*, esto hará que la ecuación se copie y pegue enseguida del comando, cierre el paréntesis y presione ***EXE***, el resultado se muestra en la figura 4.

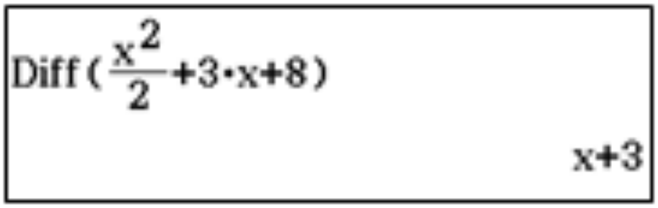


Figura 4. Derivada de la función 1/2*x^2+3*x+8

Nota: *diff(f(x))* es un comando que calcula la derivada de la función escrita en el paréntesis, si el comando se escribe *diff(f,v,n)* donde *f* es la función, *v* la variable respecto a la cual se quiere derivar y *n* es un número natural, devuelve como resultado la *enésima* derivada de la función.

4. Presione en la pantalla el icono , esto abrirá la vista de graficación en la parte inferior de la pantalla, como se muestra en la figura 5.

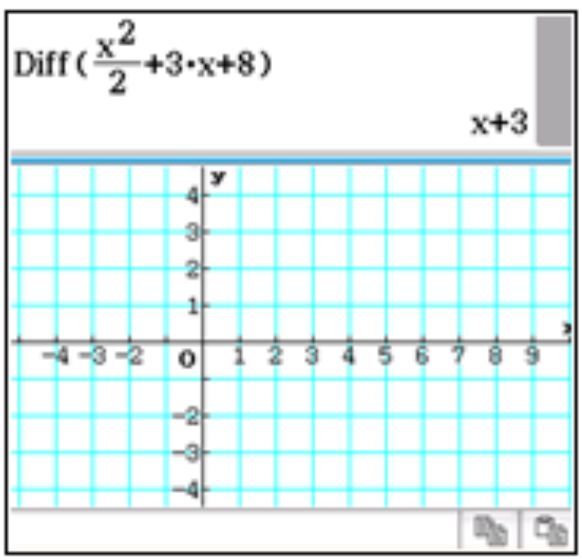


Figura 5. Pantallas Main y Gráfica de la ClassPad fx-CP400

5. Seleccione la ecuación *1/2*x^2+3*x+8* y arrástrela hacia la ventana de graficación, repita este paso, pero seleccionando la derivada de la ecuación, presione con el stylus la pantalla en la parte gráfica y presione el botón Resize, la ventana gráfica deberá mostrarse en su totalidad por la pantalla de la calculadora, como se muestra en la figura 6.

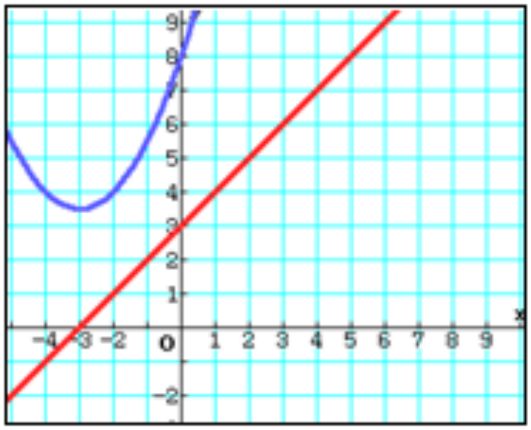


Figura 6. Gráficas en la pantalla de la calculadora

6. Presione sobre la pantalla con el stylus y manteniendo presionado, arrastre para reubicar la gráfica de manera que pueda visualizarla completamente, para una mejor visualización, puede presionar el botón Rotate para ver la pantalla de manera horizontal.
7. Considere que ambas gráficas encontradas corresponden en realidad a la primera y segunda derivadas de una cierta función cúbica.
8. Utilizando los criterios de la primera y segunda derivada, realice un esbozo de la gráfica de la ecuación original (en papel) argumentando la respuesta con base en las gráficas obtenidas con la calculadora.

■ Reflexiones y conclusión

Actualmente la tecnología es un actor que cada vez se encuentra más presente en el aula de matemáticas, la cual en ocasiones se considera solo como una herramienta que permite agilizar el trabajo y en otros casos como un suplente del profesor. Sin embargo, la experiencia nos has mostrado que la tecnología puede ser un agente que permite cambios sustanciales en las formas de significar la Matemática escolar. Por tanto, su uso puede impactar de manera positiva en el desarrollo cognitivo y pragmático (Rojano, 2003).

Referencias bibliográficas

Acuña, C. (2012). *La visualización como forma de ver en matemáticas; un acercamiento a la investigación*. España: Gedisa.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa.* España: Gedisa.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcción del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 4*(2), 103-128.

Leinhardt, G., Stein, M. y Zaslavsky, O. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, *60*(1), 1-64.

Rojano, T. (2003). Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en escuelas públicas de México. *Revista Iberoamericana de Educación*, *33*, 135-165.

Suárez, L. (2014). *Modelación-graficación para la matemática escolar*. México, DF: Díaz de Santos.

REALIMENTACIÓN ASISTIDA POR COMPUTADORA PARA LA CORRECCIÓN DE ERRORES ALGEBRAICOS DE ALUMNOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL

Rebeca Ascencio, Elena Nesterova, Cristina Eccius-Wellmann
Universidad de Guadalajara. (México), Universidad de Guadalajara. (México), Universidad Panamericana Campus Guadalajara. (México)
rebecaascencio@hotmail.com, elena.nesterova@cucei.udg.mx, ceccius@up.edu.mx

RESUMEN: Los alumnos de Cálculo Diferencial presentan deficiencias algebraicas que afectan su desempeño y que no pueden atenderse adecuadamente en clase. El objetivo de este estudio fue evaluar la influencia del empleo de un programa de cómputo, como una actividad extra-clase, sobre el desempeño algebraico de los alumnos. Este programa los realimenta sobre las causas de los errores algebraicos y les permite practicar hasta contestar correctamente. Se contó con un grupo de control, que no utilizó el programa y tres grupos experimentales, que sí lo usaron. Se contrastaron las medias de las diferencias entre el porcentaje de errores algebraicos cometidos en un pretest y un postest en los cuatro grupos. Se concluyó que las medias de los grupos experimentales, fueron significativamente mayores a la del grupo de control, por lo que el programa puede influir positivamente en el desempeño de los alumnos. Además, se recabó la opinión de los mismos acerca de su experiencia al usar el programa, la cual fue positiva.

Palabras clave: errores algebraicos, realimentación por computadora

ABSTRACT: The students of Differential Calculus experience difficulties in Algebra that cannot be properly tackled in class, so they affect the students’ performance. The aim of this study was to evaluate the influence of a computing program, used as an out of class activity, on the students’ performance in Algebra. This program provides them with feedback about the causes of algebraic errors, and allows them to practice until getting the correct answer. The experiment involved four groups; the control group didn´t use the program, while three experimental groups used it. We compared the average of the differences between the algebraic errors obtained in both a pre-test and a post-test, in the four groups. The findings of the current study show that the experimental groups average performances were significantly greater than the control group’s ones. Therefore, the computing program can positively influence on the students’ performance. Besides, when the students were asked about their experience with the use of the program, they expressed positive opinions.

Key words: algebraic errors, computer feedback

Planteamiento del problema

Los alumnos que cursan la materia de Cálculo Diferencial, a nivel universitario, suelen presentar deficiencias algebraicas que afectan su desempeño en dicha materia. Por ejemplo, aplican correctamente una regla de derivación, pero la respuesta final es incorrecta, debido a errores en operaciones algebraicas (Díaz, 2009). Gill y Greenhow (2008) señalan que los estudiantes universitarios provienen de un número cada vez mayor y más variado de instituciones de educación media y media superior, por lo que su nivel de conocimientos y habilidades matemáticas es heterogéneo.

Santa Cruz, Thomsen, Beas, y Rodríguez (2011) observaron clases de matemáticas, preguntaron a los profesores y notaron que las equivocaciones de los alumnos no suelen formar parte de la planificación de la enseñanza, aunque reconocen que siempre ocurren. Lo que suelen hacer los profesores es señalar repetidamente los procedimientos correctos ante los errores que observan, lo cual no es suficiente para erradicarlos (Pochulu, 2005).

Por otro lado, Umbarila (2009) señala la conveniencia de permitir, en la educación superior, mayores espacios académicos extra clase, para que los alumnos aprendan nuevamente los conceptos básicos de la educación media que no recuerdan con precisión. Esto último se manifiesta en las deficiencias observadas en alumnos de reciente ingreso a la universidad.

Puede ser benéfico para los alumnos encontrar una forma de proporcionarles realimentaciones, en una cantidad, calidad, profundidad y oportunidad adecuadas, mediante un programa de cómputo (Gill y Greenhow, 2008).

En esta investigación se propone una estrategia correctiva, que consiste en el empleo de actividades extra-clase mediante un programa de cómputo accesible desde internet, para realimentar a los alumnos sobre las causas de los errores que cometen en procedimientos algebraicos requeridos en la materia de Cálculo Diferencial. Este programa les permite practicar hasta contestar correctamente.

Objetivo

Evaluar la influencia, sobre el desempeño algebraico de los alumnos, del empleo de un programa de cómputo, como una actividad extra-clase, que realimenta al alumno de Cálculo Diferencial sobre las causas de sus errores algebraicos.

Pregunta de investigación

¿Cuál es la influencia del empleo de la estrategia propuesta sobre el porcentaje de errores algebraicos que cometen los alumnos en Cálculo Diferencial?

Marco referencial

Según la Teoría del Aprendizaje Significativo (Ausubel, Novak y Hanesian, 1997), para que un nuevo contenido sea significativo, el alumno debe incorporarlo a los conocimientos que ya posee. Por lo tanto, las bases algebraicas, correctas e incorrectas, juegan un papel importante en la adquisición de contenido significativo de la materia de Cálculo Diferencial.

Por otro lado, Rico (1995) considera que la mayoría de los errores algebraicos que cometen los estudiantes tienen su raíz en estructuras conceptuales profundas, por lo que para que se logre la corrección de los errores, es necesario apartarse de procedimientos algorítmicos para buscar desarrollar estructuras conceptuales correctas, lo cual sería posible si se conocen las causas de los errores algebraicos, mismas que han sido estudiadas por diversos investigadores (Cervantes y Martínez, 2007; Eccius, 2008).

La corrección de la comprensión equivocada requiere una reestructuración mental que el alumno puede llevar a cabo mediante un aprendizaje autorregulado, a través de las actividades de realimentación de la causa de la equivocación, proporcionadas por un programa de cómputo (Santa Cruz, Thomsen, Beas y Rodríguez, 2011).

Hattie y Timperley (2007) sugieren que la realimentación más efectiva proporciona estrategias de entendimiento de los conceptos y procesos y debe ser: inmediata, clara, concreta, intencionada, significativa y personal. Mediante un programa de cómputo con el diseño adecuado, se puede atender, con propósitos remediales, a alumnos que presenten errores algebraicos conceptuales específicos al estudiar Cálculo Diferencial (Sancho, 1996).

Para Meza, Garita y Villalobos (1997) el uso de la computadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas debe enmarcarse en un planeamiento educativo. Su empleo permite diseñar estrategias didácticas que no es posible desarrollar con otros medios. Los mismos autores mencionan que la computadora no resuelve milagrosamente los problemas asociados con la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. La eficiencia de su uso depende de las estrategias implementadas en los programas de cómputo y principalmente, del compromiso de los estudiantes con su aprendizaje.

Se considera, por tanto, que unas actividades realizadas por los alumnos mediante un programa de cómputo, diseñado específicamente para realimentarlos sobre las causas de sus errores algebraicos, puede disminuir el porcentaje de errores algebraicos cometidos por dichos alumnos.

Metodología y descripción del programa usado en la estrategia

La experimentación se llevó a cabo con los alumnos de cuatro grupos de Cálculo Diferencial, de segundo y tercer semestre de las carreras administrativas de la Universidad Panamericana, campus

Guadalajara, en el semestre agosto - diciembre 2015. Tres grupos fueron experimentales (con 50 alumnos en total) y uno fue de control (con 16 alumnos).

La estrategia de realimentación asistida por computadora consistió en emplear actividades extra clase mediante un programa de cómputo accesible desde internet llamado *MathUP*®.

MathUP® fue desarrollado, tanto en su programación como en la captura de la base de datos de ejercicios, en la Universidad Panamericana, campus Guadalajara, en México, por profesores de matemáticas de la Escuela de Ciencias Económicas y Empresariales (incluidas la primera y tercera autora de este documento).

A la fecha de este reporte el programa sólo es accesible para alumnos de la propia institución, aunque se podría replicar parte de su funcionamiento en las plataformas que permiten plantear cuestionarios con respuestas de opción múltiple con realimentación, como *Moodle* ®.

De entre los ejercicios disponibles en *MathUP*® se seleccionaron, para usarse en este estudio, 243 ejercicios algebraicos que inciden en el desempeño de los alumnos en Cálculo Diferencial, con base en la experiencia de los profesores de la universidad sede del estudio y las investigaciones consultadas. Esos ejercicios incluían, en conjunto, más de mil realimentaciones, correspondientes a cada una de las opciones de respuesta, tanto las erróneas como las correctas. Los temas elegidos fueron: leyes de exponentes, productos notables y factorización, simplificación de fracciones algebraicas, solución de ecuaciones lineales, cuadráticas y racionales.

Las actividades mediadas con el programa *MathUP*® presentan secuencias didácticas estructuradas de ejercicios. Cada ejercicio contiene respuestas de opción múltiple de las cuales el alumno elige una. Las opciones incluyen la respuesta correcta, las incorrectas y una que dice “no encuentro mi respuesta”. Las respuestas incorrectas corresponden a los errores más comunes reportados en investigaciones anteriores y en el pretest realizado al inicio de la prueba.

De todos los errores seleccionados como opciones de respuesta se conoce al menos una posible causa. La opción que dice “no encuentro mi respuesta” está diseñada para ser elegida por alumnos que cometen errores poco comunes y de índole individual, o que no conocen la respuesta. En caso de una respuesta errónea, en la pantalla aparece la realimentación sobre la posible causa del error cometido, la forma correcta de responder al ejercicio y, si es posible, un contraejemplo.

Al estudiante se le presenta un nuevo ejercicio generado aleatoriamente con la misma estructura pero con datos cambiados. Cuando contesta correctamente, recibe una reafirmación del procedimiento y un ejemplo de un ejercicio de Cálculo Diferencial en el que se requeriría este conocimiento, para incrementar la transferencia del conocimiento. El alumno puede pasar a un ejercicio nuevo, ya que contesta correctamente el actual.

Para medir el efecto del empleo del programa propuesto, se aplicaron un pretest completamente algebraico, de 20 reactivos, separados en dos partes y dos postest, diseñados para evaluar, específicamente, los procesos algebraicos, dentro de un contexto de Cálculo Diferencial. Por ejemplo, en el pretest se pidió resolver la ecuación $-x^{-2} = 0$, mientras que en el postest se le dio al alumno la función $y = x^{-1}$ y su función derivada $y' = -x^{-2}$ y se le pidió que resolviera la ecuación $-x^{-2} = 0$, para encontrar el valor de x para el cual la función tiene una tangente horizontal.

Así fue posible comparar los resultados. Cada postest constó de 10 reactivos, relacionados con los temas de Cálculo Diferencial correspondientes al avance en el temario de la materia, que evaluaban el mismo proceso algebraico que el reactivo correspondiente del pretest.

A los alumnos se les asignaron actividades con el programa para contestar en casa. Aunque éstas contaban para su calificación, podían decidir no realizarlas. Por lo tanto, se consideraron, para el análisis estadístico, exclusivamente los datos de los alumnos, de los grupos experimentales, que habían realizado 80% o más de las tareas asignadas en el programa y habían contestado ambos test, ya que se evaluaron las diferencias en los porcentajes de error cometidos por cada alumno en ambos test.

Del grupo de control se tomaron los datos de todos los alumnos que contestaron ambos test. Se descartaron los datos de aquellos alumnos que realizaron menos del 80% de las actividades porque se consideró que distorsionarían las mediciones al no haber recibido el tratamiento completo. El porcentaje de uso se obtiene de un reporte que se genera en el propio programa.

Para evaluar cada reactivo se contó con una rúbrica que incluye una lista de los errores más comunes, en la que se contabiliza si implican un solo error o varios errores encadenados. El porcentaje de error de cada alumno se calculó como: número total de errores cometidos entre número máximo posible de errores en el test, ya que una respuesta a un reactivo puede contener más de un error. Para los 20 ítems el número máximo posible de errores era 38. Un reactivo no contestado o con una respuesta no incluida en la lista se contabilizó con el número máximo de errores posibles para dicho reactivo.

Hipótesis estadística

$\bar{X}_{D_i}$: media muestral de las diferencias (*D*) en el porcentaje de errores en los test del grupo *i*. (GE corresponde a grupo experimental y GC corresponde a grupo control)

Hipótesis nula: Las medias muestrales de las diferencias en el porcentaje de errores en los test aplicados antes y después del tratamiento de los grupos no es significativamente diferente: H_0: $\bar{X}_{D_{GE1}} = \bar{X}_{D_{GE2}} = \bar{X}_{D_{GE3}} = \bar{X}_{D_{GC4}}$.

Hipótesis alternativa

Las medias muestrales de las diferencias en el porcentaje de errores en los test aplicados antes y después del tratamiento de los grupos es significativamente diferente para al menos un par de grupos: H_a: $\bar{X}_{D_i} \neq \bar{X}_{D_j}$, para algún $i \neq j$.

Con la prueba de hipótesis se compararon las medias muestrales de las diferencias de los porcentajes de error entre el post y el pretest del grupo de control y los grupos experimentales. Se realizó una prueba ANOVA (previa prueba de igualdad de varianzas de Levene), con una significancia de 0.05 y, como resultó que existen por lo menos un par de medias muestrales estadísticamente distintas, se usa una prueba Duncan para determinar cuáles grupos tienen promedios diferentes.

Resultados

En la tabla 1 se presenta el concentrado de datos de las medias de las diferencias en el porcentaje de error para cada grupo, en cada parte del experimento. En ella puede observarse que las medias de las diferencias en el porcentaje de error en los tres grupos experimentales (GE1, GE2 y GE3) fueron superiores a las del grupo de control (GC4) en ambas partes del experimento, aunque fue necesario hacer el análisis estadístico para saber si la diferencia era significativa.

En los histogramas de la figura 1 se proporciona una comparación gráfica de las medias de las diferencias en el porcentaje de error de los distintos grupos.

Tabla 1. Media de las diferencias en el porcentaje de error por grupo y parte del experimento

Grupo	Parte	Cantidad de Alumnos	% error pretest 1	% error postest 1	Diferencia % post - %pre	% uso
GE1	1	7	39.6	18.8	-20.8	92
GE2	1	9	68.7	31.3	-37.4	94
GE3	1	6	58.4	32.6	-25.8	97
GC4	1	13	61.2	59.8	-1.4	0
GE1	2	5	53.8	21.3	-32.5	100
GE2	2	12	74.0	33.3	-40.6	96
GE3	2	6	79.1	38.5	-40.6	95
GC4	2	14	68.8	64.7	-4.0	0

Nota. GE = Grupo experimental y GC = Grupo control.

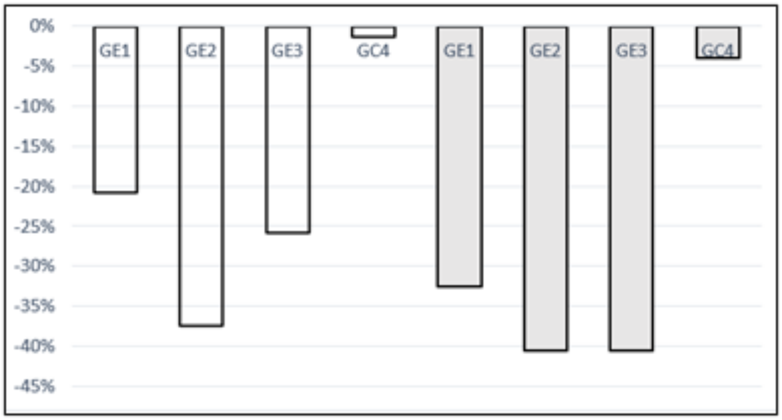


Figura 1. Medias de las diferencias en el porcentaje de error los grupos. Parte 1 en blanco y Parte 2 en gris

Las tablas 2 y 3, para las partes 1 y 2 del experimento, respectivamente, muestran una significancia de 0.000 en la prueba ANOVA, por lo cual se rechaza la igualdad de medias, es decir, se acepta que existe una diferencia significativa en las medias de entre al menos un par de grupos, en ambas partes del experimento.

Tabla 2. Prueba ANOVA de igualdad de medias. Parte 1. Elaboración en IBM SPSS

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Entre grupos	.736	3	.245	15.637	.000
Dentro de grupos	.486	31	.016		
Total	1.222	34			

Tabla 3. Prueba ANOVA de igualdad de medias. Parte 2. Elaboración en IBM SPSS

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Entre grupos	1.082	3	.361	8.009	.000
Dentro de grupos	1.486	33	.045		
Total	2.569	36			

Mediante la prueba Duncan, que genera subconjuntos de grupos cuyas medias son homogéneas, se determina que, en la primera parte del experimento, los grupos 2 y 3 forman un subconjunto homogéneo y los grupos 3 y 1 forman otro. El grupo 4 (control) no forma un subconjunto homogéneo con ninguno de los grupos experimentales (Tabla 4).

Tabla 4. Prueba Duncan (subconjuntos homogéneos). Parte 1. Elaboración en IBM SPSS

	Grupo	N	Subconjunto para alfa = 0.05		
			1	2	3
Duncan	GE2	9	-.37374		
	GE3	6	-.25758	-.25758	
	GE1	7		-.20779	
	GC4	13			-.01399
	Signif,		.072	.432	1.000

Nota. GE = Grupo experimental y GC = Grupo control

Así mismo, en la segunda parte del experimento, los grupos 1, 2 y 3 forman un subconjunto homogéneo. El grupo 4 (control) no forma un subconjunto homogéneo con ninguno de los grupos experimentales (Tabla 5).

Tabla 5. Prueba Duncan (subconjuntos homogéneos). Parte 2. Elaboración en IBM SPSS

	Grupo	N	Subconjunto para alfa = 0.05	
			1	2
Duncan	GE2	12	-.40625	
	GE3	6	-.40625	
	GE1	5	-.32500	
	GC4	14		-.04018
	Signif,		.486	1.000

Nota. GE = Grupo experimental y GC = Grupo control

Al finalizar el experimento, se aplicó una encuesta de opinión sobre la aplicación del programa. El 100% señaló que es atractivo y fácil de usar. Entre el 90 y el 99% consideraron que el lenguaje es comprensible y los contraejemplos les resultaron útiles. Entre el 80 y el 89% mencionaron que sí reflexionaron sobre las causas de sus errores y, también, que les agradó la flexibilidad de horario y lugar para trabajar. Entre el 70 y el 79% prefieren aprender mediante un programa.

Conclusiones

Los resultados estadísticos obtenidos en la investigación permitieron concluir que las medias de las diferencias en el porcentaje de errores algebraicos de los grupos experimentales, fueron significativamente mayores a la del grupo de control. Sólo se consideraron los datos de los alumnos que realizaron al menos 80% de las actividades asignadas en el programa.

Por lo tanto, la estrategia propuesta basada en la realimentación inmediata, clara, concreta, intencionada, significativa y personal de las causas de los errores algebraicos, puede ser un apoyo, tanto para los profesores que imparten la materia de Cálculo Diferencial como para sus alumnos, al incidir en la corrección de errores algebraicos de estos últimos. Dados los resultados positivos observados, se considera conveniente probar, en una investigación posterior, el uso de este programa en otros contextos y materias.

De acuerdo con los resultados de la encuesta, a la mayoría de los alumnos les gustó utilizar el programa, del cual consideran que es atractivo y fácil de usar. El lenguaje les pareció comprensible, así como los contraejemplos, que les resultaron útiles. La percepción de los estudiantes, reflejada en la encuesta, fue que tuvieron oportunidad de reflexionar sobre las causas de sus errores. También señalaron que les agradó la flexibilidad de horario y lugar para trabajar. Más del 70% prefieren aprender mediante este programa.

Referencias bibliográficas

Ausubel, D., Novak J. y Hanesian, H. (1997). *Psicología educativa. Un punto de vista cognitiva.* México, DF: Trillas.

Cervantes, G. y Martínez, R. (2007). Sobre algunos errores comunes en desarrollos algebraicos. *Zona Próxima, 8*, 34-41.

Díaz, J. (2009). Los estudiantes de Cálculo a través de los errores algebraicos, *El Cálculo y su Enseñanza.* México, D.F.: Cinvestav del Instituto Politécnico Nacional, Recuperado de https://www.academia.edu/1570770/Los_estudiantes_de_C%C3%A1lculo_a_trav%C3%A9s_de_los_errores_algebraicos.

Eccius, C. (2008). *Análisis didáctico matemático de los errores en el álgebra escolar. Conocimiento de alumnos y conocimiento profesional de profesores.* Saarbrücken: VDM Verlag Dr. Müller.

Gill, M. & Greenhow, M. (2008). How effective is feedback in Computer-Aided Assessments? *Learning, Media & Technology, 33*(3), 207-220. Recuperado de http://dx.doi.org/10.1080/17439880802324145.

Hattie, J. y Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research, 77*(1), 81-112.

Meza, L, Garita, G. y Villalobos, L. (1997). Planeamiento de procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática asistidos con software matemático. En J. Trejos (Ed.) *Memorias del V Encuentro Centroamericano de Investigadores en Matemática (ECADIM)* (pp. 208-217). Costa Rica: Liberia.

Pochulu, M. (2005). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación*, *38*(4), 1-14. Recuperado de http://www.rieoei.org/deloslectores/849Pochulu.pdf

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico, P. Gómez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia*, pp. 69-108. Bogotá: una empresa docente. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/486/1/RicoL95-100.PDF.

Sancho, L. (1996). *Aplicaciones de la informática a la educación II*. Costa Rica: EUNED, Centro Universitario de San José.

Santa Cruz, M., Thomsen, M., Beas, J., Rodriguez C. (2011). Análisis de las clases de errores que cometen los alumnos y propuesta de andamiaje para aquellos errores que requieren cambio conceptual. *Revista iberoamericana de educación, Organización de Estados Iberoamericanos, 57*(1), 1-12. Recuperado de http://www.rieoei.org/deloslectores/4444StaCruz.pdf.

Umbarila, L. (2009). El análisis de errores como herramienta para el proceso de enseñanza-aprendizaje. *Inventum,* 7, 42-45. Facultad de Ingeniería Uniminuto. Recuperado de http://biblioteca.uniminuto.edu/ojs/index.php/Inventum/article/viewFile/128/121

RESOLUCIÓN DE RELACIONES DE RECURRENCIA CON APOYO DE *MATHEMATICA*

Enrique Vílchez Quesada
Universidad Nacional de Costa Rica. (Costa Rica)
enrique.vilchez.quesada@una.cr

RESUMEN: El presente trabajo introduce algunos algoritmos para resolver relaciones de recurrencia lineales, homogéneas y no homogéneas, con coeficientes constantes y no constantes, utilizando software como recurso principal en los procesos de resolución. La aplicación comercial *Mathematica* ha brindado el sustento técnico necesario para la implementación de los métodos empleados. Se presentan además, distintos ejemplos de relaciones de recurrencia, mostrando la efectividad y limitaciones de los algoritmos creados por el autor y programados en el ambiente que provee *Mathematica*.

Palabras clave: relaciones de recurrencia, solución, software *mathematica*

ABSTRACT: This work introduces some algorithms to solve both homogeneous and non homogeneous lineal recursion relations, with constant and non constant coefficients, by using software as a main resource in solving processes. The commercial application “Mathematics” has given the necessary technical support to the implementation of the methods being used. Different examples of recursion relations are also given. They show the effectiveness and limitations of the algorithms created by the author and programmed in the environment that “Mathematics” software provides.

Key words: recursion relations, solution, “*mathematica*” software

Introducción

La resolución de relaciones de recurrencia es un tema fundamental en distintas áreas de conocimiento al proporcionar métodos de solución ante problemas complejos que muchas veces no pueden ser abordados de forma directa. Sus aplicaciones abarcan contenidos vinculados con matemática básica, estructuras de datos, análisis de algoritmos, entre otras.

Los procedimientos clásicos de resolución expuestos en la mayor parte de la literatura (Johnsonbaugh, 2005, Kolman, Busby y Ross, 1997) se fundamentan en la construcción de ecuaciones y sistemas de ecuaciones que los vuelven poco eficientes cuando el término a_n de la relación de recurrencia, depende de una cantidad significativa de expresiones anteriores a "*n*".

Con el presente artículo se muestran algunos algoritmos novedosos para resolver relaciones de recurrencia lineales, homogéneas y no homogéneas, con coeficientes constantes y no constantes, utilizando como apoyo el uso de software. En la actualidad el empleo de programas de computación para contribuir con la simplificación de procesos es una tarea muy común y necesaria, cuando los problemas abordados implican una cantidad de cálculos relativamente grandes. En este contexto, el software comercial *Mathematica* se ha convertido en el insumo esencial para resolver el álgebra relacionada con los métodos compartidos.

La notación que caracteriza a este documento, se sustenta en suponer una sucesión de números reales como una función a, $a : IN \cup \{0\} \rightarrow IR$ y donde a su elemento *n*-ésimo se le denota como a_n. Además, la sucesión de números reales se representa a través de la expresión: $(a_n)_{n \in IN \cup \{0\}}$.

Relaciones de recurrencia homogéneas lineales]

En esta sección se muestra un método para encontrar más rápidamente los elementos de una sucesión definida por una relación de recurrencia homogénea lineal. Las ideas se basan en expresar la relación de recurrencia mediante un sistema de ecuaciones lineales, aspecto que ya había sido expuesto en Vílchez (2004). El aporte del presente trabajo, reside en exhibir algunas funciones construidas mediante el uso del software *Mathematica*, para resolver relaciones de recurrencia de este tipo con o sin coeficientes constantes.

Aspectos generales

Una relación de recurrencia homogénea lineal es aquella de la forma:

$$a_{n+k} = \beta_{k-1}(n)a_{n+(k-1)} + \beta_{k-2}(n)a_{n+(k-2)} + \cdots + \beta_1(n)a_{n+1} + \beta_0(n)a_n \qquad (1)$$

junto con las *k* condiciones iniciales:

$$a_j = c_j, 0 \leq j \leq k-1$$

siendo los $\beta_j(n)$ funciones y los c_j números reales fijos $\forall j,\ j \in IN \cup \{0\}, 0 \leq j \leq k-1$.

El lector debe observar que si todos los $\beta_j(n)$ son números reales la relación de recurrencia formada es de coeficientes constantes. El método aquí propuesto se fundamenta en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{n+k} = \beta_{k-1}(n)a_{n+(k-1)} + \beta_{k-2}(n)a_{n+(k-2)} + \cdots + \beta_1(n)a_{n+1} + \beta_0(n)a_n \\ a_{n+(k-1)} = a_{n+(k-1)} \\ a_{n+(k-2)} = a_{n+(k-2)} \\ \vdots \\ a_{n+1} = a_{n+1} \end{cases}$$

El cual, matricialmente puede expresarse así:

$$X_{n+1} = \mathbf{A}(n) \cdot X_n \qquad (2)$$

siendo,

$$\mathbf{A}(n) = \begin{pmatrix} \beta_{k-1}(n) & \beta_{k-2}(n) & \cdots & \beta_1(n) & \beta_0(n) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{una matriz } k \times k$$

y,

$$X_n = \begin{pmatrix} a_{n+(k-1)} \\ a_{n+(k-2)} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{un vector en } IR^k$$

En (2) por el método iterativo, X_n puede ser dado en términos de:

$$X_0 = \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ a_{k-2} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{k-1} \\ c_{k-2} \\ \vdots \\ c_0 \end{pmatrix}$$

como se detalla a continuación:

$$\begin{cases} X_1 = \mathbf{A}(0)\cdot X_0 \\ X_2 = \mathbf{A}(1)\cdot X_1 = \mathbf{A}(1)\cdot \mathbf{A}(0)\cdot X_0 \\ X_3 = \mathbf{A}(2)\cdot X_2 = \mathbf{A}(2)\cdot \mathbf{A}(1)\cdot \mathbf{A}(0)\cdot X_0 \\ \vdots \\ X_n = \mathbf{A}(n-1)\cdot \ldots \cdot \mathbf{A}(0)\cdot X_0 = \prod_{j=0}^{n-1} \mathbf{A}(j)\cdot X_0 \end{cases}$$

Lo anterior permite concluir que:

$$X_n = \prod_{j=0}^{n-1} \mathbf{A}(j)\cdot X_0,\ \forall n \in IN \qquad (3)$$

Como:

$$X_n = \begin{pmatrix} a_{n+(k-1)} \\ a_{n+(k-2)} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

entonces en (3), a_n corresponde a la última fila de la matriz resultante al calcular:

$$\prod_{j=0}^{n-1} \mathbf{A}(j)\cdot X_0$$

De hecho, la expresión (3) constituye un algoritmo que permite determinar los elementos de a_n más rápidamente en comparación con la relación de recurrencia original (ver 1) y es en este punto donde el empleo de software se convierte en una herramienta esencial.

Encontrando elementos de la sucesión y comparando velocidades

En *Mathematica* una implementación de (3) que retorna la última fila de la matriz es:

```
ElementoSucesionH[Coeficient_List, ConditionInitial_List, m_] :=
 Module[{CD = Reverse[ConditionInitial],
   h = Dimensions[ConditionInitial][[1]] - 1, Matriz},
  Matriz[Coeficientes_List, nn_] :=
   Module[{Identidad = IdentityMatrix[Dimensions[Coeficientes][[1]]],
     A = {Coeficientes}, i, CF},
    For[i = 1, i ≤ Dimensions[Coeficientes][[1]] - 1,
     A = Append[A, Identidad[[i]]]; i++];
    CF[L_List, a_] := Block[{n = a}, L]; Return[CF[A, nn]]];
  A[n_] := Matriz[Coeficient, n];
  If[m > h, Elemento = A[0].Transpose[{CD}];
   For[i = 1, i ≤ m - 1, Elemento = Dot[A[i], Elemento]; i++];
   Return[Elemento[[h + 1, 1]]], Return[ConditionInitial[[m + 1]]]]]
```

Los argumentos **Coeficient_List** y **ConditionInitial_List** definen la relación de recurrencia mediante un vector de coeficientes $\beta_j(n)$ y una lista de condiciones iniciales, respectivamente. En **ElementoSucesiónH** el parámetro **m_** simboliza un número natural sobre el cual, se desea obtener de la sucesión $(a_n)_{n\in IN\cup\{0\}}$, el término a_m. Pese a todos los cálculos que involucra **ElementoSucesiónH**, esta función resulta ser más rápida que la relación de recurrencia original. Lo anterior, se puede comprobar experimentalmente a través del siguiente programa elaborado con *Mathematica*:

```
PruebaH[m_, Con_List, Condici_List] :=
 Module[{k, alr = 0, mt = 0, alm = 0},
  For[k = 0, k ≤ m, Print["Se encontró el elemento de la sucesión: ", k];
   ClearSystemCache[];
   L1 = First[Timing[ElementoSucesionH[Con, Condici, k]]];
   ClearSystemCache[]; L2 = First[Timing[a[k]]];
   If[L1 > L2 && L1 ≠ L2, Print["Es mejor el algoritmo recursivo"];
    alr++, If[L1 == L2, Print["Tienen el mismo tiempo de ejecución"];
     mt++, Print["Es mejor el algoritmo matricial"]; alm++]]; k++];
  Print[
   "El algoritmo recursivo fue más efectivo la cantidad de
     ejecuciones igual a: ", alr];
 Print["Tuvieron el mismo tiempo la cantidad de ejecuciones igual a: ",
  mt];
 Print[
  "El algoritmo matricial fue más efectivo la cantidad de
    ejecuciones igual a: ", alm]]
```

El comando **Timing** en **PruebaH** determina el tiempo de ejecución en el cálculo de $m+1$ elementos de a_n, comparando dos formas de resolución por medio de las cuales se obtienen: **ElementoSucesiónH** y la relación de recurrencia inicial. **PruebaH** compara los tiempos y determina cual método fue más eficiente en cada caso (la velocidad está en función del número de cálculos a realizar). Consideremos a continuación algunos ejemplos de recorrido.

Ejemplo 1. Sea la sucesión recursiva $a_{n+2} = 7a_{n+1} - 10a_n$ sujeta a las condiciones $a_0 = 3$ y $a_1 = 1$. Compare la velocidad de convergencia de la relación de recurrencia dada y la función **ElementoSucesiónH**.

Solución 1. Con la finalidad de crear a_n en el software *Mathematica*, se debe cambiar la notación empleada en el enunciado, sustituyendo *n* por *n-2*:

$$a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$$

Luego:

In :=

```
ClearAll[a]
a[n_] := 7 * a[n - 1] - 10 * a[n - 2]
a[0] = 3;
a[1] = 1;

Table[ElementoSucesionH[{7, -10}, {3, 1}, k] == a[k], {k, 0, 30}]

PruebaH[30, {7, -10}, {3, 1}]
```

Out =

⋮

```
Se encontró el elemento de la sucesión: 28
Es mejor el algoritmo matricial
Se encontró el elemento de la sucesión: 29
Es mejor el algoritmo matricial
Se encontró el elemento de la sucesión: 30
Es mejor el algoritmo matricial
El algoritmo recursivo fue
   más efectivo la cantidad de ejecuciones igual a: 1
Tuvieron el mismo tiempo la cantidad de ejecuciones igual a: 15
El algoritmo matricial fue más
   efectivo la cantidad de ejecuciones igual a: 15
```

ClearAll limpia de la memoria la variable a, **Table** verifica que en las 31 comparaciones realizadas, a_n y **ElementoSucesiónH** den el mismo resultado y **PruebaH** proporciona la salida mostrada. Del Out se concluye que en la mayor parte de los casos el algoritmo expuesto en (3) es más eficiente.

Resolviendo relaciones de recurrencia

Mediante el uso de **ElementoSucesiónH** y el comando del software *Mathematica* **FindSequenceFunction** es posible generar una función, que intenta encontrar de manera explícita los elementos de una sucesión dada por una relación de recurrencia homogénea lineal. **FindSequenceFunction** recibe como parámetros una lista con algunos elementos de la sucesión y busca una fórmula explícita que la genere.

No en todos los casos se desempeña exitosamente (si las secuencias tienen números decimales) pero en muchos sí lo hace, convirtiéndose este mecanismo de razonamiento, en la base del algoritmo empleado para buscar la solución de una relación de recurrencia homogénea lineal cualesquiera. El método **ResolRRH** realiza el proceso descrito en este apartado.

```
ResolRRH[Co_List, Con_List] :=
 Module[{ElementoSucesionH, SolveR, SolveRR},
  ElementoSucesionH[Coeficient_List, ConditionInitial_List, m_] :=
   Module[{CD = Reverse[ConditionInitial],
     h = Dimensions[ConditionInitial][[1]] - 1, Matriz},
    Matriz[Coeficientes_List, nn_] :=
     Module[{Identidad = IdentityMatrix[Dimensions[Coeficientes][[1]]],
       A = {Coeficientes}, i, CF},
      For[i = 1, i ≤ Dimensions[Coeficientes][[1]] - 1,
       A = Append[A, Identidad[[i]]]; i ++];
      CF[L_List, a_] := Block[{n = a}, L]; Return[CF[A, nn]]];
    A[n_] := Matriz[Coeficient, n];
    If[m > h, Elemento = A[0].Transpose[{CD}];
     For[i = 1, i ≤ m - 1, Elemento = Dot[A[i], Elemento]; i ++];
     Return[Elemento[[h + 1, 1]]], Return[ConditionInitial[[m + 1]]]]];
```

```
SolveR[mm_, Coeficien_List, ConditionInitia_List, n_] :=
 Module[{L = {}},
  For[i = 0, i ≤ mm,
   L = Append[L, ElementoSucesionH[Coeficien, ConditionInitia, i]];
   i++]; Return[FunctionExpand[FindSequenceFunction[L, n]]]];
SolveRR[m_, Coeficient_List, ConditionInitial_List, n_] :=
 Module[{L = {}},
  For[i = 0, i ≤ m,
   L = Append[L, ElementoSucesionH[Coeficient, ConditionInitial, i]];
   i++]; Print["La lista de elementos usada es: ", L];
  Return[FunctionExpand[FindSequenceFunction[L, n]]]]; j = 1;
f[n_] := Evaluate@SolveR[j, Co, Con, n];
While[NumericQ[f[1]] == False, j++;
 f[n_] := Evaluate@SolveR[j, Co, Con, n];
 If[j > 1000, Print["Las ejecuciones superaron 1000 pruebas"];
  Break[]; j = 0]];
If[j ≠ 0,
 Print["El valor mínimo para el cual se retorna una función es: ",
  j]; f[n_] := Evaluate@SolveRR[j, Co, Con, n];
 Print["La solución de la relación de recurrencia es: ", f[n]];
 Print[
  "Una lista de elementos generada por la función anterior es: ",
  N[Table[f[n], {n, 1, j + 1}]]]]]]
```

ResolRRH busca una lista mínima de elementos de la sucesión recursiva a_n para la cual **FindSequenceFunction** retorna una respuesta. Esto puede provocar en algunos ejemplos que **ResolRRH** se sobrecargue, ocasionando un tiempo de ejecución poco satisfactorio. En dichos casos, lo ideal es aislar del código de **ResolRRH**, la función que permite encontrar $m+1$ elementos de a_n, lo cual permitiría al usuario correr manualmente **FindSequenceFunction** sobre una cantidad de elementos **mm_** que se escogería directamente. Esta función corresponde a:

```
SolveRRHM[mm_, Coeficien_List, ConditionInitia_List] :=
 Module[{L = {}, ElementoSucesionH},
  ElementoSucesionH[Coeficient_List, ConditionInitial_List, m_] :=
   Module[{CD = Reverse[ConditionInitial],
     h = Dimensions[ConditionInitial][[1]] - 1, Matriz},
    Matriz[Coeficientes_List, nn_] :=
     Module[{Identidad = IdentityMatrix[Dimensions[Coeficientes][[1]]],
       A = {Coeficientes}, i, CF},
  For[i = 1, i ≤ Dimensions[Coeficientes][[1]] - 1,
   A = Append[A, Identidad[[i]]]; i++];
  CF[L_List, a_] := Block[{n = a}, L]; Return[CF[A, nn]]];
A[n_] := Matriz[Coeficient, n];
If[m > h, Elemento = A[0].Transpose[{CD}];
 For[i = 1, i ≤ m - 1, Elemento = Dot[A[i], Elemento]; i++];
 Return[Elemento[[h + 1, 1]]], Return[ConditionInitial[[m + 1]]]]];
For[i = 0, i ≤ mm,
 L = Append[L, ElementoSucesionH[Coeficien, ConditionInitia, i]]; i++];
Return[FunctionExpand[FindSequenceFunction[L, n]]]]
```

Es importante aclarar, cómo el método **ResolRRH** puede tomar un tiempo de ejecución significativo dada la complejidad que implica para el programa *Mathematica*, encontrar la solución explícita. El lector puede observar inclusive, en la resolución de algunas relaciones de recurrencia, una ecuación diferencial que representa la función encontrada por el ordenador.

Un aspecto interesante a destacar en los ejemplos expuestos previamente, lo constituye la comparación del método matricial y la función explícita que resuelve cada relación de recurrencia. En los ejercicios se concluyó que su velocidad de respuesta es muy similar. Ciertamente, el desenlace es curioso dado que se esperaría un mejor rendimiento en la solución explícita. Pese a ello, los experimentos verifican que el algoritmo establecido en (3) es bastante competente para hallar los elementos de una sucesión, definida por una relación de recurrencia homogénea lineal.

También para finalizar esta sección, es fundamental indicar que los métodos **ResolRRH** y **SolveRRHM** brindan buenos resultados en la mayor parte de relaciones de recurrencia homogéneas lineales, donde no aparecen funciones trascendentales. Esta advertencia es importante para el lector, pues si la relación de recurrencia contiene un logaritmo, o bien, una función trigonométrica, el comando **FindSequenceFunction** no suele proporcionar un resultado y como consecuencia de ello, tampoco **ResolRRH** y **SolveRRHM**.

A través de las ideas expuestas con anterioridad, es posible realizar un recorrido similar, para resolver relaciones de recurrencia lineales no homogéneas, lo cual constituye una futura segunda parte del artículo.

Conclusiones

Los métodos de trabajo expuestos en el presente artículo, representan un esfuerzo por buscar algoritmos novedosos que permitan resolver computacionalmente relaciones de recurrencia de cualquier tipo. Lo anterior, resulta una búsqueda muy ambiciosa pero necesaria, ante los diversos problemas que demandan el planteamiento y la exigencia de resolución, de una relación de recurrencia.

A pesar de las limitaciones de los algoritmos empleados, éstos ofrecen una buena alternativa específicamente en relaciones de recurrencia lineales homogéneas, no homogéneas, con o sin coeficientes constantes. Además, en casos particulares, las funciones compartidas pueden resultar caminos viables hacia la exploración de relaciones de recurrencia no lineales.

Referencias bibliográficas

Johnsonbaugh, R. (2005). *Matemáticas discretas*. México, DF: Pearson Prentice Hall.

Kolman, B., Busby, R. y Ross, S. (1997). *Estructuras de matemáticas discretas para computación*. México, DF: Prentice-Hall Hispanoamericana.

Monge, J. y Vílchez, E. (2001). Valores propios y las sucesiones definidas de forma recursiva. *Revista Virtual Matemática, Educación e Internet*, *2*(2).

Rosen, K. (2007). Discrete mathematics and its applications. USA: Mc. Graw-Hill.

Vílchez, E. (2004). Resolución de sucesiones definidas por una relación de recurrencia homogénea lineal con valores propios de multiplicidad algebraica mayor estricta que uno. *Revista Virtual Matemática, Educación e Internet*, *5*(2).

Vílchez, E. (2009). Resolución de relaciones de recurrencia lineales no homogéneas con coeficientes constantes a través de valores y vectores propios. *Revista Virtual Matemática, Educación e Internet*, *10*(1).

SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL CAMBIO CONCEPTUAL EN EL TRATAMIENTO DE LA ELIPSE

Myrian Luz Ricaldi Echevarria
Universidad Femenina del Sagrado Corazón. APINEMA. (Perú)
myrianluz@hotmail.com

RESUMEN: El presente trabajo describe una secuencia didáctica para el aprendizaje y la comprensión del concepto de elipse a través del uso del programa Geogebra. La propuesta se implementó con un grupo de estudiantes pertenecientes a un programa especial de mujeres con experiencia laboral de una universidad privada de la ciudad de Lima. Nos centramos, desde una perspectiva aplicada, en el análisis de los procesos de transformación del conocimiento, el cambio conceptual y las representaciones de las estudiantes. El estudio toma elementos teóricos del cambio conceptual, los planteamientos psicológicos de Vigotsky y los registros de representación semiótica de Duval. Los resultados evidencian comprensión, y una aproximación asertiva y motivante al tratamiento de la elipse. Asimismo, se pudo describir el funcionamiento cognitivo que lleva a las estudiantes a comprender y efectuar diferentes procesos matemáticos

Palabras clave: geogebra, representación semiótica, comprensión

ABSTRACT: This report describes a didactic sequence for understanding and learning the concept of ellipse by using Geogebra program. This proposal was put into practice with a group of students belonging to a special program of women with work experience at the private university of Lima city. From an applied perspective, the authors focus on the knowledge-transformation process analysis, the conceptual change and the students' representation. The study takes into account theoretical elements of the conceptual change, Vigotsky's psychological assumptions and Duval's semiotic representation registers. The outcomes show understanding as well as an assertive and motivating approximation to the treatment of the ellipse. It was also possible to describe the cognitive development that allows students to understand and carry out different mathematical processes.

Key words: geogebra, semiotic representation, understanding

Antecedentes

En la enseñanza y aprendizaje de temas vinculados a la geometría analítica, de acuerdo con Silva (2006) se verifica que muchos estudiantes presentan dificultades en las relaciones de las representaciones gráfica y algebraica de diversas curvas. Duval (2006), afirma que la razón de esas dificultades es que los estudiantes desconocen la correspondencia semiótica entre los registros de representación gráfica y la expresión algebraica correspondiente.

Ante esto la presente propuesta pretende posibilitar la articulación entre geometría y álgebra mediante el planteamiento de una secuencia didáctica para la comprensión de la elipse por medio de las ecuaciones, y de manera recíproca la comprensión de la ecuación de la elipse a través de su representación geométrica empleando como mediador, en este proceso, al programa de geometría dinámica Geogebra.

Como parte de la revisión de algunas investigaciones que van en línea del uso de recursos tecnológicos para el aprendizaje y enseñanza de la geometría se encontró el trabajo de Iranzo y Fortuny (2009) en el que se caracterizan las estrategias de resolución de los alumnos empleando geometría dinámica. En el estudio se obtuvo como resultado que el uso de GeoGebra favoreció el empleo de múltiples representaciones de conceptos geométricos y ayudó a evitar obstáculos algebraicos. El aporte de estos investigadores resulta relevante para nuestra investigación por su relación con el fundamento teórico y el objeto de estudio de nuestra propuesta.

Problemática y objetivos

El punto de partida del presente estudio parte de la siguiente interrogante:

¿Cómo se transforma el conocimiento durante la puesta en práctica de una propuesta didáctica para el tratamiento de la elipse con la mediación del programa Geogebra?

Para responder a este cuestionamiento se plantea el siguiente objetivo general:

Analizar los procesos de transformación del conocimiento durante la puesta en práctica de una propuesta didáctica para el tratamiento de la elipse con la mediación del programa Geogebra.

Al mismo tiempo se proponen como objetivos específicos:

- Describir el funcionamiento cognitivo que desarrollan las estudiantes al comprender los diferentes procesos matemáticos.
- Evaluar el impacto del uso del programa Geogebra para la comprensión de nociones matemáticas asociadas a los diferentes registros de representación de la elipse.

Marco Teórico

Chevallard, Bosch y Gascón (1997), señalan que el aprendizaje de la matemática es un proceso psicocognitivo fuertemente influido por factores de diverso tipo: motivacionales, afectivos, sociales, entre otros. En ambientes de aprendizaje y como resultado de la práctica pedagógica somos testigos de que muchas concepciones de los alumnos respecto de una determinada noción que provocan errores repetitivos y resistentes, pueden constituir obstáculos para la emergencia de nuevas concepciones (Brousseau, 1986).

Nuestro estudio considera como supuesto psicológico y epistemológico que la matemática constituye un lenguaje donde los sistemas de símbolos, dados por la cultura, tienen una función comunicativa y un papel instrumental, ya que permiten que las personas cambien sus conceptualizaciones.

Esto está estrechamente relacionado con la noción de cambio conceptual, los planteamientos psicológicos de Vigotsky y los semióticos de Duval que a continuación describimos:

Cambio conceptual en Matemática

Desde los modelos situados (Rodríguez, 2000), el cambio conceptual consiste en saber aplicar las diferentes concepciones a los distintos contextos. Para el caso del presente estudio se buscó optimizar el aprendizaje de la elipse proponiendo una actividad didáctica que se ajuste a las condiciones de aprendizaje de las estudiantes.

Por ello, y apoyándonos en Linder (1993), quién atiende a la noción de representación, nuestra propuesta didáctica se apoya en el programa Geogebra para transitar por diversos registros de representación que permiten el cambio conceptual para la comprensión y resolución de situaciones vinculadas a la elipse. Un mecanismo presente en el proceso de cambio conceptual es la elaboración el cual está influenciado por la naturaleza y frecuencia de las elaboraciones.

En nuestro caso, la propuesta se aplicó en el lapso de 3 semanas con una frecuencia de 3 horas semanales. Un aspecto relevante es que se pudo revisar los fundamentos teóricos a través de diferentes perspectivas, esto permitió que las estudiantes generen y confirmen su conocimiento a partir de múltiples representaciones de la información que poseían. La aplicación de las nociones teóricas a diversos formatos favoreció la corrección de concepciones previas y la reinterpretación de las situaciones propuestas.

En este sentido, es importante precisar que las ideas previas reúnen un conjunto de características vinculadas a componentes históricos resistentes al cambio. Por ello, es importante utilizarlas en la enseñanza a fin de obtener un cambio conceptual a partir de la propuesta de experiencias que cuestionen dichas nociones. Tal como lo menciona Carretero (1996) es importante tanto al resultado como al proceso de transformación de las concepciones de los individuos. A continuación una figura que representa las diferentes concepciones de la elipse en un proceso de transformación del conocimiento.

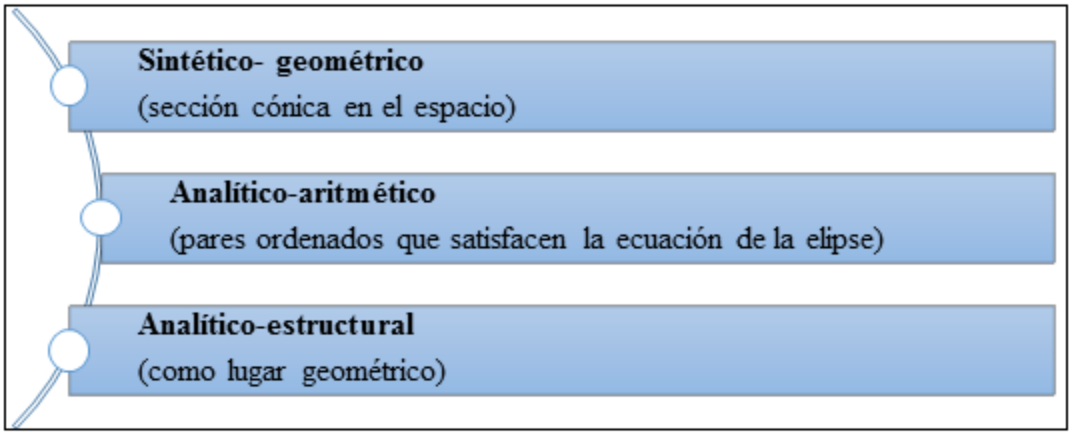


Figura 1. Concepciones matemáticas de la elipse

Planteamientos psicológicos de Vigotsky

Los instrumentos de mediación (las herramientas y los signos) cumplen un papel central en la adquisición de conocimiento y al mismo tiempo incluyen procesos que involucran cambios en la estructura y en la función de los procesos psicológicos. En el presente estudio se empleó el programa de geometría dinámica como mediador e instrumento para el aprendizaje. En el caso de la matemática cada dominio temático comprende problemas específicos de relación entre naturaleza y cultura, entre filogénesis y ontogénesis, entre procesos de tipo general y específicos.

Par el presente estudio se considera relevante la relación del sujeto y la situación porque permiten capturar tanto los componentes de las relaciones intersubjetivas como el papel de los mediadores semióticos en la construcción de aprendizajes y significados para el caso de la elipse.

La ejecución de la propuesta didáctica permitió corroborar lo descrito por Rogoff (1997), en el sentido que el proceso de aprendizaje es siempre y en todo momento, simultáneamente, individual y social. Es decir, el desarrollo y el aprendizaje deben ser comprendidos como procesos de apropiación mutua y/o recíproca de los sujetos y las prácticas culturales de las que ellos participan.

Registros de representación de Duval

Duval (2006) establece que solo se puede acceder a los objetos matemáticos mediante representaciones que utilizan signos, símbolos, letras, lenguaje natural, etc. Estas representaciones son de diferentes tipos: verbal, algebraico, numérico y gráfico, siendo estos imprescindibles para comprender el objeto matemático.

Este autor establece que un registro semiótico conlleva tres actividades cognitivas: construcción de un conjunto de signos, la posibilidad de realizar una transformación de representaciones al interior del registro y la conversión de una representación en un registro a otra de otro registro. Al mismo tiempo, se formula que el uso de diversos sistemas de representación semióticos en un mismo objeto matemático, en nuestro caso la elipse, fortalece la capacidad cognitiva del individuo enriqueciendo sus representaciones mentales.

En el marco de la teoría de registros de representación semiótica se consideran dos tipos de sistemas de representación de acuerdo a la cantidad de funciones cognoscitivas involucradas: el monofuncional relacionado con el procesamiento matemático algorítmico; y el polifuncional, que abarca una gama más amplia de funciones tales como comunicación, imaginación y procesamiento de información.

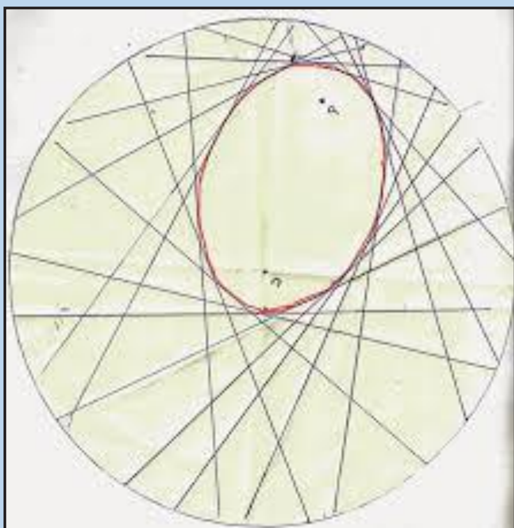
En otro trabajo de Duval (1999) se identifican tres procesos cognitivos implicados en el desarrollo de la actividad geométrica: la visualización de procesos (entendiendo por ello la interpretación de diagramas geométricos), los procesos de construcción mediante herramientas (en la resolución de problemas de geometría se debe explorar, manipular e interpretar los datos para que emerjan estrategias de solución) y el razonamiento, la conjetura y la prueba (a través de la relación entre las representaciones y los conocimientos teóricos).

Propuesta didáctica

Comprende actividades de exploración y comprensión, análisis, resolución de problemas, y aplicaciones, las cuáles se detallan en la siguiente tabla.

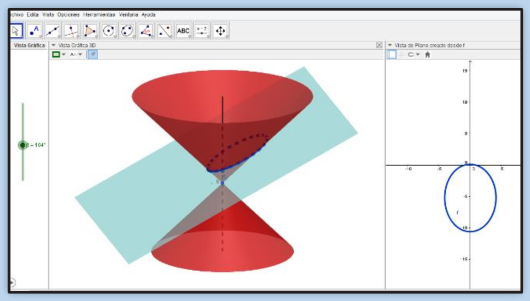
Tabla 1. Actividades de la secuencia didáctica

Exploración y comprensión	
Un perro que había mordido a un niño, por razones de seguridad, fue amarrado durante algunas horas. El perro tenía una argolla en su collar que se deslizaba a lo largo de la cadena, cuyos extremos están fijos en dos puntos opuestos y diferentes, ¿qué figura geométrica describe el alcance máximo del perro?	¿Cómo se describe la órbita de la tierra alrededor del sol?

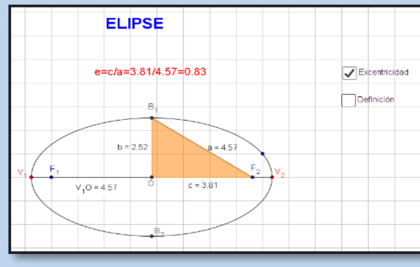
<table>
<tr><th colspan="2">Análisis</th></tr>
<tr>
<td>
Generación de la elipse con dobleces de papel:
¿Qué figura queda delimitada por los dobleces?
Una elipse.
¿Las rectas marcadas por los dobleces que son de la figura qué forman?
Los dobleces remarcados forman una familia de rectas tangentes que envuelven a la elipse.
¿Cuáles son los focos de dicha elipse?
El centro de la circunferencia y el punto P marcado inicialmente.
¿Cuál es el valor de la suma de distancias de cualquier punto de la elipse a los dos focos?
Es igual al radio de la circunferencia inicial.

</td>
<td>
Construcción de la gráfica de la elipse:
• A partir de dos puntos (focos) y con la opción elipse.
• Mueve las posiciones de los focos y del punto de la elipse. ¿Qué relación existe entre los focos y los puntos de la elipse?
La elipse como lugar geométrico:
• Construye un punto en la elipse. Construye dos segmentos con extremos en los focos y el punto sobre la elipse.
• Mide las distancias de los dos segmentos. ¿Se mantiene constante la suma para los distintos puntos de la elipse?
• Si el punto estuviera fuera de la elipse, ¿se mantiene constante la suma de distancias para distintas elipses?
Conceptos relacionados a la elipse:
• Determina el centro del segmento determinado por los focos y el centro del segmento determinado por los vértices.
• Construye un punto en objeto. Determina las longitudes de los segmentos que unen los vértices y los focos con el punto anterior, ¿qué relación hay entre estas sumas? Explora moviendo el punto sobre la elipse. ¿se conserva la relación.
</td>
</tr>
</table>

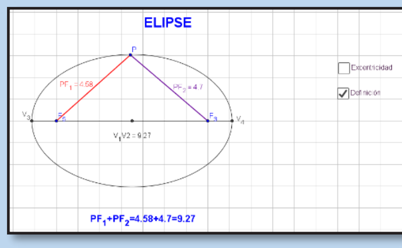
Resolución de problemas

Sección del plano generada por el corte de un cono y un plano inclinado que forma con el eje del cono un ángulo superior al que forma la directriz del cono con el eje



Comprensión del concepto de elipse mediante la exploración y análisis de los registros algebraico y geométrico con el programa Geogebra.





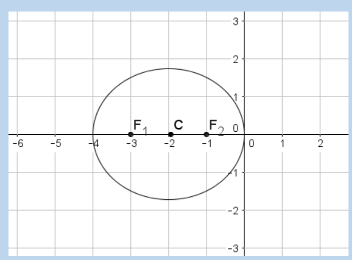
Dada la elipse: $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$ Determina:

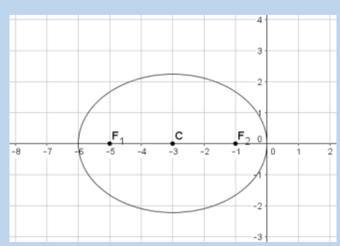
a. Las coordenadas del centro de la elipse:
b. La longitud del semieje mayor (a):
c. La longitud del semieje menor (b):
d. La longitud del semieje focal (c)
e. Las coordenadas de los focos:
F_1(,) , F_2 (,)
f. Las coordenadas de los vertices.
V_1 (,) , V_2 (,)

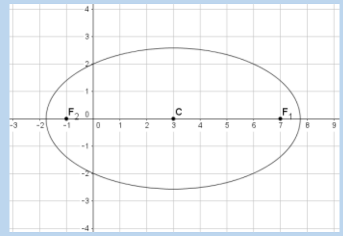
Determina en cada caso el centro, los vértices y los focos. Luego gáfica las elipses.

a. $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$ b. $\frac{x^2}{\frac{1}{2}}+\frac{y^2}{\frac{1}{3}}=1$

Elige la gráfica que corresponde a una elipse con centro en (-3,0), foco (-1,0) y es tangente al eje Y.





	
Verifica si la siguiente figura corresponde a una elipse:	
Aplicaciones	
Visualización del video: https://www.youtube.com/watch?v=rox9ASzVYKY Luego responden a la pregunta: ¿qué relación existe entre el video y el fenómeno de reflexión	¿Es la elipse un óvalo? ¿Qué sucede con la elipse si los dos focos coinciden?

Se presenta a continuación una tabla que relaciona los tres elementos teóricos de la propuesta con las actividades de la secuencia didáctica anteriormente descrita.

Tabla 2. Relación de los elementos teóricos con las actividades de la secuencia didáctica

Actividad	Cambio conceptual relacionado	Planteamientos de Vigotsky	Registro de representación de Duval
Situación exploratoria inicial. Visualización de imágenes.	Exploración y comprensión.	Imágenes. Videos. Individual-grupal.	Representación verbal
Actividades con el programa Geogebra. Actividad con el doblado de papel.	Análisis.	Programa Geogebra. Actividad individual. Papel. Actividad grupal.	Representación gráfica
Construcción de la elipse bajo determinadas condiciones con el programa Geogebra.	Resolución de problemas.		
Situaciones de aplicación de las propiedades de la elipse a los campos de la medicina y la construcción.	Aplicaciones.	Imágenes. Videos. Grupal.	Representación algebraica

Fuente: elaboración propia

Se debe precisar que las actividades tuvieron las siguientes etapas:

Etapa 1, el trabajo era individual con la finalidad de explorar sobre los conocimientos previos de las estudiantes. Se utilizó también en este proceso el aula virtual a través de la plataforma Chamillo.

Etapa 2, el trabajo se realizó en parejas en donde cada par se concentraría en la resolución de un caso aplicando propiedades y conceptos relacionados a elipse.

Resultados

De la actividad previa de exploración algunos de los resultados obtenidos, tanto correctos como incorrectos, son los siguientes: la elipse es un óvalo construido con cuatro arcos de circunferencia, se obtiene de achatar una circunferencia, dos arcos secantes de igual radio no constituyen una elipse.

De la puesta en práctica de la propuesta didáctica se pudo evidenciar que el tipo de registro de representación que aparecía con mayor frecuencia en los procedimientos era el algebraico. Asimismo, el registro verbal y gráfico son los de mayor dificultad en las transformaciones, esto se evidenció en las interpretaciones geométricas de las soluciones algebraicas.

Conclusiones

En el aula de clases es posible desarrollar experiencias de aprendizaje que permitan a las estudiantes transitar de sus creencias personales a concepciones válidas con el fin de eliminar ambigüedades y generar el cambio conceptual necesario en el proceso de aprendizaje de la elipse. En este contexto, el conocimiento intuitivo es relevante para la construcción del conocimiento.

Se debe procurar llevar a las estudiantes a la generalización, pero evitando brindar conceptos y definiciones de manera inmediata, en este sentido, es relevante la selección de actividades de aula que permitan la independencia de pensamiento y el desarrollo de métodos de aprendizaje que sean extensivos a otras áreas del conocimiento. La mediación del programa de geometría dinámica Geogebra permite consolidar el proceso constructivo para reforzar en las justificaciones, argumentaciones y predicciones como habilidades de pensamiento superior.

Por otro lado, de la experiencia, surge la inquietud de analizar con mayor profundidad las dificultades que presentan los estudiantes al trabajar con técnicas propias de la geometría analítica.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática.* Traducción de FAMAF, Córdoba, Argentina: UNC.

Carretero, M. (Ed.). (1996). *Construir y enseñar las ciencias experimentales*. Buenos Aires, Argentina: Aique.

Chevallard, Y.; Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemática. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona, España: ICE HORSORI, Universidad de Barcelona.

Duval, R. (2006). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Traducción al castellano de Myriam Veja Reestrepo. Berna, Suiza: Peter Lang.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking, basic issues for learning. *Proceedings of Psychology Mathematics Education Conferences 23*, 3-26.

Gonzáles, J. (2015). *Aplicaciones de la elipse*. (Archivo de video). Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=rox9ASzVYKY

Iranzo, N., Fortuny, J.M. (2009). La influencia conjunta del uso de geogebra y lápiz y papel en la adquisición de competencia del alumnado. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(3), 433–446.

Linder, C. J. (1993). A Challenge to conceptual change. *Science Education, 77*, 293-300.

Rodríguez Moneo, M. (2000). Estado actual y nuevas direcciones en el estudio del cambio conceptual. *Tarbiya, Revista de Investigación e Innovación Educativa. Monográfico Cambio Conceptual y Educación*, *26*, 5-11.

Rogoff, B. (1997). Los tres planos de la actividad sociocultural: apropiación participativa, participación guiada y aprendizaje. En J. Wertsch, P. del Río y A. Álvarez (eds.). *La mente sociocultural. Aproximaciones teóricas y aplicadas*. Madrid, España: Fundación Infancia y Aprendizaje.

Silva, C. (2006). *Explorando equacoes cartesianas e paramétricas em um ambiente informático* . Tesis de Maestría no publicada. São Paulo, Brasil: Pontificia Universidade Católica.

LABORATORIO TECNOLÓGICO PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LO CUADRÁTICO CON LA IMPLEMENTACIÓN DEL SOFTWARE APLICATIVO LIBRE TRACKER

Luis Carlos Vargas Zambrano
Universidad La Gran Colombia. (Colombia)
luiscarlos.vargas@ulagrancolombia.edu.co

RESUMEN: Los lineamientos actuales en educación matemática en Colombia conciben a la modelación como una competencia indispensable en las mediaciones de la disciplina, este proceso pretende consolidar y generalizar fenómenos y situaciones en modelos matemáticos, es decir, el estudiante modeliza un hecho de su contexto sustentado en la analítica matemática para concluir en un modelo matemático y sus representaciones; por ende el discurso didáctico y las prácticas del profesorado deben girar en torno a técnicas de modelado matemático e implementación de tecnologías de la información, para así, promover la construcción social del conocimiento matemático. En la presente investigación se implementa el software libre Tracker en el proceso de modelado del movimiento parabólico para la construcción del concepto de función cuadrática enfocado a una situación social particular y encaminando desde la práctica social hacia la construcción del conocimiento matemático.

Palabras clave: modelación matemática, ecuación cuadrática, software libre Tracker, socioepistemología

ABSTRACT: The Mathematics Education current guidelines in Colombia conceive modeling as a necessary competence for obtaining measurements in the Discipline. The aim of this process is to consolidate and generalize phenomena and situations in mathematical models; that is, the student models an event, taken from his context by using mathematical analytics to transform it into a mathematical model and its representations. Therefore, the mathematical discourse and the teachers' practices should include mathematical modeling techniques and information technologies implementation. Then, the social building of the mathematical knowledge can be promoted. This research work implements Tracker free software, during the modeling process of the parabolic movement for building the quadratic function concept which is focused on a specific social situation, and it is carried out from the social practice to the mathematical knowledge construction.

Key words: mathematical modeling, quadratic equation, tracker free software, socioepistemology

Introducción

No hay verdad más perfecta que aquella que se demuestra en sí misma. Sin recurrir a nada sino únicamente a su propia teoría, la matemática se consolida como herramienta indispensable para todas las ciencias exactas que recurren a ella en su afán de descubrir, construir, predecir, explicar, justificar y refutar hechos, sin duda es contradictorio saber que la "lógica deductiva es la única disciplina que no precisa confirmación experimental (…) se justifica por sí misma" (Wagensberg, 2013) y se encuentra en función de la ciencia, sin desconocer que "el fin último de la ciencia es describir el universo sin invocar lo sobrenatural, el hecho de no conseguir explicar racionalmente la efectividad irracional de las matemáticas (…) es una enorme laguna en el saber de la humanidad" (Johnson, 1998).

La noción de gran porcentaje de niños, jóvenes y adultos ubicados en el sistema educativo actual colombiano comprendido en nivel Básico, Medio y Superior respecto a las matemáticas es inconsistente. El Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes PISA generó indicadores de calidad educativa para Colombia con una muestra de estudiantes de quince años independiente a su grado de escolaridad.

El análisis de los resultados 2012 hace énfasis en matemáticas, área en la que siguen siendo preocupantes los resultados para Colombia y en la que el país muestra una gran brecha con relación al promedio de países de la OCDE… En matemáticas se evalúa la capacidad para reconocer y formular problemas, así como para plantear, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. También se incluye el razonamiento y la utilización de conceptos, procesos e instrumentos para describir, explicar y predecir fenómenos. (Ministerio de Educación Nacional, 2013).

En este momento la prioridad para los educadores matemáticos es generar una cultura frente al estudio de la matemática para el futuro y renovar los procesos de enseñanza, por ejemplo proponiendo didácticas que involucren la experimentación y contextualicen el conocimiento porque experimentando se pueden proponer problemas de los cuales los estudiantes tengan explicaciones propias y por medio del uso del conocimiento matemático puedan justificar desde un punto de vista matemático la veracidad de sus apreciaciones. Una metodología basada en esta apreciación hace necesario el diseño de laboratorios que establezcan secuencias para la comprobación de hipótesis.

El laboratorio se puede interpretar como un escenario para la explicación científica y la argumentación crítica de problemas. El laboratorio es una suma estructurada de actividades de modo que planeen la formulación de hipótesis y elaboración de tesis a través de la verificación experimental de la hipótesis formulada (Galetto, 2014).

En Colombia la creación de modelos matemáticos es una competencia clave en los lineamientos actuales de educación matemática, reconociendo que el proceso de modelado matemático parte de escenarios experimentales escasos o en su gran mayoría de ejercicios de texto hipotéticos, ocasionando que la transición efectiva entre un fenómeno o situación real y las matemáticas no sea del todo evidenciado por el estudiante. El reto actual del programa de Licenciatura en Matemáticas y Tecnologías de la Información de la Universidad La Gran Colombia a través del Semillero de

Investigación Mathema es diseñar escenarios físicos de experimentación para construir conocimiento matemático porque "la actividad fundamental de la experimentación consiste en comparar las propiedades de los modelos con las propiedades correspondientes al mundo real" (Baird, 1996, p. 68).

La experimentación dentro del laboratorio parte de la "experiencia científica en donde se provoca deliberadamente algún cambio y se observa o interpreta un resultado con alguna finalidad cognoscitiva" (Gutierrez, 2013, p.27), para verificar o contradecir un comportamiento en particular observado, siendo la observación "una parte importante e imprescindible del experimento, porque en cierto sentido no es otra que una observación provocada dentro de condiciones controladas por el investigador" (Gutierrez, 2013, p.28). A su vez una actividad práctica como el laboratorio respaldado en la experimentación debe ser vista como un escenario que promueva.

La motivación mediante la estimulación del interés y la diversión; también para intensificar, facilitar y propiciar la conceptualización de los elementos que conforman la teoría objeto de estudio, para proporcionar una idea sobre el método científico y desarrollar habilidades en la planeación organización y desarrollo del trabajo investigativo en su utilización y por último, para desarrollar determinadas actitudes científicas como la consideración y valoración de las ideas y sugerencias de otras personas, la objetividad y la buena disposición para no emitir juicios apresurados. (Hodson, 1994, p. 299)

Al ser incluido el diseño de laboratorios para la enseñanza de las matemáticas, favoreciendo la experimentación en sus mediaciones e incluyendo factores de la cotidianidad del individuo y el proceso de modelado matemático, es necesario componer artefactos didácticos que empoderen al estudiante de matemáticas para la solución del problemas en contexto y dominio de analítica disciplinar admitiendo que "el conocimiento matemático, entonces, se presenta de forma abstracta, sin base empírica, lo que produce en los alumnos una serie de dificultades que inhiben en el aprendizaje" (Cantoral, 2013, p. 83) por consiguiente es clave privilegiar las demostraciones justificadas por las propias representaciones de los estudiantes, porque la rigurosidad matemática en los procesos demostrativos de una u otra forma ha sido moldeada por la influencia de unos pocos en su notación, jerarquía y organización, entonces porque no validar la de otros, Cantoral (2013) en el libro Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa afirma que:

> (...) una manera de motivar la confianza de su propia capacidad para tratar con las matemáticas consiste en apoyar más los propios procesos mentales del estudiante. Respetar más sus conjeturas, sus procedimientos heurísticos, utilizar sus ensayos y exploraciones, dejando que su intuición pueda servir como punto de partida de la actividad en la clase (p. 83).

Partiendo de las definiciones y la investigación enfocada hacia la búsqueda de una respuesta coherente y efectiva a las necesidades actuales de la enseñanza de las matemáticas en Colombia; es adecuado reconocer la modelación como el método que fundamenta y explica la transición entre un fenómeno físico o una situación habitual y su representación matemática; es pertinente trazar como principal objetivo la inclusión del proceso de experimentación en la creación de modelos matemáticos en las mediaciones académicas de la disciplina implementando tecnología de la información, privilegiando la interacción del estudiante con su entorno y la relación existente entre la experiencia y el concepto analítico de estudio.

El presente extenso de investigación recopila los resultados y conclusiones del taller “Laboratorio tecnológico para la construcción de lo cuadrático con la implementación del software aplicativo libre Tracker” consecuencia de la ponencia: “modelación de funciones a partir del software aplicativo Tracker en prácticas experimentales” esta última expone un laboratorio de movimiento parabólico en donde los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y Tecnologías de la Información modelaban el tránsito de un proyectil lanzado por una catapulta de torsión para llegar al concepto de función cuadrática.

La primera técnica de modelización consistía en una serie de lanzamientos repetitivos del proyectil contra una pared en periodos de tiempo cronometrados; para posterior toma y organización de datos, relación entre variables distancia, altura y tiempo en representaciones semióticas y obtención de la función mediante regresión cuadrática, la segunda consistía en grabar un video del movimiento del proyectil y rastrearlo con el software Tracker para ser analizado y conseguir el modelo; la experiencia trae como resultado que ambas técnicas de modelado son significativas en la concepción de función cuadrática debido a que se llegó a generalizar, entender y relacionar el modelo.

Es justo aquí donde registro de datos es fundamental y se entiende como la transición entre la experimentación y la modelación, teniendo en cuenta que “la medición es el proceso de cuantificar nuestra experiencia del mundo exterior” (Baird, 1996, p. 8) para la comparación; sin embargo los valores numéricos en una tabla no facilitan el análisis:

> Mediante una gráfica es más fácil conseguir la atención, pues al igual que un dibujo vale más que mil palabras, una gráfica vale más que mil números. Es más fácil comparar una gráfica con otra que comparar una tabla con otra. Las gráficas revelan, en forma más rápida, ciertos rasgos que mediante una inspección de la tabla no se podría obtener fácilmente, como son: valor máximo, valor mínimo, periodicidad, variables de la pendiente (Gutierrez, 2013, p. 84).

Al haber dificultades en la medición manual del tiempo en lapsos tan cortos, se concluye que la técnica de modelado con la aplicación es más eficaz en procesos de medición, es decir, facilita la obtención de datos reales del movimiento con un margen de error mínimo, acercándose más al modelo cuadrático.

La investigación en curso que lleva por nombre “resignificación de la medición en prácticas experimentales de la modelación matemática a partir del software libre Tracker” orientó y se enriqueció de teoría conceptual en el desarrollo del taller. La parte inicial de la primera sesión se enfocó a la presentación de la metodología de trabajo del semillero de investigación en el diseño de laboratorios para la modelación de fenómenos físicos.

Después de esto, en un segundo momento los participantes en grupos de tres personas, construyeron cada uno una catapulta muy sencilla con materiales provistos por los expositores para poder realizar el lanzamiento de un proyectil. En un tercer momento, cada uno de los grupos realizó la grabación con sus celulares de un video en el que se describía la trayectoria del proyectil.

La segunda sesión puntualizó en el uso del software aplicativo Tracker dando a conocer datos particulares del aplicativo, años de difusión, desarrolladores, versiones, compatibilidad con sistemas operativos y descarga, continuando con la familiarización entre el usuario y el programa; es necesario afirmar que Open Source Physics (2008) en su página oficial de internet define al software Tracker como:

> (…) una herramienta de imagen y paquete de análisis de vídeo y de modelado que se basa en la biblioteca de código "Open Source Physics Java". Las características incluyen seguimiento de objetos con la posición, velocidad y aceleración superposiciones y gráficos, filtros de efectos especiales, múltiples marcos de referencia, puntos de calibración y perfiles de línea para el análisis de los patrones de espectros y de interferencia. Está diseñado para ser utilizado en los laboratorios de física de la universidad y conferencias introductorias.

Los asistentes tuvieron la posibilidad de importar el video grabado la sesión anterior, determinar el periodo de tiempo, escoger la cantidad de cuadros por analizar según la calidad del video, establecer ejes coordenados y parámetro de longitud para el rastreo manual o automático del punto de masa y así poder llegar a representaciones que relacionasen las variables de distancia, altura y tiempo, adicionando otras como ángulo, velocidad y aceleración que pueden llegar hacer parte de la discusión y análisis del modelo, el programa entregó la función específica que modela el movimiento en cada una de sus representaciones como es su tabla, gráfica y ecuación algebraica.

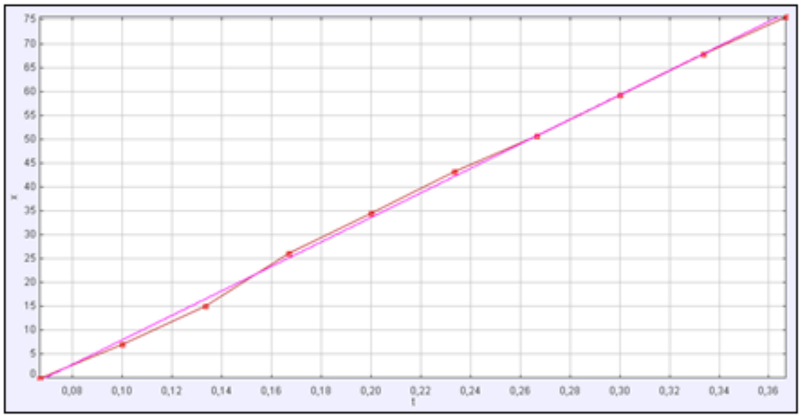
Un participante del taller, "Laboratorio tecnológico para la construcción de lo cuadrático con la implementación del software aplicativo libre Tracker" presentado en el marco de la Trígesima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa RELME 30, realizó con ayuda del instructor una catapúlta sencilla para el lanzamiento de proyectiles de papel, para el posterior registro de un video parametrizado, permitiendo llevar a cabo una medición real en el software. Al importar el video al software libre Tracker y relizar una rastreo manual de la masa puntual (proyectíl) los datos obtenidos se relacionan a continuación.

Tabla 1. Registro de masas puntuales respecto a su posición y tiempo, empleando el Software Tracker.

Masa puntual	Tiempo (s) ±0.4s	Distancia (cm) ±0.001cm	Altura (cm) ±0.001cm
0	0,07	-0,12	0,24
1	0,10	6,90	3,21
2	0,13	14,88	5,12
3	0,17	26,07	8,33
4	0,20	34,40	8,93
5	0,23	43,09	9,29
6	0,27	50,71	8,57
7	0,30	59,16	7,86
8	0,33	67,86	4,64
9	0,37	75,72	1,31

Con la anterior representación el particiante identificó características propias de una parábola sin aún llegar a la grafíca: altura máxima 9,29 cm altúra mínima del proyectíl 0,24 cm, distancia final alcanzada por el proyectíl 75,72 cm, tiempo del proyectil en describir el moviemiento parabólico 0,37s, entre otras apreciaciones hechas por el observador a partir de la ralación tiempo – distancia – altura desde el primer registro hasta el décimo.

Cada vez que se hace un registro cuadro a cuadro del video el entorno multimedia de Tracker organiza una tabla de datos y proporciona la primera gráfica en coordenadas cartesianas de la distancia en función del tiempo obteniendo una gráfica con aspecto lineal que es analizada desde una linealización con el fin de hallar la generalización algebráica como constantes de pendiente y punto de corte con el eje *y*.

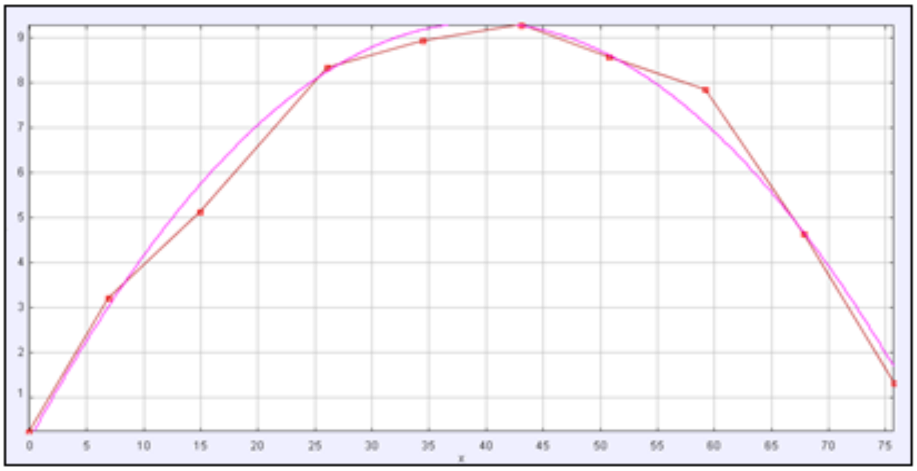


Gráfica 1. Representación gráfica de la distancia en función del tiempo en el análisis con el Software Aplicativo Libre Tracker

La representación algebraica de la distancia en función del tiempo es modelada por la función:

$$x = 256{,}9t + 17{,}85$$

La representación geométrica de la función cuadrática que modela el movimiento parabólico del experimento es definida por el participante cuando percibe simetría, vértice, puntos de corte con los ejes; la parábola es generada por Tracker por medio de una regresión cuadrática que abarca la mayor cantidad de coordenadas cartesianas asociadas al rastreo inicial de la partícula y así adquirir el valor numérico de las constantes *a*, *b* y *c* presentes en la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.



Gráfica 2. Representación gráfica de la altura en función de la distancia en el análisis con el Software Aplicativo Libre Tracker

El análisis concluye con el modelo del movimiento parabólico después de un proceso de modelización que parte de la construcción de una catapulta y finaliza con la representación algebraica que corresponde al modelo cuadrático del movimiento del proyectil lanzado:

$$-38{,}1x^2 + 273{,}5x - 19{,}29 = 0$$

La técnica de modelación matemática Tracker en educación se fundamenta bajo el ideal de la equidad y calidad educativa para la formación matemática Básica, Media y Superior de estudiantes, recociendo como principales factores: el contexto socioeconómico del educando, el papel indispensable del docente y la implementación de recursos informáticos accesibles. Los procesos de investigación en educación matemática como cualquier disciplina teórica "son refutables y deben someterse continuamente a crítica, pues este es el vehículo de crecimiento del conocimiento matemático” (Beyer, 2001).

El trabajo de investigación desarrollado en torno a la modelación y construcción de lo cuadrático con la implementación de laboratorios contextualiza la analítica matemática y direcciona nuevas estrategias para la enseñanza de las matemáticas aportando en cierta medida a procesos descriptivos, explicativos y de predicción de fenómenos o situaciones del contexto particular del estudiante privilegiando las técnicas experimentales que conlleven a la construcción social del conocimiento matemático.

Referencias Bibliográficas

Baird, D. (1996). *Experimentación: Una introduccion a la teoria de las mediciones y al diseño de experimentos.* México, DF: Prentice Hall.

Beyer, W. (Agosto de 2001). *Algunos aspectos epistemológicos de la matemática ¿Es la matemática un lenguaje?.* Educer Trasvase.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa* (Primera edición). Mexico, DF: Gedisa.

Galetto, M. y. (2014). *Saber Experimentar.* Bogotá: Magisterio.

Gutierrez, C. (2013). *Introducción a la metodología experimental* (Segunda edición). México, DF: LIMUSA.

Hodson, D. (1994). *Hacia un enfoque más critico del trabajo de laboratorio.* Enseñanza de las ciencias, 299-313.

Johnson, G. (1998). *¿Son las matemáticas una invención?. EL PAÍS*.

Ministerio de Educación Nacional. (2013). *Centro Vistual de Noticias*. Obtenido de PISA 2012: retos y avances para Colombia. La calidad continúa siendo la principal prioridad: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/w3-article-336001.html

Open Source Physics. (2008). *Open source physics*. Recuperado el 9 de Octubre de 2015 de Open Source Physics: http://www.opensourcephysics.org/items/detail.cfm?ID=7365

Wagensberg, J. (2013). *La matemática no es ciencia.* El Periodico Opinión. Recuperado el 28 de Septiembre de 2016, de http://www.elperiodico.com/es/noticias/opinion/matematica-ciencia-2405757.

POSIBILIDADES Y DIFICULTADES PARA ACCEDER AL CONCEPTO DE VARIACIÓN A TRAVÉS DE LA MEDICIÓN DEL PH DEL SUELO Y EL EFECTO INVERNADERO

Fátima Violeta Herrera Vargas, Alicia López Betancourt, Alma Leticia Benítez Pérez
Universidad Juárez del Estado de Durango. Instituto Politécnico Nacional (México)
vahex.1311@gmail.com, ablopez@ujed.mx, abenitez@ipn.mx

RESUMEN: Esta investigación se enfoca en documentar cómo los estudiantes de bachillerato construyen el concepto de variación mediante la resolución de un problema en contexto y el uso de tecnologías mediante sensores (de pH y temperatura). Se toma como base dos prácticas: la medición del pH del suelo en diferentes zonas de Canatlán, Durango y el efecto invernadero. Se trabajó con un grupo de 20 estudiantes de tercer semestre durante seis días hábiles. El concepto matemático de variación se analiza con la propuesta de Carlson (2003). Los estudiantes mostraron dificultades para graficar correctamente los datos obtenidos a través de los sensores, asimismo los estudiantes muestran interés y motivación al usar los sensores sin embargo al realizar la hoja de trabajo manifiestan rechazo para responderla y se precisa que pocos logran relacionar las dos variables involucradas: el pH con la profundidad y la temperatura con el tiempo transcurrido, de modo que se está lejos de la comprensión del concepto de variación.

Palabras clave: variación, sensores, pH, temperatura, medición

ABSTRACT: This research work attempts to state how high school students elaborate the concept of variation through problem solving in context and the use of technologies by sensors (pH and temperature). The study is based on two practices: The measurement of the soil pH in different areas of Canatlán, Durango, and the greenhouse effect. The sample was composed by twenty students of the third semester and it lasted six working days. The mathematical concept of variation is analyzed by using Carlson proposal (2003). The students show difficulties to properly construct the graphs of the data obtained by using the sensors. Besides, the students show interest and motivation when using the sensors; however, they reject to answer the worksheet and only a few can relate the two variables involved: the pH with the depth and the temperature with the time, so they cannot still understand the concept of variation.

Key words: variation, sensors, pH, temperature, measurement

:

Introducción

La educación matemática ha evolucionado buscando el desarrollo de competencias genéricas y disciplinares a través de un aprendizaje significativo de los conceptos y su aplicación además de dar una mayor importancia a la investigación tanto individual como en grupo. En este contexto en los últimos años se ha integrado como método de enseñanza de las matemáticas la resolución de problemas. El método basado en la resolución de problemas estimula a los alumnos a abordar situaciones nuevas, a responder cuestionamientos cuya resolución no puede ser mecánica, a elaborar nuevas estrategias de pensamiento al plantearse preguntas, pero sobre todo a aplicar sus conocimientos y habilidades en otras situaciones.

La construcción del concepto de variación es una pieza clave en el proceso de enseñanza de las matemáticas, ya que este concepto sirve como cimiento para la formación de nuevas nociones como la de función, derivada o razón de cambio. Entonces podemos decir que si los estudiantes logran construir y comprender realmente el concepto de variable los nuevos conceptos asociados a éste serán más claros. (Gómez Otero, 2007). Por otra parte, la Reforma Integral del Bachillerato (Secretaría de Educación Pública, 2011) plantea el uso de tecnologías, así como la aplicación de métodos y procedimientos para dar solución a problemas. Además de propiciar la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes. De esta manera la formulación y resolución de problemas cobra importancia y con ella la necesidad de que el estudiante sea capaz de explicar y argumentar los resultados obtenidos.

Las competencias disciplinares básicas de matemáticas propuestas buscan el desarrollo de la creatividad y del pensamiento lógico y crítico, así como formar a los estudiantes en competencia de interpretar el entorno que los rodea matemáticamente. En este contexto, se busca estudiar cómo se construye la noción de variable en estudiantes de nivel medio superior, así como los procesos que están incluidos además de documentar cómo éste favorece o no el desarrollo de las competencias previamente mencionadas, todo esto mediante la resolución de un problema en contexto donde es utilizada la tecnología. Para esto se realizarán dos prácticas: la medición del pH del suelo en diferentes zonas del municipio de Canatlán, Durango y la segunda del funcionamiento del efecto invernadero. Estas dos prácticas tomarán como herramienta el sensor de Vernier de pH y el sensor de temperatura respectivamente

Fundamentación teórica

Intuitivamente niños y adolescentes crean una noción de variación a partir de sus vivencias diarias como el propio crecimiento o el de algún ser vivo a su alrededor o bien de una manera más evidente con el desplazamiento de una persona u objeto. En el ambiente escolar, el concepto de variación es abordado en los cursos de matemáticas y física. En este contexto podemos encontrar diversas concepciones de la noción de variable, por ejemplo, Caballero y Cantoral (2013, p. 1588), definen la variación como la “cuantificación de una modificación de estado”. Para García (2009, p. 20) la variación "analiza la forma en que varía o cambia una función a partir de la relación entre las variables que la describen".

La noción de variación es un concepto que no está explícito en la enseñanza, sin embargo su noción es fundamental para que los estudiantes reconozcan relaciones entre variables o cantidades asociadas, y cómo el cambio en una de ellas determina o explica el cambio en la otra. Esto permitirá a los estudiantes llegar a los conceptos de cálculo con mayor familiaridad y reconocimiento de las relaciones entre variables.

Para el análisis de las hojas de trabajo, se retomó el marco conceptual realizado por Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu (2003) para evaluar el pensamiento covariacional presentado por los estudiantes en la realización de las actividades desarrolladas para esta investigación. Estos autores definen en su estudio el razonamiento covariacional como "las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra". Con base en esta interpretación se desarrolla un marco conceptual que involucra un conjunto de cinco acciones mentales con sus respectivos comportamientos y cinco niveles de desarrollo del razonamiento covariacional.

> En la Tabla 1.1 se proporciona una descripción de las cinco acciones mentales del razonamiento razonamiento covariacional y de los comportamientos asociados. Las acciones mentales del marco conceptual de la covariación proporcionan un medio para clasificar los comportamientos que se pueden ver cuando los estudiantes se involucran en tareas de covariación; sin embargo, la habilidad de razonamiento covariacional de un individuo, relativa a una tarea particular, se puede determinar sólo examinando el conjunto de comportamientos y acciones mentales exhibido mientras responde a esa tarea (Carlson et al., 2003, p. 127).

Tabla 1.1 Acciones mentales del marco conceptual para la covariación (Carlson et al., 2003, p. 127)

Acción mental	Descripción de la acción mental	Comportamientos
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (v.g., y cambia con cambios en x).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la	Localización de puntos/construcción de rectas secantes.

	otra variable.	Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).

Interpretando a Carlson et. al (op. cit.), un estudiante puede clasificar en un determinado nivel, de acuerdo con la imagen global para poder sustentar las imágenes mentales del estudiante. Ademas, Carlson et al. (2003) “Se dice que la habilidad de razonamiento covariacional de alguien ha alcanzado un nivel dado de desarrollo cuando sustenta a las acciones mentales asociadas con ese nivel y las acciones asociadas con todos los niveles que están por debajo” (p. 128).

Tabla 1.2 Marco conceptual para los niveles de covariación (Carlson et al., 2003, p. 128)

Nivel	Características
Nivel 1 (N1) Coordinación	En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2) Dirección	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentas por imágenes de N4
Nivel 3 (N3) Coordinación cuantitativa	En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.

Nivel 4 (N4) Razón promedio	En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.
Nivel 5 (N5) Razón instantánea	En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o, al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

Por otra parte, el propósito principal de la resolución de problemas es permitir a los estudiantes pensar por sí mismos propiciando que adquiera la más amplia experiencia, además se pretende que se utilicen estrategias y técnicas como el análisis del enunciado, el uso de la prueba y error o dar solución a un cuestionamiento más simple que sirva como base para realizar la actividad planteada. La resolución de problemas es una cuestión de habilidad, esta se adquiere mediante la imitación y por supuesto, la práctica.

También se busca afianzar las propias capacidades para afrontar problemas, además de comprender las relaciones matemáticas y tomar decisiones a partir de ellas (Polya, 1990). Los fundamentos teóricos que se busca trabajar con los estudiantes estarán centrados en revisar el concepto de pendiente de una recta y razón de cambio como cimientos para el entendimiento del concepto de variación, pH del suelo y efecto invernadero.

Método

El método aplicado en la presente investigación es de corte cualitativo, al tomar como unidades de análisis las hojas de trabajo resueltas por de los estudiantes, observación en el aula, así como de las exposiciones realizadas por cada uno de los equipos. La población constó de un grupo conformado por cinco estudiantes de cada uno de los cuatro grupos de tercer semestre de la carrera de Técnico Agropecuario del Centro de Bachillerato Tecnológico Agropecuario No. 28 (CBTa. 28) de Canatlán, Durango. Se integraron equipos de tres y cuatro estudiantes para las prácticas del pH y del efecto invernadero respectivamente.

La práctica correspondiente a la medición del pH del suelo se tomó como referencia la tesis de Reyes (2015) y se realizaron cambios. Mientras que la práctica correspondiente al efecto invernadero se tradujo del libro de experimentos *Middle School Science with Vernier* (Vernier Software & Technology, 2015) y a partir de ésta se diseñó la hoja de trabajo correspondiente. En las hojas de trabajo además de los conceptos matemáticos se incluyeron contenido del submódulo (manejo del suelo y agua) en el que se desarrollaron las prácticas. Se trabajó a lo largo de seis días, durante los cuales se desarrollaron las siguientes actividades: 1. Exposición del pH y el efecto invernadero, Conformación de equipos y Toma de muestras por parte de los equipos; 2. Medición del pH en las muestras recolectadas; 3. Medición de la temperatura para la práctica del efecto invernadero y Resolver la hoja de trabajo por equipo; 4. Elaborar la exposición de sus resultados por equipos; 5. Exposición de los resultados por parte de los equipos.

La medición del pH del suelo de diferentes zonas de Canatlán fue realizada por cuatro equipos de tres integrantes (en el caso del equipo 2, los integrantes fueron 5). Para efectuar cada uno de las prácticas se les entregó a cada uno de los equipos el material necesario para la recolección de muestras, el cual consistía de cinco frascos numerados acorde con la profundidad que se debía tomar la muestra; además tenía una etiqueta con las instrucciones a seguir para la recolección, también se añadieron cinco cucharas para medir y recolectar cada una de las muestras. Cabe destacar que debido a la formación de los estudiantes ellos ya contaban con antecedentes sobre el muestreo de suelo lo cual facilitó el trabajo a realizar.

Las zonas destinadas para la recolección de muestras fueron: equipo 1: La Cañada; 2. Huerta de Toño Martell (Camino al Potrero); 3. Caboraca y 4. Comunidad de Martín López. Los equipos llevaron sus muestras al salón de clases donde se realizó la medición utilizaron el sensor de pH y la interfaz *Logger Lite*. Cada estudiante realizó al menos la medición de una de las muestras de su equipo, para que aprendieran el funcionamiento de los sensores y la importancia de la obtención de datos.

La práctica correspondiente al efecto invernadero la ejecutaron dos equipos de cuatro integrantes, se le entregó a cada uno de los equipos el material necesario el cual fue de: dos frascos, dos sensores de temperatura, dos reglas, una lámpara, plástico autoadherente, una plantilla para la distribución de los frascos, un poco de tierra y una lámpara, así como las indicaciones a seguir para la realización de la práctica. Los estudiantes siguieron las indicaciones que les habían sido entregadas anteriormente, en este caso los estudiantes trabajaron con dos sensores de temperatura y un *LabQuest.* Con el fin de recabar información sobre el manejo de los datos y la comprensión del alumno de los temas matemáticos aplicados, después de la recolección de los datos, se procedió a responder las hojas de trabajo. Las cuales posteriormente apoyaron para analizar los procesos de comprensión del concepto de variación por parte de los estudiantes.

Resultados

En las hojas de trabajo se pudo observar que los estudiantes tienen dificultades para identificar las variables, precisar el cambio que se presenta entre ellas, así como relacionar gráficamente estos conceptos. Además de cometer errores aritméticos y no hacer una correcta reflexión entre los resultados obtenidos y los cuestionamientos que se les realizó. Un caso que se presentó en la mayoría de los estudiantes fue la problemática al describir los datos recolectados en el plano cartesiano, en algunos casos se graficaron puntos que no coincidían con los datos obtenidos, estos alumnos muestran acciones mentales descritas en el Nivel 2 de dirección (Ver Tabla 1.2).

En la exposición realizada para la difusión de los resultados presentan los datos recolectados y una representación gráfica de los mismos, pero se hace aún más evidente que los estudiantes no logran acceder al concepto de variación siendo ellos mismos quienes comentan lo sucedido al realizar las actividades que se les plantean y la problemática a la que se enfrentan al tratar de darles solución.

Con base en los resultados obtenidos en las hojas de trabajo podemos decir que las acciones mentales de los estudiantes alcanzan apenas la AM3 (Ver Tabla 1.1), ya que describen correctamente cada uno de los ejes del plano cartesiano, pueden describir la dirección de cambio de una variable, pero se encuentran dificultades al localizar puntos, por ejemplo, grafican el origen como un punto extra en el eje *x*. Todos ellos son incapaces de verbalizar la razón de cambio, en algunos casos únicamente se grafica la profundidad y el pH o la temperatura obtenida para uno de los valores obtenidos, en otro caso se grafican correctamente los valores, pero no se obtiene la razón promedio de cambio, mientras que los casos que la obtienen no es correcta. Por lo tanto, los estudiantes alcanzan como nivel de razonamiento covariacional el Nivel 3 (Ver Tabla 1.2), donde se describe la coordinación cuantitativa.

El 85% de los alumnos ostentan un nivel de razonamiento covariacional por debajo del Nivel 4 de razón promedio (Ver Tabla 1.1), ya que son capaces de coordinar los cambios de una variable, su dirección y cantidad con respecto a cada uno de los valores, pero se encuentran con dificultades para comprender la razón de cambio que se presenta.

Conclusiones

La aplicación de tecnologías con el uso de los sensores fue un estimulante para los estudiantes y propició en ellos una actitud de trabajo e integración. Durante la ejecución de las prácticas la actitud de los alumnos fue positiva y se mostraban atentos al comportamiento que presentaba el pH en cada muestra o la variación de la temperatura entre los modelos y como se registraban en la interfaz. Sin embargo, su actitud cambio al presentarles las hojas de trabajo y en varias ocasiones mostraron su descontento con esta actividad haciendo comentarios negativos.

Los niveles de covariación presentados por los estudiantes se encuentran muy por debajo de los esperados ya que en su mayoría se ubican en el primer nivel debido a las acciones mentales que muestran en la resolución de sus hojas de trabajo. Cabe mencionar que a pesar de que algunos alumnos contestan las hojas de trabajo no lograron un aprendizaje significativo del concepto de variación.

Se sugiere desarrollar futuras investigaciones en las cuales los profesores apliquen otro tipo de sensores relacionados a problemas reales, para que los estudiantes de manera continua experimenten desde la recolección de datos hasta el análisis de las relaciones entre las variables para acceder al concepto de variación.

Referencias bibliográficas

Caballero Pérez, M., y Cantoral Uriza, R. (2013). El desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional entre los profesores de bachillerato. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26,* 1585-1593, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Carlson M., Jacobs S., Coe E., Larsen S. y Hsu E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA 8 (2*), 121-156.

García Rodríguez, M. L. (2009). Construcción del concepto de variación con apoyo de una herramienta computacional. *Innovación Educativa Julio-septiembre*, 19-25.

Gómez Otero, E. J. (2007). *La construcción de la noción de variable*. Tesis de Doctorado no publicado. Centro de Investigación de Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. Ciudad de México, México.

Polya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Reyes Nava, N.E. (2015). *Representaciones semióticas del concepto de variación: Medición del pH del suelo*. Tesis de licenciatura no publicada. Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango. Durango.

Secretaría de Educación Pública (2011). *Documento base del bachillerato general*. México. Recuperado el 13 de diciembre de 2015, de http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/01-programasdeestudio/documentobase/doc_base_032012_rev01.pdf.

Vernier Software & Technology. Recuperado el 29 de Julio de 2015 del sitio: https://www.vernier.com/experiments/msv/3/greenhouse_effect/.

DISEÑO DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE LA PENDIENTE COMO RAZÓN DE CAMBIO PARA ALUMNOS DE NIVEL MEDIO SUPERIOR UTILIZANDO HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

Francisco Agustín Zúñiga Coronel, Edgar Javier Morales Velasco
Universidad Autónoma de Chiapas. (México)
maestro_coronel@hotmail.com; edgarmvdj@hotmail.com

RESUMEN: El artículo muestra el diseño de una secuencia didáctica interactuando con una maqueta movible que representa un fenómeno real para el aprendizaje del concepto de pendiente como razón de cambio, debido a la dificultad que tiene la mayoría de alumnos para comprender este concepto. Se analiza el comportamiento del móvil usando una calculadora graficadora con un sensor que permite obtener la gráfica y posteriormente se interactúa con una applet para comprender algunas propiedades de la gráfica. Las actividades se enfocaron en la teoría de las situaciones didácticas siguiendo el marco metodológico de la ingeniería didáctica. El principal resultado es que los alumnos mejoran su aprendizaje del concepto de pendiente como razón de cambio interactuando con objetos concretos.

Palabras clave: razón de cambio, pendiente, graficación, tecnología, nivel medio superior

ABSTRACT: This paper shows the design of a didactic sequence which interacts with a movable model that represents a real life phenomenon to learn the concept of slope as a reason of change, due to the difficulty that most students have to understand such concept. The behavior of the moving object is analyzed by using a graph calculator with a sensor that allows obtaining the graph and later interacts with a devise to understand some of the graph's properties. The tasks were focused on the theory of teaching situations following the didactic engineering methodological framework. The most outstanding outcome is the improvement of the students' learning with respect to the concept of slope as a reason of change by interacting with real -life objects.

Key words: reason of change, slope, graph, technology, secondary school

Introducción

Las matemáticas son de gran importancia para resolver diversos problemas, que ayudan a desarrollar nuestro pensamiento lógico para la toma de decisiones y a comprender nuestro entorno. El concepto de pendiente como razón de cambio tiene muchas aplicaciones en diversos contextos tales como: velocidad y aceleración de un móvil, elongación de una liga respecto a la fuerza aplicada, temperatura de una habitación, presión del aire dentro de una jeringa respecto al volumen, rotación de un motor respecto al tiempo, intensidad luminosa respecto al voltaje, flujo de agua en una tubería, calorías quemadas respecto a la distancia recorrida, presión del agua respecto a la profundidad de un buzo y el volumen de aire dentro de un balón respecto al radio. Hoy día los educadores e investigadores de distintas disciplinas se encuentran preocupados por el bajo rendimiento académico que tienen los alumnos en los diferentes niveles educativos.

De lo anterior la matemática se considera una disciplina esencial para el desarrollo académico de los alumnos, en la cual se presentan diversas dificultades de aprendizaje de sus conceptos (Farias y Pérez, 2010). Dentro de nuestra práctica docente en el nivel medio superior observamos la dificultad que presentan los alumnos en reconocer el significado que se tiene de la pendiente como razón de cambio, de acuerdo a la problemática que se tiene de este objeto didáctico, los alumnos presentan deficiencias en su progreso en niveles escolares superiores, ya que este objeto didáctico se aborda en temas de cálculo diferencial. Esta dificultad de aprendizaje del concepto de pendiente como razón de cambio se debe a los métodos de enseñanza dentro del contexto escolar, como el predominio de los métodos algorítmicos y numéricos, así como también de los siguientes factores: la mayoría de los alumnos no tienen los conocimientos sobre cómo cambia una variable con respecto a otra de acuerdo a una tabla de valores, una gráfica, una función o una experiencia cotidiana, buscan la similitud con otros ejercicios considerando los métodos usados por el docente.

Actualmente los alumnos que se encuentran en los salones de clases son personas nacidas en la era de la tecnología lo que permite poder usar para el aprendizaje de las matemáticas como una forma de enseñanza innovadora e interactiva. Desde este punto de vista epistemológico se encuentra el desarrollo de la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos y por otro se encuentra el desarrollo de la tecnología (calculadoras, sensores, computadoras, celulares e internet) como procesos de enseñanza–aprendizaje. Es así que encontramos que el sólo uso del contexto algebraico y numérico deja en la mente del alumno una restringida e insatisfecha imagen del concepto de pendiente como razón de cambio (Morales, 2011). De acuerdo a la problemática planteada se generó la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué aportaciones al aprendizaje del concepto de pendiente como razón de cambio otorgan la utilización de una calculadora graficadora conectada a un sensor de movimiento y la interacción con una applet, para alumnos de nivel medio superior? Con el objetivo de diseñar e implementar una secuencia didáctica utilizando esta tecnología, de modo que permita la resignificación del concepto de pendiente como razón de cambio en alumnos de nivel medio superior.

Las matemáticas tienen gran aplicación en todas las ciencias y en la vida cotidiana, siendo indispensables para todo sistema educativo (Lluis, 2006). Es por ello que se consideran herramientas para resolver problemas en diversos contextos, por lo cual el concepto de pendiente como razón de cambio es un objeto didáctico que tiene diversas aplicaciones, ya que todo a nuestro alrededor se encuentra en movimiento, es decir, existe una relación de cambio entre un fenómeno respecto a otro. La gran mayoría de alumnos se encuentran inmersos de manera natural y cotidiana con herramientas tecnológicas, de modo que es importante asumir un papel que genere una devolución del conocimiento que sea para ellos de interés en su desarrollo académico, y sobretodo haciendo que se involucren con situaciones amigables y cotidianas (González y Cantoral, 2014).

Los recursos tecnológicos han llegado a los salones de clases desarrollando situaciones de aprendizaje que fortalecen y replantean los contenidos y métodos de enseñanza. Dentro de nuestra investigación creemos que el uso de este aprendizaje de las matemáticas utilizando calculadoras graficadoras con sensores de movimiento son una nueva forma de aprender matemáticas, ya que se pueden interpretar fenómenos físicos del entorno; con esta herramienta tecnológica se pueden analizar e interpretar los comportamientos por medio de las gráficas (Lupiáñez y Codina, 2001). Las gráficas son herramientas de visualización que ayudan a interpretar información de situaciones reales y a comprender los comportamientos de los fenómenos físicos, el cual provoca un mejor aprendizaje (Suárez y Cordero, 2008). Además, el uso de applets es interesante para comprender algunos conceptos matemáticos, al interactuar con Cabri II Plus se desarrolla una nueva visión a las matemáticas, como algo interactivo entre el usuario y la computadora, ya que se pueden manipular las construcciones geométricas modificando los objetos en la zona de trabajo descubriendo nuevos conceptos, generando conjeturas y demostrando teoremas de forma geométrica y numérica (Bainville, 2003).

Teoría de situaciones didácticas

En esta investigación se empleó la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (2007) uno de los principales investigadores en didáctica de las matemáticas, la cual se tomó como base para las actividades de la secuencia didáctica. De acuerdo con Reeve (2009) la teoría de situaciones didácticas se considera una estructura intelectual que se puede utilizar para identificar y explicar las relaciones que existen entre fenómenos observables. La teoría de las situaciones didácticas estudia y modela fenómenos didácticos, permite diseñar y explorar un conjunto de secuencias de clase planteadas por el profesor. La teoría propone el estudio de las condiciones en las cuales se constituyen los conocimientos matemáticos. Su objetivo es la determinación de las condiciones en las que se produce la apropiación del saber por los alumnos donde el investigador debe participar en la producción (o diseño) de las situaciones didácticas que analiza (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza, 2005).

Las situaciones didácticas se clasifican en: situación de acción, situación de formulación y situación de validación. En nuestra investigación la situación acción es el primer acercamiento que tiene el alumno con las actividades donde se genera una interacción entre compañeros y el modelo físico. La situación de formulación es el proceso de realizar la actividad de acuerdo a lo que se pretende aprender cuyo objetivo es la comunicación en informaciones entre alumnos. La situación validación el alumno no solo tiene que comunicar una información, sino que también tiene que argumentar que lo que dice es verdadero (Brousseau, 2007).

■ Ingeniería didáctica

En esta investigación se empleó la metodología de ingeniería didáctica que surge y se desarrolla como una metodología de investigación. La ingeniería didáctica se diferencia de los métodos experimentales usuales en educación por su modo de validación. Este modo de validación es interno y basado en la confrontación entre un análisis a priori en el cual se encuentra un cierto número de hipótesis y un análisis a posteriori que se apoya en los datos obtenidos de la implementación (Artigue, Douady, Moreno y Gómez, 1995).

La metodología designa un conjunto de actividades de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor, para efectuar un proceso de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo de alumnos. El proceso experimental se divide en cinco fases: análisis preliminar, análisis a priori, experimentación, análisis a posteriori y confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori. La ingeniería didáctica como señala Gascón (1998) es un producto resultante de un análisis a priori (supuestos), y la puesta en escena (experimento) acorde con las condiciones dinámicas de una clase para la obtención de los resultados (a posteriori) con la finalidad de analizarlos (confrontación) y obtener conclusiones.

■ Análisis preliminar

De acuerdo a la revisión y análisis de los programas de estudio, de la forma que se enseña, los contenidos de los libros de texto de nivel básico (secundaria) y del nivel medio superior acorde a los programas de estudios de la SEP (2011) y de algunos antecedentes y actividades sobre el concepto de pendiente como razón de cambio se diseñaron las actividades de la secuencia didáctica centrándose en las tecnologías digitales (calculadoras graficadoras, sensores de movimiento y software).

■ Experimentación

La secuencia didáctica se aplicó a seis alumnos de nivel medio superior de 14 y 15 años como se muestra en la tabla 1. La secuencia se dividió en dos fases: la primera fase se implementó con las dos alumnas (ver foto 1) y la segunda fase se implementó con los cuatro alumnos restantes (ver foto 2). La implementación de la secuencia didáctica de los cuatro alumnos se llevó a cabo en un salón de clases y de las alumnas en un espacio de trabajo. La implementación requirió los siguientes materiales: modelo de la autopista, carrito, calculadora graficadora, cronómetro, sensor de movimiento y computadora.

Tabla 1. Datos de los alumnos que se les aplicó la secuencia didáctica

Nombre	Escolaridad	Ciudad	Edad	Escuela
Obed	2do. Semestre	Tuxtla Gutiérrez, Chiapas	15 años	Preparatoria No. 1
Damián	2do. Semestre	Tuxtla Gutiérrez, Chiapas	15 años	Preparatoria No. 1
Héctor	2do. Semestre	Tuxtla Gutiérrez, Chiapas	15 años	Preparatoria No. 1
Carlos	2do. Semestre	Tuxtla Gutiérrez, Chiapas	15 años	Preparatoria No. 1
Arlette	2do. Semestre	Teopisca, Chiapas	14 años	COBACH plantel 24
Citlaly	2do. Semestre	Teopisca, Chiapas	15 años	COBACH plantel 24

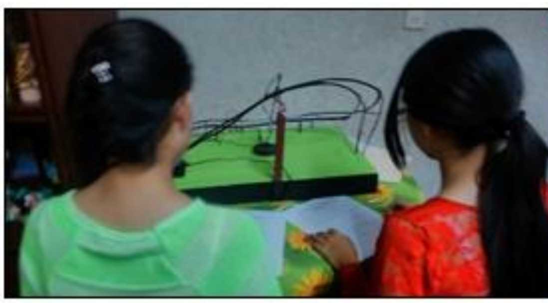


Foto 1. Alumnas interactuando con el modelo **Foto 2.** Alumnos interactuando con el modelo

Análisis a priori

El diseño de las actividades para la secuencia didáctica se dividió en tres actividades. En la actividad 1 se espera que los alumnos interactúen directamente con el modelo de la autopista cambiando el ángulo de giro del potenciómetro para el movimiento del móvil, completando una tabla de valores utilizando un cronómetro de celular. También se espera que los alumnos construyan la gráfica que representa una recta considerando al eje x como el tiempo y al eje y como el número de vueltas interpretando a la razón de cambio entre el número de vueltas y el tiempo. Está actividad corresponde a la situación acción.

Actividad 1 de la secuencia didáctica

1. Conecta la fuente de alimentación a la corriente alterna. Activa el cronómetro y observa el tiempo en que tarda el móvil en dar una vuelta.
2. Completa la tabla siguiente:

Número de vueltas del móvil	Tiempo transcurrido
0	
1	
2	
3	
4	
5	

3. De acuerdo a la tabla anterior responde los siguientes cuestionamientos:
   a) ¿En qué tiempo el móvil da tres vueltas?
   b) ¿Cuántas vueltas da el móvil en 40 segundos?
   c) ¿En qué tiempo el móvil da cinco vueltas?
   d) ¿Cuántas vueltas da el móvil en 20 segundos?
4. Dibuja un plano cartesiano (sistema coordenado rectangular).
5. Ubica los puntos en el plano cartesiano de acuerdo a las coordenadas de la tabla 1 (eje y = número de vueltas del carrito, eje x = tiempo transcurrido). Une todos los puntos para generar la gráfica.

De acuerdo a la gráfica que creaste responde los siguientes cuestionamientos:

   a) ¿En qué tiempo el móvil da tres vueltas?

b) ¿Cuántas vueltas da el móvil en 1 minuto?

c) ¿En qué tiempo el móvil da cinco vueltas?

d) ¿Cuántas vueltas da el móvil en 20 segundos?

En la actividad 2 se espera que los alumnos trabajen con el sensor de movimiento capturando los datos de movimiento del móvil, generando la gráfica correspondiente en la calculadora e interpretando la razón de cambio entre el avance del móvil y el tiempo transcurrido. Esta actividad corresponde a la situación de formulación ya que los alumnos comentan sus observaciones.

Actividad 2 de la secuencia didáctica (entorno a la calculadora)

1. Conecta el sensor de movimiento a la calculadora graficadora, activa la interfaz del sensor en la calculadora. Coloca el sensor de movimiento frente a la zona donde la pista es en línea recta.
2. Coloca el móvil donde comienza la línea recta. Coloca una regla para medir el avance del móvil.
3. Conecta la fuente de alimentación a la corriente alterna conjuntamente activa el sensor de movimiento.
4. Observa la gráfica generada en la interfaz de la calculadora y responde los siguientes cuestionamientos:

Indica que variable representa el eje x y que variable representa el eje y y responde los siguientes cuestionamientos:

a) ¿En qué tiempo el carrito avanza 10 cm?

b) ¿Cuántos centímetros avanza el carrito al pasar 3 segundos?

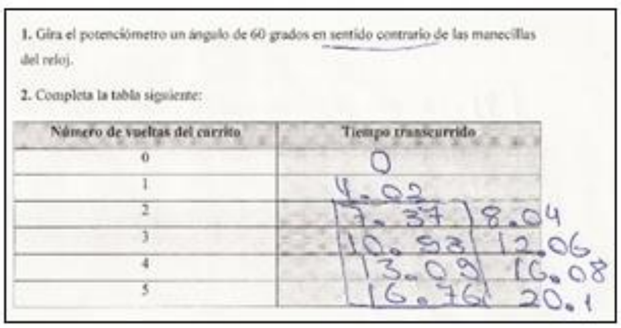
c) En qué tiempo el carrito avanza 15 cm?

d) ¿Cuántos centímetros avanza el carrito al pasar 5 segundos?

En la actividad 3 se espera que los alumnos interactúen con una applet creada con el software Cabri II Plus, modificando las coordenadas de los puntos, observando el ángulo de inclinación de la recta, el valor de la pendiente y la función lineal de la recta. Comprenden la relación entre el cambio del ángulo de inclinación y el valor de la pendiente. Esta actividad presenta la situación de validación donde el alumno da más argumentos matemáticos de acuerdo a sus observaciones.

Análisis a posteriori

Los resultados obtenidos de la actividad 1 son los siguientes: la mayoría de los alumnos reconocen una relación, que existe un cambio entre el giro del potencíómetro y la velocidad del móvil. Todos los alumnos completan la tabla de valores observando las vueltas del móvil y el tiempo mostrado en el cronómetro y responden los cuestionamientos de acuerdo a la tabla dando valores aproximados como se muestra en la figura 3. Por último, grafican la tabla obteniendo una recta (figura 4) respondiendo los cuestionamientos observando la razón de cambio entre el número de vueltas y el tiempo.



1. Gira el potenciómetro un ángulo de 60 grados en sentido contrario de las manecillas del reloj.

2. Completa la tabla siguiente:

Número de vueltas del carrito	Tiempo transcurrido
0	0
1	4.02
2	7.37 8.04
3	10.53 12.06
4	13.09 16.08
5	16.76 20.1

Figura 3. Tabla de valores

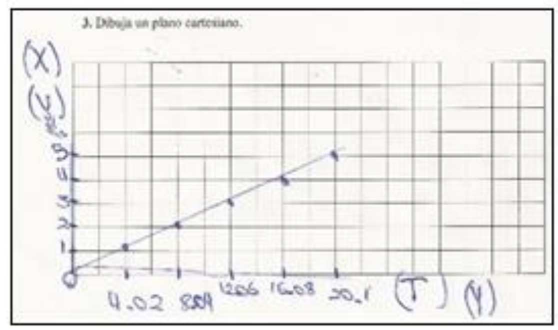


Figura 4. Gráfica de movimiento

Los resultados obtenidos de la actividad 2 son los siguientes: los alumnos activan la interfaz de la calculadora graficadora para activar el sensor de movimiento, se les dificulta colocar el sensor a manera que se obtenga la gráfica correcta, una vez obtenida la gráfica identifican al eje x como el tiempo y al eje y como el avance del móvil. En esta actividad la mayoría comprende a la razón de cambio entre el avance del móvil y el tiempo. En tanto que para la actividad 3 son los siguientes: los alumnos modifican las coordenadas y observan la posición de la recta, el ángulo y la pendiente dejando a un lado la función lineal. Se dan cuenta que existen la razón de cambio entre la pendiente y el ángulo de inclinación.

Confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori

En la actividad 1 los alumnos completan una tabla de valores y con ella generan la gráfica correspondiente reconociendo la razón de cambio entre el número de vueltas y el tiempo. En la actividad 2 los alumnos interactúan con el sensor de movimiento visualizando gráficas reconociendo la razón de cambio entre el avance del móvil y el tiempo. En la actividad 3 algunos alumnos interactúan con la applet modificando las coordenadas reconociendo la razón de cambio entre la pendiente y el ángulo de inclinación.

Conclusión

En este trabajo de investigación a manera de conclusión decimos que algunos recursos tecnológicos ayudan en cierta medida a la comprensión del concepto de pendiente como razón de cambio, es por ello que los alumnos participantes comprendieron en cierta medida el concepto de pendiente como razón de cambio interactuando con el modelo físico, el cronómetro y la calculadora graficadora conectada al sensor de movimiento. Cada actividad aportó un conocimiento sobre la razón de cambio tal es el caso de la actividad 1 donde identificaron que al cambiar el giro del potenciómetro cambiaba la velocidad y el número de vueltas respecto al tiempo; en la actividad 2 identificaron el avance del móvil respecto al tiempo; y en la actividad 3 el cambio de la pendiente respecto al ángulo de inclinación.

La interacción con la applet no fue muy significativa, ya que todos los alumnos no contaron con los conocimientos básicos del manejo del software debido a que fue su primera experiencia. Los alumnos no se interesaron en interactuar con la función lineal para modificar sus parámetros solo se enfocaron en observar el cambio de posición de la recta, la pendiente y el ángulo de inclinación. Es una realidad que todas las actividades no son cien por ciento aplicables y eficaces ya que depende del tipo de alumnos y el contexto donde se implemente, así como el buen manejo de las herramientas tecnológicas.

Referencias bibliográficas

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Bogotá, Colombia: Iberoamérica.

Bainville, E. (2003). Cabri Geometre II Plus. Francia. Recuperado de http://www.cabri.com/es/descargar-cabri-2-plus.html#manuales.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires, Argentina: Zorzal.

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Analís, J., Rodríguez, R. y Garza, A. (2005). *Desarollo del pensamiento matemático*. México, DF: Trillas.

Farias, D. y Pérez, J. (2010). Motivación en la enseñanza de las matemáticas y la administración. *Formación Universitaria*, 3(6), pp. 33- 40.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *18*(52), 7–33.

González, A. y Cantoral, R. (2014). Una propuesta de aprendizaje para la pendiente con el uso de Geogebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27* (pp. 2151–2158). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Lluis, E. (2006). Teorías matemáticas, matemática aplicada y computación. *Ciencia Ergo Sum*, *13*(1), 91–98.

Lupiáñez, J. y Codina, A. (2001). Calculadoras y sensores: la matemática en movimiento. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/240620569 _calculadoras_y_sensores_la_matematica_en_movimiento.

Morales, E. (2011). *Resignificación de los campos de pendiente en las ecuaciones diferenciales en un contexto electrónico.* Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Chiapas, México.

Reeve, J. (2009). *Motivación y emoción.* México, DF: McGraw-Hill.

Suárez, L. y Cordero, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación de un ambiente tecnológico. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, *3*(1), 51-58.

CONSIDERACIONES EPISTÉMICAS SOBRE LOS OBJETOS GEOMÉTRICOS EN AMBIENTES DE GEOMETRÍA DINÁMICA. ANÁLISIS INICIAL

Sergio Rubio-Pizzorno, Gisela Montiel Espinosa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav). México
sergio.rubio@cinvestav.mx (www.zergiorubio.org), gmontiele@cinvestav.mx

RESUMEN: La tecnología digital ha penetrado e impactado a la educación y, por lo tanto, a la educación matemática. Muestra de esta aseveración es el uso de ambientes de geometría dinámica, como GeoGebra, en el estudio de geometría, tanto a nivel formal como informal. La proliferación de este tipo de software, propician discusiones epistémicas, respecto a la constitución del saber geométrico. En este sentido, presentamos el análisis a un taller realizado en Relme 30, el cual busca abrir el debate en cuanto al estatus de precisión y exactitud de los objetos geométricos en ambientes dinámicos, apelando a su naturaleza epistémica. Por último nos interesa conocer la forma en que los asistentes al taller, perciben el trabajo geométrico en ambientes dinámicos, y reconocer si esa percepción se mantiene o es modificada a partir de la experiencia vivida en el taller.

Palabras clave: geometría dinámica, análisis epistémico, construcción dinámica, estatus de precisión y exactitud

ABSTRACT: The digital technology has taken part and impacted education, and therefore mathematical education. An example of such assumption is the use of dynamic geometry settings such as GeoGebra in geometry study in both formal and informal level. The proliferation of this kind of software, propitiate epistemic discussions, with regards to the content of the geometric knowledge. In this sense, we presented the analysis in a workshop held in the 30th RELME, which was intended to debate about the status of accuracy and exactness of geometric objects in dynamic settings, according their epistemic nature. Finally, we are interested in knowing how the workshop participants perceive geometric work in dynamic settings, and whether their perception changes or not from the experience they had in the workshop.

Key words: dynamic geometry, epistemic analysis, dynamic construction, accuracy and exactness status

Introducción

En este escrito se presenta un análisis del taller realizado en la trigésima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, en el cual se trataron actividades cuyo propósito es poner en juego elementos inherentes de la Geometría Dinámica (GD). El análisis es realizado con la ayuda de tres herramientas teóricas que aluden a características epistémicas de los objetos de la GD.

Antecedentes

El taller fue estructurado a partir de dos propósitos declarados *a priori*: (1) distinguir entre un boceto y una construcción geométrica, empleando la prueba del arrastre como criterio para la diferenciación; y (2) confrontar la clasificación de polígonos (cuadriláteros) a través del análisis de las construcciones geométricas dinámicas. El primer propósito está inspirado en la definición de *prueba del arrastre* que realizan Arzarello, Olivero, Paola y Robutti (2002):

> Mover un punto libre o semi libre [dependiente], para ver si el dibujo mantiene las propiedades iniciales. Si esto ocurre, entonces la figura pasa la prueba; en caso contrario, el dibujo no fue construido de acuerdo a las propiedades geométricas que se quería que tuviese (p. 67).

En esta definición los autores dejan entrever que los objetos de la GD tienen diferente estatus de precisión y de exactitud, según respondan o no, a las propiedades geométricas que se esperaba que tuviese tal objeto. Por ejemplo, se pretende construir un triángulo isósceles, pero luego de ser construido y aplicarle la prueba del arrastre, el objeto no conserva las propiedades que lo hacen un triángulo isósceles. En este caso podemos decir que el proceso de construcción no fue preciso, ya que el resultado no fue exactamente un triángulo isósceles, como era el propósito de la tarea.

Por lo tanto, estamos en ante la posibilidad de distinguir entre los objetos geométricos dinámicos que pasan la prueba del arrastre y los que no. De los objetos que pasan la prueba, es decir, los que preservan las propiedades geométricas que se esperaban que tuviesen, dependiendo de su proceso de construcción, se pueden obtener distintos resultados. Imagine la construcción de un triángulo isósceles en GeoGebra. Primero se traza un segmento dado dos puntos en el plano, se traza la circunferencias con centro en un extremo del segmento y radio la longitud del segmento. Luego se escoge un punto cualquiera de la circunferencia como tercer vértice, con lo cual queda determinado el triángulo isósceles.

Al aplicar la prueba del arrastre a esta construcción, se comprueba que las propiedades de triángulo isósceles se conservan a pesar del movimiento. Ahora considere que en el primer paso del proceso de construcción, en vez de crear dos puntos libres, se crea solo uno y luego se utiliza la herramienta *Segmento de longitud dada* para determinar el segundo punto. Luego se sigue el mismo procedimiento de la construcción anterior. ¿Hay diferencias entre ambas construcciones? La respuesta es sí y la prueba del arrastre es clave para reconocer tales diferencias. Al aplicar la prueba del arrastre a algún vértice libre del primer triángulo, éste experimenta rotaciones y traslaciones, es decir, transformaciones isométricas. En cambio al aplicar la prueba del arrastre a algún vértice libre del segundo triángulo, éste sufre rotaciones, traslaciones, homotecias y simetrías, es decir, transformaciones homomórficas.

A partir de estas características, decimos que el primer triángulo es un *triángulo isométrico* y el segundo un *triángulo homomórfico*. Es posible acceder a la construcción de esta situación en (Rubio-Pizzorno, 2016b) para comparar los efectos en cada triángulo, al arrastrar sus respectivos vértices. Esta situación da pie a cuestionar los polígonos como los conocemos y confrontar las clasificaciones que hacemos de ellos. De esta manera se comienza a delinear el segundo propósito del taller, atendiendo a este fenómeno propio de la GD, a través de preguntarnos cómo realizar el ejercicio de clasificar polígonos, considerando esta cualidad dinámica.

Diseño de actividades para el taller

Con los propósitos del taller delineados, se diseñaron actividades que detonaran la discusión respecto del estatus de precisión y exactitud de los objetos dinámicos, y confrontaran la clasificación de cuadriláteros, considerando las propiedades dinámicas ya mencionadas.

Actividad 1

Para discutir el primer propósito del taller, se dispuso de la actividad 1 (Rubio-Pizzorno, 2016a, p. 2.1), la cual se presentó a los asistentes en una hoja de trabajo dinámico, en la que aparecen seis polígonos, que a simple vista parecen cuadrados (ver Imagen 1).

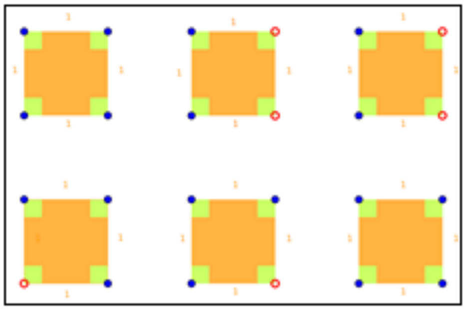


Imagen 1. Actividad de inicio

El objetivo de esta tarea es determinar cuáles de esos seis objetos son realmente cuadrados, para lo cual, es necesario aplicar la prueba del arrastre a cada uno de los objetos. Uno de los posibles resultados de esta tarea se muestra en la Imagen 2, donde aprecia una versión de la construcción que representa cada objeto.

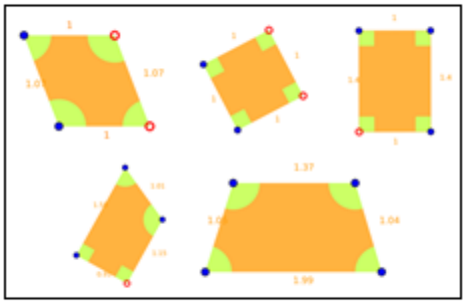


Imagen 2. Actividad luego de aplicar la prueba del arrastre

Actividad 2

Para abordar el segundo propósito del taller, se dispuso la actividad 2 (p. 3.4), la cual es muy similar a la actividad 1, pero con una diferencia sutil y significativa. En la actividad de inicio, se presentaron seis objetos de los cuales sólo uno correspondía exactamente a un cuadrado; en la actividad 2 se presentan seis objetos también, con la misma apariencia visual que los de la actividad de inicio (ver Imagen 1) y se realiza la misma pregunta, respecto de cuáles son cuadrados. En la respuesta a esta pregunta radica la diferencia sutil: en esta actividad son dos los objetos que mantienen invariante las propiedades de ser cuadrado, luego de aplicarles la prueba del arrastre, como se muestra en la Imagen 3.

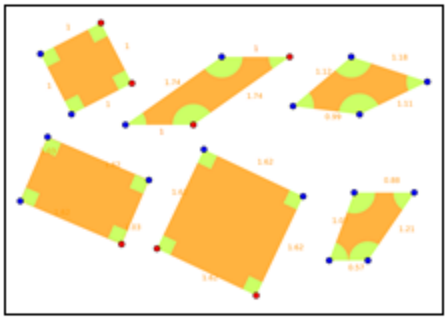


Imagen 3. Actividad 2 luego de aplicar la prueba del arrastre

Actividad puente

Hubo una tercera actividad (p. 3.1) al comienzo de la segunda sesión del taller, la cual sirvió como puente entre la actividad 1 y la actividad 2, relacionando ambos propósitos del taller. Esta actividad fue añadida al plan original del taller, debido a las respuestas y reacciones de los asistentes, quienes aludian a la necesidad de conocer el proceso de construcción de cada cuadrilátero, para complementar los análisis realizados con ayuda de la prueba del arrastre.

Esta actividad puente consistió en construir los cuadriláteros de la actividad 1 que no son cuadrado (paralelogramo, rectángulo, trapecio y trapecio rectángulo) siguiendo este procedimiento:

1. Identificar las propiedades características de cada cuadrilátero.
2. Reflejar tales propiedades en su proceso de construcción.
3. Emplear la prueba del arrastre para corroborar que las propiedades identificadas en el punto 1 permanecen invariantes.

Luego de realizadas las construcciones se pasó a una fase de discusión, donde se exhortaba la experiencia realizada por cada uno de los grupos que se constituyeron en el taller.

Características epistémicas de los objetos de la GD

Tanto las actividades diseñadas, así como la estructura completa del taller, responden a los propósitos declarados en la sección de Antecedentes. Las actividades atienden a los propósitos propiamente tal, y la estructura del taller cuida de la evolución de ideas que los relaciona.

Es importante notar que ambos propósitos ponen en juego aspectos epistémicos de los objetos de la GD: el primero hace referencia al estatus precisión y exactitud de los objetos geométricos en ambientes digitales; y el segundo pretende propiciar una discusión sobre cómo cambian ciertas prácticas matemáticas (clasificación, definición) al incorporar aspectos dinámicos a los objetos geométricos.

Cada uno de estos propósitos motivó el estudio y análisis de cuestiones epistémicas y epistemológicas de la geometría, lo cual nos permitió entender ciertos fenómenos que se dan en escenarios digitales y, de manera particular, en ambientes de GD.

Construcciones dinámicas

A partir de la definición de la prueba del arrastre que postula Arzarello et al. (2002), se vislumbra una necesidad de distinguir entre los objetos geométricos dinámicos, los que poseen un estatus de precisión y exactitud, de los que no lo poseen.

Para realizar esta distinción, primero fue necesario establecer a qué nos referimos cuando hablamos del estatus de precisión y exactitud, como el que reflejan las construcciones con regla y compás. De esta manera, tomamos la decisión metodológica de estudiar los Elementos de Euclides, así como los fundamentos filosóficos y sistémicos que sustentan la manera en que fueron redactados.

Como resultado de este estudio, se logró determinar que para que un objeto geométrico posea el estatus de precisión y exactitud, es necesario que durante su proceso de construcción se ciña a los resultados de la geometría euclidiana y, que las herramientas concretas utilizadas, encarnen a las herramientas teóricas declaradas por Euclides en sus Elementos (Rubio-Pizzorno y Montiel, 2016a). A este tipo de construcciones se les denomina *construcciones euclidianas*. Para precisar la herramienta utilizada, a las construcciones euclidianas realizadas en ambientes de GD, les denominamos *construcciones dinámicas*.

Cabe señalar que el término construcción se utiliza en sus dos acepciones: tanto como proceso y como producto de tal proceso (Martin, 1998).

■ Estatus de precisión y exactitud

Luego de determinar que las construcciones euclidianas, en general, y las construcciones dinámicas, en particular, son poseedoras del estatus de precisión y exactitud, resta dilucidar qué tipo de objetos de la GD pueden ser considerados como construcciones dinámicas. Para esto, hay que tener en cuenta que la acción de generar objetos geométricos exactos, es relativo a la tarea de construcción. Es decir, si se pretende construir un cuadrado, pero el procedimiento no fue suficientemente preciso, el resultado no es exactamente un cuadrado, sino que pudiera ser un rectángulo o un rombo. Por lo tanto, el objeto no corresponde a una construcción dinámica de un cuadrado, pero ¿podríamos asegurar que tampoco corresponde a una construcción dinámica, sólo porque no cumple con el objetivo de la tarea?

Al respecto, Rubio-Pizzorno y Montiel (2016c) proponen un análisis en tres niveles del proceso de construcción del objeto dinámico, con el que establecen características de precisión y exactitud relativas al tipo de análisis realizado. Cuando se ponen en juego características gráfico-espaciales (perceptuales) para realizar el análisis, sólo se puede aseverar que el objeto tiene la apariencia de la figura que se pretende construir. A este tipo de objeto se le denomina *boceto* de la construcción; cuando se emplean herramientas teóricas para hacer el análisis, se podría asegurar que el objeto corresponde a una *construcción particular* del objetivo, ya que aún no se ponen en juego las características dinámicas del objeto; al utilizar propiedades dinámicas para el análisis, mediante el uso de la prueba del arrastre, se podría asegurar que el objeto es una *construcción general* de la figura objetivo, ya que este tipo de análisis pone en juego, además de las propiedades dinámicas, las propiedades perceptuales y teóricas.

El término construcción dinámica (proceso de construcción ligado a los resultados de la geometría euclidiana y utilizando herramientas que encarnen las herramientas teóricas declaradas en los Elementos) y los niveles análisis del estatus de precisión y exactitud de los objetos de la GD, representan el estado actual del estudio que germinó a partir de la consideración inicial del propósito 1 del taller.

Naturaleza de los objetos de la GD

El segundo propósito pretende propiciar una discusión sobre cómo cambian ciertas prácticas matemáticas (clasificación, definición) al incorporar aspectos dinámicos a los objetos geométricos.

Al respecto, Rubio-Pizzorno y Montiel (2016b) proponen que los objetos de la GD poseen una triple esencia, la cual está dada por sus (1) propiedades teóricas, (2) propiedades gráfico-espaciales y (3) propiedades dinámicas. A diferencia de los objetos de la geometría euclidiana, que poseen una naturaleza dual, es decir, sólo propiedades teóricas y perceptuales.

Las propiedades dinámicas son heredadas al objeto a través de su proceso de construcción, y se ponen en juego mediante la acción del arrastre, como característica definitoria de la GD (Fahlgren y Brunström, 2014). Por lo tanto, el fenómeno ejemplificado con los triángulo isométricos y homomórficos, se debe a las propiedades dinámicas del objeto.

Es importante considerar que, ambos triángulos corresponden a construcciones dinámicas, y más aún, son construcciones generales de un triángulo isósceles. Esto da pie a cuestionar la clasificación y definición de polígonos, donde es necesario considerar los aspectos dinámicos de los objetos para desarrollar una estructura más robusta y completa.

Análisis del taller

Luego de haber declarado los propósitos del taller y describir las actividades construidas en consecuencia, se presenta el análisis de algunos episodios del taller, a la luz de las características epistémicas de los objetos de la GD, es decir, construcciones dinámicas, estatus de precisión y exactitud, y la naturaleza de los objetos de la GD.

Los episodios seleccionados dan cuenta de hechos claves y representativos ocurridos durante el taller, en los cuales se manifiestan las características epistémicas mencionadas. De esta manera se hace el contraste entre la intención de las actividades y lo que realmente provocaron en las acciones y reflexiones de los asistentes al taller.

En el análisis se usan nombres ficticios para mencionar la participación de los asistentes al taller, a fin de mantener su anonimato.

Episodio 1: Arraigo a la regla y el compás

Luego de desarrollar la Actividad 1, se presenta la prueba del arrastre como criterio para distinguir entre boceto y construcción, y así, analizar la construcción del objeto. Un asistente, Galvarino, menciona que todos los objetos que se están estudiando en el ambiente de GD son “simplemente dibujos”, ya que para tener una construcción geométrica (euclidiana) es estrictamente necesario utilizar regla y compás. Aunque reconoce que se podría tener construcciones euclidianas en el ambiente dinámico, si “se utiliza básicamente regla y compás”.

En este episodio es posible notar el arraigo del estatus de precisión y exactitud en los objetos geométricos, al proceso de construcción únicamente empleando regla y compás. Este arraigo fue modificado con rapidez por la mayoría de los asistentes, cuando se les hizo notar que las herramientas usadas en el proceso de construcción de los objetos dinámicos, son representantes de las herramientas teóricas declaradas por Euclides. Por lo que asumieron que las construcciones dinámicas representaban el mismo tipo de construcciones que las realizadas por regla y compás, aceptando (de manera implícita) que las construcciones dinámicas también son construcciones euclidianas.

Episodio 2: ¿El cuadrado es rombo o el rombo es cuadrado?

En este episodio se revisa el proceso de construcción de un objeto que no pasó la prueba del arrastre, por lo tanto no corresponde a un cuadrado (en realidad es una construcción general de trapecio rectángulo). Frente a la pregunta ¿qué tipo de cuadrilátero es?, dos asistentes, Ailin y Rayen, desarrollaron una discusión, en la cual Ailin propuso que el objeto representa a todos los cuadriláteros; Rayen responde que no puede ser rombo, ya que en un rombo sus ángulos adyacentes siempre son distintos. Ailin le responde con una pregunta: “¿el cuadrado es rombo?”; Rayen contesta que el objeto analizado es un cuadrado, no rombo, aludiendo a los ángulos rectos; al respecto Ailin contra pregunta: “¿pero hay rombos que son cuadrados?”.

En este diálogo queda patente la forma en que el objeto, gracias a sus propiedades dinámicas, les entrega cierta información que entra en conflicto con los conocimientos teóricos que ambas asistentes poseen respecto de los cuadriláteros.

La discusión no llega a una resultado, sino que pone de manifiesto la manera en que los asistentes reconocen (de manera implícita) las propiedades perceptuales, teóricas y dinámicas del objeto analizado, ubicando a las dos últimas a un mismo nivel.

Episodio 3: Análisis del proceso de construcción

En este episodio, se analiza el proceso de construcción de un objeto dinámico, que *a priori* se sabía no era una construcción general de cuadrado.

1. Se revisa el proceso de construcción. Debido a la naturaleza del ejercicio (ya se sabía que no es cuadrado), se asume que es un boceto de cuadrado.
2. Se realiza un breve análisis de las propiedades del objeto según su proceso de construcción y las propiedades teóricas que pone en juego este proceso, con lo cual se propone al objeto como una construcción (parcial) de rectángulo.
3. Se aplica la prueba del arrastre y se verifica que el objeto no mantiene invariantes las propiedades que lo hacen rectángulo.
4. Se identifican las propiedades que no se mantuvieron para que el objeto fuese un rectángulo. De esta manera se concluye que el objeto es una construcción general de trapecio rectángulo.

El análisis muestra que al trabajar en un ambiente dinámico, se asume de manera natural que la versión estática del objeto corresponde a un boceto. Al revisar el proceso de construcción, se evocan propiedades teóricas para deducir a qué tipo de construcción corresponde. A pesar de la seguridad que mostraban los asistentes, respecto de la deducción realizada, la prueba del arrastre deja en evidencia las propiedades que no se mantienen invariantes, con lo cual se hace necesario volver a revisar el proceso de construcción, a la luz de la propiedad que no se mantiene. Finalmente se propone el objeto como una construcción de trapecio rectángulo, la cual es validada por la prueba del arrastre.

Discusión

En los episodios 1 y 2 se refleja un cambio en la manera en que los asistentes valoran la GD, primero reconociendo que las construcciones dinámicas son construcciones euclidianas, y luego, incorporando las propiedades dinámicas de los objetos, a sus razonamientos sobre la clasificación de estos. Esto propicia una modificación en la percepción general del trabajo geométrico en los ambientes de GD, para pasar de considerar que no se está trabajando con geometría, a reconocer que estos ambientes permiten construir conocimientos geométricos, como lo manifestaron (implícita y explícitamente) algunos asistentes al taller.

Conclusión y prospecciones

A raíz del análisis presentado en el escrito, podemos concluir que, en términos generales, se reconoce un cambio en la percepción de los asistentes, respecto del trabajo geométrico en ambientes dinámicos, pasando de ser un ambiente para ilustrar, a un ambiente para construir geometría.

Un elemento que surge del taller como prospección, es el cuestionamiento al comportamiento de ciertas construcciones dinámicas en casos extremos. Por ejemplo, una construcción general de cuadrado que tenga como caso particular al punto, cuando los cuatro vértices son coincidentes. ¿Tal construcción sigue siendo un cuadrado? ¿Se puede considerar como una construcción general de cuadrado, o es una particular, o ninguna?

Referencias bibliográficas

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik, 34*(3), 66–72.

Fahlgren, M., y Brunström, M. (2014). A Model for task design with focus on exploration, explanation, and generalization in a dynamic geometry environment. *Technology, Knowledge and Learning, 19*(3), 287–315.

Leung, A. (2015). Discernment and Reasoning in Dynamic Geometry Environments. En S. J. Cho (Ed.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 451–469). Springer International Publishing.

Martin, G. E. (1998). *Geometric Constructions*. New York, NY: Springer New York.

Rubio-Pizzorno, S. (2016a). *De la Geometría a la Geometría Dinámica* [Libro GeoGebra].

Rubio-Pizzorno, S. (2016b). *Triángulos isométricos y homomórficos* [Hoja de Trabajo Dinámico de GeoGebra].

Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2017a). Construcciones dinámicas. En F. J. Córdoba Gómez, J. C. Molina García, L. A. Ciro López (Eds.), *Avances en la integración de tecnologías para la innovación en educación. Congreso Latinoamericano de GeoGebra 2016*, en prensa. Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad La Gran Colombia.

Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2017b). Naturaleza de los objetos de la geometría dinámica. En F. J. Córdoba Gómez, J. C. Molina García, L. A. Ciro López (Eds.), *Avances en la integración de tecnologías para la innovación en educación. Congreso Latinoamericano de GeoGebra 2016*, en prensa. Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad La Gran Colombia.

Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2017c). Precisión y exactitud. Propuesta inicial sobre el estatus de los objetos de la geometría dinámica. En F. J. Córdoba Gómez, J. C. Molina García, L. A. Ciro López (Eds.), *Avances en la integración de tecnologías para la innovación en educación. Congreso Latinoamericano de GeoGebra 2016*, en prensa. Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad La Gran Colombia.

INTEGRAÇÃO DE TECNOLOGIA NAS AULAS DE TRIGONOMETRIA AO UTILIZAR UM OBJETO DE APRENDIZAGEM

Fábio Henrique Patriarca, Nielce Meneguelo Lobo da Costa
Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN. (Brasil)
patriark@uol.com.br; nielce.lobo@gmail.com

RESUMO: Este artigo apresenta resultados parciais de uma pesquisa de mestrado que analisou um curso de formação continuada à distância do Programa M@tmidias para professores de Matemática do Ensino Médio atuantes em escolas estaduais de São Paulo, Brasil. O referido Programa tem por foco discutir o uso de objetos de aprendizagem nos processos de ensino de Matemática. A pesquisa objetivou identificar as possibilidades de integração de tecnologia ao ensino de trigonometria. Neste texto discutimos possibilidades viabilizadas pelo software “Ondas trigonométricas” estudado no curso. A fundamentação teórica quanto à integração de tecnologia foi subsidiada pelas ideias de Almeida e Valente, Bittar et al, Lobo da Costa e Prado; em relação à formação continuada, o apoio veio de Imbernón. A metodologia foi de cunho documental, segundo Gil, e as análises interpretativas por análise de conteúdo, segundo Bardin. Concluímos que o software estudado auxiliou o professor a identificar possibilidades de integrar tecnologia ao ensino de fenômenos periódicos.

Palavras chave: formação continuada, trigonometria, objeto de aprendizagem

ABSTRACT: This paper shows the partial outcomes of a master’s study, which analyzed a distance continuing education course which belongs to M@tmidias Program for high school mathematics teachers who work at state schools in São Paulo, Brazil. Such program focuses on the discussion of the use of learning objects in the teaching learning process of mathematics. The research is aimed at identifying the possibilities to integrate technologies to trigonometry teaching. The possibilities given by the software “Trigonometric waves” which was used in the course are discussed in this paper. The theoretical foundation, with respect to the technology integration, was back up by the ideas of Almedida and Valente, Bittar et al, Lobo da Costa and Prado .In relation to continuing education, it was supported by Imbernón. The methodology was classified as a bibliographic review, according to Gil; meanwhile the qualitative analysis was carried out by the content study, according to Bardin. We got to the conclusion that the studied software helped the teacher to identify the possibilities to integrate the technology to the teaching of recurrent phenomena.

Key words: continuous training, trigonometry, learning object

Introdução

A pesquisa que subsidia este artigo se desenvolveu no contexto de um curso do Programa M@tmídias. Esse Programa da Escola de Formação e Aperfeiçoamento de Professores do Estado de São Paulo, Brasil – EFAP/SP tem a finalidade de oferecer formação continuada a distância aos docentes de Matemática do Ensino Médio, buscando subsidiar a utilização, em sala de aula, de recursos tecnológicos, tais como: vídeo, áudios, softwares, experimentos, aliados com as Situações de Aprendizagens que constituem os Cadernos do Professor e Caderno do Aluno do Currículo Oficial do Estado de São Paulo. Entendemos por Caderno do Professor, material impresso para o Professor que contém Situações de Aprendizagem para auxiliar o aluno a construir as competências e habilidades indicadas no referido Currículo. Entendemos por Caderno do Aluno, material impresso para os alunos, no qual são propostas várias atividades das Situações de Aprendizagem estudadas.

O Programa M@tmídias é composto de três cursos a distância contemplando todos os conteúdos da disciplina Matemática do Ensino Médio. O Programa foi a primeira formação continuada oferecida pela EFAP relacionando o Currículo Oficial do Estado de São Paulo, lançado em 2008, com a tecnologia, utilizando para isto objetos de aprendizagem. O foco deste artigo está no curso M@ídias 2, segunda edição, mais precisamente no módulo I que aborda o conteúdo de Trigonometria e no módulo V que são as atividades de vivência.

A estrutura dos cursos do Programa é composta por cinco módulos. Em cada um dos quatro primeiros módulos são estudados três objetos de aprendizagem, a cada objeto de aprendizagem é atrelada uma atividade avaliativa que pode ser: ou um fórum de discussão, ou uma questão dissertativa ou uma questão objetiva. O módulo cinco propõe uma atividade de vivência, na qual os cursistas devem aplicar com seus alunos um dos objetos de aprendizagem discutidos no curso, escolhido por eles, ou outro objeto de aprendizagem qualquer, associado sempre a uma situação de aprendizagem dos materiais curriculares da respectiva série - Caderno do Professor e do Aluno, documentar a aplicação e produzir um relatório a ser anexado no AVA – EFAP.

Neste artigo analisamos um dos objetos de aprendizagem estudado no módulo de Trigonometria, particularmente quanto à forma de abordagem e o subsídio que oferece ao professor para a integração de tecnologia ao ensino de conteúdos do currículo. O objeto analisado é o software “Ondas Trigonométricas”.

Referencial teórico

A fundamentação teórica quanto à integração de tecnologia foi subsidiada pelas ideias de Almeida e Valente, Bittar et al, Lobo da Costa e Prado; em relação a formação continuada, o apoio veio de Imbernón. Segundo Almeida e Valente (2011), para que ocorra a integração de tecnologia ao currículo escolar:

> (...) é preciso implantar mudanças em políticas, concepções, valores, crenças, processos e procedimentos, que são centenários e que certamente vão necessitar de um grande esforço dos educadores e da sociedade como um todo (p. 75).

Para tanto, segundo os autores, há necessidade de se investir na formação permanente e contextualizada dos educadores, pois o:

> (...) currículo que está sendo trabalhado hoje foi desenvolvido para a era do lápis e do papel. As [Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação] TDIC - jamais serão integradas às atividades curriculares se elas continuarem explorando somente o lápis e o papel para representar e explicitar os conhecimentos dos alunos (p. 76).

Assim sendo, entendemos que é fundamental criar condições para que os professores possam refletir e (re) construir a própria prática com o uso das TDIC, visto que as mudanças pedagógicas e curriculares devem ser de total responsabilidade dos profissionais. Outro entrave para a implementação das mudanças nos procedimentos educacionais é a pouca compreensão por parte dos educadores sobre o que significa aprender. Em relação às mudanças da sociedade como um todo: A parceria entre o setor público e o privado, empresas, deve ser inevitável, uma vez que a educação está se tornando um importante componente no desenvolvimento do país e certamente é função de todos. “Cabe saber o que será feito e quando!” (Almeida & Valente, 2011, p. 82).

Corroboramos com as ideias de Almeida e Valente, pois para conseguirmos integrar tecnologia é necessária uma formação continuada dos educadores, uma mudança no currículo, um espaço para que o professor possa refletir e preparar suas aulas, de modo a construir com a tecnologia suas sequências de atividades.

Segundo Bittar, Vasconcelos e Guimarães (2008, p.86) essa verdadeira integração da tecnologia acontecerá quando “o Professor vivenciar o processo e quando a tecnologia representar um meio importante para a aprendizagem”. Para vivenciar o processo de integração de tecnologia, o Professor deve participar da escolha do software adequado para sua aula, saber como fazer essa escolha, ter tempo suficiente para que possa preparar suas sequências didáticas para serem aplicadas com seus alunos. Com tudo isso, a tecnologia fará sentido para o Professor e será mais fácil a sua utilização no ensino.

Para Imbernón (2009, p.49), a formação continuada, deve “fomentar o desenvolvimento pessoal, profissional e institucional do professorado, potencializando um trabalho colaborativo para mudar a prática”. Para esse autor, são necessárias duas condições principais para que verdadeiramente na formação continuada aconteça: a reflexão sobre a prática em sala de aula e uma maior autonomia na formação, com direta intervenção dos Professores. Com essas condições, uma formação continuada deve:

> (...) ser organizada de modo a perpassar por uma compreensão do currículo, das grandes mudanças no contexto social, da rápida implantação de novas tecnologias da informação, da integração escolar de crianças diferentes, da forma de organização das instituições escolares, do respeito ao próximo e do fenômeno intercultural (Imbernón, 2000, p. 48).

As ideias de Imbernón (2000) só corroboram com a necessidade cada vez mais evidente hoje de que a formação continuada tenha começo meio e fim e possa realmente, em seu contexto, suprir as demandas de cada grupo a ser formado. Para Imbernón (2000, p. 49) uma formação continuada deve centrar-se em cinco princípios:

1. A reflexão prático-teórica sobre a própria prática, mediante uma análise da realidade educacional e social de seu país, sua compreensão, interpretação e intervenção sobre a mesma realidade. A capacidade dos professores de gerar conhecimento pedagógico por meio da análise da prática educativa.
2. A troca de experiências, escolares, de vida, etc. e a reflexão entre indivíduos iguais para possibilitar a atualização em todos os campos de intervenção educacional e aumentar a comunicação entre os professores.
3. A união da formação a um projeto de trabalho, e não ao contrário (primeiro realizar a formação e depois um projeto).
4. A formação como arma crítica contra práticas laborais como a hierarquia, o sexismo, a proletarização, o individualismo e etc., e contra práticas sociais, como a exclusão e a intolerância.
5. O desenvolvimento profissional da instituição educacional mediante o trabalho colaborativo, reconhecendo que a escola está constituída por todos e coincidimos na intenção de transformar essa prática. Possibilitar a passagem da experiência de inovação isolada e celular para a inovação institucional.

Com isso, na profissão docente, o Professor necessita mobilizar vários conhecimentos a fim de planejar, desenvolver e avaliar suas ações pedagógicas trata-se de um contexto de atuação.

Metodologia

A metodologia da pesquisa foi a documental na perspectiva de Gil (2008) e os procedimentos metodológicos foram:

1) Coleta dos dados históricos do Programa M@timídias, tais como, o projeto básico e o histórico da Escola de Formação e Aperfeiçoamento de Professores do Estado de São Paulo – EFAP, propositora do Programa.
2) Seleção e Organização dos materiais estocados no ambiente virtual de aprendizagem AVA–EFAP do Programa, relativos à segunda edição do Curso, M@tmídias 2 – Objetos de Aprendizagem multimídia para o ensino de Matemática, quanto ao conteúdo de Trigonometria
3) Tratamento e análise interpretativa dos dados por categorização pelo método de análise de conteúdo e análise documental segundo Bardin (2011). As categorias emergiram dos dados pesquisados, depois de elaboradas tabelas em Excel, leitura dos fóruns e atividades de vivência, sendo consideradas as seguintes como categorias de análise:

- Possibilidade de integração de tecnologia ao currículo, referido pela sigla (PIC);
- Possibilidade de integração de tecnologia ao ensino de Trigonometria, referido pela sigla (PIE) e
- Possibilidade para a construção de conhecimento pedagógico tecnológico do conteúdo [Technological Pedagogical Content Knowledge] TPACK pelos professores cursistas, referido pela sigla PTPACK [Possibilidades de desenvolvimento do Technological Pedagogical Content Knowledge]

Vale ressaltar que o TPACK tem como componentes o conhecimento do conteúdo, neste caso o conhecimento matemático (MK), o conhecimento pedagógico (PK), o conhecimento tecnológico (TK) e suas intersecções: o conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK), o conhecimento pedagógico tecnológico (TPK) e o conhecimento tecnológico do conteúdo (TCK).

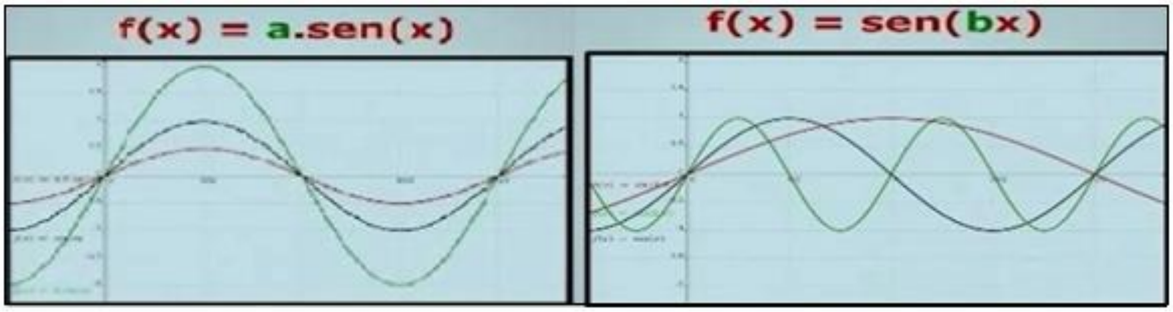
Objeto de aprendizagem ondas trigonométricas

O Curso M@tmídias 2 apresenta como terceiro objeto de aprendizagem o software “Ondas Trigonométricas” e ressalta seu potencial para a integração da tecnologia à prática do ensino de Trigonometria. Esse software aborda os seguintes conteúdos de Trigonometria: Função Seno, Função Cosseno, Funções Periódicas, todos em consonância com as Situações de Aprendizagem do Caderno do Professor e Caderno do Aluno de número três e quatro, materiais que compõem o Currículo Oficial do Estado de São Paulo. O objetivo desse software é: discutir o efeito que os parâmetros amplitude (a), frequência/período (b), fase (c) e valor médio (d) causam no gráfico da função $f(x)= a.\text{sen}x(bx+c)+d$, com $a, b, c, d \in \Re$ e $a\neq 0$, trata-se de uma função seno, acrescida de alguns parâmetro.

No curso M@tmídias 2 os professores foram orientados, por uma videoaula quanto à condução da aula e as possíveis discussões e abordagens ligadas ao objeto de aprendizagem. Também existe um Guia (disponível em: m3.ime.unicamp.br/dl/1-E7TJr0wNQ_MDA_664f8). A videoaula abordou os objetivos do uso do software nas atividades propostas, as possibilidades de mediação da sala de aula, a matemática envolvida e a relação com as situações de aprendizagem do Caderno do Professor e do Caderno do Aluno. O Guia do Professor aborda o passo a passo do software, as atividades propostas.

Observamos que o Guia recomenda que o professor evite iniciar o conteúdo de Trigonometria com esse software uma vez que os alunos precisam ter construído alguns dos conceitos iniciais de Trigonometria para depois utilizarem o Software. A sugestão é que o professor aplique os objetos de aprendizagem na ordem em que foram estudados no Módulo I do Curso M@tmídias 2, isto é, o software Ondas Trigonométricas como último objeto apresentado e estudado.

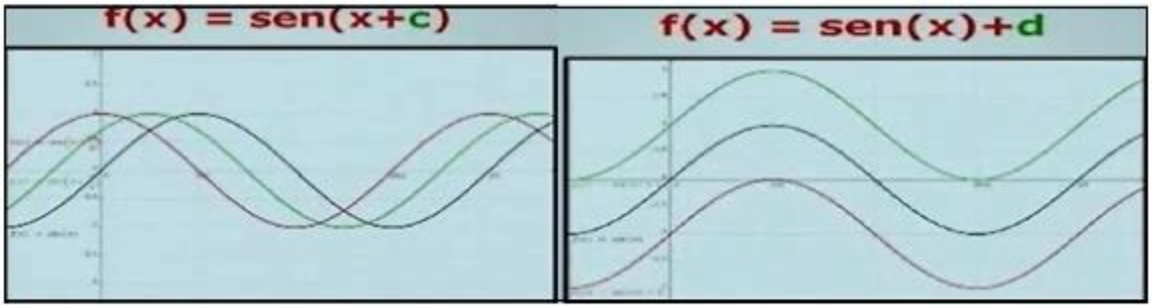
A primeira abordagem sugerida para aplicação desse software com os alunos em sala de aula é o estudo da amplitude, a seguir é estudada a amplitude, a frequência/período **(b)**, que segundo o que é explicado na videoaula, "eles andam de mãos dadas, hora melhor interpretar por frequência, hora é melhor interpretar por período", como podemos ver na figura a seguir.



Fonte: http://efp.cursos.educacao.sp.gov.br/Acesso em 24/ ag2015

Figura 1. "Ondas Trigonométricas": tela da videoaula sobre amplitude, frequência/período

Depois desse estudo, foi sugerida a promoção de discussão em aula sobre os efeitos dos parâmetros fase e valor médio no gráfico. Nesses casos com a mesma amplitude houve deslocamento do gráfico horizontalmente ou verticalmente, como podemos ver na figura a seguir.



Fonte: http://efp.cursos.educacao.sp.gov.br/Acesso em 24/08/2015

Figura 2. "Ondas Trigonométricas": tela da videoaula sobre fase e parâmetro

Assim podemos constatar que esse software coordena as duas representações, a gráfica através dos esboços e a algébrica quando são mostrados ao Professor os efeitos de todos os parâmetros que compõem a função f(x) =a.senx (bx+c)+d.

Quando aplicado aos alunos, uma sugestão é que o professor estimule explorações dos alunos, etapa por etapa, de modo a analisar parâmetro por parâmetro, experimentando vários casos, depois analisar os efeitos de todos os parâmetros juntos, Só ai é recomenda discutir um fenômeno natural para que eles modelarem.

O estudo de amplitude e do período, como abordado no software, está em concordância com o que foi estudado na Situação de Aprendizagem 1 do Caderno do Professor volume I da 2ª série do Ensino Médio e continua até a Situação de Aprendizagem 3. Nestas Situações de Aprendizagem do Caderno está sugerido ao Professor que ele utilize um software para traçar os gráficos solicitados. Assim sendo, ao propor a utilização deste software e discutir suas potencialidades e características para o ensino de amplitude e período, entendemos que o curso M@tmídias está auxiliando o professor a desenvolver seus conhecimentos pedagógicos tecnológicos (TPK) o que pode futuramente ajuda-lo a integrar esse recurso tecnológico ao ensino de trigonometria.

Conclusão

Concluímos, a partir da análise do objeto de aprendizagem "Ondas Trigonométricas", que este apresenta grande potencial para auxiliar a integrar tecnologia às aulas de Trigonometria, uma vez que, a utilização desse software não é para "passar uma aula a limpo" como Lobo da Costa e Prado (2015) explicam. O professor pode levar o aluno a vivenciar o software e a construir sua sequência didática.

O seu uso em sala de aula está diretamente ligado ao que Bittar et al (2008) considera pertinente para integrar tecnologia nas escolas, a autora relata que para que isso aconteça o professor deve participar da construção de sua atividade e usar a tecnologia como algo comum no seu dia a dia. Com os objetos de aprendizagem, não basta apresentar aos alunos, simplesmente mostrar uma única vez; é necessário explorar, relacionar, construir e analisar para que os alunos consigam compreender e dar significado aos conteúdos neles abordados.

Concluímos também que a metodologia usada no curso, a forma com que o software é apresentado aos cursistas durante o curso e a proposição de uma atividade de vivência em sala de aula com o uso desse software, vão ao encontro do que ensinam Bittar et al (2008): que para o professor integrar tecnologia em suas aulas é necessário participar da construção da sequência de atividades que irá propor aos alunos.

Entendemos que foi possível ao cursista se apropriar do objeto de aprendizagem “Ondas Trigonométricas” e experimentá-lo com seus alunos, o que auxiliou cada professor cursista a construir conhecimentos pedagógicos e tecnológicos, como afirmam Misha e Khoeler. O estudo desse objeto de aprendizagem evidenciou ao cursista formas de utilizar a tecnologia relacionada ao Currículo Oficial do Estado de São Paulo e, as videoaulas e atividades auxiliaram a estabelecer relações entre ensino e tecnologia.

■ Referências bibliográficas

Almeida, M. E. B. e Valente, J. A. (2011) *Tecnologias e currículo: trajetórias convergentes ou divergentes?* São Paulo, SP, Brasil: Paulus.

Bardin, L.(2011). *Análise de conteúdo.* Portugal: Edições 70.

Bittar, M., Guimarães, S. D., Vasconcellos M. (2008). A integração da tecnologia na prática do professor que ensina matemática na educação básica: uma proposta de pesquisa-ação. *Revista Eletrônica de Educação Matemática, 3*(8), 84-94.

Imbernón, F.(2000) *Formação docente e profissional – formar-se para a mudança e a incerteza.* São Paulo, SP, Brasil: Cortez.

Imbernón, F. (2009) *Formação permanente do professorado – novas tendências.* São Paulo SP, Brasil: Cortez.

Koehler, M. J., Mishra, P. (2005) Teachers learning technology by design. *Journal of Computing in Teacher Education, 21*(3), 94–102.

Lobo da Costa, N. M. e Prado, M. E. B. B. (2015) A Integração das Tecnologias Digitais ao Ensino de Matemática: desafio constante no cotidiano escolar do professor. *Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 8*(16), 99 - 120.

Mishra, P.; Koehler, M. J. (2006) *Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge* (pp. 1017-1054). Teachers College Record.

LEYES DE KEPLER EN SCRATCH PARA TODO PÚBLICO

María Guadalupe Pérez Rivera, Javier Flavio Vigueras Gómez
Universidad Autónoma de San Luis Potosí. (México)
mariagperez2010@gmail.com, flavio@fc.uaslp.mx

RESUMEN: El presente trabajo forma parte de un trabajo de tesis de licenciatura, que busca demostrar las aplicaciones de las secciones cónicas en diversos ámbitos y diferentes formas de enseñarlas con apoyo de las tecnologías computacionales. En este trabajo, nos enfocamos en la simulación de las orbitas de los planetas, utilizando el programa Scratch (que cuenta con una interfaz muy amigable) para que pueda ser manipulado por los estudiantes y el público en general (ayudando a la divulgación de la ciencia), que de igual manera pueda ser empleado como parte de la enseñanza de las secciones cónicas a nivel bachillerato, y como un posible proyecto integrador a nivel licenciatura utilizando las leyes de Newton y métodos numéricos, concluyendo con las leyes de Kepler.

Palabras clave: secciones cónicas, leyes de Kepler, scratch

ABSTRACT: This work is part of a degree thesis, which seeks to demonstrate the applications of conic sections in various fields and different ways of teaching them supported by computational technologies. In this work, we focus on simulating the orbits of the planets, using the Scratch program (which has a very friendly interface) so that it can be handled by students and the general public (helping to spread science).In the same way, it can be used in the teaching of conic sections at high school, and as a possible project of integration at the undergraduate level by using Newton's laws and numerical methods, concluding with Kepler's laws.

Key words: conic section, Kepler’s laws, scratch

Introducción

En muchas ocasiones las secciones cónicas son enseñadas de manera superficial y solamente son relacionadas con objetos o fenómenos físicos (que en la mayoría de las ocasiones los estudiantes aprenden como aplicaciones de las secciones cónicas), o bien las relacionan con una única representación semiótica, ya sea algebraica o geométrica (ya sea el corte del cono por un plano, es decir, su construcción o bien su representación geométrica en un plano cartesiano), ocasionando así que no se comprenda la definición conceptual de sección cónica como lugar geométrico, sino que los estudiantes tomen la imagen del concepto de éstas; dicha imagen Tall y Vinner (1981) la definen como la estructura cognitiva asociada al concepto (y la imagen es construida por la experiencia) o bien las propiedades de las secciones cónicas como la definición conceptual.

Es por ello que una gran cantidad de estudiantes no comprenden la definición formal matemática de las secciones cónicas como lugar geométrico. Por una parte, es responsabilidad del profesor, especialmente en la manera en la que presenta los conceptos, puesto que debe conjuntar el álgebra y la geometría en un mismo objeto matemático, además que el estudiante comprenda ambos y de uno pueda pasar al otro y viceversa sin problema alguno; esto puede ser un proceso difícil y más cuando el material didáctico consta de pintarrón y plumones, prototipos de madera, plástico o inclusive plastilina para enseñar los cortes que se hacen en el cono con un plano para obtener las secciones cónicas (la mayoría de las ocasiones un único ejemplo de corte o varios cortes empalmados), y después enseñar sus propiedades y aplicaciones.

Azcárate y Camacho (2003) mencionan muy acertadamente que las propiedades de los objetos se deben construir a partir de las definiciones de los conceptos, pero realmente muchos de los conceptos que están relacionados con secciones cónicas no son aprendidos con su definición matemática formal, sino que los estudiantes aprenden a reconocerlos mediante la experiencia de trabajar de manera repetitiva con dichos conceptos, siendo así que el significado del concepto nunca es adquirido, sino la memorización de algunas representaciones y características de éste, provocando que los estudiantes tengan la base de dicho conocimiento muy endeble, de tal manera que las propiedades de los objetos matemáticos sean inconsistentes.

Por lo anterior los estudiantes se quedan solamente con la imagen del concepto, que es construida por la experiencia según Tall y Vinner en 1981. Por ello, al no tener la definición de un concepto matemático bien establecido, no se puede crear un andamiaje con estructuras cognitivas presentes, ni tampoco futuras puesto que todas tendrían una base exclusivamente empírica y con deficiencias.

Se busca utilizar la programación para la realización del prototipo, puesto que la programación al ser aplicada en condiciones apropiadas como lo son: existencia de hardware y software apropiados, es decir, funcionales y en la cantidad necesaria (mínimo un equipo por dos personas), que el docente tenga la capacitación necesaria para utilizar el software como el hardware, y por supuesto que la pedagogía para poder enseñar la programación y la planeación adecuada para su buena ejecución; esto puede ayudar a desarrollar diversas capacidades intelectuales como las menciona Rodríguez y

Rosella (1987, en Badilla Saxe & Chacón Murillo, 2004) y DiSessa (2001), las cuales son: capacidad de búsqueda y resolución de problemas, de razonamiento y representación formal, desarrollo de modelos de pensamiento y aprendizaje, y mejorar los estilos cognitivos; pero se considera que lo mejor en lo que puede ayudar la programación en los estudiantes es en introducir una "forma de pensar matemática" como lo menciona Papert (1972, en Badilla Saxe & Chacón Murillo, 2004) y una vez aprendido lo anterior hará que aprender álgebra o geometría sea más fácil.

Desarrollo

Por todo lo anterior se ha propuesto la creación de un prototipo que conjunte la definición como lugar geométrico de sección cónica (en este caso la elipse), sus propiedades y que además se pueda ver la aplicación matemática de manera "virtual". Para dicho prototipo se escogió el movimiento de los planetas, el cual es explicado por la ley de gravitación universal de Newton y la cual implica las leyes de Kepler.

Como el universo es la fascinación de cualquier ser humano, ayudaría a la motivación y atracción, entonces se propuso que el trabajo pudiese ser trabajado o comprendido a diferentes niveles académicos, por ello se escogió realizar el prototipo en el programa Scratch, que es un lenguaje de programación visual de acceso libre que consta de una interfaz muy sencilla, y su propósito principal es programar objetos virtuales en pantalla usando herramientas con bloques para armar diferentes procedimientos, para así controlar el comportamiento de los objetos virtuales.

El objetivo principal del prototipo es que los estudiantes (y público general) puedan observar y manipular el comportamiento de un planeta que gira alrededor del sol y dibujar su órbita elíptica; de igual manera este prototipo puede ser un modelo que los estudiantes de nivel licenciatura deban duplicar, donde integren sus conocimientos de funciones vectoriales, métodos numéricos, ecuaciones diferenciales; provocando que al utilizarlos comprendan su definición y concepto de cada uno, y de igual manera su aplicación (contestando la eterna pregunta que de los estudiantes ¿Y eso para qué me sirve?), pero antes de poder aplicarlas las tendrán que realmente comprender; entonces se estaría realizando un aprendizaje significativo, y de igual manera podrán relacionar la definición formal matemática de las cónicas con sus propiedades y pasar de una representación semiótica a otra.

El prototipo en el programa Scratch podrá ilustrar las leyes de Kepler, las cuales, fueron comprobadas por Newton con la ley de la gravitación universal (Swokowski, 1981). Por el momento el prototipo sólo ilustra las dos primeras leyes de Kepler, que Swokowski (1989) enuncia como:

"*Primera Ley: La órbita de cada planeta es una elipse que tiene al sol en uno de sus focos. Segunda Ley: El vector que va del centro del sol al planeta en movimiento describe áreas iguales en tiempos iguales.*"

A continuación, se explicará de manera general como se creó prototipo y por qué se utilizaron los conocimientos matemáticos como: funciones vectoriales, métodos numéricos, ecuaciones diferenciales y por supuesto las leyes de Newton. La gran mayoría de la programación se encuentra en el planeta del prototipo, por el momento sólo la velocidad es manipulable mediante medidores de colores.

Las variables son: velocidad V_x y V_y (Vx y Vy en el programa), aceleración A_x y A_y (Ax y Ay en el programa), y W que es la distancia del planeta al sol, para fines prácticos el sol tiene la posición (0,0); las constantes: δ y δ_2 (DELTA y DELTA2 en el programa) para método de Euler y por el momento K (producto de la constante de gravedad por la masa del sol).

Para comenzar se utilizó la ecuación de la ley de gravitación universal y la ecuación de fuerza:

$$|\boldsymbol{F}| = \boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{Mm}}{|r^2|} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{ma}$$

Donde F es la fuerza, G la constante de gravedad, M y m son las masas del sol y el planeta, r la distancia y a la aceleración. Tenemos que:

$$\vec{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{m} = -\boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{Mm}}{|\vec{\boldsymbol{r}}^2|}\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{\|\vec{\boldsymbol{r}}\|}$$

Se despeja la aceleración y se reducen términos y cambiamos $K = GM$, obteniendo:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = -\boldsymbol{K}\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\boldsymbol{T}}}{(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2)^{3/2}}$$

De lo anterior obtenemos las aceleraciones instantáneas:

$$\boldsymbol{a_x} = \frac{-\boldsymbol{Kx}}{(x^2+y^2)^{3/2}} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{a_y} = \frac{-\boldsymbol{Ky}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

De igual manera se puede realizar este procedimiento con ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\boldsymbol{d^2r}}{\boldsymbol{dt^2}}\boldsymbol{m} = -\boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{Mm}}{|\vec{\boldsymbol{r}}^2|}\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{\|\vec{\boldsymbol{r}}\|}$$

Las aceleraciones instantáneas son utilizadas para comenzar con el método de Euler, fijando sus valores para comenzar a cambiar los de la velocidad al multiplicarlo por DELTA2, el resultado cambiará la posición del planeta en x y y, es decir, se realiza el método de Euler dos veces, puesto que es una ecuación diferencial de segundo orden, esto denotado en el código de programación como se observa en los bloques de la figura 1, esto ayuda a demostrar la primera ley de Kepler.

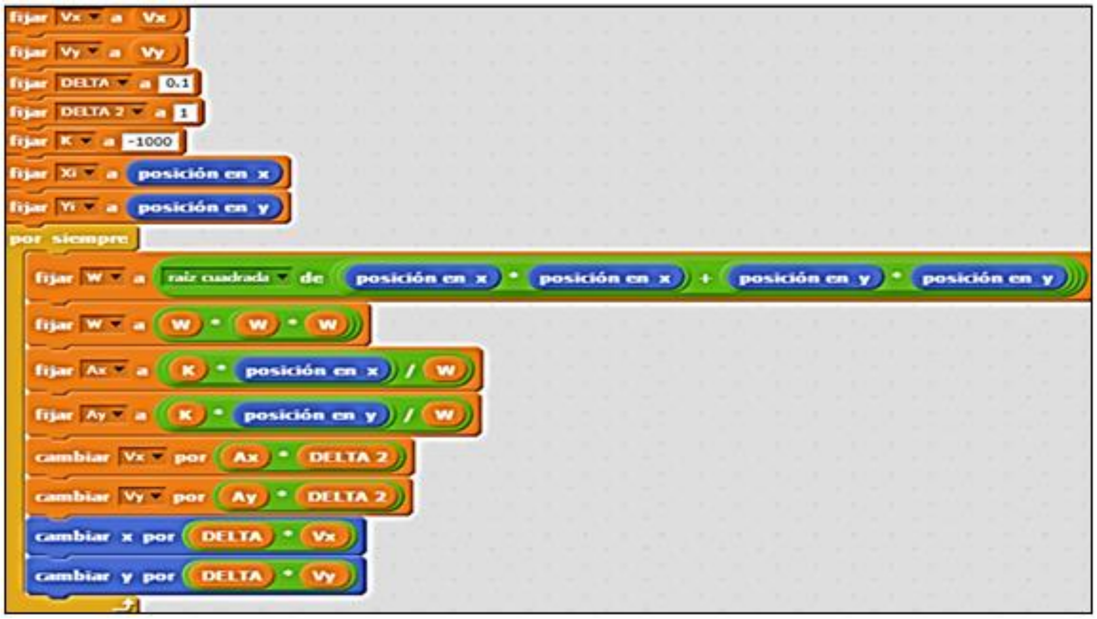


Figura 1. Programación de método de Euler en el prototipo realizado en el Scratch

Un aspecto importante es que el plano se encuentra limitado, por ello se debe mantener controladas algunas variables, y que se tenga el menor error numérico posible. No en cualquier posición que se coloque el planeta formará una elipse, por las siguientes razones: choca con el borde y los datos se alteran, desaparece el planeta del plano o pasa por el punto (0,0), lo que con lleva a una indeterminación.

Por ello se colorea la región donde se puede realizarse la órbita completa del planeta, como se muestra en la figura 2; dicha región depende de las velocidades elegidas moviendo con el mouse el indicador azul en las barras de colores en la parte inferior, donde el color más claro representa 0 y el rojo 20, cambiando 5 unidades cada sección de color, también se pone la condición que las velocidades sean diferentes, puesto que cuando son iguales es muy pequeña el área de interacción, dichas áreas fueron obtenidas con ensayo y error.

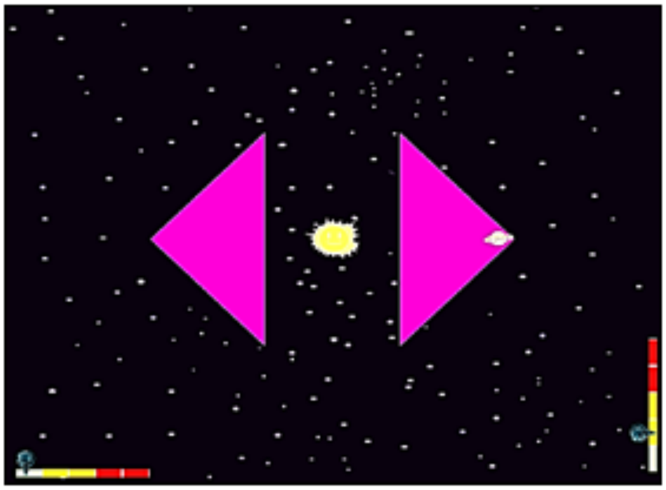


Figura 2. Región para crear una órbita completa del planeta, con $Vx = 0$ y $Vy = 5$ en el prototipo realizado en el Scratch

La figura 3 muestra la programación para la segunda ley de Kepler, al trazar líneas que van desde el sol (un foco de la órbita) hasta el planeta y cada cierto tiempo aparecen otras y comparar las áreas y ver que son iguales como se muestra en la figura 4.

Figura 3. Programación de segunda ley de Kepler en el prototipo realizado en Scratch

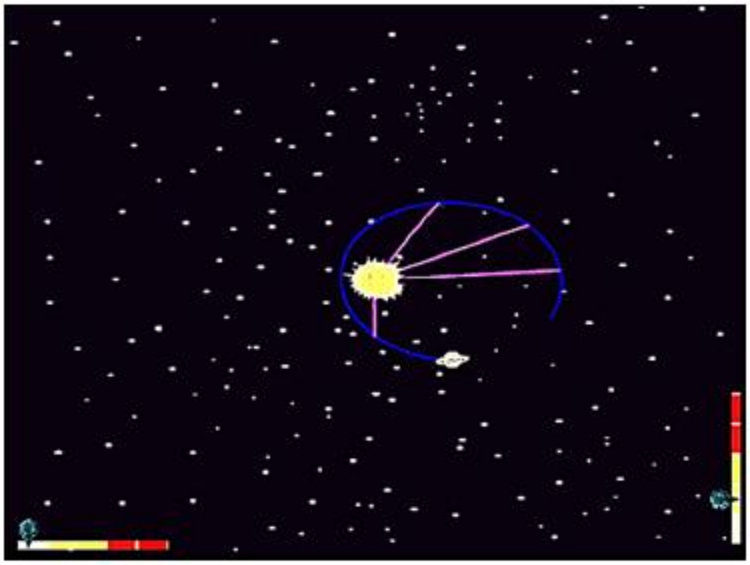


Figura 4. Ejecución de segunda ley de Kepler en el prototipo realizado en Scratch

Para el uso del prototipo se pretende emplear en tres niveles los cuales serían:

- Nivel 1: El prototipo puede ser expuesto a un público general, explicando en qué consisten las leyes de Kepler y cualquier persona puede hacer uso del prototipo, interactuar y comprobar las hipótesis que ellos generen a partir de una sencilla explicación.
- Nivel 2: Dirigido a estudiantes de bachillerato, con ayuda del docente construirá el prototipo y al finalizarlo comprobará que las leyes de Kepler se cumplan mediante la definición matemática de elipse.
- Nivel 3: para estudiantes de nivel licenciatura, dónde el prototipo debe ser programado desde cero por ellos y corroborar que cumpla con las leyes de Kepler, integrarán sus conocimientos de funciones vectoriales, métodos numéricos, ecuaciones diferenciales; provocando que al utilizarlos comprendan su definición y concepto de cada uno y de igual manera su aplicación.

Al incorporar más elementos para la interacción con el usuario se espera que sea más interesante y ayude a la comprensión de las secciones cónicas en la vida diaria, de igual manera divulgar la ciencia y se encuentre al alcance de todos. Este prototipo cuando sea completamente terminado se pretende ser empleado en la enseñanza de las cónicas a nivel bachillerato y posiblemente su construcción por parte de estudiantes de licenciatura.

Para poder ver el funcionamiento de este prototipo accedan al siguiente link, donde estará disponible: https://scratch.mit.edu/projects/123601345/

Conclusiones e investigación a futuro

El uso de las leyes de Kepler para la consolidación del aprendizaje de conocimientos matemáticos ya se ha realizado con éxito en Japón 2011 por Kawasaki & Moriya (ver referencias), el aporte de este prototipo es el plus que da que los estudiantes programen e internalicen mejor el conocimiento matemático.

Las investigaciones a futuro son la aplicación del prototipo en conjunto con otros para el aprendizaje de la definición del concepto de sección cónica como lugar geométrico, dichos prototipos fueron realizados para una investigación de tesis. Otra investigación a futuro es realizar el mismo prototipo, pero con tres cuerpos dónde sólo existe solución analítica con el movimiento equilátero o alineado, de lo contrario las soluciones son numéricas, y para ello se necesita el uso de series o métodos numéricos más complejos.

Referencias bibliográficas

Azcárate Giménez, C., y Camacho Machín, M. (2003). Sobre la investigación en didáctica del análisis matemático. *Boletín De La Asociación Matemática Venezolana, 10*(2), 135-150. Recuperado de https://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/matias-carmen.pdf.

Badilla Saxe, E., y Chacón Murillo, A. (2004). Construccionismo: objetos para pensar, entidades públicas y micromundos. *Actualidades Investigativas en Educación, 4*(1). Doi: http://dx.doi.org/10.15517/aie.v4i1.9048.

DiSessa, A. A. (2001). Changing minds: Computers, learning, and literacy. Cambridge, MA: MIT Press.

Kawasaki, T., y Moriya, S. (2011). Using modelling experiences to develop Japanese senior high school students' awareness of the interrelations between mathematics and science. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.). *Trends in teaching and learning of mathematical modelling: ICTMA14* (pp. 603–615). Dordrecht: Springer Netherlands.

Swokowski, E. W. (1989). Funciones vectoriales: Leyes de Kepler. En E. W. Swokowski. *Cálculo con Geometría Analítica* (pp. 777-782). Estados Unidos de América: PWS.

Tall, D., y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169. Doi:10.1007/BF00305619.

SITUACIONES PROBLEMA DE LA VIDA COTIDIANA Y SU REPRESENTACIÓN CON FUNCIONES DE LA FORMA F(T) = (X(T), Y(T))

Rafael Pantoja Rangel, Otoniel Leal Medina, Diego Armando Pantoja González, Elena Nesterova
Universidad de Guadalajara, Jalisco. (México)
rpantoja@prodigy.net.mx, olm_88@hotmail.com, diegoseb1@gmail.com, elena.nesterova@cucei.udg.mx

RESUMEN: En este proyecto se emplean situaciones problema de la vida cotidiana para que el alumno con el apoyo del video digital, el Tracker y Geogebra, aproximen las funciones que describen el movimiento de una burbuja en una manguera flexible llena de agua, el giro de una rueda de bicicleta sobre su eje y rodando sin resbalar y un tren eléctrico de juguete. Las actividades se realizaron en distintos talleres y tuvieron como propósito relacionar el movimiento de objetos con una función paramétrica de la forma ***f(t)= (x(t), y(t))*** y como un elemento motivador para aprender matemáticas.

Palabras clave: modelación, video, tracker, semiótica, gráficas

ABSTRACT: In this project, problem situations of daily life are used so that the students approximate the functions that describe the movement of a bubble in a flexible hose filled with water; the rotation of a bicycle wheel on its axis and rolling without slipping, and an electric toy train by using the support of digital video, Tracker and Geogebra. The activities were carried out in different workshops and aimed to relate the movement of objects with a parametric function of the form f (t) = (x (t), y (t)) and at the same time they were considered a motivating element to learn mathematics.

Key words: modelling, video, tracker, semiotics, graphics

Introducción

Hasta el momento son tres las tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas (MEM), programa adscrito al Departamento de Matemáticas (DM) del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara (UdeG), que se orientaron a la elaboración de propuestas alternativas, con base en la modelación matemática, para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Bautista, 2013; Leal, 2016; Ferreyra, 2016), mediante el empleo de situaciones problema de la vida cotidiana, seleccionadas de un contexto cercano al estudiante, grabadas en video o con fotografía (Ezquerra, Iturrioz, Díaz, 2011; Jofrey, 2010), con el apoyo de los programas de cómputo Tracker y GeoGebra, cuyo propósito fue propiciar un aprendizaje significativo del tema de matemáticas en cuestión, a saber: Ajuste de funciones, la derivada y el método de sólidos de revolución para el cálculo de volumen.

En la tesis de Bautista (2013) dos de las situaciones problema tratadas son el lanzamiento del balón al aro en una cancha de baloncesto y el giro de la rueda de una bicicleta en dos momentos: gira sobre su eje y rueda sin resbalar. Se empleo la rutina de ajuste de funciones que integra Tracker, con la finalidad de determinar la ecuación de la trayectoria del balón, a saber $y(t)=4.737t^2+3.956t+2.009$, y así validar que los datos reales correspondan a los calculados por el software, en la que el valor de (g/2) se aproxima a 4.737 y la coordenada de la altura del lanzamiento inicial es de 2.009 metros, que en las condiciones en que se realizó el lanzamiento son aceptables, desde la perspectiva de la física.

En el caso de la tesis de Leal (2016), se analiza el movimiento de un tren de juguete, tomado como masa puntual, cuyas vías se acomodan en tres posiciones distintas: circular, en una forma tratada como una elipse y una rectilínea; la segunda opción, es el movimiento de una burbuja de aire dentro de una manguera transparente con agua y sellada en los extremos, que por su flexibilidad, los alumnos la colocaron en distintas posiciones, como la mostrada en la figura 1.

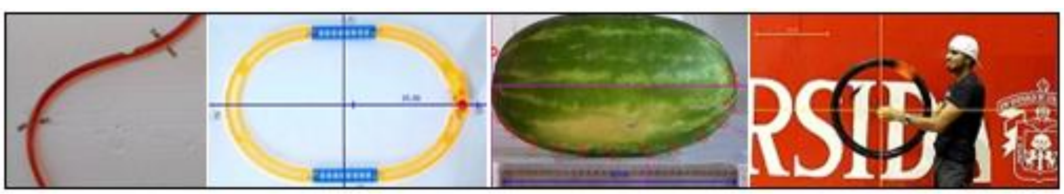


Figura 1. Situaciones problema: burbuja, tren eléctrico, sandía y giro de llanta

El trabajo de Ferreyra (2016) se centra en el cálculo de volumen de una sandía por el método de los sólidos de revolución. En este caso la tesista aproxima por cuatro métodos: primero se pesa en una báscula, el segundo se calcula el volumen por el principo de Arquímedes midiendo manualmente el volumen de agua desalojado, en el tercero se supone que la proyección sobre el plano cartesiano XY es una elipse y se calculan los valores de sus ejes con el empleo de unos palitos de madera, para determinar la ecuación, despejar la variable ***y*** e integrar y por último, se procesa el video de la sandía con el Tracker y los datos se exportan a GeoGebra para obtener las ecuaciones paramétricas ajustadas de la elipse y aplicar la fórmula del método de sólidos de revolución para hallar el volumen.

De manera general las actividades planteadas en la fase experimental de las tesis, se orientaron a que los alumnos relacionaran los registros de representación semiótica con cada una de las situaciones problema, haciendo hincapié en que sólo es un objeto en movimiento y se exponen tres gráficas con sus respectivas ecuaciones, una tabla de datos, la representación analítica de la trayectoria del movimiento y la interpretación de las variables ***x, y*** en función del parámetro tiempo (***t***).

Metodología

La Teoría de las representaciones semióticas de Duval (Duval, 2006) es el soporte teórico que se empleó en las tres tesis, pues de una manera “natural” aparecen signos alusivos a las distintas situaciones problema, porque desde que se inicia el diseño del set de grabación, emerge el registro visual (video o fotografía). En esta teoría, la actividad intelectual consiste esencialmente en la transformación de los registros semióticos, ya sea dentro del mismo (tratamiento) o con otro (conversión).

Un tratamiento en el registro analítico, sucede cuando el alumno soluciona el sistema de ecuaciones paramétricas $\{x(t) = 6.382t + 0.1193,\ y(t) = -1.448t^2 + 7.147t - 0.09477\}$ y determina la ecuación de la forma de la manguera $y(x) = -0.0323x^2 + 1.062x + 0.01681$; otro tratamiento se genera en el registro gráfico cuando se pide al alumno explicar la relación entre las tres gráficas que se obtienen con el Tracker en función del desplazamiento de la burbuja en un intervalo de tiempo.

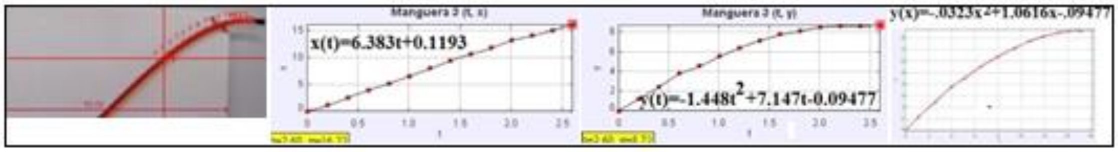


Figura 2. Gráficas del movimiento de la burbuja de aire en los planos (**t-x, t-y, x-y**)

Una conversión se refiere a la transformación de una representación de un registro en otra representación de otro registro, en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial. En el momento en el que se relaciona el video/fotografía con los elementos matemáticos, se reflejan las conversiones visual ⇔ gráfica, visual ⇔ numérica, visual ⇔ analítica; cuando se inicia la discusión se generan las conversiones: gráfica ⇔ numérica, gráfica ⇔ analítica y numérica ⇔ analítica. Ver figura 3 para el caso del movimiento de una burbuja de aire.

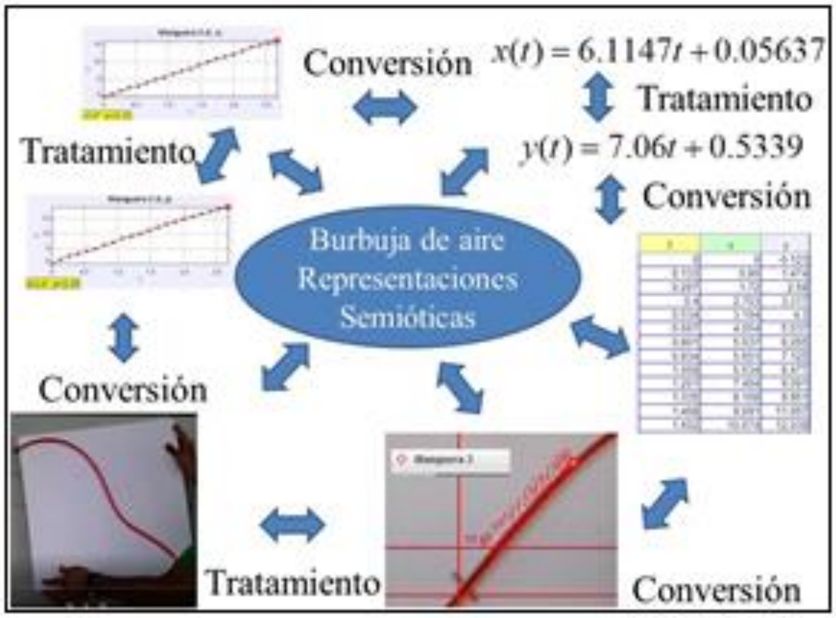


Figura 3. Representaciones semióticas de la burbuja de aire. La tabla de datos es para interpretar como representación semiótica y no para cálculos

Con la modelación el profesor tiene opciones para relacionar los conceptos matemáticos con el mundo real, que le permite considerar el entorno físico y social para abordar situaciones problema dentro de contextos vinculados a los alumnos. Como se ha señalado, se parte de la situación problema (Hitt y González, 2015; Pantoja, Guerrero, Ulloa, Nesterova, 2016), que se graba en video o fotografía y se incorpora al Tracker, que muestra en pantalla los elementos matemáticos que describen su movimiento. Los alumnos en trabajo individual y colaborativo analizan lo mostrado en pantalla con el propósito de relacionar las gráficas, los datos y las funciones de ajuste con el movimiento del objeto.

El concepto de modelación manejado en las tesis, es el que maneja Arrieta y Díaz (2015, p 35), como una práctica de articulación de dos entes, para actuar sobre uno de ellos, llamado lo modelado, a partir del otro, llamado modelo. La articulación de los entes iniciales da lugar a un nuevo ente, al modelo, mo, que resulta adherido a lo modelado, ma. Tal articulación constituye una nueva entidad para la vivencia de quien modela y que podemos denotar (ma, mo) y que nominamos ***dipolo modélico*** (DM).

En el concepto de modelación empleada se parte de la situación problema, para luego, mediante herramientas tecnológicas, en este caso, los programas Tracker y GeoGebra, se determina la expresión analítica, tres gráficas y una tabla de datos, que los alumnos intervendrán para describir tal situación, y como parte final, explicar el fenómeno a partir de la modelación (figura 3), que en el ámbito escolar se entiende como una práctica (de referencia) ejercida por profesores y estudiantes en un contexto y tiempo determinado en respuesta a una situación o fenómeno del mundo externo, pero cercano a la realidad del estudiante, de manera individual y colectiva, mediante el proceso de interacción (Córdoba, 2011, p. 10).

De aquí la importancia de retomar el sentido planteado por Freundental (1980, *p. 20*) sobre el uso de la modelación matemática, pues sin duda, lo más trascendental es que el empleo de situaciones problema reales cercanos al entorno de los actores de la educación, motiva a los estudiantes a aprender matemáticas, ya que muestran interés durante el proceso, además, facilita la retención de todo lo que sea posible construir y que tenga sentido en su contexto, y la convivencia colaborativa en la que se propicia el intercambio de ideas, la participación, el respeto, la honestidad y la puntualidad, entre otros valores, tan necesarios en la sociedad mexicana actual.

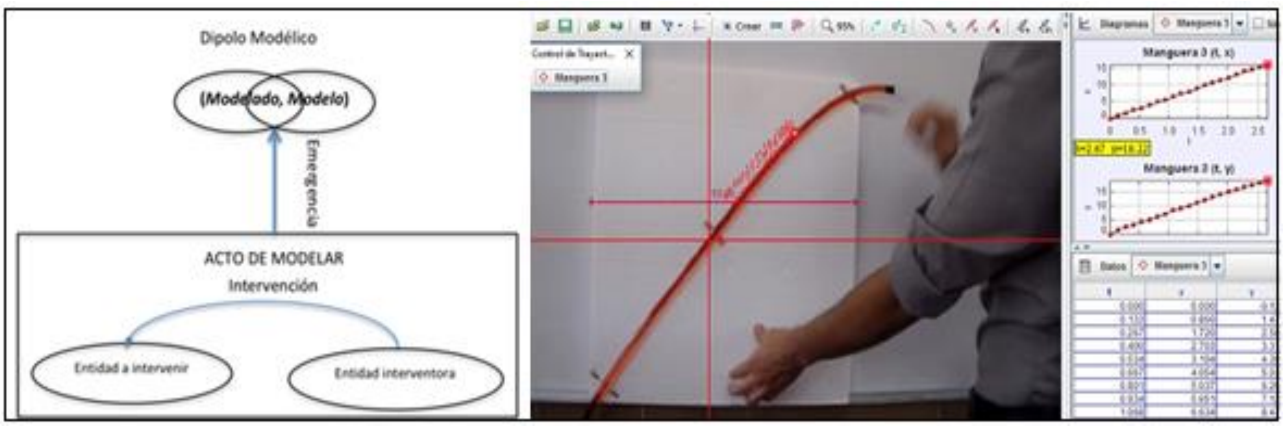


Figura 4. La modelación: El acto de modelar, el modelo, lo modelado y el dipolo modélico. La tabla de datos es para interpretar coo representación semiótica y no para cálculos

La metodología ACODESA emerge como una alternativa de enseñanza de las matemáticas, bajo el marco teórico del interaccionismo social (Hitt, González, 2015) y se sustenta en cinco vertientes: Trabajo individual, Trabajo Colaborativo, Debate, Autorreflexión e Institucionalización. En la tabla 1 se describe ACODESA.

Tabla 1. ACODESA en el contexto del estudio

Trabajo individual (producción de representaciones funcionales para comprender la situación problema).	Se observó en la participación del estudiante en el curso taller, en la modelación de la situación.
Trabajo en equipo sobre una misma situación. Proceso de discusión y validación (refinamiento de las representaciones funcionales).	Se presentó en la fase de grabación, la obtención del modelo matemático, en la elaboración de reportes y la presentación del trabajo realizado.
Debate (que puede convertirse en un debate científico). Proceso de discusión y validación (refinamiento de representaciones funcionales).	Se realizó en el curso taller, en el proceso de interpretación del modelo matemático, presentación del trabajo, elaboración de reportes y conclusiones.
Regreso sobre la situación (trabajo individual: reconstrucción y auto- reflexión).	Se distinguió en la fase final de la experimentación, cuando se les pidió que replicaran el proceso y hacer el análisis correspondiente.
Institucionalización. Proceso en el cual se utilizan representaciones institucionales.	Ocurrió en la presentación de los trabajos en grupos colaborativos, discusión grupal durante la presentación y revisión de los reportes entregados.

Descripción de las actividades realizadas

Burbuja de aire

Se observó el cambio de posición de la burbuja durante su trayecto, para obtener las ecuaciones paramétricas que representan los desplazamientos respecto del tiempo $x(t),\ y(t)$. Se les entregó una hoja de trabajo en la que se les indica grabar, al menos, tres videos con distintas formas de la manguera (figura 5), un apartado para registrar la interacción con el trabajo de Tracker y una sección de discusión.

Figura 5. Trayectorias de la burbuja

Para la manguera con la burbuja de aire, en los casos en que la forma representa una función (Figura 5), no se les dificultó marcar la trayectoria, a la vez que se computa la tabla de datos que señala la posición de la burbuja en el plano, asi como obtener las gráficas correspondientes, y por último, ajustar los datos a una de las opciones que incluye la rutina de Tracker o de GeoGebra.

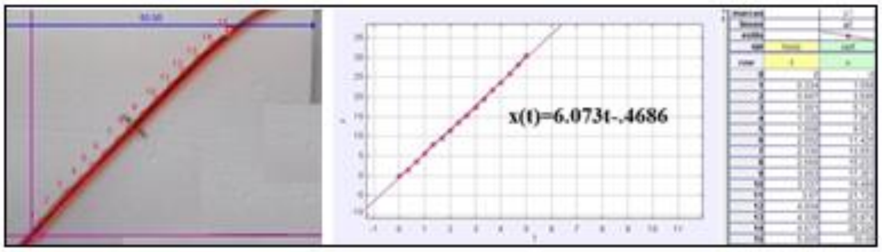


Figura 6. Actividad de la hoja de trabajo

En la figura 7 se presenta una forma de la manguera que no representa una función, que los estudiantes no lograron identificar ni encontrar las ecuaciones paramétricas $x(t), y(t)$, pues se trata de una expresión implícita de la forma $f(x, y, k) = 0$, situación que se consideró normal, pues es muy poca atención la que se da al tema en los cursos.

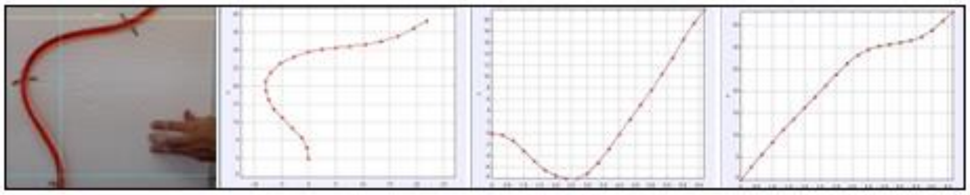


Figura 7. Actividad de la hoja de trabajo

Lo que se notó durante el desempeño de la práctica, es qué se complica la determinación de las representaciones analíticas y paramétricas asociadas, porque no se asemejen a las funciones que los usuarios conocen y les causa dificultad comprender la descomposición del movimiento de la burbuja.

Rueda que gira sin resbalar

En el caso de la rueda de bicicleta que gira sin resbalar en un trayecto rectilíneo, se marca el punto identificable sobre la llanta P (x, y), porque será la referencia para señalizar el recorrido sobre el video con el Tracker. Los alumnos de un equipo logran representar las gráficas del movimiento del punto P en los planos cartesianos $t-x,\ t-y,\ x-y$. Se les cuestionó sobre el porqué si es un sólo objeto el que se mueve, se generan tres gráficas y qué explicaran cada una en relación con el movimiento del punto P marcado sobre la rueda. Argumentan que la gráfica $t-y$ representa el movimiento de la rueda en la dirección perpendicular del eje, que se repite cíclicamente, aunque los alumnos no lograron, en varios intentos, que la rueda se moviera en línea recta. (figura 7).

El profesor señala sobre una asimetría de la gráfica y pregunta a los alumnos: ¿Aquí que pasó? Daniel señala que hubo un error de camarógrafo, pero en realidad lo que sucede es que relacionan ese salto o falta de simetría en la gráfica $t-y$**,** con el fenómeno en términos de que los alumnos no lograron que la rueda siguiera una línea recta en su trayectoria y afirman que no es un error del programa. Ante esta situación, se logra captar que los alumnos intentan explicar la relación: el modelo y lo modelado o Dipólo Modélico.

La expresión analítica para la gráfica $t-x$ (Figura 8), la discutieron con una triangulación entre la forma de la gráfica, sus conocimientos previos y el software GeoGebra. Los alumnos argumentaron que la naturaleza del movimiento periódico de la rueda, es la causa del tipo de gráfica encontrado y concuerdan en que su forma proviene de una función sinusoidal modificada por un parámetro, que tratan de identificar con el uso de GeoGebra, lo intentan con las funciones $x(t)=t\cos(t)$, $x(t)=t+\cos(t)$, $x(t)=t+sen(t)$ que al final descartan. Lo interesante es que los alumnos logran comprender la descomposición del movimiento e identifican que cada punto señalado sobre la rueda, se integra de dos coordenadas que dependen del parámetro tiempo, (x(t), y(t)=A sen(Bt+C)).

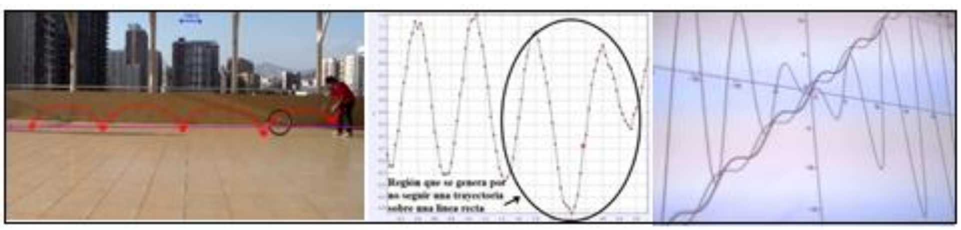


Figura 8. Análisis del giro de una rueda sin resbalar y sus gráficas

Enseguida se presenta un extracto del audio del video de la discusión grupal:

Alumna 1: *De todas las gráficas la que me llamó la atención, de hecho nuestro objetivo, fue encontrar la función …, y concluye, una función lineal*,

Alumno 2: *pero pensamos podía ser una lineal, que tenía demasiado ruido pero después nos dimos que en la lineal había una cierta, … y gesticula,*

Alumna 3: *de hecho lo que teníamos es una cosa así, y recurrimos a la ayuda del GeoGebra,*

Alumno 3: *en realidad lo graficamos en GeoGebra,*

Alumno 2: *Primero lo intentamos con x*cos(x) y nada que ver, y muestran la gráfica, pero de hecho esa grafica que tenemos con el GeoGebra no parte de cero, cero, por lo tanto después hicimos la gráfica x+sen(x) y pasa por cero, cero.*

Rueda que gira sobre su eje

Para esta situación los alumnos utilizaron una rueda de bicicleta con una marca que simboliza el punto P(x,y) que se emplea para describir el movimiento. En la figura 8 se muestran tres distintas opciones de la rueda girando sobre su eje. Para esta situación problema los alumnos no tuvieron dificultades en el desarrollo de la práctica, seleccionaron el segmento de video estable, ubicaron el origen de los ejes sobre el centro, la vara de calibración igual al radio, cada 5 cuadros marcarán los puntos y crearon una masa puntual.

Figura 9. Fotos tres ruedas con giro sobre su eje

La discusión grupal se orientó a explicar las gráficas que proporciona Tracker (figura 9) con el giro de la rueda, sobre todo que identificaran porqué son funciones periódicas, por ejemplo, una alumna señala:

> *"el punto sobre la rueda se desplaza tanto verticalmente como horizontalmente, por eso las dos gráficas se parecen a seno o al coseno(x)"*

Los alumnos lograron ajustar las ecuaciones paramétricas $x(t) = 17.91\text{sen}(11.09\text{ t} + 45.53)$, $y(t) = 17.84\text{ sen}(11.08\text{ t} + 47.01)$ a los bosquejos representativos del movimiento. El profesor les explicó que las variaciones entre los radios (17.91 y 17.84) de las ecuaciones resultantes, es debido principalmente a varias situaciones, entre ellas, a la imprecisión en el momento de marcar la trayectoria, a que el origen del plano cartesiano que se coloca sobre el video en el programa Tracker, no coincide con el eje de la rueda y a la fuerza de gravedad que impide que la rueda sujeta por el estudiante permanezca fija.

También preguntaron porque no coincide la ecuación paramétrica $x(t) = a\cos(bt + c)$ con la encontrada con el Tracker y GeoGebra, $x(t) = 17.91\mathrm{sen}(11.09\ \mathrm{t} + 45.53)$, a lo que se explicó que las funciones seno y coseno están desfasadas $\pi / 2$ radianes.

Tren eléctrico

El análisis del tren eléctrico de juguete en movimiento, se orienta hacia los problemas originados al diseñar el set de grabación, porque se desconocía por parte del tesista y del director, la manipulación y el armado de las vías, que es el primer escollo encontrado. Así que se tuvo que recurrir al niño, dueño del tren, con la finalidad de moverlo en diversas trayectorias (figura 9). El segundo problema se presentó al ubicar la cámara de video perpendicular al piso, en el aula de la maestría en enseñanza de las matemáticas, ya que se carece de la infraestructura para hacerlo.

Figura 10. Trayectorias consideradas para el la situación problema del tren eléctrico

En la figura 11 se muestra que se utilizaron los escritorios y sobre de ellos, una superficie plana de unicel con una perforación, de tal manera que el lente de la cámara quedara perpendicular al movimiento del tren. Fue una experiencia motivadora para los interesados en modelar situaciones problema en el contexto cotidiano, porque se reflexionó sobre las necesidades que se generan para diseñar un set de grabación sin problemas técnicos, no relacionados con las matemáticas, pero si con las habilidades y capacidades genéricas.

Figura 11. Set de grabación para la situación problema del tren eléctrico

Conclusiones

Una vez analizadas las situaciones problema trabajadas, los tres tesistas en conjunto con el el director, afirman que incluir situaciones problema relacionados con la vida cotidiana en el aula escolar, produce aprendizaje de las matemática en el tema en cuestión, sin embargo, se sugiere detallar minuciosamente las actividades que realizarán los participantes, pues existen circunstancias como son los conocimientos previos de matemáticas y del área relacionada con la situación problema, que les causan dificultades y desánimo, lo que influye en el resultado de la actividad.

Es notorio que los alumnos se motivan e interesan por la forma en que se plantea esta forma alternativa de aprender matemáticas de manera no tradicional, pues “aparentemente” se les responde la pregunta ancestral “para que sirven las matemáticas”, pero eso no infiere que el alumno haya logrado un aprendizaje significativo del tema de matemáticas, por tal motivo el profesor debe de ser cuidadoso, y sobre todo, diseñar instrumentos de evaluación validados, que permitan sustentar que el alumno aprendió matemáticas.

En el modelo educativo actual de la Universidad de Guadalajara se plantea, que en un proceso educativo es ideal que se involucre a los actores de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, fortalecido con un ambiente de aprendizaje adecuado con las TIC, en el que el estudiante, en trabajo individual y colaborativo, puede decidir qué y cómo va aprender, en el que tome la iniciativa, con el firme propósito de lograr un aprendizaje significativo. Por otro lado, la importancia del aprendizaje colaborativo es primordial, ya que mediante la interacción social con compañeros de clases, maestros y otros, propician la motivación para que construya su conocimiento.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J., y Díaz, M. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *RELIME, 18*(1), 19-48. DOI: 10.12802/relime.13.1811.

Bautista, M. (2013). *La modelación matemática en la vida cotidiana como recurso para propiciar aprendizaje significativo en el ajuste de polinomios reales de una variable real*. (Tesis de maestría un publicada). CUCEI. Universidad de Guadalajara. México, Guadalajara, Jalisco.

Córdoba, F. (2011). *La modelación matemática educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería*. (Tesis de maestría un publicada). Instituto Politécnico Nacional. México. Distrito Federal.

Duval, R. (2006). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo.*: Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. ISBN: 958-670-329-0.

Ezquerra, A., Iturrioz, I., Díaz, M. (2011). Análisis experimental de magnitudes físicas a través de vídeos y su aplicación al aula*. Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*

Universidad de Cádiz. APAC-Eureka. http://hdl.handle.net/10498/14733. http://reuredc.uca.es. ISSN: 1697-011X. DOI: 10498/14733.

Ferreyra, R. (2016). *Empleo de situaciones problema de la vida cotidiana, video digital, Tracker y GeoGebra para el aprendizaje del tema de sólidos de revolución*. (Tesis de maestría un publicada). Universidad de Guadalajara. México, Guadalajara, Jalisco.

Freundental, H. (1980). Major Problems of Mathematics Education. Conferencia Plenaria ICME 4, Berkeley. *Educational Studies in Mathematics 12. Antología de Educación Matemática.* Sección Matemática Educativa CINVESTAV-IPN: 7-42.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática*. Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 22. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino /funciones-semioticas/04_enfoque_ontosemiotico.pdf.

Hitt, F., y González, A. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Springer Science+Business Media*, 201-219.

Jofrey, J. A. (2010). Investigating the conservation mechanical energy using video analysis: four cases. *Physics Education*. DOI 10.1088/0031-9120/1/005.

Leal, O. (2016). *Sistema de prácticas de modelación con el Tracker y GeoGebra de cuerpos en movimiento, para el aprendizaje del objeto matemático derivada*. (Tesis de maestría un publicada). Universidad de Guadalajara. México, Guadalajara, Jalisco.

Pantoja, R. Guerrero, L., Ulloa, R. Nesterova, E. (2016*).* Modeling in problem situations of daily life. *Journal of Education and Human Development*, 5(1), 62-76. Published by American Research Institute. Recuperado el 5 de Mayo de 2017 de http://jehdnet.com/. Electronic Version. DOI: 10.15640/jehd.v5n1a1. ISSN: 2334-2978.

EXPERIENCIAS EN EL DESARROLLO DE LA VISUALIZACIÓN DE INVARIANTES GEOMÉTRICOS EN EL CONTEXTO DE LA VISIÓN 3D POR COMPUTADORA CON EL APOYO DE GEOGEBRA

Larissa Sbitneva, Nehemías Moreno Martínez, Lucinda Serna Herrera
Universidad Autónoma del Estado de Morelos. (México)
larissa@uaem.mx, nehemias_moreno@live.com, lucindaserna@gmail.com

RESUMEN: En la presente comunicación compartimos las experiencias en la formación de estudiantes para facilitar el aprendizaje de los fundamentos de Geometría Proyectiva necesarios para trabajar con simulaciones en la visión 3D artificial por computadora. Nuestra estrategia consiste en enfatizar los antecedentes concretos de carácter geométrico y utilizar los beneficios de la herramienta Geogebra para ilustrar los conceptos de incidencia y de razón doble (cruzada) a través de ejercicios de construcción de Conjugados Armónicos y observar la importancia fundamental de las colineaciones y las homologías de las transformaciones proyectivas. En el desarrollo de innovaciones nos apoyamos en la teoría del Enfoque Ontosemiótico (EOS) de cognición e instrucción matemática.

Palabras clave: invariantes de transformaciones proyectivas, geogebra

ABSTRACT: In this report, we share the experiences in the students' training to facilitate the learning of projective geometry foundations needed to work with simulations in 3D artificial vision by computer. Our strategy consists in emphasizing the concrete antecedents of geometric character, and using the benefits of the tool GeoGebra to illustrate the concepts of incidence and double reason (crossed) through exercises of construction of Harmonic Conjugates and to observe the great importance of the co-lineation and the homologies of projective transformations. In the development of innovations, we rely on the onto-semiotic approach theory of mathematical cognition and education.

Key words: invariants of projective transformations, geogebra

Introducción

Existen diversas publicaciones dedicadas al estudio del aprendizaje de las matemáticas en diferentes niveles educativos mediante el empleo del software dinámico de Geogebra. Concretamente, en el aprendizaje de la geometría mediante Geogebra se han explorado diversos tópicos los cuales se encuentran apoyados en diferentes teorías educativas y modelos, sin embargo, existen escasas investigaciones en relación con la comprensión de conceptos de la geometría proyectiva en las cuales el empleo de un software dinámico podría resultar crucial para favorecer la visualización y la realización de otros procesos cognitivos.

La geometría proyectiva tiene sus orígenes en la pintura de la época del Renacimiento con el deseo de lograr reproducción fiel sobre un lienzo de escenas espaciales. Mediante los principios de proyección y sección lograron expresar los efectos visuales de perspectiva. La teoría de Perspectiva desarrollada por los artistas de Renacimiento establece fundamentos geométricos de los conceptos de puntos de fuga, línea del Horizonte, paralelismo, entre otros. Cabe enfatizar que los teoremas deducidos por los renacentistas se encuentran en el cuerpo de la geometría moderna. Actualmente estos conocimientos teóricos resultan ser la base de la fotogrametría, que comenzó a desarrollarse a mediados del siglo XIX, y la visión 3D por computadora, en la segunda mitad del siglo XX.

Una imagen se obtiene realizando una proyección cónica, que es una aplicación proyectiva que conserva alineaciones y razones dobles, pero no razones simples, ni ángulos, ni distancias. A partir de esta situación surge el cuestionamiento ¿Cómo es posible reconocer un objeto a partir de las imágenes que lo representan? (Gordejuela, 2009), estas y otras cuestiones son de gran relevancia y pueden ser abordadas en el contexto de la Visión 3D por computadora apoyada en los fundamentos teóricos de Geometría Proyectiva.

Marco teórico

Nos apoyamos en la teoría del Enfoque Ontosemiótico (EOS) para describir los fenómenos matemáticos como *el punto en el infinitito y Conjugados Armónicos*, a partir de la realización de una secuencia de prácticas matemáticas en el entorno informático de Geogebra. Según el EOS, en las prácticas matemáticas intervienen seis tipos de objetos matemáticos (Font, Godino y Gallardo, 2013): lenguaje, conceptos, propiedades, procedimiento y argumentos.

A través de la práctica de resolución de problemas, el sujeto que resuelve el problema (experto o novato) organiza el conjunto de objetos en configuraciones de objetos matemáticos. En la experiencia de enseñanza de los fundamentos de la geometría proyectiva se desarrollaron algunas innovaciones dentro de las prácticas discursivas y operativas en la asesoría individual para lograr la sinergia entre los lenguajes diagramáticos y secuenciales a través de la resolución de tareas por computadora.

Los fundamentos teóricos que nos permitieron entender los problemas de construcción del conocimiento que enfrentaron nuestros estudiantes se puede encontrar en las investigaciones recientes del EOS (Godino, Giacomone, Wilhelmi, Blanco y Contreras, 2016) dedicadas a los problemas de la visualización y el uso de diagramas que desempeñan el papel importante en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En dichos trabajos se señala que los lenguajes secuenciales (como lenguajes naturales y simbólicos) usan sólo la relación de concatenación para representar relaciones entre los objetos, mientras que en los diagramas se hace uso de las relaciones espaciales para representar otras relaciones. Por eso, la visualización es muy importante en la práctica matemática, especialmente cuando se usan diagramas, lo que refleja metafóricamente las estructuras conceptuales matemáticas.

Nuestro método de trabajo ha sido dar atención individual en las asesorías con los estudiantes en su investigación sobre la Tesis de Licenciatura, lo que permitió detectar problemas referentes a las interpretaciones de los distintos modelos de geometría proyectiva y los métodos que se usan en la Visión 3D por computadora, así como también las dificultades sobre la comprensión de las descripciones que se presentan en los libros de texto bajo un enfoque de divulgación. Varias situaciones produjeron conflictos cognitivos, los cuales han sido resueltos gracias a las explicaciones de Godino et al. (2016) sobre las representaciones simbólicas en lengua natural o en lenguajes formales: aunque consisten en inscripciones visibles, no son consideradas como inscripciones visuales, sino como analíticas o secuenciales.

Por eso se sugiere entender la abstracción en una manera antropológica, es decir, que la emergencia de objetos generales e inmateriales, que constituyen las estructuras matemáticas, tiene importantes consecuencias en educación matemática. Consecuentemente, el aprendizaje matemático debe tener lugar mediante la progresiva participación de los estudiantes en los juegos de lenguaje matemático realizados en las prácticas matemáticas.

A continuación se comparten algunas experiencias con estudiantes universitarios en relación con el aprendizaje de los fundamentos de Geometría Proyectiva. Las sesiones de asesorías tenían el objetivo de guiar a los estudiantes hacia la comprensión de modelos que se aplican en simulaciones tridimensionales.

Descripción del experimento que permite visualizar el concepto de punto en el infinito

Las consideraciones del EOS nos sugieren que es necesaria una introducción informal a través de prácticas que lleven a los estudiantes, por un lado, al descubrimiento de la noción de puntos “en el infinito”, cambiando la terminología más antigua de los puntos “absolutos” (ideales) o impropios, y por otro lado, también a encontrar antecedentes del significado geométrico. Se observó a través de las tareas de construcción con lápiz y papel, guiadas para lograr una sensación corporal, que los estudiantes se apoyaban con gestos para indicar las direcciones donde los puntos en el infinito emergían.

Antecedentes concretos de carácter geométrico

En la geometría euclidiana se distingue entre dos casos diferentes de parejas de rectas: las que se intersectan y las parejas que no poseen un punto común (rectas paralelas). En contraste con la geometría usual, en Geometría Proyectiva no hay rectas paralelas: todas las rectas se intersectan ya sea en un punto propio (actual) o bien en un punto impropio (ideal o absoluto).

La manera de percibir este fenómeno puede ser lograda mediante la siguiente práctica: se inicia con el trazado de dos rectas, digamos recta l y recta k, que se intersectan en el punto P. Se escoge una de estas rectas, digamos, la recta l, y un punto A cualquiera sobre esta recta. Luego se empieza a girar la recta escogida alrededor del punto A, el cual se queda fijo. Al hacer este movimiento es posible observar qué pasa con la posición del punto P.

Con el cambio de posición de la recta l, que gira, las posiciones del punto P de intersección con la recta k se alejan a lo largo de la recta k hasta "desaparecer", lo que sucede cuando la recta l tome la posición paralela a la recta k. Cuando las rectas l y k están paralelas decimos que se intersectan en el punto absoluto (ideal, impropio, en el infinito).

Un fenómeno de observación

Si se dibuja una recta "l" la cual se hace girar en sentido antihorario, recta verde de la Figura 1(a), con el punto A como "pivote", entonces se observa a un punto P de intersección con una recta k (conjunto de rectas paralelas de color azul). El punto P se encuentra en la parte superior respecto a la posición inicial de la recta "l", alejándose hacia arriba en la dirección Norte (P' y P'') a lo largo de la recta k, y puede ser idealizado como un punto en el infinito cuando recta l es paralela a la recta k.

Sin embargo, al continuar el movimiento más allá de esta posición "paralela", se percibe que el punto P vuelve a aparecer en la recta k, pero del "otro lado" en la dirección Sur, Figura 1(b).

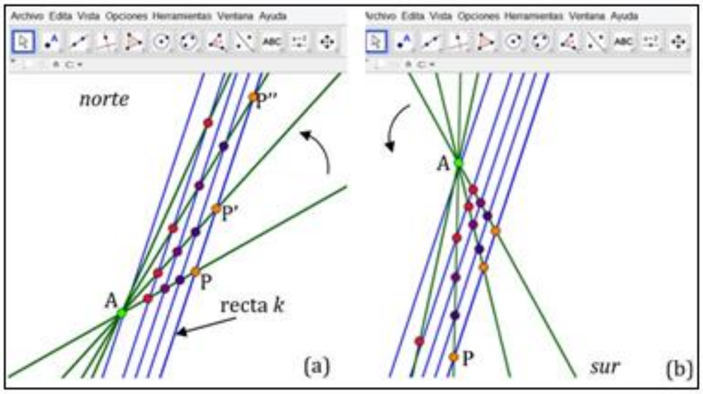


Figura 1. Tarea en Geogebra que permite visualizar la emergencia del punto en el infinito

Visualización apoyada con un gesto

La tarea anterior también fue realizada a lápiz y papel donde se tomó en cuenta el conjunto de rectas paralelas k y la recta que se hace rotar en torno al punto A, Figura 1. Surgió un momento crucial cuando uno de los alumnos se apoyó con la muñeca de la palma derecha, en la posición vertical, sobre el punto A girándola en el sentido contrario de las manecillas de reloj, entonces los dedos le indicaban el sentido de movimiento del punto P sobre la recta en movimiento.

Con el cambio de posiciones de la muñeca (que representaba la recta "l", que gira), las posiciones del punto P de intersección con la recta k se alejan más allá a lo largo de la recta k hasta "desaparecer" (no percibido) cuando la mano (recta l) tome la posición paralela a la recta k. Luego, el alumno observó que al continuar el movimiento, el punto P vuelve a aparecer en la recta k, pero del otro lado representado por el brazo, prolongación más allá del codo, del lado derecho.

El empleo de la metáfora

Mediante el empleo de una metáfora, se puede decir que dos líneas rectas tienen un punto de intersección aun cuando se encuentran en la posición de ser paralelas, pero este punto está en el "infinito", o es el "Punto Absoluto". Podemos resumir esto del modo siguiente: cada línea recta posee un único punto absoluto (en el infinito) al cual un observador puede acercarse por el movimiento a lo largo de la recta en cualquiera de los dos sentidos. Además, todas las rectas paralelas a la recta dada se intersectan en este mismo punto en el infinito. El término punto "en el infinito" todavía es una expresión metafórica, sin embargo existen varias maneras de darle un sentido matemático preciso (Semple y Kneebone, 1952).

Un invariante de las transformaciones proyectivas

Otra secuencia de prácticas con un énfasis sobre el carácter geométrico ha sido relacionada con las construcciones con lápiz y papel de los Conjugados Armónicos (cuaternos armónicos, antecedentes de la razón cruzada, que es invariante propio de transformaciones proyectivas).

Cuando consideramos una figura con cuatro puntos colineales (i.e., se encuentran en la misma recta) se descubre una característica numérica, llamada razón cruzada o razón doble, que no se altera bajo transformaciones proyectivas, por eso se llama invariante. La razón cruzada de la pareja ordenada (C, D) respecto a la pareja ordenada (A, B) es $\{A, B; C, D\} = \frac{AC}{CB} \div \frac{AD}{DB}$, donde los cuatro puntos A, B, C, D son colineales (figura 2).

Este invariante juega papel importante en la geometría proyectiva (del mismo modo que lo hace longitud en la geometría euclidiana), pues permite reconocer si las imágenes representan el mismo objeto. El caso particular, cuando el valor de la razón cruzada es igual a (-1), es conocido desde los tiempos de Pitágoras como razón armónica, y las parejas CD y AB de los puntos mencionados se llaman Conjugados Armónicos.

Entre las distintas maneras de construir los Conjugados Armónicos (cuaternos armónicos) se han escogido para esta comunicación solo dos, las más significativas desde el punto de vista de la geometría subyacente. Además, se descubren varios beneficios del empleo de Geogebra que permiten la animación, por ejemplo, permite apreciar los cambios de la posición de la recta hasta que sea paralela e indique el punto al infinito (ver la Figura 3).

Construcción de los conjugados armónicos (cuaternos armónicos)

Sean A, B y C tres puntos colineales, ver la Figura 3. Se puede construir una circunferencia (pueden ser de diferentes radios) que pasa por los puntos A y B (enfatizando los beneficios de Geogebra para esta construcción). Sea K el punto medio del arco AB de la circunferencia construida, Figura 2. Se plantea el problema: ¿Cómo obtener la pareja de Conjugados Armónicos, a saber, puntos C y D, respecto a la pareja de puntos A y B?

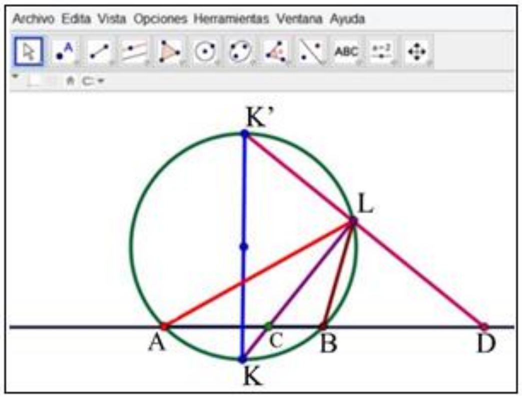


Figura 2. Los puntos C y D son conjugados Armónicos respecto a los puntos A y B

ea L el punto de incidencia de la recta (KC) sobre la circunferencia. Se traza la recta $K'L$, donde K' es el punto diametralmente opuesto al punto K, entonces el ángulo KLK' será un ángulo recto, por “abrir” el diámetro, y entonces la recta $K'L$ es perpendicular a la recta KL que pasa por el punto L. La recta $K'L$ intersecta a la recta AB en el punto D, entonces los puntos C y D son los Conjugados Armónicos respecto a la pareja de puntos A y B.

Justificación

Se aplica el teorema de la bisectriz LK del ángulo ALB (por la construcción los ángulos ALK y KLB miden lo mismo porque el punto K es el punto medio del arco AB). Además, por la construcción, LD es la bisectriz del ángulo externo del triángulo ALB, ya que las bisectrices son ortogonales.

Conjugados Armónicos con un Cuarto Armónico en el infinito

La Figura 3 ilustra el siguiente Principio 1: sean A y B dos puntos propios y C el punto medio del segmento AB. Entonces la pareja de puntos C y D son Conjugados Armónicos respecto a la pareja de los puntos A y B, siendo punto D el punto en el infinito (impropio, ideal) que corresponde al punto absoluto de la recta (AB). Se llama D, el Cuarto Armónico.

Cuaterna de rectas armónica

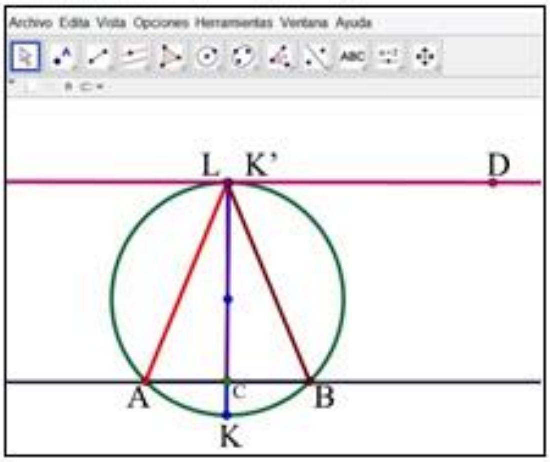


Figura 3. El punto D se encuentra en el “infinito” cuando C es el punto medio de AB

Las diagonales a y b del paralelogramo y dos rectas c y d que pasan por el punto de intersección de diagonales del paralelogramo forman una cuaterna de rectas armónica.

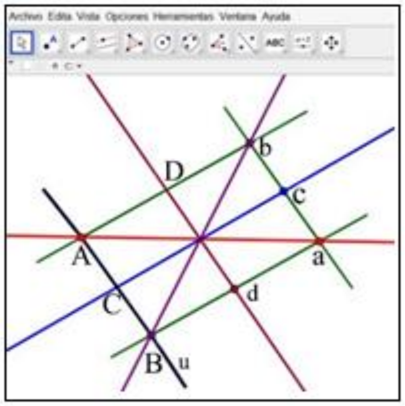


Figura 4. El punto D es el punto ideal de las rectas d y u

Justificación

Los cuatro puntos A, B, C, D en los cuales las rectas a,b,c y d intersectan al lado del paralelogramo u forman una cuaterna armónica (porque D es el punto impropio de la recta u (que representa este lado), de acuerdo con el Principio 1, dado que el punto C es el punto medio del segmento $\overline{AB}$). Por eso se dicen que las rectas a,b,c y d forman la cuaterna armónica, ver la Figura 4.

Transformaciones proyectivas con Geogebra 3D: homologías y elaciones

Se llama *homología* a una transformación proyectiva bajo la cual se tiene una recta p, llamado el eje, que consiste de puntos fijos (inmóviles) y un punto fijo P, llamado centro, que no pertenece a la recta fija. En el caso cuando el centro P pertenece al eje, la transformación se llama *elación*.

Construcción de imágenes

El Principio 2 expresa que la imagen A' de cualquier punto A se encuentra sobre la recta PA: sea K el punto de intersección de la recta PA con el eje de homología p, se tiene que los puntos P y K se quedan inmóviles (fijos) bajo la transformación de homología, por eso los tres puntos P, K y A que se encuentran en la recta PA deben transformarse a los tres puntos P, K y A' que se encuentran en la misma recta (la recta PA).

Para la construcción de la imagen B' de cualquier punto B bajo la homología con el centro P, el eje p y dos puntos correspondientes A y A', unimos los puntos A y B; sea N punto de intersección de la recta AB con el eje p. Entonces el punto de la intersección B' de las rectas PB y NA' es la imagen del punto B (de acuerdo con el Principio 2 la recta ABN se transforma en la recta $A'B'N$).

Una manera de representar estas construcciones (que ilustramos con Geogebra 3D) utiliza un hecho teórico: se trata de que una homología puede obtenerse como el resultado (composición) de dos aplicaciones de perspectiva, como se muestra en la Figura 5.

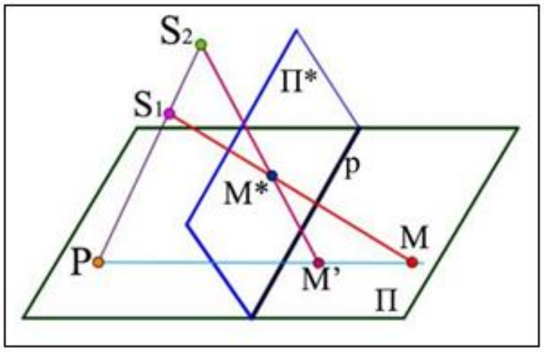


Figura 5. Homología como la composición de dos perspectivas

Supongamos que en un plano proyectivo Π esta dada una homología con el centro P, el eje p y puntos homólogos M y M'. Tracemos un plano Π^* que pasa por el eje p, y sobre una recta, que pasa por el punto P y no se encuentra en el plano Π, tomemos un punto S_1 que no pertenezca al plano Π^*. Realizamos la aplicación de perspectiva del plano Π sobre el plano Π^* con el centro de perspectiva en S_1, y luego la aplicación de perspectiva con el centro en S_2 (punto de intersección de la recta $M'M^*$con la recta PS_1) del plano Π^* sobre el plano Π.

El resultado de composición de estas dos perspectivas es una transformación proyectiva del plano Π, la cual es una homología, porque todos los puntos de la recta p se quedan fijos y el punto P, de intersección de la recta S_1S_2 con el plano Π se queda fijo. Cabe enfatizar que las construcciones presentadas son componentes indispensables de solución de una tarea integradora (Rodrígues-Sanjurjo y Ruis Sancho, 1998) para el caso de las homologías involutivas (que coinciden con su inversa) y que resultan ser exactamente las homologías de razón doble igual a (-1) (denominadas *homologías armónicas*).

Conclusiones y resultados

Con el empleo del software dinámico Geogebra se logró la visualización de los invariantes de las transformaciones proyectivas. El material gráfico elaborado por los estudiantes se puede emplear como una guía para estudios de los fundamentos geométricos que subyacen los algoritmos y modelos en la visión artificial por computadora. A través de este proceso de "enseñanza asistida por ordenador" descubrimos que a pesar de la descripción detallada de las construcciones y sus justificaciones era indispensable el apoyo de profesor en el proceso de realización de las construcciones, lo que demuestra la falta tanto de prácticas de construcciones geométricas y exploraciones de conexiones lógicas en la formación previa de alumnos, como la intuición en dibujos de figuras geométricas espaciales.

Con la variedad de prácticas ofrecidas, los estudiantes superaron distintos obstáculos y lograron comprender la importancia fundamental de las colineaciones y las transformaciones proyectivas, representando las construcciones espaciales mentales sobre el plano de dibujo. En las prácticas discursivas resaltamos las propiedades notables de los cuaternos armónicos estudiados por Pitágoras relacionados con las notas musicales, siendo el Cuarto Armónico la octava de la primera nota de un acorde.

Referencias bibliográficas

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practice. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 97-124.

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco T. F., y Contreras, A. (2016). *Configuraciones de prácticas, objetos y procesos imbricadas en la visualización espacial y el razonamiento diagramático*. Recuperado el 30 de marzo de 2016 de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino_DiagramasEOS.pdf.

Gordejuela, F. E. (2009). La geometría de la representación visual. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, *103*(2), 297-304.

Rodrígues-Sanjurjo, J. M., Ruis Sancho, J. M. (1998). *Geometría proyectiva*. Madrid, España: Addison Wesley.

Semple, J. G. y Kneebone, G. T, (1952). *Algebraic projective geometry.* Oxford: Clarendon Press.

LA RESOLUCION DE PROBLEMAS EN ENTORNOS VIRTUALES: PROPUESTA DIDACTICA EN ESTUDIANTES DE MATEMATICA I-II CPEL-UNIVERSIDAD SAN IGNACIO DE LOYOLA

Enrique Huapaya Gómez, Juan Carlos Sandoval Peña
Universidad San Ignacio de Loyola. (Perú)
enrique.huapaya@usil.pe, jcsandoval07@hotmail.com

RESUMEN: Esta presentación tiene por objetivo proponer y aplicar una intervención educativa enmarcada en la modalidad B-learning soportada por la plataforma Blackboard; esta propuesta pretende desarrollar en el estudiante la competencia de resolución de problemas, basado en el tratamiento y conversión de los registros de representación semiótica. Esta intervención; consiste en un diseño didáctico que articula estrategias, recursos y herramientas que brinda la plataforma de modo que se potencia las habilidades y capacidades matemáticas de los estudiantes, el trabajo colaborativo, su autonomía y su pensamiento matemático.

Palabras clave: resolución de problemas, aprendizaje virtual

ABSTRACT: This paper aims to propose and implement an educational project framed in the B-learning modality supported by the Blackboard platform. This proposal attempts to develop the student's problem solving competence, based on the treatment and conversion of the semiotic representation registers. This project consists of a didactic design that integrate strategies, resources and tools provided by the platform so that it enhances students' mathematical skills and abilities, collaborative work, autonomy and mathematical thinking.

Key words: problem solving, virtual learning

Introducción

Actualmente la Universidad San Ignacio de Loyola de Lima – Perú; ofrece carreras universitarias mediante el programa para estudiantes adultos (edad mínima 24 años) denominado Carreras para estudiantes con Experiencia Laboral (CPEL), en esta modalidad los estudiantes cursan los módulos de matemática I y II durante siete semanas cada uno, ya sea de manera presencial, semivirtual y virtual dentro del enfoque por competencias, las cuales se han estructurado en:

- Comunicación matemática
- Matematización y representación
- Resolución de problemas.

En diagnósticos realizados en 2014-2015-2016, se detecta que entre el 25% y 35% de estudiantes entrevistados, manifiesta dificultades en la competencia de resolución de problemas relacionados a conceptos matemáticos considerados en el silabo tanto en los cursos de Matemática 1 y 2. Ello fue evidenciado en los análisis de respuestas en la solución de problemas de dichos contenidos temáticos. Muchos de ellos manifiestan dificultades tales como: traducir enunciados a lenguaje matemático, identificar datos e incógnita, establecer las relaciones entre dichos datos e incógnita (matematizar), utilizar alguna heurística o procedimiento que tenga como objetivo modelizar la expresión matemática adecuada, dar solución a dicha situación-problema y finalmente interpretar dichos resultados para tomar decisiones. Frente a esta problemática se plantea aplicar una intervención educativa orientada a desarrollar en el estudiante la competencia de resolución de problemas apoyado en la plataforma Blackboard. Esta propuesta didáctica se atiende a los estudiantes de la modalidad semivirtual y virtual para los cuales el aprendizaje se realiza en un entorno B-learning.

Objetivo

Diseñar y validar una propuesta de intervención, orientada a desarrollar y potenciar la competencia de resolución de problemas en los estudiantes de Matemática I y II del programa CPEL de la Universidad San Ignacio de Loyola, aprovechando las herramientas y recursos de la plataforma Blackboard.

Marco teórico

El marco teórico en el cual se apoya esta intervención educativa es la teoría de registros semióticos de Duval (2004), el cual señala que una condición indispensable para la aprehensión del objeto matemático, es que el estudiante realice tratamientos y luego conversiones entre registros semióticos: numérico, analítico, gráfico y verbal. Diversas investigaciones han mostrado que una articulación adecuada de registros, presentados en situaciones contextualizadas permiten un sólido aprendizaje de conceptos matemáticos (Huapaya, 2012). Por otra parte, de acuerdo con Duval (2004, citado por Huapaya 2012); en el abordaje de una noción u objeto matemático; no basta con una representación matemática para aprender un concepto, sino que se debe pensar en varias representaciones alternativas.

Para asegurar el desarrollo eficaz de las actividades de aprendizaje en fase virtual, no basta solo con contar con una plataforma, esto es, con un entorno virtual de aprendizaje, sino que es necesario diseñar una estructura pedagógica de aprendizaje (conformada por planes, estrategias y actividades) que permita orientar los procesos de aprendizaje en contextos virtuales (Suárez, 2007; Zuluaga et al., 2014).

Las experiencias de innovación, llevadas a cabo durante los últimos años en asignaturas del área Matemática mediante un formato b-learning han mostrado muy buena aceptación por parte de los estudiantes (Pérez et al., 2014). El b-learning favorece sus habilidades de autoaprendizaje, aprendizaje colaborativo, así como su pensamiento crítico. (Troncoso et al., 2010). El diseño de las actividades debe tomar en cuenta las competencias matemáticas que se pretenden desarrollar con la actividad, sin menoscabo de las competencias relacionadas con el empleo de cualquier tecnología. (García & Benítez, 2011).

Por otra parte, Milevicich & Lois (2011, p.2) afirma que la enseñanza de la matemática en entornos virtuales debiera atender de modo particular, a las condiciones en las cuales se produce la formación de conceptos. Esto implica tomar en cuenta tres aspectos importantes:

- El recurso que genera la representación (pizarra interactiva, computadora, videograbadora, cámara fotográfica, calculadora, emulador, app, etc.),
- La relación entre la representación y el objeto representado, de tal modo que posibilite el acceso al objeto representado.
- Las razones por las que el uso de la representación es necesario (pertinencia).

Plataforma Blackboard

La plataforma fue implementada en la Universidad San Ignacio de Loyola en 2014, antes se trabajaba con Chamilo, una bondad es que Blackboard incorpora variedad de recursos y herramientas como mensajería interna, foros temáticos, foros de consulta, evaluaciones y trabajos en línea (colaborativos), los cuales usados de manera idónea permiten a estudiantes y docentes comunicar, interactuar, compartir, identificar información relevante, así como relacionar información.

De acuerdo con Clarenc, Castro, López de Lenz, Moreno y Tosco (2013, p.91) esta plataforma constituye un ambiente de integración entre el tutor y estudiante y está conformada por:

- Módulo de contenidos.

- Herramientas de comunicación.
- Herramientas de evaluación.
- Herramientas de seguimiento y gestión de aprendizaje.

En esta plataforma el docente puede gestionar su curso y monitorear el desempeño de los estudiantes, en el caso del estudiante permite la autonomía y diseñar actividades de trabajo colaborativo. Las sesiones virtuales o videoconferencias permiten la exposición de contenidos temáticos, permitiendo un aprendizaje asíncrono.

Método

Aplicamos la investigación-acción (cualitativa) colaborativa, pues posibilita que investigadores y docentes trabajen en la solución de problemas propios de las prácticas educativas, compartiendo la responsabilidad en la toma de decisiones al momento de diseñar las actividades, planificar estrategias, elegir los recursos y herramientas o reformular cursos de acción durante la investigación.

Intervención frente a la problemática

Esta intervención educativa consiste en un diseño didáctico que de acuerdo con Sandoval (2015) es apropiado para la educación virtual relacionado con el B-learning, pues integra estrategias y actividades pertinentes para estudiantes en modalidad semivirtual y virtual; de modo que le permite favorecer su aprendizaje autónomo y colaborativo. Esto permite a los estudiantes realizar tratamientos y conversiones semióticas en el sentido de Duval, potenciando sus habilidades y capacidades matemáticas para la resolución de problemas en el estudiante tales como comunicar, sistematizar, organizar, representar, codificar y decodificar la información en diferentes formatos (videos, documentos electrónicos, apps y otros), así como el uso eficiente de las herramientas que brinda la plataforma Blackboard, ello se evidencia durante el desarrollo en equipo de las plantillas de resolución de problemas, a continuación se muestra algunos ejemplos.

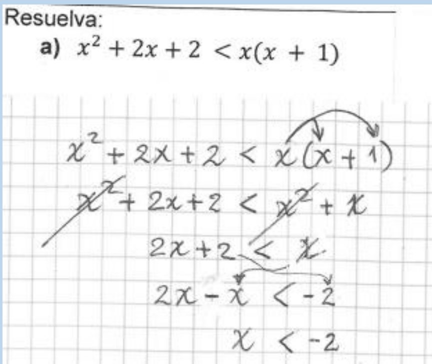
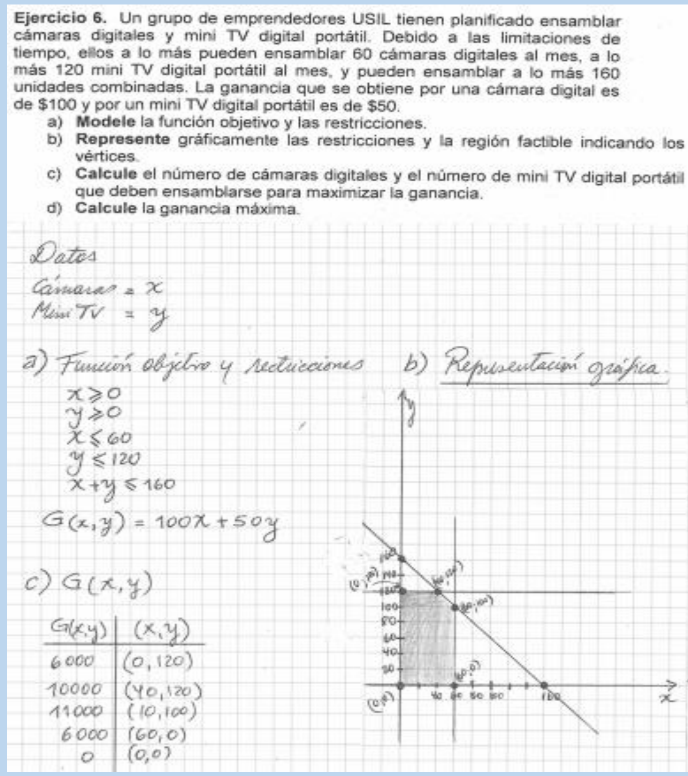
Ejemplo de Tratamiento	Ejemplo de Conversión
 Resuelva: **a)** $x^2 + 2x + 2 < x(x+1)$ $x^2 + 2x + 2 < x(x+1)$ $\cancel{x^2} + 2x + 2 < \cancel{x^2} + x$ $2x + 2 < x$ $2x - x < -2$ $x < -2$	 **Ejercicio 6.** Un grupo de emprendedores USIL tienen planificado ensamblar cámaras digitales y mini TV digital portátil. Debido a las limitaciones de tiempo, ellos a lo más pueden ensamblar 60 cámaras digitales al mes, a lo más 120 mini TV digital portátil al mes, y pueden ensamblar a lo más 160 unidades combinadas. La ganancia que se obtiene por una cámara digital es de $100 y por un mini TV digital portátil es de $50. a) **Modele** la función objetivo y las restricciones. b) **Represente** gráficamente las restricciones y la región factible indicando los vértices. c) **Calcule** el número de cámaras digitales y el número de mini TV digital portátil que deben ensamblarse para maximizar la ganancia. d) **Calcule** la ganancia máxima. Datos Cámaras = x Mini TV = y a) Función objetivo y restricciones $x \geq 0$ $y \geq 0$ $x \leq 60$ $y \leq 120$ $x + y \leq 160$ $G(x,y) = 100x + 50y$ b) Representación gráfica c) $G(x,y)$ $G(x,y)$ — (x,y) 6 000 — (0,120) 10000 — (40,120) 11 000 — (60,100) 6 000 — (60,0) 0 — (0,0)

Figura 1. Ejemplo de Conversión entre registros, tomado de portafolio, equipo 03-Módulo 2016-3

Esta intervención tiene por objetivo desarrollar la competencia de resolución de problemas, buscando que el estudiante relacione las representaciones semióticas mediante su tratamiento y conversión en el sentido de Duval. Pensamos que el desarrollo por parte del estudiante, de este conjunto de actividades y estrategias propuestas favorecerá dicha competencia matemática cuando aborde los conceptos matemáticos mediante los registros: analítico, numérico, gráfico y verbal, todo eso mediado por la plataforma virtual, donde también se desarrolla otras capacidades tales como argumentación, interpretación, toma de decisiones, aprendizaje colaborativo y autónomo.

Estrategias

Como resultado de experiencias previas, así como de la revisión de la literatura correspondiente proponemos, la ejecución de las siguientes actividades a desarrollar durante las siete semanas que dura el módulo, tanto en el curso de Matemática 1 y Matemática 2:

1. Grabación de videos sobre resolución de problemas

   Los cuales apuntan fundamentalmente al desarrollo de los pensamientos: aritmético, algebraico y geométrico. De acuerdo con Jofrey (2010, citado por Pantoja, Guerrero, Ulloa y Valdivia, 2016, p. 7) al introducir el video digital en el aula, el docente puede aprovechar el potencial de expresión y comunicación, para permitir al estudiante visualizar varias representaciones de la misma situación-problema. Por otra parte, la propuesta busca que el estudiante diseñe su propio video, de acuerdo con Pantoja et al; ello permite comprender y desarrollar capacidades cognitivas en este proceso.

2. Elaboración/Resolución de una plantilla de problemas

   Los estudiantes desarrollan un conjunto de ejercicios y situaciones-problema, en forma colaborativa y que deben socializar y debatir en línea usando la plataforma Blackboard a través de los foros temáticos. A esta actividad le denominamos Trabajo formativo de Matemática (TFM), el cual tiene como propósito la comunicación a los demás, de los resultados sobre los conceptos aprendidos. Según Tobón (2013, p.29) la implementación del proyecto formativo logra una mayor pertinencia en la formación del estudiante, pues perciben que lo que aprenden tiene sentido y utilidad, lo cual les motiva a seguir aprendiendo y a profundizar en otros temas de manera autónoma.

   Al evaluar este trabajo formativo de matemática el docente analiza dos aspectos fundamentales la debida preparación del estudiante sobre los problemas resueltos (justificación de técnicas, procedimientos y algoritmos utilizados) así como los saberes teórico-conceptuales relacionados con su desempeño profesional u ocupacional, en los cuales la matemática emerge como una herramienta útil para la resolución de problemas y la toma de decisiones. En la sexta semana antes de finalizar el módulo los estudiantes tanto en la modalidad semivirtual y virtual realizan una exposición de los Trabajos Formativos de Matemática a través de la plataforma en el horario establecido previamente por el docente y los estudiantes, el cual se realizará en dos momentos.

   - La primera parte de la exposición será la presentación e introducción del trabajo formativo de matemática a cargo de un representante del equipo, a continuación, otro estudiante explicará y resolverá un problema de los que le ha tocado puede ser presentar en diapositivas power point dicho problema (tiempo máximo 5 minutos).
   - La segunda parte será una ronda de preguntas formuladas por el docente-jurado a los demás integrantes de equipo que no han expuesto. (3 minutos por cada

estudiante). Todo ello mediado por la plataforma, el tiempo estipulado de exposición por grupo es como máximo media hora, pues a veces surgen imprevistos de índole técnica, lo cual retrasa o dificulta la exposición fluida.

3. La realización de sesiones virtuales diarias o videoconferencias - permanencia virtual

   La **videoconferencia o sesión virtual** es el espacio, en el cual el docente/tutor desarrolla un contenido temático correspondiente al silabo, el tiempo es de una hora. En los primeros quince minutos se recuperan saberes previos y se explica conceptos teóricos, luego se proponen ejercicios y problemas de aplicación en el cual el docente y los estudiantes interactúan para la asimilación y comprensión de dichos conceptos. Se desarrollan ejercicios y problemas de índole intra y extramatemática. Estas videoconferencias se dan lo largo de todo el módulo. Las sesiones son grabadas para aquellos estudiantes que no pudieran participar "en vivo".

   Asimismo, se destina un horario de **"Permanencia virtual"** diario, en la cual el mismo tutor/profesor virtual orienta, monitorea y absuelve consultas a través de los foros y gestiona las participaciones de los estudiantes para el desarrollo del trabajo formativo de matemática. En este espacio corrige y retroalimenta las evaluaciones de los estudiantes. El registro verbal es importante por ello en Blackboard, la sesión virtual o videoconferencia es fundamental, se evidencia que los estudiantes que participan en ella tienen un mejor rendimiento que aquellos que solo se limitan a ver las videograbaciones.

   Según Pantoja et al. (2016) ello se debe a que la información en formato video proporciona una manera fácil y eficiente de obtener representaciones del fenómeno estudiado. La plataforma brinda la posibilidad de usar herramientas y recursos tales como emulador de calculadora científica, apps, Geogebra; así como el compartir escritorio de modo que se logra que los estudiantes transiten entre registros: tabla a gráfica, grafica a analítico y viceversa (Geogebra), así como analítico a verbal, pues deben argumentar sus razonamientos, decisiones, así como interpretaciones mediante el chat en línea.

4. Asesoría vía foros

   El docente atiende consultas e inquietudes por parte de los estudiantes mediante los foros temáticos y de consulta, en este espacio atiende las dudas que ellos manifiestan proporcionando un feedback de las mismas, orienta y monitorea el desempeño de estudiantes en la resolución de problemas. De acuerdo con López (2015), los foros constituyen una herramienta que promueve tanto el aprendizaje colectivo como el pensamiento crítico, en estos espacios los estudiantes aclaran sus dudas e inquietudes acerca de su desempeño al resolver problemas y/o profundizan los conceptos estudiados en el silabo. En algunas ocasiones previo acuerdo con algún estudiante se aprovecha la plataforma para brindar dudas e inquietudes sobre un tema específico. Por otra parte, el sistema brinda **asesoría académica** previa solicitud a un grupo pequeño de estudiantes (no más de cinco) durante una o dos horas, para el refuerzo o repaso de temas puntuales.

5. Elaboración de un e-portafolio

   De acuerdo con Cámara y Nardoni (2011), el portafolio se define como un instrumento de evaluación, integrado en el proceso de enseñanza aprendizaje; y consiste en una selección de evidencias/muestras que el estudiante construye a lo largo de un periodo de tiempo el cual responde a un objetivo concreto. En esta propuesta asumimos el e-portafolio como una herramienta que se construye a partir de recursos y herramientas TIC y permite a los estudiantes reflexionar sobre su aprendizaje y mostrar evidencias de lo desarrollado en el módulo, el e-portafolio se elabora en forma grupal.

   Tanto el video, las discusiones, así como el desarrollo de sus ejercicios y problemas son mostrados en este e-portafolio y luego evaluado por el docente. De acuerdo con Martínez & Sánchez (2013, p. 1025) el portafolio permite al docente medir el avance del trabajo que realizan los grupos, enriqueciendo la evaluación formativa y sumativa de los mismos. Por otra parte, las investigadoras señalan que la aplicación de estrategias y actividades variadas en un ambiente de solidaridad como son: el trabajo colaborativo, uso del portafolio todo ello mediado por la plataforma virtual, se logra un mayor alcance.

   Evidencias de e-portafolios diseñados en los años 2014-2015-2016

   https://sites.google.com/site/clubmatematicacpel/home

   http://escorpiones722.wixsite.com/matematicaequipo6/blank-c10fk

   https://sites.google.com/site/team1usil2015mate1/

En la siguiente figura se muestra de manera panorámica la intervención educativa en la cual se focaliza el logro de la competencia de resolución de problemas.

Figura 2. Escenarios e instrumentos que favorecen la competencia de resolución de problemas en un entorno virtual

Pensamos que estos espacios virtuales y herramientas asociadas, configuran escenarios en donde la capacidad de resolución de problemas de los estudiantes se favorece, pues el estudiante transita entre los diversos registros en el sentido de Duval, asimismo permite la interacción docente tutor/estudiante, así como medir sus desempeños y logros en la resolución de problemas.

Conclusiones

El diseño de situaciones-problema, complementados con fichas de trabajo estructurados (dosificados y por niveles de dificultad) optimizan el aprendizaje del estudiante fortaleciendo su competencia en la resolución de problemas.

Esta propuesta mediada por ambientes virtuales; favorece el trabajo colaborativo y mejora los niveles de desempeño y logros de aprendizaje al utilizar de manera pertinente herramientas y recursos (videos, apps y uso de emuladores), que favorecen la formación de representaciones en el sentido de Duval.

La propuesta permite el autoaprendizaje de los estudiantes, el e-portafolio, se configura como un instrumento en el cual desarrollan actividades tanto grupales como colaborativos, reflexionan y evidencian sus logros, integrando las habilidades y capacidades relacionadas a la resolución de problemas.

Pensamos que existen limitaciones debido a factores técnicos, debido a ello debemos proponer y validar otras estrategias que permitan optimizar el uso de la plataforma, de modo que se mejore la competencia de resolución de problemas en el estudiante. En cuanto a la evaluación vía plataforma virtual también existen otros desafíos y retos a superar de modo que se garantice su fiabilidad.

Referencias bibliográficas

Cámara, V., Nardoni, M. (2011). *Evaluación auténtica: El portafolio en Matemática*. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Brasil. Recuperado de http://www.lematec.net.br/CDS/XIIICIAEM/artigos/371.pdf.

Clarenc, C. A.; S. M. Castro, C. López de Lenz, M.E. Moreno y N. B. Tosco (2013). *Analizamos 19 plataformas de e-Learning: Investigación colaborativa sobre LMS*. Recuperado de http://www.cooperacionib.org/191191138-Analizamos-19-plataformas-de-eLearning-primera-investigacion-academica-colaborativa-mundial.pdf.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Colombia: Universidad del Valle. Grupo de Educación Matemática.

García, M., Benítez, A. (2011). Competencias matemáticas desarrolladas en ambientes virtuales de aprendizaje: el caso de Moodle. *Formación Universitaria*, *4*(3), 31-42. Recuperado de http://www.scielo.cl/pdf/formuniv/v4n3/art05.pdf.

Huapaya, E. (2012). *Modelación usando función cuadrática: Experimentos de enseñanza con estudiantes de 5to de secundaria*. Pontificia Universidad Católica del Perú. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/123456789/1571/HUAPAYA_GOMEZ_ENRIQUE_MODELACION.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

López, J. (2015). *Cómo utilizar foros de discusión en procesos educativos*. Recuperado de http://eduteka.icesi.edu.co/articulos/foros-discusion.

Martínez, D., Sánchez, S. (2013). Matemáticas en grupo diferenciado artes y humanidades nivel medio. En A. Ramírez., Y. Morales (Ed.), *Memorias I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe* (pp.1024). República Dominicana. Recuperado de http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/memorias_completo.html.

Milevicich, L.; Lois, A. (2011). *El aprendizaje de los conceptos matemáticos en entornos virtuales*. VI Congreso de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología, Salta, Argentina. Universidad Tecnológica Nacional (ED). Recuperado de http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/18422/Documento_completo__.pdf?sequence=1 .

Pantoja, R., Guerrero, M., Ulloa, R. Valdivia, S. (2016). *La modelación matemática en situaciones problema de la vida cotidiana*. Seminario Repensar las Matemáticas. Recuperado de https://repensarlasmatematicas.files.wordpress.com/2016/03/s83-documento-de-referencia-bis.pdf.

Pérez, M., Veliz, M., Martin, L., Rodríguez Areal, E., Ross, S., De Rosa, E., Mentz, R. (2014). *Aprendizaje de la matemática utilizando herramientas del aula virtual*. Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y educación. Recuperado de http://www.oei.es/historico/congreso2014/memoriactei/393.pdf.

Sandoval, J. (2015). *Retos y desafíos en un ambiente Blended para el aprendizaje de las matemáticas de los primeros ciclos de estudiantes adultos*. (Tesis de Doctorado no publicada). Universidad Nacional Federico Villarreal.

Suárez, C. (2007). Estructura didáctica virtual para Moodle. *DIM: Didáctica, innovación y multimedia. 13,* Recuperado de http://www.raco.cat/index.php/DIM/article/view/138930/189974.

Tobón, S. (2013). *Los proyectos formativos: Transversalidad y desarrollo de competencias para la sociedad del conocimiento*. CIFE. México. D.F. Recuperado de https://seminariorepensarlabioquimica.files.wordpress.com/2016/01/s26-srbq-fad910_sergio_tobon-_3_.pdf.

Troncoso, O; Cuicas, M; Debel, E; (2010). El modelo b-learning aplicado a la enseñanza del curso de matemática en la carrera de ingeniería civil. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, *10*, 1-28. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44717980015.

Zuluaga, J., Pérez, F., Gómez, J. (2014). *Matemáticas y TIC. Ambientes virtuales de aprendizaje en clase de matemáticas*. Recuperado de http://reposital.cuaed.unam.mx:8080/jspui/bitstream/123456789/4190/1/VE14.014.pdf.

USO Y DISEÑO DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS EN BASE A LAS HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

Gessure Abisaí Espino Flores, Viridiana García Zaragoza, Irma Daniela Viramontes Acuña
Centro Regional de Formación Docente e Investigación Educativa del Estado de Sonora. Universidad Autónoma de Nayarit. Universidad Tecnológica de Nayarit. (México)
gessure.espino@crfdies.edu.mx, iriv.3898@gmail.com, daniela85_85@hotmail.com

RESUMEN: Las tecnologías de la información han adquirido una influencia primordial dentro de la enseñanza, y siendo el campo de las matemáticas en donde han tenido mayor presencia, ya que se han convertido en parte esencial para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticos, debido a lo anterior es que se ponen en juego elementos teóricos y metodológicos sobre el uso de las herramientas tecnológicas en el aula, ya que se considera que una actividad didáctica debe de estar pensada para atender las necesidades en la enseñanza de las matemáticas pero a su vez atender las necesidades institucionales con las que se cuentan en el aula, es así que se ha optado por trabajar con dos perspectivas teóricas como son: la Investigación Acción y ACODESA; donde a través de estas es que se desarrollan actividades apropiadas que integre el uso de la tecnología promoviendo la reflexión de los discentes sobre aquellos elementos matemáticos, atendiendo a su vez las necesidades curriculares que el sistema de educación en México ha implementado.

Palabras clave: herramientas tecnológicas, actualización de profesores, actividades didácticas, ACODESA

ABSTRACT: Information technologies have acquired a major influence in teaching, mainly in the field of mathematics where they have had greater presence, since they have become an essential part for the teaching and learning of mathematics. That’s why; theoretical and methodological elements are put into practice on the use of technological tools in the classroom, as it is considered that a didactic activity must be conceived according to the needs in mathematics and the classroom institutional needs, as well. So we have decided to work with two theoretical perspectives such as: Action Research and ACODESA; by means of which appropriate activities are developed by integrating the use of technology and fostering students' reflection on the mathematical elements, meeting, at the same time, the curricular needs that the Mexican educational system has implemented.

Key words: technological tools, teachers updating, didactic activities, ACODESA.

Introducción

La tecnología en la enseñanza de la matemática se le atribuye un gran potencial, siempre que se considere como herramienta cognitiva, debido a que esta puede ayudar a trascender algunas limitaciones de la mente y permita que la actividad cognitiva pase a un nivel superior (Pea, 1987 y Dörfler, 1993; citados por Ben-Zvi, 2001). De hecho, a través del uso de las herramientas tecnológicas es posible provocar un cambio en los objetos a trabajar, impactando no sólo la forma en que debe de ser estructurada la actividad y la manera de desarrollar la actividad en clase, sino también el contenido a estudiar. Las representaciones proporcionadas por la tecnología se convierten en el objeto de estudio de la actividad cognitiva como son: la variación de datos y el número de repeticiones (simulaciones), dejando en segundo plano los productos de la actividad realizada a través del trazo o bosquejo de una representación gráfica o del cálculo.

Antecedentes y justificación

Uno de los objetos de estudio que se han trabajado en México en las últimas décadas ha sido la formación de profesores en matemáticas y lectura, debido a la preocupación que el sistema educativo mexicano ha tenido sobre los índices y estándares de la educación, de acuerdo a mediciones internacionales como por ejemplo PISA (Flores y Díaz, 2013) el 55% de los alumnos en México no alcanza el nivel básico de habilidades matemáticas, y el 41% no alcanza el rublo de comprensión de lectura.

Un pilar fundamental en la enseñanza en México es el desarrollar aquellas competencias y habilidades en los estudiantes de educación básica (primaria 6-12 años, secundaria 12-15 aproximadamente) y media superior (15-18). Una mejora por parte de la Secretaria de Educación Pública (SEP) en matemáticas ha sido a través de la actualización de profesores, no obstante, con los cambios educativos que se han generado en el país, hoy en día la actualización de los profesores se centra en el desarrollo de técnicas para la formación de estudiantes en conceptos matemáticos. Dentro de los esfuerzos que se han realizado por la SEP es el incrementar el número de horas para los cursos de matemáticas reportando que:

> En 2012, el estudiante promedio de 15 años en México pasaba 4 horas y 13 minutos por semana en clase de matemáticas en la escuela (promedio de la OECD: 3 horas y 32 minutos), 18 minutos más por semana que el estudiante promedio en 2003 (promedio de la OECD: 13 minutos más) (Ecuaciones y Desigualdades: Panorama de Volviendo las Matemáticas Accesibles para Todos, 2016, p.1).

Este incremento no refleja un avance significativo en el rublo de matemáticas y de acuerdo a la OECD, México está por debajo del promedio que maneja en su rublo de exposición a la matemática pura, la cual es el manejo de aquellos procedimientos abstractos, mientras que en el rublo de exposición a la matemática aplicada se encuentra apenas por encima del promedio (Figura1).

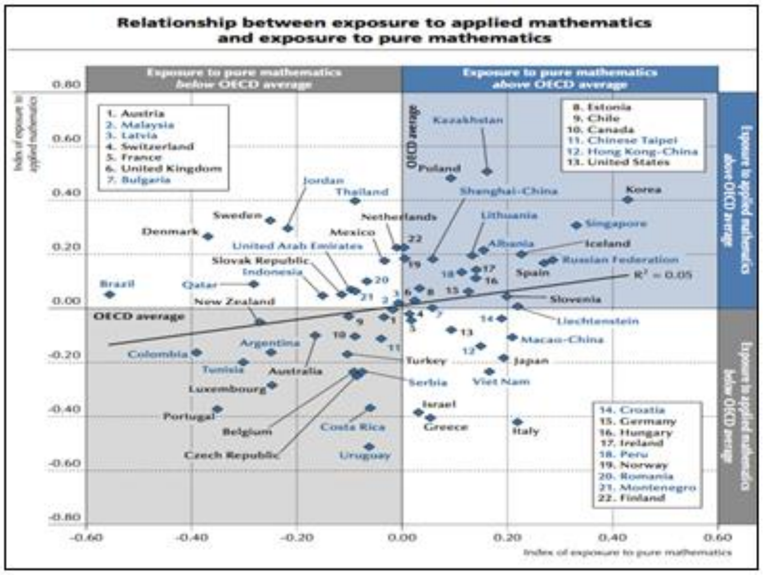


Figura 1.

Fuente. OECD (2016): Equations and inequalities: making mathematics accessible to all

La investigación dentro de la Educación Matemática intenta explicar la fenomenología del aprendizaje desde el interaccionismo social, lo que paralelamente ha venido influyendo en propuestas de intervención didáctica. Precisamente, en este trabajo se considera este tipo de interacción para producir un aprendizaje significativo en el estudiante, lo que requiere ser debidamente planificado para dar lugar a todo “un sistema de interacciones cuidadosamente diseñado que organiza e induce la influencia recíproca entre los integrantes de un equipo” (Johnson y Johnson, 1998, p.1). En tales circunstancias el aprendizaje se desarrolla de una manera gradual, con aportaciones propias de los estudiantes a fin de generar conocimiento, compartiendo la autoridad, aceptando las responsabilidades y respetando los diferentes puntos de vista, proporcionando de manera colectiva un conocimiento nuevo.

Garfield y Ben-Zvi (2008) declaran que actualmente los profesores intentan motivar a los estudiantes a través de actividades más auténticas, asistidos con herramientas tecnológicas a fin de apoyar la construcción del aprendizaje significativo, pero aún con intentos novedosos prevalece la resistencia por parte del alumno. Es por lo anterior que se pretende realizar esfuerzos para proponer una manera diferente, basados en la transversalidad de contenidos y que permitan un acercamiento conceptual a los elementos matemáticos, esto mediante la implementación de secuencias didácticas orientadas a situaciones cotidianas. Particularmente el contexto jugar un papel importante en el involucramiento del estudiante para que participe con acciones hacia la emergencia conceptual y el desarrollo de habilidades y destrezas en su uso.

Las bondades que se pueden resaltar sobre el uso de las herramientas tecnológicas (software) en la enseñanza de la matemática son: a) que éstas permiten un acercamiento a un nivel cognitivo más profundo (*Figura 2*), permitiendo mediar las comprensiones de los conceptos matemáticos en el alumno, y no sólo utilizar estas como herramientas amplificadoras (Espino y Hugues, 2014), y b) el enfoque del alumno se centra en aquellos aspectos matemáticos a estudiar, dejando en segundo plano la mecanización de las técnicas y/o procesos sobre el uso de la tecnología.

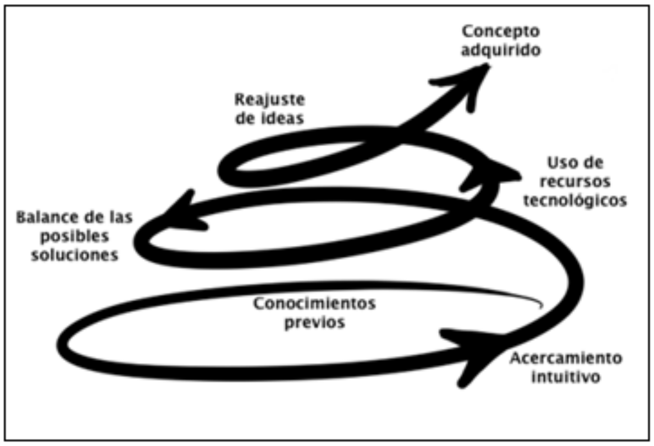


Figura 2. Progreso conceptual con la ayuda de las herramientas tecnológicas. Elaboración propia

Metodología

El presente proyecto se basa en el método de investigación-acción, el cual consiste en la indagación introspectiva de sujetos que están inmersos en situaciones sociales específicas, teniendo como objetivo el mejorar la racionalidad en las prácticas sociales y/o educativas (Carr y González, 1988), y a su vez el vincular el enfoque experimental con la ciencia social. La investigación-acción se basa en el modelo de Lewin (1946) que consta de tres etapas de cambio social: descongelamiento, movimiento y recongelamiento, siendo estas etapas pertinentes para la investigación en los procesos de la Educación Matemática y el uso de herramientas tecnológicas.

Otro elemento metodológico pertinente para el desarrollo de actividades didácticas con tecnología es ACODESA (conjunto de estrategias nombradas por las siglas en francés de: *Apprentissage collaboratif, débat scientifique et auto-réflexion*), ya que además posibilita organizar o guiar el trabajo de los estudiantes y el rol del profesor. Esta metodología integra al Aprendizaje colaborativo, al Debate científico y a la Autorreflexión, como componentes de estrategias que son desarrolladas al abordar varias situaciones problemas, interrelacionándose unas con otras.

Para alcanzar ésta integración se considera también al trabajo individual (fundamental como referente inicial), el trabajo en equipo, el debate en el aula, la auto-reflexión, y además las dinámicas esencialmente discentes que constituyen una adaptación del interaccionismo social para el aprendizaje de las matemáticas que, aunado a una intervención final del profesor encaminada a la institucionalización de concepciones alcanzadas, es organizado en cinco fases donde se tiene la finalidad de estructurar y afinar diversos acercamientos encaminados a resolver una situación problema que es planteada como punto de partida.

La metodología se apoya en el marco teórico de Vergnaud (1991), la cual hace referencia a los campos conceptuales, debido a que un concepto adquiere sentido para el sujeto a través de situaciones problemas utilizando aquellas operaciones necesarias para la resolución del mismo dentro de un sistema matemático (Hitt y Cortés, 2009). Como se ha mencionado anteriormente debido a la complejidad que conlleva el aprendizaje de las matemáticas, creemos que el uso de los campos conceptuales es indudable para el desarrollo del pensamiento matemático.

El trabajo que a continuación se describe consta de una serie de prácticas basadas en la transversalidad de la matemática hacia otras disciplinas, particularmente sólo se mostrará una práctica sobre el modelo cuadrático. Se consideró abordar el tema desde la experimentación de un fenómeno físico con apoyo de los softwares Tracker y GeoGebra, además del uso de computadora y teléfono celular, los cuales permitieron una profundización en el análisis matemático del fenómeno. Se realizó con un grupo de siete profesores en ejercicio de los niveles de educación básica (secundaria), media superior y superior, de los cuales seis de ellos son profesores de la ciudad de Hermosillo, Sonora, México, y una profesora de Tepic, Nayarit, México, la cual tomó el curso en línea vía Hangouts.

El trabajo efectuado consistió en la construcción de un cohete propulsado con aire (*Figura 3*), y se formaron dos equipos de tres y cuatro personas, donde las funciones básicas fueron: preparación y construcción del cohete, sujetar o colocar de manera óptima el cohete y por último la grabación del fenómeno con el teléfono celular. La pregunta inicial fue ¿Qué características físicas deberá de tener un cohete para que vuele de la mejor manera posible?, a partir de eso empezaron a detallar una serie de características que debería de tener, ya fuera para volar más alto o que no se saliera de una trayectoria establecida.

Se les mostró un video en YouTube sobre cómo construir un cohete con objetos cotidianos o de fácil acceso, se les pidió que grabarán con su celular el lanzamiento del cohete para la captura de datos mediante Tracker, dejando de manera libre las variables a elegir, como son: la posición de los ejes, la magnitud de la medida base y el número de cuadros por segundo a utilizar.

Los profesores ajustaron los ejes con base a la línea del muro (Figura 3), en la disposición gráfica optaron en un primer momento por el uso de las variables (x, y), generando una gráfica que no correspondía a sus concepciones preliminares (Figura 4), los cual resultó en una primera discusión del porqué la gráfica no correspondía a las que se encuentran en los libros.

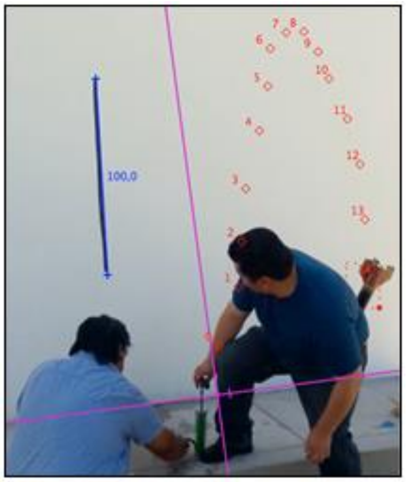


Figura 3. Lanzamiento de cohete

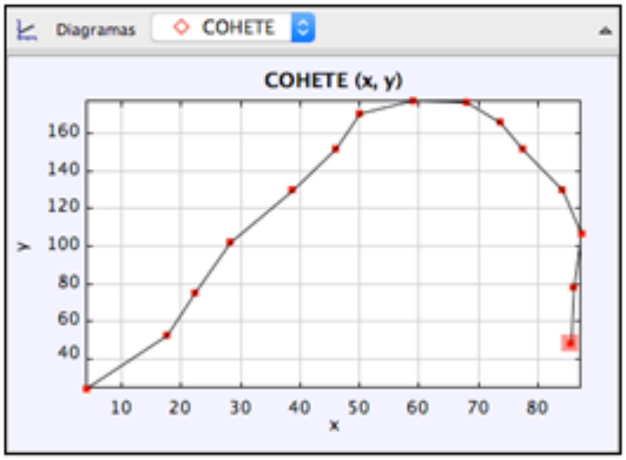


Figura 4. Gráfico generado en Tracker correspondiente a las coordenadas (x, y)

Después consideraron la variable tiempo (*t*), así como la distancia vertical (altura) alcanzada por el cohete (*y*), Generando una serie de gráficos (Figura 5). El problema que surgió fue el de generar un modelo algebraico al fenómeno estudiado sobre la trayectoria del cohete.

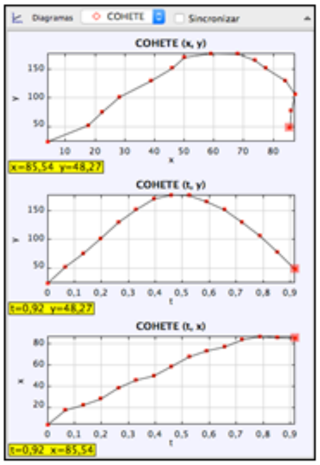


Figura 5. Gráficos generados en Tracker de las variables t, x, y

Debido a que en Tracker no encontraron la forma de modelar dichos datos, optaron por hacer uso de GeoGebra, herramienta que les era más amigable en cuanto a su uso y además que cuenta con distintas representaciones gráficas entre ellas la algebraica.

Los datos fueron ingresados en la hoja de cálculo (Figura 6) de GeoGebra, a partir de estos generaron una análisis de regresión de dos variables (*t, y*), GeoGebra produjo un gráfico que aunque la selección de las variables fue correcta, el gráfico no correspondía aún como lo esperaban (*Figura 7*), el programa tomó como abscisa la altura y como ordenada el tiempo, para ello fue necesario realizar un cambio de variables que permite el programa, resultando así la gráfica esperada.

COHETE		
t	x	y
0	3.94	24.55
0.07	17.56	52.81
0.13	22.28	75.53
0.2	28.17	102.01
0.26	38.72	129.85
0.33	45.96	151.86
0.39	49.98	170.59
0.46	58.9	177.51
0.52	67.96	176.63
0.59	73.65	165.62
0.66	77.34	151.62
0.72	84.07	129.92
0.79	87.24	106.54
0.85	85.97	78.34
0.92	85.54	48.27

Figura 6. Datos ingresados en la hoja de cálculo de GeoGebra

Eligieron un modelo de regresión polinómico de grado dos (*Figura 8*), sin embargo, en ambos equipos obtuvieron modelos diferentes, así como entre sus miembros que conformaban el equipo, esto debido a que de manera individual los ajustes que realizaron en Tracker fueron libres, como: el tiempo de captura de video, el número de fotogramas y la disposición de los ejes, y aunado a esto el error humano al elegir en que zona o pixel se debería de realizar la captura de datos.

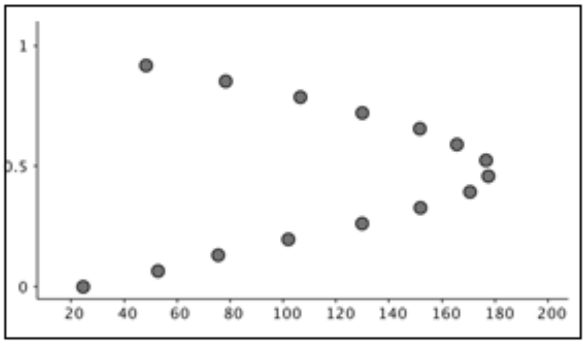


Figura 7. Primer gráfico obtenido en Geogebra

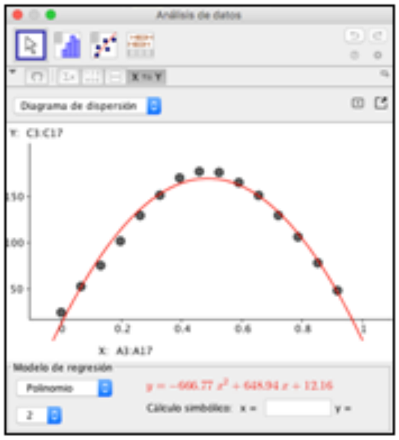


Figura 8. Modelo resultante en Geogebra

Las fases que se realizaron durante la práctica, consistieron en las cinco fases de la metodología ACODESA las cuales son: el trabajo individual, el trabajo en equipo, el debate, regreso sobre la situación planteada y la institucionalización, estas no se restringen al orden que se menciona ni a la repetición de alguna de estas en acaso de considerarse necesario. El profesor en todo momento fungió como guía del proceso, así como experto sobre el uso del software.

Resultados Previos

Debido a que previamente a la práctica se les indicó la actividad a realizar algunos de ellos expresaron el tipo de gráfica que resultaría y por consiguiente el tipo de modelo, a pesar de ellos los primeros resultados no se apegaron a las concepciones preestablecidas que tenían, moviéndolos de esa manera de su zona de confort, y provocando un conflicto cognitivo entre lo que se ve en un software (Tracker o GeoGebra) y lo que se espera ver.

Como resultado de la actividad realizada entre física y matemática los docentes consideraron una serie de elementos que tomaban sentido en el diseño de un cohete y su modelo, ya que ambos contenidos (teórico y práctico) permitía una transversalidad más natural, y por consiguiente surgieron consideraciones hacia la química sobre el tipo de sustancias a utilizar para un mayor impulso.

Se recomienda el uso de distintos elementos tecnológicos, siempre y cuando el tipo de actividad lo permita, además se considera que los softwares libres más apropiados por las características y/o bondades con que cuentan y de ser posible multiplataforma, ya que posibilita un uso libre para el docente, los estudiantes y las instituciones, pero esto no limita al uso de software de paga.

El profesor por parte del alumno es considerado como el experto en el aula en el manejo de la herramienta tecnológica, por ello es que consideramos necesario que el docente conozca como mínimo aquellos usos o comandos a utilizar durante una práctica, así como las posibles soluciones a los problemas más comunes que pueden presentar tales herramientas.

El apoyo de grupos de trabajo es esencial para la consolidación y desarrollo de actividades para beneficio de la comunidad docente (grupos interdisciplinarios), ya que esto le permitirá realizar una transversalidad de las matemáticas hacia otras áreas del conocimiento. Y consideramos que las actividades didácticas apropiadas con apoyo de software (para la Educación Matemática) pueden subsanar el acercamiento a los conceptos matemáticos deseados por parte del docente.

El trabajar de manera mixta, donde se encuentran en el aula sujetos presencialmente y otros de manera virtual, no limita el trabajo en equipo ni las interacciones en tiempo real con sus pares, siempre teniendo en cuenta el tipo de plataforma para el uso y el número de usuarios que participarán de forma virtual.

Es pertinente que el alumno maneje un bagaje de nociones y conceptos matemáticos. Sin embargo, también deja ver que adquirir este bagaje puede tener dificultades, pues se trata de ideas que pueden no ser intuitivas y que su uso se aplica a situaciones complejas, procesos que consideramos fundamentales para trabajar la transversalidad entre la matemática y otras ciencias.

Referencias bibliográficas

Ben-Zvi, D. (2001). Technological tools in statistical education. In *Jornades europees d'estadística. L'ensenyament i la difusió de l'estadística* (pp. 201-220). Palma de Mallorca, España: Ed. Conselleria d'Economia, Comerç i Indústria.

Carr, W., & González A. (1988). *Teoría crítica de la enseñanza: la investigación-acción en la formación del profesorado*. Barcelona, España: Ediciones Martínez Roca.

Ecuaciones y desigualdades: panorama de volviendo las matemáticas accesibles para todos. (2016). In *PISA: Programme for International Student Assessment* (pp.1-4). Recuperado de: https://www.oecd.org/pisa/keyfindings/Equations-and-Inequalities-Making-Mathematics-Accessible-to-All-Mexico-ESP.pdf.

Espino, G., & Hugues, E. (2014). La herramienta tecnológica como apoyo al concepto de correlación lineal. In *Contribuciones a la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad y la estadística 2014* (pp. 99-108). Puebla, México: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. ISBN: 978-607-487-822-6

Flores, G., & Díaz, M. (2013). *México en PISA 2012*. México, DF, México: INEE. Recuperado de http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/11149/1/images/Mexico_PISA_2012_Informe.pdf.

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). The discipline of statistics education. In *Developing students' statistical reasoning*: connecting research and teaching practice (pp. 3-19). New York, NY: Springer.

Hitt, F., & Cortés, J. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelación matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, *10(*1), 1-30. Disponible en: www.cidse.itcr.ac.cr/revistamete.

Johnson, R. & Johnson, D. (1998). *Cooperation in the classroom* (7a ed.). Edina, MN: Interaction Book Company.

Lewin, K. (1946). Action research and minority problems. *Journal of Social Issues*, *2*(4), 34-46.

OECD (2016). *Equations and inequalities*: making mathematics accessible to all. Paris, France: PISA-OECD Publishing, Disponible: http://dx.doi.org/10.1787/9789264258495-en.

Vergnaud, G. (1991). *Les sciences cognitives en débat. Première école d'été du CNRS sur les sciences cognitives*. Paris, France: *Editions du CNRS*.

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN EN UN ENTORNO DE GEOMETRÍA DINÁMICA

Elizabeth Advíncula Clemente, Maritza Luna Valenzuela, Edwin Villogas Hinostroza
Pontificia Universidad del Perú. IREM PUCP. (Perú)
eadvincula@pucp.edu.pe, luna.m@pucp.edu.pe, evillogas@pucp.edu.pe

RESUMEN: En geometría, la mayoría de estudiantes presenta dificultades para identificar las propiedades de los sólidos de revolución, dado que la representación en el plano de estas figuras tridimensionales limita el reconocimiento de todas sus propiedades. Ante esta problemática encontramos el entorno de geometría dinámica como una alternativa que favorece el reconocimiento de propiedades en figuras tridimensionales. Luego, elaboramos actividades basadas en el enfoque de Rabardel usando el *software* GeoGebra 3D, las cuales aplicamos con estudiantes de un primer ciclo universitario. Durante la aplicación, observamos que el GeoGebra 3D permitió que los estudiantes descubran e identifiquen las propiedades particulares de estos.

Palabras clave: sólidos de revolución, geometría dinámica, génesis instrumental

ABSTRACT: In Geometry, most students experience difficulties in identifying the properties of solids geometry, since the representation of these three-dimensional figures in the plane limits the recognition of all their properties. Faced with this problem we find the dynamic geometry environment as an alternative that favors the recognition of properties in three-dimensional figures. Then, we elaborate activities based on Rabar's approach, using the GeoGebra 3D software, which we implement with students of a first university cycle. During the implementation, we noticed that GeoGebra 3D allowed students to discover and identify the particular properties three- dimensional figures.

Key words: solid geometry, dynamic geometry, instrumental genesis

Introducción

En nuestra experiencia docente, en relación con la enseñanza de los sólidos de revolución en el curso de Introducción a la Matemática Universitaria observamos que los estudiantes presentan muchas dificultades para reconocer las características y propiedades propias de estas figuras tridimensionales. Estas dificultades hacen que los estudiantes no logren comprender las nociones y propiedades geométricas que requieren para resolver problemas relacionados con estos objetos geométricos.

En la búsqueda de alternativas para facilitar el aprendizaje de los sólidos de revolución encontramos que el uso de un entorno de geometría dinámica como el GeoGebra 3D, favorece la exploración y el descubrimiento de las propiedades propias de cada figura geométrica así como la comprensión de las mismas. El potencial de arrastre que ofrece este *software* permite realizar cambios de manera casi inmediata en las construcciones realizadas, a diferencia del trabajo realizado con lápiz y papel, lo cual favorece el reconocimiento de las propiedades geométricas invariantes que caracterizan a cada objeto geométrico.

Antecedentes

Algunos investigadores en Educación Matemática señalan que la resolución de problemas en Geometría resulta compleja, dado que esta involucra el trabajo con figuras geométricas bidimensionales o tridimensionales que no son fáciles de identificar. En este sentido, Gutiérrez (2006) señala que el desarrollo de las habilidades de visualización es importante en el proceso de comprensión de las figuras geométricas bidimensionales o tridimensionales. Entendiendo que la visualización no solo consiste en ver o percibir de manera directa un objeto, sino que es un proceso de razonamiento que facilita la comprensión de un concepto a partir del uso de elementos visuales o espaciales, tanto mentales como físicos. También podemos decir que es un proceso relacionado con la observación de patrones, la deducción y la dotación de significado.

Por otro lado, Sánchez (2000) señala que los recursos tecnológicos son herramientas de apoyo que hay que aprender a usar, de modo que fomenten el desarrollo de destrezas cognitivas en los estudiantes y faciliten la construcción de los conocimientos deseados. En esta misma línea, The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) señala que la tecnología es una herramienta eficaz que apoya la enseñanza de las matemáticas ya que ofrece entornos de aprendizaje dinámicos.

Marco teórico

Entre los enfoques actuales en relación a la integración de las tecnologías en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática se encuentran: la Aproximación Instrumental, la Mediación Semiótica, la Orquestación Instrumental y el Enfoque Seres-humanos-con-medios.

La aproximación instrumental se preocupa por los aspectos instrumentales de la actividad de uso de una herramienta tecnológica por parte del sujeto en un contexto educativo, y es resultado de la concatenación de dos teorías, la Ergonomía Cognitiva de Rabardel (2011) y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard (1999) y se produce con el fin de legitimar las prácticas educativas emergentes del uso de una herramienta tecnológica por parte de un estudiante en un contexto educativo. En nuestro trabajo tomamos en cuenta aspectos del enfoque instrumental de Rabardel (2011).

Según el enfoque instrumental de Rabardel (2011) un artefacto es una cosa susceptible de uso, que puede ser material o un objeto simbólico. Así por ejemplo, un artefacto puede ser un compás, una computadora, un software matemático, entre otros. Mientras que un instrumento es un artefacto en acción, es decir, es una entidad que comprende el artefacto y los esquemas de uso que le da el usuario, los cuales son resultado de una construcción propia mediante las acciones que realiza. Así por ejemplo, un instrumento puede ser construir un cono usando GeoGebra 3D, construir un polígono regular usando un compás, etc.

Rabardel (2011) también señala que el instrumento no es algo que existe en sí mismo, sino que es elaborado por el usuario en un proceso denominado génesis instrumental. Es decir, el instrumento se concibe como tal cuando el usuario se apropia de éste y lo integra a su actividad. Además, un artefacto puede generar varios instrumentos y la producción de estos se llama instrumentación. Por ejemplo, con el artefacto GeoGebra 3D y las propiedades asociadas al uso de este un usuario puede generar la definición de sólido de revolución.

Cabe resaltar que en este enfoque los instrumentos cumplen una función muy importante para los usuarios, estudiantes en nuestro caso, pues involucran las acciones que éstos realicen con el artefacto, constituyéndose de esta manera en parte activa en la construcción de sus conocimientos. Por ello, en nuestro trabajo consideramos que el GeoGebra 3D es un artefacto que puede transformarse en un instrumento para los estudiantes luego de un proceso de génesis instrumental, según los esquemas de uso que se apropien o elaboren para realizar determinada tarea.

Finalmente, podemos decir que los entornos de geometría dinámica como el GeoGebra 3D son herramientas con gran potencialidad que podemos usar como medio para construir y crear conocimiento, ya que ofrecen un ambiente favorable para la exploración, construcción, descubrimiento y manipulación de figuras geométricas bidimensionales y tridimensionales.

Actividades con GeoGebra 3D

La experiencia que vamos a compartir se realizó con un grupo de estudiantes de un primer ciclo, matriculados en el curso Introducción a la Matemática Universitaria de la Facultad de Estudios Generales Ciencias de la Pontificia Universidad Católica del Perú. En las actividades propusimos problemas relacionados con sólidos de revolución para que los estudiantes los resuelvan usando el GeoGebra 3D.

A modo de ejemplo, mostramos tres problemas propuestos.

Problema 1

Por un diámetro de la base de un cono circular recto cuya longitud es igual a la longitud de su generatriz, se traza una recta L alrededor de la cual se hace rotar el círculo de la base del cono y se genera una esfera. Si el volumen del cono es igual a $100\sqrt{3}\,m^3$, determine el volumen de la esfera.

Problema 2

Se tiene un rombo cuyo lado mide 10 cm y uno de sus ángulos 30º. Halle el volumen del sólido que se obtiene al girar la región delimitada por el rombo alrededor de un eje que contiene a uno de los lados de dicho rombo.

Problema 3

Sea S el sólido que se obtiene al girar una región delimitada por un triángulo equilátero de 4 cm de lado alrededor de una recta L exterior al triángulo y paralela a uno de sus lados. Si la recta L está ubicada a 3 cm de distancia del lado del triángulo equilátero, halle el área y el volumen del sólido S.

Durante la implementación de esta actividad, observamos que los estudiantes se involucraron con el desarrollo de los problemas propuestos. Algunos resolvieron los problemas propuestos usando solo las herramientas que ofrece el GeoGebra 3D, mientras que otros resolvieron los problemas apoyándose de trazos auxiliares realizados con lápiz y papel.

Sin embargo, no todos los estudiantes lograron resolver todos los problemas. Esto debido a que algunos no conocían el *software* y les resultó complicado manipularlo, o debido a que se complicaron con las construcciones en tres dimensiones al ubicar las rectas que eran ejes de rotación o las regiones que iban a rotar alrededor de los ejes de giro.

Respecto al primer problema propuesto, en la figura 1 mostramos el trabajo entregado por un estudiante, en el que podemos apreciar que este logro construir la superficie esférica generada alrededor del eje de giro indicado. También, observamos que construyó la esfera requerida y calculó su volumen. Lo cual pone en evidencia que el estudiante convirtió el artefacto GeoGebra 3D en un instrumento, ya que se apropió de las herramientas necesarias y las uso de manera adecuada para resolver el problema dado.

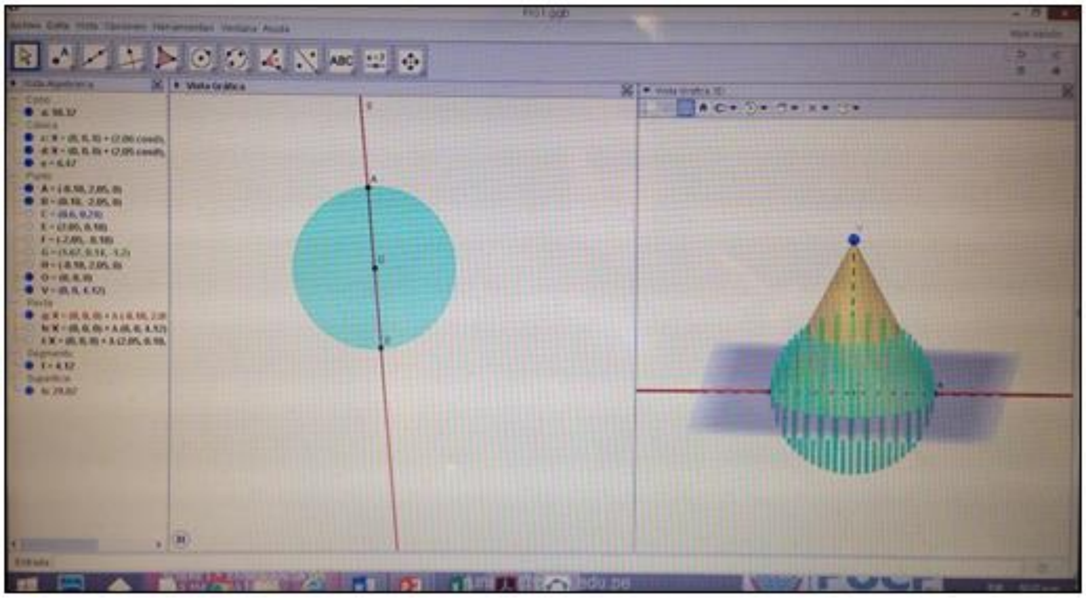


Figura 1. Construcción realizada por un estudiante para el problema 1

Observamos que algunos estudiantes entregaron construcciones y resultados similares al del estudiante 1. Sin embargo, algunos estudiantes tuvieron dificultades para construir la circunferencia que permite generar la superficie esférica dado que no lograban identificar el plano en el que tenían que construirla usando las herramientas del GeoGebra 3D. Esta dificultad impidió que terminaran de resolver el problema.

Respecto al segundo problema propuesto, en la figura 2 mostramos el trabajo entregado por un estudiante, donde podemos apreciar la superficie de revolución generada alrededor del eje de rotación indicado. También, observamos que construyó el cilindro y los conos, y calculó el volumen pedido. Esto pone en evidencia que este estudiante logro convertir el artefacto GeoGebra 3D en un instrumento, luego de un proceso de génesis instrumental que le permitió apropiarse de los conceptos de cilindro y cono de revolución.

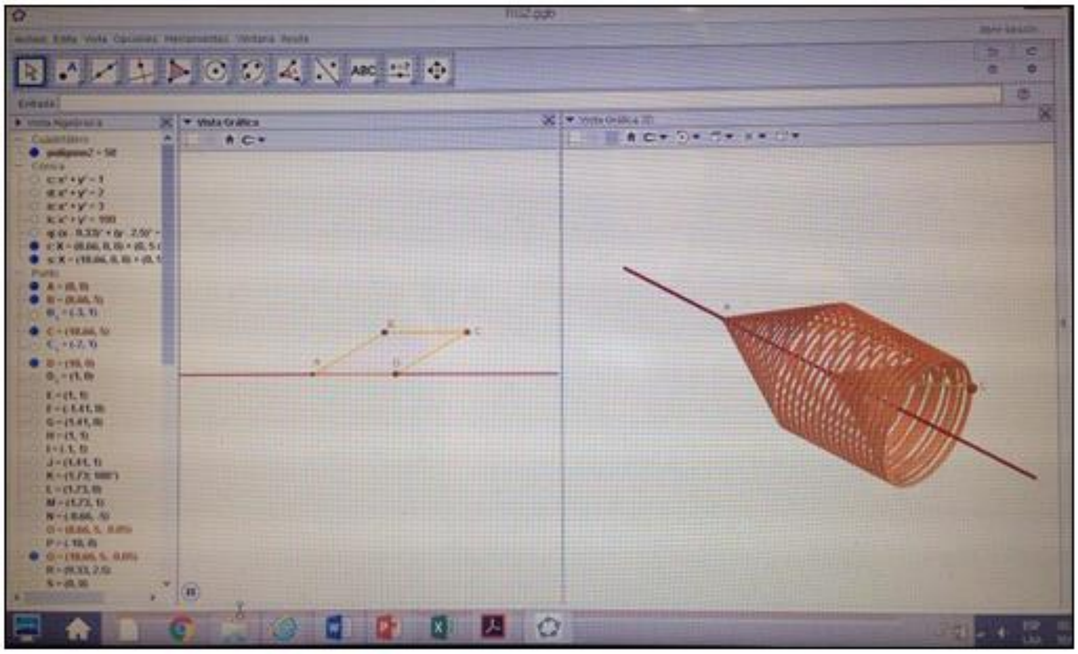


Figura 2. Construcción realizada por un estudiante para el problema 2

En este problema, observamos que la mayoría de estudiantes pudo realizar las construcciones en la vista 2D. Las dificultades aparecieron al realizar las construcciones de los conos en la vista gráfica 3D. Lo que pone en evidencia las dificultades para trabajar con figuras tridimensionales.

Entre las dificultades que presentaron los estudiantes, observamos que algunos no lograron determinar el volumen pedido debido a que no reconocían el sólido generado, compuesto por un cilindro de revolución y dos conos de revolución equivalentes, uno ubicado en la parte superior externa y otro en la parte inferior interna. Podemos decir que pocos estudiantes reconocieron que los conos de revolución generados eran equivalentes

Respecto al tercer problema propuesto, en la figura 3 mostramos el trabajo entregado por un estudiante, donde podemos apreciar la superficie de revolución generada alrededor del eje de giro indicado. También, observamos que logró construir el cilindro y los conos de revolución, y calculó el volumen pedido. Lo que pone en evidencia que convirtió el artefacto GeoGebra en un instrumento, es decir, se apropió de esquemas ya existentes o elaboró nuevos esquemas que le permitieron usar de manera adecuada las herramientas necesarias del GeoGebra 3D para resolver el problema dado.

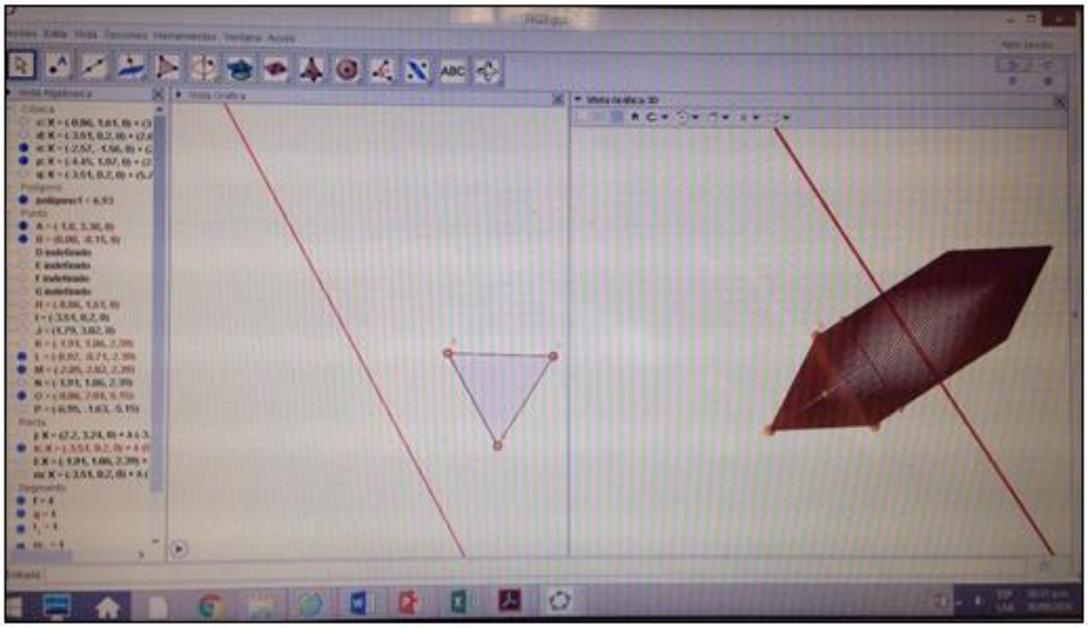


Figura 3. Construcción realizada por un estudiante para el problema 3

En este problema observamos que pocos estudiantes lograron realizar una construcción como la mostrada en la figura 3, donde podemos apreciar la superficie generada alrededor del eje de giro indicado. Al igual que en problema anterior, observamos que los estudiantes no tuvieron dificultades para realizar las construcciones en la vista 2D, pero si las tuvieron para realizarlas en la vista gráfica 3D.

También, observamos que algunos estudiantes no lograron determinar el volumen pedido debido a que no reconocían la superficie de revolución generada. Al respeto, consideramos que, en esta construcción en particular, el *software* no facilitó la visualización de las propiedades y las relaciones necesarias para determinar el volumen del sólido pedido.

Por último, observamos que el uso del GeoGebra 3D promovió el interés en los estudiantes por buscar diversas estrategias para resolver los problemas propuestos. Creemos que esto se dio debido a que las herramientas que ofrece este *software* facilitaron a los estudiantes la construcción de las superficies de revolución requeridas en los problemas propuestos, ayudándoles a visualizar las propiedades geométricas de las figuras involucradas y las relaciones existentes entre ellas, y finalmente permitiéndoles realizar las tareas propuestas con éxito.

Conclusiones

A modo de conclusión podemos mencionar que las construcciones realizadas en un entorno de geometría dinámica ofrecen muchas ventajas frente a las construcciones realizadas en papel con regla y compás. Una de las principales es que estos entornos dinámicos como el GeoGebra 3D nos permiten visualizar los elementos y las propiedades de los objetos tridimensionales con mayor precisión así como realizar construcciones complejas que pueden ser modificadas de manera casi inmediata. Lo que resulta difícil realizar en un papel con regla y compás debido a su característica estática.

Además, los *software*s de geometría dinámica como el GeoGebra 3D facilitan la experimentación en los estudiantes, dándoles oportunidades para explorar, visualizar, descubrir, conjeturar, verificar, reformular y comprender nociones y propiedades geométricas relacionadas con figuras tridimensionales tales como los sólidos de revolución. Asimismo, la potencialidad del arrastre que poseen estos programas permite que los estudiantes observen como se mantienen fijas las relaciones geométricas existentes en las figuras construidas al realizar cambios inmediatos sobre las mismas.

Por lo anterior, podemos decir que el uso del GeoGebra como instrumento, en términos de Rabardel (2011), contribuye con el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes debido a su flexibilidad y versatilidad para realizar construcciones geométricas y modificaciones a las mismas de manera casi inmediata. Lo que facilita el proceso de génesis instrumental en el que los estudiantes elaboran o se apropian de esquemas existentes que les permitan usar de manera óptima las herramientas del GeoGebra 3D para resolver problemas geométricos.

Referencias bibliográficas

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques 19*(2), 221-266.

Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En P. Flores, F. Ruiz y M. De la Fuente (Eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 13-58). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

The National Council of Teachers of Mathematics - NCTM (2000). *Principios y estándares para la Educación Matemática*.

Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías: Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. (Traducido por M. Acosta). Colombia: Universidad Industrial de Santander.

Sánchez, J. (2000). *Nuevas tecnologías de la información y comunicación para la construcción del aprender*. Chile: LMA Servicios Gráficos.

PROPUESTA DE INCLUSIÓN A LA DIVERSIDAD POR MEDIO DE LABORATORIOS EXPERIMENTALES PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Teresa Guadalupe Parra Fuentes, Eduardo Carlos Briceño Solís, Darly Alina Ku Euan, Joel Odelin Novelo Segura

Universidad Autónoma de Yucatán. Universidad Autónoma de Zacatecas. Universidad Autónoma de Zacatecas. Centro de Estudios Tecnológico del Mar Plantel 17. (México)

parra.tere@gmail.com, ecbs74@gmail.com, ku.darly@gmail.com, odelin17@hotmail.com

RESUMEN: La modelación matemática se encuentra en auge por ser un medio de construcción de conocimiento matemático. En específico la modelación que desarrolla esta investigación en el ámbito escolar, propicia la construcción de significados y argumentos sobre conceptos matemáticos a través del uso de la gráfica mediante el uso de recursos tecnológicos. Estos recursos se emplean para que el estudiante experimente situaciones de movimiento donde pone en juego el uso de su conocimiento de forma funcional. La investigación problematiza la exclusión de estudiantes con discapacidad intelectual a nivel medio superior, donde los métodos y materiales didácticos que se utilizan no consideran ciertas limitaciones a su discapacidad para poder aprender. Considerando esta modelación se reporta una propuesta de inclusión al aprendizaje de las matemáticas como una estrategia didáctica con algunos resultados y sugerencias de su funcionalidad, para su continua investigación.

Palabras clave: modelación, discapacidad intelectual, uso, tecnología

ABSTRACT: Mathematical modeling has reached its boom because it is a means of constructing mathematical knowledge. Specifically, the modeling that this research develops in the school setting propitiates the construction of meanings and arguments about mathematical concepts through the use of graphics through the use of technological resources. These resources are used for the student to experience situations of movement where he puts in practice the use of his knowledge in a functional way. The research states, as a problem, the exclusion of students with intellectual disabilities at the upper middle level, where the teaching methods and materials used do not consider certain limitations to their learning disabilities. Focusing on this model, we report a proposal of inclusion to the learning of mathematics as a didactic strategy with some results and suggestions of its functionality, for its continuous investigation.

Key words: modeling, intellectual disability, use, technology

Introducción

El enfoque por competencias hace énfasis a que los conocimientos por sí mismos no son lo más importante sino el uso que se hace de ellos en situaciones específicas de la vida personal, social y profesional (SEMS, 2008). Este cambio de paradigma conlleva a hacer modificaciones sobre la práctica docente enfocada mayormente a la enseñanza de los conceptos matemáticos, que privilegia la memorización y el uso de algoritmos. Es necesario construir las estrategias y situaciones propicias para el desarrollo de la actividad matemática de los estudiantes, en donde el énfasis esté en el uso del conocimiento matemático. Pero también, es ineludible acompañar a los profesores en esta transición.

Existen investigaciones sobre la importancia de implementar laboratorios experimentales en aulas de clase como apoyo para comprender algunos conceptos matemáticos (Valero, Barba, Del Castillo y Ventura, 2009). No obstante, se considera que es importante que la situación de aprendizaje esté fundamentada con cierta epistemología de prácticas para generar ciertos significados y argumentos de los conceptos matemáticos (Briceño, Ramos y Zaldívar 2015: Zaldívar, Cen, Briceño y Méndez y Cordero, 2015).

Sin embargo, estos alcances aún no se han llevado a cabo con estudiantes con discapacidad favoreciendo así la inclusión educativa. La experiencia didáctica que se reporta en este documento, consistió en establecer un laboratorio experimental que esté al servicio de estudiantes con y sin discapacidad. Se llevó a cabo con estudiantes del Centro de Estudios Tecnológicos del Mar No 17 (CETMAR 17) y del Centro de Atención para personas con Discapacidad (CAED-CETMAR 17) que proporciona asesorías a estudiantes con discapacidad, para acreditar los exámenes de la preparatoria abierta.

Empero, no se cuenta con estrategias y situaciones propicias para el desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes que la componen. Es un desafío atender a la población con discapacidad, porque su diversidad complejiza su atención, es decir cada tipo de discapacidad requiere de distinto método de enseñanza así como de material didáctico (Martínez, 2013).

En el caso de la discapacidad intelectual, Fernández y Sahuquillo (2015), reportan que para validar la creación de un material didáctico se deben reconocer dos problemas importantes: la lectoescritura y las matemáticas. Además los profesores manifiestan que no encuentra referencias que le puedan ayudar a cómo atender a esta discapacidad, por lo que restringe su aprendizaje basado en lo mecánico y repetición de procesos, confiando que la repetición les haga asimilar el significado de los mismos.

Dos cosas importantes se concluye de este trabajo: *La primera* es que los materiales manipulativos permiten tener una mejor interacción con estudiantes de discapacidad intelectual y *la segunda* que los contenidos matemáticos deben de apoyarse en la manipulación de objetos concretos y familiares para los estudiantes. Por lo tanto es pertinente saber cómo construyen conocimiento matemático, lo cual fue la finalidad de esta investigación en el escenario de un laboratorio experimental. Esto, en conjunto con los profesores que día a día acompañan y enfrentan las dificultades en su enseñanza.

Es evidente que la educación que reciben los estudiantes con discapacidad es excluyente, es diseñada para el grueso de la población, lo que ocasiona su deserción escolar, por lo que se siguen construyendo las estrategias para su atención especializada (Martinez 2013; Fernández y Sahuquillo, 2015). De acuerdo a ello, se considera pertinente crear un laboratorio experimental de modelación que no sólo favorezca el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes regulares, sino también a los estudiantes con discapacidad, en este caso, de un CAED. De esta manera conformar un espacio de inclusión educativa.

Por lo cual se planteó la siguiente pregunta de investigación: *¿Cómo construyen conocimiento matemático estudiantes con discapacidad en un laboratorio experimental?*

Marco Teórico

Dos elementos que forman parte de un laboratorio experimental son: la modelación y el uso de sus gráficas. Ambos permiten el desarrollo de argumentos y herramientas situacionales, éstas pueden ser de corte no tan matemático, en el sentido de que no son tan rigurosas matemáticamente, ya que pueden ser de corte coloquial, cotidianas o intuitivas. Pero que caracterizan cierta situación problemática a resolver (Briceño, 2008).

En Suárez y Cordero (2010), caracterizan a la modelación como una herramienta para que el estudiante construya conocimiento en situaciones de movimiento. El punto central de esta caracterización es la relación que guarda la modelación y la graficación como un binomio inseparable que brinda formas de explicar el cambio y la variación de gráficas de movimiento. Se establece que este binomio (Modelación-Graficación (M-G)), propone un eje argumentativo que genera ciertos significados y procedimientos para explicar aspectos variacionales por medio de la gráfica de movimiento.

Metodología

La metodología de la investigación consistió en 3 momentos.

Primer momento

Se refiere a la planeación de una capacitación sobre la modelación matemática con el uso de tecnología para los profesores de matemáticas del CETMAR 17 y CAED-CETMAR 17. Se seleccionaron dos situaciones de modelación del movimiento para trabajar con los profesores: La situación de La Hormiga, que consiste en modelar un movimiento constante con el que se construye una línea recta, una función lineal; la situación de La Tirolesa, que consiste en modelar un movimiento que se aproxima a una función cuadrática.

Segundo momento

Implementación del curso.

Primer día: Fue fundamental que los profesores experimenten las situaciones, para lo cual se llevó a cabo una capacitación sobre el uso de las calculadoras graficadoras y sensores de movimiento, que estuvo a cargo de un instructor experto en el uso de estos dispositivos.

Figura 1. Capacitación sobre el uso de la calculadora

Segundo día: Los profesores se enfrentaron a las situaciones de modelación del movimiento, mencionadas anteriormente, y compartieron sus experiencias.

Figura 2. Profesores realizando actividades de modelación y compartiendo su experiencia

Tercer día: Los profesores eligieron una situación para realizar con los estudiantes e hicieron las adecuaciones que consideraron pertinentes para su implementación.

Cuarto día: Implementaron la actividad seleccionada con estudiantes.

Figura 3. Estudiantes del CAED realizando la situación La hormiga

Quinto día: Se presentaron y analizaron los resultados al implementar la situación con los estudiantes. Así como se les entregaron constancias a los profesores que asistieron al curso.

Tercer momento

Análisis de los resultados.

La recopilación de los datos se realizó a través de la experiencia con los profesores y de los profesores con los estudiantes.

Resultados

Entre los resultados obtenidos están:

Sobre el uso de la tecnología

Los estudiantes con y sin discapacidad pudieron manipular la calculadora y sensores de movimiento para obtener gráficas. En el caso de los estudiantes con discapacidad, no se tenía certeza de cómo responderían con respecto al uso de la tecnología. Lo cual resultó de manera positiva, ya que no tuvieron ningún problema para familiarizarse con el uso de la calculadora y sensor. Estos estudiantes son jóvenes que no están fuera de la era tecnológica, usan por ejemplo, el celular.

El papel del profesor

Es importante que el profesor de matemáticas tenga pleno conocimiento matemático, ya que interfiere en cómo guía e interviene en las actividades. Lo cual tiene consecuencias en las interpretaciones y significados del estudiante. En particular los profesores del CAED que imparten matemáticas, no son expertos en matemáticas. Lo cual se reflejó en cómo comunicaron la actividad, al tener dificultades al hacer hincapié en puntos clave de ésta.

Los estudiantes con discapacidad

- En el caso de los estudiantes con discapacidad, fue necesario explicar paso a paso la situación, no fue suficiente leerla. Esto porque tienen dificultades con la comprensión de lectura como ya se mencionó anteriormente.
- Los estudiantes con discapacidad mostraron mayor dificultad para interpretar las gráficas obtenidas de sus movimientos, es decir, no logran establecer una relación entre la distancia y el tiempo, los ejes no son un referente. Por lo que requieren de trabajar con objetos concretos para realizar la actividad, fue necesario no sólo suponer que una tabla representaba una hormiga, sino que se tuvo que colocar una imagen de una hormiga en la tabla.

A continuación se muestran algunos extractos de la actividad y solución que dieron los estudiantes.

Situación de la hormiga. Esta actividad se trata de modelar el movimiento de una hormiga (que simula ser una tabla) para obtener e interpretar gráficas distancia/posición. La instrucción es:

Una hormiga se encuentra a 30 cm del sensor y empieza a caminar durante 5 segundos en dirección a una manzana que se encuentra en el extremo opuesto del sensor (La manzana y el sensor están a 1 metro de distancia). En ese tiempo, la hormiga regresa otros 5 segundos a la misma velocidad hasta llegar al lugar donde inició su movimiento.

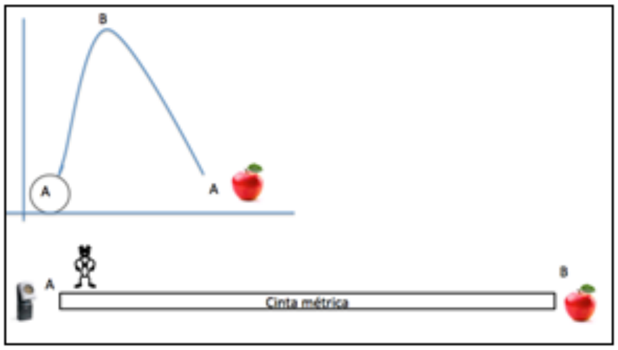


Figura 4. Estudiantes efectuando la actividad

Presentamos un breve ejemplo de las interpretaciones realizadas por estudiantes con discapacidad intelectual de la actividad anterior.

Al realizar el movimiento de la actividad, la calculadora registró una gráfica que crece y decrece. Al preguntar sobre la interpretación de la gráfica, esto es, en donde comenzó el recorrido la hormiga y en donde está la manzana, señalaban que el punto de inicio es el A y la manzana se encontraba al final de la gráfica como se muestra en la Figura 5. Al preguntar sobre el punto final lo hacían coincidir ya sea con el punto de la manzana o con el punto de inicio A. Esto es, miraban la trayectoria.

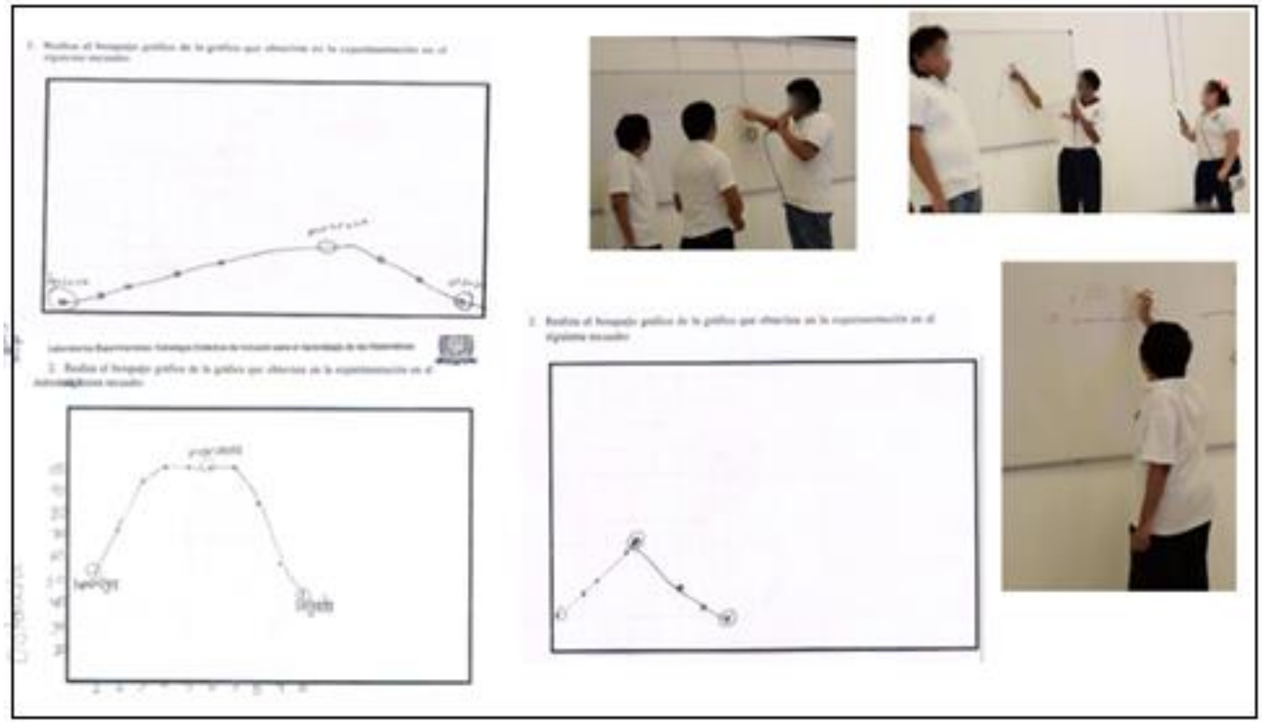


Figura 5. Interpretación de la gráfica de movimiento

Sin embargo ante las discusiones con el profesor y sus compañeros, los estudiantes logran bosquejar gráficas parcialmente, ya considerando a la manzana en la parte máxima de la gráfica (ver figura 6).

Figura 6. Reinterpretación de la gráfica de movimiento

Si bien, estos tipos de interpretaciones gráficas coinciden con las de estudiantes sin discapacidad, la mayoría logra establecer una relación entre la distancia y tiempo después de varias experiencias. Sin embargo, con los estudiantes con discapacidad es más complejo que establezcan la relación entre las variables. No hacen referencia a los ejes cartesianos, interpretan trayectorias. Sin embargo, una fortaleza fue que analizaron y construyeron argumentos en estos espacios experimentales, así como un trabajo en equipo que no es común en sus clases cotidianas. Se llevó a cabo un uso de su conocimiento matemático a través de las gráficas y su movimiento. Se observó, que el estudiante con discapacidad necesita referencias del plano cartesiano, como por ejemplo, cuadricular o puntear el plano cartesiano con la intención de que use los ejes. De esta manera se corrobora la necesidad de lo concreto en el aprendizaje de los estudiantes con discapacidad.

Conclusiones

Si bien existe variedad de referencias sobre la modelación matemática con el uso de sensores de movimiento y calculadoras graficadoras (Zaldívar, Cen, Briceño, Méndez y Cordero 2014; Briceño y Cordero, 2012) como medio para construir conocimiento, no hay experiencias con personas con discapacidad. Las actividades reportadas ya se han realizado con una variedad de estudiantes, llevarlas a cabo con estudiantes con discapacidad requiere de replantearlas en su forma escrita y verbal. Lo cual no es tarea fácil, ya que deben adecuarse a la discapacidad de los estudiantes, lo cual hace más complicada la labor.

Se quiere con esta primera propuesta generar el interés de que profesores de centros CAED's, se integren en un grupo de diálogo y discusión para la creación de materiales didácticos y de instrucción para este tipo de estudiantes. Ya que existen diversas discapacidades, y cada una requiere de una atención especial en las estrategias, los materiales y la forma de transmitir la información.

Referencias bibliográficas

Briceño, E. Ramos, G y Zaldivar, D. (2015). Estrategias variacionales en estudiantes de bachillerato de la uapuaz en situación experimental. *El cálculo y su enseñanza, 6*(6), 145-166.

Briceño, E. y Cordero, F. (2012). Un estudio del uso de tecnología en situaciones de modelación del movimiento. En O. Covian, Y. Chávez, J. López, M. Méndez, A. Oktaç. *Memorias del Primero Coloquio de Doctorado* (pp. 203-12). ISBN: 978-607-9023-08-9, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Cinvestav.

Briceño, E. (2008). *El uso de las gráficas desde una perspectiva instrumental. Un estudio Socioepistemológico*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav, México.

Fernández, R. y Sahuquillo, A. (2015). Plan de intervención para enseñar matemáticas a alumnado con discapacidad intelectual. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *4*(1), 11-23.

Martínez L. (2013). Estrategias para enseñar contenidos matemáticos a alumnos ciegos o con baja visión, VII *Acta del congreso iberoamericano en Educación matemática* (pp. 726-730). Volume 7.

SEMS. (2008). *Reforma integral de la educación media superior en México: La creación de un Sistema nacional de Bachillerato en un marco de diversidad*, SEMS, México.

Suárez, L. y Cordero, F. (2010). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio sociepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4-II), 319-333.

Valero, M. S., Barba, M. G., Del Castillo, A. y Ventura, M. P. (2009). Evaluación de un Ambiente de Aprendizaje Experimental para la Matemática de Nivel Medio Superior Basado en Tecnologías Digitales. En R. Pantoja y E. Añorve (Eds.). *Colección: Uso de tecnología en educación matemática. Investigaciones y propuestas*. Disponible en http://148.208.165.26/amiutem/.

Zaldívar, D., Cen Chen, C., Briseño, E., Méndez, M. y Cordero, F. (2015). El espacio de trabajo matemático y la situación específica de la matemática funcional: Un ejercicio de diálogo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(4), 417-436.

EVALUACIÓN PRÁCTICA DE LAS TRANSFORMACIONES EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA NUMÉRICA EN LA CARRERA DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

Esther Ansola Hazday, Eugenio Carlos Rodríguez, Teresa Carrasco Jiménez
Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, Cujae. (Cuba)
esther@ind.cujae.edu.cu, ecarlos@tesla.cujae.edu.cu, tcarrasco@cemat.cujae.edu.cu

RESUMEN: Se muestra la evaluación práctica de una propuesta de transformación de la asignatura Matemática Numérica en la carrera de Ingeniería Informática, parte de un proyecto de investigación sobre el uso de las tecnologías en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Las modificaciones propuestas fueron implementadas y sus resultados medidos mediante un instrumento que corroboró la hipótesis de que estas modificaciones incrementarían la motivación de los estudiantes y por tanto su rendimiento académico. El trabajo se sustenta en la teoría Didáctica para el Desarrollo y la Teoría de la Actividad, integradas con el uso de las tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Palabras clave: matemática numérica, tecnología, transformaciones en enseñanza, ingeniería informática

ABSTRACT: The practical evaluation of a proposal of changes in the subject Numerical Mathematics of Computer Engineering degree is shown, as part of a research project on the use of technologies in the teaching-learning process of Mathematics. The changes proposed were implemented and their results were assessed by using an instrument which corroborated the hypothesis that these modifications would increase the motivation of the students and therefore their academic performance. The work is based on the didactic theory for development, and the theory of activity, integrated with the use of technologies in the teaching-learning process.

Key words: numerical mathematics, technology, changes in teaching, computer engineering

Antecedentes

Los resultados que aquí se presentan son el producto de la investigación comenzada en el año 2014 en el que se estudiaron los factores que estaban influyendo en los resultados que obtenían los estudiantes de la carrera de Ingeniería Informática en el Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, Cujae, en La Habana, Cuba, en la asignatura Matemática Numérica. Esta asignatura estudia de métodos eficientes de cálculo para resolver problemas con un grado de precisión "aceptable" (Álvarez, Guerra y Lau, 2004).

Los métodos utilizan algoritmos que describen los procedimientos de cálculo; mientras más eficientes son los algoritmos utilizados, más rápido se producirá la convergencia del método en cuestión hacia la solución exacta del problema. En este caso se utiliza la tecnología en el proceso de enseñanza-aprendizaje, tanto en las clases teóricas como en las prácticas, haciendo uso de un asistente matemático y de un software elaborado especialmente para la asignatura.

En la primera parte de la investigación realizada se llegó a la conclusión de que los resultados obtenidos por los estudiantes podrían ser superiores, teniendo en cuenta las potencialidades que presentan los mismos en la asimilación de las tecnologías de la informática y las comunicaciones.

El trabajo se sustentó en los referentes teóricos de la Didáctica Desarrolladora (Zilberstein, 2006 y Zilberstein y Portela, 2002) y la Teoría de la Actividad (González, 1989) utilizados como fundamentos para el perfeccionamiento del sistema de habilidades, el sistema de evaluación y el reordenamiento de la tipología de las clases y las horas dedicadas a ellas, integrado con los aportes de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje (Carlos y Ansola, 2003).

Con estas transformaciones se logra un aprendizaje centrado en la formación de sólidos conocimientos, habilidades, actitudes y valores en los estudiantes, teniendo en cuenta el contexto histórico-social y cultural en que éstos se desarrollan; sustento teórico metodológico que dio origen al desarrollo de diferentes investigaciones en Cuba y otros países. Esta posición Didáctica asumió postulados psicopedagógicos del Enfoque Histórico Cultural, cuyo iniciador fue (Vigotski, 1982, 1987).

En este trabajo se presentaron los resultados de la primera parte de esta investigación y se propusieron dos variantes para mejorar el rendimiento académico de los estudiantes a partir de una transformación metodológica de la asignatura.

La primera variante consistió en modificar el programa analítico de la asignatura aumentando el número de horas de las clases prácticas y transformar el sistema de evaluación, dándole un mayor peso a la algoritmización y a la programación.

Se propuso incrementar en un 10% las horas de la asignatura, teniendo en cuenta que esta modificación sólo requiere la aprobación del Jefe del Departamento, según el Reglamento para el Trabajo Docente Metodológico (Ministerio de Educación Superior de Cuba, 2007), lo que representa seis horas de clases, que se dedicarían a tres clases prácticas donde se desarrollarían y analizarían los algoritmos de algunos de los métodos estudiados en las clases anteriores. También se propuso modificar el sistema de evaluación realizando una tarea extra clase en la que se elaborarían algoritmos y programas de métodos numéricos para casos específicos.

Resultados obtenidos

La segunda variante propuesta se aplicó en el segundo semestre del curso 2015-2016; la segunda parte de la propuesta no pudo aplicarse como se había planteado pues el objetivo de programación no está concebido en el Plan de Estudio de la Matemática Numérica en la carrera de Ingeniería Informática, sin embargo, aunque no se pudo aplicar al 100% de los estudiantes, se trabajó con un grupo de estudiantes con este fin.

El presente trabajo muestra los resultados obtenidos al aplicar esta variante.

Las encuestas e y los resultados

Para validar si con la aplicación de esta variante (aumento de horas de la asignatura en clases prácticas de algoritmización) los estudiantes se sintieron más motivados y con mayor rendimiento académico se aplicó una encuesta al 86.7% de los estudiantes del año y otra encuesta al 100% del grupo de estudiantes que realizaron tareas de programación.

De la misma manera que se hizo en la primera parte de la investigación, el instrumento aplicado se diseñó para medir las variables de interés, teniendo en cuenta las dimensiones de las variables y los indicadores a medir (Hernández, Fernández y Baptista, 2006).

En el diseño del instrumento aplicado se tuvo en cuenta que la variable a estudiar era el rendimiento académico de los estudiantes en la asignatura, considerándose los indicadores motivación, satisfacción y habilidades informáticas de los estudiantes. La selección de estos indicadores estuvo basada en el estudio de diferentes autores, tales como Orozco y Díaz (2009) que plantean entre otras cosas, que la motivación se considera un eje fundamental en el rendimiento intelectual de los estudiantes.

De una población de 90 estudiantes, se tomó una muestra de 78, asumiendo un error estándar de 0.01 y una probabilidad de ocurrencia del fenómeno de 0.95 (Hernández, Fernández y Baptista, 2006), resultado de la aplicación de las fórmulas siguientes:

$$\mathrm{n} = \frac{\mathrm{n}'}{1 + \frac{\mathrm{n}'}{\mathrm{N}}}$$

donde: $n' = \frac{s^2}{v^2}$

n': tamaño provicional

N: población

v^2: cuadradodelerrorestándar

s^2: varianza de la muestra

p: probabilidad de ocurrencia del fenómeno

$s^2 = p(1-p)$= 0.95 (0.05)=0.0475

$v^2 = (0.01)^2$

$\frac{s^2}{v^2} = 475$

$$n = \frac{475}{1 + \frac{475}{90}} = 78$$

La encuesta aplicada consistió de un conjunto de preguntas medía los elementos siguientes:

- Pregunta 1: Satisfacción con la forma en que se imparte la Matemática Numérica.
- Pregunta 2: Motivación con la forma en que se imparte la Matemática Numérica.
- Pregunta 3: Motivación con los temas que se imparten en la asignatura y sus aplicaciones prácticas.
- Pregunta 4: Mayor comprensión de la asignatura con la inclusión de la elaboración de algoritmos.
- Pregunta 5: Consideraciones acerca del tiempo dedicado a las clases de algoritmización.
- Pregunta 6: La asignatura es más atractiva e interesante si programan los métodos en las actividades docentes.
- Pregunta 7: Comparando con la forma en que se imparte actualmente la asignatura ¿aprenderían mejor los métodos que se estudian si ustedes elaboraran sus propios programas?

Los resultados obtenidos se muestran en el Gráfico 1.

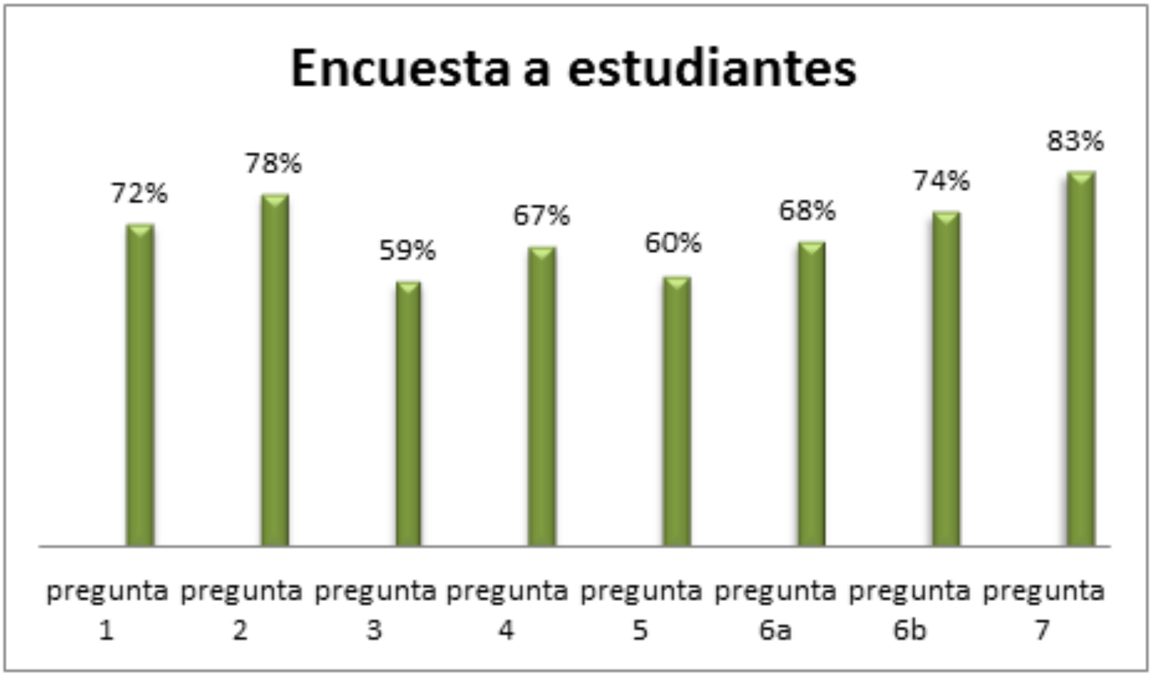


Gráfico 1. Resultados de las encuestas a los estudiantes

Como se puede observar el 72 % está satisfecho con la forma en que se impartió la asignatura. El 78 % se siente motivado. Aún es bajo el porciento de motivación con los temas que se imparten y sus aplicaciones prácticas, con solo un 59 %. El 67 % mostró mayor comprensión de la asignatura con la inclusión de la elaboración de algoritmos. El 60 % considera que el tiempo dedicado a las clases de algoritmización es suficiente. El 68 % considera que la asignatura es más atractiva si programan los métodos en las actividades docentes y el 74 % la hace en este sentido más interesante. Por último, el 83 % considera que aprenderían mejor los métodos que se estudian si elaboraran sus propios programas.

Los resultados obtenidos en la encuesta aplicada al grupo de estudiantes que realizó la tarea de programación de los métodos se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Resultados por indicadores

Indicadores	
Satisfacción con la programación de los métodos en el aprendizaje de la asignatura	100%
Motivación con la asignatura Matemática Numérica haciendo uso de la programación	100%
Mayor comprensión de la asignatura con la inclusión de la programación de los métodos	100%
La asignatura es más atractiva e interesante si programan los métodos en las actividades docentes	100%
La programación de los métodos de esta asignatura refuerza las habilidades necesarias para otras asignaturas específicas de la especialidad	90%

Resultados académicos

Como se había previsto en el anterior trabajo los resultados mejoraron con respecto al año anterior, lo cual puede apreciarse en la Tabla 2.

Tabla 2. Resultados en la promoción en los dos últimos cursos.

	Curso 2014-2015	Curso 2015-2016
% estudiantes aprobados	73.1	78

■ Actividades realizadas en la programación

El objetivo de programación no está concebido en el Plan de Estudio de la Matemática Numérica en la carrera de Ingeniería Informática, por lo que ante la imposibilidad de aplicarla al 100% de los estudiantes, se seleccionó a un grupo de ellos, a los que se les propuso programar los métodos numéricos explicados en clase

Como se muestra en la Tabla 1, los estudiantes de este grupo se sintieron muy motivados con la tarea e incluso demostraron habilidades de independencia y trabajo en grupo. Teniendo en cuenta los temas de la asignatura, se dividió la tarea con el objetivo de presentarlos al final como un paquete de programas y con una interfaz amigable para el usuario.

Como resultado se elaboraron dos softwares con los métodos que se impartieron en clases, que resultaron de utilidad en la asignatura, que fueron denominados NIS (Numerical Integrated System) y SIDMENU (Sistema Didáctico de Métodos Numéricos). Algunas pantallas de estos softwares se muestran en las Figuras 1, 2 y 3.

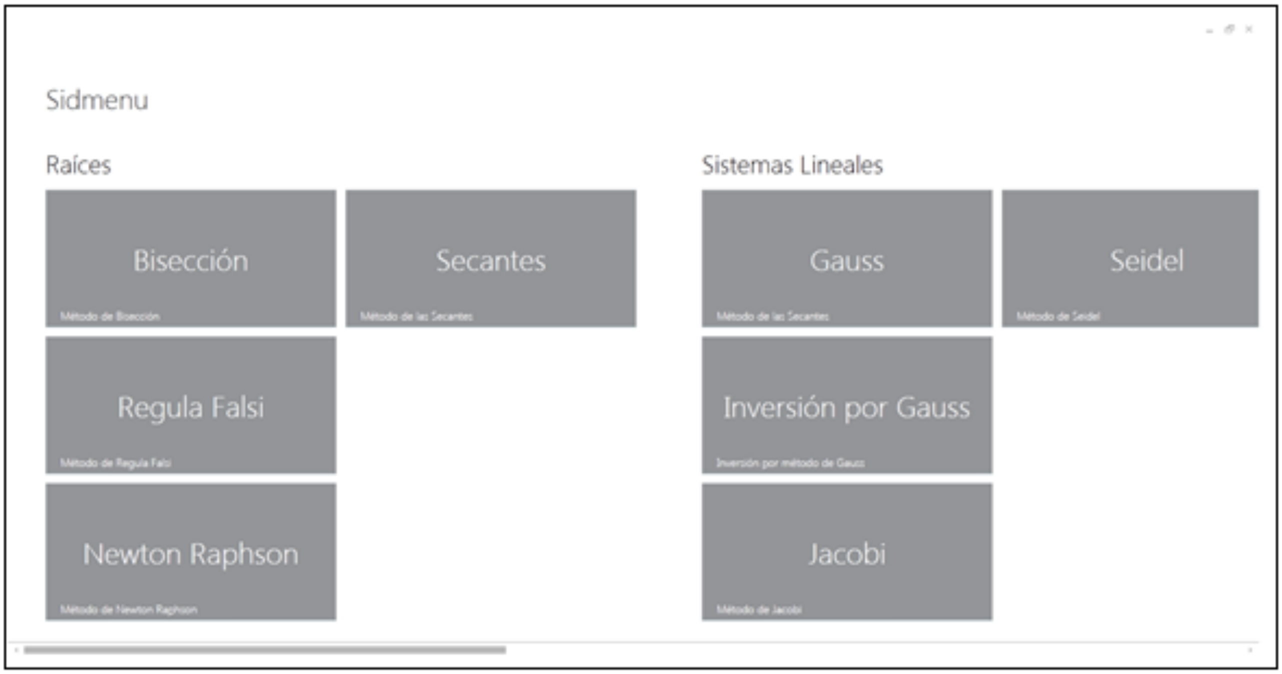


Figura 1. Pantalla de SIDMENU

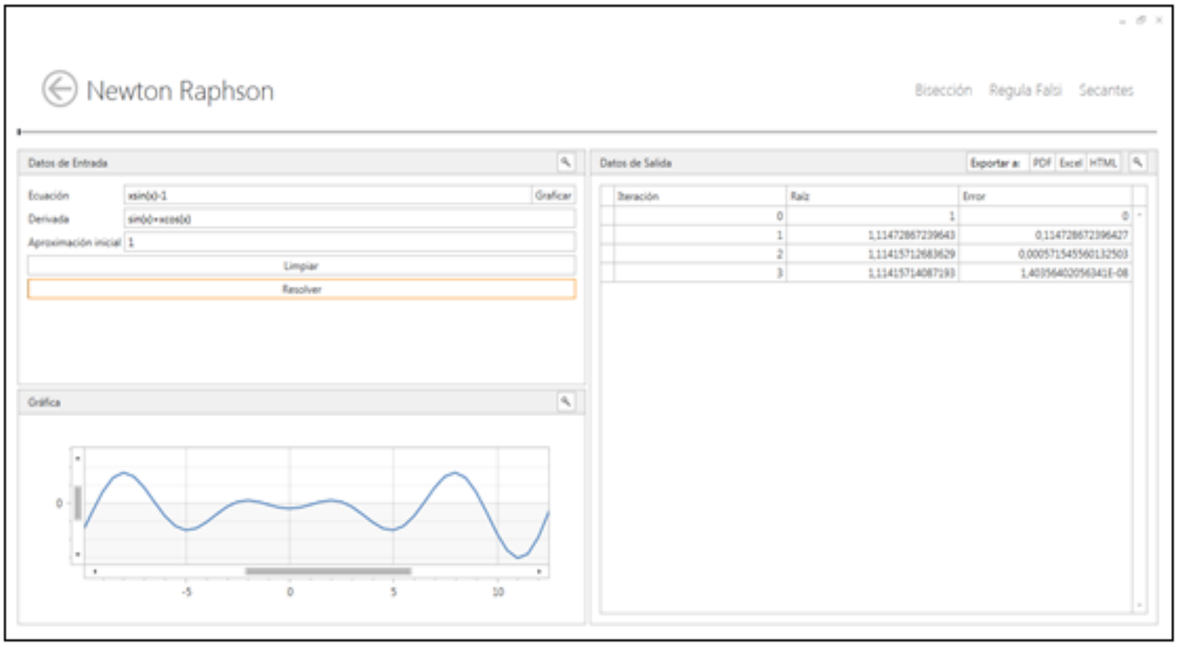


Figura 2. Pantalla de SIDMENU

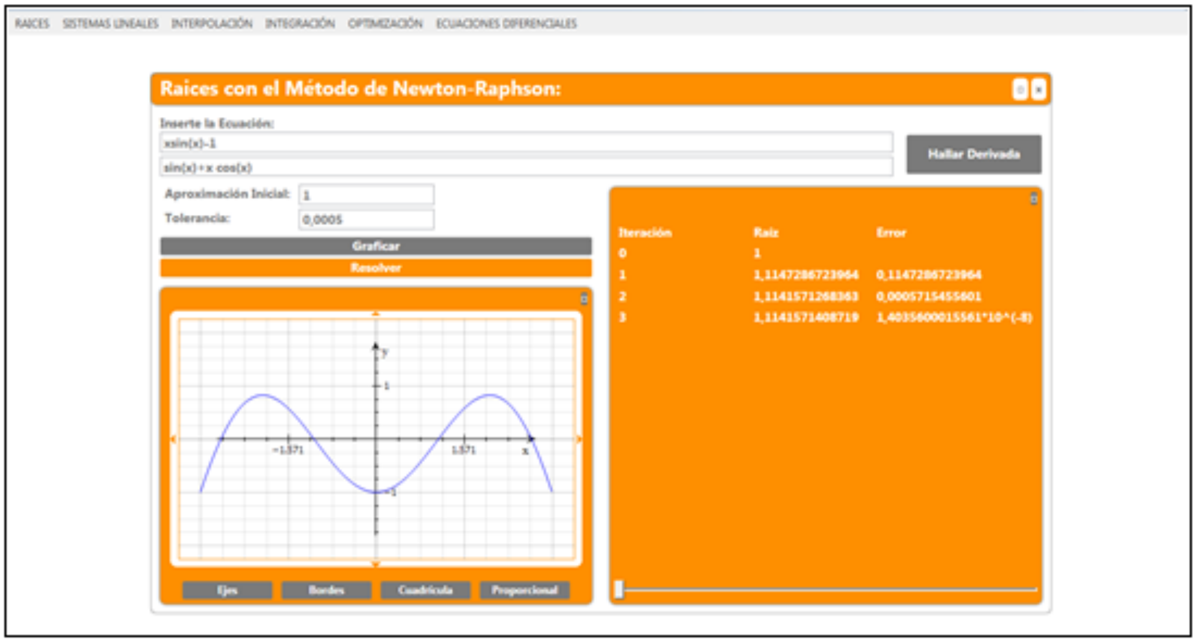


Figura 3. Pantalla de NIS

Conclusiones

Gracias a esta investigación se transformó la forma en la que los estudiantes aprenden la asignatura Matemática Numérica en la carrera de Ingeniería Informática, pasando de ser simples consumidores tecnológicos a desarrolladores de los programas de cada método estudiado.

Si bien la tecnología se ha convertido en un elemento habitual en el método de enseñanza-aprendizaje de la asignatura, esto no implica un uso indiscriminado de la misma, el docente promueve o no su utilización de acuerdo al objetivo de su tarea. Por ejemplo, en las clases teóricas, dedicadas a la construcción y análisis de algoritmos básicos, se utiliza solamente como una herramienta audiovisual para mostrar ejemplos, mientras que en las clases prácticas los estudiantes hacen uso de ella en la resolución de problemas, para liberar tiempos que podrán dedicar al razonamiento, a la búsqueda de distintos caminos de solución, a la confrontación de sus resultados con los demás y a la resolución de una mayor diversidad de problemas.

Los resultados obtenidos con la aplicación de las modificaciones propuestas corroboraron la hipótesis de que estas modificaciones incrementarían la motivación de los estudiantes y por tanto su rendimiento académico.

Referencias bibliográficas

Álvarez, M., Guerra, A. y Lau, R. (2004). *Matemática Numérica*. La Habana, Cuba: Editorial Félix Varela.

Carlos, E. y Ansola, E. (2003). Las nuevas tecnologías en la enseñanza de la matemática numérica. Experiencias didácticas. En G. Martínez (Ed.). *Resúmenes de la Séptima Escuela de invierno y Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas* (pp.147). Chilpancingo: EXPOS Editores.

González, O. (1989). *Aplicación del enfoque de la actividad al perfeccionamiento de la educación superior*. La Habana, Cuba: CEPES.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación.* México, DF: Mc Graw-Hill.

Ministerio de Educación Superior de Cuba (2007). *Reglamento para el trabajo docente y metodológico. Resolución No.210/2007*. La Habana, Cuba: Editorial Félix Varela.

Orozco, C. y Díaz, M. (2009). *Atribuciones de la motivación al logro y sus implicaciones en la formación del pensamiento lógico-matemático en la universidad.* Recuperado el 7 de abril de 2015 de www.scielo.org.ve/pdf/inci/v34n9/art08.pdf.

Vigotsky, L. S. (1982). *Pensamiento y lenguaje*. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Vigotsky, L. S. (1987). *Historia de las funciones psíquicas superiores*. La Habana, Cuba: Editorial Científico Técnica.

Zilberstein, J. y Portela, R. (2002). *Una concepción desarrolladora de la motivación y el aprendizaje de las ciencias*. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Zilberstein, J. (2006). Categorías de una didáctica desarrolladora. Posición desde el enfoque Histórico-Cultural. En Colectivo de Autores. *Preparación pedagógica Integral para profesores integrales* (pp. 33-43). La Habana, Cuba: Editorial Félix Varela.

ACTIVIDADES DESDE UN ENFOQUE VARIACIONAL HACIENDO USO DEL GEOGEBRA

José Carlos León Ríos
Universidad de Lima. (Perú)
jleonr@ulima.edu.pe

RESUMEN: Las actividades que presentamos en este taller se han diseñado teniendo en cuenta el dinamismo de los contenidos matemáticos en distintos tópicos como la trigonometría, geometría analítica y el cálculo diferencial. Estas actividades se enmarcan en el desarrollo del pensamiento variacional haciendo uso de un programa en geometría dinámica, específicamente el Geogebra. La mediación de dicho software favorece las habilidades del pensamiento variacional, ya que facilita la búsqueda de patrones de la misma magnitud en las representaciones dinámicas. En el presente artículo mostramos solamente el episodio de la pendiente de una recta a partir del perímetro constante de una familia de rectángulos. En la actividad desarrollada, se pudo identificar los elementos que interactuaron en el desarrollo del pensamiento variacional, brindándonos un panorama más amplio de la forma cómo se desarrolla dicho proceso.

Palabras clave: enfoque instrumental, instrumentalización, pensamiento variacional, génesis instrumental

ABSTRACT: The activities presented in this workshop have been designed taking into account the dynamism of mathematical contents in different topics such as trigonometry, analytical geometry and differential calculus. These activities are framed in the development of the changing thought making use of a program in dynamic geometry, specifically the GeoGebra. The mediation of such software favors the abilities of the variation thinking, since it facilitates the search of patterns of the same magnitude in the dynamic representations. In this article we show only the episode of the slope of a line from the constant perimeter of a rectangle family. In the developed activity, it was possible to identify the elements that interacted in the development of variation thinking, providing us a broader view of how this process is developed.

Key words: instrumental approach, instrumentation, variation thinking, instrumental genesis

Introducción

El taller es una propuesta de cuatro episodios en los tópicos de trigonometría, geometría analítica y el cálculo diferencial. En cada uno de ellos, buscamos propiciar el uso de ciertas estrategias que evidencien la presencia de pensamiento variacional utilizando herramientas, procedimientos específicos y lenguajes variacionales que posibiliten la comunicación de los saberes mediante argumentos variacionales.

En el presente artículo hacemos referencia a uno de los cuatro tópicos mencionados, específicamente la aplicación de la pendiente de una recta a partir de un rectángulo de perímetro constante. Los temas restantes se han centrado con similares acercamientos de variación y cambio. En el caso de la condición geométrica de la elipse identificamos un patrón de regularidad para el lugar geométrico de dicha curva, que construimos a partir de un triángulo de base variable y perímetro constante, de igual forma modelamos la función seno haciendo uso de un círculo de radio variable y no necesariamente el tradicional círculo unitario, finalmente dimos énfasis a la interpretación gráfica de la función derivada, con el uso de una herramienta que se construyó con el Geogebra y que denominamos razón de cambio, la cual fue utilizada para representar el cambio que se origina en la variable dependiente cuando hay un cambio en la independiente.

Todas estas actividades, requieren de tratamientos que exigen estrategias que deben poner en práctica los alumnos para analizar estados de cambio o patrones de regularidad que conduzcan a otras acciones como la de estimar o predecir el comportamiento de un nuevo estado o valor, que son elementos incorporados que caracterizan la línea de investigación Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pylvar) desarrollado por el grupo de investigación de Cantoral (2013).

Como marco teórico, se tomaron algunos aspectos del Enfoque Instrumental de Rabardel (1995), centrados en la génesis instrumental de cada uno de los contenidos matemáticos. Nos centramos en la génesis de la instrumentalización ya que el alumno va enriqueciéndose con las propiedades del objeto matemático en la medida que manipula el objeto haciendo uso del Geogebra. La metodología seleccionada es la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), pues pudimos confrontar nuestros supuestos elaborados en el análisis a priori, con los resultados de la fase de experimentación.

Aspectos del pensamiento y lenguaje variacional

El Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pylvar) es una línea de investigación tomada de la Teoría Socioepistemeologica de Cantoral (2013). La idea central del Pylvar, es propiciar situaciones y fenómenos en el que el cambio o la modificación de un estado a otro en un objeto matemático, demande una serie de tratamientos por parte del sujeto, que les permita analizar, comprender y explicar dicha situación. De allí que en cualquier situación donde observemos cambio y variación, incluso en contextos que trasciendan el aula, es preciso identificar los elementos que cambian para cuantificar y analizar dichos cambios.

Este pensamiento, por lo tanto, se aleja de las estructuras abstractas, se aparta de procedimientos algoritmicos, prioriza la comprensión del objeto en situaciones y vivencias cotidianas, donde este presente el enfoque variacional. Al respecto Vasco (2006) comenta:

> El pensamiento variacional no es aprenderse las fórmulas de áreas y volúmene. (…) Más aún, esos modelos, entendidos sólo como fórmulas para remplazar valores en ellas, obstaculizan el pensamiento variacional, que primero trata de captar qué varía con qué y cómo, antes de escribir nada y, mucho menos, antes de memorizar fórmulas. No se trata tampoco de dibujar y manejar las gráficas. Al contrario, las gráficas cartesianas paralizan la covariación, y distraen la atención de la covariación hacia la forma estática de la gráfica (p. 5).

Esta mirada de las matemáticas nos indica que incluso las representaciones gestuales resultan más efectivas que las fórmulas cuando son usadas solo por el reemplazo de valores, donde la ausencia de lo que cambia y con respecto a qué cambia paraliza la idea de covariación. El autor añade que los mejores problemas deberían ser desafíos o retos que impliquen la modelación de algún proceso y no propiamente la tradicional resolución de problemas y ejercicios.

De allí que resulte importante plantear situaciones en las que las variables involucradas sigan algún patrón de regularidad incluso en situaciones que trasciendan las aulas. El Pylvar nos ofrece un marco de referencia para desarrollarlas. La gran cantidad de contenidos visuales es el modo al cual nos enfrentamos en un primer momento, a la interpretación y captación de las variables o magnitudes involucradas en el proceso de cambio y variación.

Dichas variables podemos describirlas de manera cualitativa incluso de manera gestual, aunque el principal reto sea cuantificar el modelo de covariación. Pero incluso en esta descodificación de representaciones lleva consigo un cúmulo de significados relacionados a la actividad matemática construida en su proceso histórico y social.

Por tal motivo, estamos de acuerdo con los autores Caballero, Cantoral (2013), cuando señalan que una de las estrategias que emplea el alumno en el desarrollo del Pylvar, es la comparación de dos o más estados, lo que permite encontrar diferencias o similitudes y, a partir de dichos comportamientos estimar y predecir, propiciando fomentar un aprendizaje rico en significados.

En ese sentido, estamos de acuerdo con Ruiz, Ávila y Villa (2013) indican que el pensamiento variacional hace énfasis en la habilidad que tiene una persona para identificar estados de cambio de una o más “variables” y relaciones entre ellas, patrones existentes en secuencias, así como el manejo y creación de funciones como representaciones de situaciones de variación.

De igual manera Villa – Ochoa y Ruíz (2010, citado en Ruíz et al, 2013), indican que el desarrollo del pensamiento variacional atraviesa por distintas fases: una primera de percepción cualitativa con espacios de reflexión para la conjetura y validación de ciertas cualidades, una segunda en la que se establecen patrones de regularidad y una tercera, para establecer lo cuantitativo de la variación.

En las figuras 1 y 2, mostramos la representación gráfica de una función definida por partes, un deslizador Δx construido con ayuda del programa de geometría dinámica Geogebra y un texto dinámico que nos cuantifica los valores de la tasa de cambio en un intervalo dado.

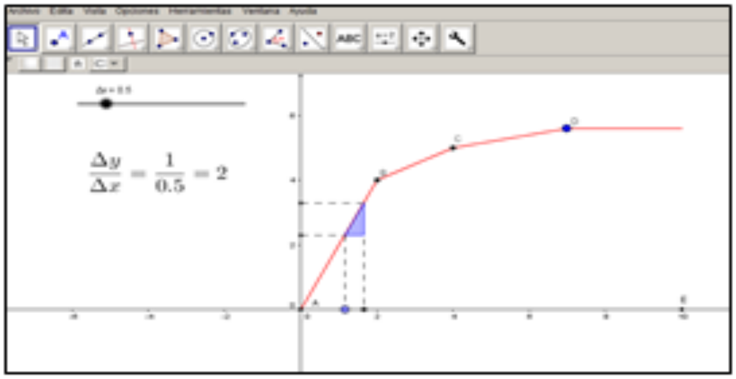


Figura 1. Pendiente segmento *AB*

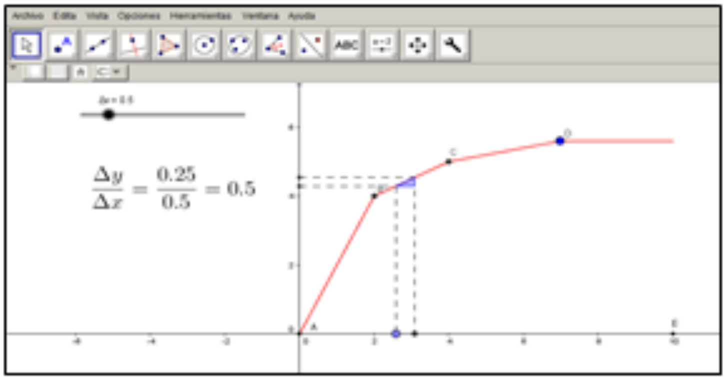


Figura 2. Pendiente segmento *BC*

Observamos un triángulo rectángulo de color azul, el cual construimos y llamamos *triángulo dinámico*. Este triángulo se puede desplazar a lo largo de las líneas poligonales que se muestran en cada figura. El deslizador Δx se usa cada vez que decidimos un cambio en la abscisa. Cuando la abscisa cambia en 0.5, es decir el deslizador Δx se fija en 0.5, el texto dinámico por defecto determina el cambio en la ordenada Δy en 1, lo que genera un resultado de 2 unidades, que estaría indicando que el cateto vertical es el doble que el horizontal. El estudiante identifica que se mantiene el mismo patrón de regularidad mientras el triángulo se desplace sobre el mismo segmento de recta.

En la figura 2, cuando el triángulo transita del segmento AB al segmento BC, manteniendo en 0.5 el cambio de la abscisa, observamos que el texto dinámico indica un cambio en la ordenada Δy de 0.25, lo que significa que el cateto vertical ahora resulta la mitad de la longitud que el horizontal.

Los gráficos muestran que los alumnos hicieron uso de estrategias como el de la comparación y seriación, pues establecen diferencias entre aquellos intervalos donde la tasa de cambio modifica su valor y que dicha modificación puede traer consigo algunas estimaciones o predicciones del ejemplo presentado. Por ejemplo, el alumno puede anticipar que la disminución de una tasa de cambio positiva indica que las rectas consiguen menor grado de inclinación o que las rectas horizontales ocurren donde no hay variación en la variable de la ordenada.

En las figuras 3 y 4, se observa que Δy va disminuyendo en la medida que la recta se vaya posicionando horizontalmente. Es curioso observar los gestos, murmuraciones, y algunas reacciones que los alumnos expresan para señalar como la tasa de cambio disminuye en los tramos sucesivos de la gráfica mostrada.

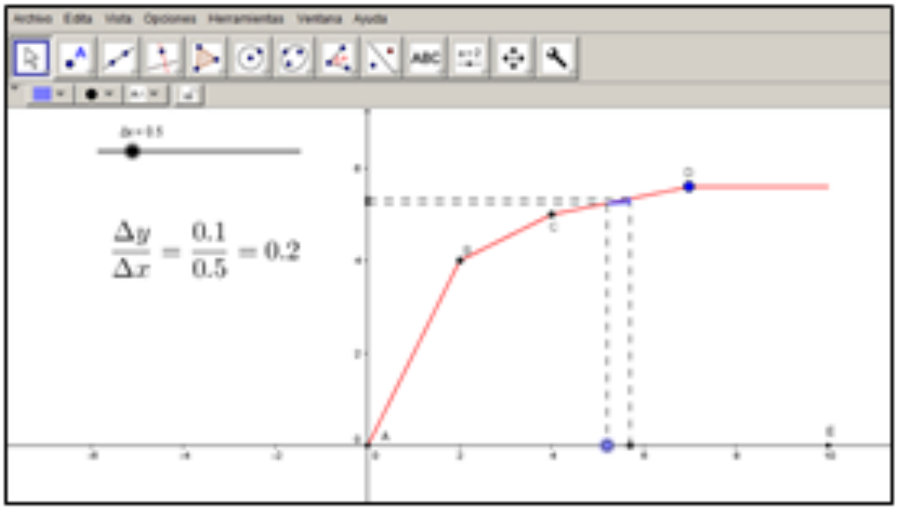


Figura 3. Pendiente segmento *CD*

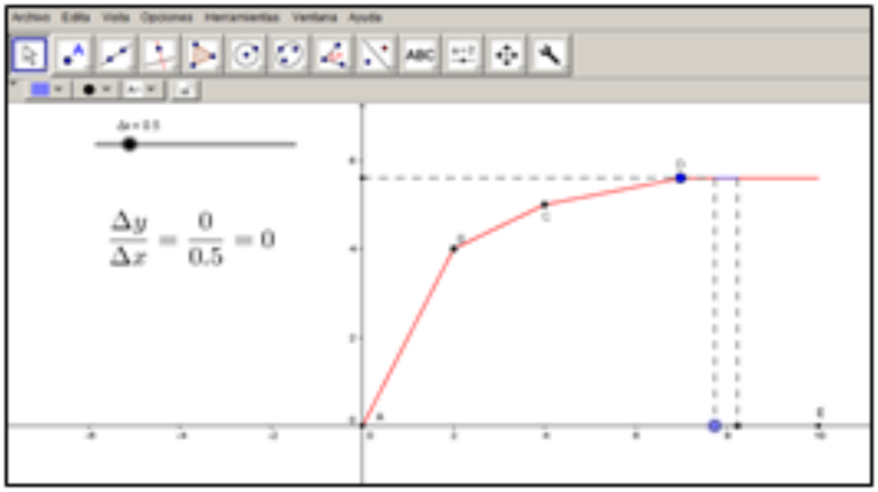


Figura 4. Pendiente segmento horizontal

Presentamos en la tabla 1, la cuantificación de las representaciones gráficas mostradas. En dicha tabla, el alumno escribe en los espacios correspondientes las variaciones de las ordenadas cuando el cambio de las abscisas permanece constante.

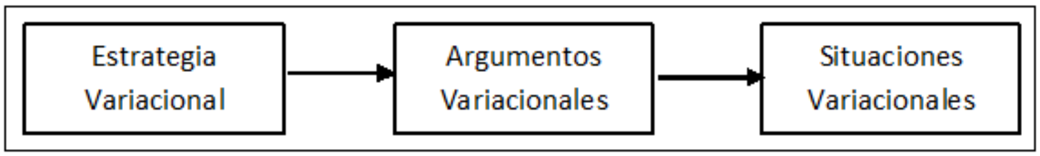
Tabla 1. Comportamiento de la tasa de cambio

Intervalos	Estudio del comportamiento Tasa Cambio		
	Cambio abscisas	Cambio ordenadas	
AB	0.5	1	Cateto vertical es el doble horizontal
BC	0.5	0.25	Cateto vertical es la mitad horizontal
CD	0.5	0.1	Cateto vertical es las 2 décimas partes horizontal
DE	0.5	0	Ausencia de crecimiento del Cateto vertical.

La situación variacional que se presenta, propicia en los participantes, el uso de la estrategia de comparación para establecer diferencias entre dos o más estados. Esta es una de las características que Caballero y otros autores (2013), evidencian del desarrollo del pensamiento variacional. Observen que el cambio de la ordenada se mantiene constante en el tramo AB y disminuye para los siguientes tramos cuando los segmentos de recta rotan hacia el eje de las abscisas en el sentido horario.

Se puede conseguir un resultado contrario si rotamos otra función definida por tramos en sentido antihorario. En cualquiera de los registros de representación numérica, los alumnos relacionan las variaciones de la ordenada como positivas o negativas de acuerdo a la relación que conocen $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) > 0$ que es parte de su saber previo y que recurren como un instrumento de conocimiento matemático, para plantear estrategias.

Así, destacamos a Caballero y otros autores (2013), que describen un modelo de interacción de los elementos del Pylvar como un marco de referencia que nos ayude a identificar cómo se desarrollan.



Fuente. Elaboración propia

Figura 5. Interacción de los elementos base del Pylvar

En la figura 5, mostramos los principales elementos que caracterizan el Pylvar. De acuerdo a los investigadores, las Estrategias Variacionales con las que abordan o enfrentan la situación representa uno de los elementos de esta caracterización. Una de las principales estrategias es la comparación de dos o más estados sucesivos de las magnitudes involucradas en la situación dada. Las comparaciones de dos o más estados sucesivos se apoyan con ciertas herramientas especializadas en el ámbito de la matemática que los autores llaman Estructura Variacional Específica.

Finalmente, las explicaciones que dan cuenta del reconocimiento cualitativo y cuantitativo de la situación variacional, mediante el uso de ideas, técnicas, ideas son llamadas Argumentos Variacionales, los cuales son articulados por los Códigos Variacionales, como frases, dibujos, esquemas o gráficos, con los cuales los sujetos tienen posibilidad de interactuar para explicar las situaciones variacionales propuestas.

Una mirada al Enfoque Instrumental

Empleamos el Enfoque Instrumental de Rabardel (1995), para analizar las acciones de los sujetos mientras interactúan con las construcciones geométricas de las actividades propuestas. Sus acciones nos permitieron observar el enriquecimiento progresivo del significado que le asignan al objeto pendiente *de la recta*, que es la actividad que presentamos en el presente artículo.

El Enfoque Instrumental, distingue esquemas de uso (EU) de los esquemas de acción instrumentada (EAI). En el primer grupo (EU), se encuentran aquellos esquemas que orientan las acciones del sujeto y se especializan en tareas específicas pero que se pueden coordinar unos a otros, para articular los EAI. De acuerdo a la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), elaboramos un análisis *a priori* de los EU que los sujetos movilizaron para el surgimiento del significado de la pendiente de una recta: los esquemas proporcionalidad entre triángulos y el perímetro de un rectángulo.

Dichos EU son instrumentos que se dirigen de manera puntual hacia tareas específicas de nuestra actividad, realizan procedimientos automáticos de cálculos y razones que ejecutan de manera coordinada para que emerja la noción de pendiente de una recta. Si analizamos el EU *perímetro de un rectángulo,* veremos que constituye una organización invariante de la conducta de un sujeto, formada por una serie de acciones, hábitos aprendidos, automatizaciones; las cuales cuando están en funcionamiento y en coordinación con otros esquemas y que posibilitan el surgimiento o enriquecimiento de un nuevo saber llamado EAI.

El enriquecimiento paulatino de algunos aspectos de sus propiedades mediante sus EU, hace que la pendiente se instrumentalice. Cuando la pendiente como EAI opera transformaciones en otros objetos adquiere el estatus de instrumento. En nuestra actividad mostramos que la pendiente actuó como instrumento pues su significado fue movilizado para determinar si una trayectoria es una recta.

Descripción de la actividad

A continuación, describimos la construcción de una familia de rectángulos a partir de la longitud variable de su semiperímetro, haciendo uso el uso de dos deslizadores, con el objetivo que movilicen su EAI pendiente de una recta.

El primer deslizador representa la longitud del semiperímetro (sp) del rectángulo y el segundo, su base (b). La búsqueda de alguna magnitud que permanezca constante mientras otras varían, origina la puesta en juego de una serie de estrategias, por parte del alumno.

En la figura 6, haciendo uso del radio constante de una circunferencia que equivale a la altura del rectángulo y la longitud del semiperímetro, mostramos que dicha longitud permanece constante. Hacemos uso de los deslizadores para observar las variaciones de las alturas y bases de los diferentes rectángulos.

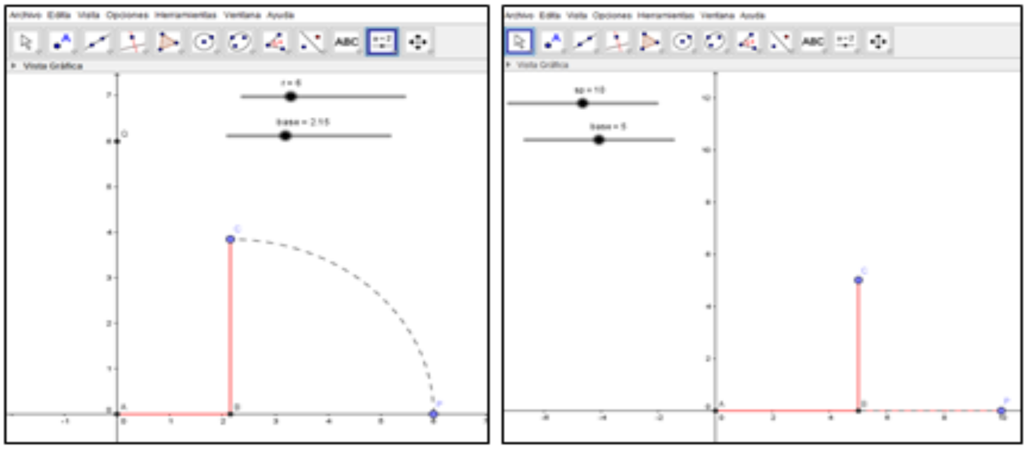


Figura 6. Construcción dinámica de la altura del rectángulo

En la figura 7, los sujetos hacen uso del deslizador para observar las diferencias entre diversos estados. Empleando la estrategia comparación o seriación analizan los estados sucesivos de las dimensiones de los rectángulos y los describen en tablas numéricas.

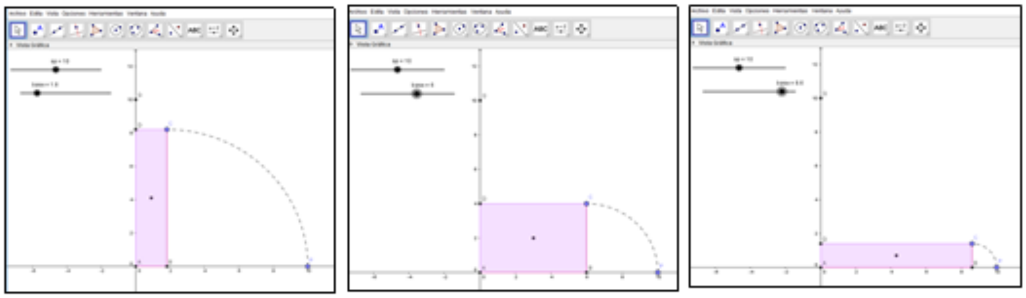


Figura 7. Construcción de rectángulo de perímetro constante

En la figura 8, se observa que la trayectoria del vértice superior derecho del rectángulo, es una recta, lo cual justifican, comparando las razones de cambio de los lados de los triángulos y movilizando su EAI pendiente, lo cual nos da indicios para suponer que los alumnos están movilizando dicho esquema para determinar si la curva es una recta.

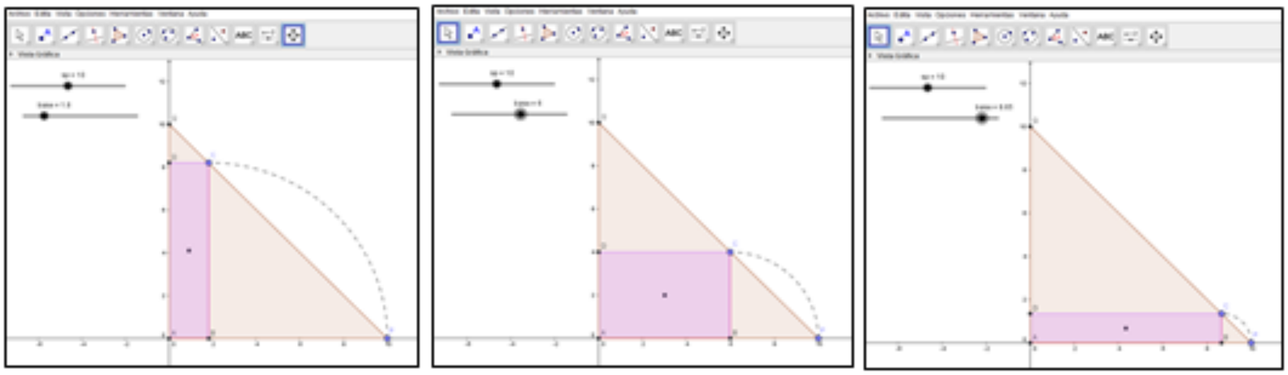


Figura 8. Lugar geométrico de uno de los vértices del rectángulo

Reflexiones finales

Estas actividades, sirven para descontextualizar la pendiente de una recta, encasillada en formulismos. Es una mirada no tradicional pues el estudiante argumenta y propone el uso de la pendiente desde la óptica del pensamiento y lenguaje variacional, permitiendo además asociar el significado de la pendiente, como tasa de cambios a su representación gráfica. Finalmente, nos permite ir comprendiendo la forma cómo desarrolla este pensamiento dinámico del alumno.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. *Ingeniería didáctica. 1*(1), 33-49.

Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. En Flores R. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa A.C.,* Vol. 26. (pp.1195-1204). México DF, México: Editorial Colegio Mexicano de Matemática.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento.* México DF, México: Editorial Gedisa.

Ruiz M., Ávila E. y Villa J. (2013). *Usos de Geogebra como herramienta didáctica dentro del aula de Matemáticas.* Repositorio digital de documentos en educación matemática. Conferencia Latinoamericana Colombia 2012 y XVII Encuentro Departamental de Matemáticas (pp. 446-454). Universidad de los Andes, Medellín.

Rabardel, P. (1995). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. Traducido por M. Acosta. Colombia: Universidad Nacional de Santander.

Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas, 2011. Colombia: Ediciones Universidad Industrial de Santander.

Vasco, C. E. (2006). *El pensamiento variacional y la modelación matemática.* Cali, Colombia. Recuperado de http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/arquivos_publicacoes1/indicacoes_01/.

DESARROLLO DE COMPETENCIA PARA USAR DIVERSAS APLICACIONES DE SOFTWARE PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LOS CURSOS DE MATEMÁTICAS

Jorge Ávila Soria, Ramiro Ávila Godoy
Universidad de Sonora. (México)
javilas9@gmail.com; ravila@mat.uson.mx

RESUMEN: La introducción de cualquier nueva tecnología (desde el grabado, el trazado, la medición, o el cálculo; con instrumentos mecánicos y analógicos, hasta la actual era digital) siempre ha influido en las formas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles. Hoy en día, la computadora debe ser incluida como una herramienta esencial porque permite a los estudiantes una generalización más rápida de los métodos y la resolución de problemas cada vez más complejos. Además, les facilita encontrar patrones y enriquecer su propio significado de los objetos matemáticos estudiados a través del uso de múltiples registros de representación. El aprendizaje con tecnología digital también ayuda a los estudiantes a ser competentes para resolver problemas, a través del diseño y uso de algoritmos, modelos, simulaciones o prototipos. Por esta razón, promovemos el uso de software de geometría dinámica, hojas de cálculo y calculadoras avanzadas, para que los estudiantes no se sientan limitados por la ausencia de una herramienta en particular

Palabras clave: tecnología digital, situación problema, contexto

ABSTRACT: The introduction of any new technology (from engraving, plotting, measuring, or calculating, with mechanical and analog instruments, up to the current digital age) has always influenced the ways of teaching and learning of mathematics at all levels. Today, the computer should be included as an essential tool because it allows students to more quickly generalize methods and solve ever more complex problems. In addition, it facilitates finding patterns and enriching their own meaning of the mathematical objects studied through the use of multiple representational registers. Learning with digital technology also helps students to be competent to solve problems, through the design and use of algorithms, models, simulations or prototypes. For this reason, we promote the use of dynamic geometry software, spreadsheets and advanced calculators, so that students do not feel limited by the absence of a particular tool.

Key words: digital technology, problem situation, context

Introducción

Desde la introducción de impresos, pasando por lápiz, papel y pizarrón, incluyendo herramientas como reglas, compases, tablas de cálculo y calculadoras digitales elementales; la tecnología siempre ha influido en las maneras de enseñar y aprender matemáticas en todos los niveles. Hoy es ineludible la inclusión de la computadora como herramienta indispensable para la generalización del planteamiento y resolución de problemas que permitan a los estudiantes conocer las formas modernas de resolver problemas, por medio de la modelación, el planteamiento algorítmico, la simulación o la construcción de prototipos virtuales.

La computadora nos da acceso a muchas y diversas aplicaciones de software que permiten enseñar matemáticas de forma tal que los estudiantes dediquen la mayoría de su tiempo al planteamiento, modelación y resolución de múltiples tipos de problemas en diferentes contextos, los cuales le permitirán, no sólo estar mejor preparado, en cuanto a las herramientas de que dispone para enfrentar situaciones reales en su vida profesional y cotidiana, sino también que vea en el uso de las matemáticas la manera de encontrar significados y explicar las situaciones problemáticas o no, que encuentre u observe en el entorno al que le toque enfrentarse en su vida profesional.

Metodología y marco teórico

La metodología de diseño y marco teórico que utilizamos en este trabajo, están fundamentados en ACODESA (aprendizaje en colaboración, debate científico, y auto reflexión), propuesta por Hitt (2009), con la cual se busca que con el uso de manipulables se promueva la producción de representaciones funcionales por los estudiantes, lo cual creemos es fundamental para que estos tengan una mejor retención de las construcciones matemáticas estudiadas. De acuerdo con Hitt y Cortés (2009), entre los diversos marcos teóricos que soportan ACODESA, están el de campos conceptuales de Vergnaud, el de representaciones semióticas de Duval, y el de situaciones didácticas de Brousseau, los cuales vienen a fortalecer la propuesta de diseño de situaciones didácticas de acuerdo con la metodología aquí usada.

ACODESA propone una serie de pasos a tener presentes cuando se diseña una actividad de enseñanza. Primero se busca enfrentar a los estudiantes de manera individual con la situación para su interiorización, posteriormente se trabaja en equipos de estudiantes para que compartan sus ideas, las discutan y busquen el enriquecimiento de sus significaciones por medio del debate científico. Posteriormente se comparten las ideas con otros grupos para contrastar los diferentes enfoques o caminos tomados y el profesor modera el proceso. Al final de cada sesión, los estudiantes se llevan de tarea reflexionar sobre las actividades e ideas generadas hasta ese momento del proceso. Cuando el profesor lo considera necesario, se lleva a cabo el proceso de institucionalización del proceso de enseñanza.

En este reporte, se presenta una propuesta sobre nuestra manera de enseñar matemáticas con el uso de tecnología digital. Nuestra propuesta está enfocada al uso de aplicaciones de software de fácil obtención para todo estudiante, de preferencia buscamos que sean aplicaciones con licencia de uso gratuito o que estén disponibles para todos. La implementación la llevamos a cabo en el nivel superior, pero sería un avance si los estudiantes fueran enfrentados con mayor ímpetu a usar la tecnología para enfrentar situaciones problema en matemáticas.

El propósito de la utilización de diversas herramientas de software para la resolución de un mismo problema está acorde con ACODESA, pues el uso de varios manipulables permite a cada estudiante formar su propio vínculo con el manipulable de su predilección en ese contexto. Por otra parte, también buscamos detonar el aprendizaje colaborativo por medio del debate científico de las ideas planteadas durante los procesos de modelación, implementación y resolución del problema con el uso de la aplicación digital. Con tareas donde se pide abordar problemas similares a los tratados en el curso, se busca que el estudiante reflexione sobre los problemas tratados y los temas estudiados. Con el uso de múltiples aplicaciones, queremos que el estudiante, además de reflexionar sobre los diferentes contextos abordados y las diferentes representaciones usadas, lo haga sobre las diferentes herramientas utilizadas, así como sobre las deficiencias y potencialidades que ofrece cada una de estas aplicaciones.

Aquí presentamos el uso de tres tipos de aplicaciones de software comunes que consideramos resultan elementos valiosos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en cualquier nivel educativo. En este reporte mostramos el uso de software de geometría dinámica, hojas de cálculo y calculadoras científicas con CAS, en la resolución de problemas de Álgebra que se abordan en los cursos dirigidos a los estudiantes de nuevo ingreso a las carreras de ingeniería en nuestra universidad.

Recomendaciones para la enseñanza con computadora

La flexibilidad de la metodología ACODESA permite que el diseño de una actividad pueda ser modificado dependiendo de la situación que se presente con respecto a la disponibilidad del equipo de cómputo, esto es, cuando no se cuenta con computadoras para todos los estudiantes.

Cuando las estaciones de trabajo tienen más de un estudiante, esto se apega más al planteamiento original de ACODESA, pues los miembros de una misma estación de trabajo rotan funciones al frente de la computadora y cumplen con otras funciones mientras no tienen el teclado o el mouse en sus manos; sin embargo, debemos decir que hemos observado que los estudiantes que no están a cargo de la manipulación, tiende a divagar o a desmotivarse. En situaciones como ésta, consideramos que tres debiera ser el número máximo de personas por computadora.

Cuando cada uno tiene su propia computadora, el diseño de la actividad debe ser modificado de acuerdo a la situación para incluir el trabajo en equipo, esto es, más de un estudiante por computadora, aunque el trabajo colaborativo a distancia podría también ser aplicable. El momento del trabajo en equipo es indispensable para que cada estudiante intervenga en el debate de las ideas con sus pares y pueda cambiar su rol de participación dentro del equipo. También se deben tener momentos de interacción con otros equipos, para lo cual se sugiere el intercambio de miembros entre los equipos, para que cada participante presente el trabajo hecho por su equipo a sus nuevos compañeros.

Al término de cada clase, es muy conveniente que los estudiantes se lleven la tarea de reflexionar sobre la actividad de la clase, del problema o del proceso actual, y si hay forma de obtener alguna evidencia de ese proceso, sería mejor para el proceso de evaluación. Todo proceso tendrá que culminar con el establecimiento de conclusiones generales, que den respuesta a los cuestionamientos planteados en el desarrollo de las actividades, que constituyan la institución del conocimiento nuevo.

Problematización de los temas tratados

Los temas tratados en el curso de Álgebra del nivel superior fueron problematizados dentro de lo posible en contextos extra-matemáticos para enfrentar a los estudiantes a situaciones que se pueden aplicar fuera del contexto puramente matemático. Entre los contextos que normalmente usamos, están los temas que se estudian en los cursos de Física, como el movimiento y la temperatura, o en los cursos de Química, como las mezclas y los compuestos, o algunos de la Economía como oferta-demanda y ventas, o de la Ingeniería como diseño de productos o tránsito, o de Geometría, como problemas de triángulos o movimientos astronómicos, etc.

Estos contextos van apareciendo durante el curso y dependen del tema o los temas de Álgebra que se estén viendo. Esto debido a que una situación problema puede requerir de más de un tema para su estudio.

Las aplicaciones de software también se van introduciendo poco a poco, ya sea diferentes aplicaciones para las mismas situaciones problemas o para diferentes situaciones en un mismo tema. Se busca ir contrastando capacidades y limitaciones de las aplicaciones de software, así como de sus ventajas y desventajas con respecto a la funcionalidad. El tema de los números complejos es particularmente difícil de problematizar, sin embargo, se usa la hoja de cálculo para hacer la parte operativa y construcciones para geometría dinámica para entender su representación gráfica.

Ejemplo de una situación tratada con tecnología digital

En las Figuras 1, 2, y 3, se muestra, a manera de ejemplo, la resolución de un problema como los que se plantean en el curso de Álgebra para ingenieros. El problema plantea la situación de una pelota que es lanzada por una persona que se encuentra en la azotea de un edificio de cierta altura. La pelota sigue una trayectoria parabólica hasta caer al suelo. La Figura 1 presenta la resolución del problema con Geogebra para geometría dinámica, la Figura 2 muestra el problema resuelto con la Voyage 200 de Texas Instruments y la Figura 3 muestra la resolución con hoja electrónica, en este caso con Libre Office.

Los estudiantes deben contestar los cuestionamientos que se les hacen con ayuda del software disponible y las preguntas que generalmente se formulan, tienen que ver con la altura desde la que se soltó la pelota, la altura máxima que ésta alcanzó o la distancia a la que cayó la pelota del pie del edificio desde donde fue lanzada. En ocasiones, los estudiantes podrán elegir el software que prefieren utilizar o se les puede indicar el software que se debe usar, pues durante el curso deben haber aprendido a utilizarlo para resolver problemas de matemáticas.

Por ejemplo, si la aplicación que se le pide usar no tiene grandes capacidades de graficación, pues tendrá que atacar el problema de la forma analítica, o con el uso de CAS, según considere que lo domina mejor o el software le de las facilidades.

Figura 1: Resolución con geometría dinámica de un problema sobre la trayectoria parabólica de una pelota lanzada desde lo alto de un edificio. (a) Introducción de la expresión cuadrática de la trayectoria en la barra de entrada. (b) Representación gráfica de la trayectoria en el plano cartesiano. (c) Obtención de las intersecciones de la gráfica con el eje x, nivel del suelo. (d) Cálculo del punto medio entre las raíces de la trayectoria, abscisa del vértice del lanzamiento. (e) Perpendicular al suelo en la abscisa del vértice, para encontrar la altura máxima. (f) Intersección de la trayectoria con la perpendicular al punto medio entre las raíces de esta, para encontrar la altura máxima de la trayectoria. (g) Intersección de la trayectoria con el eje y, para encontrar la altura de donde fue lanzada la pelota, podría tomarse como la altura del edificio.

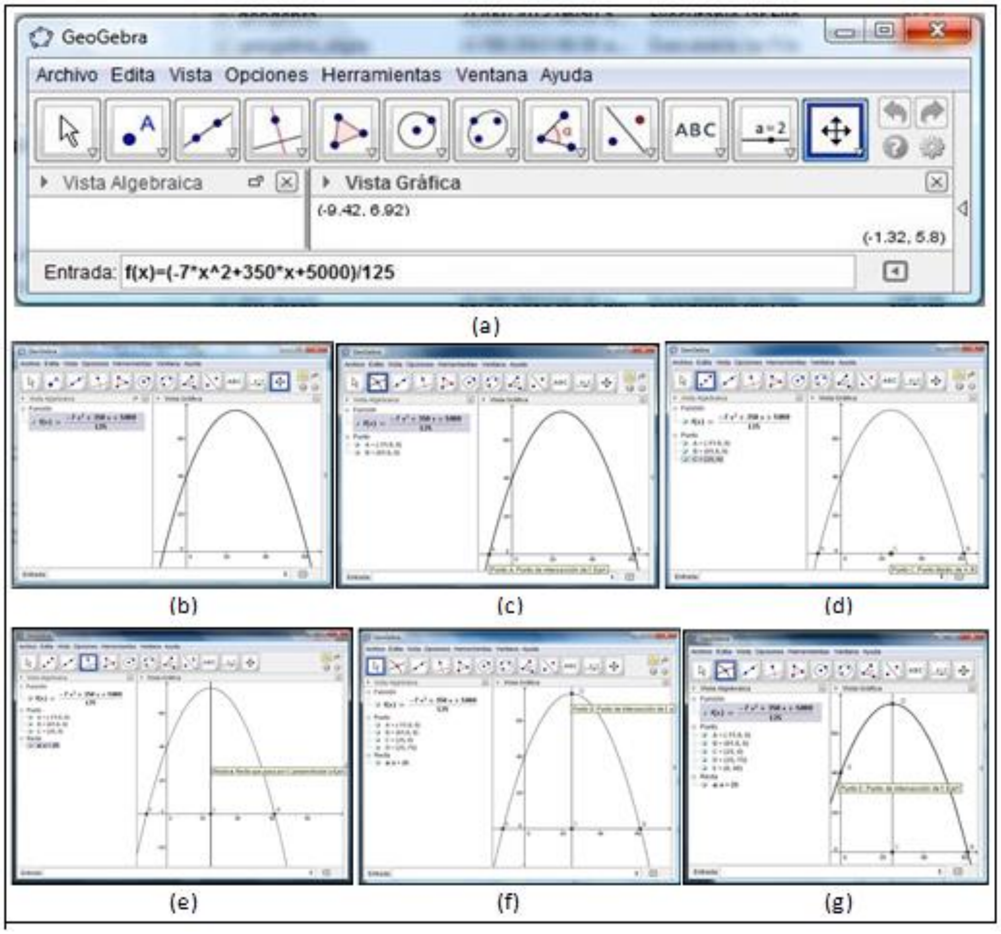


Figura 1.

Otro tema, más fácil de problematizar, es el de polinomios donde podemos verlos como parte de una ecuación o de una función. Empezamos por los de primer grado, sin dejar pasar cualquier oportunidad para la generalización de patrones en matemáticas hasta llegar a la institucionalización de reglas, propiedades o representaciones matemáticas.

Las situaciones problema de polinomios, requieren de la graficación, la factorización, el despeje, la definición de sistemas de ecuaciones, su resolución, la interpretación gráfica y analítica del contexto de estudio. En orden cronológico, se sigue el curso con las parábolas, las cúbicas, las cuárticas hasta las de quinto grado y, para terminar, con las trigonométricas, las exponenciales y las logarítmicas.

Figura 2: Resolución con calculadora científica de un problema sobre la trayectoria parabólica de una pelota lanzada desde lo alto de un edificio. (a) Introducción de la expresión cuadrática de la trayectoria en la barra de entrada. (b) Evaluación de la trayectoria cuando la pelota no comenzaba a moverse, esto es la altura desde donde fue lanzada la pelota, podría tomarse como la altura del edificio. (c) (d) y

(e) Uso de las funciones solve, factor y zeros respectivamente, para encontrar las raíces o el nivel del suelo de la trayectoria. (f) Copiado y pegado de los ceros de la trayectoria. (g) Cálculo del punto medio entre las raíces de la trayectoria, abscisa del vértice del lanzamiento. (h) Evaluación de la trayectoria en la abscisa del vértice de ésta, para encontrar la altura máxima.

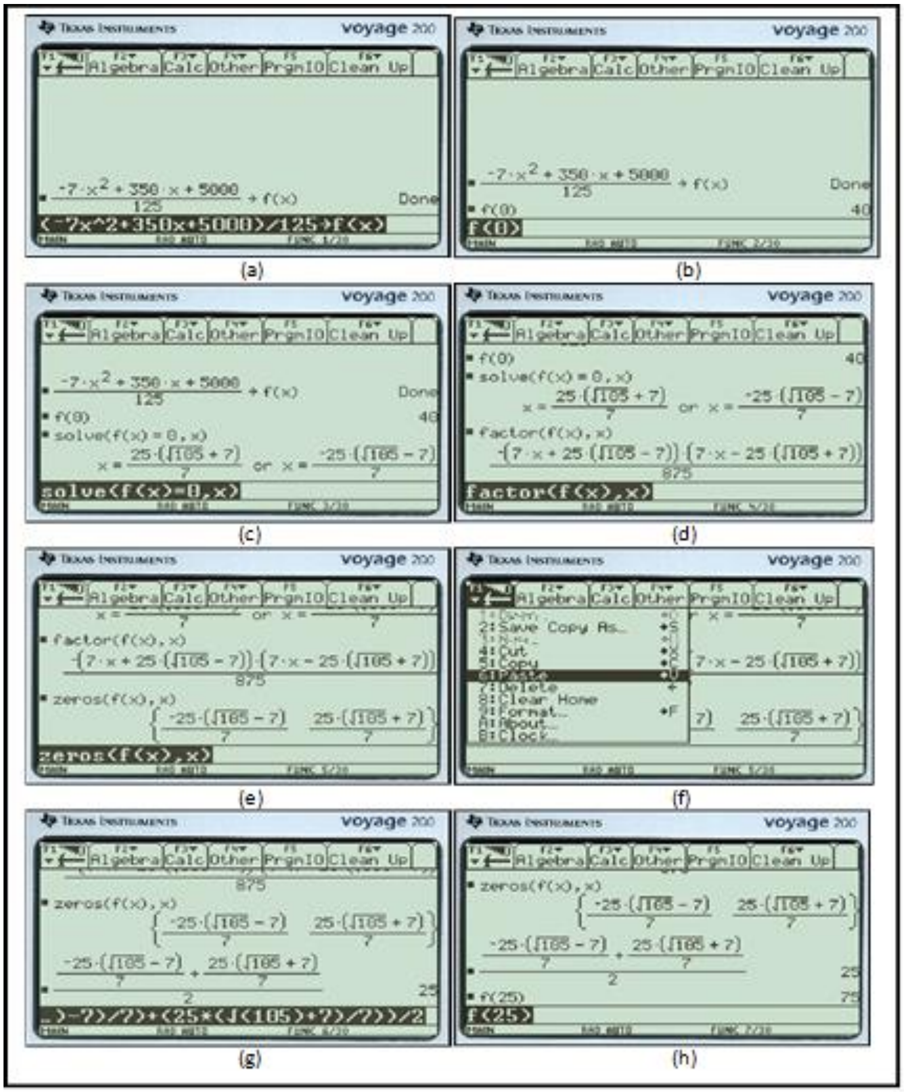


Figura 2.

Como en todo curso, no todos los estudiantes logran un dominio aceptable de cada software, sin embargo, la mayoría tiende a tener preferencias por el que más entienden, lo que los lleva a dejar de lado los que consideran más complicados. Por esta razón, recomendamos estar pendiente de esta situación, para poder orientar a cada estudiante para que supere sus debilidades.

Figura 3. Resolución con hoja electrónica de un problema sobre la trayectoria parabólica de una pelota lanzada desde lo alto de un edificio. (a), (b), y (c) Introducción de los coeficientes de la expresión cuadrática de la trayectoria. (d) y (e) Introducción de la solución positiva y negativa respectivamente de la fórmula general cuadrática para encontrar las raíces o el nivel del suelo de la trayectoria. (f) Evaluación de la trayectoria cuando la pelota no comenzaba a moverse, esto es, la altura de donde fue lanzada la pelota, podría tomarse como la altura del edificio. (g) y (h) Evaluación de las raíces, para probar que realmente arrojan el nivel del suelo. (i) Cálculo del punto medio entre las raíces de la trayectoria, abscisa del vértice del lanzamiento. (j) Evaluación de la trayectoria en la abscisa del vértice de ésta, para encontrar la altura máxima. (k) Muestra el vértice de la trayectoria

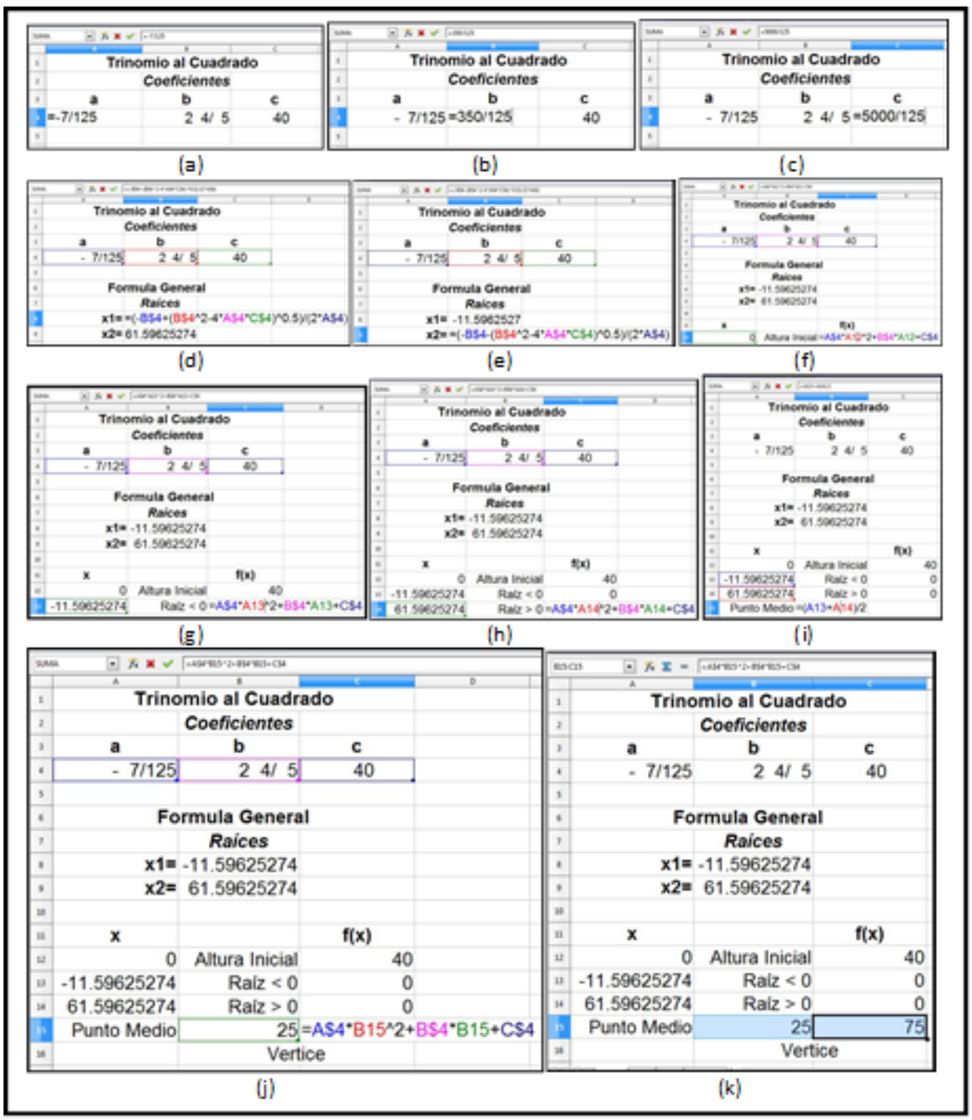


Figura 3.

Desde el primer tema se va introduciendo a los estudiantes en el uso de las diversas aplicaciones de software, de manera que conforme avanza el curso, ellos se vuelven capaces de reutilizar cosas que fueron usadas con anterioridad en alguna de las aplicaciones (que podría ser la misma o una aplicación de software diferente), muy probablemente para contextos diferentes y darles usos alternativos a los antes aplicados.

Conclusiones

Creemos que el paradigma que aún plantea la escuela de hoy en día, donde los estudiantes deben saber y ejecutar rápido y eficientemente todo método matemático con lápiz y papel o cuando mucho utilizando una calculadora científica como apoyo, es obsoleto. Decimos que dicho paradigma debe ser desechado poco a poco, conforme la orientación inicial de los alumnos se vaya tecnologizando cada vez más y requerirá que los profesores se actualicen permanentemente, pues los avances en la actualidad se hacen con la ayuda de las computadoras.

Existen muchos ejemplos de tecnologías que se usaron y las tecnologías digitales las hicieron obsoletas, tales como: la regla de cálculo, enseñar el algoritmo de raíz cuadrada, las tablas con valores aleatorios, de funciones trigonométricas y de probabilidad.

Finalmente diremos que entre más tiempo le dediquen los estudiantes a la resolución de problemas con tecnología digital, mayor será el beneficio obtenido. Además, los estudiantes más competentes en el uso de la tecnología digital para resolver problemas que requieran matemáticas, de seguro serán aquellos que no dependan de tener el software más caro o el más sofisticado, sino aquellos que cuenten con la flexibilidad suficiente para resolver el problema planteado con la aplicación de que dispone en el momento, sólo usando su pensamiento matemático y su ingenio, además de la aplicación, pues resuelva problemas de una manera más eficiente y en un tiempo más corto, lo que le permitirá resolver más problemas, de una mayor complejidad y de una diversidad más enriquecedora.

Referencias bibliográficas

Hitt, F. (2009). Resolución de situaciones problema y desarrollo de competencias matemáticas en ambientes de aprendizaje en colaboración, debate científico y auto-reflexión (ACODESA). *Primer Seminario sobre Resolución de Problemas y el Uso de la Tecnología Computacional* (pp. 9-21).

Hitt, F. & Cortés, J. (2009). *Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas.* Revista Digital Matemática, Educación e Internet. Recuperado de http://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/1977 en 04 de mayo 04 de 2017.

Clame Comite Latinoamericano de Matematica Educativa