Clame Comite Latinoamericano de Matematica Educativa

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

VOLUMEN 31 » NÚMERO 2 » AÑO 2018 » ISSN 2448-6469

ALME 31

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA, Volumen 31, Número 2, julio 2018, es una publicación semestral editada por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Av. Universidad 1900, Oxtopulco Universidad, Delegación Coyoacán, C.P. 04460, Ciudad de México, www.clame.org.mx, alme.clame@gmail.com. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2017-071712431200-203, otorgado por el Instituto Nacional del Derecho de Autor, ISSN: 2448-6469.

Comité Científico de Evaluación

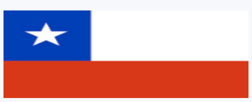
ARGENTINA

Adriana Estela Frausin
Ana Rosa Corica
Cecilia Esther Elguero
Cecilia Rita Crespo
Christiane Cynthia Ponteville
Claudia Minnaard
Elisa Silvia Oliva
Haydeé Blanco
Lidia Beatriz Esper
Liliana Mabel Tauber
Mabel Rodríguez
Marcela Evangelina Götte
María Angélica Pérez
María Elina Vergara
María Julia Améndola
María Rita Otero
María Susana Dal Maso
Rodolfo Eliseo D'Andrea
Silvia Vrancken
Verónica Parra

BRASIL

Claudia Lisete Oliveira
José Fernandes
Juliana Silva
Nielce Lobo

CHILE



Andrea Dorila Cárcamo
Claudio Eduardo Fuentealba
Eduardo Carrasco
Nicolás Sánchez
Patricia Vásquez
Isabel García

COLOMBIA

Paola Alejandra Balda
Ingrith Yadira Álvarez

COSTA RICA

Fabián Wilfrido Romero

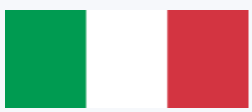
CUBA

Olga Lidia Pérez

ESPAÑA

José Carrillo
María del Mar López
María Belén Giacomone

ITALIA

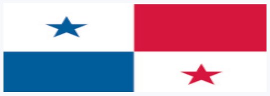


María Belén Giacomone

MÉXICO

Adriana Gómez
Adriana Atenea de la Cruz
Angélica Dueñas
Catalina Navarro
Clara Cristina Eccius
Claudia Flores
Cuauhtémoc Emmanuel Rodríguez
Edgar Ponciano
Eduardo Carlos Briceño
Enrique Javier Gómez
Gabriela Buendía
Germán Muñoz
Gloria Angélica Moreno
Gricelda Mendivil
Héctor Ramírez
Javier García
José Carlos Ramírez
José Marcos López
José Trinidad Ulloa
Judith Alejandra Hernández
Julio Moisés Sánchez
Lidia Aurora Hernández
Lilia López
Lilia Patricia Aké
Lizzeth Aurora Navarro
Lorenzo Contreras
Luis Manuel Aguayo
Luis Manuel Cabrera
Luz Esmeralda Reyes
Magdalena Rivera
María del Carmen Fajardo
María Teresa Martínez
Mayra Báez
Raúl Alonso Ramírez
Rebeca Ascencio
Reyna Arcelia Brito
Ricardo Cantoral
Rita Guadalupe Angulo
Rogelio Ramos
Rosa Isela Vázquez
Rosa María Farfán
Saúl Ezequiel Ramos
Ulises Alfonso Salinas
Víctor Larios

PANAMÁ



Analida Isabel Ardila

PERÚ

Enrique Huapaya
Juan Carlos Sandoval

VENEZUELA

Sandra Liliana Castillo
Yaneth Josefina Ríos

PRESENTACIÓN

Durante los últimos 30 años, gran parte de la productividad académica de la comunidad de Matemática Educativa de Latinoamérica se encuentra publicada en los distintos volúmenes del ALME, cuyo nombre en un inicio eran *memorias* de las reuniones Centroamericanas y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa que iniciaron en 1987 y cuyo foco era propiciar una reflexión del trabajo del colectivo y encaminar futuras perspectivas de investigación que permitieran fortalecer a la comunidad.

A partir de la consolidación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME) como un movimiento académico, de carácter internacional, se acordó en la X Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa celebrada en Puerto Rico en 1996, cambiar el nombre por el de Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME) y continuar la numeración de las reuniones de manera que se convocara a la Undécima Reunión en 1997 en México el año siguiente. De ese modo el cambio a Acta Latinoamericana de Matemática Educativa se observa en 1999, en el Volumen 12 (http://clame.org.mx/uploads/actas/alme%2012.pdf). Desde entonces, se había conservado el estatus del ALME como una publicación anual. Al respecto, uno de los fundadores de CLAME, el Dr. Cantoral señala que no sólo se trata de una publicación periódica derivada de las distintas RELME, sino que además la mira como uno de los tres pilares de la Escuela Latinoamericana de Matemática Educativa.

En este proceso de transición del ALME y la necesidad de mostrar visibilidad ante la comunidad, no sólo latinoamericana, se busca convertirla en una Revista que ofrezca a sus lectores la posibilidad asumir una postura respecto a lo que aportará a la generación de nuevo conocimiento científico y en qué medida se pretende hacer a partir de lo publicado.

En este año se logra mediante este segundo número del Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, en su volumen 31, la consolidación que como Junta Directiva habíamos pretendido, por un lado, ALME se fortalece como revista y por otro se logra la edición de dos números en un mismo año. Ello con vísperas a la indexación en bases de datos.

Los 117 artículos que conforman este número constituyen una valiosa propuesta de docentes de Matemática y/o investigadores en Matemática Educativa de Latinoamérica, que pueden enriquecer nuestras prácticas docentes y/o actividad investigativa, con la seguridad de que tienen un alto nivel de calidad y de rigurosidad para ser utilizados como bibliografía actualizada.

Agradecemos la valiosa colaboración de los editores del ALME 31, Dr. Luis Arturo Serna y M. en C. Daniela Pagés y Dra. Rebeca Flores quienes con su entrega y dedicación lograron la culminación de esta publicación.

Olga Lidia Pérez González
Presidenta del Consejo Directivo
CLAME (2016-2020)

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 1:

ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 3

ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 4:

EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

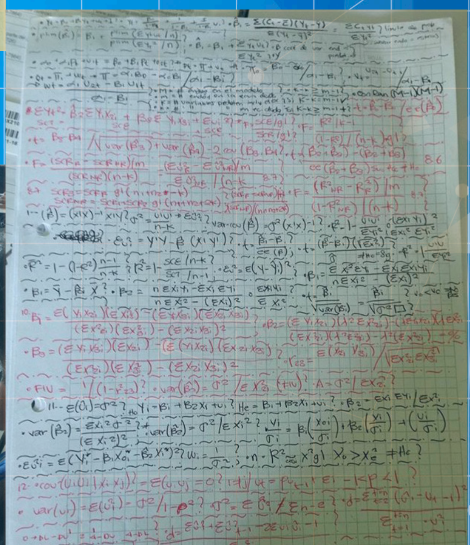
SECCIÓN 5:
USO DE LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

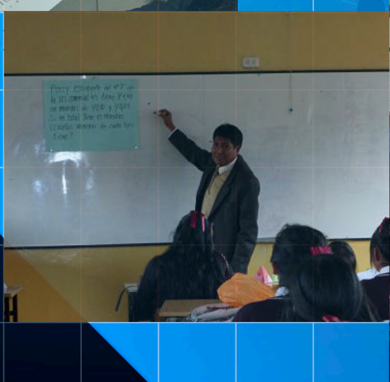
TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 1

ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR






Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 1 / ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR
VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

ECOLOGIA DO ENSINO DO CONCEITO DE FATORAÇÃO NUMÉRICA E ALGÉBRICA ENTRE AS DÉCADAS DE 1960 A 2010

Míriam do Rocio Guadagnini, Marlene Alves Dias, Valdir Bezerra dos Santos Júnior, Renato da Silva Ignácio
UNIAN. UNIAN. UFPE. UFCG. (Brasil)
miriamguadagnini@hotmail.com, maralvesdias@gmail.com, valdir.bezerra@gmail.com, renatosignacio@gmail.com

Resumo
Apresentamos parte de pesquisa sobre o ensino e aprendizagem da fatoração numérica e algébrica, especificamente, o estudo da ecologia do seu ensino entre as décadas de 1960 a 2010. No referencial teórico da pesquisa, optamos pelas noções de praxeologia e ecologia, segundo Chevallard, que conduziram à metodologia da pesquisa documental, por meio da análise de livros didáticos das décadas consideradas. Os resultados mostram uma ecologia bastante estável, se desconsiderarmos a década de 1960, pois praxeologias privilegiadas nas décadas posteriores estão centradas no uso de técnicas e situações contextualizadas que refletem apenas uma nova vestimenta, que não a torna uma real situação de contexto.

Palavras-chave: fatoração, ecologia, praxeologia, álgebra

Abstract
We report partial results of a research on the teaching and learning process of numerical and algebraic factorization, specifically, the study of the ecology of its teaching between the decades of 1960 and 2010. As the theoretical framework of the research, we chose the notions of praxeology and ecology, according to Chevallard, which led to the methodology of documentary research, through the analysis of textbooks of the decades already mentioned. The results show a fairly stable ecology if we disregard the 1960s, because privileged praxeologies in the later decades are centered on the use of contextualized techniques and situations that reflect only a new appearance, which does not make it a real context situation.

Key words: factorization, ecology, praxeologies, algebra

INTRODUÇÃO

Este estudo tem o objetivo de compreender quais noções associadas ao conceito de fatoração numérica e algébrica desaparecem ou sobrevivem nas propostas institucionais de ensino deste conceito no Ensino Fundamental anos finais (alunos entre 11 e 14 anos) no Brasil, ou seja, estudamos a ecologia associada ao ensino da noção de fatoração na escola básica brasileira a partir da análise dos livros didáticos das décadas de 1960, 1970 e 2010.

Para isso, escolhemos como referencial teórico da pesquisa a Teoria Antropológica do Didático, em particular, as noções de ecologia dos saberes e praxeologia. Ainda consideramos os níveis inferiores de codeterminação didática, abordados por Chevallard (2002), que apontam o caminho para examinar o modo como poderão ser/estar organizados os conteúdos matemáticos e o papel do professor e do estudante nessa organização.

A metodologia adotada é a da pesquisa documental à luz dos ensinamentos de Lüdcke e André (2013). Escolhemos, para a análise, um livro de cada década, o que justificamos por meio da afirmação de Lages Lima *et al.* (2006) que observam que, em geral, o professor dispõe apenas do livro didático adotado, uma vez que os outros existentes no mercado diferem muito pouco entre si.

Os resultados mostram um ensino que sofre pequenas modificações, se desconsideramos a década de 1960, pois nas décadas posteriores, o ensino é centrado na memorização de técnicas e aplicação em situações contextualizadas, que representam apenas uma nova forma de revestir as técnicas consideradas, fazendo pouco uso de situações de contexto reais apenas durante as seis décadas consideradas.

Na sequência, apresentamos brevemente o referencial teórico que sustenta nossas análises.

Noções da teoria antropológica do didático (TAD)

Chevallard (1992), após introduzir os elementos primitivos da TAD, a saber: objeto (O), pessoa (X) e instituição I, define as noções de relação institucional e pessoal ao objeto O.
Assim, um objeto O existe para uma pessoa X, se esta tem uma relação pessoal R(X,O), ou seja, uma relação que corresponde ao conjunto de interações que X pode ter com O, no sentido de poder manipular, utilizar, falar de, sonhar com, etc. Isto define a maneira como a pessoa X conhece O.

Para Chevallard (1992), o par formado pelo indivíduo X e o sistema de relações pessoais R(X,O) definem uma pessoa. Este sistema de relações pessoais evolui, uma vez que objetos que não existiam passam a existir, outros deixam de existir e assim a relação pessoal de X muda. Nesta evolução, o invariante é o indivíduo e o que muda é a pessoa, ou seja, esta modificação da relação pessoal do indivíduo X com o objeto O representa a aprendizagem.

A relação institucional ao objeto O é definida por Chevallard (1992) como uma restrição para a relação de uma pessoa com o mesmo objeto O, quando esta se torna sujeito de uma instituição I. A relação institucional depende da posição p que o objeto O ocupa em I, indicada por $R_I(p,O)$. Desta forma, a pessoa X é o emergente de um complexo de sujeições institucionais. As noções de relações institucional e pessoal são ferramentas que nos possibilitam identificar o que o indivíduo ou a instituição são capazes de fazer com o objeto O.

Para descrever a relação institucional associada a um saber, observando que este tem um prestígio cultural para certos objetos, Chevallard (1999) introduz a noção de praxeologia, que corresponde a um modelo para descrever o conhecimento matemático, situando a atividade matemática no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais. Assim, a noção de praxeologia, segundo Chevallard (1999), é ampla, pois toda atividade humana pode ser analisada por meio desta noção, como por exemplos: calcular o valor de uma equação, um gráfico, arrumar uma mesa.

Assim, para Chevallard, uma praxeologia corresponde aos tipos de tarefas (*T*) que, para serem executadas, necessitam de uma maneira de fazer, denominada técnica (τ). A associação entre tarefa-técnica é definida como um saber fazer, a qual necessita de uma tecnologia (θ), um discurso racional que justifica e torna a técnica compreensível, e de uma teoria (Θ) que justifica e esclarece a tecnologia utilizada, resultando na associação tecnológico-teórico, que corresponde ao saber. O sistema composto por tipo de tarefa (*T*), técnica (τ), tecnologia (θ) e teoria (Θ), constitui o que Chevallard denomina praxeologia, indicado por $[T, \tau, \theta, \Theta]$. Por exemplo, reconhecer no tipo de tarefa "simplificar uma fração algébrica" que uma técnica a utilizar é: reduzir termos semelhantes, sabendo justificar essa operação por meio da tecnologia que corresponde a reconhecer as propriedades da adição e multiplicação de polinômios que, por sua vez, será justificada pela teoria algébrica associada à estrutura de anel do conjunto dos polinômios em IR.

Observamos ainda que a análise da ecologia dos saberes considerados pode ser realizada à luz dos diferentes níveis de codeterminação didática. Para Chevallard (2007), os níveis de codeterminação descrevem as relações recíprocas entre os diferentes níveis do sistema didático e são representados da seguinte forma: tópicos ↔ temas ↔ setores ↔ domínios ↔ disciplinas ↔ pedagogia ↔ escola ↔ sociedade ↔ civilização ↔ humanidades. Em geral, os níveis superiores são: escola, pedagogia e disciplina, os quais ficam sob a responsabilidade da política e da noosfera disciplinar e algumas vezes fazem parte de uma reflexão crítica de professores, enquanto os níveis inferiores, a saber: domínios, setores, temas e tópicos, deveriam integrar os conhecimentos de todos os professores, de modo que eles pudessem explicitar as diferentes funções de um mesmo objeto matemático em seus possíveis habitats, que equivale ao lugar onde vivem esses objetos. Por exemplo, a fatoração de polinômios aplicada à determinação das raízes de uma equação do segundo grau.

Ressaltamos aqui a importância de o professor identificar setores e domínios, pois, conforme Chevallard (2002), um trabalho centrado apenas sobre tópicos e temas pode conduzir à falta de motivação para o estudo proposto. No caso da fatoração, observamos que as aplicações que motivam sua utilização, em geral, encontram-se nos níveis setores e domínios, como o exemplo de sua aplicação no estudo de equações do segundo grau.

Metodologia

Como já anunciado na introdução, trata-se de uma pesquisa qualitativa, cujo método é o da pesquisa documental, consoante Lüdke e André (2013), pois nossas fontes são escritas e, portanto, utilizamos a técnica de análise de documentos retrospectivos e contemporâneos, a saber: livros didáticos, que são materiais habitualmente usados por professores e estudantes.

A partir da justificativa de Lages Lima et al. (2006), consideramos o livro didático como objeto de análise, uma vez que nele podemos identificar as possíveis praxeologias que sobrevivem atualmente nas escolas brasileiras.

Isso nos conduziu a analisar a obra de Dante (2012) para o Ensino Fundamental anos finais, que representa uma proposta de ensino de Matemática avaliada e distribuída pelo Ministério da Educação, sendo a de maior alcance nacional, pois tem sido indicado desde o ano 2000 pelo Programa Nacional do livro Didático (PNLD).

Em relação às obras anteriores, analisamos a obra de Sangiorgi (1965, 1966), que foi a mais utilizada na época e para as décadas de 1970 até 1990, a coleção de Castrucci *et al.* (1976), que representa a transição entre a Matemática moderna e o momento em que se privilegia o desenvolvimento de técnicas visando à formação do indivíduo para trabalhar na indústria.

As análises foram feitas a partir dos questionamentos: *Quais são os tipos de tarefas privilegiadas nas décadas consideradas? Quais as técnicas e tecnologias que permanecem ou desaparecem? Quais as semelhanças e diferenças entre as abordagens utilizadas nas obras? Quais tipos de tarefas indicam as aplicações do conhecimento sobre fatoração? Como elas estão tratadas nos livros didáticos considerados?*

Resultados das análises ecológica e praxeológica

A análise ecológica dos livros didáticos tem por objetivo localizar os habitats, ou seja, o lugar onde vivem os objetos matemáticos considerados, e nichos, que correspondem à função que esses objetos ocupam em cada habitat para o objeto fatoração.

Para tanto, interpretamos os sumários e a estrutura dos livros didáticos, considerando os níveis inferiores de codeterminação didática: domínio, setor, tema e tópicos. Isso nos auxiliou a compreender o habitat e o nicho proposto nas três épocas aqui focalizadas.

Assim, associamos a introdução de um conceito ao domínio, especialmente representado pelo conjunto numérico; as noções a ele associadas inserem-se no setor de estudo, no qual podemos identificar diferentes temas e tópico. Para a fatoração numérica, foram observados os seguintes resultados.

Fatoração numérica

Na obra de Sangiorgi (1965), atual sexto ano do Ensino Fundamental (alunos de 11 anos), a fatoração numérica é introduzida no domínio dos conjuntos numéricos, no setor dos números inteiros, suas operações e propriedades, para o qual são desenvolvidos os temas: número um; números primos; números compostos e a fatoração completa, mostrando que esta é uma propriedade dos números naturais. Na sequência, são propostas as praxeologias associadas aos tipos de tarefas: T1: Decompor um número em fatores primos; T2: Determinar os divisores primos de um número dado; T3: Determinar os divisores de números dados; T5: Escrever o máximo divisor comum (m.d.c.) de números dados; T6: Aplicar o m.d.c. para resolver uma situação contextualizada; T7: Determinar os múltiplos de um número dado;T9: Escrever o mínimo múltiplo comum (m.m.c.) de números dados; T10: Aplicar o m.m.c para resolver situação contextualizada; T11: Verificar se números dados são “amigos” e “perfeitos”. Ainda no setor números inteiros, são introduzidos os temas máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum.

O habitat da fatoração numérica constitui-se de conjuntos numéricos. A proposta da época da Matemática moderna é o estudo das estruturas algébricas. Nessa perspectiva, observamos que o nicho significava considerar as propriedades da estrutura correspondente.

O livro didático de Castrucci *et al.* (1976) foi publicado à época em que o ensino proposto era centrado no desenvolvimento das técnicas associadas aos diferentes objetos matemáticos. Em nossa análise, verificamos que a fatoração numérica era introduzida no sexto ano do Ensino Fundamental, no domínio dos conjuntos numéricos, no setor do conjunto dos números naturais para os temas: sistema de numeração, operações fundamentais e divisibilidade sem explicitação da estrutura algébrica; assim a fatoração numérica correspondia a um tópico do setor divisibilidade, ou seja, tanto a fatoração como o m.d.c. e o m.m.c. eram introduzidos por meio do tópico números primos, que também integrava o setor divisibilidade, o que mostra o carater técnico impimido a essas noções.

As praxeologias privilegiadas são associadas aos tipos de tarefas: T1, T2, T3, T5, T7 e T9, sendo que o habitat da fatoração numérica está inserido no setor dos números naturais e seu nicho estava associado ao tema divisibilidade para dar suporte aos critérios de divisibilidade, uma prática que propiciava decidir rapidamente por meio do cálculo mental se um número era ou não divisível por outro, o que evidencia a proposta de desenvolvimento técnico do ensino daquela época.

Na obra de Dante (2012), voltada para o 6º ano do Ensino Fundamental, a fatoração numérica está localizada no domínio dos conjuntos numéricos para o setor dos números naturais, considerada no tema dos divisores e múltiplos de números naturais. Assim como a fatoração, o m.d.c. é um tópico que faz parte do tema “divisores e número primo”, onde também encontramos o tópico Crivo de Eratóstenes e a decomposição de um número natural em fatores primos. Já o m.m.c. é um tópico do tema múltiplos de um número natural.

O autor considera ainda o tópico problemas envolvendo m.d.c. e m.m.c., enfatizando que é necessário aplicar estes conceitos propondo situações-problema, em geral, com um viés de contextualização cotidiana, o que difere da obra de Sangiorgi (1965), na qual as situações-problema se referiam ao contexto da Matemática.

As praxeologias privilegiadas estão atreladas aos tipos de tarefas: T1, T2, T3, T4: Determinar a soma dos divisores de um número; T5, T6, T7, T8: Representar genericamente a sequência dos múltiplos de um número natural, T9, e T10. Destacamos que o habitat da fatoração numérica é o domínio dos números naturais, tendo como nicho a noção de números primos. Sua proposta evidencia o momento vivido pela educação, para a qual se tem a preocupação de contextualizar uma técnica para proceder à resolução de problemas.

Fatoração algébrica

A fatoração algébrica na obra de Sangiorgi (1966), atual oitavo ano do Ensino Fundamental (alunos 13 anos), é introduzida no domínio dos conjuntos dos polinômios com coeficentes reais, mais particularmente no setor "cálculo algébrico e estudo de polinômios", no qual são desenvolvidos os temas referentes às técnicas de cálculo algébrico, como adição, subtração, multiplicação e divisão de expressões literais e apresentação da estrutura de anel para os conjuntos dos polinômios. Na sequência, o autor considera os tópicos associados às técnicas usuais de multiplicação, denominados "produtos notáveis", cubos e multiplicações usuais de binômios, com o objetivo de mostrar as expressões algébricas equivalentes, estabalecendo assim a relação entre fatoração e desenvolvimento. Para o tópico simplificação de expressões literais, são destacadas as técnicas: colocar o fator comum em evidência, diferença de dois quadrados, quadrado da soma ou da diferença de dois números, expressão da forma $x^2 + (a + b)x + ab$, todas obtidas por meio da multiplicação, o que conduz ao tópico simplificação de frações literais como aplicação dos tópicos anteriores.

As praxeologias privilegiadas estão associadas aos tipos de tarefas: o autor, para tratar da fatoração algébrica, desenvolve os seguintes tipos de tarefas T12: Desenvolver um dos casos de produto notável; T15: Colocar o fator comum em evidência; T16: Colocar o fator comum em evidência e agrupar os termos; T17: Reconhecer um trinômio quadrado perfeito e escrever na forma fatorada da soma ou da diferença de quadrados; T18: Escrever uma diferença entre dois quadrados como produto da soma pela diferença; T19: Calcular o quadrado de um número natural qualquer, utilizando produtos notáveis e fatoração; T20: Simplificar frações algébricas; T22: Fatorar expressão da forma $x^2 + (a + b)x + ab$; T26: Indicar por meio de expressões algébricas o perímetro e a área de figuras planas ou sólidos geométricos (paralelepípedo); T28: Aplicar fatorações sucessivas.

Para a obra de Sangiorgi (1966), o habitat da fatoração algébrica situa-se no domínio dos conjuntos dos polinômios com coeficentes reais e seu nicho equivale a mostrar as propriedades estruturais do conjunto dos polinômios, associando às propriedades do conjunto dos números reais.

Na obra de Castrucci *et al*. (1976), a fatoração algébrica é trabalhada no atual oitavo ano do Ensino Fundamental, no domínio dos polinômios com coeficientes reais, no setor cálculo algébrico e estudo dos polinômios, no qual são desenvolvidos os temas associados às técnicas de reconhecimento e cálculo com: expressões literais ou algébricas, polinômios, produtos notáveis, fatoração, m.d.c. e m.m.c. e frações algébricas.

As praxeologias privilegiadas estão associadas aos tipos de tarefas: T12, T15, T16, T17, T18, T20, T22, T28. Notamos que as tarefas são condizentes com a época em que o ensino proposto era centrado no desenvolvimento de técnicas.

Salientamos que o habitat da fatoração algébrica é o domínio do conjunto dos polinômios com coeficientes reais e seu nicho está associado ao reconhecimento desse novo objeto matemático e algumas de suas operações.

Em Dante (2012), um dos livros indicados em todos os PNLD, analisamos o livro do 8º ano do Ensino Fundamental, no qual a fatoração é inserida no domínio dos polinômios com coeficientes reais, no setor cálculo álgébrico e polinômios. A fatoração de polinômios é um tópico que faz parte do tema

"Polinômios", onde encontramos os tópicos: redução de termos semelhantes, grau de um polinômio, operações com polinômios, produtos notáveis, fatoração de polinômios, aplicações dos produtos notáveis e da fatoração e demonstrações.

Para o tema fatoração do setor polinômios, são privilegiadas as praxeologias associadas aos tipos de tarefas: T12, T13: Desenvolver casos de produto notável e reduzir termos semelhantes; T14: Demonstrar uma igualdade envolvendo produtos notáveis geometricamente (demonstração de Euclides [330 a.C. - 260 a.C.]); T15, T16, T17, T18: T19, T20, T21: Resolver equações na forma fatorada, ou fatorá-las utilizando os casos de fatoração e produto notável;T22, T23: Verificar uma igualdade numérica e generalizá-la; T24: Provar propriedades de números naturais pares e ímpares, consecutivos e múltiplos; T26: Indicar, por meio de expressões algébricas, o perímetro e a área de figuras planas ou sólidos geométricos (paralelepípedo); T27: Articular a noção de área com os casos de fatoração; T28: Aplicar fatorações sucessivas.

Como nos livros anteriores, o habitat da fatoração algébrica é o domínio do conjunto dos polinômios com coeficientes reais e seu nicho está associado à noção de operações com polinômios e algumas aplicações intramatemáticas.

Considerações finais

Ressaltamos que os PCN (BRASL, 1998) orientam que, nos currículos de Matemática dedicados ao Ensino Fundamental, devem-se considerar os blocos de "Números e Operações", "Espaço e Forma", "Grandezas e Medidas" e "Tratamento da Informação". Segundo o documento citado, no terceiro ciclo que corresponde atualmente ao 6º e 7º ano (alunos de 11 e 12 anos), os conceitos de múltiplo e divisor de um número natural, número primo, devem ser trabalhados como uma ampliação do campo multiplicativo e não como um novo conteúdo independente dos demais. Quanto ao m.m.c. e m.d.c., o documento enfatiza a importância de serem tratados por meio de situações-problemas, sem maior preocupação com as técnicas em detrimento da sua aplicação.

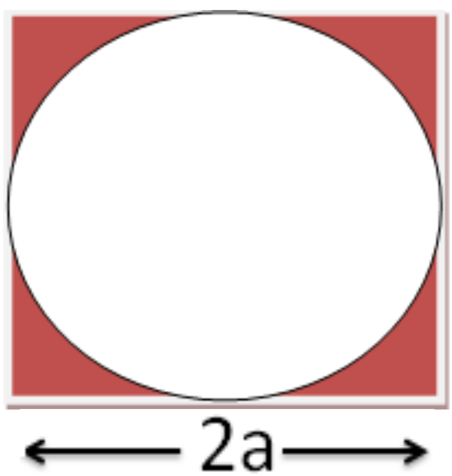
Observamos nas obras de Sangiorgi (1965) e Castrucci *et al*. (1976) que a presença das noções de m.m.c. e m.d.c. tinham por fim enfatizar as possíveis técnicas para a obtenção destes cálculos; desse modo, a primeira obra citada foi a mais rica em técnicas e um número reduzido de situações contextualizadas; em oposição, a segunda obra, mesmo representando um período do conhecido como tecnicista, apresenta poucas técnicas, dando ênfase apenas às mais básicas, o que mostra um empobrecimento do tratamento matemático.

Essa situação torna-se diferente na obra de Dante (2012), que segue as orientações dos PCN há vários anos e na qual encontramos a preocupação em propor situações de aplicação dos conceitos e noções matemáticas introduzidas. Salientamos ainda que o autor, mesmo apresentando as técnicas básicas, não se limita a elas, pois na sequência propõe situações "contextualizadas" envolvendo essas técnicas.

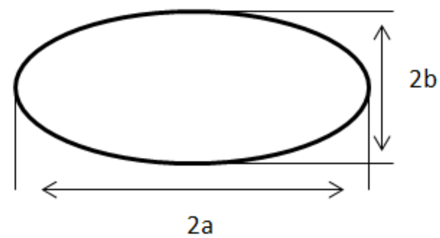
Para a fatoração algébrica, observamos que a mudança é restrita, que o domínio dos polinômios conduz a um tratamento algébrico que exige a apresentação dos novos objetos matemáticos e um trabalho de reconhecimento dos mesmos, acompanhado das técnicas de cálculo que os sustentam.

Em relação à contextualização, observamos que Sangiorgi (1966) utiliza o contexto matemático, Castrucci *et al*. (1976) não se preocupam com a contextualização e Dante (2012) dá ênfase a um contexto voltado para o cotidiano, que pode ser considerado mais como um pretexto que como contexto, como podemos observar na figura 1.

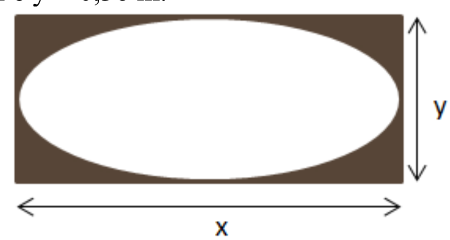
(SANGIORGI, 1966, p. 62) Escreva a expressão literal que representa a área da figura colorida.



(DANTE, 2012, p.50) A área de uma superfície cujo contorno é uma elipse é dada pela expressão πab, em que 2a e 2b são os comprimentos de seus eixos.



O marceneiro José colocou um espelho elíptico em uma região retangular de madeira na qual x = 60 cm e y = 0,36 m.



Responda (use $\pi = 3{,}14$):
a) Qual é a área do espelho?
b) Qual é a área da parte visível da madeira?

Figura 1: Tarefas das obras de Sangiorgi (1966) (à esquerda) e Dante (2012) (à direita).

Ao compararmos as obras das décadas de 1960 e 1970 e a obra da década atual, observamos um recuo na aplicação do m.d.c. ou m.m.c. para a resolução de expressões algébricas, visto que estas noções ficaram restritas ao 6º ano, associadas apenas ao conjunto dos números naturais, deixando assim a articulação entre fatoração numérica e algébrica por meio das noções de m.d.c. e m.m.c. para outra etapa escolar.

Referências bibliográficas

Brasil.(1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Secretaria de Educação Fundamental. Ensino de quinta a oitava séries. Brasília: MEC/SEF.

Chevallard, Y. (2007). *Le développement actuel de la TAD: Pistes et jalons*. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr Acesso em: 2 de abril de 2015

Chevallard, Y. (2002). *Organiser l'étude3: Ecologie e Régulation*. Acesso em 17 de março de 2016 de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=53

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes em théorie anthropologique du didactique. *Recherches em Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-266.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*12(1), 73-112.

Castrucci, B. *et al*. (1976). *Matemática*. (5ª série e 7ª série), São Paulo: FTD.

Dante, L. R. (2012). *Projeto Teláris: Matemática*. (6º e 8º ano), São Paulo: Ática.

Lages Lima, E.; *et al*. (2006). *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: IMPA.

Lüdke, M.; André, M.E.D.A. (2013). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

Sangiorgi, O. (1966). *Matemática Curso Moderno*. (Volume 3 para os ginásios), São Paulo: Editora Companhia Nacional.

Sangiorgi, O. (1965). *Matemática Curso Moderno*. (Volume 1 para os ginásios), São Paulo: Editora Companhia Nacional.

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

CREENCIAS Y PREJUICIOS DE PROFESORES EN NIVEL SECUNDARIA: DESEMPEÑO ACADÉMICO DE MUJERES EN MATEMÁTICAS

Govedela González Aguirre
Universidad Autónoma de Tamaulipas. (México)
govedela@hotmail.com

Resumen
La investigación se ha desarrollado en Ciudad Victoria Tamaulipas, México, en el nivel de secundaria. El objetivo de esta investigación es identificar creencias, prejuicios de los profesores de matemáticas y las diferenciaciones (simbólicas como explicitas) en torno a las mujeres. Se ha documentado la existencia de tratos diferenciados en función al sexo, atribuyendo discrepancias en el desarrollo, aprovechamiento y futura elección vocacional. La investigación es de corte cualitativo utilizando la etnografía como método. Este trabajo no tiene como finalidad hacer las matemáticas más sencillas para las mujeres, sino ayudar al logro de significaciones referentes a las matemáticas dentro del aula.

Palabras Claves: género, matemáticas, creencias, prejuicios, profesores

Abstract
This research has been developed in Victoria Tamaulipas city, Mexico, at high school level. It is aimed at identifying beliefs and prejudices of mathematics teachers and their differentiations (symbolic as well as explicit ones) towards women. Differentiated treatment has been documented with regards to sex, due to disagreement with respect to development, academic progress, and future vocational choice. This is a qualitative-style research that uses ethnography as method. This work is not intended to make mathematics easier for women, but to help in the achievement of the significations of mathematics in the classroom.

Key Words: gender, mathematics, beliefs, prejudices, teachers

Introducción

En Tamaulipas, México existen pocas investigaciones sobre las mujeres en el ámbito de Matemáticas como también, el impacto que deja el profesor a través de la interacción con sus alumnos y alumnas. De acuerdo con Espinosa (2010) citando a Li (1999) los profesores de matemáticas tienden a realizar distinciones por género, puesto a que animan principalmente a varones para que realicen problemas con mayor complejidad, mientras a las mujeres les asignan problemas comunes y rutinarias. Consideramos que los profesores algunas veces no son conscientes y no detectan una diferencia significativa en el desenvolvimiento de alumnos y alumnas en las clases de matemáticas, como también desconocen realizar diferenciaciones en el trato según el sexo. Mediante la toma de datos en nuestra investigación, surgieron inquietudes relevantes, el cual, se da conocer la existencia de discriminación hacia las mujeres de manera directa y simbólica en las clases de matemáticas. Por lo tanto, es de gran interés realizar estudios de investigación en este nivel educativo ya que los alumnos y alumnas empiezan a definir su futuro perfil profesional y comienza a marcarse fuertemente la brecha de género. Al realizar la investigación se creó interés en las interacciones de profesores con alumnos y alumnas, como también en el desempeño de las mujeres en las matemáticas. ¿Qué tipos de distinción están presentes en función del sexo? y ¿Cómo es el desenvolvimiento de las alumnas en las clases de matemáticas? Puesto que, consideramos que las formas en las que se relacionan docentes y dicentes pueden afectar o contribuir en el desempeño de las matemáticas, sirviendo así a los alumnos como referente en sus expectativas y futura elección vocacional.

Marco Teórico

La cultura es el medio por el cual un grupo determinado de personas comparten costumbres, tradiciones, conocimientos y significados. Según Rebollo (2001) la cultura es estable y en ella se reproducen significado de conocimiento y dominio. Dicha cultura se puede reconstruir por medio de las interacciones entre sus individuos, para la creación de nuevos significados. Después del hogar, la escuela es el segundo medio socializador en el cual se reproducen actitudes y acciones de los individuos.

Históricamente las matemáticas se han considerado de dominio masculino, las mujeres que deciden incursionar en estos ámbitos por lo general son discriminadas (Espinosa, 2010). El rol de la mujer en el currículo escolar es desvalorizado de manera explícita y simbólica, lo cual crea un impacto en las posteriores expectativas y aspiraciones de cada una. Esta discriminación en ocasiones es justificada bajo los roles de género los cuales normalizan las acciones y comportamientos de cada persona. De acuerdo con INMujeres (2007), el género es un conjunto de roles y conductas que son establecidas por la cultura, dichas actividades se esperan que se realicen según el sexo de la persona. Esta discriminación hacia las mujeres en matemáticas se defendía explícitamente por lo menos hasta finales de la segunda guerra mundial en los países occidentales y la eliminación de segregación por sexo, contribuyó a la discriminación explícita en el área de matemáticas, la cual, se produce de manera individual y colectiva, deliberada e inconsciente pues esta tejida en las costumbres y la tradición (Lamas, 1995).En Arrieta (1995) se menciona que, desde la segunda mitad del siglo XX, la unificación formal de los modelos escolares femeninos y masculinos es un hecho generalizado en el mundo occidental.

Metodología

Para esta investigación se utilizó el enfoque cualitativo, utilizando específicamente la etnografía, la cual, carga toda una historia de estudio de diferentes procesos y fenómenos sociales y es vista como el proceso de recolección de la "materia prima" (Rockwell, 1982). Se obtuvieron datos de análisis mediante grabadoras de audio y notas de campo. Se pretende identificar las diferencias existentes de alumnas y alumnos en las clases de matemáticas, como también, observar las creencias y prejuicios por parte de los profesores.

Es difícil diferenciar creencias de prejuicios, aunque pueden situarse a distintos niveles. Por creencias se entienden, aquellas cuestiones que se dan por ciertas sin estar comprobadas o demostradas y por prejuicio los juicios que se emiten sin fundamento o alejados de los justo o razonables, es decir, sin conocimiento previos (Ballarín, 2013).

Es fundamental dar a conocer que el intercambio de ideas y asimilación de significados se da principalmente durante el lenguaje oral (Cantoral y Reséndiz, 2003) para ello es de suma importancia el estudio del discurso oral en el aula, ya que, mediante su análisis, se da a conocer el gran significado del: *¿Qué y cómo? se dicen las cosas dentro del aula*, por ende, al realizar los contrastes del turno matutino y vespertino, los fragmentos de los audios se representaran de la siguiente manera, con la finalidad de tener un orden y coherencia al momento de plasmarlos en nuestro trabajo de investigación: *Pa (Profesora), Aa (Alumna), Ao (Alumno),* cuando se crea una interacción entre alumnas y alumnos se representara de la siguiente manera; *Aa1 (Alumna primera) Aa2 (Alumna segunda), Aa3 (Alumna tercera) … Ao1 (Alumno primero), Ao2 (Alumno Segundo) Ao3 (Alumno tercero), (…) conversación no definida.*

Se realizaron observaciones durante ocho sesiones en dos grupos de tercer grado de secundaria tanto en el turno Matutino como Vespertino. Cada una con duración de dos horas. Ambos grupos fueron dirigidos por profesoras y a la vez los grupos contaban con la particularidad de tener mayor población de mujeres que hombres. Las observaciones fueron grabadas con la autorización de las profesoras y director de la institución.

Los temas tratados fueron Teorema de Pitágoras y Volumen de figuras geométricas. Dichas observaciones se efectuaron en una secundaria en Ciudad Victoria Tamaulipas, México. La escuela se encuentra ubicada en la ciudad, la zona es conurbada y cuenta con todos los recursos a su disposición, es preciso destacar que la secundaria es una de las que cuenta con mayor prestigio y aprovechamiento no solo a nivel local si no a nivel estatal, es una de las secundarias públicas con mejores resultados en la prueba PLANEA (Mejora tu escuela, 2017).

■ Análisis de resultados

Al comparar los datos obtenidos de los dos grupos observados, se realizaron cinco categorías de análisis, las cuales se destacaron semejanzas y diferencias en el desenvolvimiento de las clases de matemáticas. Consiguiendo principalmente características similares.

Para identificar con claridad cada grupo se denominarán de la siguiente manera como: Grupo A (Matutino) y Grupo B (Vespertino).

1.- El número de intervenciones en clase es similar en el grupo A y grupo B, encontrando que en la mayoría de las veces las alumnas exteriorizan sus dudas con más frecuencia.
2.- A la hora de realizar ejercicios matemáticos, las alumnas del Grupo A y B eran las que terminaban con mayor rapidez las actividades, pero presentaban mayor número de errores en sus resultados. Los

varones al momento de realizar ejercicios matemáticos se mostraban pasivos, tomaban más tiempo en la resolución de su problema, pero acertaban en sus resultados.
3.- En los dos grupos se observó y se identificó que las alumnas se muestran más inquietas y suelen dialogar mucho, por lo que las profesoras suelen invertir mayor tiempo en ellas controlando su conducta.
4.- En el grupo A y el grupo B, las maestras realizan preguntas muy dirigidas, lo cual generan que el alumno, anticipe su respuesta, en algunos casos sin saber su significado.
5.- Las alumnas en los dos grupos observados, prestan más atención en las indicaciones que se les da, para realizar las actividades de clase.
En las siguientes categorías de análisis, se han obtenido discursos por parte de los profesores frente a grupo, en la cual, han emergido creencias y prejuicios arraigados, que son transmitidos hacia las alumnas y alumnos.
A continuación, se desglosan las categorías, basada en ejemplificaciones del discurso en el aula.

■ Categoría 1. Las alumnas exteriorizan sus dudas y preguntan con más frecuencia

Exteriorizan dudas

Al analizar las transcripciones se puede observar que las alumnas suelen ceder la iniciativa a sus compañeros varones. Tal es el caso de este fragmento:

> Pa: ¿Ahora si recibo los colores levantando la mano
> **la maestra empieza a enumerar a los alumnos**
> Pa: 1,2,3,4, 5 … los primeros 5 que vi me van a decir primero los colores… Geniss qué color va a elegir para tu equipo?
> Aa: ¿Qué color vas a querer Axel? (…)

En esta situación se observa que en este equipo había mayoría de mujeres, la maestra hizo una pregunta directa o específica a una alumna, la cual opto por ceder la iniciativa de elegir un color a su compañero varón. “Aa: ¿qué color vas a querer Axel?”.

Espinosa (2010 a), dan a conocer sobre “dominio masculino” el cual tiene como significado: como la transición hacia las mujeres de manera sutil, influyen en las decisiones para elegir cursos y ciertas carreras que involucran a las matemáticas.

Como lo menciona Prado (2013), en su entrevista con Patricia Piñones, los hombres y las mujeres no tenemos que rivalizar y competir, sino construir la igualdad en oportunidades, en trato, y en el acceso y control de los recursos; El género, lo femenino y masculino, los ordenamientos sociales de cómo nos tenemos que comportar, pensar y sentir los hombres y las mujeres, se aprenden no sólo en casa, sino también en las escuelas, desde preescolar hasta el nivel superior.

Pero, en el aula ya mencionada es notable que las alumnas frecuentemente se basan más en sus compañeros varones para realizar este proceso de andamio. Las alumnas no suelen preguntar a sus compañeras del mismo sexo, a raíz de ello, responden reiteradamente con asentamientos como; “ya entendí”, “según yo, ya entendí”, “lo bueno es que ya estoy entendiendo”, posiblemente las afirmaciones las hacían por inseguridad o por miedo a demostrar que no habían comprendido del todo la actividad. Es interesante que en una parte algunas alumnas saben cómo realizar una operación, pero aun así les pregunta a sus compañeros si el procedimiento es correcto.

Preguntan con más frecuencia

Al observas nos damos cuenta de que las mujeres realizan más preguntas hacia su maestra, suelen tener mayores dudas sobre lo que sigue de la actividad, como también requieren mayor información para realizar sus actividades.

> Pa: Bueno chicos primero que nada… (la interrumpen) bueno ya tranquilos (bueno Necesito que cada quien tenga su cuaderno a la mano de matemáticas
> Aa: ¿Va hacer actividad de participación?
> Pa: Si preparen un color o un lápiz y pegan esta hoja
> Aa: ¿Maestra tiene que ir pegada la hoja?
> Pa: A ver miren (…)
> Aa: ¿Tenemos que colorear?
> Ao: Se ve bien difícil muestra (…)

Al estar buscando sobre la conducta y la interacción de alumnos y alumnas, nos damos cuenta que en la región de Ciudad Victoria Tamaulipas México, existe una controversia o bien características peculiares que son diferentes a lo que se hablan en otros lugares. Nos referimos a ¿Cómo es la alumna dentro del aula? Tal lo menciona Espinoza y Taut (2016), citando a Becker, 1981; Brophy & Good, 1974; Dickman, 1993; Howe, 1997; Sadker, et al. 1991) se constata que los alumnos dominan las discusiones en el aula, ya que suelen responder las preguntas de los docentes con mayor frecuencia. Pero al observar y realizar anotaciones, las alumnas, suelen dialogar más, dan a conocer sus dudas, se muestran mayoritariamente más activas, suelen expresarse más frecuentemente en la clase de matemáticas mientras que los alumnos son más pasivos, no exponen sus dudas. Consideramos que podría ser una variable de cambio en la región de Tamaulipas, ya sea de índole sociocultural.

■ Categoría 2. Las alumnas suelen trabajar con mayor rapidez, pero suelen equivocarse más

Las alumnas de los dos grupos observados solían terminar con mayor rapidez las actividades, pero presentaban mayor número de errores en sus resultados. Los varones al momento de realizar ejercicios matemáticos se mostraban pasivos, tomaban más tiempo en la resolución de su problema, pero acertaban en sus resultados. Observamos que las mujeres no pueden trabajar bajo presión, la profesora no les permite mirar el problema desde todas las aristas, se ve que no están acostumbradas a competir con sus demás compañeros ni compañeras, generando así algunas desventajas hacia los compañeros varones. Tal menciona Claudia Espinosa (2010 b) estas situaciones generan desconfianza en las mujeres sobre sus propia habilidades y desempeños, y con ellos se promueven surgimiento de variables que pueden intervenir en aspectos.

> (…)
> Aa1: ¡Ay ya seeee! (se muestra emocionada)
> Aa2: Ay! no maestra yo ya no le entiendo
> Aa3: ¡Nombre maestra! ya!!
> Ao: ¡Ay ! no maestra... (con voz de frustración)

> Pa: aún faltan 3 de revisar (se levantan a revisar rápido tres restantes) ¡Listo! ya todo está listo.
> Aos: ¡Por favor maestra, espere unos minutos más!

Las mujeres realizaban los trabajos con rapidez y no acertaban en la primera revisión, consecuencia de ellos, eran la falta de procedimientos y de fórmulas. Suelen intentar máximo tres veces, necesitan la opinión de la maestra para seguir avanzando, se frustran más rápido y ya no siguen más en su trabajo, dicen palabras como: "No puedo" "No le entiendo". Por otro lado, se tiene la observación de los varones, que duraban en hacer sus trabajos, analizaban detalladamente sus procedimientos y al momento de revisar su trabajo, acertaban a la primera.

Categoría 3. La maestra invierte más tiempo en las mujeres controlando la conducta

En los dos grupos se encontró la característica de que las profesoras invierten mayor tiempo en la resolución de preguntas generadas por alumnas. Como menciona Espinoza y Taut (2016) al analizar los resultados muestran que en las clases de docentes de género femenino las frecuencias de variables negativas son mayores para los alumnos varones, mientras que clases de docentes varones son menores.

> Pa: A ver, no los puse en equipo para que estén platicando, deben de estar trabajando, recorten la hoja y péguenla, estos son problemas de aplicación, para que vean en donde lo vamos a aplicar y en donde nos va a servir.
> As: (…)
> Pa: Rapidito porque voy a querer la participación de los equipos.
> As:(…)
> Pa: Orale mija ponte a trabajar, pónganse a trabajar.
> As:(…)
> Pa: Rapidito…

Al observa la interacción de la maestra, se puede ver que al momento de contestar preguntas de sus alumnas y alumnos suele ser igualitaria, aunque el hecho de conducta suele regañar a las mujeres, ya que dialogan más en clase. En este caso, la maestra suele inclinarse más hacia los alumnos, les muestra seguridad y más atención a lo que dicen. Tal lo mencionan Espinoza y Taut (2016) citando a los autores Eccles, 1989; Jussim & Eccles, 1992; Li, 1999; Tiedemann, 2002; a través de lo observado, se ha encontrado que los profesores poseen expectativas de aprendizaje en matemática diferenciadas según género, las cuales son concordantes con los estereotipos de género dominantes en la sociedad, a saber, que las mujeres tienen bajas probabilidades de ser hábiles en matemática.

Categoría 4. Preguntas específicas de profesoras

Se destaca que las profesoras realizan preguntas dirigidas, las cuales los alumnos y las alumnas ya sabe la respuesta con anterioridad, o generan los resultados al tanteo, sin necesidad de realizar un análisis de su resultado o entender el ¿Por qué? Del resultado.

> Pa: Vamos a localizar cuál es el cateto opuesto y, ¿cuál es el cateto? …
> Ao: Adyacente.
> Pa: Adyacente. ¿Cuál sería ahí el cateto opuesto?

Ao: La altura
Pa: La altura. ¿Y este sería el cateto?
Aos: Opuesto.

Como mencionan Suárez; Tuero; Bernardo; Fernández; Cerezo; González; Rosário y Núñez (2011) citando a Moreno y Waldegg (1992): desde perspectivas constructivistas, las ideas que tenga un profesor sobre las matemáticas determinaran en gran medida, la forma en la que se enseñara frente a clase. Por tanto, si se quieren cambios significativos es fundamental, autoevaluarnos como maestros y buscar estrategias para poder impartir clases en donde los alumnos participen, generen preguntas entre ellos, que encuentren las respuestas sin necesidad de encaminarlos a un resultado fácil.

Categoria5. Las mujeres prestan más atención en las indicaciones

Se observa que en las dos aulas se utiliza con frecuencia las tecnologías, los alumnos y alumnas realizan videos, en donde exponen diferentes temas. Tal aluden Sánchez y Ursini (2010), los estudiantes que emplean las tecnologías muestran rendimientos ligeramente más alto, las diferencias inter-grado no resultaron estadísticamente significativas. Los resultados, no indicaron que las tecnologías promueven una actitud más positiva hacia las matemáticas. Por consiguiente, al observar las actitudes de los alumnos y alumnas dentro del aula, las mujeres son más visuales, realizan anotaciones cuando se les da una formula y son rápidas realizando las indicaciones que se les da, los hombres, suelen no poner tanta atención en realizar anotaciones, y las indicaciones que se les dan no las hacen a la brevedad.

Conclusión

Es importante señalar que este trabajo no es con el fin de hacer las matemáticas más sencillas para las mujeres, si no, contribuir al logro de crear diferentes significados hacia las matemáticas por parte de mujeres y varones, y así, concientizar sobre las grandes brechas de desigualdad que aún existen tanto en nivel regional como mundial. Las ideas de este trabajo es evidenciar la discriminación que están presentes dentro del aula en nivel secundaria. Nuestros objetivos en ningún momento son para plantear maneras ideales de cómo enseñar matemáticas, ya que cada contexto es diferente y no se puede generalizar las prácticas docentes, ya que no funcionarían de la misma manera.
El rol actual del docente es ser mediador y facilitador de conocimientos, pero también tiene otro papel determinante en la formación de los estudiantes, ya que su práctica puede contribuir a incentivar o bien desanimar el interés por las matemáticas, y así crear futuras expectativas de los alumnos y alumnas, e incluso jugar un papel determinante en sus futuras aspiraciones y elecciones vocacionales.
Es de suma importancia realizar investigaciones en las cuales se analice el cómo y el que se hace en el aula. Puesto que, aún sigue existiendo gran discriminación dentro de las instituciones por motivos de género, tanto por profesores y entre los mismos estudiantes. Este tipo de actos están normalizados por la sociedad y obliga tanto a hombres como mujeres seguir reproduciendo creencias y concepciones. Consideramos que el primer paso para tener una mayor equidad es concientizar a las personas sobre la realidad en la que se vive.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (1995). La discriminación positiva hacia las chicas en las aulas de matemáticas ¿debe conducir a su segregación? *Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*. 2*(20),* 19-27.

Ballarín, P. (2013). Docencia universitaria y conocimiento en torno al género. Resistencias, creencias y prejuicios. *Revistas Universidad de León*. (8),89-106

Cantoral, R., y Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6(2),* 133-154.

Espinosa, C. (2010 a). Diferencias entre hombres y mujeres en educación matemática: ¿Qué pasa en México? *Investigación y Ciencia 18(46),* 28-35.

Espinosa, C. (2010 b). Estudio de las interacciones en el aula desde una perspectiva de género. *Revista de investigación y divulgación sobre los estudios de género*. 16(6) ,71-81.

Espinoza, A y Taut, S. (2016). El Rol del Género en las Interacciones Pedagógicas de Aulas de Matemática Chilenas, *Psykhe 25(2),* 1-18.

INMujeres. (2007). *El impacto de los estereotipos y los roles de género en México*. Recuperado el 13 de diciembre del 2016 de http://cedoc.inmujeres.gob.mx/documentos_download/100893.pdf

Lamas M. (1996). *La perspectiva de género.* La tarea, 8 (1). Recuperado el 15 de enero del 2017 de http://www.latarea.com.mx/articu/articu8/lamas8.htm

Mejora tu escuela (2017). Recuperado el 25 de julio del 2017 de http://www.mejoratuescuela.org/escuelas/index/28DST0001N

Prado, C. (2013). *Construyamos la igualdad de género en el salón de clases.* Recuperado el 27 de junio del 2017 de http://www.revistas.unam.mx/index.php/eutopia/article/viewFile/42260/38417

Rebollo, M. (2001). *Discurso y educación.* Sevilla: Mergablum, Educación y Comunicación**.**

Rockwell, E. (1982). "Etnografía y teoría en la investigación educativa", *Documentos DIE*, México: Departamento de Investigaciones Educativas-CINVESTAV

Sánchez, J. y Ursini, S. (2010). Actitudes hacia las matemáticas y matemáticas con tecnología: estudios de género con estudiantes de secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13(4),* 303-318.

Suárez, N., Tuero, E., Bernardo, A., Fernández, E., Cerezo, R., González, J., Rosário, P. y Núñez, J (2011). El fracaso escolar en Educación Secundaria: *Análisis del papel de la implicación familiar*. Universidad de Oviedo. *Revista de Formación del Profesorado e Investigación Educativa* s/n.

EL LEGADO DE LAS MATEMÁTICAS MAYAS Y LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Eduardo A. Navas L., Mirna G. Galdámez C.
Universidad de El Salvador. (El Salvador)
eduardo.navas@ues.edu.sv, mirna.galdamez@ues.edu.sv

Resumen
El presente artículo ofrece un acercamiento al concepto de cero como invención o descubrimiento de la civilización maya en comparación con otras culturas importantes. Con esto se espera identificar el sistema de numeración maya y su aritmética como elementos esenciales en la enseñanza matemática de los salvadoreños. Un análisis sobre la inclusión de este tópico en los programas de estudio en la región centroamericana permite reconocerlo como un elemento importante de identidad cultural.

Palabras clave: matemática maya, aritmética, identidad cultural

Abstract
This article offers an approach to the concept of zero as an invention or discovery of the Maya civilization compared to other important cultures. We expect it allows identifying the Mayan numeral system and its arithmetic as essential elements in Salvadorians' mathematics teaching. An analysis on the inclusion of this topic in the curriculum in the Central American region allows its recognition as an important element on cultural identity.

Keywords: maya mathematics, arithmetic, cultural identity

Introducción

La civilización maya es una de las grandes civilizaciones que conoció la humanidad, llegando a comprender muchos aspectos de la esfera celeste (Tonda y Noreña, 1991), construir grandes ciudades de miles de habitantes, etc. Su matemática es la más avanzada desarrollada en América (Ifrah, 1997), y una de las más avanzadas del mundo antiguo (Calderón, 1966). La influencia de sus conocimientos matemáticos y astronómicos perduró más allá de la civilización misma, siendo la utilizada por los aztecas varios siglos después, y se siguió utilizando hasta la época de la colonia (Landa, 1938). En mesoamérica, la población es mayoritariamente mestiza de ascendencia nahua-pipil, por lo que se trata de la cultura de los ancestros de casi todos los salvadoreños y mesoamericanos.

A pesar de la gran importancia de la civilización maya y lo avanzada que es su matemática y astronomía, su legado matemático no permea la sociedad salvadoreña actual. Su numeración, su calendario, su cosmovisión y sus lenguas son desconocidas en la vida cotidiana salvadoreña.

Es por eso que los autores se dispusieron a tratar el tema del cero como ejemplo de lo avanzada que es la matemática maya con la esperanza de que este artículo abone en el rescate de la cultura ancestral. Este texto está dirigido a un público general con conocimientos básicos de aritmética, especialmente aquellos en el área de la enseñanza que puedan tener una injerencia en la adhesión de este tópico en los programas oficiales de educación nacional.

Existen algunos textos de enseñanza de la lengua Nawat (ver King, 2011) que incluye la enseñanza de los números de uno al diez, pero no avanza en el sistema numérico ni en las operaciones aritméticas.

El cero como adelanto tecnológico

Hubo muchas civilizaciones que lograron grandes avances científico-tecnológicos en áreas como astronomía e ingeniería. Algunas de ellas son las civilizaciones china, sumeria, india, griega, romana, inca, etc. Sin embargo, no todas ellas lograron la conceptualización y uso completo del número cero (Ifrah, 1997). Este adelanto en la abstracción humana no es necesario para construir acueductos, fortalezas, ciudades o puentes, como podemos apreciar de la cultura griega o de la romana (Ifrah, 1997). Pero sí es necesario para discurrir sobre cantidades arbitrariamente grandes y arbitrariamente pequeñas, tal como cuenta Seife (1996).

La invención o descubrimiento del cero se dio de forma independiente en diferentes partes del mundo. Las más antiguas pruebas arqueológicas de la escritura del cero en un sistema de numeración posicional datan de 683 d.C. en lo que hoy es Camboya (Akzel, 2014), y del 36 a.C en lo que hoy es Chiapas, México (Tonda y Noreña, 1991), durante el período Preclásico tardío (que va desde el 100 a.C hasta el 250 d.C. (Estrada-Belli, 2011)) de la civilización maya.

El hecho de tener un sistema de numeración que incluya el concepto del cero permite (aunque no implica) que sea un sistema de numeración posicional, en el que existe un conjunto finito de símbolos, que debe incluir al cero, con el que se puede escribir cualquier cantidad arbitrariamente grande. Y si además incluye el concepto de números fraccionarios, también se puede escribir cantidades arbitrariamente pequeñas (Ifrah, 1997).

El cero en las operaciones de suma y resta en notación maya

Las reglas para la suma y la resta en notación maya son sólo tres (Calderón, 1966):

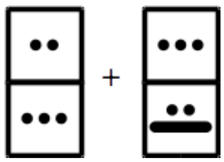
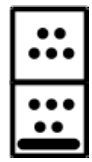
1. Se operan los elementos del mismo nivel entre sí

2. Cinco puntos equivalen a una raya en el mismo nivel

3. Cuatro rayas equivalen a un punto del nivel superior

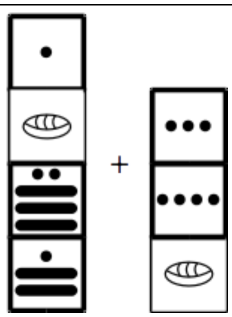
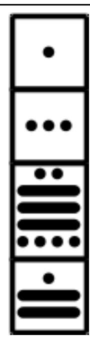
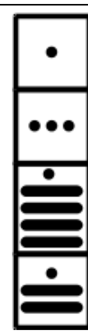
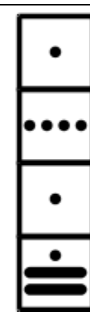
A continuación se presenta unos ejemplos tomados de Morales (2007) de cómo se realizaban las operaciones de suma y resta en notación maya:

Ejemplo 1

Súmese *ume pual yey* con *yey pual chikume* (2x20 + 3 con 3x20 + 7):	Se procede a «sumar» los elementos de cada nivel, según la regla 1:	Luego se aplica la regla 2:
		

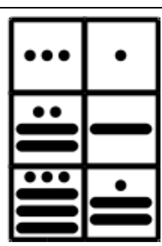
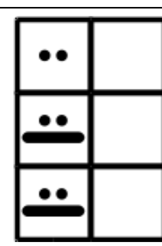
Resultando *makwil pual majtakti* (5x20 + 10).

Ejemplo 2

Súmese *sen shikipil kashtul ume pual majtakti se* (1x20^3 + 17x20 + 11) con *yey tzunte nawi pual* (3x20^2 + 4x20):	Se aplica la regla 1:	Luego se aplica la regla 2:	Y luego la regla 3:
			

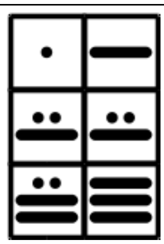
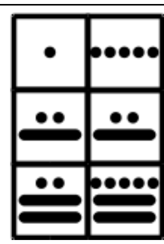
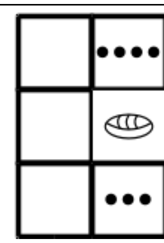
Resultando *sen shikipil nawi tzunte sen pual majtakti se* (1x20^3 + 4x20^2 + 1x20 + 11).

Ejemplo 3

De *yey tzunte majtakti ume pual kashtul yey* (3x20^2 + 12x20 + 18) sustráigase *sen tzunte makwil pual majtakti se* (1x20^2 + 5x20 + 11):	Ahora se procede exactamente como con la analogía de una balanza en cada nivel, quitando los mismos elementos de cada lado hasta que en una columna no quede nada (*tatka*):
	

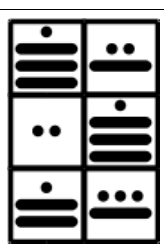
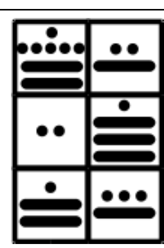
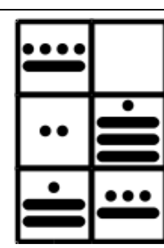
Resultando *ume tzunte chikume pual chikume* (2x20^2 + 7x20 + 7).

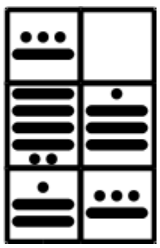
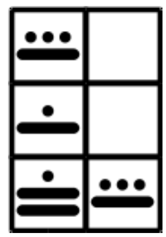
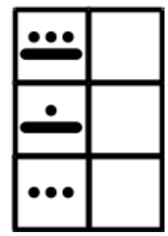
Ejemplo 4

De *sen tzunte chikume pual majtakti ume* (1x20^2 + 7x20 + 12) sustráigase *makwil tzunte chikume pual kashtul* (5x20^2 + 7x20 + 15):	En este caso la cantidad sustraendo es mayor que la cantidad minuendo, por lo que se espera que al quitar elementos de ambos lados, se acabarán primero del lado izquierdo, quedando la diferencia del lado derecho. Esto significa que la diferencia es negativa. Se aplica la regla 2 para el primer nivel (*sejse*, unidades) y tercer nivel (*tzujtzunte*, octomillares):	Ahora se retiran elementos iguales de ambos lados hasta dejar el lado izquierdo vacío:
		

Quedando *nawi tzunte yey* (4x20^2 + 3), pero negativo.

Ejemplo 5

De *kashtul se tzunte ume pual majtakti se* (16x20^2 + 2x20 + 11) sustráigase *chikume tzunte kashtul se pual chikwey* (7x20^2 + 16x20 + 8):	En este caso el resultado será positivo, por lo que se desea eliminar los elementos del lado derecho. Se aplica la regla 2 en el tercer nivel (*tzujtzunte*, octomillar):	Se aplica la regla 1, sustrayendo las mismas cantidades de ambos lados en el tercer nivel:
		
Ahora en el segundo nivel	Ahora se sustraen los mismos	Y finalmente se retira la

(*pujpual*, vigésimos), a *ume* (2) no se le puede restar directamente *kashtul se* (16). Por ello, aplicando la tercera regla, del tercer nivel se toma una unidad y se convierte en cuatro barras en el segundo:	elementos del segundo nivel:	misma cantidad de elementos del primer nivel (previamente a aplicar la regla 2):
		

Resultando *chikwey tzunte chikwasen pual yey* (8x20^2 + 6x20 + 3).

La numeración maya en el programa de estudio de educación básica en la región centroamericana

La civilización maya es parte de un grupo selecto de culturas reconocidas por la invaluable hazaña de incluir el cero dentro su sistema numérico. Sin embargo, los números romanos y arábigos se han apropiado casi por completo de la enseñanza matemática inicial en los sistemas educativos de Centroamérica, especialmente El Salvador.

Aunque geográficamente Guatemala se encuentra a escasos cientos de kilómetros de El Salvador, la importancia en la cultura y matemática maya los separa años luz. Los niños guatemaltecos aprenden sobre el sistema de numeración maya desde el primer grado de educación básica. Aquí inician reconociendo los símbolos de este sistema vigesimal e identifican relaciones de orden entre los números mayas. Además, aprenden a contar en maya. A partir del segundo grado trabajan de forma sistemática las operaciones de suma y resta. Cada año agregan una cifra a los números que operan. Además, cada año incrementan la cantidad de números a identificar en el sistema maya por una potencia de 10. En quinto grado ya aspiran conocer hasta el 999,999. En grados posteriores interpretan polígonos regulares e irregulares presentes en la cultura maya, se ven inmersos en la multiplicación y la división. Al finalizar el noveno grado los jóvenes guatemaltecos ya saben calcular fechas con el calendario maya y en bachillerato reconocen patrones del mismo (MINEDUC, 2012).

En Honduras, conocer el sistema de numeración maya y su calendario es un eje transversal a la educación matemática. Según los planes de estudio oficiales de este país, los estudiantes deben conocer el sistema de numeración maya, el calendario maya e incluso asociar figuras geométricas a las construcciones mayas (SE, 2004). Las operaciones aritméticas en el sistema maya no están contempladas. En contraste, en Costa Rica se busca el «fortalecimiento de la multiculturalidad… por aproximaciones culturales a conceptos matemáticos colocándolos en contextos históricos» (MEP, 2015 pág 64). El propósito de esta aproximación cultural es la de cultivar una visión panorámica de las ciencias y la cultura por medio del estudio de los aportes matemáticos de civilizaciones como la china, india y maya.

Este análisis geográfico de la importancia del sistema numérico de los ancestros mayas viene en total detrimento al acercarnos a El Salvador, Nicaragua y Panamá. Los planes de estudio de Nicaragua no reflejan un indicio que las aportaciones matemáticas de los mayas sean presentadas en las aulas (MINED, 2010). Similarmente, los profesores panameños no reconocen como labor oficial el mostrar el cero de los mayas a sus alumnos (MEDUCA, 2014). Igual suerte corren los estudiantes de El Salvador. En los planes de estudio de este país prevalece la ausencia del legado matemático que dejaron los mayas (MINED, 2008).

Ahora surge la pregunta ¿qué relevancia tiene para los jóvenes salvadoreños el conocer sobre el sistema de numeración maya? En un análisis sobre las obras «Pedagogía de la autonomía» y «Cartas a quien pretende enseñar» de Agudelo (2008) se establece que «los educandos y educadores […] deben abogar por el reconocimiento de su autonomía como sujetos, como seres sociales e históricos». Esto supone conocerse y reconocer que cada individuo trae consigo una herencia social, histórica y cultural y por tanto su educación no puede estar carente de los aportes de sus ancestros.

Desde pequeños, los estudiantes aprenden a reconocer y admirar las invenciones y descubrimientos de personajes ajenos a su cultura: Cristóbal Colón y el descubrimiento de América, Shakespeare y su «Romeo y Julieta», Darwin y la evolución. Sin embargo, un hallazgo como el uso del cero en un sistema posicional en la matemática maya pasa de largo las aulas cuscatlecas. Es importante reconocer que «enseñar exige el reconocimiento y la asunción de la identidad cultural» (Freire, 1998).

Ciertamente no se trata de sustituir los números arábigos por los mayas. La intención no es la de dotar a los salvadoreños de un nuevo sistema numérico que les impida comprender y comunicar resultados con el resto del mundo.

Finalmente como apoyo adicional a la enseñanza de los números y aritmética maya, deberían introducirse juegos de conversión. Como se sabe de otras investigaciones referidas por Fernández-López (2014), entre algunos beneficios, los juegos ayudan al alumnado a desarrollar su capacidad lógica y pensamiento lateral. Además, mediante el juego se pueden crear situaciones de máximo valor educativo y cognitivo que permitan experimentar, investigar, resolver problemas, descubrir y reflexionar (Muñiz-Rodríguez, 2014).

Así que se propone un juego tipo dominó en el que las piezas tengan una parte en notación decimal indo-arábiga y la otra en vigesimal maya (ver Figura 1). Este dominó tendría el mismo propósito de contribuir al logro de la habilidad de convertir expresiones entre diferentes registros semióticos como el de Fernández-López (2014) que es para aprender a convertir medidas de volumen en diferentes unidades, o como el de Muñiz-Rodríguez (2014) que es un dominó de ángulos con el valor numérico en un extremo y con una representación gráfica en el otro.

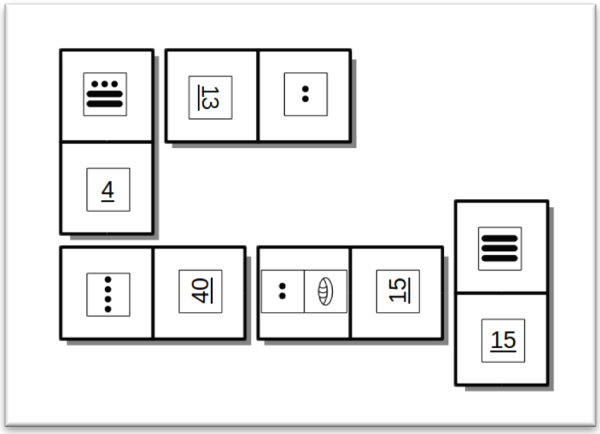


Figura 1: Ejemplo de fichas de juego de dominó con conversión vigesimal maya y decimal indo-arábigo

Conclusiones

La invención de un sistema vigesimal posicional y su aritmética identifica a los mayas como una civilización cuyos avances matemáticos son comparables a los de otras civilizaciones más prósperas y reconocidas.

El programa de estudios oficial del Ministerio de Educación de El Salvador debería incluir la enseñanza del sistema de numeración maya para fortalecer la identidad cultural de las nuevas generaciones de salvadoreños.

El fortalecimiento de la identidad cultural no implica un sentido de superioridad sobre otras culturas o civilizaciones, simplemente una apropiación y reconocimiento de las aportaciones de nuestros pueblos.

Una introducción lúdica al sistema de numeración maya puede resultar útil para introducir estos temas en las aulas salvadoreñas. Además, la representación geométrica de la arquitectura maya se presta de forma natural como ejemplo en los cursos de matemática como lo muestra Morales (2007, cap. 2).

Sería muy interesante explorar a fondo los documentos guatemaltecos y mexicanos y realizar versiones para El Salvador en lengua Nawat.

Referencias bibliográficas

Aczel A. (2014). The Origin of the Number Zero. *Smithsonian Magazine*. Recuperado de http://www.smithsonianmag.com/history/origin-number-zero-180953392/

Agudelo Cely, N; Estupiñán Quiñones, N; (2008). Identidad cultural y educación en Paulo Freire: reflexiones en torno a estos conceptos. *Revista Historia de la Educación Latinoamericana*, (núm. 10) pp. 25-40. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=86901003

Calderón, H. M. (1966). *La Ciencia Matemática de los Mayas*, México: Editorial Orión

Estrada-Belli, F. (2011). *The First Maya Civilization: Ritual and Power Before the Classic Period*. Londres: Routledge. ISBN-13: 978-0415429948.

Fernández-López, M. (2014). El juego y las matemáticas. Tésis de Maestría no publicada, Universidad de La Rioja. España.

Freire, P (1998): *Pedagogía de la autonomía.* Segunda edición, México: siglo XXI editores.

Ifrah G. (1997). *Historia universal de las cifras - La inteligencia de la humanidad contada por los números y el cálculo*. Madrid : Espasa. ISBN: 84-239-9730-8.

King, A. (2011). Timumachtikan! - Curso de lengua náhuat para principiantes adultos. Recuperado de http://tushik.org/timumachtikan/

Landa, F. D. (1938) *Relación de las cosas de Yucatán*, México: Editorial Pedro Robredo.

Ministerio de Educación de El Salvador MINED. (2008). *Programas de Estudio*. Recuperado de https://www.mined.gob.sv/index.php/2015-05-12-15-21-32

Ministerio de Educación de Guatemala MINEDUC. (2012). *Programas de Estudio.* Recuperado de http://cnbguatemala.org/index.php?title=Bienvenidos_al_Curr%C3%ADculum_Nacional_Base

Ministerio de Educación de Nicaragua MINED. (2010). *Programas de Estudio* (pp.64)*.* Recuperado de http://www.nicaraguaeduca.edu.ni/principal/articulos/628-ultimas/907-curriculonacionalnicaragua

Ministerio de Educación de Panamá MEDUCA. (2014). *Programa Curricular de Matemática.* Recuperado de http://www.educapanama.edu.pa/?q=planes-y-programas-de-estudios

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica MEP (2015). *Programas de Estudio de Matemáticas.* Recuperado de http://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

Morales Aldana, L. (2007). *Material de Capacitación sobre Matemática Maya y Estándares Educativos Nacionales*, Programa Estándares e Investigación Educativa. Guatemala: USAID. Recuperado de http://pdf.usaid.gov/pdf_docs/Pnadq529.pdf

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P., & Rodríguez-Muñiz, L. J. (2014). El uso de los juegos como recurso didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas: estudio de una experiencia innovadora. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, 39, 19-33.

Secretaría de Educación de Honduras SE. (2004). *Diseño Curricular Nacional para la Educación Básica*. Recuperado de http://www.se.gob.hn/seduc/basica_descargas/

Seife, C (2006): *Cero, La biografía de una idea peligrosa*. EllagoEdiciones-Colección Las Islas. ISBN 9788495881991

Tonda J. y Noreña F. (1991). *Los señores del cero*. México D.F.: Pangea Editores. ISBN: 968-6177-40-X.

UN MODELO DE ACERCAMIENTO LOCAL Y GLOBAL DE LA DERIVADA EN PRO DE SUPERAR EL OBSTÁCULO DE SU COMPRENSIÓN

Irma Pinto-Rojas, Marcela Parraguez
Universidad Católica del Norte, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
ipinto@ucn.cl, marcela.parraguez@pucv.cl
gallardoromero@uma.es, veronicaquintanilla@uma.es

Resumen
Este estudio es parte de una investigación cuyo objetivo es validar un modelo de comprensión de la derivada para estudiantes universitarios. Desde una extensión del marco teórico–Los Modos de Pensamiento– de Sierpinska y de un análisis histórico y epistemológico de la derivada se identificaron los obstáculos a superar para la comprensión profunda desde un acercamiento local y global de la derivada. Con base en esto último, se sustentan los fundamentos para definir las componentes del modelo –Los modos de pensar la derivada–, para la comprensión profunda, resultando de la interacción de los modos, para un acercamiento local, los modos: Sintético-Geométrico-Convergente (SGC), Analítico-Operacional (AO) y Analítico-Estructural (AE), y para un acercamiento global, los modos: Sintético-Geométrico (SG), Analítico-Operacional (AO) y Analítico-Estructural (AE), de la derivada.

Palabras clave: comprensión, derivada, modos de pensamiento

Abstract
This study is part of a research which is aimed at validating a model for university students' understanding of the derivative. From an extension of the theoretical framework 'Sierpinska's modes of thinking', and from a historical and epistemological analysis of the derivative, we identified the obstacles to overcome for a deep understanding of the derivative from a local and global approach. This is the basis that supports the research foundation to define the components of the model 'The modes of thinking' for the deep understanding of the derivative; resulting from the interaction of the modes, for a local approach: the Synthetic – Geometrical – Convergent (SGC), Analytic-Operational (AO) and Analytic – Structural (AS) modes, and for a global approach: the Synthetic – Geometrical (SG), Analytic – Operational (AO) and Analytic – Structural (AS), modes of thinking the derivative.

Key words: understanding, derivative, modes of thinking

Introducción

El desarrollo histórico de la matemática devela hitos importantes para describir el desarrollo del cálculo diferencial y su epistemología una necesidad para poder conocer los procesos por los cuales el concepto evoluciona y se formaliza. La derivada en la matemática es un concepto complejo, que se va abstrayendo de su origen para conformar un conocimiento universal, despersonalizado y atemporal, (Bourbaki, 1972), en este proceso se han incorporado notaciones y símbolos para simplificar problemas y dar respuestas más sencillas, sin embargo en la enseñanza y aprendizaje de la derivada se establece un conjunto de notaciones y símbolos para después ser aplicados, sin dar espacio a una interpretación de estos elementos, hecho que provoca múltiples dificultades en la comprensión por parte de los estudiantes, debido a que se favorece el desarrollo de habilidades para memorizar fórmulas, procesos algebraicos y algoritmos que van en desmedro de una comprensión profunda del concepto (Kiney, 2016). Además, Sfard (1991), señala la doble naturaleza de la derivada, se usa y se aplica, por un lado su carácter operacional (uso de algoritmos o procedimientos), y otro que lo trasciende, que llama estructural (el concepto se entiende como una idea o propiedad más general), que deja de manifiesto su complejidad teórica.

Distintas líneas de investigación en Didáctica de la Matemática reportan desde diferentes enfoques (Tall, 1986; Lang, 1999), la existencia de problemas en el aprendizaje y la comprensión de la derivada, sin embargo no está explícito cómo abordar la superación de las dificultades en la comprensión profunda del concepto. También se manifiesta la existencia de un carácter local y global de la derivada. Se debe precisar desde el punto de vista matemático que el aspecto local de la derivada está referido a la consideración del entorno de un punto específico, como una vecindad de este punto en la curva, y en lo global es de interés una vecindad del punto específico suficientemente grande como el dominio de la función.

De acuerdo con Sanchez-Matamoros, García y Llinares (2008), en Matemática Educativa se abren caminos para investigar la relación entre los aspectos local y global de la derivada desde una perspectiva cognitiva, tal relación podría ser determinante en la superación de las dificultades que los estudiantes presentan para comprender la derivada. Badillo, Azcárate y Font (2011) muestran desde el enfoque Ontosemiótico (EOS) la complejidad semiótica de las actividades relacionadas con la derivada en un punto y la función derivada (aspecto local y global), planteando la relación como el resultado de la conexión entre tres objetos: la pendiente de la recta tangente, el límite de las tasas medias de variación y la razón de cambio.

Badillo, Azcárate y Font (2011) entre sus resultados sugieren que se deben diseñar actividades para el aula que relacionen estos tres objetos, sin embargo no queda claro si las estrategia permiten la superación del problema en torno a la comprensión y no existe evidencia suficiente que asimilar una concepción local sea un prerrequisito para comprender la concepción global (Heugl, 1999). Desde el punto de vista de la cognición es posible la existencia de una relación dialéctica entre estos dos aspectos, con alternancia y reforzamiento mutuo entre lo local y global (Duval 1998), situación que esta investigación busca responder desde una extensión de –Los Modos de Pensamiento– de Sierpinska (2000) hacia el Cálculo Diferencial, con el objetivo de identificar los obstáculos epistemológicos que deben ser superados, con una interpretación del pensamiento práctico y haciendo explícito el pensamiento teórico en –Los modos de pensar la derivada–, para la superación de los obstáculos epistemológicos en pro de favorecer la comprensión profunda de la derivada, tanto en su aspecto local como global.

Con la finalidad de definir y caracterizar los modos de pensar la derivada, en este estudio se identifican tres etapas clave en el desarrollo histórico de la derivada del cuál emergen los obstáculos epistemológicos, su génesis, su naturaleza operacional y su carácter formal en la matemática, que puede ser resumido a través de la siguiente frase: “Primero fue usada, después descubierta, explorada y desarrollada y solo entonces definida”, (Grabiner, 1983, p. 202).

Análisis histórico y epistemológico de la derivada en su aspecto local y global

En términos generales el Cálculo Diferencial e Integral es la respuesta a un extenso y complejo trabajo realizado por científicos en más de 200 años (Figura 1), dos de los problemas clásicos de sus inicios, es el cálculo de las cuadraturas (áreas, volúmenes) y el trazado de tangentes, conectados ambos en el estudio de los fenómenos de movimiento. La génesis y evolución del Cálculo Diferencial, muestra que los problemas de incrementos y cantidades de cambios son cruciales para el desarrollo de la ciencia del siglo XVII, sirvieron como sustento en la evolución de un concepto potente y complejo como el concepto de derivada de una función (que se llamará en adelante, simplemente derivada).

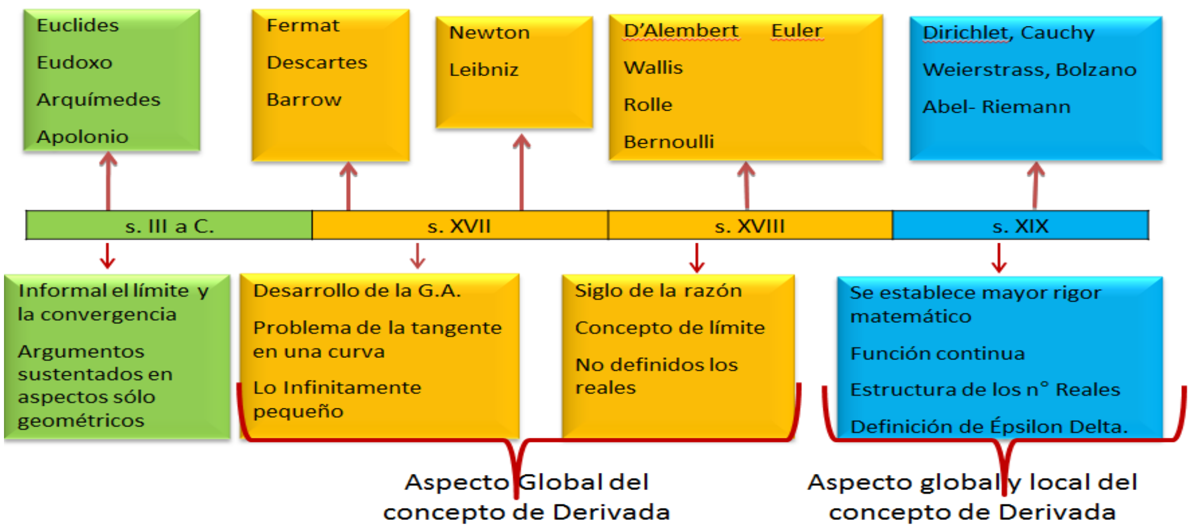


Figura 1: Esquema histórico del aspecto local y global del concepto de derivada.

Primera etapa

Corresponde a la génesis de la derivada y se considera con la etapa anterior al siglo XVI, se utilizaba de manera intuitiva, donde la rigurosidad matemática era a través de pruebas geométricas y estaba reducida a la búsqueda de la recta tangente a una curva, los matemáticos griegos (320-200 a.C.) ya tenían conocimiento de cómo encontrar la tangente en un buen número de situaciones, pero de forma específica, como por ejemplo cuando la curva era una circunferencia (Boyer 1959, p. 68). Sin embargo Newton y Leibniz proporcionan un método general que relaciona estas problemáticas a través de la diferenciación, esto último como una relación lograda gracias al desarrollo de la geometría analítica con la consideración del sistema coordenado, que permite la representación gráfica de la dependencia de dos variables y en consecuencia formular un diálogo entre la cinemática y la geometría. La recta tangente pasa de ser un objeto de estudio para medir el espacio, a un objeto de estudio para medir los cambios.

Segunda etapa

Entre los siglos XVII-XVIII, caracterizada por la búsqueda de la formalización de lo infinitamente pequeño, que produce una crisis paradigmática en los matemáticos, pone en conflicto los argumentos defendidos en torno a la justificación matemática de la existencia de límite, formado por diferencias que se aproximan a cero como una variable que tiende a cero. Este hecho determina un cambio en la naturaleza del trabajo matemático, y se considera un obstáculo porque cambian las técnicas como el campo de problemas que se aborda. Para algunos matemáticos del siglo XVII la derivada pasa a ser una concepción instrumental y los problemas que abordaron están en el estudio de las funciones y sus derivadas (aspecto global), usada para resolver problemas relacionados con fenómenos de la física, geometría y la mecánica. Estas aplicaciones de la derivada brindaron resultados que mostraron grandes logros en el avance científico, (Grabiner, 1983), considerando el aspecto global por sobre el local.

Tercera etapa

Corresponde al último tercio del siglo XIX, época en que la derivada se define formalmente en su aspecto local, en los términos de ε y δ, con fundamento en la definición formal del límite tal como se conoce hoy en día. En 1960, la función se define como un objeto matemático y se establece el rigor del lenguaje matemático.

Estas etapas históricas muestran el camino de la epistemología de la derivada, identificándose para el caso local y global, el obstáculo que emerge de la concepción de la recta tangente como elemento geométrico que mide el espacio pasando a ser un elemento que mide cambios, y el obstáculo que genera la concepción de lo infinitamente pequeño que puede ser llevado a un dominio puramente algebraico del límite.

Marco Teórico

Los Modos de pensar la derivada en lo local y global

Con base en el análisis histórico y epistemológico de la derivada, emerge el modelo, que ha sido el resultado del desarrollo de una investigación inspirada en –Los Modos de Pensamiento– de Sierpinska (2000), iniciada como una variación de este marco teórico, (Pinto y Parraguez, 2015), que fue evolucionando para conformar un modelo que se extiende para considerar la relación local y global de la derivada, como dos aspectos que interactúan en su comprensión.

Sierpinska (2000), plantea un marco teórico de comprensión con la finalidad de superar el obstáculo epistemológico, que emerge como resultado de dos posiciones dogmáticas opuestas en el desarrollo histórico epistemológico del álgebra lineal, esto es, por un lado el rechazo de los números dentro de la geometría y por otro que la intuición geométrica pueda ser llevada a un dominio puramente aritmético. Con este propósito, Sierpinska distingue en álgebra lineal la coexistencia de tres modos de pensamiento, definidos de la siguiente forma:

Modo Sintético-Geométrico (SG): El objeto matemático es dado para ser descritos directamente por la mente, es la imagen directamente el sujeto y el objeto y considera el lenguaje de las figuras geométricas, puntos, líneas y planos, así como sus representaciones gráficas convencionales.
Modo Analítico-Aritmético (AA): El objeto matemático es dado por relaciones numéricas que permiten realizar cálculos, la búsqueda algebraica para la representación del objeto, por ejemplo, los objetos son dados a través de relaciones numéricas.
Modo Analítico-Estructural (AE): El objeto matemático es visto como un todo estructural que puede ser identificado a partir de un conjunto de propiedades, Pertenece al pensamiento teórico.

La concepción geométrica de la derivada se pone de relieve en el primer momento histórico y epistemológico, delimitando el modo de pensar práctico de la derivada. Los otros dos modos –AA y AE– se corresponden con el pensar teórico de la derivada, no obstante, se hará explícito, determinando su relación analítica como el límite de las pendientes de las rectas secantes, perdiendo el carácter aritmético mencionado en el segundo momento histórico, pero sobresaliendo el carácter operacional de la derivada. En el tercer momento, una propiedad local de la derivada se explicita desde la comprensión de mejor aproximación lineal a la curva, teniendo en consideración el contexto del cálculo diferencial, en sintonía con el tratamiento intuitivo del límite.

Conclusiones y proyecciones

Como un resultado importante de esta indagación, se puede señalar que se identificó el aspecto local y global como un obstáculo para la comprensión de la derivada y se sustentó con base en el análisis anterior, las componentes del modelo –Modos de pensar la derivada– que interpretan su comprensión, haciendo frente a los obstáculos que emergen del análisis epistemológico, desde dos acercamientos:
La perspectiva local (PL) de la derivada, que se interpreta desde los modos: Sintético-Geométrico-Convergente (SGCPL), Analítico-Operacional (AOPL) y Analítico-Estructural (AEPL), (Figura 2).

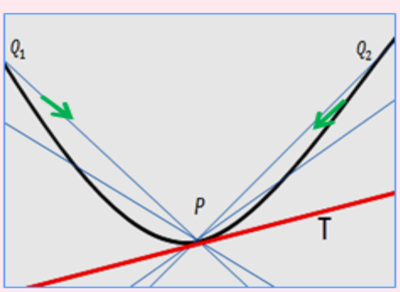
Sintético-Geométrico-Convergente SGCPL	Analítico-Operacional AOPL	Analítico-Estructural AEPL
	$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ Si este límite existe en x_0. $m=f'(x_0)$ Donde m es el límite de las pendientes de las rectas secantes a f desde P.	Para valores de x cercanos x_0 La mejor aproximación lineal a la curva en P. $f(x)=f(x_0)+L(x_0)(x-x_0)$ Donde $L(x_0)=f'(x_0)$

Figura 2. Descripción de los modos SGCPL, AOPL y AEPL del concepto de derivada desde su aspecto local.

La perspectiva global (PG) de la derivada desde: el modo Sintético-Geométrico (SGPG), Analítico-Operacional (AOPG) y Analítico-Estructural (AEPG).

Modo Sintético-Geométrico desde la perspectiva global (SGPG)

El concepto de derivada es un concepto local en la matemática, sin embargo es posible desde un punto de vista global definir la imagen directa que plantea Sierpinska (2000), esto garantizado por el concepto de diferenciabilidad local, es decir que la vecindad de un punto x_0, por más pequeña que sea en torno al punto en la curva tiene garantizada su continuidad, por lo tanto siempre existe un intervalo de longitud ε en la imagen del punto, en consecuencia existe un contenido en torno a $f(x_0)$ de longitud ε y esto vale para todos los abiertos en cada punto de la curva, en consecuencia es posible determinar en cada punto de la curva la recta tangente a esa curva. En Figura 3, se muestra la imagen directa de la representación de las tangentes en cada punto de la curva.

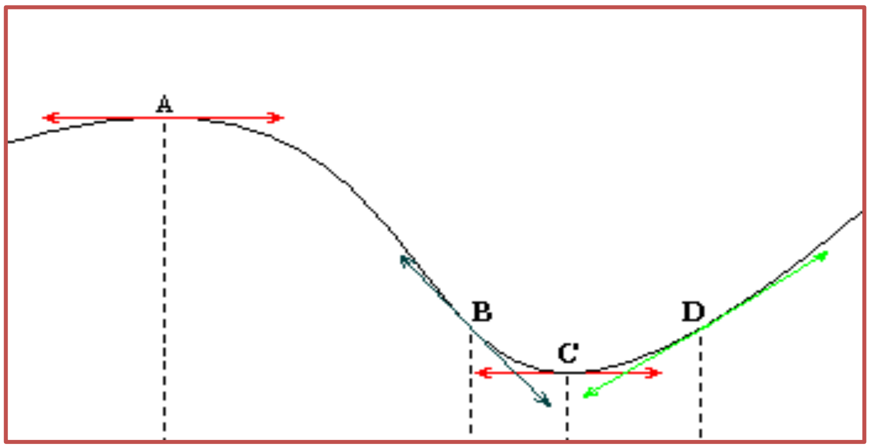


Figura 3. Modo Sintético-Geométrico (SGPG), para la comprensión de la derivada en su forma global

Modo Analítico-Operacional desde la perspectiva global (AOPG)

Pero también se puede considerar una definición de derivada en la que el algoritmo es global, ya no está atado a un punto específico, y por lo tanto su significado ya no depende del punto elegido. Se trata por lo tanto de un significado global y dinámico. El aspecto global de la derivada se entenderá entonces:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad , si\ este\ límite\ existe\ y\ x \in D_f$$

Modo Analítico-Estructural desde la perspectiva global (AEPG)

Para sustentar y argumentar el modo AEPG en lo local, se consideraron propiedades del concepto que permiten caracterizar la derivada como un ente único, sin embargo la situación pare el modo AEPG es ligeramente diferente, debido a que la estructura matemática que sustenta a la derivada en lo global, puede ser múltiple y entre ellas pueden aparecer nociones y conceptos matemáticos que están fuera del campo de acción de los conocimientos matemáticos que disponen los aprendices que están bajo estas normas curriculares de un primer año de universidad, las variedades diferenciables son conceptos que entran en conflicto con los aspectos curriculares. Como consecuencia de esto último, el modo Analítico Estructural de la derivada estará condicionado al universo de tópicos vistos en ese nivel universitario, lo que precisa re-direccionar la definición de AE hacia una mirada de lo curricular en lugar de lo conceptual, que es como se han venido sustentando o argumentando el AE en lo local propiamente tal.

Una vez finalizada esta etapa de conformación de los modos de pensar el aspecto global de la derivada, se debe pasar a la búsqueda de pruebas empíricas para la validación del modelo y para ellos se proyecta un diseño cuasi-experimental.

Agradecimiento

Este trabajo fue financiado por CONICYT/ Beca Doctorado Nacional/Folio: 21161074.

Referencias bibliográficas

Badillo, E., Azcárate, C. y Font, V. (2011), Análisis de los niveles de comprensión de los objetos *f'(a)* y *f'(x)* de profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(2), 191–206.

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de la historia de las matemáticas*. España: Alianza Editorial.

Boyer, C. (1959). *The history of the calculus and its conceptual Development*. New York: Dover Publications.

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En: Investigaciones en Matemática Educativa II*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Grabiner, J. (1983). The Changing Concept of Change: The Derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine*, 56(4), 195-206.

Heugl, H. (1999). The necessary fundamental algebraic competence in the age of Computer Algebra Systems. *ACDCA Summer Institute*. Portoroz, Slovenia. Disponible en línea en http://www.acdca.ac.at

Kinley, (2016). Grade Twelve Students Establishing the Relationship Between Differentiation and Integration in Calculus Using graphs. *IEJME-Mathematics Education*, 11(9), 3371-3385.

Lang, X. (1999). CAI and the reform of calculus education in China. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 30(3), 399–404.

Pinto, I. y Parraguez, M. (2015). El concepto de derivada desde la teoría Los Modos de Pensamiento, sustentada en la epistemología de Cauchy. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* 28(1), 337-344.

Sánchez-Matamoros-Garcia, G., García Blanco, M. M., & Llinares Ciscar, S. (2008). El desarrollo del esquema de derivada. Enseñanza de las ciencias. *Revista de investigación y experiencias didácticas*, 24(1), 85-98.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Sierpinska, A. (2000). *On some Aspects of Student´s thinking in Linear Algebra*. En The Teaching of Linear Algebra in Question (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de límite. *Recherches en Didactique des Mathematiques*. 6(1), 5-7.

Tall, D. (1986). A graphical approach to integration and the fundamental theorem. *Mathematics Teaching*, 113, 48–51.

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

CONCEPCIONES ONTOEPISTEMOLÓGICAS Y PROCESO DE DECONSTRUCCIÓN DEL SABER MATEMÁTICO EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

Daniela Emmanuele, Florencia Rodil, Cintia Vernazza
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA). Universidad Nacional de Rosario (UNR). (Argentina)
emman@fceia.unr.edu.ar; rodil.florencia@gmail.com; cinvernazza@gmail.com

Resumen
Convencidas de que la forma en la que los profesores conciben a los objetos matemáticos determina en cierta medida la efectividad (o no) de la transmisión de conocimientos y, sustentándonos en la socioepistemología y la teoría foucaultiana de la producción del discurso, mediante este estudio, de tipo exploratorio, investigamos cuáles son las concepciones ontológicas, epistemológicas y didácticas acerca de los objetos matemáticos de los diversos actores del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática; cómo se lleva a cabo el proceso de construcción/deconstrucción de los saberes matemáticos y qué características particulares adquiere el dME en las aulas de formación del profesorado.

Palabras Clave: concepciones ontoepistemológicas, proceso de deconstrucción

Abstract
Convinced that the way in which teachers conceive mathematical objects determines to a certain extent the effectiveness (or not) of the transmission of knowledge and, based on the socioepistemology and the Foucaultian theory of the production of discourse, through this study, of an exploratory type, we investigate the ontological, epistemological and didactic conceptions about the mathematical objects of the various actors of the teaching-learning process of mathematics; how the process of construction / deconstruction of the mathematical knowledge is carried out and what particular characteristics dME acquires in the teachers' training classrooms.

Key Words: ontoepistemological conceptions, deconstruction process

Introducción

Esta investigación se realizó en el marco del Proy ING 418 radicado en el Dpto de Matemática de la FCEIA, y actualmente se continúa en el Proy 548.

Planteo del problema. Relevancia y pertinencia del tema

A partir de nuestra formación y, sobre todo, de nuestra experiencia en la docencia comenzamos a preguntarnos por qué el conocimiento matemático no suele ser cuestionado *durante la etapa de la formación docente*. Así, nos planteamos comprender de qué manera son concebidos los objetos matemáticos y cómo se construyen dichos saberes dentro del ámbito de formación de profesores. Este ámbito nos pareció muy propicio ya que, en definitiva, son los profesores de Matemática, principalmente, los encargados de transmitir los conocimientos matemáticos. Para que la transmisión de conocimientos sea efectiva los docentes no podemos limitarnos exclusivamente a mostrar una serie de conceptos y procedimientos. Nuestras prácticas deben dotar de significado a los objetos matemáticos favoreciendo la construcción de conocimientos por parte de los estudiantes; más aún, cuando esos estudiantes devendrán docentes.

Preguntas de Investigación

Convencidas entonces de que la forma en la que los profesores conciben a los objetos matemáticos determina en cierta medida la efectividad o no de la transmisión de conocimientos y, teniendo en cuenta que el Discurso Matemático Escolar (dME), en tanto regulador del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, puede favorecer o entorpecer dicho proceso, organizamos la presente investigación en torno a tres grandes preguntas:

1) ¿Cuáles son las concepciones ontológicas, epistemológicas y didácticas acerca de los objetos matemáticos de los diversos actores del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática?
2) ¿Cómo se lleva a cabo el proceso de construcción/deconstrucción de los saberes matemáticos?
3) ¿Qué características particulares adquiere el dME en las aulas de formación del profesorado?

Marco teórico

Nuestro marco teórico de referencia se asienta fundamentalmente en dos corrientes teóricas que articulamos permanentemente: 1) La socioepistemología, que nos brinda los conceptos de problematización del conocimiento, discurso matemático escolar (dME), deconstrucción del conocimiento y empoderamiento docente (Reyes-Gasperini; Cantoral, 2014); 2) La teoría foucaultiana acerca de la producción del discurso, que se soporta en la trama saber-verdad-sujeto-poder y nos brinda conceptos como la episteme (Foucault, 1992).

Diseño metodológico

Si bien adoptamos un enfoque cualitativo en tanto atendemos permanentemente a lo que los sujetos hacen y dicen dentro de las instituciones seleccionadas para este estudio (Rodriguez Gil, Gil Flores y García, 1996), el mismo utiliza (entre otros) un instrumento propio del método cuantitativo: la encuesta (que nos permitirá recoger y tabular datos relativos al dME). Nos ocupamos de estudiar de manera subjetiva, particularidades dentro del tema elegido, extrayendo conclusiones permanentemente atravesadas por el contexto. La investigación de tipo cualitativo se soporta primeramente en el proceso mismo de recolección de datos y su análisis; y se la considera interpretativa pues el investigador que lleva a cabo el estudio, realiza su propia descripción y valoración de los datos con el fin de analizar la realidad, comprenderla mejor e intervenir en ella más reflexivamente, teniendo en cuenta su contexto social (Hernández Sampieri, Fernández Collado y Lucio, 2008).

Centramos la atención en el entendimiento del significado de las acciones de los futuros docentes de Matemática y las instituciones en las que se forman.

El objeto de nuestra investigación, el *proceso de deconstrucción*, que no resulta una variable observable (aunque en Cabrera Chim y Cantoral (2012, junio) se lo clasifica remitiendo al nivel de reconstrucción alcanzado por el profesor), será caracterizado a su vez, de acuerdo con otras dos variables: a) los tipos de prácticas que los futuros docentes asocian al rol del profesor; y b) el dME que, en tanto constructo, establece, regula y normativiza dichas prácticas. Ahora bien, dado que el dME es también una variable cualitativa, que permite caracterizar el objeto de nuestra investigación - el proceso de deconstrucción de los saberes matemáticos – pero que no es medible por sí misma, la operativizamos según tres variables o indicadores pertinentes, susceptibles de ser medidos cada uno de ellos, a partir de una escala nominal: i) las concepciones epistemológicas de la Matemática; ii) la dimensión sociocultural del conocimiento; iii) las prácticas discursivas.
Dado que el diseño metodológico seleccionado es de tipo transeccional exploratorio (Hernández Sampieri et al, 2008), para poder valorar, analizar y correlacionar las variables concepciones ontológicas y propuestas didáctico-pedagógicas, confeccionamos una encuesta que fue administrada (con pequeñas variantes) en los distintos grupos de actores intervinientes en la producción de la matemática y su enseñanza.

Para la confección de la misma atendimos a distintos aspectos que hacen a nuestro objeto de investigación: datos personales de la formación docente; aspecto profesional del docente de Matemática; conocimiento matemático; y práctica docente. La muestra de a quiénes administramos dicha encuesta se compone como sigue: a) 85 alumnos ingresantes al profesorado provenientes de distintas instituciones (universidad e institutos terciarios, no universitarios, de formación docente); b) 25 profesores de nivel secundario, entre los cuales 4 de ellos ejercen docencia de nivel superior no universitario; c) 3 docentes-investigadores de nivel superior universitario; d) 2 alumnos de Maestría en Didáctica de las Ciencias; y e) 13 alumnos del último año del profesorado. Además, hemos trabajado particularmente con la población de los futuros docentes, esto es, con los alumnos avanzados de la carrera Profesorado en Matemática de distintas instituciones (7 alumnos de la FCEIA, 7 alumnos del ISP N° 3 de Villa Constitución, 7 alumnos del IES N° 28 de Rosario y 4 alumnos del ISP N° 21 de Arroyo Seco). Dentro de esta población, hemos aplicado como técnicas de recolección de datos, las siguientes: a) observación de clases, para identificar las prácticas discursivas que caracterizan al dME dentro de los institutos de profesorado; b) encuestas, con el fin de detectar las concepciones epistemológicas de la Matemática y la dimensión sociocultural del conocimiento; c) entrevistas semiestructuradas, para explorar el proceso de deconstrucción en los futuros profesores, y relacionar los tipos de prácticas identificados con el dME.

Análisis e interpretación de los datos obtenidos

En todo momento del análisis, a partir de los instrumentos dispuestos y aplicados, intentamos identificar los tipos de prácticas asociados al rol del profesor y las prácticas discursivas. La finalidad es explorar los distintos componentes presentes del proceso de deconstrucción tal como ocurre en los futuros docentes, y pesquisar los efectos del dME en las concepciones epistemológicas de la Matemática y acerca de la dimensión sociocultural del conocimiento. Encontramos que:

a) La *práctica de planificar el estudio* (práctica didáctica), como después debería hacerse con las clases a desarrollar al momento de posicionarse como docente, aparece en relación sólo al momento de preparar el examen final, pero no durante el cursado, de manera de acompañar el proceso de aprendizaje y construcción de los conocimientos. De las entrevistas surge que ningún alumno comentó haber solicitado la planificación durante el cursado de la materia. En general, los cursos recibieron por parte de los respectivos docentes, sólo los contenidos conceptuales (CC); y los alumnos no consideraron importante contar con la planificación durante el cursado, sólo le atribuyeron importancia a conocer los CC para organizar y completar su carpeta para rendir. Algunos alumnos ni siquiera recordaban el hecho de haber recibido la planificación, tenían una idea sobre que se habían explicitado los CC, pero nada referido a objetivos, ni a otros aspectos de la misma. Se nota desinterés por la planificación por parte de los alumnos. No se tienen en cuenta las potencialidades de aprovechamiento, alcance, cuestionamiento, organización y enfoque que aportan las planificaciones en cuanto a proporcionar y explicitar la función de la misma. En menor medida, apareció la planificación como un material que les da la posibilidad de tener autonomía en la materia y dejar de pensarla en relación al examen.

b) La *práctica didáctica de conocer* en forma explícita *los objetivos y la bibliografía* seleccionada conduce a la posibilidad de un cuestionamiento genuino de los conocimientos matemáticos y de los significados que a ellos se les atribuyen. En cuanto al conocimiento de los objetivos perseguidos por los docentes de las cátedras, se manifiesta en forma unánime que a los alumnos no les interesó saberlos ni en éstas (las asignaturas observadas) ni en otras asignaturas. Un grupo de alumnos mencionó como objetivo específico de la cátedra "desarrollar clases constructivistas". En cuanto a la bibliografía, todos mencionan haber trabajado con lo aportado por el docente, pero no con los libros o material bibliográfico sugerido por el docente en su planificación. En algunos casos en que se necesitó por distintos motivos ampliarla, se buscó por internet, sobre todo videos de You Tube que mostraban construcciones. Estos videos (en su mayoría, de origen español o inglés) no son propios de nuestra cultura, lo cual remite a prácticas de transculturación porque la forma en la que se presentan allí los temas consultados, no condice con las formas habituales en que se hacen en nuestras instituciones. Se menciona en varios de los entrevistados la idea de que en una clase constructivista no es necesario contar con bibliografía. Al no conocer la bibliografía no les resulta posible valorarla. Por ende, no pueden cuestionar los conocimientos a través del cuestionamiento de la bibliografía con la que se accede o se facilita el acceso a dichos conocimientos.

c) Los *recursos y las estrategias didácticas* son un componente esencial del proceso de deconstrucción. En cuanto a los recursos utilizados en clase, se mencionaron pizarrón, software GeoGebra, elementos de geometría, material audiovisual (videos e internet), recortes de papel y otros, en distintas proporciones. Con respecto a las estrategias utilizadas por el docente se mencionaron socialización de resultados de problemas o ejercicios, resolución de problemas o ejercicios, problema disparador/motivador, trabajo guiado mediante preguntas, trabajo grupal, explicación oral, construcción como disparador. Se observó también que algunos alumnos dudaban en cuanto al concepto de estrategia.
d) No logran reconocer los *núcleos de aprendizaje*, de articulación de contenidos. A lo sumo, pueden mencionar contenidos en forma desarticulada. Esta desarticulación conceptual es característica del dME.

g) Hay apreciaciones por parte de los alumnos que nos permiten pensar que la concepción que tienen del conocimiento, en particular, el matemático, es como aquello que ya está dado, acabado. Se menciona por parte de un alumno: "…no investigábamos temas por propia decisión, sí investigábamos en Filosofía, en

Historia porque son más de temas que podés investigar y lo que el docente dijo no te alcanzó y necesitas más información para entender el tema". Otras apreciaciones dan muestra de la *atomización en los conceptos*, en tanto, el *conocimiento matemático es ahistórico y acultural*, no teniendo relevancia para su constitución los aspectos sociales, culturales y contextuales. De las encuestas, surge que el contexto histórico sí es importante para comprender un conocimiento matemático. Y también que los conocimientos matemáticos son cuestionables y susceptibles de ser mejorados. Sin embargo en las observaciones de clases, no surgió que esto fuera un práctica usual, el cuestionar los modos de presentación de los mismos, o de validación de éstos. Faltan marcos de referencia para la resignificación del conocimiento matemático. No se manifiesta el hecho de que la matemática responde a otras prácticas de referencia, que la resignifican, dotando de significado a sus objetos. La mayoría considera muy importante el *campo de aplicación* de aquello que se aprende, aunque algunos no lo consideran y otros no responden a la consigna. Falta de identificación y de valoración de los contenidos previos necesarios para poder desarrollar los temas en forma integral. Refuerza la concepción del conocimiento como un cúmulo de saberes que ni siquiera llega a constituir una estructura; y mucho menos un proceso.

h) De las encuestas surge que hay muchas dificultades para reconocer cuáles son las actividades relacionadas al ejercicio profesional del profesor; de allí la dispersión en las respuestas obtenidas; así como también surge que la mayoría han elegido la carrera por el gusto a la disciplina; sin embargo, es llamativo que, cuando se les pregunta por la cantidad de horas diarias, en promedio, dedicadas al estudio, sólo la minoría dispone más de tres horas para ello.

Discusión de los resultados

Los resultados a los que arribamos luego del análisis anterior se resumen en los siguientes puntos:

- La práctica de planificación aparece sólo en relación a la evaluación (examen final de la materia), pero no acompaña el proceso de deconstrucción durante el cursado.
- Se destaca la participación de los alumnos (futuros docentes) y el compromiso con las tareas y el estudio, pero es manifiesta una actitud de aceptación de aquello que se les enseña tendiente a la reproducción y no al replanteo o al cuestionamiento. Los alumnos no cuestionan los conocimientos matemáticos tal como se presentan en la clase, más allá de creer considerarlos cuestionables y susceptibles de ser mejorados. En este sentido, el conocer los objetivos y la bibliografía, podría promover cierto grado de autonomía, para propiciar el cuestionamiento de los conocimientos matemáticos.
- Hay confusión entre recurso y estrategias didácticas que atenta contra una implementación adecuada que favorezca la deconstrucción.
- La valoración del contexto histórico podría ser un componente que facilite el proceso de construcción, aunque en general, sólo haya aparecido como un componente didáctico, la motivación de una clase.
- El análisis da evidencias de la atomización en los conceptos, en tanto, el conocimiento matemático es ahistórico y acultural, no teniendo relevancia para su constitución los aspectos sociales, culturales y contextuales.
- El conocimiento es considerado como un cúmulo de saberes que ni siquiera llega a constituir una estructura; y mucho menos un proceso. Concepción que surge, entre otras cosas, de la falta de

identificación y de valoración de los contenidos previos necesarios para poder desarrollar los temas en forma integral.

- La carrera se elige, de acuerdo con las apreciaciones vertidas, mayoritariamente por gusto por la disciplina matemática. Pero hay una notoria contradicción con la cantidad de horas de estudio dedicadas a la formación necesaria para cumplir el rol docente que han de desempeñar.

Lo aquí señalado está en consonancia con los resultados a los que han llegado Cabrera Chim y Cantoral (2013), quienes concluyen en sus estudios que el conocimiento matemático en los espacios de formación del profesorado, es un elemento no cuestionado y que permanece inamovible, limitando al profesor a la reproducción de ese conocimiento institucionalizado, favoreciendo en los alumnos esta misma acción. La diferencia radica que, nuestro estudio se basó en los futuros docentes y no en docentes en ejercicio. Esto podría significar que la problemática de la deconstrucción debería ser atendida en las etapas avanzadas de la formación docente inicial, dedicando mayores esfuerzos a articular los conocimientos disciplinares con aquellos que aportan elementos del orden pedagógico-didáctico.

En nuestro caso, no pudimos observar a la totalidad de los futuros docentes actuando como profesores, diseñando una clase (aunque más no sea, una “clase especial” para sus compañeros) y poniendo en acto, los elementos que nosotras consideramos constitutivos del proceso del deconstrucción. Respecto de este tópico, Cabrera Chim y Cantoral, encontraron que, el papel del profesor se limita a resolver dudas relacionadas con la comprensión de lo establecido dentro de la situación más que explicar lo que se tiene que hacer. Nos preguntamos: ¿Puede estar esto en conexión con el malestar manifestado por los futuros docentes que apelaban a una clase más ordenada, más disciplinada, expositiva, cuando tenían la posibilidad de que el docente les explique lo que había que hacer, pero no restringiéndose a lo establecido? Además, estos autores, observaron en los docentes en ejercicio, la necesidad de que los conocimientos sean demostrados a través de la explicación de una fórmula.

No hemos registrado datos en este sentido (esfuerzo de formalización), quizás por una falta de profundidad de contenidos. Pero sí hay coincidencia con el hecho de que se observan en ambos trabajos (con docentes o futuros docentes), la necesidad de una evaluación tradicional (evaluar o ser evaluados). Otra coincidencia que obtenemos es el hecho de que la contextualización se entiende en tanto situación que permite “hablar de algo concreto o vivible por el estudiante, más que como un medio en donde tiene significado por sí mismo para la sociedad en la que se desarrolla” (Cabrera Chim y Cantoral, 2013: p 1600). Esto es, la contextualización no es significativa ni permite cuestionar al conocimiento. Algo que también pudimos observar en las clases - al igual que los autores ya mencionados - es la necesidad del docente de profundizar en diferentes aspectos de un conocimiento ya estudiado con anterioridad, más que en favorecer la construcción de conocimientos matemáticos. Coincidimos también con Carmen Sessa (2011) que la dimensión del estudiante de profesorado como sujeto que construye conocimientos nuevos en tanto alumno, está sobrevalorada respecto a la dimensión de futuro docente que reflexiona sobre los procesos de enseñanza/aprendizaje de la matemática.

Conclusiones

Intentaremos en este punto poner en relación los resultados enumerados más arriba, con las preguntas que originaron esta indagación; esto es, los resultados hasta aquí expuestos, han de tomarse como posibles respuestas a nuestras preguntas, y por ende, como medio de cumplimentar, aunque sea parcialmente, los objetivos planteados.

La *apropiación de los conocimientos* (considerada como práctica que de ser ejercida permitiría romper, fisurar al dME) es, de acuerdo con lo registrado y analizado aquí, responsabilidad del profesor; y no parece que en ningún caso esta responsabilidad pudiera ser transferida al estudiante, quien aparentemente no ha logrado la independencia suficiente para tender a contribuir a la construcción de su propio conocimiento. Su posición como sujeto discursivo, constreñida por las limitaciones impuestas por el discurso matemático escolar, así lo sugieren. Esta dificultad para apropiarse de los conocimientos es el efecto de la enajenación producida por el dME. En cuanto a prácticas discursivas, las expresiones de los futuros docentes, con las que manifiestan dudas o pretenden canalizar demandas dentro del escenario institucional y áulico, son en general, no adecuadas al nivel de la carrera que transitan. Es así, que la dimensión discursiva que prevalece es la de sujeto reproductor, y no, productor como pensamos que debería ocurrir en el ámbito de una institución de nivel superior. Con respecto a la pregunta 1), hallamos muchas dificultades para caracterizar al proceso de construcción/deconstrucción a partir de su exploración.

El proceso de deconstrucción que - creemos - debería haber comenzado (aunque sea a gestarse) en un tercer año de profesorado, se halla aun prácticamente ausente. Esto es así, pues los componentes sustanciales que lo integran (*reconocimiento de estrategias didácticas, núcleos de articulación temática, distintos casos de uso, contextualización histórica, campo de aplicación*, etc) están muy débilmente presentes todavía. Aún en esta etapa avanzada de su formación docente, los estudiantes no logran (o tienen serias dificultades para) posicionarse en el rol de profesor. Más aún, la dinámica del profesorado como institución de nivel superior, conspira contra ello al estar secundarizado, vale decir, al estar dominado por una disciplina de características similares a las que encontramos en las escuelas secundarias, al menos en varios aspectos. Decimos esto, en parte apoyándonos en los indicios que las observaciones de clases nos brindaron respecto a la disciplina y al esquema de interacciones que se permiten dentro y fuera del aula. (Por ejemplo, las carpetas de los alumnos son prolijas y completas pero muy poco personales, no se consideran un medio válido para registrar dudas, o información proveniente de otras fuentes extra-áulicas). Creemos que no se ofrecen los medios necesarios para que los futuros docentes se hagan cargo de su propia trayectoria y que no sea el profesor que continuamente les indique, qué estudiar, qué leer, cuándo estudiar a través de los parciales, etc. Son llamativas las contradicciones que surgen al confrontar y cotejar las expresiones vertidas en las entrevistas con los resultados recolectados a partir de las encuestas.

En particular, la concepción de una matemática “cuestionable”, cuyos resultados serían “susceptibles de ser mejorados” con las concepciones subyacentes que se dejan entrever a partir de las entrevistas, en cuanto al desinterés por el contexto y por los campos de aplicación. Así, la práctica didáctica de uso no parece ser asociada por los futuros docentes al rol de profesor. La práctica de reflexionar sobre las acciones ejercidas sobre los objetos matemáticos, tendientes a dotarlos de distintos significados, o al menos de un significado diferente del que haya aparecido en relación a la situación mediante la cual se introdujo su estudio, no es asociada por los futuros docentes al rol del profesor.

Prevalece una concepción de la matemática como conjunto de elementos yuxtapuestos, no ligados, no articulados; y no como el resultado de un proceso que contempla o que depende entre otras cosas, de sujetos pertenecientes a un contexto histórico, social y económico determinado, proceso que se da en el marco de una cultura y no de otra. Respecto de esto señalamos también que, se detectan prácticas solapadas de transculturación en relación a la búsqueda de videos que brinden información sobre ciertos temas.

Referencias bibliográficas

Cabrera Chim, L.; Cantoral, R. (2013). La deconstrucción del conocimiento matemático: un medio para el análisis del desarrollo profesional del profesor. En Flores, Rebeca (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 1595-1603. México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cabrera Chim, L. y Cantoral, R. (2012, junio). La deconstrucción de los conocimientos matemáticos. Elemento del desarrollo profesional del profesor. Ponencia presentada como avance de investigación en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Foucault, M. (1992). El orden del discurso. Barcelona: Tusquets.

Hernández Sampieri; R; Fernández Collado, C. y Lucio, B. (2008). Metodología de la Investigación. México: Mc Graw Hill.

Reyes Gasperini, D.; Cantoral, R. (2014) Socioepistemología y Empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 360-382.

Rodriguez, G.; Gil Flores, J. y García Jímenez, E. (1996). Metodología de la Investigación cualitativa. Granada: Aljibe.

Sessa, Carmen (2011). La formación en las carreras de profesorado en Matemática. Informe final Noviembre 2011. Ministerio de Educación de la Nación (Argentina).

REQUISITOS CONCEPTUALES DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD NORMAL COMO MODELO DE LA REALIDAD

Omar Pablo Torres Vargas, Ana María Ojeda Salazar
Cinvestav. (México)
optorres@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx

Resumen
Enfocamos, cualitativa, interpretativa y abductivamente, la comprensión de estudiantes del bachillerato tecnológico de requisitos conceptuales de la función de densidad normal. El concepto, unidad del discurso científico, se constituye de la interrelación entre *objeto*, *signo* y *concepto*; su conocimiento requiere el de cálculo, el funcional y el analógico. De la observación de nueve sesiones de enseñanza de tratamiento de datos agrupados y muestreo, y de las respuestas de 24 estudiantes a un cuestionario de *Probabilidad y Estadística*, ellos asignaron cardinalidades incorrectas a subconjuntos; los cuatro estudiantes de *Cálculo Diferencial*, participantes en una estrategia de enseñanza, revelaron concepciones erróneas del comportamiento de funciones y de la continuidad. Los resultados no favorecerían la constitución de modelos explicativos de distribuciones de variables aleatorias continuas.

Palabras clave: Función de densidad normal, modelo, estocásticos

Abstract
Through quality, interpretation and abduction, we focus on the technological high school students' understanding of conceptual requirements of the function of normal density. The concept, as a unit of the scientific discourse, is made up from the interrelationship of *object*, *sign* and *concept*; knowing a concept requires its computational, analogical and functional knowledge. From the observation of nine classroom sessions, of collected data treatment and sampling, and from the responses of twenty-four students to a *Probability and Statistics* questionnaire, they assigned incorrect cardinalities to subsets. The four students of *Differential Calculus*, participating in a teaching strategy, revealed misconceptions of the behavior of functions and continuity. Such results would not favor the creation of explanatory models of distributions of continuous random variables.

Key words: function of normal density, model, stochastic

Introducción

En una investigación más amplia nos interesamos en la comprensión de estudiantes del bachillerato tecnológico de las ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) que sustentan a la distribución normal. Se analizó la enseñanza de *Probabilidad y Estadística* y de *Cálculo Diferencial* en las aulas para conocer qué tanto su puesta en juego, tal como él la plantea, contribuye a que el estudiante advierta a la actividad científica fundamentada en un sistema formal matemático. Esto es de importancia dado que el paso a la identificación de la naturaleza de los fenómenos aleatorios comienza con un acercamiento

intuitivo (Fischbein, 1975; Heitele, 1975) para posibilitar el formal. Algunos de los rasgos para promover esa orientación se revelarían en la enseñanza porque, aunque el profesor de *Probabilidad y Estadística* dé por sentado que los estudiantes de sexto semestre hacen uso de conceptos tales como intervalo, funciones, continuidad o área bajo la curva, implicados en esta asignatura, ellos aún requieren experienciarlos con un referente concreto (Torres, 2013, por ejemplo) y no basta una experiencia anterior sólo con un referente particular para advertirlos en un tejido conceptual (Steinbring, 2005).
Al interpretar el rol de un concepto en diferentes contextos (Pollatsek, Lima y Well, 1981), su conocimiento rebasaría el nivel de cálculo. Aunque el tratamiento simbólico suponga la utilización del método lógico-deductivo, bien pudiera ser resultado de seguir meramente una regla. Aquí sólo examinamos la comprensión de estudiantes de requisitos conceptuales de la función de densidad normal, en algunos temas de las asignaturas *Probabilidad y Estadística* y *Cálculo Diferencial*.

Preguntas de investigación

¿Cuáles son las características de la comprensión de las ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) que sustentan a la función de densidad normal, de estudiantes de las asignaturas *Cálculo Diferencial* y *Probabilidad y Estadística* del bachillerato tecnológico? ¿Qué sentido dan los estudiantes bachilleres a los temas de comportamiento de funciones, área bajo la curva, datos agrupados y muestreo, previos a la enseñanza de variables aleatorias y sus distribuciones?

Marco teórico

El discurso científico, cuyas unidades son los *conceptos*, apunta a lo disciplinar; ellas se erigen en modelo como cobertura ideológica de la ciencia y su instancia en la lógica matemática es sostén de la noción descriptiva de la actividad científica (Badiou, 1978). Es frecuente el uso de los términos "modelo" y "modelación" en los libros propuestos en los programas de estudio que rigen la enseñanza de estocásticos en el bachillerato tecnológico, no así su definición. Para estocásticos, Garfield y Ben-Zvi (2008) señalan que "modelo" se utiliza para probabilidad, mientras que la "modelación" de variables aleatorias se refiere al uso de "una simulación para generar datos para estimar probabilidades" (p. 158) mediante dispositivos aleatorios y herramientas de simulación.

Eje epistemológico

La guía continua de un curriculum en espiral para estocásticos supone incluir lo relevante de las relaciones entre realidad y contenidos matemáticos, para dotar al estudiante de modelos explicativos en cada etapa de su desarrollo, por lo que la enseñanza de estocásticos debería ser la mejor oportunidad para este propósito. La función de distribución normal es de gran interés por sus aplicaciones y, de las diez ideas fundamentales de estocásticos que propone Heitele (1975), ella implica a: *Medida de probabilidad* (F1), *espacio muestra* (F2), *adición de probabilidades* (F3), *regla del producto e independencia* (F4), *equiprobabilidad y simetría* (F5) y *variable estocástica* (F8). De la idea F8, interesa su distribución (Wild, 2006) y sus características de centro y dispersión (Garfield & Ben-Zvi, 2008).

La idea de variación, planteada por Burril y Biehler (2013) como fundamental en estadística, consiste en identificar y medir "la variabilidad para predecir, explicar y controlar; se utiliza para describir el efecto global del cambio” (p. 9). La distribución es como “la lente por la que se observa la variación” (Wild, 2006, p. 11), en el mundo real y en los datos.

La función de densidad normal se vincula directamente con conceptos del cálculo como función, intervalos reales, la exponencial, continuidad, asintoticidad, máximos, mínimos, puntos de inflexión y área bajo la curva. El cálculo de la integral definida en un intervalo de la función de densidad determina la probabilidad no de un valor en particular (para el cual es cero pues la variable aleatoria es continua) sino de los valores que se acumulan en el intervalo acotado por los dos valores extremos; esa probabilidad corresponde al área bajo la curva definida para ese intervalo.

Eje cognitivo

Kahneman (2011) distingue dos tipos de procesos mentales como sistemas en el tratamiento de juicios y elecciones. El *Sistema 1* “opera de manera rápida y automática, con poco o ningún esfuerzo y sin sensación de control voluntario” (p. 65) y el *Sistema 2* “centra la atención en las actividades mentales esforzadas que lo demandan, incluidos los cálculos complejos, elegir y concentrarse” (p. 66).

Donaldson (1963) identifica tres tipos de errores. Los arbitrarios se caracterizan por “una falta de lealtad a lo dado. Se les ha llamado errores arbitrarios ya que el sujeto se comporta de manera arbitraria con respecto al problema cuando no está limitado por las condiciones que le impone” (p. 183); los errores ejecutivos “surgen de algún fallo en la acción de realizar las manipulaciones requeridas. Algunos defectos de concentración, de atención o de memoria inmediata suelen encontrarse en su origen” (p. 184); y los errores estructurales “se derivan de una falta de apreciación de las relaciones implicadas en el problema o para captar algún principio esencial de solución” (p. 183). De acuerdo con Saldanha y Liu (2014), las concepciones erróneas del razonamiento de los estudiantes “podrían ser causadas por dificultades lingüísticas (por ejemplo, falta de una definición clara de los términos “posible”, “imposible” y “certeza”), por falta de habilidades lógicas y por la dificultad de extraer la estructura matemática desde la ejecución práctica” (p. 375).

Según Pollatsek *et al*. (1981), tres tipos de conocimiento están implicados en la comprensión de un concepto: de cálculo, funcional y analógico. El primero se refiere al papel de los elementos lógicamente equivalentes implicados en un concepto, identifica expresiones simbólicas y concierne al desarrollo de algoritmos y sus operaciones implicadas; el funcional se refiere a la comprensión de un concepto en un nivel significativo del mundo real; el analógico puede requerir de imágenes visuales para identificar las estructuras algorítmicas funcionales y trasladarlas a una variedad de contextos. Los autores señalaron que “el conocimiento de una regla de cálculo no sólo no implica alguna comprensión real del concepto básico subyacente, sino que de hecho puede inhibir la adquisición de una comprensión (relacional) más apropiada” (p. 202).

En la enseñanza de estocásticos es primordial “la modelación de datos para explorar las relaciones entre múltiples variables” (Garfield & Ben-Zvi, 2008, p. 145), distinguirlas como una aplicación de las matemáticas, y “examinar qué tan bien el modelo explica la variación en los datos” (Garfield & Ben-Zvi, 2008, p. 146).

Eje social

Para Steinbring (2005), el concepto matemático se constituye necesariamente de la interrelación entre *objeto*, *signo* y *concepto*. El autor utiliza este *triángulo epistemológico* en su análisis de la interacción en el aula.

En los libros de texto y en los programas de estudio que propone el bachillerato tecnológico (DEMS-IPN, 2008), la importancia atribuida a la distribución normal respecto a otras distribuciones continuas de probabilidad exige su revisión a profundidad. De igual manera, se requiere examinar los términos empleados en la propuesta institucional referidos a estocásticos, pues mediante el análisis de ellos se busca desambiguar el sentido que se les otorga en las situaciones de la enseñanza. Ya Vygotsky (1997) ha señalado que el lenguaje es un mediador entre los conceptos científicos y los que no lo son, "los primeros se aprenden en una situación de enseñanza formal, mientras que los segundos emergen a partir de la experiencia con el mundo cotidiano" (Wertsch, 1988, p. 117).

Método

La observación de la enseñanza es contextualizada, y la participante "se enfoca en la descripción de la realidad además de ayudar a los estudiantes, por etapas sucesivas, a que se sustraigan de ella poco a poco para construir progresivamente un modelo matemático" (IREM, 1997, p. 57). Por abducción (Deledalle, 1990) caracterizamos la comprensión de estudiantes del bachillerato tecnológico de la función de densidad normal, como variable aleatoria y también sólo como función. En ambos casos se consideró su comprensión de la variación. El procedimiento consistió en:

1) La aplicación de un cuestionario (C_{PE}) de cinco reactivos referidos a problemas de teoría de conjuntos, diagramas de Venn, técnicas de conteo, lógica proposicional, ponderación de ramas de un diagrama de árbol, procesos estocásticos finitos y probabilidad condicional. Se recopilaron datos en bitácora de ocho sesiones de enseñanza a 24 estudiantes (E_{pe}) de *Probabilidad y Estadística* de sexto semestre, en particular de su organización de los datos recabados en encuestas propuestas por ellos, para las que deberían distinguir entre los niveles de medición nominal, ordinal (para variables categóricas), de intervalo y de razón (para variables numéricas).

2) Se diseñó una estrategia de enseñanza adicional de comportamiento de funciones a cuatro estudiantes (E_1, E_2, E_3, E_4), del curso *Cálculo Diferencial* de cuarto semestre, en ocho sesiones en las que el investigador (I) incluyó la función gaussiana y una actividad de mediciones de estaturas. Se les aplicó un cuestionario (C_{CD}) con 24 reactivos de preguntas abiertas repartidas en tres partes, relativas al comportamiento de funciones: i) agrupar en cinco intervalos 25 mediciones, graficarlas, argumentar respecto a la función de distribución normal y sus parámetros; ii) describir, distinguir y comparar las gráficas de las funciones $f(x) = e^{-x^2}$ y $g(x) = e^{x^2}$; iii) identificar la simetría de la función de densidad normal estándar. La referencia al dominio de una función dio paso a la de los intervalos expresados mediante desigualdades.

3) Las respuestas de E_3 y E_4 al cuestionario y sus desempeños en la actividad motivaron su entrevista, semiestructurada (Zazkis y Hazzan, 1999), para obtener más datos de su comprensión de ideas fundamentales de estocásticos.

La enseñanza y las dos entrevistas se videograbaron y transcribieron para su análisis.
Aplicamos el triángulo epistemológico en el análisis de la interacción en el aula (Steinbring; 2005). Mediante la célula de análisis (Ojeda, 2006) caracterizamos las enseñanzas PE y CD señaladas en 1) y 2), las respuestas a los cuestionarios y a las entrevistas.

Resultados

En general, al privilegiar en la enseñanza de *Probabilidad y Estadística* el conocimiento de cálculo (Pollatsek *et al.*, 1981) de cardinalidades de conjuntos, los estudiantes no los interpretaron como eventos de un espacio muestra. La enseñanza adicional de comportamiento de funciones a los estudiantes de *Cálculo Diferencial*, que privilegió la representación figural, resultó en que centraron su atención en la curva trazada de una función y no en la relación de las variables dependiente e independiente respectivas.

Probabilidad y Estadística

Como antecedente a la identificación de los eventos que corresponden a los valores de una variable aleatoria, las respuestas al cuestionario C_{PE} revelaron dificultades para identificar subconjuntos y errores al asignar cardinalidades, a partir de 19 respuestas al tercer reactivo. El diagrama de Venn que trazó el estudiante E_{pe} (véase la Figura 1) no corresponde al referente, a saber: *encontrar la probabilidad de que un estudiante de un grupo de 50 tomado al azar leyera al menos uno de tres idiomas, dado que: 30 leen francés (F), 20 leen alemán (A), 5 leen náhuatl (N), 2 leen F y N, 3 leen A y N, 2 leen A y F y uno lee los tres idiomas*; más bien correspondería a la proposición "lee uno y solamente un idioma"; por su asignación incorrecta de cardinalidades asignó una probabilidad incorrecta.

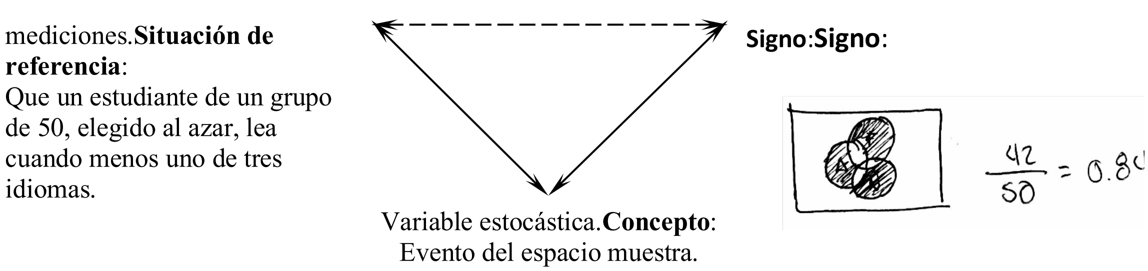


Figura 1. Triángulo epistemológico (Steinbring, 2005) para "espacio muestra".

La Tabla 1 caracteriza su respuesta.

Tabla 1. Análisis (Ojeda, 2006) de la respuesta de E_{pe} al tercer reactivo del cuestionario C_{PE} e identificación de errores cometidos (Donaldson, 1963).

Contexto PE 6o semestre **Situación**	**Ideas fundamentales de estocásticos**	**Otros conceptos matemáticos**	**Recursos semióticos**	**Términos empleados**	**Tipos de error**
Distribución de 50 estudiantes por su lectura de tres idiomas. Que uno elegido al azar lea al menos uno.	Medida de probabilidad, Espacio muestra, Variable aleatoria, Muestra.	Número (racional y decimal), operaciones aritméticas (división).	Lengua natural escrita, signos numéricos, diagrama de Venn.	Probabilidad, 50 estudiantes, al azar, cuando menos, un estudiante.	Arbitrario: no considera cardinalidades Ejecutivo: sin vinculación numérica del referente.

Aunque E_{pe} puso en juego el *Sistema 2* (Kahneman, 2011) al elegir las regiones sombreadas de su diagrama de Venn, su asignación de cardinalidades no corresponde ni al evento que él propuso ($n\{A \cup F \cup N\} - (n\{A \cap F\} + n\{A \cap N\} + n\{N \cap F\}) + 2n\{A \cap F \cap N\} = 44$ estudiantes) ni al evento en el tercer reactivo ($n\{A \cup F \cup N\} = 49$ estudiantes). Esto revela un "error arbitrario" (Donaldson, 1963, pp. 183-185) al ignorar parte de la pregunta, pues no consideró las cardinalidades de las intersecciones de los conjuntos de su diagrama; y un "error ejecutivo" (Donaldson, 1963, p. 184) originado por alguna falta de atención en su razonamiento al ofrecer una solución numérica desvinculada de la situación referente (véase la Tabla 1).

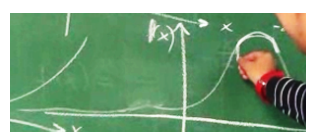
Cálculo Diferencial

En el curso regular de *Cálculo Diferencial*, la *continuidad* ya se había tratado. En la séptima sesión de la estrategia, I pidió a E_4 que señalara en la gráfica de la función gaussiana el intervalo en el que ésta es continua ($(-\infty, \infty)$) —que correspondería al espacio muestra de la variable:

I: ¡Ah!, entonces, ¿dónde es continua?, ¿en qué intervalo?
E_4: Desde menos infinito hasta antes de aquí [señala cerca de un punto de inflexión en la gráfica (Figura 2)].

Situación de referencia: Continuidad en un intervalo de la función de densidad normal.

Signo:



Concepto: Continuidad.

Figura 2. Triángulo epistemológico (Steinbring, 2005): Caracterización de continuidad.

E_4 enfocó el trazo, conjunto de parejas ordenadas de la curva, sin disociar las variables dependiente e independiente. Al centrar su atención en la curva, reveló su indistinción entre cambio de concavidad y continuidad en un intervalo en el que la función es creciente (véase la Figura 2). Este error, estructural (Donaldson, 1963), presagia interpretaciones erróneas de E_4 de la normal, por ejemplo, la falta de identificación de que los resultados de repetidas mediciones de una estatura son valores de una variable aleatoria continua, que la desviación estándar no se interprete como una medida de variación respecto a la media o que la probabilidad de una variable aleatoria normal para un intervalo dado no se asigne al área bajo la curva entre los valores de ese intervalo por no reconocer sus dos valores extremos. Es decir, no se advertiría a la normal como un modelo de fenómenos aleatorios del mundo real, por ejemplo, de la distribución de las estaturas de los individuos.

Tabla 2. Análisis (Ojeda, 2006) de la participación de E_4 en sesión de enseñanza e identificación de errores (Donaldson, 1963).

Contexto CD (7ª sesión de enseñanza). **Referente**	**Ideas fundamentales de estocásticos**	**Otros conceptos matemáticos**	**Recursos semióticos**	**Términos empleados**	**Tipo de error**
Función de densidad normal.	Variable aleatoria.	Función de variable real, intervalo, continuidad, asintoticidad, punto de inflexión, concavidad, infinito, producto cartesiano.	Signos algebraicos, gráfica de la función de densidad normal.	Función, continua, intervalo.	Estructural: indistinción entre cambio de concavidad y continuidad en un intervalo.

El séptimo reactivo del cuestionario C_{CD} pidió indicar la estatura con mayor frecuencia de ocurrencia de un conjunto de datos unimodal. El desempeño de E_4 en ese reactivo reveló su indistinción entre un valor de la variable estocástica continua "estaturas de estudiantes de cuarto semestre" elegido por el criterio de mayor número de repeticiones en un conjunto de mediciones efectuadas ($x_i = 173.2$ cm.) con uno calculado mediante un algoritmo que describe un efecto global de las mediciones como un parámetro y que no necesariamente figura en una lista de las mediciones de estaturas efectuadas ($\overline{x} = 163.3$ cm.) (véase la Figura 3).

7. ¿Cuál es la estatura con mayor frecuencia de ocurrencia?
163.3 cm y 173.2

Figura 3. Respuesta de E_4 al séptimo reactivo del C_{CD}.

La respuesta de E_4 (véase la Figura 4) develó su interpretación errónea del fenómeno aleatorio.

Situación de referencia:
Indicar la estatura con mayor frecuencia de ocurrencia de un grupo de 25

Concepto:

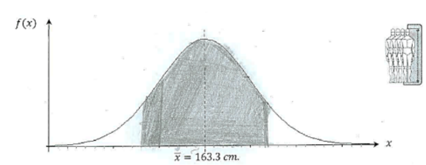


Figura 4. Triángulo epistemológico (Steinbring, 2005) para variable estocástica.

Este error, estructural (Donaldson, 1963), reveló una indistinción entre frecuencia de ocurrencia y media aritmética (véase la Tabla 3).

Tabla 3. Análisis (Ojeda, 2006) de la respuesta de E_4 al séptimo reactivo de C_{CD} e identificación de errores (Donaldson, 1963).

Contexto Cuestionario CD. **Situación**	**Ideas fundamentales de estocásticos**	**Otros conceptos matemáticos**	**Recursos semióticos**	**Términos empleados**	**Tipos de error**
Indicar la estatura con mayor frecuencia de ocurrencia de un grupo de 25 mediciones.	Variable estocástica, Espacio muestra.	Operaciones aritméticas, producto cartesiano, unidades de longitud (cm).	Lengua natural escrita, signos numéricos y algebraicos, gráfica de la función de distribución normal.	Estatura, frecuencia de ocurrencia, mediciones.	Estructural: Indistinción entre frecuencia de ocurrencia y media aritmética.

Conclusiones

Durante el periodo de dos años y medio de haber terminado su educación básica, los estudiantes de sexto semestre no habían tenido una enseñanza de estocásticos (DEMS-IPN, 2008). El comportamiento de funciones de variable real aún no está aprehendido por E_4, lo que no contribuye a que las funciones de distribución de probabilidad continuas constituyan para él un modelo explicativo (Heitele, 1975) de situaciones reales. Su dificultad para comunicar la noción de función continua manifiesta una adquisición inapropiada de un concepto que pone en juego la lógica matemática (Badiou, 1978) que impediría adquirir al menos un conocimiento funcional (Pollatsek *et al*., 1981) de la función de densidad normal. Si bien esta última es difícil para estudiantes con un primer acercamiento al Cálculo, en estos cursos se le podría reconsiderar para encaminar gradualmente su desarrollo como modelo explicativo en estocásticos, por lo común derivado de su presentación figural en la enseñanza, hacia uno analítico.

La identificación de las dificultades en el tratamiento de datos agrupados por los estudiantes de *Cálculo Diferencial*, específicamente del error estructural (Donaldson, 1963) manifestado por E_4 al tratar indistintamente la frecuencia de ocurrencia de un valor de un conjunto dado y la media aritmética, repercutiría en la asignatura *Probabilidad y Estadística* como una dificultad para advertir el papel de la media y la desviación estándar en la función de distribución normal, es decir, confundiría el significado de la media aritmética como parámetro de referencia para describir la variación de la función con un valor puntual del fenómeno general y anclaría el significado de la desviación estándar a un valor cuya importancia estaría restringida a localizar valores en una tabla que se usa para resolver ejercicios. La asociación de los parámetros de la estandarización a la gráfica en forma de campana (no a la función de distribución normal) tendría un significado de cálculo (Pollatsek *et al.*, 1981), no de representante ni de medida de dispersión de datos respecto a éste, ni de su distribución (de probabilidad).

Nuestros resultados vaticinan una inadvertencia de ideas de estocásticos en la actividad científica como fundamentos de un sistema formal matemático, por lo que afirmamos la necesidad de implementar estrategias de enseñanza que pongan de relieve la naturaleza aleatoria de los fenómenos propuestos a los estudiantes del bachillerato tecnológico para su estudio en su formación en estocásticos, a fin de motivar un desarrollo del *Sistema 2* (Kahneman, 2011) de manera prevaleciente ante situaciones bajo incertidumbre. La intuición (Fischbein, 1975) parece ser el enlace entre el privilegio de las operaciones controladas del *Sistema 2* (Kahneman, 2011) sobre las operaciones automáticas propias del *Sistema 1* (Kahneman, 2011).

Referencias bibliográficas

Badiou, A. (1978). *El concepto de modelo: bases para una epistemología materialista de las matemáticas*. 3a edición. México: Siglo Veintiuno Editores.
Burrill, G. & Biehler, R. (2013). Les idées statistiques fondamentales dans le curriculum scolaire. *Statistique et Enseignement*, 4(1), pp. 5-24.
Deledalle, G. (1990). *Leer a Peirce hoy*. España: Gedisa.
Dirección de Educación Media Superior (DEMS-IPN). (2008). *Programas de Estudios*. México: IPN.
Donaldson, M. (1963). *A Study of Children's Thinking*. UK: Tavistock Publications.
Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. The Netherlands: Reidel Publishing Company.
Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing Students' Statistical Reasoning. Conecting Research and Teaching Practice*. USA: Springer.
Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6 (2), pp. 187-205.
IREM, (1997). *Enseigner les probabilités au Lycée*. France : Réseau des IREM, Direction des Lycées et Collèges, pp. 54-104.
Kahneman, D. (2011). *Pensar rápido, pensar despacio*. España: Debate.
Pollatsek, A., Lima, S., Well, D. (1981). Concept or Computation: Students' Understanding of the Mean. *Educational Studies in Mathematics* 12, pp. 191-204.
Saldanha, L. & Liu, Y. (2014). Challenges of Developing Coherent Probabilistic Reasoning: Rethinking Randomness and Probability from a Stochastic Perspective. En Chernoff, E. & Sriraman, B. (Eds.). *Probabilistic Thinking. Presenting Plural Perspectives*, pp. 367-396. Dordrecht, Netherlands: Springer.
Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective*. USA: Springer.
Torres, O. (2013). *Limitaciones en la adquisición de ideas fundamentales de estocásticos por estudiantes de ingeniería: El caso de un instituto tecnológico.* Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav.
Vygotsky, L. (1997). *Pensamiento y lenguaje*. España: Visor.
Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente*. España: Paidós.
Wild, C. (2006). The concept of distribution. *Statistics Education Research Journal* Vol. 5(2), pp. 10-26.
Wittrock, M. (1986). *La investigación de la enseñanza II*. España: Paidós.
Zazkis, R. and Hazzan, O. (1999). Interviewing in Mathematics Education Research: Choosing the Questions. *Journal of Mathematical Behavior*, Vol. 17(4), pp. 429-439.

ANÁLISIS DE CONFLICTOS SEMIÓTICOS EN PROYECTOS DE ESTUDIO SOBRE LA CORRELACIÓN Y REGRESIÓN EN BACHILLERATO

Alejandro Angulo Escamilla, Mabel Toquica Wilches
Gimnasio Vermont. (Colombia)
alejandro.angulo@gimnasiovermont.edu.co, mabel.toquica@gimnasiovermont.edu.co

Resumen
Se comunican avances de un trabajo en el que nos proponemos caracterizar conflictos semióticos de tipo cognitivo que se identifican en 25 informes finales de proyectos de estudio sobre la correlación y regresión, escritos por estudiantes de bachillerato de un colegio privado de Bogotá. Se presentan las características generales del proceso de estudio planificado e implementado, las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción matemáticos (EOS) utilizadas en el análisis de contenido de los informes escritos, y se discuten las implicaciones de los resultados para la enseñanza.

Palabras clave: conflicto semiótico, correlación, regresión lineal, educación estadística, proyectos estadísticos

Abstract
In this paper, we report the advances of a study in which we propose to characterize semiotic conflicts identified in 25 final reports about correlation and regression analysis projects, written by high school students at a private school in Bogotá. We present the general characteristics of the planned and implemented process of study; the theoretical tools of the Onto-Semiotic Approach (OSA) of mathematical knowledge and instruction used in the semiotic analysis of the written reports. We also discuss the consequences of the outcomes for teaching.

Key words: semiotic conflict, correlation, linear regression, statistics education, statistics projects

Introducción

En este trabajo se enfatiza la importancia de otorgar espacios para abordar las temáticas relacionadas con el pensamiento aleatorio y estadístico en bachillerato, en particular la correlación y regresión, puesto que tal pensamiento ocupa hoy un lugar importante en la educación general deseable para los futuros ciudadanos del mundo. El estado de arte sobre el estudio de la correlación y regresión en bachillerato, realizado por Gea (2014) reveló que al tema no se le ha otorgado especial relevancia en el campo de la Matemática Educativa, y que se requieren trabajos que profundicen en el análisis de las prácticas matemáticas asociadas a tareas de correlación y regresión.

Con tal necesidad como eje articulador, se planificó e implementó un proceso de estudio de la correlación y la regresión con estudiantes de bachillerato (16-17 años) de un colegio privado de Bogotá (Colombia), cuyo propósito general era fortalecer la capacidad para interpretar y evaluar críticamente información estadística en diversos contextos, a través del análisis, uso e interpretación de estadísticos de tendencia central, variabilidad y correlación que permitieran explicar y comprender las situaciones-problemas propuestas en el marco del desarrollo de proyectos de estudio. Como productos finales, los estudiantes elaboraron un informe escrito (8 a 10 páginas) reportando el proyecto desarrollado y un póster para la socialización de este en un Congreso (CEA-GV) organizado para tal propósito (Angulo, 2017); estos conformaron la muestra utilizada en el análisis que se presenta.

El estudio tiene como propósito general determinar los significados personales globales y declarados en los productos elaborados por los estudiantes; sin embargo, hemos considerado pertinente y necesario asumir en primera medida la identificación y clasificación de conflictos semióticos ligados a los diferentes objetos que intervienen o emergen en el análisis de correlación y regresión, presentes en los 25 reportes escritos de proyectos de estudio estadístico.

Marco conceptual

Consideramos que el enfoque más adecuado para definir y afrontar la problemática esbozada, es el ofrecido por el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007); puesto que asumimos la relatividad cognitiva y socioepistémica del conocimiento matemático, y creemos que desde el EOS se ha ido elaborando una ontología suficientemente rica y compleja para analizar y describir la actividad matemática.

Significados personales e institucionales

El significado de un objeto matemático se define como el sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona (o una institución) realiza para resolver un campo de situaciones–problemas en las que dicho objeto interviene o de las cuales emerge. Esta primera distinción (dualidad institucional-personal), y la relatividad socioepistémica y cognitiva de los significados en el EOS, conlleva considerar tipos de significados institucionales (*referenciales, pretendidos, implementados, evaluados*) y de significados personales (globales, declarados y logrados) (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011).

Dentro de los significados institucionales conviene considerar que: el *Significado Referencial* para nuestro trabajo se presenta resumido en la figura 1; el *Significado Pretendido* viene dado por el proceso de planificación de la asignatura "Estadística 10º" del cual se presenta un resumen más adelante; el *Significado Implementado* corresponde al sistema de prácticas relativas al análisis de correlación y regresión en el desarrollo de los proyectos de estudio (las cuales sólo se han analizado parcialmente); y, en cuanto al *Significado Evaluado,* los informes escritos constituyen sólo una parte del mismo, ya que se recabaron otras pruebas tendientes a identificar manifestaciones de comprensión por parte de los estudiantes.

Los significados logrados por los estudiantes dependen fundamentalmente de los significados institucionales, y conviene distinguir los significados personales *Globales, Declarados* y *logrados.* Son precisamente los significados declarados y logrados los que analizamos parcialmente a través del análisis de los informes escritos por los estudiantes.

Las prácticas que desarrollan los estudiantes se consideran correctas si se adecúan al significado institucional, por lo que en el EOS surge la noción de *conflicto semiótico*, que se refiere a cualquier "disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas" (Godino, 2002, p.250). El constructo *conflicto semiótico* ayuda a reflejar las relaciones entre objetos matemáticos y los procesos interpretativos en las prácticas matemáticas que explicarían algunos errores de los estudiantes (Godino, Batanero y Font, 2007).

Los objetos matemáticos como emergentes o intervinientes en los sistemas de prácticas

Cuando se realiza una práctica matemática específica, se activa un conglomerado de entidades matemáticas de diversos tipos (situaciones–problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), esta tipología en el EOS permite un análisis detallado de la actividad matemática, para lo cual es necesario desvelar la complejidad implicada, en función de *redes de objetos intervinientes o emergentes de los sistemas de prácticas*; que se conciben como *configuraciones ontosemióticas* de prácticas, objetos y procesos.

En el ámbito de nuestro trabajo, en la realización por parte de los estudiantes de prácticas matemáticas relativas al análisis de correlación y regresión se activaron configuraciones (cognitivas) de objetos y procesos. Entendemos que los significados personales asociados a tales configuraciones pueden, o no, acoplarse con el significado institucional, asociado a una configuración (socioepistémica), de referencia. Por ello, fue necesario establecer los significados de referencia y pretendido del análisis de correlación y regresión en bachillerato; y caracterizar las configuraciones de objetos presentes en los informes escritos por los estudiantes, para que, a partir del análisis de contenido de los diversos elementos de significado expresados en los informes, y de su contraste con el significado institucional de referencia, se pudieran identificar los principales conflictos semióticos.

Significado Institucional de referencia

Para establecer el significado institucional de referencia en nuestro trabajo (Figura 1), nos basamos de una parte en un análisis del trasfondo ecológico de las prácticas matemáticas que se desarrollan en la institución, y de otra, en el estudio reportado por Gea(2014).

Figura 1: Elaboración propia con base en análisis, revisión y adaptación curricular del significado de referencia propuesto por Gea (2014, pp. 182 - 184)

En nuestro análisis de las directrices curriculares del Programa del Diploma del Bachillerato Internacional (PD-IBO, 2016), y del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 2006) encontramos presente la relevancia y el sentido educativo implícito del análisis de correlación y regresión.

Diseño instruccional

El diseño del proceso de estudio se realizó desde los planteamientos generales de la Enseñanza para la Comprensión (Blythe, 1999), siguiendo en la implementación tres etapas generales: *Exploratoria* (se estudiaron preliminares al análisis de correlación), *Indagación guiada (*los informes escritos son, entre otros, productos de esta etapa) y *Síntesis* (los pósteres y su socialización en el CEA-GV fueron los productos finales) (véase Angulo, 2017). Específicamente, la etapa de indagación guiada se estructuró con base en la propuesta *"Estadística con Proyectos"* (Batanero y Díaz, 2011) en las fases: (a)Planteamiento de un problema; (b) Decisión sobre los datos a recoger; (c) Organización y sistematización de Información; (d) Análisis de datos, (e) Obtención de conclusiones sobre el problema planteado; (f) Formulación de pequeñas inferencias sobre los conjuntos de datos y (g) Redacción de informe final.

En ese sentido, se esperaba promover no solo que los estudiantes comprendieran conceptos estadísticos, sino que también relacionaran sus saberes con la realidad y fueran capaces de referirse a ellos desde una perspectiva estadística. La materialización de cada proyecto en el informe escrito y en el póster de socialización permitió a los estudiantes demostrar habilidades para el análisis de correlación y regresión. Los informes se evaluaron con una rúbrica específicamente diseñada para ello, y se realizó evaluación de pares con doble ciego.

Metodología

Seguimos el mismo método de *análisis de contenido* usado por Cobo y Batanero (2004) y Gea, Fernandes, López-Martín y Arteaga (2017), ya que coincidimos en reconocer que nos ofrece la posibilidad de investigar sobre la naturaleza del discurso, y permite analizar con detalle y profundidad el contenido asociado a cualquier elemento ostensivo de la comunicación (expresión); ejemplo de tal análisis se presenta en la tabla 1.

Tabla 1. Ejemplo del análisis semiótico realizado

PLANO DE LA EXPRESIÓN	PLANO DEL CONTENIDO
 A primera vista es posible establecer que existe una relación que podría ser descrita como lineal, es decir, que el aumento en el valor de una de las variables se refleja en un aumento en el valor de la otra. Esta relación resulta intuitivamente acertada puesto que, como se mencionó previamente, se espera que, con un tamaño poblacional mayor, la producción de cereales también incrementa. **(Unidad de Análisis (Ua4_Mp5):** **Informe "M" U4. Página 5)**	Los datos bidimensionales se presentan en una gráfica **(SP1)**; sin embargo, no es evidente cómo se construye a partir de la relación entre las variables de estudio y la variable tiempo. - los juicios de asociación se basan en la gráfica **(PC21)**, y los argumentos son intuitivos no explícitos **(A03)** - Se caracteriza la asociación como lineal en concordancia con la gráfica presentada; sin embargo, se confunde lo lineal con el sentido de la asociación: "el aumento en el valor de una de las variables se refleja en un aumento en el valor de la otra" (**C_PP25,** ya que no usa adecuadamente el diagrama para determinar el sentido correctamente) (**C_C:** Conflicto asociado al concepto de función o relación lineal; que conlleva a **C_C31:** ya que hay un malentendido de la dependencia funcional lineal). - Se presenta un gráfico de dispersión correcto de los datos bidimensionales (**PC13, PP11c**), ya que poseen frecuencia absoluta igual a la unidad. (**L41**). -Se realiza análisis del tipo de dependencia (**SP22**) a partir del gráfico, pero no se usa la gráfica para establecer la intensidad de la relación. (**SP23**). (**C_PC21**, se interpreta sentido y tipo, pero no se establece intensidad de correlación a partir de la gráfica).

Fuente: Elaboración propia. Los códigos utilizados en el plano del contenido corresponden a la configuración presentada en la figura 1.

Hemos seguido cíclicamente las acciones: (a) lectura minuciosa de los informes para determinar unidades de análisis (párrafos-gráficos); (b) se compararon los contenidos de dichas unidades con la configuración epistémica de objetos matemáticos identificada en el significado de referencia (las categorías utilizadas fueron establecidas a priori, tras un análisis detallado del estudio de Gea (2014)); (c) al tener las configuraciones presentes en los informes, se analizaron sus expresiones y se describieron ejemplos prototípicos de los conflictos semióticos que se identificaron de acuerdo con los objetos primarios (lenguajes, conceptos, proposiciones-propiedades, procedimientos y argumentos); (d) se elaboraron resúmenes de los resultados y se discutieron posibles acciones de mejora para evitar o superar los conflictos identificados.

Resultados Preliminares

Aunque el estudio está en curso, hemos podido llegar a algunos resultados en relación con nuestros propósitos planteados. De manera general hemos logrado una aproximación a los significados declarados en los informes y, en contraste con el significado referencial fijado, hemos identificado los conflictos que con mayor frecuencia se presentan en los informes escritos. A continuación, la figura 2 presenta un resumen de los conflictos semióticos que encontramos y la Tabla 2 algunos ejemplos prototípicos.

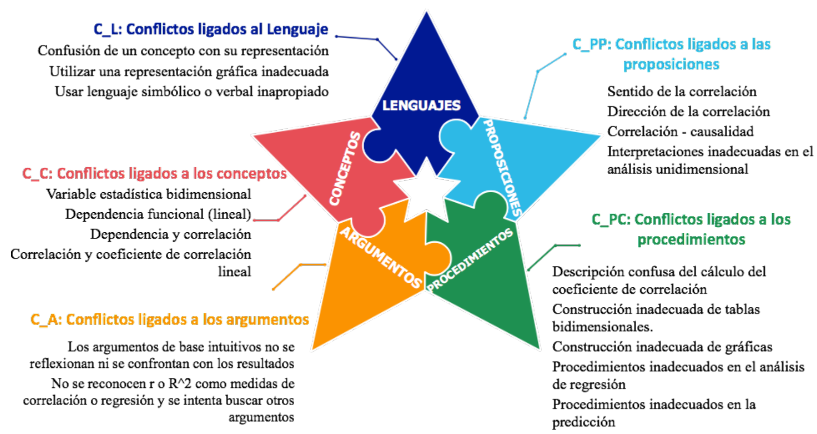
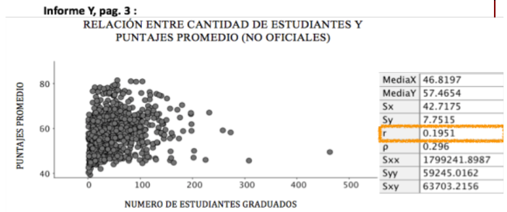


Figura 2. Conflictos semióticos ligados a los objetos primarios

Fuente: Elaboración propia

Tabla 2. Descripción de conflictos semióticos y ejemplos prototípicos

Conflictos	Ejemplos Prototípicos
Descripción de Conflicto C_PP2.Correlación-Causalidad: Conflicto ligado a las propiedades *PP2.Dependencia entre variables.* Los estudiantes consideran que la asociación de variables solo puede darse cuando existe causa y efecto entre ellas, lo cuál es evidencia de una concepción causal (Gea, 2014).	**Informe W, pag. 10:** Se empezó este proyecto con una hipótesis que se basaba en que al comparar la cantidad McDonald's por estado de Estado Unidos y la cantidad de obesos por estado, evidenciaría una relación positiva en cual entre más McDonald's más obesos por estado. acuerdo a los análisis relazados en cada una de las gráficas y subrayando el análisis he en el diagrama de dispersión, es posible evidenciar como esta hipótesis resultó ser falsa no existir una relación entre dichas variables también nos es posible concluir que aumento de dicho restaurante no ha llegado a perjudicar a la población a través de los a por su aumento de franquicias, causándoles obesidad. No necesariamente la obesidad relacionada con el tipo de comida es por esto por lo cual posible a su ves concluir existen otras variables no estudiadas que pueden ser la causa de dicha obesidad.
Descripción de Conflicto C_A01-04. Intuiciones -cálculos: Conflicto ligado a los argumentos de base intuitiva en contraste con los basados en estadísticos. Aunque la hipótesis (de base intuitiva) se confronta con los resultados, el esquema de argumentación presenta fallos al suponer que una baja correlación implica no dependencia	**Informe Y, pag. 3 :**  Gráfica 2.1: Relación entre cantidad de estudiantes y puntajes promedio (No Oficiales). **Informe Y, pag. 9:** • Con los resultados de las gráficas 2.1 y 2.2 pudimos notar que nuestra hipótesis acerca de la correlación entre el número de estudiantes que presentan las pruebas SABER de cada colegio y su promedio respectivo era errónea, pues al analizar los resultados vimos que el coeficiente de correlación es muy bajo, lo que nos demuestra que el promedio no depende del número de estudiantes.

Fuente: Elaboración propia

Conclusiones e implicaciones para la enseñanza

Los conflictos semióticos identificados, junto con las configuraciones cognitivas permiten una descripción o caracterización y análisis de los significados personales declarados en los informes escritos. Estos análisis son fundamentales para realizar un análisis de valoración de la idoneidad didáctica; particularmente, consideramos realizar la valoración de las facetas epistémica, cognitiva e interaccional, de manera que a partir de estas se puedan establecer acciones de mejora tanto en la planificación de procesos de estudio de la correlación y regresión, así como en su implementación en bachillerato.

Para superar o evitar el conflicto "Correlación-Causalidad", proponemos que en la etapa de indagación guiada del proceso de estudio, se realicen tareas en las cuales la asociación de las variables resulte ser "contraintuitiva", en el sentido de que se desafíen los argumentos basados en la intuición. Adicionalmente, el análisis nos ha mostrado una alta frecuencia de los conflictos "Asociación lineal - Directamente proporcional" y "Dependencia funcional"; por ello consideramos que en la etapa exploratoria se haga un análisis de los conocimientos previos de los estudiantes acerca de las situaciones de proporcionalidad directa, y que en la etapa de indagación guiada, se propongan tareas en las cuales emerja el concepto de distribución bidimensional en relación con el de dependencia estadística, y se usen gráficas tridimensionales de la distribución.

La escasa presencia de conflictos asociados a los procedimientos de cálculo (de los coeficientes R y R^2, mínimos cuadrados, etc.), sugiere poca proximidad cognitiva al significado referencial, y una baja representatividad epistémica del significado pretendido/implementado en cuanto a este objeto primario; sin embargo, ello se equilibra con una alta idoneidad en la faceta mediacional, del proceso de estudio, en tanto se incluyeron recursos tecnológicos (Excel, Geogebra, calculadoras graficadoras, entre otros) para apoyar la obtención de los estadísticos necesarios en el análisis de correlación y regresión. En la faceta mediacional, el análisis de las fuentes (bibliográficas y de datos) usadas y referenciadas en los informes, sugiere la urgencia de un análisis semiótico sobre el tratamiento que se da al tema de la correlación y regresión en recursos de internet, por lo menos de aquellos sitios con alto tráfico.

Finalmente, este estudio nos ha permitido reconocer la importancia del análisis semiótico y la pertinencia de las herramientas del EOS en la identificación, análisis y valoración de los significados institucionales y personales de la correlación y regresión en bachillerato. Así como reconocer que la identificación y análisis de conflictos semióticos, es un elemento clave a considerar en la valoración de idoneidad didáctica de procesos de estudio.

Referencias bibliográficas

Angulo, A. (2017). ¿Qué matemáticas uso para interpretar información y tomar decisiones? *Mirada Casual Nº 35,* 13-16.
Batanero, C., y Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Granada: Universidad de Granada.
Blythe, T. (1999). *La enseñanza para la comprensión: guía para el docente*. Argentina: Paidós.
Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Significados de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 22 (1), 5-18.

Gea, M.M. (2014). *La correlación y regresión en bachillerato: Análisis de libros de texto y del conocimiento de los Futuros profesores.* Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada. España.

Gea, M.M., Fernandes, J. A., López-Martín, M. M. y Arteaga, P. (2017). Conflictos semióticos relacionados con la organización de datos bidimensionales en libros de texto de Bachillerato. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en: enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en didactique des Mathématiques,* 22(2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics,* 77(2-3), 247-265.

International Baccalaureate Organization. (2016). *Mathematics SL Guide.* Cardiff: International Baccalaureate Organization.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias.* Bogotá: Magisterio.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA DE UNA TAREA ASOCIADA A LOS NÚMEROS NATURALES PRESENTE EN UN TEXTO DEL V CICLO

Edwin Cristian Julian Trujillo, Flor Isabel Carrillo Lara, Cecilia Gaita Iparraguirre
Pontificia Universidad Católica del Perú. (Perú)
ecjuliant@pucp.pe, f.carrillo@pucp.edu.pe, cgaita@pucp.pe

Resumen
En este reporte se presenta el análisis epistémico de una tarea asociada a los números naturales, presente en un texto oficial. Tomando como elemento teórico la noción de configuración epistémica desarrollada en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, se construyó el significado de referencia en la institución educación primaria en relación a tareas que requieren considerar la estructura de los números naturales. A partir de ello, se analizó una tarea presente en el texto oficial, encontrándose que predomina el lenguaje verbal y simbólico, se enfatiza en el uso de propiedades y operaciones fundamentales de los números naturales, además los argumentos empleados corresponden al método deductivo.

Palabras clave: configuración epistémica, Objetos matemáticos, Números naturales

Abstract
In this report, we present the epistemic analysis of a task, which appears in an official textbook, associated with natural numbers. Taking as a theoretical element, the notion of epistemic configuration developed in the Onto-semiotic Approach of mathematical knowledge and instruction, we constructed the meaning of reference, in the primary education institution, in relation to tasks that need to consider the structure of natural numbers. In the analysis of the task in the official textbook, we found that verbal and symbolic language is predominant; the use of properties and fundamental operations of natural numbers is emphasized, and; the arguments used come from the deductive method.

Key words: epistemic configuration, mathematical objects, natural numbers

Introducción

El presente artículo es un recorte de la tesis de investigación de Trujillo (2017), en la que se realizó un análisis epistémico de veinte tareas estructurales es decir, tareas en las que el objeto de estudio son las operaciones y propiedades de los números naturales, fraccionarios y expresiones con decimales positivos (números racionales) que están presentes en los libros de textos de matemáticas del V ciclo del sistema educativo peruano (libros para estudiantes de 10-11 años de edad).

Se sabe que al empezar la educación secundaria, los estudiantes presentan errores al resolver ecuaciones esto como consecuencia de varios factores. Al respecto Castellanos y Obando (2009) manifiestan que una de las causas es la incorrecta interpretación de propiedades, definiciones, lenguaje y errores al operar algebraicamente. Los investigadores señalan que los estudiantes que no dominan las operaciones con números traducen estos errores al campo algebraico haciendo hincapié en que se debe enseñar al estudiante la aplicación correcta de las propiedades y operaciones.

Por otro lado, este conjunto de errores es motivado según indica Socas (2007) por la forma como se enseñan las propiedades de las operaciones básicas tales como: la adición, sustracción, multiplicación y división. Según el autor esto se debe a que todas las propiedades se enseñan juntas, sin profundizar en cada una de ellas por separado. El investigador recalca en la enseñanza adecuada de las propiedades y manifiesta la confusión por parte de los estudiantes al emplear la propiedad distributiva como la asociativa del producto, inclusive añade que ante expresiones con operaciones combinadas, se jerarquiza el uso de los signos de agrupación, desarrollando primero los paréntesis, luego los corchetes y finalmente las llaves. Es así que cuando los mismos se enfrentan a operaciones combinadas donde intervienen letras y números utilicen el mismo procedimiento mencionado.

Debido a lo señalado Obando (2009) y Socas (2007) y por otros investigadores del área de Educación Matemática es necesario construir paulatinamente las nociones de operaciones y propiedades de las estructuras numéricas de los números naturales.
En particular, el objetivo de este artículo es realizar un análisis epistémico de una tarea asociada a los números naturales. Esto nos lleva a analizar los recursos didácticos disponibles, que en este caso se refiere a un texto de matemáticas del V ciclo de educación primaria, Matemática 5.

En cuanto a los libros de texto, Font y Godino (2006) mencionan que los textos escolares forman la fuente inmediata donde se almacena la experiencia práctica de los docentes y, en cierta medida, los resultados de la investigación.
Debido a ello, se describen las propiedades y operaciones de una tarea asociada a los números naturales presente en el libro matemática 5, unidad 1 con la finalidad de identificar la configuración epistémica presente para comprender como se articulan y sugerir algunas modificaciones al respecto.

Aspectos teóricos y metodológicos

La investigación se enmarca dentro del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos de Godino (2002), donde tomamos aspectos referidos a los significados institucionales (referencia y pretendido). Godino, Batanero y Font (2007), indican que ante la pregunta que significa o representa tal objeto matemático, se propone como respuesta, el sistema de prácticas que se realiza en el seno de una institución (significado institucional). De acuerdo a los investigadores el significado institucional pretendido es la planificación del proceso de estudio que incluye un sistema de prácticas, la institución elabora diferentes documentos con el fin de conseguir algo en particular. Esta planificación la encontramos en los documentos y libros realizados por las instituciones encargadas del sistema educativo, los planes curriculares y sesiones de clase.

Por otro lado, el significado institucional de referencia es el sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. El significado global requiere de un estudio histórico y epistemológico del objeto matemático, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia es una parte del significado total del objeto matemático, en ese sentido Trujillo (2017) manifiesta que el significado institucional de referencia es el que construye el investigador a partir de los textos de matemática, investigaciones, artículos de divulgación en el ámbito de la educación matemática y documentos oficiales que permiten organizar un significado que es parte del significado global.

Por otro lado, cuando se resuelve una tarea, de acuerdo con Godino, Batanero y Font (2009) surgen objetos matematicos que requieren de la actividad matemática para resolver la tarea. Desde la perpectiva de los investigadores estos objetos son conocidos como entidades primarias. Los investigadores identifican seis entidades primarias: *situaciones-problemas* que pueden ser tareas, ejercicios, problemas de aplicaciones extramatemática o intramatemática (que promueven la actividad matemática) y a partir de las cuales han surgido los conceptos y teorías; *lenguaje matemático* que son términos, expresiones, notaciones, representaciones gráficas, es decir, en un texto vienen dados en forma escrita o gráfica pero en el trabajo matemático pueden usarse otras representaciones (oral, gestual).

Mediante el lenguaje (ordinario y específico matemático) se describen otros objetos no lingüísticos; *procedimientos* son las acciones que el sujeto realiza para resolver los problemas propuestos llámese operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo y/o estrategias; *conceptos* los cuales son introducidos mediante definiciones o descripciones vinculados a un objeto matemático; *propiedades* son enunciados sobre conceptos que deben ser utilizados para la resolución de un problema. Finalmente, los *argumentos* son enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo que el sujeto realiza en la solución de problemas.

Por lo tanto, se entiende que cuando los seis objetos primarios descritos anteriormente se articulan forman configuraciones cuyo análisis, según Font y Godino (2006), brinda información de la estructura de un texto matemático. Asimismo, los autores señalan que las configuraciones pueden ser epistémicas cuando se trata de redes de objetos institucionales, como la que realiza un experto, o bien configuraciones cognitivas cuando se trata de las redes de objetos personales, como la efectúa cada alumno (inexperto).

Debido a ello, desde el EOS se propone una ontología constituida por los objetos primarios y dichos elementos permitirán analizar un texto de matemática usado en el proceso de instrucción (Godino, 2002), en particular permite realizar un estudio detallado de las caracteristicas que presentan una tarea estructural. La articulación de los objetos primarios que forman configuraciones como manifiestan los autores, se esquematiza en la Figura 1.

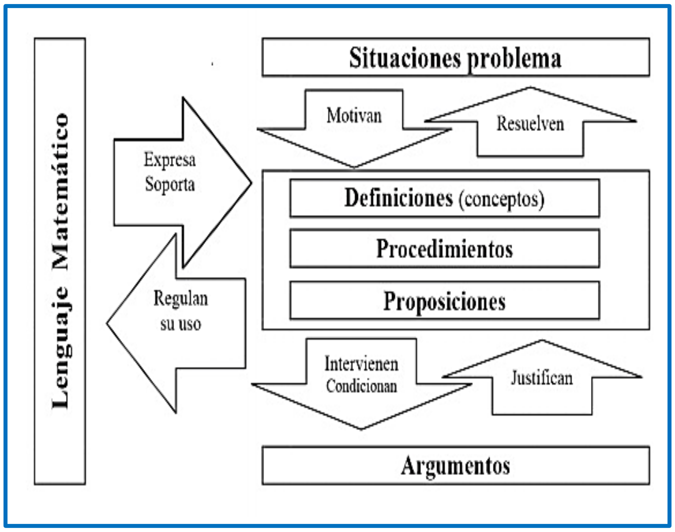


Figura 1. Configuración epistémica
Fuente: Castro, 2011, p. 40

En cuanto a la metodología que se utiliza en la investigación esta es de tipo cualitativa puesto que estamos interesados en realizar un análisis epistémico asociado a las prácticas matemáticas propuesta en el libro de texto de Matemática 5, en particular una tarea de carácter estructural.

En relación a los procedimientos metodológicos de la investigación se presentan las siguientes fases: 1) Establecer el significado de referencia institucional de las tareas estructurales, diseñado a partir de investigaciones en educación matemática, libros didácticos de matemática y de matemática superior y el currículo nacional del Perú 2016. 2) Identificar el significado de referencia pretendido, a partir del libro de Matemática 5 correspondientes al V ciclo del sistema educativo peruano. 3) Identificar aquellas tareas estructurales en el libro de texto de matemática 5, en particular una tarea, las cual es analizada a partir de la configuración epistémica.

La tarea estructural y sus análisis

El texto analizado corresponde al V ciclo de Educación Primaria del Sistema educativo peruano (el cual agrupa a estudiantes de 10 y 11 años de edad), titulado Matemática 5, unidad1, *Nos expresamos con números naturales,* el cual ha sido distribuido por el Ministerio de Educación del Perú a todos los colegios públicos del país.

Para el análisis se tuvo en cuenta los significados de referencia de las operaciones y propiedades de los números naturales que se han determinado en base a investigaciones previas como la de Puig (1989), libros didácticos de matemática como es el caso de Estructuras numéricas y su didáctica para maestros de Godino (2004), libros de matemática como el de Lages (1997) y documentos oficiales que forman parte del currículo nacional del Perú, en este caso los estándares dedicados al V ciclo de la Educación Básica Regular en el Perú, que comprende los grados de quinto y sexto del nivel primaria la competencia, Resuelve Problemas de Cantidad.

Consiste en que el estudiante solucione problemas o plantee nuevos problemas que le demanden construir y comprender las nociones de número, de sistemas numéricos, sus operaciones y propiedades. Además dotar de significado a estos conocimientos en la situación y usarlos para representar o reproducir las relaciones entre sus datos y condiciones.
(Perú, 2016, p. 74).

A continuación, se presenta una descripción del libro de texto, en el que se seleccionan unidades de análisis y se identifican tareas que contienen el objeto de estudio; además, se selecciona la tarea 1 de la unidad "nos expresamos con números naturales", la cual es analizada empleando las herramientas de la configuración epistémica, ello permite comprender la ontología señalada entre las definiciones y propiedades, mientras se resuelven problemas de matemáticas con procedimientos y argumentos que los justifican. En la figura 2 se presenta la tarea seleccionada para el análisis.

Indicamos como calculamos mentalmente el valor de las siguientes expresiones.

a) $17 + (13 + 15)$

b) $2 \times 17 \times 5$

c) 5×112

Solución

a) $17 + (13 + 15) = (17 + 13) + 15$ *(Reagrupando o asociando sumandos)*

$= 30 + 15 = 45$

b) $2 \times 17 \times 5 = 2 \times 5 \times 17$ *(Reacomodando o conmutando factores)*

$= (2 \times 5) \times 17$ *(Asociando los factores)*

$= 10 \times 17 = 170$

c) $5 \times 112 = 5 \times (100 + 12)$ *(Descomponiendo 112 en 2 sumandos)*

$= 5 \times 100 + 5 \times 12$ (Aplicando la propiedad distributiva)

$= 500 + 60 = 560$

Figura 2. *Tarea estructural*
Fuente: Matemática 5 Perú, 2012, p. 18

Al respecto, el primer objeto primario, corresponde a una situación-problema con tres ítems de carácter intramatemático, es decir, la tarea a realizar se refiere solamente a las operaciones y propiedades de las estructuras numéricas de los números naturales, propia de la matemática, en particular del cálculo mental.

En la tabla 1 se presenta la configuración epistémica de la tarea 1 del libro de texto analizado.

En cuanto al análisis de la tarea, se observa que el lenguaje presente es el verbal y simbólico. En el caso del lenguaje verbal por ejemplo: calculamos mentalmente, sumar, multiplicar y el simbólico : $+, \times, (\,), 17, 13, 15, 2, 5, 112$. Las definiciones no están explicitas pero se hacen uso de los Axiomas de Peano. Se definen dos operaciones fundamentales tales como la adición, que asocia a cada par de números naturales $(m\,;n)$ su suma $m+n$, y la multiplicación que hace corresponder al par $(m\,;\,n)$ su producto $m.n$.

Tabla 1. *Configuración epistémica, tarea 1 del texto: Matemática 5*

Situación problema
Indicamos como calculamos mentalmente el valor de las siguientes expresiones. a) $17+(13+15)$ b) $2\times 17\times 5$ c) 5×112 Situación intramatemática.
Lenguaje Verbal: calculamos mentalmente, sumar, multiplicar. Simbólico : $+\,,\times,(\,),17{,}13{,}15{,}2{,}5{,}112$
Definiciones Axiomas de Peano. Definición de dos operaciones fundamentales, la ADICIÓN, que asocia a cada par de números naturales $(m\,;n)$ su suma $m+n$, y la MULTIPLICACIÓN que hace corresponder al par $(m\,;\,n)$ su producto $m.n$
Procedimientos Determinación de un a heurística, uso de las propiedades del sistema numérico $\mathbb{N}$ $(17+13)+15$ (Reagrupando o asociando sumandos) $2\times 5\times 17$ (Reacomodando o conmutando factores) $5\times(100+12)$ (Descomponiendo 112 en 2 sumandos) $5\times 100+5\times 12$ (Aplicando la propiedad distributiva)
Propiedades Asociativa, conmutativa, distributiva, descomposición de sumandos.
Argumentos El argumento utilizado es deductivo, parte de las propiedades de los números naturales, hacia algo particular.

Fuente: Adaptado de Trujillo, 2017 , p.72

Como se observa en la tabla 1, en cuanto a los procedimientos efectuados corresponden a la determinación de una heurística, se presenta de manera explícita los pasos a seguir en la realización de las operaciones.

El uso de las propiedades es explicito, tales como propiedad asociativa, conmutativa, y distributiva. Además se observa la descomposición de sumandos. En el último objeto primario el argumento utilizado es deductivo, parte de las propiedades de los números naturales hacia algo particular, que en este caso son las operaciones con números particulares.

Conclusiones

Luego del análisis constatamos que los significados pretendidos por el libro de Matemática 5, unidad 1, sobre operaciones y propiedades de los números naturales no son representativos del significado institucional de referencia, esto en base a la ausencia de situaciones problemas como la de conjetura y validación, debido a las características que posee el tipo de situación como es la de producir y validar una nueva propiedad, ello podría constituir un gran aporte para la generación de tareas estructurales.

Respecto a la configuración epistémica de la tarea 1, notamos que predomina el lenguaje verbal y simbólico, se enfatiza en el uso de propiedades y operaciones fundamentales de los números naturales y los argumentos empleados corresponden al método deductivo. Se considera una situación problema intramatemática esto permite familiarizarse con el uso de las propiedades de los números esto permitirá un tratamiento adecuado cuando se lleve de valores particulares al cálculo con variables.

Por otro lado, en una visión global del libro Matemática 5 observamos que se consideran situaciones que en gran mayoría son de índole extramatemática esto es, situaciones relacionadas con el mundo real sin embargo, no se establecen conexiones con otras áreas de conocimiento. Esto diverge de lo planteado en el currículo nacional que establece que las áreas deben propiciar la integración de diversos campos del conocimiento acorde con las etapas del desarrollo del estudiante, por ello, la presente investigación muestra que es necesario organizar las tareas estructurales de tal modo que permitan la integración de diferentes campos de conocimiento.

Referencias bibliográficas

Castellanos, M., y Obando, J. (2009). *Errores y dificultades en procesos de representación El caos de la generalización y el razonamiento algebraico.* Obtenido de 10° Encuentro colombiano de matemática educativa.

Font, T., y Godino, J. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Acta Latinoamericana de Matemática 20,* 376-381. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/04_enfoque_ontosemiotico.pdf

Godino, J. (2003). Matemáticas para maestros. Granada España: Proyecto Edumat-Maestros.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Universidad de Granada. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/

Lages, E. (1997). *Análisis real, volumen 1.* Lima, Perú: Colección Textos del IMCA

Perú. (2012). *Libro de texto Matemática 5.* Lima, Perú: Editorial Nocedal.

Perú. (2016). Currículo Nacional de la Educación Básica. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2016.pdf

Puig, L., y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid: Síntesis. Versión conmemorativa 20º aniversario.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico su uso en la formación de profesores. *Investigación en Educación Matematica.* Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo

Trujillo, E. C. (2017). *Configuración epistémica e identificación de niveles de algebrización en tareas estructurales de los textos oficiales del V ciclo de Educación Primaria*. Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima.

RELACIÓN FÍSICA-MATEMÁTICA UN ESTUDIO EPISTEMOLÓGICO EN DESARROLLO CENTRADO EN EL SIGLO XIX

David Valenzuela Zúñiga, Lianggi Espinoza Ramírez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Universidad de Valparaíso. (Chile)
david.valenzuela.z@mail.pucv.cl, lianggi.espinoza@uv.cl

Resumen
Física y matemática tienen una estrecha relación epistémica, histórica y filosófica, sin embargo, ha sido poco considerada en la construcción curricular, formación de profesores y enseñanza de la física en general. Este reporte de investigación tiene por objetivo comunicar algunas reflexiones y hallazgos generales producto de la revisión bibliográfica, y las primeras aproximaciones a las obras de Michael Faraday, James Maxwell y Oliver Heaviside.

Palabras claves: epistemología, electromagnetismo, Faraday, Maxwell, Heaviside

Abstract
Physics and mathematics have a close epistemic, historical and philosophical relationship; however, it has been little considered in curricular design, teacher training and general physics teaching. This research report is aimed at communicating some reflections and general findings from the bibliographic review, and the first approximations to the works of Michael Faraday, James Maxwell and Oliver Heaviside.

Key Word: epistemology, electromagnetism, Faraday, Maxwell, Heaviside

Introducción

Física y matemática tienen una estrecha relación epistémica, histórica y filosófica, sin embargo, ha sido poco considerada en la construcción curricular, formación de profesores y enseñanza de la física en general. Desde la enseñanza de la física, Redish (2005), Tuminaro (2002), Vinitsky y Galili (2014) sostienen que la matemática enseñada en los cursos, tanto a nivel escolar como universitario, no tiene relación con la utilizada en los ramos de física. La matemática se enseña como un lenguaje abstracto, lógico y perfecto, como una herramienta estudiada de manera aislada y desvincula de la realidad de los estudiantes y, que al ser puesta en uso no coincide y no sirve afectando el entendimiento y rendimiento de los estudiantes.

En esta línea, la matemática para el físico es mucho más que un simple lenguaje y va más allá de resolver ecuaciones, investigar funciones y dibujar gráficos, los físicos describen e investigan sistemas físicos, donde el resultado obtenido (a menudo en forma de resolución de problema) se compara con el sentido común y las restricciones teóricas dadas. En esta actividad, los físicos hacen estimaciones, conjeturas, omisiones y aproximaciones, a menudo extendiendo el área de validez de las herramientas usadas, más allá del rigor matemático (Vinitsky y Galili, 2014; Planinic, Milin-Sipus, Katic, Susac y Ivanjek, 2012).
La física, por otro lado, ha aportado buenos ejemplos para la matemática en el ámbito de la modelación y validación de ciertos modelos, desde los cuales se ha enfocado la enseñanza y el aprendizaje mediante la construcción de conceptos matemáticos (Arrieta, 2003; Cordero, 2008). Pero para la enseñanza de la física, la matemática ha sido más un obstáculo que un facilitador como lo menciona Brahmia, Boudreaux y Kanim (2016), produciendo a nivel curricular en la mayoría de los casos un empobrecimiento matemático de las clases de física (Barbé, Espinoza y Gellert, 2017).

La enseñanza del electromagnetismo, a pesar de las diferentes metodologías, investigaciones y del propio tiempo que invierten profesores como estudiantes en este tópico de la física, tienen resultados poco satisfactorios (Furió y Guisasola, 2001; Furió y Aranzabal, 1998; Guisasola, Almudí, Zubimedi, 2003). La enseñanza del electromagnetismo se ha centrado principalmente en la ley de Ohm y circuitos eléctricos y la investigación respecto a estos tópicos ha posibilitado el desarrollo de metodologías, la identificación de dificultades y su posicionamiento por sobre otros contenidos y conceptos como la noción de campo y su relación con el concepto de potencia que es uno de los que presenta más dificultades y que además es fundamental en el electromagnetismo (Benseghir y Closset, 1996).

La noción de campo tiene la característica de ser transversal a todo el electromagnetismo y dentro de las dificultades que tienen los estudiantes universitarios, como documenta Sandoval y Mora (2009) se identifican la visión newtoniana y no maxwelliano de las interacciones electromagnéticas. Por otro lado, la mayor complejidad matemática que exige a los estudiantes poner en uso integrales de línea, de superficie y el operador vectorial nabla pero además entrelazados con conceptos como curva de nivel, flujo eléctrico, campo eléctrico, densidad de corriente por nombrar algunos. Además muchas veces las clases teóricas de electricidad no están relacionadas con las prácticas de los estudiantes, desarrollando razonamientos en la mayoría de los estudiantes de tipo más bien mecánico, que aplican una "receta", sin una problematización profunda al momento de interpretar la interacciones electroestáticas (Furió y Guisasola, 2001).

El álgebra vectorial es fundamental para el estudio del electromagnetismo, para su comprensión exige el dominio de conceptos matemáticos como: campo vectorial, campo escalar, operador nabla, divergencia, rotor, gradiente, pero también el cálculo de flujos, potenciales escalares y vectoriales, circulación y trabajo; todos estos conceptos se espera ingenuamente que el estudiante los vincule y ponga en uso de manera casi instantánea. La revisión realizada por Viviana Costa y Marcelo Arlego (2011), permitió agrupar los trabajos de esta línea de investigación en: 1) trabajos interdisciplinarios y contextualización de la matemática con las ciencias e ingeniería, 2) el uso de TIC como mediador en los procesos de enseñanza y aprendizaje asociados al cálculo vectorial, 3) el rol de la historia en la enseñanza del cálculo y 4) las dificultades que manifiestan los alumnos en la comprensión de fenómenos físicos asociados al concepto de campo vectorial.

Ante este contexto poco favorable para el aprendizaje de los estudiantes, los resultados académicos poco exitoso y las dificultades de los profesores para enseñar estos tópicos de manera efectiva se hace necesario comprender mejor la relación entre matemática y física, como también el cómo se vinculan estos saberes. Sabemos poco sobre cómo la matemática influye en la comprensión de la física, cómo la física influye en la comprensión de la matemática, y cómo el saber físico-matemático se ha desarrollado en la historia.
Nos hemos propuesto comprender en mayor profundidad esta relación, haciendo una indagación histórica epistemológica de estos saberes en el siglo XIX, estudiando el desarrollo de la teoría electromagnética y su vínculo con la matemática de la época.

Marco teórico

La teoría Socioepistemológica en sus inicios criticó las teorías didácticas, como también los enfoques constructivistas que tenían su centro en el debate teórico del conocimiento matemático, así la socioepistemología abandona la centración en el objeto matemático y su naturaleza epistemológica para privilegiar la epistemología de las prácticas asociadas a su construcción, las prácticas de referencias y la práctica social (Montiel, 2005). A pesar de los avances que se lograron en esa línea, sólo se analiza la práctica social y de referencia referidas al saber matemático, aunque muchos de estos trabajos y desde su inicio han estado estrechamente relacionados con la física. El trabajo doctoral de Espinoza (2014), no centra su estudio en el saber matemático sino en el saber mismo identificando características y situaciones de generación de conocimiento propia de la construcción de otros saberes. Así la caracterización del saber matemático es apenas un caso particular del saber desarrollado por la humanidad.

Algunas consideraciones sobre el saber

Dentro de las conclusiones que menciona Espinoza (2014) con respecto al saber, menciona que: si hay una práctica, entonces existen saberes en acción, por lo tanto, es el resultado de una construcción social, de procesos consensuados por el uso compartido de conocimientos. Asumimos al saber cómo construcción social del conocimiento, en este sentido, el saber o saberes, son procesos deliberados para el uso compartido de conocimiento. Se trata de mecanismos constructivos, altamente sofisticados, de naturaleza social, que se caracterizan por producir interacciones, explícitas o implícitas, entre mente, conocimiento y cultura. (Cantoral, 2013, p.53).

También concluye que la práctica deviene en saber y el saber en prácticas, donde cada vez en este ciclo de ir y venir se hacen más complejas, o sea generan una relación simbiótica más profunda. Esta relación es creciente y el alcance del saber está en función del desarrollo y alcance de la práctica (haciendo la salvedad de que, a diferencia de la simbiosis, estos no son elementos disímiles; más bien, están orgánicamente entrelazados) (Espinoza, 2014, p.189).

Los procesos de institucionalización y especificación del saber invisibilizan los contextos que le dieron origen, despersonaliza y descontextualiza. Por ejemplo, los procesos germinales que dieron origen a un determinado saber matemático desaparecen del discurso, de las instituciones y se desnaturaliza el saber. En los momentos de constitución de un saber podemos distinguir una etapa de origen que está en estrecha relación con la naturaleza y prácticas, luego este saber se desarrolla comienzan a darse los

procesos de difusión institucional, para luego comenzar a ser parte de otros saberes de otras comunidades, en otras prácticas. Lo anterior, no impide que desde la transversalidad se puedan producir nuevos saberes.
Dentro de las características que destacan del saber se mencionan:

- El saber aglutina a la comunidad: El compartir cierto saber en una comunidad, este actúa como un agente integrador, organizador y de difusión. Haciendo que una determinada práctica permanezca en el tiempo, en el sentido de compartir y convivir en comunidad.
- El saber está en constante expansión. El saber al llegar a un máximo desarrollo dentro de una comunidad, hace que se produzcan quiebres, rupturas en la forma de ver al saber por esta comunidad, estos quiebres abren nuevas alternativas para la creación y la innovación, que complementan los saberes anteriores. Este proceso puede ser violento, pero luego de un tiempo vuelve a estabilizarse.
- El saber "vive" entrelazándose con otros saberes: Muy a menudo se suele asociar a una práctica de referencia, por lo tanto, en su naturaleza no existe la fragmentación ni la especificidad, sino que viven en relación con otros, en la transversalidad. El saber ligado a una práctica específica existe, se desarrolla y está en constante expansión, pero aquello se da en la transversalidad.
- El saber produce lenguaje y representaciones comunes: Estas estrategias de representación son esenciales para la comunicación y el pensamiento. En el proceso de institucionalización y los procesos de difusión, estos lenguajes comienzan a ser compartidos entre las comunidades, como también las representaciones. Ambas tanto lenguaje como representaciones están en función del desarrollo de la práctica. La producción de saber y su difusión están íntimamente vinculadas en todo momento.

Principios de la socioepistemología

La teoría socioepistemológica tiene 4 principios de distinta naturaleza que permean toda la teoría, y por tanto la investigación. Estos principios fundamentales el principio normativo de la práctica social, el principio de la racionalidad contextualizada, el principio del relativismo epistemológico y el principio de resignificación progresiva o apropiación (Cantoral, 2013).

Metodología

Esta investigación se posiciona desde un paradigma cualitativo de investigación; la metodología utilizada se encuentra actualmente en desarrollo y tiene por objetivo el estudio socioepistemológico de obras antiguas. Hemos considerado algunos aspectos propios de la metodología cualitativa, como el análisis de contenido (Piñuel, 2002; Krippendorff, 2016) y el análisis documental (Garrido, 2001), en coordinación con algunos elementos teóricos particulares de la socioepistemología (Espinoza, 2014; Espinoza y Cantoral, 2010).

El diseño metodológico contempla dos etapas: una internalista y otra externalista. En la primera, se estudia el contenido matemático de la obra, aplicando las técnicas propias del análisis de contenido (Krippendorf, 2016), pero siempre considerando los aspectos contextuales de la obra. La segunda etapa, se estructura en base a las categorías de análisis propuestas por Espinoza y Cantoral (2010). Concebimos así a la obra como una producción con historia, un objeto de difusión y parte de una expresión intelectual más global.

Las obras que hemos escogido son Experimental Research in Chemistry and Physics (Faraday, 1859); A Treatise on Electricity and Magnetism (Maxwell, 1891/1954) y Electromagnetic Theory (Heaviside, 1893).

Resultados y conclusiones

Los resultados que se mencionan en este avance de investigación están centrado en tres aspectos: la revisión bibliográfica, la metodología y las primeras impresiones sobre la relación física-matemática.

La revisión bibliográfica muestra que no existen estudios epistemológicos de la relación física-matemática focalizadas en la enseñanza y aprendizaje, cuando se hacen estudios epistemológicos la física para los matemáticos es apenas una buena forma de contextualizar o significar los conceptos matemáticos. Por el contrario, cuando se hacen estudios epistemológicos desde la física, la matemática se considera como una herramienta o lenguaje. Esta separación entre matemática y física, producto de los procesos de institucionalización y especialización del saber, ha sido más una dificultad que una ventaja en los procesos de enseñanza, por ello el interés de investigar al respecto posicionado desde la no fragmentación de los saberes.

También se evidencia que el desarrollo de la didáctica específica de la física es un campo emergente a nivel latinoamericano, su desarrollo ha estado vinculado a la didáctica de las ciencias experimentales, la que si bien comparten características como ciencias empíricas, la física tiene una naturaleza epistémica distinta, pues tiene una estrecha, profunda y significativa relación con la matemática que las otras ciencias no comparten.

El siglo XIX es un fragmento de la historia del desarrollo del saber humano, entendido desde Cantoral (2013) que tiene gran importancia para el desarrollo del álgebra y cálculo vectorial, sabemos que el cálculo es una evolución de la geometría desde los infinitésimos, sostenemos que el cálculo vectorial es otra evolución más de lo geométrico, pero como resultado de una combinación de la geometría analítica y el cálculo infinitesimal, nuestra misión será defender esta tesis, como también mientras estudiamos el saber físico-matemático de esta época comprender la relación físico-matemático a través del electromagnetismo y su relación con el desarrollo del cálculo vectorial, considerando como tesis el saber físico y matemático como uno solo.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *La práctica de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Barbé, J., Espinoza, L. y Gellert, U. (2017). El empobrecimiento matemático de las propuestas de enseñanza de Física en los textos oficiales de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *35*(1), 71-88.

Benseghir, A. y Closset, J. L. (1996). The electrostatics - electrokinetics transition: historical and educational difficulties. *International Journal of Science Education, 18*(2), 179-191.

Brahmia, S., Boudreaux, A. y Kanim, S. E. (2016). Obstacles to mathematization in introductory physics. *arXiv preprint arXiv:1601.01235.*

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. México: Gedisa.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covian, R.M. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 285 -310). México: Ediciones Díaz de Santos.

Costa, V. A. y Arlego, M. (2011). Enseñanza del Cálculo Vectorial en el contexto de la ingeniería: una revisión bibliográfica. En A. R Carioca, M. P. Bilbao y M.P. Gazzola (Eds.), *Actas en el I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM) y II Encuentro nacional en Enseñanza de las Ciencias (II ENEM)* (pp. 88-94). Tandil: NIEyT.

Espinoza, L. (2014). *La desescolarización del saber: su construcción social desde el malabarismo y las artes circenses*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Espinoza, L. y Cantoral, R. (2010). Una propuesta metodológica para estudios socio históricos: El caso de la teoría de funciones de Lagrange. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa: Vol. 23* (pp. 889-897). México DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Faraday M. (1859). *Experimental Research in Chemistry and Physics.* London: Printers and publisher to The University of London. (Vol.1). Recuperado de: https://archive.org.

Furió, C. y Aranzabal, J. G. (1998). Dificultades de aprendizaje de los conceptos de carga y de campo eléctrico en estudiantes de bachillerato y universidad. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 16*(1), 131-146.

Furió, C. y Guisasola, J. (2001). La enseñanza del concepto de campo eléctrico basada en un modelo de aprendizaje como investigación orientada. *Enseñanza de las ciencias, 19*(2), 319-334.

Garrido, M. (2001). Fundamentos del análisis documental. En J. López (Ed), *Manual de Ciencias de la Documentación* (pp. 337-358). Madrid: Pirámide, 2002.

Guisasola, J., Almudí, J. M. y Zubimendi, J. L. (2003). Dificultades de aprendizaje de los estudiantes universitarios en la teoría del campo magnético y elección de los objetivos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 21*(1), 079-94.

Heaviside, O. (1893). *Electromagnetic Theory* (Vol. 1). New York: The D. Van Nostrand Company. Recuperado de https://archive.org.

Krippendorff, K. (2016). *Content Analysis: An introductions to Its Methodology.* Los Angeles: SAGE Publications, Inc.

Maxwell, J. C. (1891/1954). *A Treatise on Electricity and Magnetism.* New York: Dover.

Montiel, G. (2005). Estudio Socioepistemológico de la función *Trigonométrica*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencias Aplicada y Tecnología Avanzada. México.

Piñuel, J. (2002). Epistemología, metodología y técnicas del análisis de contenido. *Estudios de Sociolingüística, 3*(1), 1-42.

Planinic, M., Milin-Sipus, Z., Katic, H., Susac, A. y Ivanjek, L. (2012). Comparison of student understanding of line graph slope in physics and mathematics. *International journal of science and mathematics education, 10*(6), 1393-1414.

Redish, E. (2005). Changing student ways of knowing: What should our students learn in a physics class. *Proceedings of World View on Physics Education 2005: Focusing on Change.* New Delhi. Recuperado de http://www.physics.umd.edu/perg/papers/redish/IndiaPlen.pdf

Sandoval, M. y Mora, C. (2009). Modelos erróneos sobre la comprensión del campo eléctrico en estudiantes universitarios. *Latin-American Journal of Physics Education, 3*(3), 24.

Tuminaro, J. (2002). *How Students Use Mathematics in Physics: A Brief Survey of the Literature.* Recuperado de: http://www.physics.umd.edu/perg/math/UsingMath.Pdf.

Vinitsky-Pinsky, L. y Galili, I. (2014). The Need to Clarify the Relationship between Physics and Mathematics in Science Curriculum: Cultural Knowledge as Possible Framework. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 116*(1), 611-616.

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

MEDICIÓN DE LOS NIVELES DE LECTURA E INTERPRETACIÓN DE TABLAS Y GRÁFICOS ESTADÍSTICOS EN LOS ESTUDIANTES DE TERCERO MEDIO DE UN ESTABLECIMIENTO EDUCACIONAL DE LA REGIÓN METROPOLITANA, CHILE

Marcelo Cervantes, Katherine Paredes, Yocelyn Parra, Priscilla Olivares
Universidad San Sebastián. (Chile)
mcervantesg@correo.uss.cl, kparedesd@correo.uss.cl, yocelyn.parra@uss.cl, priscilla.olivares@uss.cl

Resumen
Esta investigación analiza los resultados de un cuestionario aplicado a 114 estudiantes de tercer año medio sobre nociones de estadística, esto con el propósito de determinar los niveles de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos que poseen los estudiantes en relación a las variables edad, género y plan diferenciado. Para el análisis utilizamos como herramientas teóricas la taxonomía SOLO y los procesos estadísticos aplicados por Monney (2002). Los resultados obtenidos demuestran que el 54.17% de los estudiantes se sitúan en los niveles inferiores de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos.

Palabras clave: lectura, interpretación, SOLO, tablas, gráficos

Abstract
This research analyzes the results of a questionnaire applied to 114 high school 3rd–year students with respect to notions of statistics with the aim to determine the students' levels of reading and interpretation of tables and statistical graphs in relation to the variables: age, gender, and differentiated plan. For the analysis, we use the taxonomy SOLO and the statistical processes applied by Monney (2002) as theoretical tools. The results show that 54.17% of the students are in the lowest levels of reading and interpretation of tables and statistical graphs.

Key words: reading, interpretation, SOLO, tables, graphs

Introducción

Durante los últimos años ha existido un interés por la enseñanza de la estadística. Batanero (2000) explica que este se encuentra relacionado al desarrollo que ha experimentado la estadística como ciencia, y su utilidad para la investigación y la vida profesional. Esto ha generado que un número creciente de personas haga uso de la estadística, provocando una gran demanda de formación básica en esta materia que "ha sido encomendada, en los niveles no universitarios, a los profesores de matemáticas" (Batanero, 2000, p. 6). En relación a esta formación en los niveles no universitarios, los estudios de Mooney (2002) y Wu (2003) establecen la necesidad de crear y aplicar herramientas que permitan medir los procesos cognitivos que realizan los estudiantes al trabajar problemas de tablas y gráficos estadísticos. Respecto a las investigaciones sobre educación estadística en Chile, Díaz-Levicoy, Arteaga, y Batanero, (2015) afirman que "es escasa y más aún sobre gráficos estadísticos" (p. 232).

La educación estadística es considerada como una disciplina nueva y emergente, que cuenta con una base escasa de datos e investigaciones, las cuales se encuentran de manera imperceptible debido a que las publicaciones existentes están relacionadas con otras ciencias (Estrella, 2010). Por su parte, Hawkins (1997) la define como una disciplina y cuerpo que debe ser estudiado, sin embargo, en los últimos 25 años, han sido pocos los investigadores que han trabajado en esta área, sin mencionar que muchos de ellos nunca estudiaron en educación, o bien, han sido profesores con una limitada formación estadística. Además, advierte y ejemplifica que la investigación empírica no es determinante para desarrollar o evaluar la parte de la educación estadística del currículo de matemáticas (como ocurrió en el Reino Unido), debido a que puede imponerse una organización inadecuada de la enseñanza, dando lugar a falsas percepciones sobre la naturaleza del sujeto (Hart, 1996 citado en Hawkins, 1997). Por esta razón, debe ser investigado cuidadosamente, de modo que los cambios que se demuestren necesarios se puedan implementar antes de que se cause un daño excesivo (Hawkins, 1997, p. 282).

Dentro de los objetivos de la estadística en la educación, Gal y Ginsburg (1994) citado en (Cazorla, 2002) mencionan que las fórmulas y cálculos en un problema estadístico, son el contraste para desarrollar un pensamiento flexible junto a la capacidad de analizar los datos que puede obtener el estudiante, puesto que el pensamiento estadístico, según Espinel, González, Bruno y Pinto, (2009) es "lo que hace un estadístico" (p. 138), ya que abarca una gran cantidad de procesos, entre los cuales se incluyen la organización de datos, resolución concreta de un problema, razonamiento siguiendo un proceso y finalmente, la comprobación de las soluciones. De igual forma, Chance (2000) describe el pensamiento estadístico como la comprensión del por qué y cómo se realizan las investigaciones estadísticas.

El problema a investigar es sobre las dificultades en la lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos, las cuales se presentan de manera constante debido a la tardía inclusión de la estadística en el currículum escolar en Chile (Estrella, 2010). Al mismo tiempo, muchas de estas dificultades no son necesariamente únicas de la estadística, pues se pueden producir desde el currículum (qué y cuándo enseñar), materiales de enseñanza (libros de texto y software educativos), evaluación, formación de profesores, creencias y actitudes de los maestros con respecto a la enseñanza de la estadística; el aprendizaje de los estudiantes, desde el significado, procedimiento, propiedades de conceptos, los problemas, las representaciones y los instrumentos, la capacidad cognitiva de los estudiantes (nivel de desarrollo del pensamiento estadístico), el poder intuir de manera correcta e incorrecta, los aspectos emocionales (sentimientos y actitudes hacia la estadística) y la epistemología de los conceptos (lo que son, la forma en que se produjo, lo que permite resolver problemas y lo que se espera que las dificultades en su aprendizaje) (Batanero, 2000).

Basados en lo anterior, el objetivo de esta investigación es medir los niveles de lectura y comprensión de tablas y gráficos estadísticos en estudiantes de tercer año medio de un establecimiento educacional de la Región Metropolitana en Chile, con el fin de conocer y determinar el nivel de pensamiento estadístico que estos poseen y así, definir cuáles son las principales dificultades que se presentan al trabajar con tablas y gráficos estadísticos, además de aportar a las investigaciones nacionales sobre educación estadística.

Marco Teórico

Taxonomía SOLO

Fue diseñado en 1982 por Biggs y Collins, con el propósito es entregar a los profesores un instrumento que permita determinar el nivel de desarrollo cognitivo de los estudiantes (Huerta, 1997). Donde los estudiantes muestran un ciclo de aprendizaje, en los que se observa la existencia de un progreso jerárquico en la complejidad estructural de sus respuestas (Vásquez, 2012).

Este sistema jerárquico es lo que constituye la Taxonomía SOLO, estructurado en cinco niveles y organizados de forma jerárquica, dependiendo de la cantidad de detalles y la calidad de los mismos. Huerta (1997, p. 45) define estos niveles como:

Nivel Preestructural

Representa el uso, en la respuesta, de aspectos no relevantes del modo de funcionar; es decir, que aquellos elementos necesarios para poder identificar un modo de funcionar no son usados.

Nivel Uniestructural

Respuestas en las que sólo se usa un aspecto relevante del modo de funcionar.

Nivel Multiestructural

Respuestas en las que se procesan diferentes aspectos disjuntos del modo de funcionar, normalmente en una secuencia.

Nivel Relacional

Respuestas en las que se manifiesta una comprensión integrada de las relaciones entre los diferentes aspectos usados del modo de funcionar.

Nivel de Abstracción Extendida

Respuestas que hacen uso de principios, hechos, procesos, etc. más abstractos que aquellos que describen el modo de funcionar actual.

Estos niveles están relacionados a través de ciertos verbos, los que se resumen en la figura 1.

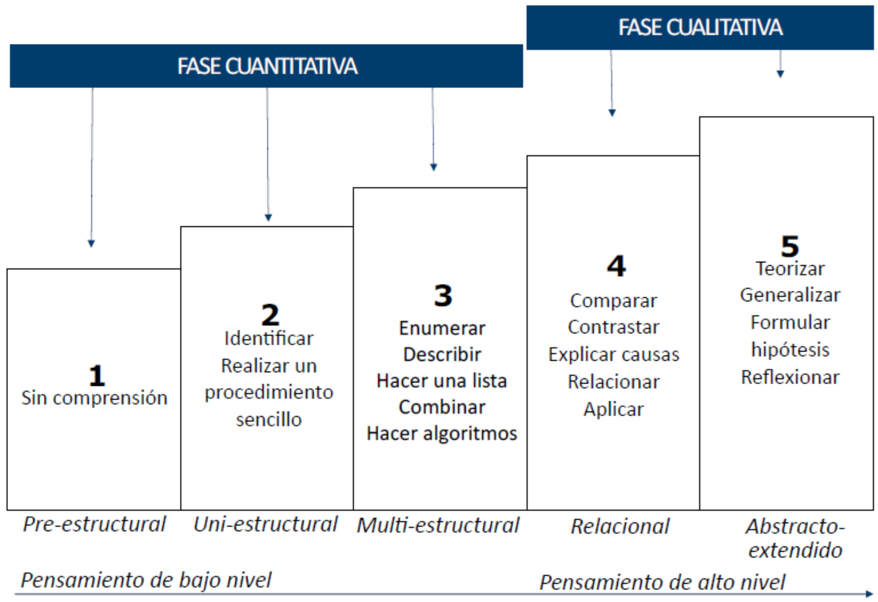


Figura 1. Niveles de la Taxonomía SOLO. Fuente: Henríquez (2016). Curso de perfeccionamiento Deusto/Tuning, (p. 1).

Basado en la figura 1, Vásquez (2012) afirma que se producen dos cambios durante el proceso de aprendizaje de los estudiantes, que van de menor a mayor complejidad estructural. En el primero se aprecia a medida que las respuestas de los estudiantes están compuestas por una mayor cantidad de detalles; y el segundo se da cuando existe una integración de los detalles en un modelo estructural.

Además, se observa que esta taxonomía "permite clasificar y evaluar el resultado de una tarea de aprendizaje en función de su organización estructural" (Vásquez, 2012, p. 79), pues se basa en una progresión que va desde un nivel de insuficiencia al nivel experto. Asimismo, mediante esta taxonomía es posible realizar una evaluación objetiva y sistemática de la calidad de un resultado, debido a que es posible evaluar de forma integrada componentes cuantitativos y cualitativos existentes en las respuestas de los estudiantes (Vásquez, 2012).

Procesos Estadísticos

Con el fin de que los estudiantes muestren el pensamiento estadístico, Mooney (2002) afirma que estos deben involucrarse en los procesos de manejo de datos, es decir, aquellas operaciones cognitivas que integran la organización, codificación e interpretación de la información. Shaughnessy, Garfield y Greer (1996) citado en (Mooney, 2002) indican que este manejo implica la utilización de procesos estadísticos: organizar, describir, representar y analizar datos. En base a estos procesos, Mooney (2002) diseña el Middle School Students' Statistical Thinking (M3ST), en una forma ligeramente modificada:

Descripción de datos: La "descripción de datos implica la lectura explícita de datos presentados en listas, tablas o representaciones gráficas" (Mooney, 2002, p. 25). Este proceso incorpora a Wainer

(1992) citado en (Mooney, 2002), quien “considera que la habilidad de leer datos es el nivel elemental de la interpretación de datos” (p. 25). De esta manera, los subprocesos correspondientes al proceso descripción de datos quedan establecidos como: (D.1) Demostrar conciencia de las características exhibidas y (D.2) Identificar unidades de los valores de los datos.

Organización y reducción de datos: Este proceso incluye habilidades cognitivas como: ordenar, agrupar y resumir datos. Además, implica la reducción de datos utilizando las nociones de centro y dispersión (Jones et al., 2000). De esta manera, los subprocesos correspondientes al proceso organización y reducción de datos quedan establecidos como: (O.1) Agrupar datos, (O.2) Describir datos usando métodos de posición central y (O.3) Descripción de la dispersión de datos.

Representación de datos: En este proceso, la importancia se centra en los datos presentados en el gráfico, pues comprender los datos es crucial para poder traspasarlos del gráfico a una tabla (Jones et al., 2000). Asimismo, el proceso de “representación de datos implica la visualización de datos en forma gráfica” (Mooney, 2002, p. 29). De esta manera, los subprocesos correspondientes al proceso representación de datos quedan establecidos como: (R.1) Construir una visualización de datos y (R.2) Evaluar la efectividad de las visualizaciones de datos.

Análisis e interpretación de datos: Este proceso “consiste en identificar tendencias y hacer inferencias o predicciones a partir de una representación gráfica” (Mooney, 2002, p. 28). Además, se incorpora el reconocimiento de patrones, tendencias y excepciones en los datos, además de realizar inferencias y predicciones a partir de los datos (Jones et al., 2000). De esta manera, los subprocesos correspondientes al proceso análisis e interpretación de datos quedan establecidos como: (A.1) Realizar comparaciones dentro de conjuntos de datos o visualizaciones de datos, (A.2) Hacer comparaciones entre conjuntos de datos o visualizaciones de datos, (A.3) Hacer inferencias a partir de un conjunto de datos dado o visualización de datos y (A.4) Hacer inferencias utilizando razonamiento proporcional.

Metodología

La metodología utilizada posee un carácter cuantitativo, con un alcance correlacional y diseño no probabilístico. A partir de una población de 175 estudiantes de tercer año medio de un establecimiento educacional, particular subvencionado de la región metropolitana, se obtuvo una muestra de tipo incidental de 114 estudiantes, quienes respondieron un cuestionario de veintiocho preguntas acerca de tablas y gráficos estadísticos. Estas preguntas fueron seleccionadas de las pruebas SABER de Colombia, de la prueba de selección universitaria (PSU) de Chile y del preuniversitario Pedro de Valdivia de Chile. Cuyos resultados se estudiaron en base a las variables género, edad y plan diferenciado por cada uno de los procesos estadísticos.

Resultados

Las respuestas del cuestionario aplicado a los 114 estudiantes respecto a lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos se tabulan y grafican con el fin de conocer en qué nivel se ubican respecto a cada uno de los procesos propuestos por Mooney (2002). Información que se presenta en tabla 1 y figura 2.

Tabla 1
Cantidad de estudiantes por nivel en procesos descripción de datos, organización y reducción de datos, representación de datos y análisis e interpretación de datos.

	Descripción de datos		Organización y reducción de datos		Representación de datos		Análisis e interpretación de datos	
Niveles	F.(*)	F.R.(**)	F.(*)	F.R.(**)	F.(*)	F.R.(**)	F.(*)	F.R.(**)
Idiosincrático	7	6.1%	42	37.7%	2	1.8%	18	15.8%
Transicional	42	36.8%	53	46.5%	30	26.3%	52	45.5%
Cuantitativo	55	48.2%	15	13.2%	66	57.9%	36	31.6%
Analítico	10	8.8%	3	2.6%	16	14.0%	8	7%
Total	114	100%	114	100%	114	100%	114	100%

(*) Frecuencia; (**) Frecuencia Relativa. Fuente: SPSS.

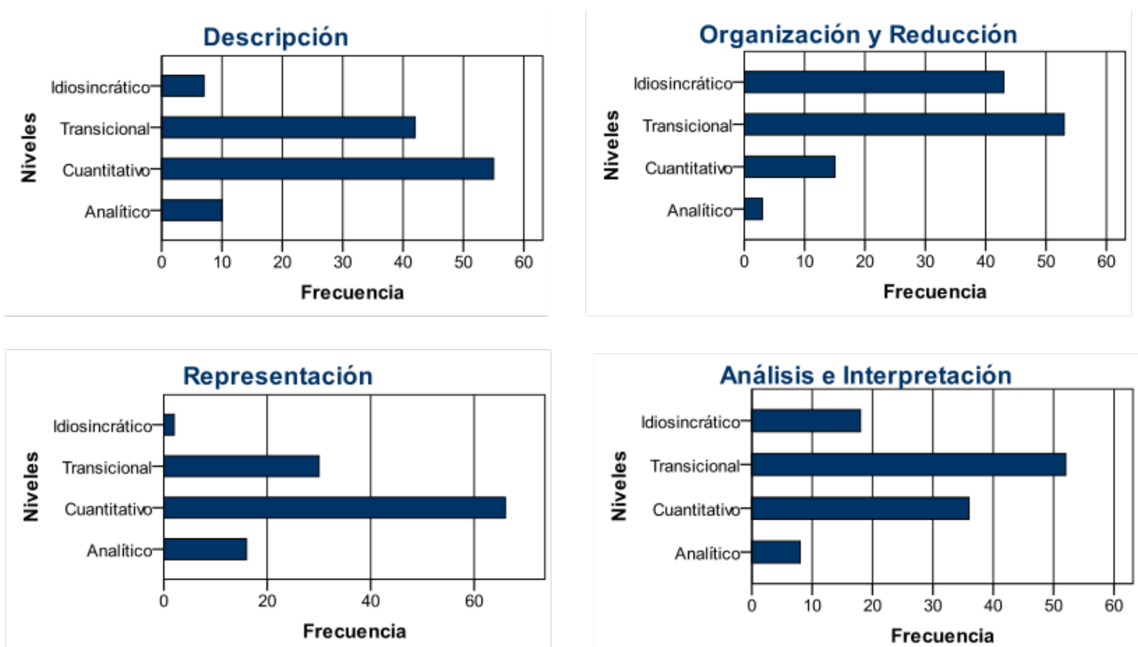


Figura 2. Cantidad de estudiantes por nivel en procesos descripción de datos, organización y reducción de datos, representación de datos y análisis e interpretación de datos. Fuente: Consola R.

Los resultados del estudio presentados por medio de la tabla 1 y la figura 2, evidencian que en los niveles superiores (cuantitativo y analítico), un 57% de los estudiantes se sitúa en descripción de datos;

el 15.8% en organización y reducción de datos; el 71.9% en representación de datos; y el 38.6% en análisis e interpretación de datos. Estos resultados coinciden con los expuestos por Monroy (1997), quien afirma que la mayoría de los estudiantes se encontraba en los niveles idiosincrático y transicional.

Al analizar los resultados del cuestionario en relación a las variables género, edad y plan diferenciado (cada una por separado), se obtuvieron los siguientes resultados:

Los resultados según género en los niveles superiores indican que el porcentaje de mujeres y hombres son, respectivamente: 51% y 61.5% en descripción de datos; 10,2% y 20% en organización y reducción de datos; 61,2% y 80% en representación de datos; 42,8% y 35,4% en análisis e interpretación de datos; es decir, en promedio sólo el 41.3% de las mujeres alcanzan los niveles cuantitativo y analítico, a diferencia de los hombres que obtuvieron en promedio un 49,2 %. Estos resultados coinciden con los expuestos por Wu (2004), quien afirma que los estudiantes masculinos obtienen mejores resultados en la lectura de gráficos y las mujeres en las tareas de construcción gráfica.

En relación a la variable edad, los niveles superiores indican que el porcentaje de los estudiantes de 16, 17 y 18 años son, respectivamente: 16,7 %, 57,5% y 64,5% en descripción de datos; 0 %, 15% y 19,4% en organización y reducción de datos; 41,7 %, 77,5% y 74,2% en representación de datos; 25 %, 47,5% y 48,8% en análisis e interpretación de datos; es decir, en promedio sólo el 25% de los alumnos con 18 años alcanzan los niveles cuantitativo y analítico, a diferencia de los menores a 18 años quienes obtuvieron en promedio un 47,5% y 48,8% respectivamente.

Con respecto a la variable plan diferenciado, los niveles superiores indican que los porcentajes de los estudiantes de los planes científico–matemático y humanista son, respectivamente: 64.1% y 42.1% en descripción de datos; 15.5% y 15.8% en organización y reducción de datos; 73.3% y 68.4% en representación de datos; 37.9% y 39.5% en análisis e interpretación de datos. Es decir, en dos de los cuatro procesos los alumnos pertenecientes a los electivos científico y matemático obtuvieron mejores resultados que los humanistas.

Conclusiones

El estudio permitió evidenciar que el 54.17% de los estudiantes se sitúan en los niveles inferiores de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos. Además, se distinguen dificultades en relación a la comprensión de datos organizados por intervalos; a la interpretación del gráfico de caja y bigotes; al cálculo de las medidas de tendencia central, dispersión y posición. En relación a las variables género, edad y plan diferenciado se presentan diferencias significativas, principalmente en las variables edad y plan diferenciado. Esto permite demostrar que existe la necesidad de diseñar herramientas y aplicar nuevas metodologías que favorezcan el desarrollo del pensamiento estadístico y permitan mejorar la lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos.

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? *BLAIX*, *15*, 2–13. Recuperado de http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/BLAIX.pdf

Cazorla, I. (2002). *A relação entre a habilidade viso-pictórica e o domínio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos*. Universidade Estadual de Pampinas.

Chance, B. (2000). Components of Statistical Thinking and Implications for Instruction and Assessment.

Díaz-Levicoy, D., Arteaga, P., & Batanero, C. (2015). Gráficos estadísticos y niveles de lectura propuestos en textos chilenos de educación primaria. In C. Fernández, M. Molina, & N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 229–238). Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5224659

Espinel, M., González, M., Bruno, A., & Pinto, J. (2009). Las graficas estadisticas. En L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica* (pp. 133–135).

Estrella, M. S. (2010). *Instrumento para la evaluación del conocimiento pedagógico del contenido de estadística en profesores de educación básica*. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Hawkins, A. (1997). Discussion: Forward to Basics! A Personal View of Developments in Statistical Education. *International Statistical Review*, *65*(3), 280–287. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/1403370

Henríquez, A. (2016). Curso de perfeccionamiento deusto/tuning. Recuperado de https://historia1imagen.files.wordpress.com/2016/07/taxonomia_solo.pdf

Huerta, M. (1997). *Los Niveles de Van Hiele en relación con la Taxonomía SOLO y los Mapas Conceptuales*. (Tesis doctoral en Didactica de las Matematicas, Universitat de València, España). Recuperado de http://mobiroderic.uv.es/handle/10550/38021

Jones, G., Thornton, C., Langrall, C., Mooney, E., Perry, B., & Putt, I. (2000). A Framework for Characterizing Children's Statistical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *2*(4), 296–307.

Monroy, R. (1997). Categorización de la comprensión de gráficas estadísticas en estudiantes de secundaria (12-15), 29–38.

Mooney, E. (2002). A Framework for Characterizing Middle School Students' Statistical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *4*, 23–63.

Vásquez, E. (2012). *Medición del impacto del libro de texto en el aula de clases*. (Tesis Doctoral, Zentrale Hochschulbibliothek Flensburg, Alemania). Recuperado de http://d-nb.info/1029421323/34

PROPUESTA PARA EL DESARROLLO DE PROCESOS COMUNICATIVOS EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

John Alexander Alba Vásquez, Sandra Patricia Vidal Astudillo
Universidad de La Sabana. (Colombia)
john.alba@unisabana.edu.co, sandravias@unisabana.edu.co

Resumen
Esta propuesta tuvo como objetivo diseñar, implementar y evaluar una estrategia que contribuyera al desarrollo de los lenguajes natural, gráfico, icónico y simbólico matemático en el aula durante la presentación de la temática de números enteros a estudiantes de educación básica secundaria. La estrategia se presenta describiendo cuatro actividades diseñadas con la intención de fortalecer alguno de los lenguajes mencionados y lo ocurrido durante la implementación de estas. La propuesta obedece a un diseño de investigación acción, donde la docente investigadora analiza los aciertos y dificultades encontrados durante la aplicación de cada una de las actividades y propone sugerencias de mejora.

Palabras clave: Relatos de experiencia de aula; básica secundaria; investigación acción

Abstract
This research was aimed at designing, implementing, and evaluating a strategy that would contribute to the development of natural, graphic, iconic and symbolic mathematical languages while teaching the topic related to whole numbers to basic high school students in the classroom. The strategy is presented by describing four activities that were designed to strengthen any of the languages mention above, as well as to analyze what happened during their implementation. The proposal follows an action-investigation design where the teacher involved in the research analyzes the success and difficulties found during the implementation of each activity and makes suggestions for improvement.

Key words: stories on classroom experience, basic high school, action-investigation design

Introducción

Existen numerosos documentos e investigaciones que argumentan la importancia de fortalecer de manera intencionada la comunicación en el aula de matemáticas. Sfard, (2008); Lee, (2009) y Fandiño, (2010); entre otros, recalcan la importancia de desarrollar prácticas pedagógicas y didácticas que contribuyan al desarrollo de la capacidad de los estudiantes para expresar ideas matemáticas a través del uso de registros escritos como diagramas, dibujos, gráficos, textos y símbolos. De igual forma, destacan el potencial de la oralidad para describir, argumentar y demostrar situaciones, objetos y procedimientos matemáticos.

En este sentido, en Colombia, el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) en los lineamientos curriculares, reconoce que diversos estudios "han identificado la comunicación como uno de los procesos más importantes para aprender matemáticas y para resolver problemas." (p.74). Así mismo, Sfard (2009) afirma que la comunicación “es la primera fuerza conductora que hay tras todos los procesos cognitivos humanos” (p.71), estableciendo que el aprendizaje y la comprensión tienen una relación directa con la comunicación. Además, indica que “La comunicación se debe ver no como una mera ayuda al pensamiento, sino como equivalente al pensamiento mismo” (p.39).

Por lo anterior, es importante que el profesor de matemáticas incluya en sus prácticas actividades focalizadas en el desarrollo de procesos propios de la actividad matemática como la comunicación (MEN, 2006). Hacer énfasis en el proceso comunicativo, de acuerdo con Fandiño (2010) “se trata de saber elegir el tipo del lenguaje con el cual se va a comunicar la matemática, es decir cuál es el más oportuno, caso por caso” (p.134).

En línea con los anteriores planteamientos, el interés principal de esta propuesta se orienta hacia el diseño e implementación de prácticas de aula que sean eficientes tanto en el desarrollo de los conceptos relacionados con el sistema de los números enteros, como con el fortalecimiento de los lenguajes que se utilizan en el aula de matemáticas.

Método

La investigación es de carácter cualitativo con alcance interpretativo-interventivo. La propuesta obedece a un diseño de investigación acción (Parra, 2002); en la cual se diseña una estrategia de intervención en el aula que responda a la mejora de los procesos comunicativos en la clase de matemáticas. Cada actividad diseñada se implementa, documenta y evalúa para realizar ajustes que se tienen en cuenta en el diseño de la siguiente actividad. A partir de un proceso de reflexión sobre la práctica, la docente investigadora analiza los aciertos y dificultades encontrados durante la aplicación de cada una de las actividades y propone sugerencias de mejora a las mismas.

Las actividades se diseñaron utilizando el marco de la Enseñanza para la Comprensión (Stone, 1999). En este se plantea que para lograr una verdadera comprensión se deben abordar cuatro dimensiones: la del método, la del conocimiento, la del propósito y la de formas de comunicación; siendo esta última un punto de enlace con la problemática de investigación. Las actividades se implementaron en las aulas del ciclo III a cargo de la docente investigadora.

Propuesta de Intervención

En total se diseñaron e implementaron 15 actividades que tuvieron como objetivo común el de desarrollar la competencia comunicativa en el área de matemáticas, usando como pretexto el tema de la clase. Cada una de ellas apuntaba a fortalecer al menos un lenguaje específico y se utilizaron diferentes formas de comunicación procurando espacios donde los estudiantes interactuaban entre ellos y con la docente. A continuación, presentamos cuatro de estas actividades.

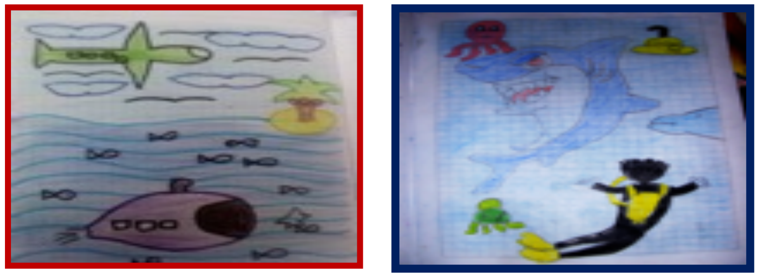


Figura 1 Ordenando los enteros. La instrucción debe ser clara.

Actividad 1 Ordenando los enteros. (Lenguaje icónico): la actividad busca una aproximación al uso del lenguaje icónico cómo posibilidad de abstracción e interpretación de situaciones reales buscando un tránsito a la generación de esquemas con información relevante que permitan la matematización de la situación.

En la figura 1 se muestra que al ser la instrucción "Dibuja la información del tablero" algunos estudiantes se esmeran en la realización del dibujo descartando la información matemática. Puede ser desmotivante para ellos que después de su empeño en realizar la actividad la docente desapruebe su trabajo porque este no contempla la información matemática que ella esperaba aun cuando hicieron lo solicitado.

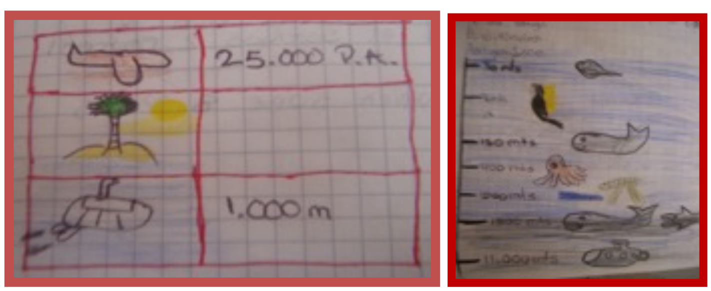


Figura 2. Ordenando los enteros. Algunos estudiantes organizan los números intuitivamente.

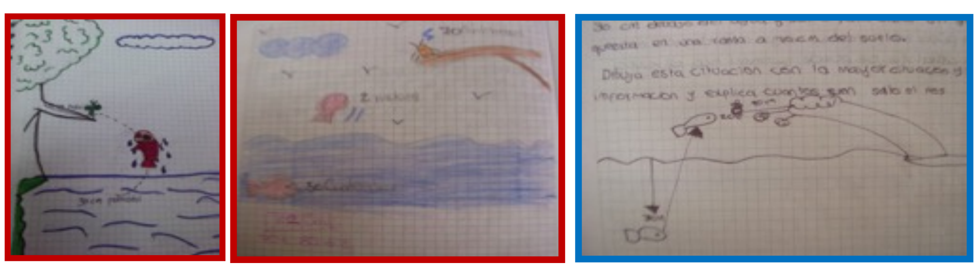


Figura 3. Ordenando los enteros. Algunos estudiantes utilizan símbolos propios para representar la situación planteada.

En la figura 2 se evidencia como algunos de ellos consideran la información matemática y organizan intuitivamente los números, pero no manejan algún tipo de escala.

Mientras que en la figura 3 se puede notar como además de la información matemática ellos involucran información que tienen de sus experiencias personales y utilizan otros registros como líneas punteadas, flechas, sombras y otros símbolos.

Considerando la riqueza de la información que ofrece el dibujo y teniendo en cuenta las situaciones presentadas se sugiere, en una futura aplicación de esta actividad, partir de información que no incluya valores numéricos inicialmente, de tal manera que los estudiantes hagan una representación que luego deben explicar, señalando el significado que tienen para ellos las rectas, flechas, líneas punteadas, sombras y otros símbolos que utilicen, para luego orientar su trabajo con preguntas y posteriormente incluir los valores numéricos disminuyendo la posibilidad de confusión que se presenta cuando estos se incluyen desde el inicio.

Por otra parte, se requiere que el docente sea claro en las indicaciones que les da a sus estudiantes verificando que hayan comprendido lo que espera que ellos hagan, enfocándolos en la esencia de la actividad.

Actividad 2 Rojas y negras. (Lenguaje natural): Se busca que a través de un juego de cartas, diseñado con el propósito de introducir la adición de los números enteros, los estudiantes narren el proceso que realizaron desde el registro hasta la organización de los puntajes finales.

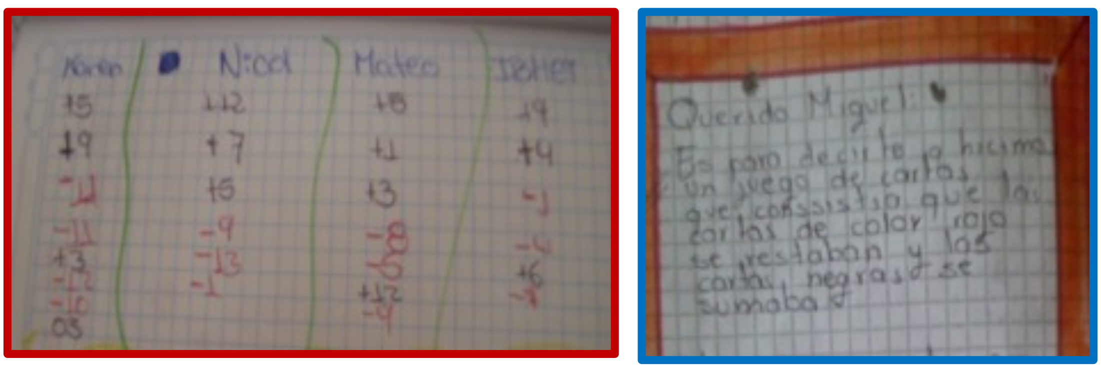


Figura 4. Rojas y negras. Registros realizados por los estudiantes.

En la figura 4 (izquierda) se observan algunos de estos registros, que incluyen símbolos y colores, posteriormente se les pide explicar verbalmente cómo hallaron los resultados y se ponen en evidencia las estrategias que utilizaron para determinar quién obtuvo mayor puntaje. Finalmente, se les solicita hacer una carta para un compañero ausente (derecha) explicando la actividad de la clase, la cual luego es leída al grupo general. Los demás estudiantes complementan la información, mencionan y corrigen detalles pendientes o poco claros; esto les permite darse cuenta de sus dificultades para expresarse adecuadamente ya que su comunicación no es clara ni eficiente.

La actividad les permite a los estudiantes compartir su experiencia y expresarse utilizando diferentes registros. Aunque su lenguaje natural escrito es precario y sus explicaciones no son detalladas, este va mejorando en la medida en que la discusión se desarrolla; cada vez procuran ser más claros y concretos para darse a entender.

Incluir la producción escrita fue uno de los aciertos de la actividad ya que le permitió a la docente reconocer aspectos que conceptualmente no eran claros para el grupo.

Actividad 3 Paseando por la recta real. (Lenguaje gráfico y simbólico): con esta actividad se busca que los estudiantes utilicen la recta real para representar operaciones de suma y sustracción de números enteros realizando conversiones entre registros simbólicos y gráficos, además de diferenciar el signo – cuando hace parte del número entero, del mismo cuando hace parte de la operación matemática.

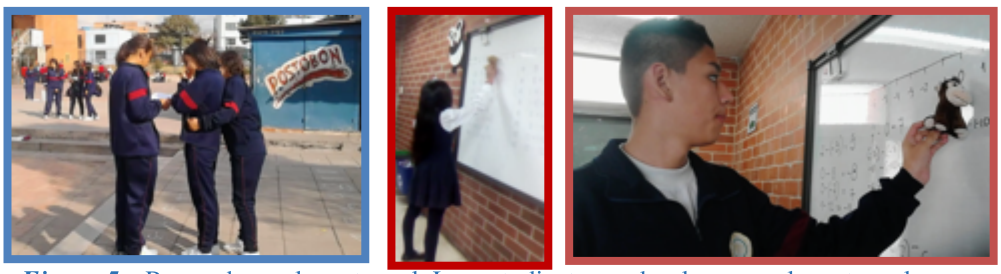


Figura 5. Paseando por la recta real. Los estudiantes se desplazan por la recta real para hallar solución a las operaciones propuestas.

En la figura 5 se observa que los estudiantes se desplazan físicamente sobre la recta y poseriormente utilizan un muñeco para realizar el desplazamiento. Se evidenció que resultaba más claro el procedimiento cuando observaban el movimiento sin hacer parte de él. En una aplicación futura se sugiere realizar el desplazamiento desde el inicio con ayuda de un automóvil de juguete ya que como se ha planteado la actividad es más facil asociar los movimientos a este objeto.

Esta actividad les ayuda a los estudiantes a comprender los procesos matemáticos sin caer en la aplicación de fórmulas, y aunque no todos los estudiantes alcanzaron el nivel de uso del lenguaje esperado todos logran una mejor aproximación al concepto desarrollado.

Actividad 4 La Calculadora en Potencia. (Lenguaje simbólico matemático): en esta actividad se utiliza la calculadora científica para que a través de la exploración de operaciones con potencias de números enteros, los estudiantes generen conjeturas frente a las propiedades de esta operación.

Figura 6. La calculadora en potencia. Los estudiantes usan la calculadora para verificar o contradecir hipótesis que luego son validadas por el curso.

En la figura 6 (izquierda y centro) se observan a los estudiantes planteando hipótesis sobre el comportamiento de los números en la potenciación, una pareja propone "Yo creo que si la base es negativa y el exponente es impar la potencia es negativa", y luego procede a darle valores a la base y al exponente para corroborar o refutar la hipotesis planteada. Los hallazgos de los estudiantes son escritos en lenguaje matemático (derecha).

La actividad además de ser muy motivante para los estudiantes les permitió formular hipótesis, argumentar, generalizar, proponer y conjeturar. Aunque sería interesante cambiar el "Yo creo que…" por un "Yo creo que… porque…" de esta manera los cambios conceptuales de los estudiantes pueden hacerse más visibles.

También se sugiere que se anticipen preguntas asociadas a los exponentes negativos de tal manera que los estudiantes puedan visibilizar el registro de un número como decimal y su equivalente como fracción, permitiéndoles inferir las propiedades relacionadas.

Reflexiones

La investigación permite que la docente investigadora sea consciente de la importancia de prestar atención a los procesos comunicativos en el aula, ya que de estos depende en gran medida la comprensión de los conceptos y nociones trabajados. De igual forma, reconoce las diferentes manifestaciones del lenguaje que se ponen en escena cada día como parte de su quehacer pedagógico y de las implicaciones que las elecciones a este respecto tienen en el aprendizaje de sus estudiantes.

Conclusiones

La acción comunicativa requiere de una interacción continua y activa entre los sujetos que participan en ella, es en esta interacción que el pensamiento se hace visible y se posibilita su desarrollo. Por lo tanto, desarrollar pensamiento matemático en nuestros estudiantes implica hacerlos parte del proceso propiciando espacios en los que se fomente la discusión alrededor de algún concepto, noción u objeto que se construye y reconstruye en el aula, de algún procedimiento o desarrollo algorítmico, de la pertinencia o no de la solución a un problema o ejercicio o de la validez de un argumento.

Los procesos comunicativos median el aprendizaje, es por esto que el profesor debe prestar especial atención a su desarrollo en el aula. Es fundamental que el profesor sea consciente de la necesidad de desarrollar cada uno de los tipos del lenguaje en el aula y de la manera en que los utiliza. Por lo anterior, debe planear y diseñar actividades que favorezcan el uso, por parte de los estudiantes, de diferentes lenguajes para expresar y defender ideas matemáticas.

En las actividades diseñadas debe primar el propósito comunicativo, por lo tanto, la actividad en sí debe prestarse para el diálogo y la discusión. Debe buscar que el estudiante recurra al uso de diferentes lenguajes y registros para apoyar y defender sus ideas. Al estudiante presentar un gráfico, un dibujo, un texto o un desarrollo simbólico debe buscar la comprensión de sus compañeros de la idea que pretende compartir.

Finalmente, si bien el uso del lenguaje debe adaptarse a las necesidades comunicativas de cada situación, se sugiere siempre buscar, por parte del estudiante, el uso de un lenguaje más preciso y formal a medida que se avanza el proceso formativo.

Referencias bibliográficas

Fandiño, M.I. (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática*. Bogotá: Cooperativa editorial Magisterio.

Lee, C. (2009). *El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas*. Ediciones Morata.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas* Bogotá: Cooperativa editorial Magisterio.

Parra, C (2002). *Investigación-acción y desarrollo profesional*. Educación y Educadores, (5)113-125

Sfard, A. (2008). *Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional*. Cali: Programa Editorial Universidad del Valle.

Stone, M (Comp). (1999) *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*. Buenos Aires: Paidós.

Vidal, S. (2017). *El desarrollo de la competencia comunicativa en matemáticas a través de prácticas de aula.* Chía: Universidad de la Sabana.

VARIABLES DE ESTUDIO PARA CARACTERIZAR LAS PRODUCCIONES DE ESTUDIANTES CON TALENTO MATEMÁTICO ANTE TAREAS DE INVENCIÓN DE PROBLEMAS

Johan Espinoza González, Isidoro Segovia Álex, Jose Luís Lupiáñez Gómez
Universidad Nacional de Costa Rica. Universidad de Granada España. (Costa Rica, España)
jespinoza@una.cr, isegovia@ugr.es, lupi@ugr.es

Resumen
La invención de problemas es considerada como una tarea relevante en clases de matemática. Sin embargo, pocos estudios abordan estrategias que permita caracterizar las producciones de los estudiantes ante este tipo de actividades. Así, se presentan seis variables de estudio denominadas "características del talento matemático claves para la invención de problemas" que se emplearon para caracterizar las producciones de dos grupos de estudiantes, uno considerado con talento y el otro de un colegio público normal, mediante indicadores de dominio definidas en cada una de ellas. Los resultados muestran la viabilidad de las características definidas para estudiar el talento matemático mediante la invención de problemas, ya que los estudiantes con talento presentan mejores niveles de dominio en cuatro de las seis características definidas. Este estudio es parte de una investigación más amplia de tesis doctoral, que busca caracterizar el talento matemático mediante tareas de invención de problemas.

Palabras clave: invención de problemas, resolución de problemas, talento matemático

Abstract
Problem posing is regarded as a relevant task in mathematics classes; however, few studies deal with strategies that allow characterizing the students' performance in this type of activities. Thus, we present six study variables called "characteristics of the mathematical talent essential to the problem posing" that we used to characterize the productions of two groups of students, one considered with talent and the other of a normal public school, through domain indicators defined in each of them. The results show the feasibility of the defined characteristics to study mathematical talent by problem posing, since talented students present better levels of proficiency in four of the six defined characteristics. This study is part of a broader research of a doctoral thesis that seeks to characterize the mathematical talent by tasks of problem posing.

Key words: problem posing, problem solving, mathematical talent

Introducción

La invención de problemas es considerada como una actividad importante que promueve la participación de los estudiantes en una auténtica tarea matemática (Silver & Cai, 2005). De hecho, algunos estudios ponen de manifiesto el creciente interés por este tema, el cual se refleja en las diversas líneas de investigación definidas en este campo, así como las bondades y usus que se le ha dado como enfoque de instrucción y de investigación (Espinoza, Lupiáñez & Segovia, 2014). A pesar de esto, poco se sabe sobre las variables que se pueden emplear para caracterizar las producciones de los estudiantes ante este tipo de tareas, dada la complejidad que esto representa (Rosli, Goldsby y Capraro, 2013).

En este sentido, se pueden citar los estudios de Leung y Silver (1997); Ellerton (1986); Cázares (2000), Silver y Cai (2005) y Espinoza, Lupiáñez y Segovia (2016), que muestran algunas variables empleadas para estudiar la complejidad y características de las producciones de los estudiantes ante este tipo de tareas.

Así, en este trabajo se presentan seis variables de estudio que hemos denominado “características del talento matemático claves para la invención de problemas”, las cuales fueron definidas con base en el análisis de las características del talento matemático que están relacionadas con los procesos de invención de problemas y las variables empleadas en estudios previos. Además, en cada característica se definieron indicadores de dominio que permiten valorar con mayor profundidad el nivel de presencia de dichas características en las producciones de los estudiantes.

Una vez definidas, se realizó un estudio piloto que consistió en aplicar a dos grupos de estudiantes un instrumento conformado por ocho tareas en las que inventan problemas con base en alguna situación presentada de forma textual o a partir de una imagen. El objetivo del estudio piloto fue valorar si las características definidas eran viables para caracterizar el talento matemático y mejorar los indicadores de dominio definidos inicialmente.

Con respecto a los grupos, el primero está conformado por tres estudiantes del colegio científico de Pérez Zeledón identificados con talento mediante el test de Raven y el otro grupo lo conforman cinco estudiantes de un colegio público normal, llamado Liceo Fernando Volio Jiménes, de la zona de Pérez Zeledón, Costa Rica.

De esta forma, el diseño del estudio es mixto, que combina aspectos de diseños simples cuantitativos y cualitativos. Además, corresponde a un estudio descriptivo transversal (Cohen & Manion, 1990) que busca caracterizar el talento matemático mediante el análisis de los problemas que inventan los estudiantes en un momento determinado, predominando la descripción en términos cualitativos y cuantitativos.

A continuación se presenta de forma breve en qué consiste la invención de problemas, las características del talento matemático asociadas a este tipo de actividades y las seis “características del talento matemático claves para la invención de problemas”, así como los indicadores de diminio definidos en cada una de ellas luego de la revisión del estudio piloto. Por último, se exponen los principales resultados de la aplicación del estudio piloto de acuerdo con las características definidas.

La invención de problemas matemáticos

De acuerdo con Singer, Ellerton y Cai (2013) la actividad de inventar problemas no es nueva, sino que forma parte de la resolución de problemas desde hace ya varios años. Sin embargo, es hasta en las

últimas décadas que se identifica como una línea de investigación (Espinoza, Lupiáñez y Segovia, 2016). Pero ¿en qué consiste este proceso?
La literatura consultada muestra que se le conoce como generación de problemas o reformulación de problemas dados (Silver, 1994), formulación de problemas (Kilpatrick, 1987), planteamiento de problemas (Brown & Walter, 1990) o creación de problemas (Malaspina, 2011).

Para Koichu y Kontorovich (2013) la invención de problemas es el proceso mediante el cual los estudiantes construyen interpretaciones personales de situaciones concretas y las formulan como problemas matemáticos. Ayllón, Castro y Molina (2011) la conceptualiza como la acción de producir un enunciado que presente un planteamiento o historia a partir del cual se formulan una o más preguntas que son contestadas a partir de ciertos datos. Otra conceptualización se refiere al hecho de crear un problema nuevo, ya sea por variación de uno dado o por elaboración (Malaspina, 2011).

Por último, se adopta la definición dada por Espinoza et al., (2016a) quienes afirman que es un proceso matemático complejo donde se construyen enunciados a partir de la interpretación personal o significado que le da un sujeto a una situación concreta o a un problema previamente dado, el cual puede ocurrir antes, durante o después del proceso de resolución.

Características del talento matemático asociadas a la invención de problemas

Luego de una revisión sobre la caracterización del talento matemático, se encontró que varios autores proporcionan una serie de rasgos que se pueden observar en niños aventajados en esta disciplina y que se relacionan con los procesos de invención de problemas. Al respecto se pueden citar las siguientes: captan la estructura interna de los problemas, examinan el contenido matemático de un problema analítica y sistemáticamente, recuerdan información matemática general y métodos de resolución (Krutetskii, 1976); capacidad para formular y reformular el contenido con el fin de crear nuevos problemas (Singer & Voica, 2014); analizan el problema y consideran alternativas, tienen energía, persistencia y concentración (Banfield, 2005); disfrutan inventando problemas originales (House, 1987; citado en Keşan et al., 2010); poseen flexibilidad en la manipulación de datos, agilidad mental para el flujo de ideas o pensamiento divergente, capacidad de generalización y formulación espontánea de problemas (Greenes, 1981); producen ideas originales, valiosas y extensas, localizan la clave de los problemas (Freiman, 2006).

Características del talento matemático claves para la invención de problemas

A partir de la revisión de literatura sobre la caracterización del talento matemático y los procesos de invención de problemas, se definieron seis "características del talento matemático claves para la invención de problemas". A continuación se explica brevemente cada una de ellas, así como los indicadores de dominio correspondientes.

1. Coherencia en el enunciado

De acuerdo con Krutetskii (1976) los estudiantes con talento captan con facilidad la estructura interna de los problemas. De igual forma Freiman (2006) constata que les resulta más sencillo localizar la clave de los problemas. Así, esta variable estudia la formulación de problemas bien concebidos en el sentido de que sean coherentes de acuerdo con las siguientes características: el enunciado contiene todas sus partes (información, requerimientos, contexto, entorno matemático), relación entre los requerimientos y la información del problema, coherencia matemática de los conceptos empleados, buen uso de la semántica. Los indicadores de dominio son los siguientes:

Nulo: El problema no contiene alguna de sus partes, a saber, información, requerimientos, contexto o entorno matemático (Malaspina & Vallejo, 2014). No existe relación entre los requerimientos y la información del problema.
Bajo: La información del problema presenta expresiones que no tienen sentido matemático en el contexto del problema o errores de semántica. Los requerimientos presentan alguna ambigüedad. Falta algún elemento en la información.
Medio: El problema no presenta incoherencias matemáticas. Los requerimientos no presentan ninguna ambigüedad. Existe relación entre las partes del problema; pero faltan elementos en la información, el entorno matemático o los requerimientos.
Alto: El problema está bien concebido desde el punto de vista semántico y matemático.

2. Capta, manipula y relaciona información a partir de la situación propuesta

Algunos autores destacan la capacidad que tienen los estudiantes con talento de prestar atención a los detalles, identificar patrones y relaciones; así como realizar un razonamiento lógico sobre relaciones cuantitativas y especiales (Banfield, 2005; Freiman, 2006; Reyes-Santander & Karg, 2009). Por tanto, se analiza la capacidad que tienen los estudiantes de observar, manipular y establecer relaciones a partir de la información implícita o explícita que contiene la situación propuesta; así como profundizar en las relaciones que establecen los datos e imágenes. Los indicadores de dominio son los siguientes:

Nulo: No establece ninguna relación.
Bajo: Establece solo una relación a partir de la situación propuesta.
Medio: Establece una relación entre los datos e imágenes y profundiza en ella, o bien, establece dos relaciones sin profundizar en ellas.
Alta: Establece más de dos relaciones a partir de la situación propuesta y profundiza en ellas.

3. Comprensión en profundidad de ideas complejas

La comprensión en profundidad de ideas complejas de la matemática es una capacidad que caracteriza a un estudiante con talento (Reyes-Santander & Karg, 2009). En este sentido Greenes (1981) afirma que poseen la habilidad de elaborar ideas y conclusiones complejas y coherentes. Esta característica se refleja cuando el estudiante plasma en sus producciones este tipo de ideas y logra resolver el problema con éxito. Se considera que una idea es compleja cuando es comprendida, generalmente, por estudiantes que están en grados superiores de quien la está empleando. Los indicadores de dominio definidos en esta característica son los siguientes:

Nulo: No emplea ideas complejas
Bajo: Emplea una idea compleja pero no la comprende correctamente.
Medio: Emplea idea compleja y la comprende correctamente.
Alto: El estudiante emplea dos o más ideas complejas y las comprende correctamente.

4. Empleo de diversos campos del conocimiento

De acuerdo con Reyes-Santander y Karg (2009) los estudiantes con talento se caracterizan por poseer dominio de varios campos del conocimiento, por lo que podrían plasmar en sus producciones dicha característica. Así, esta característica se refiere a la diversidad de campos de conocimiento que emplea el estudiante al inventar un problema. Los indicadores de dominio de esta característica son los siguientes:

Bajo: Emplea un campo de conocimiento.
Medio: Emplea dos campos de conocimientos.
Alto: Emplea tres o más campos de conocimiento.

5. Flexibilidad en el uso de datos numéricos

En esta característica se analiza el tipo de número que el estudiante incluye en el enunciado del problema, ya que según algunos estudios los estudiantes con talento muestran flexibilidad para la manipulación de datos (Espinoza, Lupiáñez, & Segovia, 2016b; Greenes, 1981). Los indicadores de dominio son los siguientes:

Bajo: Emplea sólo números enteros.
Medio: Emplea números enteros y racionales o sólo racionales.
Alto: Emplea números irracionales y racionales o sólo número irracionales.

6. Pensamiento divergente

El pensamiento divergente o la fluidez de ideas es una característica que presentan los estudiantes con talento (Greenes, 1981). De acuerdo con González y Domigues (2015) una persona con pensamiento divergente añade a partir de una sola idea varios y diversos pensamientos relacionados con la misma. En este sentido, el pensamiento divergente en la invención de problemas será estudiado de acuerdo con la cantidad de proposiciones no semejantes presentes en el enunciado del problema (Espinoza, Segovia, & Lupiáñez, 2015).

Por ejemplo, de las siguientes proposiciones "Juan le da tres vueltas a la plaza", "María le da siete vueltas a la plaza" y "Pedro le da dos vueltos más que María", las dos primeras son semejantes pues aportan información semejante, mientras que la tercera es una variación de las dos primeras. La pregunta del problema no se incluye como una proposición
Los indicadores de dominio definidos en esta característica son los siguientes:

Bajo: Emplea dos o menos proposiciones no son semejantes.
Medio: Emplea tres proposiciones no semejantes.
Alto: Emplea más de tres proposiciones no semejantes.

Flexibilidad en el uso de datos numéricos

Con respecto a la flexibilidad en el uso de datos numéricos, resultó que el 85% de los enunciados del grupo talento contienen solo números enteros; mientras que el 100% de los problemas inventados por el grupo estándar presenta este tipo de número. Por tanto ambos grupos se encuentran en un nivel bajo en esta característica.

Pensamiento divergente

En relación con el pensamiento divergente, los estudiantes del grupo talento se encuentra en un nivel medio, mientras que el grupo estándar en un nivel bajo. Esto porque el 76% de los problemas inventados por el grupo talento presentan un nivel medio o alto de pensamiento divergente, en contraste con el 14% del grupo estándar que están en dicho nivel. Además, resultó que la media en el nivel de dominio de esta característica en el grupo talento (2,35) es mayor que en el grupo estándar (1,14).

Conclusiones

En primera instancia se puede concluir que el estudio piloto permitió mejorar los indicadores de dominio definidos inicialmente haciéndolo más precisos. Además, se concluye que las “características del talento claves para la invención de problemas” definidas en este estudio son pertinentes para caracterizar las producciones de los estudiantes con talento, ya que se lograron establecer algunas diferencias en las producciones de ambos grupos.
En este sentido, el estudio piloto muestra que los estudiantes del grupo talento presentan mejores niveles de dominio que sus compañeros del grupo estándar en las siguientes características:

- Capta, manipula y relaciona información a partir de la situación propuesta
- Comprensión en profundidad de ideas complejas
- Empleo de diversos campos del conocimiento
- Flexibilidad en el uso de datos numéricos
- Pensamiento divergente

Con respecto a las características coherencia en el enunciado y flexibilidad en el uso de datos numéricos, los estudiantes de ambos grupos presentan un nivel de dominio similar: medio y bajo respectivamente.

Referencias bibliográficas

Ayllón, M. F., Castro, E., & Molina, M. (2011). Invención de problemas y tipificación de problema difícil por alumnos de educación primaria. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco & M. Palarea (Eds.), *Investigación en educación matemática XV* (pp. 277–286). Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Retrieved from http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3731153.pdf

Banfield, T. (2005). Ability grouping for mathematically gifted adolescent boys. *International Education Journal*, *6*(2), 141–149.

Brown, S., & Walter, M. (1990). *The Art of problem posing*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Cázares, J. (2000). *Invención de problemas por escolares de primaria. Un estudio Evolutivo*. Tesis de maestría no publicada, Universidad de Granada. España.

Cohen, L., & Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

Ellerton, N. (1986). Children´s made-up mathematics problems: A new perspectiveon talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(3), 261–271.

Espinoza, J., Lupiáñez, J. L., & Segovia, I. (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Revista Digital Matemática, Educación E Internet*, *14*(2), 1–12.

Espinoza, J., Lupiáñez, J. L., & Segovia, I. (2016a). La invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento matemático. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 14*(2), 368-392. http:dx.doi.org/10.14204/ejrep.39.15067

Espinoza, J., Lupiáñez, J. L., & Segovia, I. (2016b). Un estudio de los problemas inventados por estudiantes de secundaria en España. *Revista de Educación de La Universidad de Granada*, *23*, 85–101.

Espinoza, J., Segovia, I., & Lupiáñez, J. L. (2015). Un esquema para analizar los enunciados de los estudiantes en contextos de invención de problemas. *Revista Uniciencia, 29(1), 58-81. doi.org/10.15359/ru.29-1.4, 29(1), 58–81*.

Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades : A Challenging Situations Approach. *The Mathematics Enthusiast*, *3*(1), 51–75.

González, M., & Domingues, F. S. (2015). ¿Existen indicadores para identificar el talento? *Aula*, *21*, 21-32

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *The Arithmetic Teacher*, *28*(6), 14–17.

Keşan, C., Kaya, D., & Güvercin, S. (2010). The Effect of Problem Posing Approach to the Gifted Student ’ s Mathematical Abilities. *International Online Journal of Educational Sciences, 2*(3), 677-687.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problem com from? En A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123–148). New Jersey: Lawrance Erlbaum Associates.

Koichu, B., & Kontorovich, I. (2013). Dissecting success stories on mathematical problem posing: A case of the Billiard Task. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 71–86. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9431-9

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: Universidad de Chicago Press.

Leung, S. S., & Silver, E. A. (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the Arithmetic Problem Posing of prospective elementary school teachers. *Mathematics Education Research Journal*, *9*(1), 5–24. https://doi.org/10.1007/BF03217299

Malaspina, U. (2011). Sobre creación de problemas. *Revista Iberoamericana De Educación Matemática*, *28*, 159–164.

Malaspina, U. & Vallejo, E. (2014). Creación de problemas en la docencia y la investigación. En Malaspina, U. (Ed.) *Reflexiones y Propuestas en Educación Matemática* (pp. 7 – 54).Lima: IREM-PUCP

Reyes-Santander, P., & Karg, A. (2009). Una aproximación al trabajo con niños especialmente dotados en matemáticas. En M. J. González, M. . González, & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 403–414). Santander: SEIEM.

Rosli, R., Goldsby, D., & Capraro, M. M. (2013). Assessing students’ mathematical problem-solving and problem-posing skills. *Asian Social Science*, *9*(16), 54–60. https://doi.org/10.5539/ass.v9n16p54

Silver, E. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 19–28.

Silver, E., & Cai, J. (2005). Assessing students`mathematical problem posing. *Teaching Children Mathemtics*, *12*(3), 129–135.

Singer, F. M., Ellerton, N., & Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 1–7. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9478-2

Singer, F. M., Pelczer, I., & Voica, C. (2011). Problem posing and modification as a criterion of mathematical creativity. En M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 1133–1142).* Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

TRABAJO GEOMETRICO, CON ATENCION EN EL CARACTER DINÁMICO DE LA GEOMETRÍA Y SU PROCESO DE CONSTRUCCIÓN: ANÁLISIS INICIAL

Sergio Rubio-Pizzorno, Gerardo Cruz-Márquez, Gisela Montiel Espinosa
Cinvestav-IPN. (México)
sergio.rubio@cinvestav.mx, gerardo.cruz@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx

Resumen
En el presente escrito damos a conocer un análisis inicial de algunos episodios del taller "Importancia del proceso constructivo en la actividad geométrica", realizado durante la Relme 31, el cual nos permitió –entre otras cosas– refinar nuestras posturas respecto a la relevancia del proceso de construcción, y entenderlas producto de considerar el trabajo geométrico con énfasis en el carácter dinámico de la geometría, dado por el par transformación-invariante, y de reconocer a la construcción como una práctica geométrica.
Al mismo tiempo, el contraste de los aspectos teóricos con la evidencia empírica, nos permitió advertir que, además de tener en cuenta el carácter dinámico de la geometría y su proceso de construcción, es necesario movilizar la capacidad de interpretar símbolos que atribuyen significados geométricos a los diagramas.

Palabras claves: razonamiento visoespacial, trabajo geométrico, construcción

Abstract
In this paper we show an initial analysis of certain episodes of "*Importance of the construction process in the geometric activity"* workshop, carried out in the 31st RELME, which allowed us, among other things, to improve our stances on the importance of the construction process, and to understand them as the result of considering geometric work with emphasis on the dynamic character of geometry, given by the transformation-invariant pair, and of recognizing construction as a geometric practice. At the same time, the contrast of the theoretical aspects with the empirical evidence allows us to show that besides taking into account the dynamic character of geometry and its construction process, it is also necessary to prompt the ability to interpret symbols that give geometric meanings to the diagrams.

Key words: visual-spatial reasoning, geometric work, construction

Introducción

En la enseñanza de la geometría escolar, podemos identificar que las propiedades métricas y figurales de los objetos, al igual que los tratamientos algebraicos, priman por sobre las propiedades y tratamientos propiamente geométricos. Por ejemplo, la caracterización escolar más usual para un ángulo recto pende de una propiedad métrica –aquel que mide 90º–, obviando, por ejemplo, su interpretación geométrica a partir de rectas perpendiculares. Otro caso es el uso del teorema de Pitágoras, donde el contexto geométrico del triángulo rectángulo es solo una excusa para plantear una ecuación, que es resuelta mediante métodos algebraicos, para finalmente obtener un valor numérico.

Ante estas situaciones escolares, nos cuestionamos cuáles son las propiedades y métodos geométricos invisibilizados por la tradición escolar. Para comenzar a delinear respuestas a tal problemática, consideramos dos elementos teóricos de partida: en primer lugar, el razonamiento visoespacial (RV), entendido como la habilidad humana de tratar objetos mentales y concretos; y, en segundo término, las naturalezas de la geometría (Rubio-Pizzorno y Montiel, 2017b), que propone al proceso de construcción como una práctica geométrica que ha sido invisibilizada por la tradición escolar.

La articulación de ambos fundamentos teóricos fue la base para el planteamiento del taller aludido, cuyo objetivo de partida fue confrontar los significados escolares asociados a los objetos geométricos con el proceso de construcción de los mismos.

Antecedentes

Tal vez uno de los fenómenos más estudiados respecto al tratamiento escolar tradicional que reciben las nociones geométricas es la centración en los aspectos figurales de las mismas. En este sentido, estudios como los de Barrantes y Zapata (2008), y Barrantes, Barretbo y López (2014), coinciden en que la limitada cantidad y pluralidad de representaciones con las que pueden interactuar los estudiantes en clase y libros de texto propicia la emergencia de prototipos geométricos, que progresivamente constituyen "esquemas mentales inadecuados para que el alumno desarrolle un pensamiento abierto y divergente" (Barrantes, Barretbo y López, 2014, p. 24). Asociado a este fenómeno también se ha investigado el papel que juega la rigidez geométrica (Larios, 2006), los factores de visibilidad (Marmolejo y Vega, 2005; Marmolejo y González, 2008) y las propiedades gestálticas (Maracci, 2001) en actividades que involucran la interpretación y/o construcción de figuras geométricas.

Así, identificamos –a nivel de conjetura– una relación entre lo reportado en la literatura y el enfoque escolar que prioriza las propiedades figurales y métricas, así como los tratamientos algebraicos, por sobre las propiedades y tratamientos propiamente geométricos. En consecuencia, nos cuestionamos de qué forma se relacionan los seres humanos con el espacio, la forma y la medida, y, en segundo lugar, cuáles son las propiedades y métodos geométricos invisibilizados por la tradición escolar.

Consideraciones teóricas

En cuanto al primer fundamento teórico mencionado, la literatura especializada en Matemática Educativa está utilizando el término RV para agrupar los resultados de investigación sobre visualización, pensamiento espacial, razonamiento espacial, pensamiento visoespacial, razonamiento visual, entre otros; que tienen en común hablar de la actividad de imaginar objetos estáticos o dinámicos y actuar sobre ellos (Sinclair, Bartolini Bussi, de Villiers, Jones, Kortenkamp, Leung y Owens, 2016). En este sentido, entendemos el RV como la habilidad humana de construir objetos mentales con base en la percepción-abstracción de objetos concretos y de materializar objetos mentales en objetos concretos mediante la representación. Consecuencia de admitir al RV como una habilidad humana nos es necesario preguntarnos cómo se expresa éste al llevar a cabo tareas relacionadas con la geometría.

Por otro lado, el segundo fundamento teórico aludido nos permite incorporar propiedades y métodos propios de la actividad geométrica, nos valemos del estudio realizado por Rubio-Pizzorno y Montiel (2017b) sobre las naturalezas de la geometría relativas a ciertas áreas del saber humano, específicamente las naturalezas epistémica, epistemológica y filosófica:

N. epistemológica: "la geometría es un área del conocimiento humano que, en primera instancia, se inspira en la experiencia para luego desarrollar sus elementos teóricos" (Ibíd., p. 145). Es decir, en toda la geometría (actividad, razonamiento, representación geométrica) los aspectos teóricos y concretos están intrínsecamente relacionados de manera constitutiva.

Sumado a lo anterior, reconocemos como una manera de conceptualizar a la geometría mediante los invariantes que se manifiestan a través de transformaciones espaciales, a partir de lo cual se reconoce que "la característica dinámica de la geometría [está] dada por el par transformación-invariante" (Ibíd., p. 146).

N. epistémica: "los objetos geométricos se elaboran siguiendo una estructura discursiva que pone en juego aspectos teóricos y concretos; con base en proposiciones, definiciones, postulados y comunes sentencias; empleando instrumentos que encarnan las herramientas teóricas propuestas por Euclides. Los diagramas generados de esta manera [...] manifiestan propiedades teóricas y gráfico-espaciales, como características esenciales" (Ibíd., p. 144).

N. filosófica: para que los resultados geométricos con un pretendido valor de generalidad puedan descansar sobre el trazado de representaciones particulares, es necesario una "generación de verdades geométricas universales, las cuales son producidas mediante un proceso de construcción de representaciones geométricas concretas" (Ibíd., p. 145).

En la naturaleza epistemológica se declara que la geometría misma se desarrolla a través de la manipulación de objetos concretos, que luego son teorizados. Esta idea nos permite plantear la existencia de una relación entre la manera de hacer geometría con el RV, ya que en ambos casos existe una manipulación de objetos concretos y mentales.

Por otra parte, tanto en la naturaleza epistémica, como en la filosófica se ponen en realce la manera de producir diagramas geométricos, incluso proponiendo que el proceso de construcción produce verdades geométricas universales. En consecuencia, los objetos geométricos concretos manifiestan propiedades gráfico-espaciales (captadas por la percepción) y propiedades teóricas, propias de la geometría.

Diseños de las actividades

Ante la problemática mencionada y con base en los aspectos teóricos aludidos, diseñamos actividades con el objetivo manifiesto de indagar en la relación entre el RV y las prácticas geométricas, y al mismo tiempo reivindicar la importancia del proceso de construcción en la actividad geométrica. Dichas actividades se dividieron en dos grandes bloques: las actividades introductorias (actividades 1 y 2), que permitieron abrir la discusión respecto a la manera en que las personas interactuamos con los objetos mentales y concretos, y favorecieron un ambiente agradable de participación y debate; y las actividades de confrontación (3 y 4), que hicieron posible carear los significados escolares asociados a los objetos geométricos con el proceso de construcción de los mismos, esto mediante tareas donde los métodos algebraicos y las propiedades figurales y métricas no son suficientes, y, en consecuencia, se enfrenta la necesidad de atender al proceso de construcción de los objetos geométricos para responder.

*Actividad 1 "Un gato"***:** En esta actividad (Rubio-Pizzorno y Cruz-Márquez, 2017, p. 2.1) se les pidió a los participantes que dibujaran un objeto concreto (un gato), con la intención de reflexionar sobre el proceso de representación, entendido como la materialización de un objeto mental en un objeto concreto. En particular, esta actividad pretendía generar debate sobre los factores que causan que, a pesar de partir de un mismo objeto mental de referencia, se genere una amplia cantidad de representaciones distintas.

*Actividad 2 "¿Qué vemos?"***:** Complementando a la primera, esta actividad pretendía comenzar la reflexión sobre el proceso de percepción-abstracción, tomando como punto de partida una misma imagen (una fotografía de un cielo nublado) y solicitando se identificaran en ella tantos objetos como sea posible. En especial, nos interesaba discutir sobre las causas de la diversidad de objetos mentales identificados, pese a tener el mismo objeto concreto de referencia (Ibíd., 2017, p. 2.1).

*Actividad 3 "Abstracción de esencias"***:** El objetivo de esta actividad fue (Ibíd., 2017, p. 3.1) confrontar la manera tradicional de trabajar en geometría con una forma constructiva de hacerlo. La primera se caracteriza –entre otras cosas– por el uso de representaciones estáticas, la interpretación de símbolos que dotan cierto significado geométrico a los objetos y la desestimación de propiedades dinámicas; en cambio la segunda se basa en la característica dinámica de la geometría dado por el par transformación-invariante.

Para intencionar esta confrontación se dispuso de un diagrama con apariencia de cuadrado (Ver en Rubio-Pizzorno y Cruz-Márquez, 2017, p. 3.1), en el cual toda la información que aparece en él es veraz. La tarea consistía entonces en determinar, a la luz de la información que se pueda extraer de las propiedades teóricas y gráfico-espaciales del diagrama, a qué polígono correspondía. Se esperaba que los asistentes pudieran concluir que el diagrama correspondía a un cuadrado, resultado que se puso a prueba mediante la característica dinámica de la geometría, es decir, aplicando transformaciones e identificando qué permanece invariante.

*Actividad 4 "Generación de invariantes"***:** Luego de reconocer la importancia del proceso de construcción en el trabajo geométrico –cuando se trabaja con una conceptualización de la geometría con base en las transformaciones y los invariantes–, se propuso la presente actividad para que los asistentes intentaran construir representaciones geométricas que encarnaran cierto objetivo teórico declarado *a priori*, por ejemplo, que el diagrama sea un trapecio rectángulo.

Para lograr este objetivo se propone que, en primer lugar, identifiquen las propiedades esenciales del cuadrilátero a construir, y luego puedan llevar a cabo tales propiedades en un proceso de construcción. Finalmente, se instó a los asistentes a que utilizaran la *prueba del arrastre* para comprobar si el proceso de construcción realizado fue adecuado para lograr el propósito declarado *a priori*; en caso de no serlo, se pretendía identificar los aspectos a corregir para lograr el objetivo.

En esta tarea se pretendía explotar el potencial epistémico, epistemológico y filosófico que guarda la prueba del arrastre en los ambientes de geometría dinámica:

En este uso del arrastre es posible identificar aspectos epistémicos (poner en juego la relación dialéctica entre elementos teóricos y concretos, al manipular diagramas para identificar invariantes), epistemológicos (emplear el par transformación-invariante, como propiedad dinámica, en el trabajo geométrico) y filosóficos (dotar de propiedades geométricas a los diagramas, mediante un preciso proceso de construcción, y abstraer la esencia de toda la clase de objetos geométricos que el diagrama específico está representando). De esta manera, concluimos que la prueba del arrastre emerge como convergencia y síntesis de aspectos epistémicos, epistemológicos y filosóficos, en los ambientes de geometría dinámica (Rubio-Pizzorno y Montiel, 2017b, p. 147).

Trabajo geométrico, poniendo atención en el carácter dinámico de la geometría y su proceso de construcción

Para desarrollar el análisis se dispone de la siguiente caracterización de los componentes del trabajo geométrico considerando su carácter dinámico:

RV como una habilidad humana movilizada en el trabajo geométrico

La forma en que las personas afrontamos tareas que relacionan con objetos mentales y concretos se basa en nuestra experiencia personal, aspectos perceptuales y conocimientos previos. De este modo, se espera que a partir de un referente (mental o concreto) cada sujeto hará una interpretación propia, diferente de la realizada por otras personas, aunque todas ellas compartan ciertos elementos esenciales del objeto al que se hace referencia. Bajo esta perspectiva, las personas abordan de una manera flexible las tareas en las que estén involucrados los objetos mentales y los concretos, aunque dicha tarea corresponda a una actividad geométrica, donde todos sus objetos están completamente definidos y determinados.

Carácter dinámico de la geometría

Desde una conceptualización de la geometría que se base en la interacción entre transformaciones, invariantes y el espacio, como la propuesta por Klein (1985), reconocemos el carácter dinámico de la geometría representado por el par transformación-invariante, y esto supone una manera dinámica de trabajar con los objetos geométricos y un uso de esquemas dinámicos para afrontar actividades geométricas.

En la actualidad, los ambientes de geometría dinámica representan un soporte material que permite manipular los objetos geométricos de una manera dinámica, a través del arrastre, su característica definitoria, entendido como una "transformación continua en tiempo real" (Goldenberg y Cuoco, 1998, p. 351). Sumado a lo anterior, la prueba del arrastre actúa como un mecanismo de comprobación basado en la aplicación de una transformación y la identificación de los invariantes que permanecen a través de tal transformación.

Proceso de construcción como generador de invariantes

Para asegurar la generalidad de los resultados geométricos que se obtienen de trabajar con representaciones concretas, es necesario realizar un proceso de construcción adecuado, para lo cual se necesita cumplir dos condiciones: (1) Seguir un proceso de construcción "con base en proposiciones, definiciones, postulados o comunes sentencias", y (2) "emplear instrumentos que encarnen las herramientas teóricas" declaradas en los *Elementos* (Rubio-Pizzorno y Montiel, 2017a, en prensa).

Análisis y discusión del taller

Luego de haber declarado los propósitos del taller y describir las actividades construidas en consecuencia, se presenta el análisis de algunos episodios del taller, a la luz del RV como una habilidad humana flexible y situacional movilizada en el trabajo geométrico, el proceso de construcción como generador de invariantes y de la característica dinámica de la geometría.

Los episodios seleccionados dan cuenta de hechos claves y representativos ocurridos durante el taller, en los cuales se manifiestan las características del trabajo geométrico considerando su carácter dinámico. De esta manera se contrasta la intención de las actividades y lo que realmente provocaron en las acciones y reflexiones de los asistentes al taller.

*Episodio 1 "¿Qué polígono es?"***:** En la actividad 2, al solicitar a los asistentes que identificaran objetos en la fotografía proyectada, se obtuvo una amplia cantidad y variedad de respuestas (e.g. robot, personas, país, ratón, bota). Así, al discutir sobre la diversidad de objetos obtenidos, los participantes aluden a diversas razones: "Yo creo que las imágenes que están allí, así, tal cual, evocan cosas diferentes en nuestra mente de acuerdo a la experiencia que tenemos". Éste tipo de comentarios nos permite ubicar a la experiencia y condiciones situacionales como factores en la asociación de objetos mentales a objetos concretos.

Ésta manera de movilizar el RV también se manifiesta al llevar a cabo tareas geométricas, con la salvedad de que en estas últimas el referente corresponde a un ente objetivado, debido a las propiedades teóricas y universales que está representando. Por ejemplo, en la actividad 3 se propone a los asistentes realizar un trabajo similar al llevado a cabo con la fotografía del cielo nublado, pero ahora con un diagrama geométrico. Las respuestas fueron tan diversas como la cantidad de asistentes, pero luego de una discusión se llegó a un consenso entre todos ellos: "Tiene cuatro lados iguales, porque tiene líneas perpendiculares (dos ejes). Por esos ejes se ve que [el diagrama] es simétrico; yo lo percibí así, pero realmente no hay medidas"; otro comenta "es una figura de cuatro vértices y cuatro lados. Entonces es un cuadrilátero. Sus cuatro ángulos internos son rectos, entonces puede ser rectángulo. El ángulo del centro, formado por las diagonales es recto, entonces puede ser un cuadrado. [...] Entonces ya concluí que es cuadrado".

Así, a partir de captar propiedades del diagrama e interpretar los signos presentes, los participantes fueron declarando las relaciones que encontraban. Aunque sus aproximaciones a la actividad fueron distintas e inspiradas en la experiencia personal y los conocimientos previos, se logró alcanzar un consenso respecto al objeto representado, un cuadrado.

Episodio 2 "Ya no es cuadrado": En la segunda parte de la actividad 2, se propicia el momento de confrontación de los significados geométricos escolares (estáticos, con arraigo en métodos algebraicos y propiedades gráfico-espaciales), con una manera de tratar a los objetos geométricos, considerando el carácter dinámico de la geometría.
En la primera parte de la actividad 2 los asistentes consensuaron que el diagrama presentado correspondía a un cuadrado. A continuación, se les pidió que utilizaran la herramienta *Relación* de GeoGebra (Kovács, 2015), para corroborar los argumentos propuestos en el análisis de la figura presentada. La discusión comenzó cuando la herramienta mostró que, por ejemplo, la longitud de los segmentos c y d son iguales, pero que no es cierto en general (ver Imagen 1, izquierda).

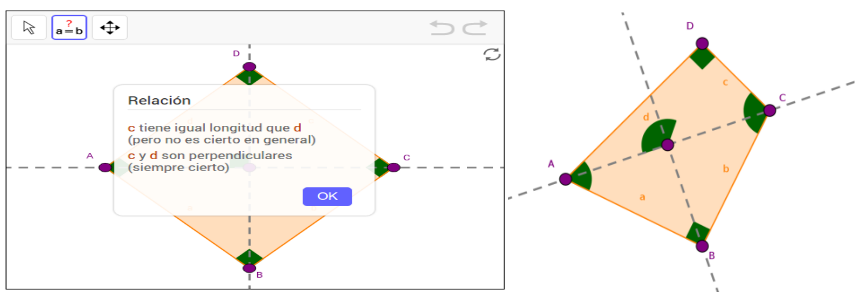


Imagen 1: Uso de la herramienta *Relación* (izquierda) y comportamiento general del diagrama (derecha).

Luego se arrastraron los vértices del polígono, con el objetivo de que el diagrama mostrara su comportamiento más general (sólo uno de sus ángulos internos es recto. Ver Imagen 1, derecha). A partir de esta actividad se comenzó a discutir sobre el carácter dinámico y la importancia del proceso de construcción en el trabajo geométrico: "Yo no podría decir si es un cuadrado. [...] Si tú dibujas eso en una hoja de papel, donde no se va a mover nada, y si yo lo veo así, de una forma estática, yo digo 'eso es un cuadrado'. Pero si tú estás en un ambiente de geometría dinámica y lo que tú quieres construir es un cuadrado, tiene que cumplir una serie de requisitos, tiene que cumplir propiedades matemáticas [las cuales] que deben permitir que cuando yo arrastre, no cambie la figura y las propiedades se mantengan. Eso depende si me hubieras dado el dibujo en un papel, es una cosa; pero si estás en Cabri o en GeoGebra tendría que haber visto cómo lo construidas". Finalmente, otro asistente concluye que para asegurar que la construcción sea un cuadrado, es necesario: "hacer la construcción correcta, es decir, mantener las relaciones que yo quiero, es decir, hacer la construcción a partir de esas relaciones".

Conclusión

Si bien en el segundo episodio encontramos evidencia de la relevancia del proceso de construcción en el trabajo geométrico cuando se pone atención al carácter dinámico de la geometría, también hubo argumentos a favor de la interpretación de símbolos que representan propiedades geométricas, sobre todo cuando se trabaja con objetos geométricos en ambientes estáticos. Este último aspecto no estaba considerado en el propósito del taller, y nos parece una cuestión relevante a la hora de caracterizar de manera amplia y robusta el trabajo geométrico a partir de prácticas.

Referencias bibliográficas

Barrantes, M. y Zapata, M. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. Campo Abierto. *Revista de Educación*, 27(1), 55-71.

Barrantes, M., Barretbo, I. y López, M. (2014). La componente visual de la geometría en los libros de textos de secundaria. *Revista Premisa*, *16*(62).

Goldenberg, E. y Cuoco, A. (1998). What is Dynamic Geometry? En: R. Lehrer y D. Chazan (Eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space* (351–367). New Jersey, Estados Unidos: Lawrence Erlbaum Associates. ISBN: 0-8058-1949-5

Klein, F. (1985). El Programa de Erlangen. *Revista del Seminario de Enseñanza y Titulación, 2*(4). En http://valle.fciencias.unam.mx/titulacion/4e.pdf

Kovács, S. (2015). The Relation Tool in GeoGebra 5. En F. Botana y P. Quaresma (Eds), *Automated Deduction in Geometry: 10th International Workshop, ADG 2014* (pp. 53–71). Coimbra, Portugal: Springer International Publishing. doi: 10.1007/978-3-319-21362-0

Larios, V. (2006). La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *9*(3), 361-382.

Maracci, M. (2001). Drawing in the problem solving process. En J. Novotná (Ed.), Proceedings of 2nd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 478-488). Praga, República Checa: Charles University.

Marmolejo, G. y González, G. (2008). Algunos elementos a tener en cuenta en la enseñanza de las figuras geométricas en la educación básica. En Luque, Carlos Julio (Ed.), Memorias XVIII Encuentro de Geometría y VI encuentro de Aritmética (pp. 53-66). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Marmolejo, G. y Vega, M. (2005). Geometría desde una perspectiva semiótica: visualización, figuras y áreas. En Luque, Carlos Julio (Ed.), Memorias XV Encuentro de Geometría y III encuentro de Aritmética (pp. 661-693). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Rubio-Pizzorno, S. y Cruz-Márquez, G. (2017). Importancia del proceso constructivo en la actividad geométrica [Libro GeoGebra]. doi: 10.13140/RG.2.2.10569.44647

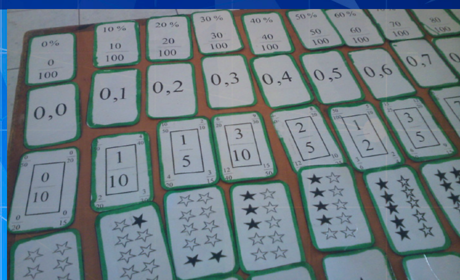
Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2017a). Construcciones dinámicas. En F. J. Córdoba Gómez, J. C. Molina García, L. A. Ciro López (Eds.), *Avances en la integración de tecnologías para la innovación en educación. Congreso Latinoamericano de GeoGebra 2016* (en prensa). Bogotá: Fondo Editorial Universidad La Gran Colombia.

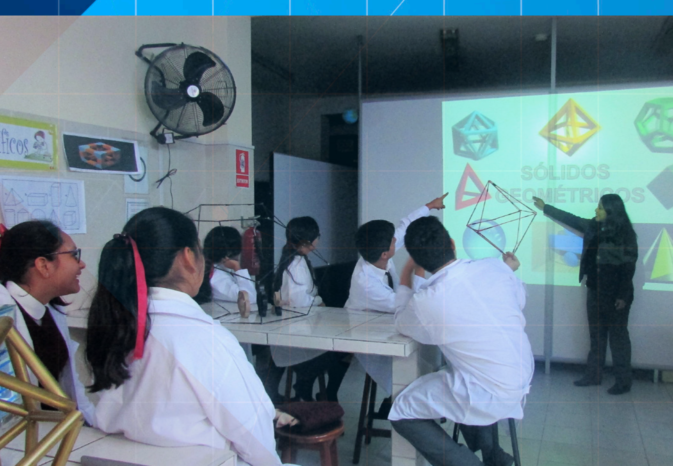
Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2017b). Geometría dinámica como actualización didáctica de la evolución conceptual de la geometría. En P. Perry (Ed.), *23 Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 143 - 148). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional. ISSN: 2346-0539

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM, 48*(5), 691–719. doi: 10.1007/s11858-016-0796-6

SECCIÓN 2

PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS





EXPLORANDO LAS ACTITUDES HACIA LA ESTADÍSTICA EN GRUPOS DE UNIVERSITARIOS DE DOS UNIVERSIDADES LATINOAMERICANAS

Ana Sofía Aparicio Pereda, Rosa Eulalia Cardoso Paredes, María del Rosario Bazán Guzmán
Universidad de Sao Paulo, Universidad San Ignacio de Loyola, Pontificia Universidad Católica del Perú. (Brasil, Perú)
anasofiap@usp.br, reulalia@outlook.com , rcardoso@pucp.pe, rosario_bazanguzman@yahoo.com

Resumen
La investigación analiza las actitudes hacia la Estadística en universitarios de dos universidades localizadas en Lima-Perú y en Minas Gerais-Brasil. Son usadas en conjunto las escalas de Actitudes hacia la Estadística de Estrada (2002) (AEE) y de Cazorla, Silva, Vendramini y Brito (1999) (AEC). La muestra efectiva fue de 314 evaluados de diferentes especialidades, clasificados en dos grandes áreas: 1. Ciencias e ingenierías y 2. Ciencias Sociales y humanas. La escala conjunta de 45 ítems presento alta confiabilidad (alfa > 0.90) y cinco factores. Se encuentran diferencias significativas en las actitudes en las actitudes entre los alumnos ($p<0.05$) de acuerdo con el género, país y especialidad de los evaluados.

Palabras clave: actitudes hacia la estadística, estudiantes universitarios

Abstract
In this research, we analyze university students' attitudes towards statistics in two universities located in Lima, Peru, and in Minas Gerais, Brazil. Both, Estrada's scale of attitude towards statistics (2002) (AEE), and the one of Cazorla Silva, Vendramini y Brito (1999) (AEC) are used together. The effective sample was constituted by 314 evaluated students who belong to different specialties, classified in two major areas: Science and Engineering, and Social and Human Sciences. The joint scale of 45 items presented high reliability (alpha> 0.90) and five factors. Significant differences were found in attitudes among students ($p <0.05$) according to gender, country and specialty.

Key words: attitudes towards statistics, university students

Introducción

En el medio académico y universitario, la Estadística es una disciplina incorporada en la mayoría de las carreras profesionales y es también una herramienta de gran relevancia en la investigación científica, pues aporta diferentes métodos para el correcto análisis cuantitativo de datos empíricos provenientes de estudios de las más variadas especialidades. De acuerdo con, Bayer, Bittencourt y Cheveste (2004), la Estadística tiene un papel relevante en casi todas las actividades de la sociedad moderna, muchos estudiantes, durante y después de finalizar sus estudios van a hacer uso de sus conocimientos de probabilidad y estadística como instrumentos en sus profesiones, independientemente del área de trabajo. Sin embargo, la falta de un adecuado desempeño académico por parte de los estudiantes, en especial de especialidades no matemáticas o de ciencias es un tema recurrente que profesores e investigadores han puesto de manifiesto. Esta problemática ha sido relacionada a diferentes factores como los conocimientos previos de los alumnos, la metodología de enseñanza, la motivación, etc. Para algunos educadores este problema puede también ser explicado con componentes de nivel afectivo, como las actitudes.

La investigación de las actitudes hacia la estadística en poblaciones universitarias ha venido cobrando fuerza en los últimos años. Investigaciones como los de Darías (2000), Blanco (2008), Modéjar, Vargas y Bayot (2008), Rodríguez (2011), Tejero y Castro (2011), Tarazona, Bazán y Aparicio (2013), Pérez, Aparicio, Bazán y Abdounur (2015), Torres, Aparicio, Bazán y Abdounur (2015) entre otros, buscan tener más alcance acerca de lo que los universitarios sienten y su manera de reaccionar frente a la disciplina de estadística.

Autores como Cardoso et al (2012), Gómez (2000) y Gil, Guerrero y Blanco (2006) indican que hay relación entre las actitudes negativas y el aprendizaje de esta disciplina. Las actitudes son definidas por Gal, Ginsburg y Schau (1997) como predisposiciones positivas o negativas frente a un objeto, que son sentimientos estables y basados en experiencias o aprendizajes previos, se forman a lo largo del tiempo como consecuencia de las emociones y sentimientos experimentados en el contexto del aprendizaje de las matemáticas y la estadística. Así, Cardoso et al (2012), mencionan que la aparición de las actitudes de los alumnos hacia las matemáticas está relacionada con los éxitos o fracasos que han tenido durante su proceso de escolarización. Gil et al (2006) consideran que son diversos los estudiantes que generan durante su vida académica actitudes negativas hacia las matemáticas, manifestando en ocasiones, una aversión y/o rechazo hacia la misma.

El presente estudio tiene como objetivo comparar las actitudes hacia la estadística en estudiantes universitarios peruanos y brasileños, así como confirmar las propiedades de las escalas de Estrada (2002) y de Cazorla et al (1999) usadas como una escala global en una muestra transcultural. Esperamos que nuestra investigación habrá camino a futuras investigaciones relacionadas con aspectos afectivos relacionados con el aprendizaje de la estadística, considerando muestras transculturales donde participen instituciones con diferentes características sociales y académicas. Permitiendo una mejor comparación de los resultados tanto descriptivos como en la adaptación de instrumentos confiables.

Metodología

Participantes

Fueron evaluados 314 estudiantes de dos universidades en la ciudad de Lima en Perú y en la ciudad de Minas Gerais en Brasil, de los primeros ciclos, de ambos sexos y de las especialidades de Ciencias e ingenierías y de Ciencias Sociales y humanas. Las características muestrales son presentadas en la Tabla 1.

Tabla 1. Características generales de la muestra de estudio (N= 314)

Características Muestrales	Frecuencia	Porcentaje
Perú	137	43.6
Brasil	177	56.4
Masculino	215	68.5
Femenino	99	31.5
Ciencias e Ingenierías	259	82.5
Ciencias Sociales y Humanas	55	17.5
Total	**314**	**100.0**

Instrumentos

Fueron utilizadas conjuntamente dos escalas de actitudes hacia la estadística, de tipo Likert, de lápiz y papel, aplicados simultáneamente de manera colectiva:

Escala de Actitudes hacia la Estadística de Estrada (AEE). Elaborada a partir de la combi- nación de tres escalas: escala SAS (Roberts y Bilderback, 1980); escala ATS (Wise, 1985) y escala de Auzmendi (1992). Está compuesta por 25 preguntas, 14 de actitudes positivas frente a 11 de actitudes negativas La AEE presenta una confiabilidad alfa de Cronbach reportada por sus autores de 0.77.

Escala de Actitudes hacia la Estadística de Cazorla et al. (1999) (AEC). Adaptada por Cazorla et al (1999) y Brito y Vendramini (2001) a partir de una escala de actitudes en relación con las matemáticas creada por Aiken (1974). Es una escala de tipo Likert compuesta por 20 preguntas, 10 preguntas de actitudes positivas, frente a 10 preguntas de actitudes negativas. Sus autores reportan una confiabilidad de 0.94.

La AEE y AEC son usadas en el estudio como una escala global de 45 ítems. Las preguntas constan de un enunciado y una escala de cinco puntos que valoran las respuestas desde “totalmente en desacuerdo” (1 punto) hasta “totalmente de acuerdo” (5 puntos). El uso de esta escala es reportada en anteriores estudios como los de Aparicio y Bazán (2006), Tarazona et al (2013), Torres et al (2015) y Pérez et al (2015).

Análisis de los resultados

Análisis de items

Son incluidos los índices clásicos considerados son: media (Me), desviación estándar (De), correlación ítem-total eliminando el ítem (rit) y alfa de Cronbach de la escala sin considerar el ítem (alpha). Se encontraron correlaciones adecuadas, salvo en el ítem 3. La confiabilidad total de la escala es alta (Alfha= 9.29).

Tabla 2. Análisis de preguntas de las escalas AEE y AEC analizadas globalmente (45 preguntas)

Ítems	Me	DE	rit	Alfha	Ítems	Me	DE	rit	Alfha
p1	3.42	0.99	0.23	0.93	p24	3.82	0.84	0.39	0.93
p2	4.09	0.83	0.23	0.93	p25	3.73	0.85	0.48	0.93
p3	2.50	1.13	**0.03**	0.93	p26	3.75	0.94	0.41	0.93
p4	3.57	0.92	0.29	0.93	p27	3.85	0.98	0.60	0.93
p5	3.29	1.092	0.37	0.93	p28	3.45	0.87	0.66	0.93
p6	4.23	0.96	0.31	0.93	p29	3.11	0.86	0.63	0.93
p7	3.08	0.96	0.42	0.93	p30	2.99	0.84	0.57	0.93
p8	2.63	0.97	0.46	0.93	p31	3.67	0.94	0.63	0.93
p9	3.78	0.95	0.31	0.93	p32	3.63	0.92	0.52	0.93
p10	3.67	0.87	0.49	0.93	p33	3.74	0.96	0.598	0.93
p11	3.56	0.93	0.39	0.93	p34	3.53	0.80	0.64	0.93
p12	3.65	0.81	0.55	0.93	p35	3.82	0.89	0.58	0.93
p13	3.79	0.78	0.46	0.93	p36	3.11	0.86	0.61	0.93
p14	2.83	1.18	0.36	0.93	p37	3.81	0.86	0.49	0.93
p15	3.86	0.89	0.47	0.93	p38	3.74	0.95	0.48	0.93
p16	3.38	0.92	0.56	0.93	p39	3.08	0.92	0.75	0.93
p17	2.69	1.01	0.39	0.93	p40	2.96	0.89	0.60	0.93
p18	3.82	0.99	0.19	0.93	p41	3.56	0.89	0.46	0.93
p19	4.17	0.94	0.27	0.93	p42	3.89	0.92	0.52	0.93
p20	3.12	0.87	0.51	0.93	p43	2.59	0.93	0.47	0.93
p21	4.55	0.79	0.39	0.93	p44	3.04	0.91	0.59	0.93
p22	2.89	0.94	0.40	0.93	p45	3.24	0.88	0.65	0.93
p23	3.98	0.95	0.58	0.93					

Alfha: 9.29

Análisis de las Actitudes según características de los evaluados

Se realiza una comparación de las actitudes hacia la Estadística de acuerdo al género, país yárea de especialidad (ciencias e ingenierías; ciencias sociales y humanas) de los evaluados considerando los puntajes totales de estas escalas. En general se encontraron diferencias significativas ($p>0.05$) en la actitud hacia la estadística en las tres variables evaluadas. Esto es apreciado en la Tabla 3.

Tabla 3. Comparación de promedios en la actitud hacia la estadística de acuerdo a género, país y especialidad (N=314)

Variables	N	Media	T	Significancia
Masculino	215	159.46	3.61	0.00**
Femenino	99	150.65		
Perú	137	162.19	4.32	0.00**
Brasil	177	152.42		
Ciencias exactas e ingenierías	259	159.92	6.46	0.00**
Ciencias Sociales y Humanas	55	141.45		

Comparación de los promedios en cada ítem por país

En la tabla 5 presentamos las de las puntuaciones referentes a cada uno de los 45 ítems. Las valoraciones positivas en relación a los enunciados tienen valor medio mayor a 3. En el caso de los ítems negativos puntuaciones mayores de 3 se refieren al rechazo de la preposición. En general se registra una valoración positiva de la estadística en ambos países, siendo más positivas en el grupo de evaluados peruanos. Se percibe la estadística como útil e importante, pero no es percibida como fácil y es relacionada con cursos de ciencias y no es relacionada como útil fuera del ámbito académico. Hemos identificado los ítems más y menos valorados en cada grupo que son mostrados en la tabla 5.

Tabla 5. Media en cada ítem para ambos países

Item	Enunciado	P	B	Item	Enunciado	P	B
1	Me molesta la información Estadística que aparece en algunos	3.5	3.4	24	La Estadística ayuda a tomar decisiones más	4.0	3.7
2	La Estadística ayuda a entender el mundo de hoy	4.0	4.1	25	Evito las informaciones Estadísticas cuando las leo	3.7	3.7
3	A través de la Estadística se puede manipular la realidad	2.5	2.5	26	Yo quedo terriblemente tenso(a) en la clase de Estadística	3.6	3.9
4	La Estadística es fundamental en la formación básica del futuro ciudadano	3.7	3.4	27	Yo no gusto de Estadística y me asusta tener que hacer el curso de Estadística.	3.8	3.9
5	Uso la Estadística para resolver problemas de la vida cotidiana	3.6	3.1	28	Yo creo que la Estadística es muy interesante y gusto de las clases de Estadística	3.6	3.3
6	En la escuela no se debería de enseñar Estadística	4.3	4.2	29	La Estadística es fascinante y divertida	3.3	2.9
7	Me divierto en las clases que se explica	3.3	2.9	30	La Estadística me hace sentir seguro(a) y es al mismo tiempo estimulante	3.2	2.8

8	Los problemas de la Estadística me resultan fáciles	3.0	2.3	31	Cuando estudio Estadística mi cabeza “queda en blanco” y no consigo pensar claramente.	3.9	3.5
9	No entiendo las informaciones estadísticas que aparecen en los periódicos	3.7	3.9	32	Yo tengo una sensación de inseguridad cuando me esfuerzo en Estadística.	3.8	3.5
10	Me gusta la Estadística porque me ayuda a comprender más profundamente la complejidad de ciertos temas	3.8	3.6	33	La Estadística me deja inquieto(a), descontento, irritado(a) e impaciente	3.8	3.8
11	Me siento intimidado frente a los datos estadísticos	3.5	3.6	34	El sentimiento que yo tengo con relación a la Estadística es Bueno	3.7	3.4
12	Encuentro interesante el mundo de la Estadística	3.8	3.5	35	La Estadística me hace sentir como si estuviese perdido(a) en una selva de números y sin encontrar la salida	3.9	3.8
13	Me gustan los trabajos serios donde aparecen estudios estadísticos	3.8	3.8	36	La Estadística es algo que yo aprecio grandemente	3.4	2.9
14	Utilizo poco la Estadística fuera de mi centro de estudio	2.9	2.8	37	Cuando yo escucho la palabra Estadística tengo un sentimiento de aversión (rechazo)	3.8	3.8
15	En la clase de Estadística nunca entiendo de qué están hablando	3.8	3.9	38	Yo encaro la Estadística con un sentimiento de indecisión que es resultado del miedo de no ser capaz en Estadística.	3.7	3.7
16	Me apasiona la estadística porque ayuda a ver los problemas	3.5	3.3	39	Yo gusto realmente de la Estadística	3.4	2.8
17	La Estadística es fácil	3.0	2.4	40	La Estadística es una de las materias que yo realmente gusto de estudiar en la universidad	3.3	2.7
18	Me entero más del resultado de las elecciones cuando aparecen representaciones gráficas	3.9	3.7	41	Pensar sobre la obligación de resolver un problema de Estadística me deja nervioso(a)	3.7	3.5
19	La Estadística sólo sirve para la gente del área de ciencias	3.9	4.4	42	Yo nunca guste de la Estadística y es la materia que más me da miedo	3.8	3.9
20	Me gusta hacer problemas cuando uso la Estadística	3.5	2.9	43	Yo quedo feliz en la clase de Estadística que en la clase de cualquier otra materia	3.1	2.2

21	La Estadística no sirve para nada	4.6	4.5	44	Yo me siento tranquilo(a) en Estadística y gusto mucho de esa materia.	3.3	2.9
22	A menudo explico a mis compañeros problemas de Estadística que no han entendido	3.1	2.7	45	Yo tengo una reacción definitivamente positiva con relación a la Estadística, yo gusto y aprecio esta materia.	3.5	3.1
23	Si pudiera eliminar alguna matéria o curso seria la Estadística	4.1	3.9				

Nota: P: Perú   B: Brasil

Análisis de la dimensionalidad de la Escala

Para evaluar la dimensionalidad de la escala se realizó un análisis factorial exploratorio (AFE) usando el método de máxima verosimilitud con rotación varimax. Se hizo uso del paquete SPSS v24. Las cargas factoriales son superiores a 0.10. Se identifican cinco factores a los que se denominó de acuerdo a la característica de cada uno como: Factor 1:"Valoración Afectiva Positiva de la Estadística"; Factor 2: "Valoración Afectiva Negativa de la Estadística" ; Factor 3:"Habilidad para Estadística"; Factor 4:"Utilidad de la Estadística ", Factor 5 "Ansiedad ante la estadística".

Tabla 4. Factores identificados en la escala de actitud globlal (AEE y AEC)

Fator 1	Carga Fatorial	Fator 2	Carga Fatorial	Fator 3	Carga Fatorial	Fator 4	Carga Fatorial	Fator 5	Carga Fatorial
p7	0.56	p1	0.13	p18	0.71	p2	0.62	p9	0.63
p8	0.47	p15	0.35	p19	0.62	p3	0.25	p11	0.61
p10	0.47	p25	0.31	p21	0.68	p4	0.69	p14	0.54
p12	0.52	p32	0.61	p28	0.18	p5	0.35	p26	0.54
p13	0.30	p33	0.59			p6	0.41	p27	0.60
p16	0.53	p35	0.65			p24	0.28	p33	0.59
p17	0.44	p37	0.64						
p20	0.47	p38	0.77						
p22	0.31	p41	0.70						
p23	0.43	p42	0.70						
p29	0.76								
p30	0.69								
p31	0.31								
p34	0.66								
p36	0.66								
p39	0.75								
p40	0.75								
p43	0.66								
p44	0.69								
p45	0.72								

Comentarios Finales

En general la escala global de actitudes a la estadística en la muestra de estudiantes tuvo propiedades psicométricas adecuadas, con correlaciones ítem total adecuado y optima confiabilidad interna con un alfa de 9.29. Se han encontrado en general actitudes positivas hacia la estadística en los estudiantes de ambos países, pero con promedios más altos en los de Perú. Consideramos que las escalas de actitudes, como las usadas en la investigación pueden permitir un diagnóstico inicial en el establecimiento de estrategias encaminadas a mejorar actitudes negativas detectadas para tener una mejora en la predisposición de los alumnos, como por ejemplo, en la percepción de la utilidad que la Estadística tanto en su vida cotidiana como en su vida profesional. Por otro lado, estas escalas tienen que ser instrumentos psicométricamente válidos para poder obtener un diagnóstico valido y confiable de lo que se quiere diagnosticar. Creemos que estudios comparativos generan una aproximación al conocimiento de las actitudes hacia la Estadística en futuros profesionales, pudiendo orientarnos sobre la acción didáctica a desarrollar.

Referencias bibliográficas

Aparicio, A.; Bazán, J.L. (2006). Actitud y rendimiento académico en profesores que cursan una asignatura de estadística en la complementación académica en Perú. En G. Martínez Sierra (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19, 644*-650. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Bayer, A., Bittencourt, H., Rocha, J., Echeveste, S. (2004). A estatística e sua história. *XII Simpósio Sul brasileiro de Ensino de Ciências*. Canoas: Rio Grande do Sul, Brasil.

Blanco, A. (2008). Una revisión crítica de la investigación sobre las actitudes de los estudiantes universitarios hacia la estadística. *Revista Complutense de Educación*, 19 (2), 311-330.

Brito, M.; Vendramini, C. (2001). Avaliação de uma escala de atitudes em relação à Estatística e sua relação com o conceito e a utilidade da Estatística. *28º Congresso Interamericano de Psicologia.* Santiago de Chile, 1, 11-32. Hermán Troncoso Impresores Ltda

Cardoso, E.; Cerecedo, M.; Ramos, J. (2012). Actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes de post grado en administración: Un estudio diagnóstico. *REXE. Revista de Estudios y Experiencias en Educación,* 11 (22), 81-98.

Cazorla, I., Silva, C., Vendramini, C., Brito, M. (1999). Adaptação e validação de uma escala de atitudes em relação à estatística. Em Anais da *Conferencia Internacional "Experiências e Perspectivas do Ensino da Estatística – Desafios para o Século XXI"*(pp 45-57).

Darias, J. (2000). Escala de actitudes hacia la estadística, *Psicothema*, 12 (2), 175-178.

Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado* .Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Gal, I.; Ginsburg, L.; Schau, C. (1997). Monitoring attitudes and beliefs in statistics education. En I.Gal y J. B. Garfield (Eds.). *The assessment challenge in statistics education* (pp. 37-51). Netherlands: IOS Press.

Gil, N., Guerrero, E.; Blanco. (2006). El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. *Revista de Investigación Psicoeducativa*, 4 (1), 47 - 72.

Gómez, I. (2000), *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*, Madrid. Mondéjar, J., Vargas, M. (2010). Determinant factors of attitude towards quantitative subjects: differences between sexes. *Teaching and teacher education*, *26*(3), 688-693.

Pérez, L., Aparicio, A., Bazán, J.L., Abdounur, O. (2015). Actitudes hacia la estadística de estudiantes universitarios de Colombia. *Educación Matemática*, 27(3), 111-149.

Rodríguez Feijoo, N. (2011). Actitudes de los estudiantes hacia la estadística.
Interdisciplinaria, 28(2), 199-205.

Tejero-González, C., Castro Morera, M. (2011). Validación de la escala de actitudes hacia la estadística en estudiantes españoles de Ciencias de la actividad física y el deporte. *Revista Colombiana de Estadística*, *34*(1), 1-14.

Torres, F.; Aparicio, A.; Bazán, J.L.; Abdounur, O. (2015). Actitudes hacia la estadística en Universitarios del Área de las Ciencias de una Universidad Pública de Chile. *Educação Matemática Pesquisa*, 17(1), 45-73.

Tarazona, E., Bazán, J.L, Aparicio, A. (2013). Actitudes hacia la estadística en universitarios peruanos de mediana edad. *Revista Digital de Investigación en Docencia Universitaria* 7, 57
- 76.

PROBABILIDAD, DESDE LO COLOQUIAL A LO FORMAL

Alexis Rojas Pineda, Ismenia Guzmán Retamal
Universidad de los Lagos. (Chile)
alexis.rojas@yahoo.es, ismenia.guzman@ulagos.cl

Resumen
Este trabajo es parte de una investigación que se desarrolla en la Universidad de los Lagos (Chile), referida a las diferentes conceptualizaciones del objeto matemático "probabilidad". Existe evidencia en la literatura de las dificultades en el aprendizaje y la enseñanza de la probabilidad. Los alumnos trabajan con la definición sin dar sentido al concepto. Nuestra investigación pretende dar sentido y significado al concepto "probabilidad" partiendo de lo coloquial. Por ello, este trabajo consiste en un estudio histórico-epistemológico, que considera su origen en el azar, en la filosofía, escolástica, probabilismo moral y su construcción moderna en los trabajos desde Laplace a Kolmogorov.

Palabras Clave: Epistemología, Azar, Juego, Probabilidad, Conceptualización

Abstract
This work is part of an ongoing investigation at the University of the Lagos, in Chile, regarding the different conceptualizations of the mathematical object "probability". The difficulties in teaching and learning the concept of probability have been shown in the literature related to the topic. Students work with the definition without giving sense to the concept. Our investigation aims to provide sense and meaning to the concept "probability" from the colloquial situations. Therefore, this work consists of a historical-epistemological study, which considers its origin in chance, philosophy, scholasticism, moral probabilism, and its modern construction in the works from Laplace to Kolmogorov.

Key words: epistemology, chance, game, probability, conceptualization

Introducción

En la actualidad el término probabilidad es utilizado en diversas disciplinas como, por ejemplo: administración, economía, finanzas, medicina, ciencias (física, biología, astronomía, matemática, etc.), ingeniería, política, entre otras. Más aún, se distinguen diferentes concepciones de este término como: probabilidad subjetiva, probabilidad a priori, probabilidad a posteriori, probabilidad axiomática y probabilidad frecuentista. (Batanero, 2005; Batanero y Díaz, 2007).

Hay evidencia en la literatura de las dificultades en el aprendizaje y la enseñanza de la probabilidad (Batanero, 2005; Lonjedo y Huerta, 2005; Díaz y De la Fuente, 2006; León, 2008; Batanero, Contreras y

Díaz, 2012; Contreras, Arteaga, Cañada y Gea, 2015). Pero una de las dificultades de la noción de probabilidad, a criterio de los autores, es que la palabra pertenece al lenguaje común y corriente, es por ello que pierde el sentido matemático, tanto para los estudiantes como para los profesores, y los alumnos trabajan con la definición sin dar sentido al concepto. Lo anterior, permite plantear las siguientes interrogantes: ¿Qué significa matemáticamente la noción de probabilidad? y ¿Cómo ha evolucionado esta noción en la historia?

El presente trabajo pretende reflexionar sobre respuestas a estas interrogantes, mostrando diferentes conceptualizaciones que ha tenido la noción de probabilidad desde su origen hasta la actualidad. Para ello, se realiza un estudio histórico-epistemológico, de tipo documental, en el que se considera su origen en el azar y en la filosofía, la escolástica y el probabilismo moral, y la construcción moderna del concepto de probabilidad en los trabajos comprendidos desde la correspondencia entre Pascal y Fermat hasta Kolmogorov.

Origen del término probabilidad

Según la real academia de la lengua española, el término probabilidad proviene del latín *probabilĭtas, -ātis, y da las siguientes definiciones: "***1.** f. Verosimilitud o fundada apariencia de verdad. **2.** f. Cualidad de probable (‖ que puede suceder). **3.** f. Mat. En un proceso aleatorio, razón entre el número de casos favorables y el número de casos posibles" (Consulta en línea de Diccionario de la Real Academia Española: www.rae.es). Para entender estas diferentes definiciones se intenta buscar su origen, el que se puede encontrar en los juegos de azar y en la filosofía.

El juego de azar

En la antigüedad la suerte y la fortuna (el azar) tenía un origen divino. En Egipto, Grecia y Roma los sacerdotes o pitonisas utilizaban una combinación de tabas o astrágalos que les permitían predecir el destino de una persona, ya que este era el medio a través del cual los dioses expresaban sus deseos, y los juegos de azar no eran la excepción. (Del Pino, Ferreiro y Fernández, 1989; Fernández, 2007).

El vocablo azar tiene origen en la palabra árabe zahr, siendo su significado original el de *flor*. Con posterioridad pasó a designar la marca que daba la suerte en el juego de la taba, cuyo valor máximo era representado por una flor, la flor de azahar también conocida como la flor del naranjo. De aquí deriva el significado de azar (suerte, fortuna, imprevisibilidad o causalidad) que conocemos hoy en día. En los juegos de azar (o juego de dados), los jugadores estudiaban la posible ocurrencia de un cierto resultado, con el fin de valorar de antemano sus ganancias o pérdidas. Después de un gran número de intentos, sin éxito de sus predicciones, se llegaba a la creencia de un principio de *incalculabilidad*, esto debido a lo imprevisible del juego. Los griegos, egipcios y romanos creían que no era posible encontrar una causa que permitiera predecir el resultado de tirar un dado o una taba, si no que este resultado se debía solo a la voluntad divina, además no se había desarrollado la matemática al cálculo de las posibilidades. (Mateos-Aparicio, 2002; Fernández, 2007).

Concepción en la filosofía

La concepción de la probabilidad se inicia sobre una base filosófica, aunque los juegos de azar dan origen a su nacimiento y su posterior perfeccionamiento. Para entender el término probabilidad en un sentido filosófico, hay que remontarse a Grecia en donde Aristóteles (384-322 a. de C.) distingue dos tipos de razonamientos: el razonamiento demostrativo y el razonamiento dialéctico. Para Aristóteles el razonamiento demostrativo es aquel que partiendo de premisas ciertas se llega necesariamente a unas conclusiones determinadas, mientras que el razonamiento dialéctico es aquel que partiendo de premisas ciertas no alcanza una determinada conclusión, ya que no se posee la certeza de ser verdadero o falso, sino que es sujeto de incertidumbre. El razonamiento dialéctico da lugar al *Razonamiento Probable* que es aquel que se construye a partir de cosas plausibles que son las que parecen bien a todos, o a su mayoría, o a los más conocidos y reputados. Posteriormente, Carnéades de Cyrene (214-129 a. de C.) establece un criterio subjetivo para aprobar opiniones sometidas a incertidumbre según su grado de fiabilidad, y para ello se basó en la experiencia. A este criterio se le denominó el *probabilismo pagano* el que afirma que la realidad no se puede percibir ciertamente, sino que a lo sumo probablemente. (Candel, 1982; García, 2002; Santos del Cerro, 2002).

La escolástica y el probabilismo moral

Desde mediados del siglo XI hasta mediados del siglo XV, aparece la corriente de pensamiento *Escolástica*, cuyo objeto de investigación era poder demostrar el carácter científico de una teología que obtenía sus conocimientos a partir de la revelación, es decir, la comprensión filosófica de la verdad divina y donde la fuente era la Biblia. En sus inicios, el pensamiento escolástico se basa en las ideas de San Agustín (354-430) para quien la verdad era sólo conocida por Dios y el hombre llega a la verdad con humildad, por la razón, la fe y la misericordia, es decir, sólo por la propia conciencia e intuición divina. En consecuencia, la probabilidad y el azar no tienen razón de ser. Representantes de esta corriente de opinión son: San Buenaventura (1221-1274) quien asegura que el hombre no es capaz de conocer la verdad sin Dios, esto es, solamente por la fe el hombre llegaría a la verdad; San Alberto Magno (1193-1280) quien afirma que no debe haber dificultades entre la fe y el conocimiento natural de la razón. Distingue entre el conocimiento natural y fe, también entre ciencia y teología; Santo Tomas de Aquino (1225-1274) para quien las verdades no pueden ser alcanzadas por todas las personas, la razón está subordinada a la fe y establece que el entendimiento humano ante ciertos fenómenos contingentes es probable, en el sentido de que sucede en la mayoría de los casos; Duns Escoto (1267-1308) asigna a la teología un rango de ciencia diferente a las demás y sin ninguna primacía sobre las otras. Separa lo teórico de lo práctico, entendiendo por teórico el dominio de la necesidad que abarca la demostración racional y la ciencia, mientras que lo práctico es el dominio de la libertad, de la imposibilidad de cualquier demostración y de la fe; Guillermo de Ockham (1295-1350) afirma que el hombre debe recurrir a la fe, para encontrar la verdad conocida a través de la revelación, mientras que el conocimiento basado en la razón es fundamentalmente empírico, es decir, solo conocemos de las cosas sus cualidades y basta con un conocimiento probable basado en experiencias reiteradas para prever que lo acontecido en el pasado tiene un cierto grado de posibilidad de suceder en el futuro. (Gómez, 2002; García, 2002; Santos del Cerro, 2002).

En el siglo XVI aparece el *"probabilismo moral"*, fundado por Bartolomé de Medina (1528-1580) en 1557 aproximadamente. Para el probabilismo moral una opinión es probable si se puede seguir sin peligro de error y engaño, y en la práctica será la que se pueda seguir sin peligro de pecado, y que se fundamenta, según Medina, en dos ideas: la autoridad de hombres sabios y por fuertes argumentos. Representantes de este movimiento son: Gabriel Vásquez (1549-1604) quien clasifica la probabilidad como probabilidad intrínseca (la propia opinión es considerada como más probable respecto de principios intrínsecos, razones de peso) y como probabilidad extrínseca (es más probable la opinión contraria basada en principios extrínsecos defendido por la mayoría, autoridad de hombres sabios); Francisco Suarez (1548-1617) elaboró los *"principios prácticos"* que pretenden ser una extensión de ciertos principios generales de jurisprudencia aplicados al ámbito de la moral. Ante una duda de carácter especulativo en materias moral esta se debe resolver desde un punto de vista práctico. (Gómez, 2002; García, 2002; Santos del Cerro, 2002).

Desarrollo del cálculo de la probabilidad

En el renacimiento, uno de los problemas importantes relativo a los juegos de azar correspondía al *"problema del reparto de apuestas"* es decir, como distribuir las ganancias entre jugadores cuando la partida se interrumpía antes de finalizar el juego. Uno de los primeros matemáticos en tratar de resolver este problema fue Fra Luca Pacioli (1445-1517) profesor de matemática, que en su obra *"Summa Arithmetica, Geometria, Proportioni"*, publicada en 1494, plantea que el premio debería ser repartido en función de las victorias obtenidas por cada jugador antes de que el juego fuese interrumpido. Otro matemático preocupado en el reparto fue Niccolo Tartaglia (1499–1557) quien en 1556 en su obra "*Trattato generale di numeri et misure"* indica que el premio se debe repartir de la siguiente manera: el jugador que lleva más victorias se lleva su apuesta más una porción en función de las victorias que tiene sobre su contrincante, sobre la apuesta de este último. Pero fue Girolamo Cardano (1501-1576) quien en 1565 escribe la primera obra importante relacionada con la aproximación al cálculo de probabilidades en los juegos de azar: *"Liber de ludo Aleae"*. Cardano, se había ocupado anteriormente del problema del reparto de premios y en 1539 en su obra *"Practica arithmeticae generalis"* llegó a la conclusión de que las soluciones dadas por Pacioli y Tartaglia eran incorrectas porque al considerar tan sólo el número de juegos ganados por cada jugador, no consideraban los juegos que les faltaban por ganar para hacerse con el premio. Sus soluciones no eran correctas desde un punto de vista matemático, pero eran buenas ideas para *impartir justicia y equilibrio* a un reparto. Ellos naturalmente no usan la palabra probabilidad. (De Mora, 1981; Vega-Amaya, 2002; Fernández, 2007).

Además de estos tres matemáticos importantes, considerados entre los precursores de la probabilidad, destacó también un hombre mucho más conocido en otros campos de las matemáticas y la física, Galileo Galilei (1564-1642) que durante su vida también resolvió problemas sobre dados, escribiendo su obra *"Considerazione sopra il Giuco dei Dadi"* (Mateos-Aparicio, 2002; Rodríguez, Íbar y Ordas, 2004). Sin embargo, el mayor aporte de Galileo a los inicios de la probabilidad fue la creación de su *teoría de la medida de errores*, debido a sus estudios observacionales. Él busca estimar errores observacionales y mostrar por medios probabilísticos argumentos a través de una serie de principios como, por ejemplo: que pequeños errores son más probables que los grandes. Estos principios permiten clasificar los errores observacionales en dos tipos: errores *"sistemáticos"* que son aquellos que se deben al instrumento de medición que se esté usando, y errores *"no sistemáticos*" que son aquellos que no tienen explicación sobre su ocurrencia. A estos últimos hoy en día se les denomina errores *"aleatorios"*. Con esto Galileo contribuyó, sin saberlo, a la creación empírica de la probabilidad. (Knobloch, 2006).

En el año 1654 Blaise Pascal (1623 - 1662) realiza un viaje en compañía del caballero de Meré, quien le plantea problemas relacionados con diferentes juegos de azar. Esto dio origen a una correspondencia entre Pascal y Pierre de Fermat (1601-1665) la que constituye la base de la teoría moderna de la probabilidad. Pascal y Fermat resolvieron estos problemas dando comienzo a la formalización, en forma insipiente, de lo que hoy llamamos la teoría de las probabilidades. Pascal acepta el principio de probabilidad concebido desde un plano especulativo, por esta razón no utilizó la palabra probabilidad para denominar azar, la suerte, etc. Llama Geometría *del Azar* al cálculo recién fundado a partir de su correspondencia con Fermat. Sus aportes se extienden a muchos campos como el de la filosofía e incluso al de la teología, intentando argumentar la existencia de Dios en términos de posibilidades y ganancias: "es mejor creer que no creer, es decir, es mejor actuar como si existiera por si acaso existe". Christian Huygens (1629-1695) matemático holandés considerado por algunos autores como el padre de la probabilidad, publica en 1657 un breve tratado titulado "*De Ratiocinnis in ludo aleae*" inspirado en una visita que realiza Huygens a París donde toma contacto con el círculo de Pascal, y se entera de los resultados obtenidos por Pascal y Fermat (la correspondencia entre Pascal y Fermat no fue publicada como libro por ellos). Huygens extiende algunos resultados de Pascal y aclara varios problemas para tres o más jugadores. En esta obra introduce el concepto de Esperanza Matemática. La idea de probabilidad aún no estaba ligada a la de azar, pues estos autores no utilizaron dicha palabra en sus escritos. Antoine Arnauld (1612-1694) y Pierre Nicole (1625-1695) publican en 1662 la "*Lógica de Port-Royal"*, y es en esta obra donde por primera vez la palabra probabilidad aparece con un sentido medible. Jacob Bernoulli (1654–1705) influenciado por la "*Lógica de Port-Royal"*, escribe "Ars *conjectandi"* donde expone el concepto de las *razones del azar* y es en este trabajo donde la teoría del azar es elevada por primera vez desde un conjunto de soluciones de problemas particulares, a un resultado de importancia general. Abraham De Moivre (1667–1754) en su obra *"Doctrine of Changes"* publicada en 1718, acepta la definición dada por Bernoulli de "*razones del* azar" y la reformula en términos de una fracción en la que el numerador es igual al número de apariciones del suceso y el denominador es igual al número total de casos en los que el suceso pueda o no pueda ocurrir. Tal fracción expresa lo probable de que ocurra el suceso, siendo la primera vez que la idea de probabilidad es ligada a la de azar. Además, introduce el concepto de probabilidad condicional, entre otros resultados importantes. Thomas Bayes (1702-1761), escribe dos memorias "*An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances"* publicada en 1764 y "*A Demostration of the second Rule in the Essay towards the solution of a Problem in the Doctrine of Chances"* publicada en 1765, en ellas expone los resultados de las leyes generales de la teoría, llamada hoy probabilidad, a partir de las cuales formula el teorema conocido como teorema de Bayes. Pierre Simón Laplace (1749–1827) en su "*Théorie analytique des probabilities"* en 1812 formaliza la teoría matemática de los juegos de azar, que hoy en día constituye la teoría *clásica* de la probabilidad. Laplace incluye una exposición sistemática y muy completa de la teoría con aplicaciones a una gran variedad de cuestiones científicas y prácticas. (Mateos-Aparicio, 2002; García, 2002; Rodríguez, Íbar y Ordás, 2004).

Alrededor de 1909, Émile Borel (1871-1956) consideró la importancia de la teoría general de la medida para la construcción de ciertos pilares y fundamentos de la teoría de la probabilidad, pero no fue hasta el año 1933 cuando Andrei Kolmogorov (1903-1987) se propuso construir una teoría de la probabilidad totalmente rigurosa basada en axiomas fundamentales. De esta manera, la probabilidad se pudo desarrollar como una teoría completamente lógica al mismo tiempo que permitía resolver problemas aplicados de las ciencias modernas y la tecnología. (Restrepo y González, 2003).

Conceptualizaciones de la Probabilidad

El primer paso para descubrir a que se le llama probabilidad es establecer su origen etimológico. En este caso se debe subrayar que el mismo se encuentra en el latín, y más exactamente en la palabra *probabilitas*, que está formada por la unión del verbo *probare* que puede traducirse como "comprobar", el sufijo *–bilis* que equivale a "posibilidad" y el también sufijo *–tat–* que lo que viene a indicar es una "cualidad". Por lo tanto, podemos comprender que la palabra probabilidad indica posibilidad de una cualidad comprobable.

Desde su origen la palabra probabilidad ha tenido un doble sentido, como grado de creencia y como evidencia aceptable para el científico. En consecuencia, aparecen variadas interpretaciones de la noción de probabilidad las cuales aún coexisten. En Batanero (2005), Batanero y Díaz (2007) se describen interpretaciones adecuadas de la noción de probabilidad para la enseñanza, a saber: la intuitiva, la clásica, la frecuencial, la subjetiva y la axiomática. A continuación las interpretaciones de los autores: la probabilidad intuitiva se le relaciona con lo lúdico y en este sentido el carácter probable de los resultados de un juego; la probabilidad clásica se relaciona con juegos de resultados equiprobables; la probabilidad frecuencial se relaciona con la repetición de un juego bajo las mismas condiciones no necesariamente con resultados equiprobables; la probabilidad subjetiva se relaciona a la experiencia que tiene un jugador con la ocurrencia de ciertos resultados de un juego; y la probabilidad axiomática tiene relación directa con el objeto matemático "probabilidad".

Conclusión

Este estudio propone una nueva conceptualización de la noción de probabilidad, que no contradice las concepciones anteriores, sino que las integra. Esta nueva noción refiere a lo relativo de la concepción de probabilidad que es la siguiente: "*La probabilidad es la cuantificación del grado de posibilidad de ocurrencia de cierto hecho o fenómeno que satisface reglas, en particular los axiomas de Kolmogorov*". Esta nueva noción engloba a las anteriores y se puede usar en los diferentes niveles educativos ya que hace referencia al mismo objeto matemático.

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8(3), 247-263.

Batanero, C. y Díaz, C. (2007). Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. En J.P Van Bendegen y K. François (Eds.), *Philosophical dimmensions in mathematics education* (pp. 107-127). New York: Springer.

Batanero, C., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2012). Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. *Revista digital Matemática, Educación e Internet* 12(2).

Candel, M. (1982). *Tratados de lógica (ORGANON) I*. Editorial Gredos S.A. Madrid.

Contreras J. M., Arteaga P., Cañadas G. R., Gea M. M. (2015). Evaluación de sesgos probabilísticos en futuros profesores: Tratamiento de un problema irresoluble. En Contreras J. M., Batanero C., Godino J. D., Cañadas G.R., Arteaga P., Molina E., Gea M.M. y López M.M. (Eds.), *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2* (pp. 277-287). Granada, 2015.

De Mora, C. (1981). LA TEORIA DE LA PROBABILIDAD: LOS PRIMEROS CALCULOS Una propuesta de traducción y comentario a Cardano. *Llull* 4, 123-141.

Del Pino, G., Ferreiro, O. y Fernández, P. (1989). *La Estadística Comprendiendo un Mundo con Azar*. Pontificia

Universidad Católica de Chile Colección TELEDUC. Santiago.
Díaz, C. y De la Fuente, I. (2006). Dificultades en la resolución de problemas que involucran el Teorema de Bayes. Un estudio exploratorio en estudiantes de psicología. *Educación Matemática* 18(2), 75-94.
Fernández, S. (2007). Los Inicios de la Teoría de la Probabilidad. *SUMA*, 55, 7-20.
García, M. (2002). Antecedentes de la Concepción Subjetivista de la Probabilidad. *Historia de la Probabilidad y Estadística (AHEPE)* (pp. 119-132). Ed. AC, Madrid.
Gómez, F. (2002). Probabilismo y Toma de Decisiones en la Escolástica española. *Historia de la Probabilidad y Estadística (AHEPE)* (pp. 81-102). Ed. AC, Madrid.
Knobloch, E. (2006). On the Origin of Error. *Historia de la Probabilidad y Estadística(III) (AHEPE)* (pp. 95-116). Delta Publicaciones Universitarias, Madrid.
León, N. (2008). Errores y Dificultades en la Resolución de Problemas Verbales inherentes al teorema de Bayes: Un caso de Futuros profesores de Matemática. *Revista Paradigma 29(2)*, 187-219.
Lonjedo, M. A. y Huerta, M. P. (2005). La naturaleza de las cantidades presentes en el problema de probabilidad condicional. Su influencia en el proceso de resolución de problemas._En Maz, Gómez y Torralba (eds), 2005, *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación Matemática.* Córdoba. ISBN: 84-7801-782-8
Mateos-Aparicio, G. (2002). Historia de la Probabilidad (desde sus orígenes hasta Laplace) y su relación con la historia de la teoría de decisión. *Historia de la Probabilidad y Estadística (AHEPE)* (pp. 1-18), Ed. AC, Madrid.
Restrepo, L. y González, J. (2003). La Historia de la Probabilidad. *Revista Colombiana de Ciencias Pecuarias* 16(1), 83-87.
Rodríguez, A., Íbar, R. y Ordás, P. (2004). La Teoría de los Juegos de Azar en el siglo XVIII. La participación del matemático francés François Nicole. *Historia de la Probabilidad y Estadística(II) (AHEPE)* (pp. 109-138), Ed. Delta, Madrid.
Santos del Cerro, J. (2002). Probabilismo Moral y Probabilidad. *Historia de la probabilidad y estadística (AHEPE)* (pp. 103-118), Ed. AC, Madrid.
Vega-Amaya, O. (2002). Surgimiento de la teoría matemática de la probabilidad. *Apuntes de historia de las matemáticas* 1(1), 54-62.

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

ANÁLISIS DE UNA EXPERIENCIA PARA EL ABORDAJE DE SISTEMAS DE MEDICIÓN DESDE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA CRÍTICA

Ignacio Martínez, Sara Scaglia
Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral. (Argentina).
ia.martinez1990@gmail.com, sbscaglia@gmail.com

Resumen
En esta comunicación se presentan y analizan actividades desarrolladas en un proyecto interdisciplinario implementado en dos cursos de una escuela de nivel básico de la ciudad de Santa Fe (Argentina), con niños de doce años. Para el diseño y estudio se adopta la perspectiva de la Educación Matemática Crítica, que habilita una reflexión sobre los aspectos sociales y políticos de la educación matemática. En particular, se utilizan las distintas concepciones de la noción de contexto y la caracterización del conocer reflexivo para el análisis de fortalezas y debilidades de la propuesta.

Palabras clave: conocer reflexivo, contextos, sistemas medición

Abstract
This work is aimed at analyzing some activities developed in an interdisciplinary project that was implemented with twelve-year-old children in two courses at a basic-level school in the city of Santa Fe, Argentina. For its design and study, we adopt the perspective of Critical Mathematics Education, which enables a reflection on the social and political aspects of mathematics education. In particular, we use the different conceptions of the notion of context and the characterization of reflective knowledge for the analysis of the proposal strengths and weaknesses.

Key words: reflective knowledge, contexts, measurement systems

Introducción

La construcción del sentido durante el desarrollo de tareas matemáticas en el aula constituye una preocupación compartida por los miembros de la comunidad de educadores matemáticos. Los docentes y las instituciones se ven en la necesidad de crear espacios y propuestas en las cuales las expectativas e intereses de los estudiantes tengan puntos de encuentro con las experiencias escolares.

Scaglia (2016) propone tres perspectivas para abordar esta problemática: epistemológica, sociocultural y sociopolítica. Esta última se basa en los aportes de la Educación Matemática Crítica (EMC). Skovsmose considera que “para que los estudiantes adscriban significados a los conceptos que tienen que ser aprendidos es esencial proporcionar significado a la situación educativa en la cual están involucrados”

(2005, p. 85). Este autor propone contextualizar las actividades matemáticas de modo que resulten significativas para los estudiantes y puedan discutir el significado de las tareas que llevan a cabo.

Por esa razón, nos proponemos como objetivos diseñar tareas en el marco de la EMC para incluir en un proyecto escolar interdisciplinario y caracterizar, desde este enfoque, las intervenciones de los alumnos durante su implementación. En esta comunicación indagamos en qué medida ciertos contextos y tareas favorecen u obstaculizan la construcción de significado a partir de una experiencia llevada adelante en dos cursos de séptimo grado (12 años) de una escuela primaria de la ciudad de Santa Fe (Argentina).

Aportes teóricos

Desde la perspectiva de la EMC interesa reflexionar en torno a la relación que existe entre matemáticas, educación, sociedad y democracia. Según Skovsmose (1999), vivimos en una sociedad tecnológica fuertemente influida por la aplicación de modelos matemáticos. Sin embargo, las matemáticas y la educación matemática no son, por sí mismas, capaces de promover una mirada crítica sobre la tecnología y su utilización. Por este motivo, plantea la noción de conocer reflexivo que alude a la necesidad de un análisis crítico que permita reflexionar sobre los impactos constructivos y destructivos de la tecnología. En la práctica educativa implica desarrollar las competencias necesarias para que los estudiantes sean capaces de asumir una posición justificada en el abordaje de problemas que se originan en el mundo natural, social y cultural en el que viven los sujetos.

Para desarrollar el conocer reflexivo en el aula, Skovsmose (1999) describe seis puntos de entrada que podrían conducir a dicha competencia. El primer punto hace referencia a los aspectos matemáticos y su correcta aplicación y el segundo está relacionado a la pertinencia de los algoritmos utilizados en la resolución del problema. Estos dos primeros enfoques hacen énfasis en el conocimiento matemático y en dilucidar entre lo correcto e incorrecto de su implementación. Sin embargo, se considera que es necesario dar con una reflexión enfocada en la confiabilidad y pertinencia de los resultados obtenidos en base al contexto del problema analizado, el cual es objeto del tercer punto de acceso. En el cuarto, se pretende analizar la posibilidad y pertinencia de resolver el problema sin la utilización de la matemática y técnicas formales, poniendo en cuestión la necesidad de su uso.

En los últimos dos puntos se incorpora el análisis crítico sobre las implicaciones de la resolución del problema y de las reflexiones que se han realizado sobre el mismo. En particular, el quinto punto enfoca en dilucidar la percepción del mundo y el poder formativo de la matemática empleada en la resolución y en el sexto se propone repensar la manera en que se ha reflexionado sobre el abordaje del problema.

Estos seis puntos pueden resumirse de modo general en las siguientes preguntas:

I. ¿Usamos el algoritmo de la forma correcta?
II. ¿Usamos el algoritmo apropiado?
III. ¿Podemos confiar en los resultados de ese algoritmo?
IV. ¿Podríamos hacer algo sin cálculos formales?
V. ¿Cómo afecta el uso de un algoritmo, apropiado o no, a un contexto específico?
VI. ¿Podríamos haber hecho una evaluación de otra manera? (Skovsmose, 1999, p.133)

La noción de contexto aparece dos veces en la descripción anterior. En el tercer punto se propone evaluar los resultados obtenidos en base al contexto del problema analizado y en el quinto, indaga sobre las consecuencias del algoritmo utilizado en el contexto específico.

Valero (2002) discute distintas concepciones para la noción de contexto: de un problema, de interacción, situacional y sociopolítico. El contexto de un problema alude al “campo de nociones y procedimientos matemáticos dentro de los cuales se ubica un problema, o bien a las referencias que la formulación de un problema evoca en el estudiante” (p. 50). El contexto de interacción refiere a “la manera como esos problemas se abordan en el aula a través de la cooperación entre los participantes” (p. 51). El contexto situacional atiende las características constitutivas de la situación y los significados que surgen como consecuencia de estar inserta en una red más amplia de acción social.

El contexto sociopolítico, que interesa a la EMC, asume a los estudiantes como sujetos políticos. “El adjetivo ‘político’ reconoce la naturaleza intrínseca del ser humano como un ser actuante y generador de sus condiciones sociales y materiales de vida” (Valero, 2002, p.56). Este cambio en la forma de considerar a los sujetos en el aula, transforma la imagen que se constituye sobre lo que es aprender matemáticas y sobre los significados que allí se ponen en juego.

Marco metodológico

Desde un enfoque metodológico cualitativo proponemos un experimento de enseñanza que Castro, Molina, Castro y Molina (2011) caracterizan como una secuencia de episodios de enseñanza en los que intervienen investigadores-docentes, investigadores-observadores y estudiantes. Los investigadores asumen un rol fundamental, interviniendo en el escenario de investigación, lo cual rompe con la distinción entre investigadores, docentes y alumnos.

> Los experimentos de enseñanza se hacen para testar y generar hipótesis, durante el experimento, en general, o durante cada uno de los episodios, siendo en ocasiones necesario abandonar o reformular hipótesis a la luz de los datos. El objetivo último es elaborar un modelo del aprendizaje y/o desarrollo de los alumnos, en relación con un contenido específico, entendiendo este aprendizaje como resultado de la manera de operar y las situaciones puestas en juego por el investigador-docente. (Castro et al., 2011, p.79)

La hipótesis que guía el experimento de enseñanza consiste en sostener que es posible proponer una secuencia de actividades sobre los sistemas de medición que promueva discusiones en el aula adecuadas para promover el conocer reflexivo. En este trabajo sólo se describen dos tareas de las cinco que componen la secuencia, por lo que sería imprudente avanzar en afirmaciones sobre la plausibilidad de la hipótesis. No obstante, se comentan algunos aspectos relevantes surgidos en la implementación de la tarea.

Descripción de la propuesta

La experiencia se llevó a cabo en la Escuela Primaria de la Universidad Nacional del Litoral de la ciudad de Santa Fe (Argentina). La escuela cuenta con dos divisiones por cada grado escolar y en su plan pedagógico contempla la realización de dos o tres proyectos interdisciplinarios anuales en cada grado. El proyecto áulico denominado "Minga! Colectivo humano" fue pensado por las docentes de los cursos de séptimo grado en el año 2016, con el objetivo de fortalecer el trabajo colectivo y comprender lo humano a partir de la diversidad.

Las discusiones en el marco de actividades del proyecto llevaron a los niños a plantear en clase una preocupación por una noticia referida al muro que Donald Trump prometía construir en la frontera entre México y EUA. Surgió entonces una reflexión sobre los muros que, en distintas regiones del planeta y épocas dividieron (y dividen aún) a grupos sociales. Las docentes deciden realizar en clase la lectura de la novela infantil "El Muro", de Klaus Kordon, que narra la historia de dos niños de Berlín de once y doce años (Angie y Matu) que viven a distintos lados del muro durante la Guerra Fría y que establecen una amistad a partir de un mensaje en una botella lanzado al río Spree que cruza la ciudad.

En este marco, diseñamos cinco tareas para abordar el Sistema Métrico Legal Argentino (SiMeLA), de las cuales nos interesa destacar dos para su posterior análisis:

Lectura y análisis de una carta que los integrantes del Senado de la Revolución Francesa dirigen a un profesor de matemática para solicitarle que ofrezca un curso para enseñar el nuevo sistema de medición (con el objetivo de problematizar, desde el punto de vista histórico, la adopción del sistema de numeración decimal en el sistema métrico). Las consignas son las siguientes:

- Leer la carta (adaptada de Guedj, 1998) de los integrantes del Senado de la Revolución Francesa a un profesor de matemática.

Carta del "Directorio regenerado"del Sea-Inferior (17 de marzo de 1794) a Caius Gracchus Prudhomme

Ciudadano:
La revolución no sólo perfecciona las costumbres y nos genera felicidad, sino que ayuda al progreso de las ciencias. Nuestra aritmética, que es una de las obras maestras del espíritu humano, estaba todavía sometida a nuestras viejas y pésimas leyes. Inútilmente, los inventores de esta ciencia la habían basado en el sencillo principio de una vez determinado el patrón, las cifras aumentan duplicándose y disminuyen dividiéndose a la mitad.
Ese gran principio de numeración no era aplicado en todos los casos: la libra de peso se subdividía en marcos que eran mitades. Las mitades en onzas que eran octavos de marco, etcétera. El tiempo también estaba sujeto a esa mala costumbre que nos oprimía. El año se dividía en 365 días y unas horas, los días en 24 horas, las horas en minutos, los minutos en segundos, siguiendo el sistema sexagesimal.
No nos extenderemos más sobre estas contradicciones, profesor: sólo nos alegramos de que las bondades de la revolución haya terminado con todas estas confusas costumbres y las haya sustituido por el cálculo simple y metódico de los decimales.
Se acerca la época en que ese cálculo va a utilizarse. Por muy simple que sea, necesita ser enseñado. Hay que dejar atrás la vieja rutina, hay que acostumbrarse y estudiar el nuevo método. Los maestros que unen la teoría a la práctica, como tú, son los que deben enseñar a sus conciudadanos. Aplaudimos pues tu trabajo y defensa de la república, que te llevan a realizar un curso de aritmética republicana. Deseas que todos los ciudadanos puedan aprovecharse de ello y, principalmente, los que trabajan en las administraciones. Sabes, ciudadano, que las administraciones abren desde las ocho de la mañana (antiguo estilo) hasta las

cuatro de la tarde. ¡Hay que comer! Tu curso sólo podría ser útil a todos los empleados en las administraciones si tus clases comenzaran entre las cinco y las seis: no dudamos de que elegirás esta hora, si no tienes impedimentos mayores.
Cuenta con el reconocimiento de los buenos ciudadanos mientras tus trabajos tengan sólo como objetivo la prosperidad de la República.
Salud y Fraternidad.

Responder:

a) ¿Qué se dice de los sistemas de medición?
b) ¿Qué característica tiene el nuevo sistema elegido?
c) ¿Se utiliza aún hoy algunos de los viejos sistemas mencionados?

Elaboración de un croquis de la ciudad de Berlín según un fragmento de la novela y estimación del tiempo empleado por un niño del curso para recorrer caminando la distancia que separa las viviendas de los personajes (con el fin de poner en relación las medidas y unidades de tiempo y distancia). Las consignas son las siguientes:

a) Realizar un croquis de la ciudad de Berlín a partir del relato de la novela.

La ciudad constaba de dos partes. Una quedaba al este; la otra, al oeste. Matu vivía en la parte este de la ciudad; Angie, en la parte oeste. Pero entre este y oeste había una frontera muy recta y hostil. La ciudad se llamaba Berlín. A través de la ciudad dividida corría un río. Hacia el sudeste, entraba en la ciudad y hacia el noroeste volvía a salir. El río se llamaba Spree y en sus orillas había mucho verde, pero también muchas fábricas y casas. Y el tramo del río que atravesaba la ciudad también estaba dividido.

b) Ubicar en el croquis las casas de Angie y Matu.
c) A través de la página maps.google.com.ar, ubicar:
- la casa de Angie, (Wullenweberstraße 43, Berlín)
- la casa de Matu, (NeueKrugallee 72, Berlín)
- el abuelo Haase, (Dammwegstraße 18, Berlín)
- el paso fronterizo entre Berlín Occidental y Berlín Oriental (Checkpoint Charlie, Friedrichstraße, Berlín, Alemania).
d) Utilizar la función “Indicaciones” para medir la distancia entre la casa de Matu y Angie, pasando por el paso fronterizo.
e) Ver el tiempo que estima Google Maps para cubrir esa distancia caminando.
f) Tomar el tiempo que demora cada uno en caminar 10 metros.
g) Estimar el tiempo que cada uno demoraría en llegar (en segundos, minutos y horas).

Implementación y discusión de resultados de dos tareas

Carta del Senado francés a un profesor de matemáticas

El problema evoca algunas características de los sistemas de medición utilizados en Francia en el período de la Revolución Francesa. En la carta aparece una descripción coloquial de la función y=x/2: "*una vez determinado el patrón, las cifras aumentan duplicándose y disminuyen dividiéndose a la mitad.*". El **contexto del problema** permite reconocer que la función está definida en el campo de los números reales, puesto que se hace referencia a duplicar y dividir medidas (de peso) por la mitad. Aparece también la descripción coloquial de algunas relaciones entre medidas de tiempo en el sistema sexagesimal.

Las discusiones generadas entre los estudiantes en la búsqueda de reconocer el sentido y contenido de la carta, llevaron a cuestionarse sobre la realidad actual del sistema de medidas. En el texto se plantea la implementación de un 'nuevo' sistema de medidas, sistema con el que ellos están familiarizados. La novedad de aquel tiempo es una trivialidad para los niños. En cambio, frente a la nueva propuesta para la medición del tiempo que se manifiesta en la carta queda en evidencia que, en algunos aspectos, esa 'revolución' fracasó. Los niños pudieron así reconocer las circunstancias históricas que fueron constitutivas del sistema de medición que utilizan en lo cotidiano.

En esta tarea en particular, se observaron indicios del trabajo en base a un *contexto sociopolítico*, en los términos de Valero (2002). Las condiciones generadas en este contexto han propiciado la construcción del significado de los sistemas de medición desde una perspectiva que escapa a la neutralidad con la que se manifiesta inicialmente. El SiMeLA ya no es una verdad necesaria, sino que los alumnos pudieron interpretarlo como el resultado de procesos históricos cargados de tensiones, fracasos y acuerdos.

Una visita en la Berlín dividida por el muro

En el primer inciso, para el dibujo del croquis de Berlín (ciudad desconocida para los niños), el único elemento que guía el trabajo es el fragmento de la novela. Allí los alumnos hacen uso necesario de su percepción espacial y conocimientos previos y tratan de plasmarlo en el papel. Puesto que esta actividad es grupal, entre los integrantes de cada grupo devienen discusiones sobre la 'forma' de la ciudad, la ubicación de las casas de sus personajes, la percepción del espacio y su representación. Resulta interesante exponer para el análisis un intercambio entre alumnos acerca de la elaboración del croquis, cuando estaban realizando la segunda parte de la tarea (estimar el tiempo que un niño como ellos demoraría para recorrer caminando la distancia entre las viviendas de los personales de la novela).

> Docente 1: A ver… ahí se dio una conversación que me encantaría hicieran más fuerte y la compartan.
> Alumno: O sea, ¿qué tiene que ver con la matemática? …Ya sé, los kilómetros.
> Alumno: Ya sé, lo del plano, esto con la regla, que esto es kilómetros, que…
> Alumno: Preguntamos qué tenía de relación con la matemática.
> Alumno: Sí, yo le pregunté lo mismo.
> Docente 1: ¿Y entonces ahora ves una relación?
> Alumno: Ahora sí…
> Docente 1: Ahora sí, ¿qué? Decilo…
> Alumno: Lo de, cuánto demoraron en caminar de…
> Docente 1: Es importante que digas lo que vas pensando.
> Alumno: No, no estoy pensando nada…
> Docente 2: A ustedes les parece que esto tiene que ver con matemática y lo del croquis no le ven

mucho sentido en la matemática.
Alumno: No se relaciona… Capaz que sí.
Alumno: Claro.
Alumno: Yo no le encuentro el… lugar…
Alumno: Parece sociales.
Docente 1: ¿Esto tiene que ver con sociales únicamente?
Alumnos: No…

En esta conversación los alumnos manifiestan que no le encuentran el sentido 'matemático' a la actividad de realizar un croquis sobre un fragmento. La consigna y el contexto del problema tornan invisible el pensamiento geométrico espacial involucrado.

En la siguiente parte de la tarea, los estudiantes comienzan a buscar las casas de 'sus' personajes a través del Google Maps. Sin necesidad de que el docente lo indique, con la herramienta de Street View, recorren las calles mencionadas, imaginando cuál de las ellas serían (las direcciones los conducen a complejos habitacionales). Es recién en la búsqueda del "Checkpoint" y la reflexión con todo el grupo, que comienzan a surgir preguntas en torno a la dimensión temporal. La novela sitúa la historia en época de la posguerra, mucho tiempo atrás del actual (y del cual son las imágenes que observan). Esto hace que los alumnos observen la arquitectura de los edificios en cuestión y conjeturen que resulta muy probable que las viviendas observadas sean las mismas a las que se hace referencia en la novela.

A continuación de esta exploración, se les pide que, a través de la herramienta "Indicaciones", estimen la distancia y el tiempo que sería necesario emplear para ir de una vivienda a otra. Luego de este momento y a partir de algunas preguntas del docente, los estudiantes se sumergen en *el contexto situacional* de la tarea. Se 'trasladan' en el tiempo y espacio y comienzan a reconocer las posibles condiciones que afectan a esa estimación del tiempo. La magnitud y su unidad ya no era simplemente una medida, sino que también deben considerar las complejidades de la situación en la que estaban inmersos. La reflexión en torno a los valores obtenidos por la aplicación web y sus limitaciones fue relevante en la construcción de una mirada crítica frente a las herramientas informáticas de esta estimación.

Para estimar el tiempo que un niño de la clase demoraría para recorrer la distancia que separa las viviendas de los protagonistas de la novela (conociendo el tiempo que demora en recorrer una distancia conocida), en *el contexto del problema* se hace necesaria la aplicación de la proporcionalidad directa. Este modelo matemático aparece muchas veces implícitamente en los cálculos de los alumnos, que van construyendo el valor del tiempo final a partir de la suma de los tiempos destinados para tramos de distancias más pequeños. En el cierre de la clase, durante la puesta en común, los alumnos hicieron explícito este concepto matemático y se discutió su validez para resolver la consigna. Una vez obtenido el resultado final, lo comparan con el tiempo estimado por Google Maps y sugieren posibles influencias en la diferencia entre los valores (altura de la persona, tipo de camino, entre otros).

En esta instancia, los alumnos consideran este cálculo como resultado final y 'olvidan' las discusiones anteriores en torno a las complejidades de la situación. Pensamos que este 'olvido' se debe a que las consignas estaban demasiado pautadas y faltó mayor apertura para la discusión, el análisis y la posibilidad de repensar el resultado obtenido.

Resulta de interés relacionar este hecho con los puntos de entrada al conocer reflexivo (Skovsmose, 1999). En el desarrollo de la clase, el debate entre los integrantes en cada grupo sobre la manera de resolver la consigna generó discusiones que pusieron en evidencia el trabajo en el primer punto. El segundo punto fue trabajado sobre el final de la clase en la puesta en común. Allí afloró la necesidad de la utilización de la proporcionalidad directa y la "regla de tres simple" como un método rápido y efectivo para obtener la solución.

En cuanto al tercer punto, la discusión junto a los alumnos fue superficial. Los motivos para confiar en el resultado estaban dados por el algoritmo utilizado y por la cercanía con el resultado que propone Google Maps. No profundizar sobre este punto privó la posibilidad de ahondar en la discusión de las otras vías de acceso al conocer reflexivo. Aquí es donde creemos que retomar las discusiones surgidas luego de la búsqueda en Google Maps y antes de estas últimas dos consignas, hubiese sido valioso para irrumpir en el conocer reflexivo. Sin embargo, el reconocimiento del contexto específico fue realizado por los niños de manera acorde al momento histórico en el que transcurría la historia de la novela. Los alumnos pudieron establecer conexiones entre la información brindada por la aplicación Google Maps y la situación histórica, la estimación del tiempo y la realidad de sus personajes. Este análisis realizado por los alumnos supone un grado importante en la interpretación y análisis crítico de la información y las herramientas tecnológicas.

Conclusiones

El estudio de las intervenciones puso de manifiesto que los contextos (del problema, de interacción y situacional) resultan propicios para la participación activa de los niños. No obstante, como sostiene Valero (2002), éstos por sí mismo son insuficientes para reconocer las relaciones entre lo que sucede en el aula, las estructuras económicas, sociales y políticas y los procesos históricos en los que estas se constituyen. Durante el trabajo con la carta del Senado francés al profesor, los niños reconocieron la dimensión política de la adopción de un sistema de medidas y su incidencia en el mundo social, económico, político y cultural.

En cuanto al conocer reflexivo consideramos que no se capitalizaron completamente las situaciones para abordar los distintos puntos de entrada. Sin embargo, destacamos la profundización realizada en cuanto a la componente tecnológica de la resolución del problema. Los niños pusieron en cuestión la información obtenida de la aplicación web y reconocieron la necesidad de realizar una lectura crítica de la misma. A futuro esperamos profundizar el análisis de las potencialidades y limitaciones de la experiencia desde la perspectiva de la EMC.

Referencias bibliográficas

Guedj. D. (1998). *El imperio de las cifras y los números*. Barcelona: Ediciones B.S.A

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 075–088.

Scaglia, S. (2016). Reflexiones sobre la construcción del sentido en la formacióninicial del profesor de matemáticas. En L. Rico, M. C. Cañadas, A. Marin y M. T. Sánchez (Eds.), *Investigaciones en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Moisés Coriat* (pp. 241-251). Granada: Comares.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica.* Bogotá: una empresa docente.

Skovsmose, O. (2005). Meaning in Mathematics Education. En J. Kilpatrick, C. Hoykles y O. Skovsmose (eds),

Meaning in Mathematics Education (83-104). New York: Springer.
Valero, P. (2002). Consideraciones sobre el contexto y la educaciónmatemática para la democracia. *Quadrante*, 11(1), 49-59.

LA EVALUACIÓN COMO INSTRUMENTO PARA LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO. ALTERNATIVAS EN LA EDUCACIÓN UNIVERISTARIA

Giovanni Ruiz Faúndez; Liliana Milevicich, Alejandro Lois
Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional General Pacheco. (Argentina)
gruizfaundez@gmail.com, liliana_milevicich@yahoo.com.ar, alelois@hotmail.com

Resumen
La evaluación en el nivel universitario suele ser del tipo sumativa, y considerada solamente como una instancia final de acreditación de conocimientos. Esta manera de concebirla e implementarla, deja de lado las potencialidades que puede tener la evaluación entendida de manera formativa, como un instrumento de enseñanza. En este sentido, se diseñaron e implementaron un conjunto de experiencias con alumnos de segundo año de la carrera de Ingeniería, en la materia Análisis Matemático II, donde se utilizaron instrumentos de evaluación formativa y a partir de los cuales se pudieron observar diferencias en los aprendizajes logrados respecto de la utilización de la evaluación sumativa.

Palabras clave: evaluación formativa, Cálculo, aprendizaje, competencias

Abstract
Evaluation is usually of summative type in higher education, and it is considered only as the evaluation of knowledge at the end of a stage. This way of conceiving and implementing it, puts aside the potentialities that formative evaluation can have, as a teaching tool. Therefore, in this sense, we designed and implemented a set of experiences with second-year students of the Engineering degree, in Mathematical Analysis II, where formative assessment tools were used, and from which it was possible to observe the difference in the learning achieved by the students compared to their achievement when using summative evaluation.

Key words: formative evaluation, calculus, learning, skills

Introducción

La evaluación no debiera ser considerada un apéndice de la enseñanza ni del aprendizaje, es parte de ambas. En la medida en que el sujeto aprende, simultáneamente discrimina, valora, critica, opina, razona, fundamenta, decide, enjuicia, elige; entre lo que considera que tiene un valor en sí y aquello que carece de él. Esta actitud evaluadora, que se aprende, es parte del proceso educativo, y tiene carácter formativo.

La necesidad de evaluar, no sólo para acreditar los logros académicos sino también las competencias de modo amplio, ha puesto en crisis el uso exclusivo de las tradicionales evaluaciones sumativas. La mejora en el rendimiento de los alumnos comienza cuando el docente se cuestiona: ¿qué enseño?, ¿por qué enseño esto y no otras cosas?, ¿de qué modo lo enseño?, ¿pueden aprenderlo mis alumnos?, ¿qué hago para contribuir a un aprendizaje significativo?

Es por ello que, con el propósito de lograr aprendizajes significativos, se diseñaron e implementaron un conjunto de acciones utilizando la evaluación formativa como herramienta, para luego comparar las evaluaciones parciales tradicionales (sumativas) y las competencias logradas entre dos grupos: uno con el cual se trabajó con evaluaciones formativas adicionales, y otro con el que no se hizo.

Indagación bibliográfica

El término "evaluación formativa" fue introducido por Michael Scriven en los años 60, en referencia a las estrategias didácticas utilizadas por los profesores con la finalidad de adaptar sus prácticas docentes a los progresos y necesidades de aprendizaje observados en sus estudiantes (Scriven, 1967).

Este tipo de evaluación tiene como objetivo regular los procesos de enseñanza y aprendizaje para permitir que los medios de enseñanza respondan a las características de los aprendizajes, intentando detectar cuáles son sus puntos débiles, más que medir los resultados de este aprendizaje.

En esta concepción de la evaluación, los errores son objeto de estudio para el docente, que se centra en las estrategias elaboradas por los estudiantes para determinar modificaciones en sus acciones educativas. Es decir, que a partir de la identificación de las dificultades que tienen los estudiantes para realizar las tareas que se les propone, el docente puede arbitrar los medios necesarios para que sus alumnos logren los aprendizajes. De la misma manera, en este proceso es importante la identificación de los logros de aprendizaje, reforzando aquellos aspectos donde los alumnos tuvieron éxito y tener así, la posibilidad de reforzar aquellas estrategias utilizadas.

La evaluación formativa permite recoger información, mientras los procesos de enseñanza y aprendizaje se encuentran en desarrollo, a diferencia de la Evaluación Sumativa, que se centra en el producto final.

Varios autores han investigado sobre el papel de la evaluación en los procesos de enseñanza y aprendizaje: Álvarez Valdivia explica que "la evaluación debe trascender el enfoque de medida y la constatación de la capacidad de reproducir el conocimiento que demandan las pruebas objetivas" (Álvarez Valdivia 2008, p. 258). Para Cols (2009), este tipo de avaluación tiene un papel decisivo contra el fracaso escolar, mientras que William (2009) sostiene que la evaluación formativa y la retroalimentación tienen una incidencia positiva en el aprendizaje, pero no explicita la magnitud de este impacto.

Nuestra propuesta, se enmarca en un enfoque de evaluación orientada a la mejora del aprendizaje, basada en procedimientos que se consideran como métodos alternativos a la evaluación tradicional y contienen tareas que conllevan a soluciones reflexivas, en las que los alumnos deben interpretar, analizar, evaluar problemas y explicar sus argumentos.

Angelo y Cross (1993) sugieren emplear técnicas informales de evaluación, que complementen a la evaluación sumativa, y permitan un monitoreo más continuo: los llamados "CATs" (Classroom Assessment Technics), según su nombre original en inglés, son estrategias, que permiten recolectar, de manera rápida y sencilla, información sobre la manera en que están aprendiendo los alumnos, para poder mejorar el proceso, en caso de ser necesario. Estas características amplifican su aptitud para aplicarlas en el ámbito universitario, donde los tiempos apremian y las cantidades de alumnos obstaculizan un trabajo más personalizado, ya que permiten recabar información casi a diario sobre la marcha del proceso (del Puerto y Seminara, 2014).

Estas experiencias están enmarcadas en lo que se denomina "evaluación orientada al aprendizaje", que gira alrededor de tres cuestiones centrales: plantear las tareas de evaluación como tareas de aprendizaje, involucrar a los estudiantes en la evaluación, y ofrecer los resultados de la evaluación a modo de retroalimentación (Álvarez Valdivia, 2008). En ese sentido, el diseño de actividades específicamente destinadas a la evaluación, está destinado a que los estudiantes pongan en juego procesos cognitivos que propicien la generación de nuevos aprendizajes.

Método

En la Facultad Regional General Pacheco, de la Universidad Tecnológica Nacional, se diseñaron e implementaron diferentes experiencias durante el año 2016, con los alumnos de segundo año de la carrera de Ingeniería Eléctrica, en la materia Análisis Matemático II.
Para implementar estas actividades de evaluación formativa, previas a cada evaluación sumativa, se siguió la serie de etapas recomendada por Bloom, Hastings, Madaus (1971):

- Se subdividió el curso en unidades de aprendizaje que abarcaron una o dos semanas (no más de 10 horas de clase)
- Se estableció una jerarquía de objetivos de aprendizaje para cada unidad
- Se construyeron y administraron periódicamente breves pruebas
- Se analizaron los resultados de estas pruebas para identificar dificultades, y así modificar las estrategias de enseñanza y el proceso de aprendizaje.

Algunos ejemplos de este tipo de evaluaciones, basadas en los "CATs" de Angelo y Cross (1993), consistieron en la resolución de trabajos prácticos, a desarrollar de una clase para la siguiente; y en dar respuesta a pocas consignas en un breve intervalo de tiempo. Algunas de esas consignas fueron: ¿Cuál fue el tema más importante de la clase?, ¿Cuál fue el tema más difícil?, ¿Qué preguntas te quedaron por hacer?, elige un tema de la unidad, explícalo brevemente y si puedes, agrega un ejemplo de aplicación, explica en una sola oración cuál es la utilidad del Teorema de Stokes, da una propuesta de ejercicio sobre el tema, para que pueda ser incluido en un examen.

Desarrollo

En relación con las preguntas formuladas a los alumnos, se presentan ejemplos extraídos de respuestas dadas por los alumnos, a algunas de esas consignas.

En la figura 1 se puede observar cómo el alumno pide el repaso de un tema anterior (vector gradiente), necesario para entender los conceptos trabajados en la clase actual (máximos y mínimos condicionados de funciones de dos variables).

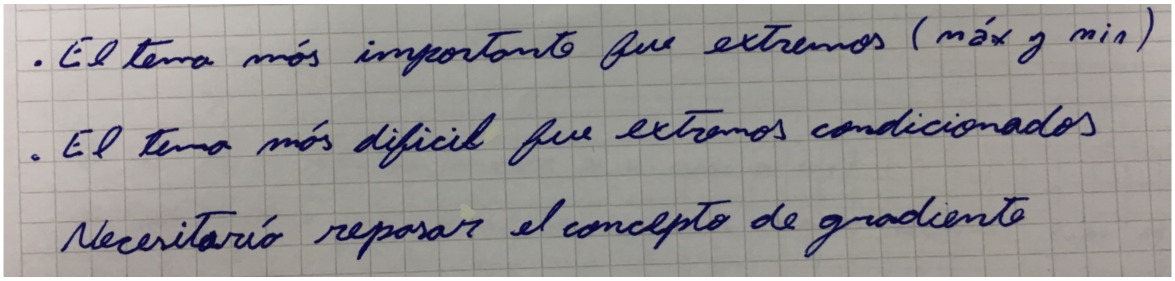

. El tema más importante fue extremos (máx y min)
. El tema más dificil fue extremos condicionados
Necesitaría repasar el concepto de gradiente

Figura 1. Respuesta de un alumno.

Otras sugerencias se observan en la figura 2. Allí se presenta la solicitud de tres alumnos, para que se aborden ejemplos y se vuelvan a explicar conceptos.

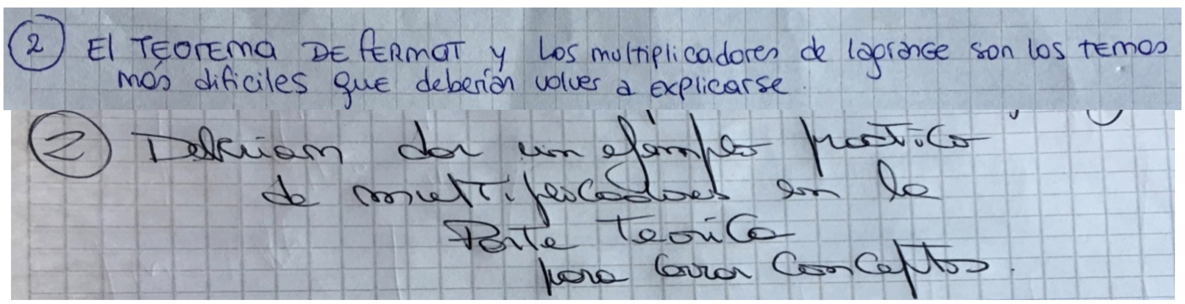

(2) El TEOREMA DE FERMAT y Los multiplicadores de lagrange son los temas más dificiles que deberían volver a explicarse.
(2) Deberian dar un ejemplo practico de multiplicadores en la Parte teorica para aclarar Conceptos.

Figura 2. Respuesta de un alumno.

En la figura 3 se observa que dos alumnos responden que el tema más difícil de la clase fue integrales triples en coordenadas polares. Esto deja en evidencia un error conceptual: la confusión entre coordenadas en el plano (polares) y coordenadas en el espacio (cilíndricas):

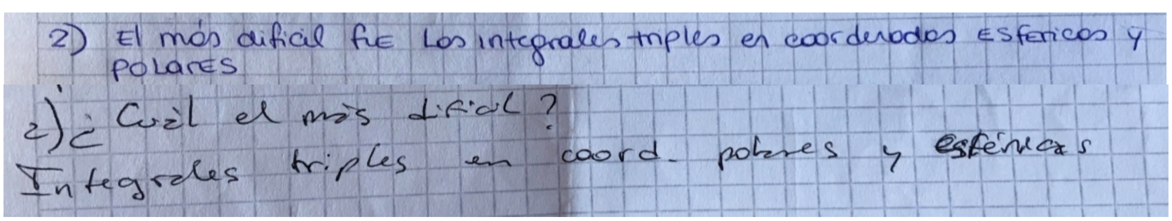
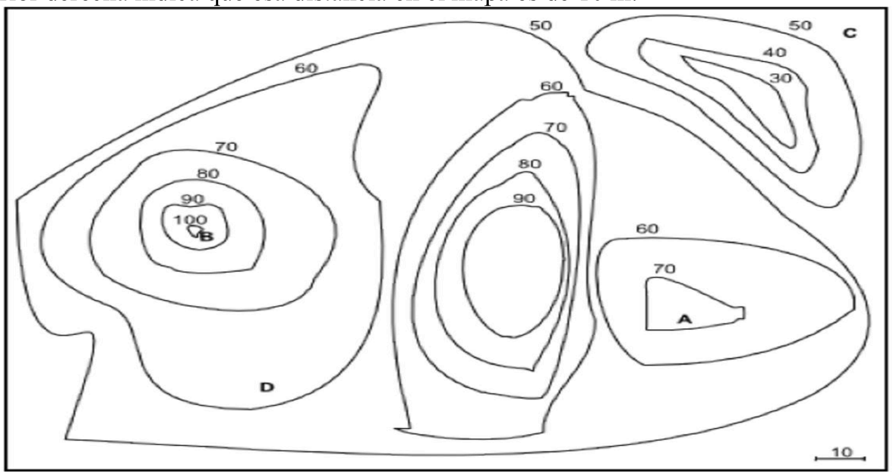

2) El más dificil fue Los integrales triples en coordenadas esfericos y POLARES
2) ¿Cuál el más dificil?
Integrales triples en coord. polares y esféricas

Figura 3. Respuesta de un alumno.

También se utilizó la resolución de actividades de una clase a la siguiente. Estas actividades tenían como objetivo principal el afianzamiento de aspectos conceptuales, más allá de lo procedimental. Algunos ejemplos de esas actividades son presentados en las figuras 4 y 5.

Actividad 1

El diagrama muestra curvas de nivel de un determinado terreno en decenas de metros. El segmento de la esquina inferior derecha indica que esa distancia en el mapa es de 10 m.



a) Indiquen cuántos cerros hay, cuál es el cerro más elevado y cuál es el más empinado, indicando en cada caso el por qué.

b) En los puntos A, B, C y D hay ubicadas 4 personas. Decidan a quienes puede ver la persona ubicada en el punto A.

c) El médico le ha recomendado a la persona ubicada en el punto A que no baje ni suba pendientes superiores a 45 grados. Determinen el camino más corto para que pueda llegar al punto B sin desoír la recomendación médica.

Figura 4. Actividades propuestas a los alumnos

Actividad 2

La figura muestra el diagrama de contorno para la temperatura T(x, t) (medida en °C) de una habitación como función de la distancia x (en metros) a una estufa y el tiempo t (en minutos) transcurrido desde el momento en que la estufa fue encendida.

¿Cuáles son los signos de $\frac{\partial T}{\partial x}(10{,}20)$ y $\frac{\partial T}{\partial t}(10{,}20)$? Estimen el valor de estas derivadas parciales e interpreten la respuesta en el contexto de la habitación con la estufa.

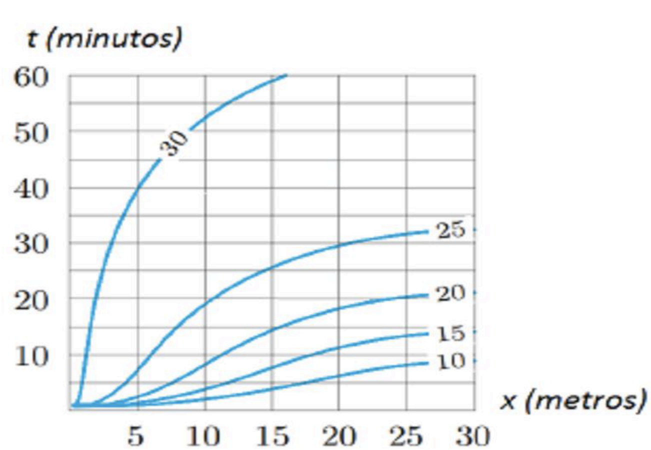


Figura 5. Actividades propuestas a los alumnos

El análisis de las respuestas, comentarios, y resoluciones por parte de los alumnos, dan la posibilidad de que el docente conozca las dificultades y/o obstáculos, modifique sus estrategias de enseñanza, a tiempo, durante el curso, para trabajar sobre estas cuestiones antes de llegar al final del proceso.

En el año 2015 se trabajó de manera tradicional con evaluaciones sumativas (los habituales exámenes parciales de la materia), mientras que en 2016 se trabajo con evaluaciones formativas y sumativas (los habituales exámenes parciales fueron precedidos por evaluaciones formativas durante el desarrollo de la unidad). Para comparar ambos grupos (2015 y 2016) se utilizó un diseño cuasi-experimental (no es posible establecer equivalencia inicial entre los grupos) con post-prueba (las 3 evaluaciones sumativas), donde fue posible establecer comparaciones entre el grupo 2015 que no recibió el tratamiento y el grupo 2016 que sí lo recibió.

Se analizaron las producciones de los alumnos en las 3 evaluaciones sumativas del año 2016 en relación con las correspondientes evaluaciones del año 2015.
Por otra parte, con el propósito de profundizar el análisis, se evaluaron las competencias adquiridas por ambos grupos (2015 y 2016) correspondientes a la primera unidad de la materia.

Se describen a continuación las competencias evaluadas.

- Competencia 1: Representa gráficamente la función y el círculo osculador
- Competencia 2: Calcula correctamente la curvatura
- Competencia 3: Calcula correctamente el círculo osculador
- Competencia 4: Plantea correctamente la función a maximizar y su dominio
- Competencia 5: Utiliza correctamente algún procedimiento para hallar extremos
- Competencia 6: Verifica que el punto crítico es máximo o mínimo
- Competencia 7: Plantea correctamente los límites de integración en integrales triples
- Competencia 8: Justifica la existencia de extremos absolutos

Resultados

En relación con las competencias evaluadas en ambos grupos, el gráfico 1 exhibe los resultados.

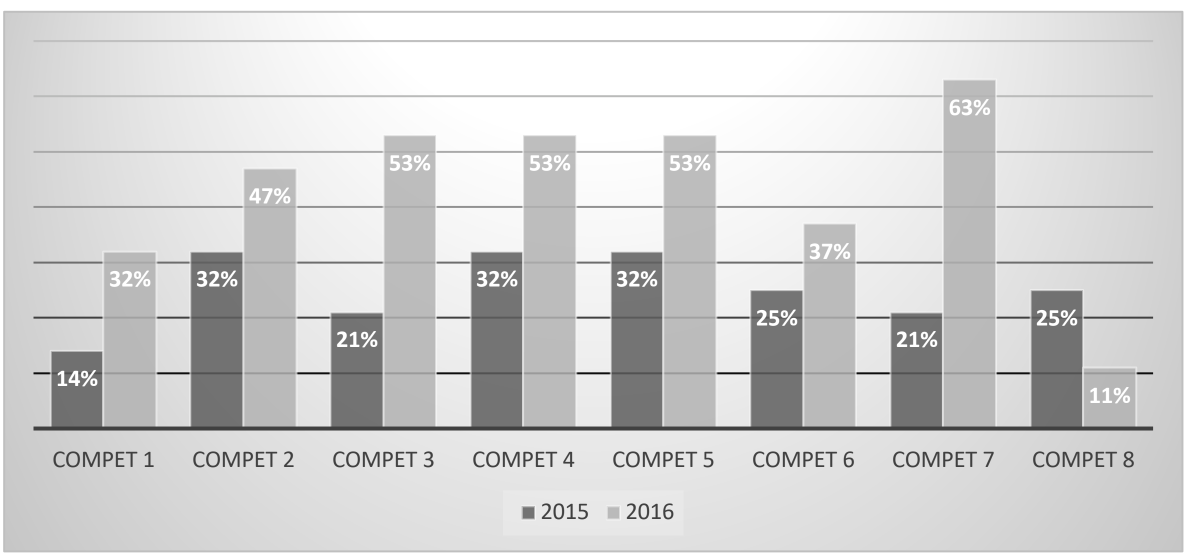


Gráfico 1. Análisis de porcentajes de competencias logradas en ambos grupos

Se advierte que el grupo 2016, que es quien recibió el tratamiento, tuvo un mayor porcentaje de alumnos que alcanzaron las competencias evaluadas, excepto en la competencia número 8, donde el grupo 2015 obtuvo un mejor rendimiento.

En la tabla 1 se comparan los resultados obtenidos en los exámenes correspondientes a las evaluaciones sumativas (grupos 2015 y 2016):

Tabla 1. Rendimiento en las evaluaciones sumativas

	Niveles	Grupo control (2015)	Grupo experimental (2016)
Evaluación Sumativa 1	Aprobados	21 % (6/28)	53 % (10/19)
	Desaprobados	79 % (22/28)	47 % (9/19)
Evaluación Sumativa 2	Aprobados	52 % (13/25)	76 % (13/17)
	Desaprobados	48 % (12/25)	24 % (4/17)
Evaluación Sumativa 3	Aprobados	50 % (9/18)	62,5 % (10/16)
	Desaprobados	50 % (9/18)	37,5 % (6/16)

En esta tabla, se observa, que el grupo experimental obtuvo mejores rendimientos en las 3 evaluaciones.

Se puede inferir, a partir de la media de cada grupo, que el fracaso escolar, con una media del 60 % en el año 2015 paso a un 35 % en el año 2016

Conclusiones

El alcance de los resultados, al momento, se limita a los grupos comparados. En ese contexto, podemos afirmar que la introducción de evaluaciones formativas tuvo una influencia académica positiva en el grupo 2016.

Durante el transcurso del curso, se detectaron cambios actitudinales en los alumnos, no medibles cuantitativamente, sin embargo, muy valiosos en cuanto a su contribución a la calidad del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Se estableció un marco para el debate y la reflexión conjunta entre alumnos y docentes. Esto contribuyó a que la comunicación entre pares y con los docentes fuera más fluida, determinando un cambio en las competencias lingüísticas y comunicativas, tanto orales como escritas, de los alumnos.

Los alumnos formaron diferentes grupos de estudio, a partir de hacer explícitas sus dudas y solicitudes al docente. Estos temas de interés común, promovieron la cooperación entre ellos.
También se observó un interés de parte de los alumnos, por saber qué temas se trabajarían la clase siguiente, de manera de poder leerlos de un libro durante la semana previa a la clase. Esto indica un mayor compromiso con la materia y una modificación en la motivación en relación al grupo 2015.
La deserción escolar bajó desde un 37% en 2015 a un 16% en 2016.

A pesar de estas diferencias, no se observaron cambios significativos en la disposición de los alumnos por enlazar temas estudiados en diferentes clases, o para integrar contenidos de manera espontánea.

Se pretende repetir la experiencia con la comisión 2017, utilizando las mismas estrategias y en condiciones similares a la experiencia anterior.

Referencias bibliográficas

Álvarez Valdivia, I. (2008). Evaluación del aprendizaje en la universidad: una mirada retrospectiva y prospectiva desde la divulgación científica. *Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa, 6 (14),* 235-272.

Angelo, T. y Cross, P. (1993). *Classroom Assessment*. San Francisco: Jossey-Bass.

Bloom, B., Hastings, J. y Madaus, G. (1971) *Handbook on formative and summative evaluation of student learning.* New York: Mc Graw-Hill.

Cols, E. B. (2009) *Introducción. La evaluación de los aprendizajes como objeto de estudio y campo de prácticas.* Recuperado el 10 de mayo de 2017 de: http://www.fuentesmemoria.fahce.unlp.edu.ar/art_revistas/pr.4079/pr.407 9.pdf

del Puerto, S. y Seminara, S. (2014). Experiencias innovadoras en evaluación. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27*, 5-13. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Wiliam, D. (2009) *Una síntesis integradora de la investigación e implicancias para una nueva teoría de la evaluación formativa*. Recuperado el 20 de mayo de 2017 de: http://www.fuentesmemoria.fahce.unlp.edu.ar/art_revistas/ pr.4080/pr.4080.pdf

ANALISIS DE LAS DIMENSIONES MATEMÁTICA Y DIDÁCTICA DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DE PROFESORES PERUANOS SOBRE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN

Teresa Sofía Oviedo Millones
Pontificia Universidad Católica del Perú. (Perú)
sofia.oviedo@pucp.edu.pe

Resumen
Este reporte de investigación refiere a una investigación cualitativa de estudio de caso. El análisis se realizó a una secuencia de clases de un docente universitario en el tema de función. Se analizó dos de las tres dimensiones del Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM). Este modelo ha sido planteado considerando supuestos teóricos y metodológicos del Enfoque Onto-Semiótico (EOS). Los resultados muestran un panorama de las características del conocimiento didáctico y matemático del docente y lo que es necesario mejorar en su práctica didáctica-matemática y motivan la reflexión sobre las prácticas docentes en la gestión de la enseñanza-aprendizaje sobre funciones.

Palabras clave: formación de profesores, conocimiento didáctico matemático, enfoque onto-semiótico, funciones matemáticas

Abstract
This research report shows a qualitative case-study research. The analysis involves a sequence of lessons on the topic of mathematical functions carried out by a professor. Two of the three dimensions of the Didactic-Mathematical Knowledge Model (DMK) were analyzed. This model has been raised considering theoretical and methodological assumptions of Onto-Semiotic Approach (OSA). The results show an overview of the characteristics of the professor's didactic and mathematical knowledge and what needs to be improved in his mathematical-didactic practice; and they motivate the reflection on teaching practices with respect to the management of the teaching and learning about functions, as well.

Key words: teacher-training, mathematical didactic knowledge, Onto-Semiotic Approach, mathematical functions

Introducción

El aprendizaje de las funciones es uno de los temas fundamentales en el nivel universitario que conlleva a aplicaciones de temas matemáticos más complejos. Los estudiantes muestran mucha dificultad en la comprensión de las funciones y esto se contempla desde la Educación Básica Regular en el Perú (Quintanilla, 2009) y la conocemos desde nuestra propia práctica como docentes universitarios.

Es el docente el principal gestor en la enseñanza y aprendizaje de sus estudiantes y por ello tiene que mostrar flexibilidad, coherencia, conocimientos y aptitudes en el manejo de los recursos didácticos y matemáticos; es decir se requiere de un conocimiento didáctico y matemático idóneo para una adecuada gestión en el aprendizaje de sus estudiantes.

Es por ello que se optó por la aplicación del Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (Pino-Fan y Godino, 2015) basado en herramientas teóricas y metodológicas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2007), que permite analizar y valorar el diseño, implementación y evaluación (reflexión sobre la propia práctica) de la práctica docente con la finalidad de favorecer el aprendizaje de los estudiantes.

Marco Teórico

Esta investigación se sustenta en el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (Godino, 2009; Pino-Fan y Godino, 2015) que posibilita a través de un sistema de categorías y subcategorías los conocimientos que deberían tener los docentes para la gestión adecuada del aprendizaje de sus estudiantes. Dicho modelo propone tres grandes dimensiones: matemática, didáctica y didáctico-matemática. Aquí aplicamos dos de las tres dimensiones del CDM. La dimensión didáctica que incluye las facetas del conocimiento: epistémica, cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica; y la dimensión matemática que incluye los conocimientos común y ampliado del contenido matemático.

Método

Se consideró la metodología cualitativa con estudio de caso. Como técnica se realizó la observación no participante de las clases de un docente universitario, en el primer semestre de estudios universitarios de un curso de matemáticas sobre funciones. En el curso había 60 estudiantes matriculados. Se consideró el análisis de las filmaciones de dos sesiones de clase con una duración de dos horas pedagógicas (100 horas).

Para realizar el análisis de las transcripciones de las clases se consideró el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático del EOS, en la dimensiones didáctica (que incluye 6 dimensiones: epistémico, ecológico, cognitivo, interaccional, mediacional y afectivo) y en la dimensión matemática (conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido). Se consideraron los 4 niveles de análisis de dicho modelo: 1) Identificación de las prácticas matemáticas; 2) elaboración de las configuraciones didácticas y epistémicas de objetos y procesos matemáticos; 3) Normas y metanormas; 4) Idoneidad y valoración de la idoneidad didáctica. Para la valoración de la idoneidad didáctica se consideró los componentes e indicadores de la idoneidad didáctica dados en Breda, Pino-Fan y Font (2016) y en Godino (2011) con el propósito de identificar los aspectos que deberían mejorarse, relativos a la dimensión didáctica, que permita en los estudiantes la apropiación razonable de los conocimientos matemáticos correspondientes al tema de funciones.

Resultados

En esta sección se muestra los resultados de los análisis de las transcripciones de clase de las dimensión didáctica (dimensiones epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica) y la dimensión matemática. Se consideró los cuatro niveles de análisis del EOS, mencionados en la sección anterior. Se aclara, que esta investigación es parte de una investigación más amplia en proceso, donde se considera también la entrevista para el análisis de los resultados. Por tanto, en esta investigación se muestra los resultados todavía no contrastados ni complementados con la entrevista.

Por razones de espacio presentamos de forma concisa el análisis y su consecuente valoración de la idoneidad didáctica, sin mostrar las transcripciones de clase. También solo se mostrará dos de las tablas: Tabla 1, Tabla 2, basadas en los componentes e indicadores de la idoneidad didáctica de Godino (2011) y Breda, Pino-Fan y Font (2016), referentes a la idoneidad epistémica y cognitiva, en las que se analizan los resultados. Para las otras cuatro dimensiones: interaccional, mediacional, afectivo y ecológico, se consideran las tablas 3, 4, 5 y 6 que se pueden ver en el artículo de Breda, Pino-Fan y Font (2016), que no se muestran en esta investigación, pero sí se muestran los resultados de los análisis.

- *Análisis de los resultados respecto a la dimensión didáctica.*
- *Análisis de los resultados respecto a la dimensión epistémica*

Para este análisis se considera la Tabla 1 dada a continuación.

Tabla 1. Componentes y descriptores de la idoneidad epistémica (matemática)

Componentes	Indicadores
Situaciones-problemas	Selección de una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización)
Lenguajes	Uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), traducciones y conversiones entre los mismos. ***Nivel adecuado del lenguaje para el nivel a que se dirige.*** Se promueve la expresión e interpretación.
Elementos regulativos (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	Definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo a que se dirigen. Se presentan los enunciados y procedimientos básicos del tema. Se promueve la generación y negociación de las reglas.
Argumentos	Adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen. Se promueven momentos de validación.
Relaciones (conexiones, significados)	Se relacionan y articulan de manera significativa los objetos matemáticos puestos en juego (situaciones, lenguaje, reglas, argumentos) y las distintas configuraciones en que se organizan.

Fuente: Godino (2011) Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Los resultados para la idoneidad epistémica de las dos sesiones de clase dadas por el docente en estudio fueron:

- Situaciones problemáticas: No se presentan situaciones en contexto extramatemático. Se limita a resolver ejercicios, dar ejemplos en las que se enfatiza el proceso a seguir. Con ello no se vincula a los estudiantes a la reflexión en la interpretación y la aplicación de las funciones.

- Lenguajes: Se enfatiza lo simbólico-formal respecto a los otros tipos de representaciones y se usan traducciones en la enseñanza impartida.
- Argumentos: Se da pocos argumentos. En general, el docente se limita a dar ejemplificaciones de los procedimientos a seguir.
- Elementos regulativos (definiciones, proposiciones, procedimientos): No se promueve la generación y negociación de las reglas. Las definiciones y proposiciones se presentan de forma clara y correctamente enunciados. Los procedimientos explicados, en algunos momentos de clase, podrían ocasionar conflictos semióticos en los estudiantes. Las configuraciones didácticas implementadas son conceptuales, procedimentales y centradas en el proceso algorítmico-algebraico.
- Relaciones: Se relacionan y articulan de manera adecuada los objetos matemáticos, pero solo en forma teórica, no en situaciones de contexto, es decir, sin relación con situaciones de la vida diaria o de otros cursos.

En general, el docente usa, implícitamente, la configuración epistémica formalista (Font y Godino, 2006, p. 73), es decir, los objetos matemáticos se muestran de manera convencional, sin considerar contexto extra-matemático y los procesos matemáticos que se observaron fueron la institucionalización y la generalización.

Análisis de los resultados respecto a la dimensión cognitiva.

Para el análisis de las sesiones de clase con respecto a la dimensión cognitiva, se aplicó la Tabla 2.

Tabla 2. Componentes y descriptores de la idoneidad cognitiva

Componentes	Indicadores
Conocimientos previos.	Los estudiantes tienen los conocimientos previos necesarios para estudiar las funciones (es decir, han estudiado anteriormente o el profesor hace un plan de estudio). Se pueden enseñar los significados deseados (dificultad razonable) a través de sus diversos componentes.
Aprendizaje	La forma de presentación de los objetos matemáticos ayudan a desarrollar los conocimientos o competencias previstos o implementados.
Alta demanda cognitiva.	Los procesos cognitivos relevantes son activados (generalización, conecciones intramatemáticas, cambios de representaciones, especulaciones, etc.) Se promueven los procesos metacognitivos.

Fuente: Adaptación de Breda, Pino-Fan y Font (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice.

Los resultados para la idoneidad cognitiva de las dos sesiones de clase dadas por el docente en estudio fueron:

- Conocimientos previos: durante las dos sesiones de clase dadas por el docente no se muestra evidencia que se consideren los conocimientos previos de los estudiantes.
- Aprendizaje: la forma de presentación de los objetos matemáticos (situaciones problemas, conceptos, procesos, etc.) no se vincula con el desarrollo de competencias señaladas en el sílabo del curso de los alumnos.
- Alta demanda cognitiva: el docente al presentar los elementos regulativos y relaciones de manera algorítmica-algebraica hace, implícitamente, que los alumnos apliquen mecánicamente los ejercicios, definiciones, procedimientos, que de acuerdo a la teoría de APOE (Acción, proceso, objeto, esquema) propuesta por Dubinsky y el grupo RUMEC (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 1997), los alumnos estarían en la primera fase de acción, es decir, no son activados los procesos cognitivos, los alumnos no tienen que hacer reflexiones, sin hacer algún esfuerzo cognitivo.

Análisis de los resultados respecto a la dimensión interaccional.

De acuerdo con la Tabla 3 de los componentes e indicadores de la idoneidad interaccional de Breda, Pino-Fan y Font (2016, p. 1904), los resultados para la idoneidad interaccional de las dos sesiones de clase dadas por el docente en estudio fueron:

- Interacción docente-alumno: el docente asume toda la autonomía de la clase, el hecho del docente centrarse solo en el aspecto algorítmico-algebraico propició que los alumnos asuman implícitamente que el docente posee todo el conocimiento, no se propicia la discusión en clase o la reflexión. Los estudiantes participan cuando el docente hace alguna pregunta desde la pizarra o cuando deja momentos para que los estudiantes pregunten, en este caso él es quien se acerca a los estudiantes a atender sus consultas particulares y cuando hay una duda o preguntas frecuentes, el docente hace la aclaración para todos los estudiantes. La clase se mantuvo como docente que tiene todo el saber y los alumnos los receptores. El docente no asume alguna estrategia directa o indirecta para la participación de los alumnos en clase.
- Interacción entre los alumnos: el docente da momentos para que los alumnos repasen lo anotado en clase, resuelvan sus dudas entre ellos (por supuesto, que pueden consultarle a él), en esta situación cada alumno actúa independientemente: repasa los ejercicios dados en clase desde su carpeta de forma individual y también lee su libro de texto, y si tiene alguna duda, llama al docente a acercarse a él. La interacción entre los alumnos está ausente en relación al conocimiento dado por el docente. Se observó en estas dos clases, que conversaban los alumnos, pero no para el tema de la clase dada.
- Autonomía: Los alumnos no tienen autonomía en su estudio. El tiempo que da el docente para que los estudiantes hagan preguntas, es con respecto a la clase dada. Los estudiantes no tienen algún ejercicio o situación problemática a realizar dada por el docente. La forma de dar las clases por parte del docente (interacción docente-alumno) no influye o no da a activar la autonomía en los alumnos.

Análisis de los resultados respecto a la dimensión mediacional

De acuerdo con la Tabla 4 de los componentes e indicadores de la idoneidad mediacional de Breda, Pino-Fan y Font (2016, p. 1905), los resultados para la idoneidad mediacional de las dos sesiones de clase dadas por el docente en estudio fueron:

- Recursos materiales: el docente utilizó sólo la pizarra. No se explotó los recursos digitales por ejemplo para visualizar de manera más precisa y de manera más activa la representación de las funciones. Tampoco se promueve el uso de recursos digitales, por ejemplo los softwares libres que hay en internet para la visualización de las funciones, operaciones entre ellas, etc. Los alumnos pueden usar sus calculadoras y sus equipos electrónicos, pero ellos solo lo utilizan para hacer cálculos de operaciones aritméticas. El docente no influye para otro proceder con estos recursos.
- Número de alumnos, horario, condición del aula: De los 60 alumnos matriculados en el curso, en las dos clases que se observaron, no todos estaban presentes. Asistieron 40 y 45 estudiantes por día de clase. Se notaba un ambiente de atención a la explicación del docente. El horario era de 5 horas a la semana, dos días de clase a la semana en horarios de: 8: 00 a 11:00 horas y de 8:00 a 10:00 horas. Este horario se considera adecuado por ser un horario en la que se inician las labores académicas en general. Los alumnos se los veía atentos, sin gestos de cansancio. Era un aula diferente para cada día de clase durante la semana. En una de las aulas las carpetas eran de tipo mesa, estaban agrupadas en dos columnas, en cada carpeta podían estar sentados 4 estudiantes de manera cómoda. En la otra aula, las carpetas estaban agrupadas en 4 columnas, en las carpetas pueden estar cómodos hasta 4 alumnos, estas carpetas están ubicadas de manera escalera, es decir, para cada fila se tiene que ir escalando. En general, de acuerdo a la distribución de las carpetas y la forma como están diseñadas se consideran accesibles para que los estudiantes puedan interactuar entre ellos (que se ayuden mutuamente, que compartan materiales, que conversen), para trabajar en equipo.
- Distribución del tiempo: se observó equilibrio entre los tiempos determinados en la estructura algorítmica-algebraica (presentación de las definiciones, procedimientos, argumentos, ejemplos) de las clases del docente

Análisis de los resultados respecto a la dimensión afectiva.

De acuerdo con la Tabla 5 de los componentes e indicadores de la idoneidad interaccional de Breda, Pino-Fan y Font (2016, p. 1905), los resultados para la idoneidad afectiva de las dos sesiones de clase dadas por el docente en estudio fueron:

- Intereses y necesidades: el docente al no considerar resolución de problemas en contexto extra-matemático, no crea un ambiente activo de motivación, entusiasmo o atención hacia su clase. En general las actitudes de los estudiantes es que sí atienden a la explicación del docente, pero a manera de transcribir lo que el docente explica. No se observa apatía en los alumnos hacia el tema, pero sí se observa una actitud muy pasiva y sumisa.
- Actitudes: no se promueve la participación en actividades, responsabilidad.
- Emociones: la parte didáctica para influir en los alumnos no está activada en el docente. Los estudiantes se limitan a escuchar la clase, a hacer algunas preguntas, cuando el docente da el tiempo para que ellos puedan hacerlo. No se observan así emociones en los estudiantes hacia la matemática, ni en las preguntas que hacen. Además que no se genera la argumentación o diálogo entre ellos respecto a los objetos matemáticos dados por el docente.

Análisis de los resultados respecto a la dimensión ecológica.

De acuerdo con la Tabla 5 de los componentes e indicadores de la idoneidad interaccional de Breda, Pino-

Fan y Font (2016, p. 1905), los resultados para la idoneidad ecológica de las dos sesiones de clase dadas por el docente en estudio fueron:

- Adaptación al currículo:
- Conexiones intra/interdisciplinario: El tema de las funciones está ligada a los otros temas posteriores del curso de Matemática impartido, además que está ligado a otros cursos posteriores, que llevarán los alumnos en sus semestres académicos posteriores. Pero de la manera como se presenta las clases (que ya se ha mencionado) enfatiza a que saberes los alumnos solo lo podrían usar para situaciones donde se tiene que aplicar el concepto o justificación respecto a las funciones, desligados de aplicación con reflexión. Los objetos matemáticos sólo son tratados en contexto intra-matemático
- Sentido social-profesional: No se promueve alguna discusión, reflexión o conocimiento respecto al uso de las funciones en la vida diaria o la aplicación de las funciones para otros cursos.
- Innovación didáctica: la forma de enseñanza del docente corresponde a una metodología tradicionalista, no se utilizan recursos tecnológicos, las clases no impulsan a una práctica reflexiva de los alumnos.

En general, la idoneidad didáctica del docente se considera media. Tiene mayor idoneidad en la dimensión epistémica con respecto a las otras dimensiones, que se considera con baja idoneidad.

Análisis de los resultados respecto a la dimensión matemática.

- Conocimiento común: el docente reproduce los conocimientos de manera tradicionalista: presenta las definiciones, propiedades, hace ejemplo y a veces hace una síntesis de los objetos matemáticos abordados de manera ordenada, en contexto intra-matemático y adecuado según en significado institucional de las funciones (de acuerdo al sílabo).
- Conocimiento ampliado: el docente no hace explícitamente conexiones con otros temas más avanzados.

En general, el conocimiento común del docente es satisfactorio y se presenta de forma ordenada. El conocimiento ampliado es muy limitado.

Conclusiones

Con el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) se pudo obtener de manera ordenada y precisa un panorama general del conocimiento didáctico y matemático del docente en estudio, con respecto a las funciones. Con ello, se pudo conocer las fortalezas y debilidades en la gestión de la enseñanza aprendizaje en el tema de funciones. Así se posibilita la mejora integral de la idoneidad didáctica del docente para potenciar o mejorar el desenvolvimiento de la práctica de los docentes en la enseñanza-aprendizaje de las funciones o en cualquier tema matemático específico.

Referencias bibliográficas

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1997). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education, II. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld y E. Dubinsky (Eds.) CBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1-32.

Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education.

Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa*, *8*(1), 67-98.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39(1), 127-135

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. Iberoamericana de educación matemática, 20, 3-31.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME).* Recife, Brasil.

Pino-Fan, L., y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA, 36*(1), 87-109.

Quintanilla, C. (2009). Un estudio sobre las concepciones del concepto de función desde la perspectiva de la teoría APOS. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú.

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

DISCALCULIA E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA: UM ESTUDO DE CASO PARA POSSÍVEIS INTERVENÇÕES PEDAGÓGICAS

Mônica Aparecida da Silva, Eulina Coutinho Silva do Nascimento, Sandra Maria Nascimento de Mattos
CIEP Brizolão 428 Dona Mariana Coelho Municipalizado. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Universidade Aberta do Brasil. (Brasil)
nikitasilva2013@gmail.com, eulina@lncc.br, smnmattos@gmail.com

Resumo
Investigou-se um transtorno de aprendizagem em matemática, de ordem neuropsicológica, chamado Discalculia. A pesquisa foi aplicada e descritiva, tendo uma abordagem qualitativa, através de um levantamento bibliográfico sobre este transtorno e um estudo de caso com um aluno do Ensino Fundamental diagnosticado com Discalculia, realizado em encontros semanais. O objetivo foi detectar as dificuldades apresentadas por este aluno, analisando possíveis avanços na aprendizagem após intervenções pedagógicas. Foi feita uma avaliação diagnóstica, para verificar os pré-requisitos apresentados pelo aluno, tendo como foco números e operações.. Foram realizadas atividades lúdicas, com materiais concretos e resolução de questões. Foi realizada uma avaliação final para análise do desenvolvimento do aluno. A pesquisa permite concluir que intervenções pedagógicas associadas a todo um trabalho envolvendo escola e família trazem resultados satisfatórios na aprendizagem.

Palavras chave: discalculia, intervenções pedagógicas, educação especial

Abstract
We investigated a neuropsychological learning disorder in mathematics, called Dyscalculia. This research was applied and described with a qualitative approach through a bibliographic review on this type of disorder and a case study with a primary- school student who had been diagnosed with Dyscalculia. It was carried out in weekly meetings. The objective was to detect the difficulties presented by this student, analyzing possible advances in learning after pedagogical interventions. A diagnostic test was applied to verify the prerequisites presented by the student with respect to numbers and operations. Playful activities were carried out, with specific materials and problem solving situations. A progress test was made in order to analyze the student's development. The research allows us to conclude that pedagogical interventions associated with an entire work involving school and family, provide successful results in learning.

Key words: Dyscalculia, pedagogical interventions, special education

Introdução

Muitos alunos apresentam rendimento não satisfatório na disciplina de Matemática, o que muito preocupa os educadores. Uma análise dos motivos pelos quais os conteúdos e conceitos desta disciplina não são entendidos e aprendidos precisa ser realizada através da verificação das dificuldades de aprendizagem da Matemática apresentadas pelos alunos, as quais refletem na aprendizagem, no comportamento e no emocional de cada um. No âmbito dessas, destaca-se a Discalculia, que é um transtorno de aprendizagem de ordem neuropsicológica. Portanto, torna-se necessário analisar como alunos aprendem, as dificuldades encontradas por eles e algumas possibilidades de como o professor poderá interferir positivamente no processo de aprendizagem dos alunos discalcúlicos, buscando aplicar algumas atividades que visem o desenvolvimento do aluno, para que este sinta-se capaz de aprender dentro de suas limitações.

Desenvolver atividades e refletir como deve-se agir de modo a favorecer o desenvolvimento de alunos que apresentam Discalculia são objetos de estudo desta pesquisa realizada através da aplicação e análise de intervenções pedagógicas e identificação de prováveis habilidades e competências alcançadas por um aluno discalcúlico, analisando o possível desenvolvimento deste no processo de aprendizagem. Esta pesquisa se justifica pela contribuição aos professores no que diz respeito à informação sobre a Discalculia bem como oferecer estratégias e atividades que possam contribuir para o ensino e a aprendizagem de alunos discalcúlicos.

Referencial teórico

O professor, ao conhecer seu aluno, identificando suas dificuldades e os motivos pelos quais ele encontra-se desmotivado, deve utilizar essas informações em favor da construção do conhecimento, na busca de uma forma de cativá-lo e incentivá-lo a vencer os obstáculos encontrados no mundo da aprendizagem. Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino de Matemática alertam para a importância da aprendizagem: “[...] a Matemática pode e deve estar ao alcance de todos e a garantia de sua aprendizagem deve ser meta prioritária do trabalho docente [...]” (Brasil, 1998, p.56).

Um obstáculo à aprendizagem é a Discalculia. A palavra vem do grego (dis: mal) e do latim (calculare: contar) formando: contando mal. Campos escreveu “a Discalculia é denominada um transtorno de aprendizagem, ou seja, uma desordem, um conflito gerado a partir de uma emoção e/ou disfunção”. (Campos apud Borges, 2015, p.9).

Muitas das vezes as crianças discalcúlicas são taxadas como preguiçosas por se mostrarem desinteressadas pela aprendizagem, apresentando uma baixa auto-estima. De acordo com Ciasca “estima-se que 1% dos alunos em idade escolar têm transtorno matemático”. (Ciasca apud Peretti, 2009, p. 12).

Bastos diz “que entre 3 a 6% das crianças têm Discalculia do desenvolvimento. Sabemos que é um número bastante alto para o que observamos em sala de aula” (Bastos apud Peretti, 2009, p. 12).

Dentre os estudos sobre a Discalculia, verifica-se que este transtorno normalmente está associado a um problema neurológico.

> [...] ainda há um longo caminho a percorrer, pois são recentes os estudos sobre a Discalculia. Porém, segundo vários neurologistas, já se conhece que a região cerebral utilizada para as habilidades matemáticas é o lobo parietal, em ambos os hemisférios, juntamente com outras áreas do cérebro, como o lobo occipital, memória de trabalho visual, espacial e outros. Há cientistas que acreditam que pode haver associação com as lesões ao supramarginal e giro angular na junção entre os temporais e o lobo parietal do córtex cerebral. (CAMPOS, apud BORGES, 2015, p.12).

Como observamos nas palavras de Campos (2015) estas áreas podem ser identificadas na figura 1, corroborando as regiões envolvidas no processo de aprendizagem de matemática.

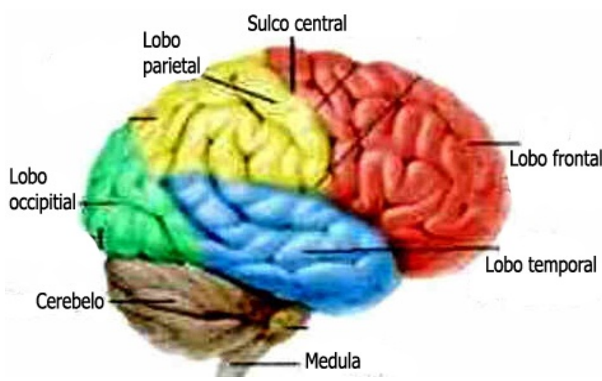


Figura 1. Cérebro e suas partes
Fonte: http://www.portalsaofrancisco.com.br/alfa/corpo-humano-sistema-nervoso/cerebro.php

E mais ainda, após observarmos as regiões na figura 1, constatamos que para Romagnoli (2008, p.24-25) as áreas afetadas, de acordo com o campo da neuropsicologia são:

- Áreas terciárias do hemisfério esquerdo que dificulta a leitura e compreensão dos problemas verbais, compreensão de conceitos matemáticos;
- Lobos frontais dificultando a realização de cálculos mentais rápidos, habilidade de solução de problemas e conceitualização abstrata.
- Áreas secundárias occípito-parietais esquerdos dificultando a discriminação visual de símbolos matemáticos escritos.
- Lobo temporal esquerdo dificultando memória de séries, realizações matemáticas básicas.

Dentre os estudos sobre a Discalculia, verifica-se que este transtorno normalmente está associado a um problema neurológico. Cosenza e Guerra reiteram: "Há necessidade sempre de uma avaliação neuropsicológica para o diagnóstico e orientação quanto às intervenções adequadas, mesmo porque a Discalculia pode vir acompanhada de outros transtornos, como déficit de atenção e a hiperatividade". (Cosenza & Guerra apud Borges, 2015, p.13).

A Discalculia pode ser classificada em discalculia verbal, practognóstica, léxica, gráfica, ideognóstica e operacional. Almeida (2006, p.4) apresenta tais classificações.

1. Discalculia verbal: dificuldades para nomear as quantidades matemáticas, os números, os termos, os símbolos e as relações.
2. Discalculia practognóstica: dificuldades para enumerar, comparar e manipular objetos reais ou em imagens matematicamente.
3. Discalculia léxica: dificuldades na leitura de símbolos matemáticos.
4. Discalculia gráfica: dificuldades na escrita de símbolos matemáticos.
5. Discalculia ideognóstica: dificuldades em fazer operações mentais e na compreensão

de conceitos matemáticos.
6. Discalculia operacional: dificuldades na execução de operações e cálculos numéricos.

Além dessa classificação a Discalculia tem níveis diferenciados. Consequentemente, pode ser considerada em três níveis, dependendo do grau de imaturidade neurológica da criança.

- Leve: o discalcúlico reage favoravelmente à intervenção terapêutica.
- Médio: configura o quadro da maioria dos que apresentam dificuldades específicas em matemática.
- Limite: quando apresenta lesão neurológica, gerando algum déficit intelectual.
- As características mais comuns de um discalcúlico são, de acordo com orientações no Espaço Psico Envolver – Atendimento Pedagógico (como citado em Borges, 2015, p.9-10):

Lentidão extrema na realização das atividades aritméticas;
Dificuldades de orientação espacial;
Dificuldades para lidar com operações matemáticas (adição, divisão, subtração, multiplicação);
Dificuldade de memória de curto e longo prazo;
Dificuldades em seguir ordens ou informações simultaneamente;
Problemas com a coordenação motora fina, ampla e perceptivo-tátil;
Dificuldades em armazenar informações;
Confusões com símbolos matemáticos;
Dificuldades para entender o vocabulário que define operações matemáticas;
Dificuldades com a sequenciação numérica (antecessor/sucessor);
Problemas relativos à Dislexia (processamento de linguagem);
Incapacidade para montar operações;
Ausência de problemas fonológicos;
Dificuldades em estabelecer correspondência quantitativa (Exemplo: relacionar números de carteiras com números de alunos);
Dificuldades em relacionar grafemas matemáticos às respectivas quantidades;
Dificuldades em relacionar grafemas matemáticos aos seus símbolos auditivos;
Dificuldades com a contagem através de cardinais e ordinais;
Problemas em visualizar um conjunto dentro de um conjunto maior;
Dificuldades com a conservação de quantidades (Exemplo: 1 litro é o mesmo que 4 copos de 250 ml);
Dificuldades com princípios de medida.

O aluno discalcúlico pode apresentar algumas ou todas as características listadas, podendo também apresentar outras, visto que o processo de desenvolvimento depende das experiências vivenciadas e dos estímulos recebidos durante seu processo de aprendizagem.

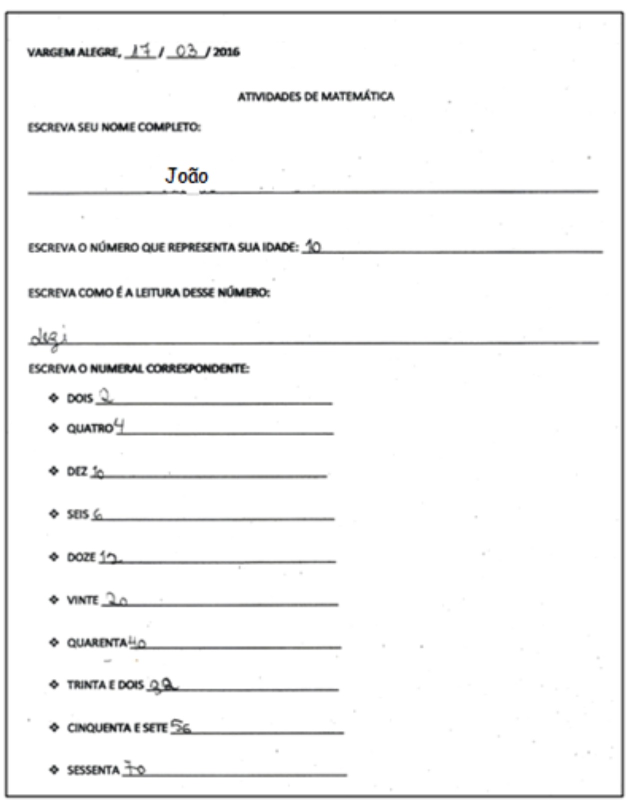
Metodologia

A pesquisa é aplicada e descritiva, tendo uma abordagem qualitativa, junto a um levantamento bibliográfico analisando estudos sobre a Discalculia. Foi realizado um estudo de caso com um aluno do

3° ano do Ensino Fundamental diagnosticado, de acordo com relatório médico, com Discalculia, Disgrafia (Distúrbio que ocorre na área da escrita: uma perturbação em relação ao traçado das letras e à disposição dos conjuntos gráficos no espaço, em muitas das vezes, não se consegue ler o que foi escrito) e Transtorno do Déficit de Atenção com Hiperatividade (TDAH: transtorno neurobiológico, de causas genéticas, que se caracteriza por sintomas de desatenção, inquietude e impulsividade.). Esse aluno é pertencente à Rede Municipal de Educação da cidade de Barra do Piraí no interior do estado do Rio de Janeiro, no Brasil. As atividades realizadas nesta pesquisa foram iniciadas através de uma avaliação diagnóstica, para verificar os pré-requisitos apresentados pelo aluno. Foram realizados jogos, atividades lúdicas, alguns com materiais concretos, testes, resolução de questões, os quais foram pesquisados e elaborados a partir de pesquisas em trabalhos publicados sobre o assunto. Além dos registros diários, foi realizada uma avaliação final para análise do desenvolvimento do aluno pesquisado. Foram realizadas entrevistas com as pessoas próximas ao aluno, tais como sua mãe e professoras.

Foram realizados dez encontros semanais com o aluno, os quais tinham a duração de uma hora e trinta minutos em média. É essencial mencionar que os conteúdos trabalhados com João (nome fictício) estavam sempre de acordo com as informações fornecidas pela professora de sua turma, realizando um trabalho conjunto.

Em conformidade com este aspecto e segundo a figura 2, no primeiro encontro, o objetivo foi verificar os conhecimentos em matemática já adquiridos: avaliar leitura e entendimento aos comandos das atividades, identificar símbolos (algarismos, sinais de adição, subtração e multiplicação), sequência numérica, e operações básicas: adição, subtração e multiplicação.


VARGEM ALEGRE, 17 / 03 / 2016

ATIVIDADES DE MATEMÁTICA

ESCREVA SEU NOME COMPLETO:

João

ESCREVA O NÚMERO QUE REPRESENTA SUA IDADE: 10

ESCREVA COMO É A LEITURA DESSE NÚMERO:

dezi

ESCREVA O NUMERAL CORRESPONDENTE:

- DOIS 2
- QUATRO 4
- DEZ 10
- SEIS 6
- DOZE 12
- VINTE 20
- QUARENTA 40
- TRINTA E DOIS 22
- CINQUENTA E SETE 56
- SESSENTA 70

Figura 2. Atividade realizada no primeiro encontro. Fonte: As autoras

O aluno necessitou de auxílio para a leitura e interpretação das questões: nome completo e idade (com escrita numérica e por extenso), escrevendo por extenso o numeral 10 da forma “dezi”. Foi pedido que conferisse as respostas e este confirmou que estava pronto. Em seguida, a atividade a ser realizada seria a leitura de dez numerais por extenso com a correta escrita por algarismos, e foi observado que ele fez a relação correta entre eles.

Em outros encontros, foram propostas atividades com situações-problema simples. O aluno efetuou a leitura quase silabando, sempre havendo a necessidade de ler novamente para o entendimento. Observou-se que o aluno realiza as atividades de leitura fixando-se em palavras chave, atentando para os numerais encontrados e efetua a operação.

Com o objetivo de realizar atividades que estimulem a habilidade de comparação e identificação de sutis diferenças entre imagens, foram realizados “Jogos das Diferenças” nos quais duas figuras são fornecidas, sendo que a segunda apresenta falta de alguns detalhes em relação à primeira. Os jogos oferecidos no decorrer dos encontros apresentavam aumento gradativo de detalhes.

Em uma das tarefas realizadas, João deveria efetuar cálculos com reserva, utilizando colunas de contagem: foi entregue ao aluno três envelopes, cada qual continha tiras com a inicial da casa a qual pertencia: centenas – C; dezenas – D; Unidades – U.

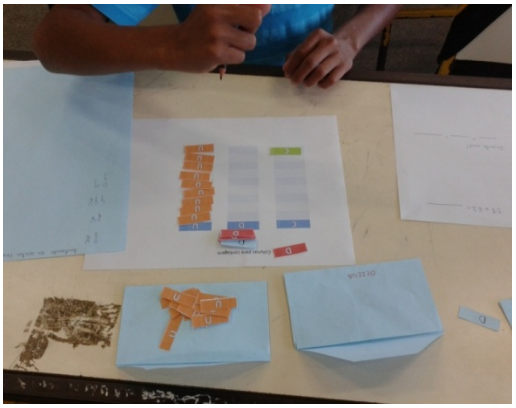


Figura 3. Atividade de cálculos com reserva. Fonte: As autoras

O aluno deveria representar o algoritmo dado em algumas contas e pôr no quadro, em que havia três colunas, cada uma com nove espaços nos quais as tiras deveriam ser colocadas de acordo com o número da conta a ser efetuada, de tal forma que quando havia dez tiras, a letra representativa da ordem ficaria coberta e estas deveriam ser trocadas por uma da ordem imediatamente posterior.

Resultados

A partir das observações das atividades realizadas, das atitudes das professoras e da família perante às dificuldades do aluno, verificou-se que ele apresentou um grande avanço em sua aprendizagem. Antes, ele era um aluno tímido, fechado sentando sempre nas últimas carteiras, sem autonomia, sendo considerado como uma criança de baixo rendimento escolar.

Acredita-se que a junção de várias ações, começando com a procura de atendimento médico, acompanhamento da família, o olhar diferenciado da professora buscando elevar sua autoestima e as atividades práticas desenvolvidas nesta pesquisa foram os responsáveis pelas mudanças positivas do aluno e melhora na sua aprendizagem.

O interesse em aprender é peça chave para o desenvolvimento do estudante. Realizando as atividades, observou-se que o aluno apresentou vontade em realizá-las, perguntando quando não entendia e tentando concluí-las corretamente, o que antes não acontecia segundo relatos das professoras.

Conclusões

Com o levantamento bibliográfico realizado, foi possível conhecer mais sobre a Discalculia e verificou-se o quanto é importante o professor buscar informações para procurar entender o aluno como um ser global.

Com o estudo de caso, pode-se verificar a importância de trabalhar a auto estima de um aluno que apresenta diversas dificuldades e que a olhos de muitos é considerado um "aluno problema", sem possibilidade de apresentar avanços. Através da pesquisa realizada, também se observou que o aluno discalcúlico possui características próprias para aprender, que essas peculiaridades devem ser entendidas e suas dificuldades consideradas como ponto de partida para a vitória sobre os obstáculos encontrados. A união da família, escola e profissional da área de saúde são fundamentais para promover ações e situações nas quais esse aluno possa sentir-se capaz de vencer, aprender e sentir-se valorizado, elevando sua autoestima.

Referências bibliográficas

Almeida, C. S. de. (2006). *Dificuldades de aprendizagem em Matemática e a percepção dos professores em relação a fatores associados ao insucesso nesta área*. UCB: Universidade Católica de Brasília. Disponível em: http://www.ucb.br/sites/100/103/tcc/12006/cinthiasoaresdealmeida.pdf.

Borges, M. J. G. (2015). *Discalculia e a Aprendizagem Em Matemática: Um Estudo de Caso com estudante do 4º Ano do Ensino Fundamental*. (Monografia, Universidade de Brasília). Disponível em http://bdm.unb.br/handle/10483/11129.

Brasil. (1998). *Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC.148p. Disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf

Peretti, L. (2009). *Discalculia – Transtorno de Aprendizagem*. Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Matemática, Departamento de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões – URI. Erechim. Brasil

Romagnoli, G. C. (2008). *Discalculia: um desafio na matemática*. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) CRDA, São Paulo. Brasil. 39p. Disponível em: http://www.crda.com.br/tccdoc/13.pdf.

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

INFLUENCIA DEL NIVEL DEL RAZONAMIENTO LÓGICO EN LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA HISTÓRICO: IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA

Juventino Martínez Bret, Josip Slisko Ignjatov, Honorina Ruiz Estrada
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas – BUAP. (México)
juve.mbret@gmail.com, josipslisko47@gmail.com, hruizestrada@gmail.com

Resumen
El presente trabajo reporta los resultados obtenidos de una investigación realizada con estudiantes de preparatoria entre 16 y 17 años de edad. La metodología implementada consistió en la aplicación de una versión del problema histórico, conocido como “las cien aves de corral”, que surgió en China, entorno al siglo V. Las soluciones obtenidas de este problema se correlacionan con los resultados previos logrados en el "Test de razonamiento lógico" (ToLT, por sus siglas en inglés) en su versión al castellano. La investigación hace evidente que la solución exitosa de problemas matemáticos se ve influida positivamente o negativamente por el nivel de razonamiento lógico de los estudiantes. El análisis de los resultados revela que las mejores estrategias para resolver el problema las presentaron los alumnos con un desempeño por encima del promedio del ToLT. Esto sugiere la necesidad de diseñar actividades de aprendizaje que promueven el desarrollo de las habilidades de pensamiento lógico, como requisito para la resolución exitosa de problemas de matemáticas en la preparatoria.

Palabras clave: resolución de problemas matemáticos, razonamiento lógico

Abstract
This paper reports the resulting findings of a research carried out with high school students aged between sixteen-and-seventeen years. The methodology used consisted on implementing a version of the historical problem known as “the one hundred poultry” which had its origin in China around the fifth century. Student’s answers to this problem were correlated to those previously obtained in the Spanish version of the Test of Logical Thinking (ToLT). The research shows that the students' level of logical thinking influences positively or negatively on successful mathematical problem solving. The analysis of the outcomes reveals that the most suitable strategies to solve the problem were presented by the students with an achievement over the average in the ToLT. This suggests the need to design learning activities which foster the development of logical thinking skills as an essential requirement for successful mathematical problem solving in high school.
*La investigación forma parte del proyecto “Aprendizaje activo de la física y de las matemáticas: El diseño y la implementación de actividades y posibles predictores del desempeño estudiantil” financiado por la VIEP de la BUAP en el año 2017.

Key words: resolution of mathematical problems, logical thinking

Planteamiento del problema

El aprendizaje de las matemáticas es una actividad fundamental de la educación en cualquier etapa escolar. Esto ha llevado a dirigir la atención hacia el proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas, considerado de gran importancia ya que mediante este método de aprendizaje se busca que los estudiantes desarrollen habilidades y destrezas y que valoren la utilidad de la matemática en un entorno cotidiano.

Al primer coautor le gustaría mencionar algo de su propia experiencia. Recuerda que en sus primeras etapas escolares, los profesores ponían un énfasis esencial en los cálculos, operaciones y algoritmos, en el uso de "recetas" en lugar de propiedades, para resolver problemas que siempre tienen solución única. Durante mucho tiempo, el creía que así debía ser el aprendizaje y enseñanza de la matemática, lineal y casi sin sentido.

Sin embargo, se insistía que esto tenía que ver con el desarrollo del razonamiento lógico-matemático del aprendizaje y que su desarrollo es fundamental para la siguiente etapa escolar. Este modelo, que se ha repetido de generación en generación, había hecho de él un profesor dogmático, sin la capacidad de cuestionar qué hay atrás o cómo es que surgen los objetos matemáticos que se mencionan en las clases. Esa visión cambió.

La población de estudio de esta investigación da muestra de poseer conocimientos procedimentales para resolver los problemas algorítmicos rutinarios de matemáticas. Sin embargo, cuando se enfrentan a un problema que describe una situación real o hipotética con un determinado conflicto cognitivo, la mayoría manifiesta dificultades para comprender los datos relevantes, las variables involucradas en el problema o los requerimientos del mismo.

"La resolución de problemas ha sido considerada desde siempre como el foco en las matemáticas" (Arcavi y Friedlander, 2007). En este punto en conveniente esclarecer, ¿qué es un problema? En esta investigación, "se afirma la existencia de un problema cuando la situación a resolver no es familiar para el alumno" (Contreras, 1985, citado en Contreras, 1987, p. 50). Acerca de la resolución de problemas, Contreras (1987) afirma que:

> La resolución de problemas no sólo pretende dotar al individuo de unos conocimientos fundamentales desde el punto de vista epistemológico y social mediante el redescubrimiento de los mismos, sino que también y fundamentalmente intenta que el alumno adquiera unos códigos ordenados de conducta, unos esquemas de comportamiento suficientes para poder desenvolverse en cualquier situación normal de la vida diaria (Contreras, 1987 p. 50).

¿Cómo utilizar la historia de las matemáticas en la enseñanza?

"Incluir la historia en la enseñanza de la matemática provee una oportunidad para desarrollar nuestra visión de lo que es realmente la matemática y que nos permite tener una mejor comprensión de conceptos y teorías" (Barbin et al., 2000). En otras palabras, se espera que estudiantes y docentes entiendan mejor los conceptos teóricos al conocer la forma en que estos surgieron en la historia.

La percepción hacia la matemática cambiará en la medida en que docentes y estudiantes pueden "contextualizarla y humanizarla" (Zapico, s.f.). En el mismo sentido Martínez y Chavarría (2012) afirman que:

> La matemática se muestra como producto de la actividad humana, generada a partir de diferentes necesidades a través de muchos siglos de civilización. Al presentar a los creadores de una disciplina ésta se humaniza. Si se muestra la forma en que los conceptos matemáticos se fueron desarrollando, incluyendo errores en los que incurrieron sus creadores, mostrándolos así con sus imperfecciones humanas, deja de percibirse como un ente abstracto, impuesto rígidamente en el currículo, y comienza a vislumbrarse más como una herramienta utilizada desde el comienzo de la humanidad para resolver problemas y situaciones (Martínez y Chavarría, 2012, p. 3).

Hasta este punto se ha evidenciado la necesidad de utilizar la historia de las matemáticas. No obstante, surge la duda de cómo hacer uso de esta herramienta en el ambiente educativo. Los problemas históricos proporcionan un modo de satisfacer esta necesidad. Son numerosos y están disponibles. En ellos no solo encontramos un tratamiento para la mayoría de las cuestiones matemáticas, sino que sus propias características los hacen atractivos para utilizarlos en clase. Frank J. Swetz, en su publicación: "La aventura de los problemas matemáticos a través de la historia" (2014), afirma que:

> Los problemas históricos son un valioso recurso didáctico, en la enseñanza de las matemáticas. Este tipo de materiales son adecuados para las necesidades de los profesores y alumnos de secundaria; pero considerar estos problemas y sus implicaciones también resultan beneficioso para aquellos universitarios que estudien matemáticas generales o historia de las matemáticas (Swetz, 2014, p. 8).

El mismo autor menciona que estos problemas proporcionan al lector detalles sobre cómo era la vida de las personas en la época en la cual fueron escritos. Las escenas, el entorno histórico y las situaciones descritas en los problemas proporcionan intriga y añaden motivación para los estudiantes.

> De la misma forma, la historia contribuye al desarrollo de razonamiento lógico matemático, dado que expone la forma en la cual los científicos y matemáticos desarrollaron las distintas teorías, partiendo de los problemas a los que se enfrentaron y las soluciones brindadas en ese momento, así como los errores cometidos en el camino para llegar a la solución deseada. A partir de este análisis, los estudiantes pueden evidenciar la naturaleza de un sistema axiomático y los razonamientos lógicos, así como los mecanismos de demostración, sin dejar de lado la riqueza que esto representa para el docente, pues se pueden prever los posibles obstáculos en la construcción del conocimiento matemático y establecer las estrategias necesarias para su superación (Martínez *et al.* 2012).

Considerando lo anterior, nuestra pregunta de investigación es la siguiente:

¿Influye el nivel del razonamiento lógico en la resolución de un problema matemático con raíces históricos?

Metodología implementada

Para esta investigación tipo “papel y lápiz” se seleccionó un problema histórico conocido originalmente como “las cien aves de corral”. De acuerdo con (Gómez, 2016), este problema surgió en China, en el siglo V y ha tenido diversas formulaciones a lo largo de la historia. Una de estas formulaciones fue incluida en la colección medieval de problemas titulada: “Propositiones ad acuendos juvenes” de Alcuino de York (782).

> Cierto paterfamilias disponía de 20 sirvientes. Ordenó que les fueran repartidos 20 modios de maíz del siguiente modo: que los hombres recibieran tres modios, las mujeres dos y los niños medio modio. Diga, quién pueda, ¿cuántos hombres, cuántas mujeres y cuántos niños debe haber? (Alcuino, 804, p. 1154).

En su obra Alcuino menciona que la solución es 1 hombre, 5 mujeres y 14 niños. Sin embargo, no hay ningún tipo de indicación o pista de cómo ha obtenido dicha solución. “Dada la época en la que fue escrita la obra, es poco probable que estuviera familiarizado con técnicas algebraicas hemos de suponer que –de existir- el método utilizado hubo de ser puramente aritmético de ensayo y error” (Oller, 2014, p. 24).

La formulación que se aplicó en esta investigación es una versión cuya estructura es similar a la de Alcuino. La diferencia radica en que las cantidades que reciben los niños y los hombres. Tal propuesta más reciente se encuentra publicada en varias páginas de internet cuya principal intención es divulgar problemas con un determinado conflicto cognitivo bajo la denominación de “acertijos matemáticos”. La formulación del problema es la siguiente:

Problema “Reparto de maíz”

El jefe de una tribu tiene 20 kilos de maíz para repartir entre sus 20 vecinos y decide hacerlo de la siguiente manera:
A cada uno de los niños le dará 3 kilos de maíz.
A cada una de las mujeres las dará dos kilos de maíz.
A cada uno de los hombres le dará medio kilo de maíz.
Sabiendo que al menos hay un niño, una mujer y un hombre y que repartió todo el maíz sin que sobrara ni faltara nada, ¿cuántos niños, mujeres y hombres hay?

Una de las páginas donde podemos encontrar este problema con raíces históricos es: http://adivinanzayacertijo.blogspot.mx/2017/03/acertijo-de-sam-loyd-martin-gardner-fue.html

La población involucrada consistió de 68 alumnos de preparatoria, en su mayoría hijos de campesinos y agricultores. La escuela, en que se realizó este estudio, está ubicada en el municipio de Tecamachalco, Puebla, México.

La Prueba de Razonamiento Lógico ToLT (por sus siglas en inglés), “ha sido usado en numerosos estudios con alumnos de secundaria, preuniversitarios y universitarios en varios países” (Tobin, 1988). Esta prueba en su versión al castellano fue aplicada de manera inicial a la población de estudio.

El ToLT consiste en un cuestionario de diez tareas de lápiz y papel, dos por cada uno se los siguientes esquemas de razonamiento: Proporcionalidad, control de variables, probabilidad, correlación y operaciones combinatorias. Las ocho primeras constituyen cuestiones de dos niveles –respuesta explicación– diseñadas con un formato de opción múltiple tanto en lo que se refiere a la respuesta como a su correspondiente justificación. Las dos últimas preguntas, referentes a combinaciones y permutaciones, son de respuesta abierta semiestructurada. Los sujetos disponen de un total de treinta y ocho minutos para la realización de la prueba (Acevedo y Oliva, 1996).

Los resultados de esta prueba se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Resultados de la prueba ToLT

Número de aciertos	Número de alumnos	Categorías
0	5	**36 alumnos por debajo del promedio**
1	10	
2	10	
13	11	
4	14	**32 alumnos por encima del promedio**
5	12	
6	3	
7	0	
8	3	
9	0	
10	0	
Promedio	P = 3.29	68

Nota: Resultados de la prueba ToLT, aplicada a una población de 68 alumnos de nivel preparatoria

Con respecto al nivel del razonamiento lógico que mide esta prueba, se identificaron dos categorías de la población de estudiantes que participo en la investigación: los que se ubicaron por encima del promedio (3.29) y los que están por debajo de este promedio, que de acuerdo a la tabla 1, son 32 y 36 alumnos respectivamente.

Este resultado es un elemento de entrada que determinó en nivel de razonamiento lógico en la población de estudio.

Análisis de los resultados

Los resultados, que se obtuvieron tras la aplicación del problema histórico “Reparto de maíz” y su relación con la categorización que definió la prueba ToLT, se encuentran en la Tabla 2.

Tabla 2. Categoría de respuestas del problema histórico "Reparto de maíz"

Tipos de solución "Reparto de maíz"	**Nivel del razonamiento lógico ToLT**	
	Por debajo del P	Por encima del P
Tipo1. Analizan desde la cantidad mínima de personas y la cantidad mínima de maíz que puede haber para repartir el sobrante entre hombres y mujeres. Presentan procedimiento claro en sus justificaciones.	6 alumnos (17%)	16 alumnos (50%)
Tipo 2. Encuentran la solución del problema por tanteo. No es clara la justificación del mismo.	13 alumnos (36%)	11 alumnos (34%)
Tipo 3. La respuesta que proporcionan no se ajusta a los requerimientos del problema.	17 alumnos (47 %)	5 alumnos (16%)
	36 alumnos	**32 alumnos**

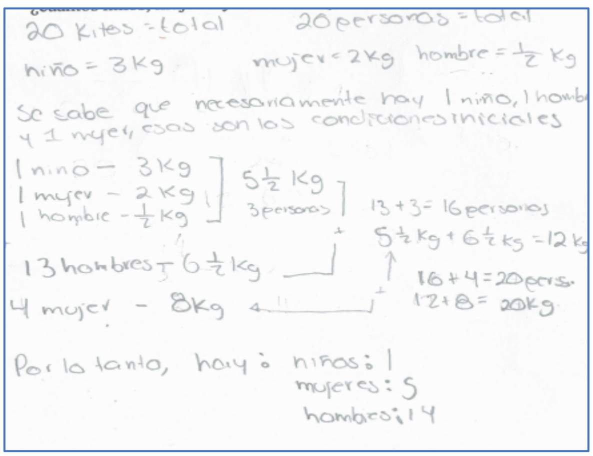


Figura 1. Ejemplo de solución tipo 1, primer caso

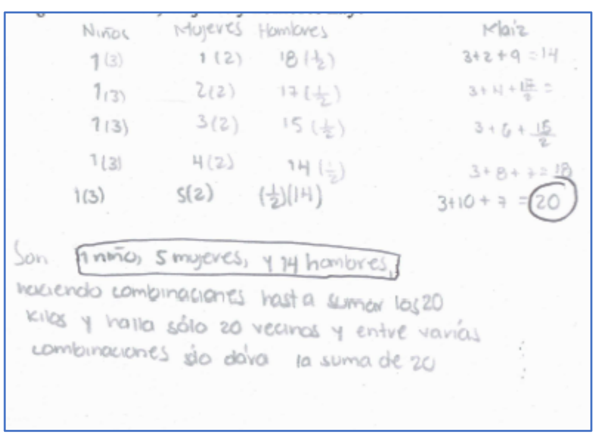


Figura 2. Ejemplo de solución tipo 1, segundo caso

En la solución del Tipo 1 (Figura 1), consideramos dos casos: en el primero, los estudiantes resuelven el problema utilizan el hecho de que al menos hay un niño, un hombre y una mujer. A partir de esto, determinan que 5½ kg es la cantidad mínima de maíz que se repartirá. Luego observan que cualquier combinación de los tres personajes proporciona reparto inexacto de los 20 kg. Y como el enunciado del problema indica que se reparte de manera exacta, concluyen de que para completar 20 kg es necesario 13 hombres y 4 mujeres más. De esta forma se cumple lo solicitado en el problema quedando como solución: 1 niño, 5 mujeres y 14 hombres.

El segundo caso (Figura 2), la solución consiste en la elaboración de una tabla que inicia en el primer renglón con la cantidad mínima de personas, posteriormente se suma la cantidad de maíz tratando de no superar los 20 kg. Posteriormente se hacen algunas combinaciones, hasta que se encuentra la respuesta. Las tablas elaboradas en este tipo de solución son semejantes.

De acuerdo con los resultados que se muestran en la Tabla 2, se tiene que el 50% de los alumnos con el razonamiento por encima de promedio, resolvieron el problema, evidenciando justificaciones razonadas en la solución, mientras que, solamente un 17% de alumnos con razonamiento lógico por debajo del promedio mostraron un comportamiento similar. Por otro lado, las respuestas de poca claridad matemática lo ofrecieron el 47 % de los alumnos por debajo del promedio y solamente 16 % de los alumnos por encima del promedio del ToLT.

Conclusiones

El análisis de los resultados revela que el nivel de razonamiento lógico de la población influyó directamente en la solución del problema histórico cuyo conflicto cognitivo no es rutinario en las clases de matemáticas.

En general, se puede afirmar que los resultados de la prueba ToLT fueron predictores adecuados para el desempeño en la resolución del problema histórico para nuestra población de estudio.

Los resultados de la investigación apoyan la posibilidad de incluir problemas históricos como una herramienta didáctica para mejorar el nivel de razonamiento lógico en la enseñanza de las matemáticas de preparatoria

Referencias bibliográficas

Acertijos y adivinanzas. (sf). Recuperado el 5 de enero de 2017 de http://adivinanzayacertijo.blogspot.mx/2017/03/acertijo-de-sam-loyd-martin-gardner-fue.html

Acevedo, J. y Oliva, J. M. (1995). Validación y aplicación de un test de razonamiento lógico. *Revista de Psicología General y Aplicaciones, 48*(3), 339-351.

Alcuino (1863). Propositiones ad acuendos juvenes. En J. P. Migne (Ed.), *Patrologiae cursus completus: patrologiae latinae*, *101*(1), 1143-1160.

Arcavi, A. & Friedlander, A. (2007). Curriculum developers and problem solving: the case of Israeli elementary school projects. *ZDM The International Journal on Mathematics Education,* 39, 5-6, pp. 355-364.

Barbin, E., Bagni, G., Grugnetti, L., Kronfellner, M., Lakoma, E. & Menghini, M. (2000). Integrating history: research perspectives. En Fauvel, J. & Van Maanen, J. (Ed.), *History in mathematics education* (pp. 63 – 77). Paises Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Contreras, A. (1985). La resolución de problemas de geometría elemental. I Jornadas Andaluzas de Profesores de Matemáticas de Escuelas de Magisterio. *Almería.*

Contreras G., Luis C. (1987) La Resolución de Problemas ¿Una panacea metodológica? *En: Enseñanza de las ciencias*, 5(1), 49 – 52.

Gómez, B. (2016). Problemas descriptivos y pensamiento numérico: el caso de las cien aves de corral. *Pna*, *10*(3), 218-241. en la enseñanza de la matemática. En M. Martínez y J. Chavarría (Ed.), Festival internacional de matemática (pp. 1- 5) Liberia, Costa Rica.

Oller M. (2014). Los curiosos problemas de mezclas de Alcuino de York, *Revista de investigation MAIC, 4(1), 17-32.*

Swetz, F. J. (2014) *Expediciones matemáticas. La aventura de los problemas matemáticos a través de la historia* (José Migual Parra, trad.). Madrid, España: La esfera de los libros.

Zapico, I. (s.f.). Enseñar matemática con su historia. Recuperado el 25 de junio de 2017 de http://soarem.org.ar/Documentos/29%20Zapico.pdf

TRATAMIENTO DEL ANÁLISIS DE FUNCIONES EN EL BACHILLERATO, PROPUESTA DE UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA

Noé Oswaldo Cabañas Ramírez, Edgardo Locia Espinoza, Armando Morales Carballo
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
noe_ocr@hotmail.com, lociae999@hotmail.com, armando280@hotmail.com

Resumen
El proceso enseñanza-aprendizaje de la educación en México, establece que sean desarrollados los conocimientos en los alumnos. Esto nos motiva a buscar alternativas, que respondan a los requerimientos postulados en la reforma educativa y que dichas alternativas contribuyan a mejorar estos procesos de la matemática del nivel medio y superior. En este trabajo, se presentan los avances de investigación cuyo objetivo es elaborar y poner en funcionamiento una ingeniería didáctica para el tratamiento de un contenido específico de las matemáticas del bachillerato: el análisis de funciones; a través, de un sistema de actividades según las etapas descritas por la metodología.

Palabras clave: análisis de funciones, teoría de situaciones didácticas, transposición didáctica, ingeniería didáctica, contraejemplos

Abstract
The teaching-learning process of education in Mexico establishes that students' knowledge should be developed. It motivates us to look for alternatives that respond to the requirements stated in the educational reform and contribute to improve mathematical processes at the middle and higher levels of education. In this paper, we show the progress of the research, which aims to elaborate and put into practice a didactic engineering for the treatment of a specific content of middle high school mathematics: the analysis of functions through a system of activities according to the stages described in the methodology.

Keywords: counter-examples, analysis of functions, didactic situation theory, didactic transposition, didactic engineering

Introducción

En la actualidad, las matemáticas se consideran como una de las disciplinas científicas que mayores problemas presenta sobre su enseñanza y aprendizaje; esto ha motivado el desarrollo de diversas investigaciones con la finalidad de incidir con propuestas que contribuyan a la mejora de estas situaciones (Sánchez-Matamoros, García, & Llinares 2008).

Particularmente en México, los problemas sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se identifican desde el nivel básico a superior. De acuerdo con diversos autores dichos problemas se presentan en la interpretación y construcción de los conceptos básicos del cálculo tales como: crecimiento y decrecimiento de una función, máximos y mínimos, entre otros; además, hemos detectado que en los alumnos esta problemática ha tenido sus consecuencias: ha generado rezago, reprobación y como consecuencia un incremento en la deserción escolar en los niveles medio superior y superior.

La presente investigación, se centra en los procesos de enseñanza y aprendizaje del contenido del análisis de funciones que es propuesto en los planes y programas de estudio del nivel medio y superior. Entenderemos como análisis de funciones al sentido de variación, crecimiento y decrecimiento de una función, los intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión, asíntotas verticales, horizontales u oblicuas; determinación de máximos o mínimos, entre otros. (Swokowski, 1982; Leithold, 1992).

Los referentes teóricos y metodológicos sobre los que se sustenta nuestra investigación, recaen principalmente en: la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau, (1978); la Teoría de la Transposición Didáctica (TTD) de Chevallard, (1980) y la Ingeniería Didáctica (ID) de Artigue, (1995); dentro de ella, se identificará el papel que juega el contraejemplo y el debate científico como herramienta de apoyo en el proceso de construcción y tratamiento de tal contenido.

Planteamiento del problema

Del análisis realizado a: tesis, artículos de revistas, planes y programas de estudio y libros de texto, se puede identificar que la educación media superior en México presenta inconsistencias para el desarrollo del aprendizaje de las matemáticas; derivado de no hacer alusión al desarrollo del razonamiento matemático, a la construcción de conjeturas, la utilización de contraejemplos ni a los mecanismos de validación de los resultados que se aplican, dando pie a que el alumno aplique los procedimientos de manera mecánica y memorística.

El estudio sobre el análisis de las funciones es un tema central en los programas de bachillerato. Es un aprendizaje de largo aliento en el cual los alumnos encuentran muchos obstáculos y dificultades. Por ello es que podemos determinar que, si bien en los alumnos se presentan serias dificultades en la construcción del concepto de función (Engler, A., Vrancken, S. & Müller, D., 2003), en los profesores también existen deficiencias tanto en su comprensión, como en la transmisión de este conocimiento (Cantoral, 2000; Rey Cabrera, 2016). Dado que la enseñanza del análisis de funciones es un tema de gran interés de contenido y sus conceptos, consideramos que debe ser subsanada esta deficiencia que se presenta tanto en el nivel medio como en el nivel superior.

Ejemplos de funciones se presentan desde la secundaria, como lecturas sobre gráficas, relaciones de proporcionalidad, entre otras. En bachillerato, se introduce el concepto general de función, analizando los elementos básicos de las funciones cuadráticas y trigonométricas; este aprendizaje se consolida y profundiza a lo largo de los estudios de matemáticas en el nivel medio superior y culmina con el análisis de la variación de las funciones, en el que se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función, la existencia de máximos o mínimos, los intervalos de concavidad o convexidad, la existencia de puntos de inflexión, asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

Indagación Bibliográfica

Si bien es cierto que los programas de estudio por los diversos subsistemas del Nivel Medio Superior (NMS) indican que debe desarrollarse el razonamiento matemático; en la realidad esto no se lleva a cabo y se considera que la situación general de la educación matemática en el país es crítica. Larrazolo, Backhoff &, Tirado (2013) respecto a esta situación determinaron que existe: “un planteamiento curricular desarticulado y excesivo en contenidos, desde el preescolar hasta el bachillerato”; además varios investigadores (Guzmán, 2006; Escorza, 2007; Fernández, 2009; Doval, 2014); entre otros, coinciden con ellos, referente a que los estudiantes en este nivel: “tienen un aprovechamiento sumamente bajo, no comprenden los conceptos básicos de matemáticas, no tienen las habilidades para solucionar problemas numéricos de mediana complejidad, y los conocimientos adquiridos se relacionan con la memorización de algoritmos”; proponen que el sistema educativo mexicano debe esforzarse para mejorar sustancialmente la educación matemática.

Algunos trabajos de investigación sobre el estudio de funciones que se reportan en (Valero, 2003; Sánchez-Matamoros, García, & Llinares, 2008; Benedicto, 2012; Russo, 2016); entre otros, documentan las dificultades a las que se enfrentan los alumnos en relación al estudio de las funciones, entre las que podemos citar las siguientes:

- Leer e interpretar un resultado sobre una gráfica.
- Dar sentido a la noción de derivada de una función en un punto y a su interpretación geométrica.
- Establecer el enlace entre las variaciones de una función y el signo de su derivada
- Estudiar el signo de una función derivada.
- Saber calcular la derivada de una función y de una función compuesta.
- Saber determinar el sentido de variación de una función con la ayuda de su derivada.
- Saber determinar un extremo de una función con la ayuda de su derivada.
- Saber escribir la ecuación de la tangente en un punto dado.
- Saber trazar la curva representativa de una función haciendo aparecer los objetos encontrados en el estudio de esta función (asíntotas, tangentes, máximos, mínimos,…)

Con el propósito de contribuir en la solución a la problemática detectada, consideraremos la implementación de una ID bajo los referentes teóricos mencionados y asumimos que, para lograr la transmisión de un conocimiento determinado, Brousseau plantea el diseño de Situaciones en donde se incluyan un conjunto de actividades que propicie la génesis ficticia de tal conocimiento. Estas actividades convertirán la clase en una micro-comunidad científica, en donde el conocimiento se construya a partir de formular ideas individuales o por equipo y validadas o cuestionadas a través del contraejemplo.

En este sentido consideraremos el contraejemplo como una herramienta didáctica preponderante en el desarrollo de consensos los cuales serán oficializados en la fase de la institucionalización de acuerdo a la TSD, ya que en investigaciones llevadas a cabo por (Morales, 2008; García & Morales, 2013; Klymchuk, 2012; Zazkis & Chernoff, 2008) coinciden entre otras cosas que el contraejemplo permite estimular el razonamiento en los estudiantes del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones, así como, disminuir los procedimientos memorísticos y algorítmicos de aprendizaje y permite avanzar en la estructuración de los razonamientos lógico-matemáticos necesarios en los estudiantes permitiendo la formación de un pensamiento crítico y analítico.

De tal manera que asumiremos la posición de Locia (2000), en el sentido de que en la enseñanza, muchos estudiantes e incluso profesores, no aprecian las diferencias entre argumentos empíricos y argumentos deductivos, tienen muchos problemas para aplicar correctamente definiciones, teoremas y fórmulas, confunden condiciones necesarias y condiciones suficientes, utilizan conclusiones no verificadas que a menudo resultan falsas.

Problema de investigación

Existen dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo en el nivel medio superior, sobre el contenido del análisis de funciones (Crecimiento y Decrecimiento de una función, Función Continua y Discontinua, Máximo y Mínimo).

Pregunta de investigación

¿Qué papel juega el contraejemplo en la estructuración y funcionamiento de una ingeniería didáctica para el tratamiento del análisis de las funciones en el bachillerato?

Objetivo de investigación

Elaborar y poner en funcionamiento una Ingeniería Didáctica para la enseñanza-aprendizaje del contenido relativo al análisis de las funciones (Crecimiento y Decrecimiento de una función, Máximos y Mínimos) en el nivel medio superior, en donde se revele el papel que juega el contraejemplo en el proceso de construcción y tratamiento de los conceptos principales asociados a esta temática.

Objetivos específicos

Descubrir las concepciones que tienen los alumnos y profesores del NMS, sobre la variación de funciones (crecimiento y decrecimiento de funciones, máximos y mínimos).

Poner en funcionamiento una ingeniería didáctica la cual permita contribuir en la solución de la problemática que se presenta en este tópico del Cálculo Diferencial.

Tareas Científicas

Como parte de la investigación y dar solución a la problemática planteada, nos hemos propuesto desarrollar las siguientes tareas científicas:

Búsqueda de información y puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica, la cual permita contribuir en la solución de la problemática que se presenta en la enseñanza-aprendizaje de este tópico del Cálculo Diferencial; así como, la revisión de fundamentos filosóficos, teóricos y metodológicos para el sustento de la investigación como son: tesis, artículos, documentales, libros, entre otros, que tratan sobre el tema del análisis de funciones.

Revisión del contenido matemático relativo al análisis de funciones, para identificar el nivel de tratamiento que debe hacerse en los Niveles Medio Superior y Superior, del cual se desprenderá la elaboración y aplicación de un test que permita identificar la problemática que se presenta en profesores y estudiantes del NMS, en relación al tema de investigación.

Por último, la elaboración, validación y experimentación de una Ingeniería Didáctica para el tratamiento del contenido de análisis de funciones en el Nivel Medio Superior.

Resultados de los avances

Considerando que la presente investigación se encuentra en una etapa inicial, nos permitimos presentar un avance de la investigación que se ha realizado a la fecha, por lo que reportamos lo siguiente:

Se han analizado los elementos teóricos y metodológicos que sustentan la investigación en proceso; además, se encuentra en proceso la elaboración de un test, con la finalidad de utilizarlo como un instrumento de exploración en profesores y alumnos del nivel medio superior, esto con el fin de obtener información que fortalezca la pertinencia del trabajo en desarrollo y por último nos encontramos en proceso del análisis de la bibliografía propuesta por los planes y programas de estudio; así como, libros de textos de otras editoriales. Se encuentra en proceso el análisis epistemológico, didáctico y cognitivo sobre el contenido de análisis de funciones.

Reflexiones y Conclusiones

Son escasas las investigaciones centradas en el estudio del contenido análisis de funciones que se han realizado en el campo de la matemática educativa, al menos en México.

De las investigaciones que se han revisado, se ha identificado dificultades en la lectura del comportamiento de gráficas asociadas a funciones en contextos dentro y fuera de la matemática, y con ello dificultades sobre conceptos básicos del cálculo y propiedades esenciales que permiten el estudio del análisis de funciones.

En la revisión de algunos textos clásicos del cálculo que son utilizados en los niveles medio y superior; que tratan el contenido de análisis de funciones, se ha identificado que en algunos casos se carece de rigor y formalidad de tratamiento, haciendo que el tratamiento intuitivo deje a un lado la atención de la parte conceptual y de propiedades relativas al tópico del análisis de funciones.

Con el fin de avanzar en el desarrollo de esta investigación se contemplan los siguientes puntos: Revisar el análisis del contenido matemático relativo a la variación de funciones, para identificar el nivel de tratamiento que debe hacerse en los Niveles Medio Superior y Superior. Elaboración, validación y experimentación de una Ingeniería Didáctica para el tratamiento del contenido de análisis de funciones en el Nivel Medio Superior y Superior.

Reflerencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En Gómez, P. (Ed.) *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp.

33-59). Bogotá, Colombia, Grupo Editorial Iberoamérica.

Benedicto, C. (2012). *Estudio de Funciones con Geogebra.* Tesis de maestría no publicada. Universidad de Valencia, España.

Brousseau, G. (1978), "La cours a 20", en *Theorie des situations didactiques* (1998) La Pensee Sauvage, pp. 24-43. Una primera version, de 1978, en Etude locale des processus d'acquisition en situation scolaire, Etude sur l'enseignement elementaire (Cuaderno 18,7-21). Bordeaux, IREM y Universidad de Bordeaux 1.

Cantoral, R. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Chevallard, Y. (1980). The didactics of mathematics: its problematic and related research. *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* 1, 146-157.

Doval, L. (2014). *Estudiando la composición de funciones de la forma f o g(x) con estudiantes de bachillerato usando diversas representaciones*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.

Engler, A., Vrancken, S. & Müller, D. (2003). La derivada: actividades que favorecen su comprensión. *Revista Novedades Educativas*. Año 15, Nº 146.

Escorza, A. (2007). *Estudio del desarrollo de programas de estudio de matemáticas para el nivel medio superior dentro del actual modelo educativo del IPN.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.

Fernández, J. (2009). *Unidad didáctica: límite y continuidad de funciones.* Tesis de maestría no publicada. Universidad de Granada, España.

García, O., & Morales, L. (2013). El contraejemplo como recurso didáctico en la enseñanza del Cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 35, pp. 161-175.

Klymchuk, S. (2012). Counterexamples in calculus. Mathematics teaching-research journal online, 5(4), 1-30.

Larrazolo, Backhoff & Tirado (2013). Habilidades de razonamiento matemático de estudiantes de educación media superior en México. *Revista Multidisciplinar en Investigación Educativa,* 18 (59), pp. 1137-1163.

Leithold, L. (1992). *El cálculo con Geometría Analítica.* México: Harla.

Locia, E. (2000). *Les contre – exemples dans l`enseignement des mathèmatiques*. (Tesis Doctoral), Universidad Paul Sabatier. Touluse, Francia.

Morales, A. (2008). *El papel que juega el contraejemplo en la construcción de las definiciones en matemáticas: el caso de la función convexa.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación en Matemática Educativa de la UAGro, México.

Rey Cabrera, M. (2016). *Propuesta didáctica para la formación del profesorado: el caso de la derivada como herramienta de modelización matemática*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Russo, C. (2016). *Diseño de una secuencia didáctica para el estudio del concepto de función utilizando software de geometría dinámica*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Sánchez-Matamoros, G.; García, M. & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 11 (002), pp. 267-296.

Swokowski, E. (1982). *Cálculo con Geometría Analítica.* EEUU: Wadsworth Internacional Iberoamérica.

Valero, S. (2003). *Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en situación escolar.* Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Zazkis, R., & Chernoff, E.J. (2008). What makes a counterexample exemplary?. *Educational Studies in Mathematics*, 68, 195-208.

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

LAS RELACIONES INTRADISCIPLINARIAS EN EL CURRÍCULO DE LA CARRERA INGENIERÍA EN CIENCIAS INFORMÁTICAS: UNA VISIÓN DESDE EL ÁLGEBRA LINEAL

Anelys Vargas Ricardo, Ivonne Burguet Lago, Luis Enrique Lezcano Rodríguez, Mayra Durán Benejam
Universidad de las Ciencias Informáticas. Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona. (Cuba)
anelys@uci.cu, iburguet@uci.cu, mayra@uci.cu, luiselr@ucpejv.edu.cu

Resumen
La disciplina Matemática, del currículo de la carrera de Ingeniería en Ciencias Informáticas, está compuesta por siete asignaturas. Entre las deficiencias detectadas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de dicha disciplina se evidencian: el poco énfasis en la relación que existe entre sus siete asignaturas y cómo emplear las herramientas que brinda la asignatura Álgebra Lineal para la resolución de problemas del resto de las asignaturas de la disciplina. El objetivo de este artículo es mostrar a los docentes algunos ejemplos de los nodos de articulación entre las asignaturas de la disciplina y un ejemplo de las acciones para su introducción en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Palabras clave: álgebra lineal, currículo, relaciones intradisciplinarias

Abstract
In the Computer Science Engineering curriculum, mathematics discipline involves seven subjects. Among the shortcomings found in Mathematics teaching-learning process are: poor emphasis on the connection of the seven subjects, and the ways in which Linear Algebra tools are used for problem solving in the rest of the subjects within the discipline. The aim of this paper is to provide mathematics teachers with some examples of the nodes that connect the discipline subjects, one example of the actions to be implemented in the teaching- learning process, and the results of a satisfaction survey applied to the students after putting those actions into practice.

Key words: curriculum, intra-disciplinary connections, linear algebra

Introducción

Es un reto para los docentes de Matemáticas mostrar a sus estudiantes la vinculación entre las materias de la disciplina Matemática del plan de estudios y su influencia en el perfil del profesional desde el comienzo de la clase, es por ello que surgen entre los alumnos la interrogante ¿para qué me sirve este contenido? Que a su vez se acompaña de desmotivación en los estudiantes que cursan la materia y la baja calidad en los resultados docentes que obtienen (Vargas, Pérez y Fabián, 2017).

En las carreras de ingeniería, la Matemática constituye una herramienta para la solución de los problemas de la profesión que enfrentarán los futuros graduados. En muchos casos, al finalizar el curso o una asignatura, los estudiantes se ven imposibilitados para aplicar lo aprendido a la solución de problemas de las asignaturas que reciben a continuación, lo cual no tributa a la formación de un profesional altamente calificado con una visión transformadora de la sociedad con la cual interactúa (Delgado y Arza, 2011).

Una de las asignaturas de la disciplina Matemática, que no escapa a esta situación, es el Álgebra Lineal, que constituye uno de los contenidos trascendentales para la formación de informáticos. El proceso de enseñanza-aprendizaje (PEA) de esta asignatura ha sido estudiado durante las últimas décadas y con el análisis de varias investigaciones se ha llegado a la conclusión de que independientemente de los enfoques empleados en la impartición de esta materia, ya sea matricial, axiomática, geométrica o computacional, permanecen las deficiencias en el aprendizaje y al parecer esto se debe a que el Álgebra Lineal es y seguirá siendo una materia difícil para la mayoría de los estudiantes (Hurman, 2007; Vargas, Blanco, Pérez y Rodríguez, 2013).

Su carácter abstracto y la complejidad del trabajo simbólico dificultan el hecho de apropiarse de los conceptos y relaciones entre los objetos algebraicos; en el PEA del Álgebra Lineal se refiere la presencia de deficiencias al identificar las conexiones existentes dentro de los temas estudiados en Álgebra Lineal e incluso entre ella y el resto de las asignaturas de la disciplina Matemática que han recibido en clases hasta ese momento (J.-L. Dorier, 2000; J. L. Dorier, Robert, Robinet, y Rogalski, 1999; J. L. Dorier et al., 1997).

Una vez culminado el curso de Álgebra Lineal, en los estudiantes se puede detectar poca solidez en los conocimientos sobre esta materia, reflejada en las dificultades al enfrentarse a la solución de los problemas de otras asignaturas de la disciplina que requieren del empleo de los conceptos antes estudiados (Vargas et al., 2017), los cuales constituyen los nodos de articulación intradisciplinar (Fiallo, 2001).

En diferentes espacios docentes se ha planteado que para lograr tanto la interdisciplinariedad como la intradisciplinariedad, se requiere de una intencionalidad y una profundización en el estudio de la disciplina, por lo que se evidencia la necesidad del trabajo metodológico y científico-metodológico en los colectivos de profesores donde se desarrolle el enfoque intradisciplinar como filosofía de trabajo (Fiallo, 2001). Es por ello que el objetivo de este artículo es proponer a los docentes algunos ejemplos que muestren los nodos de articulación entre las asignaturas de la disciplina, un ejemplo de las acciones para su introducción en el proceso de enseñanza-aprendizaje y los resultados de una encuesta de satisfacción aplicada a los estudiantes luego de poner en práctica estas acciones.

La disciplina Matemática en la carrera de Ingeniería en Ciencias Informáticas (ICI)

En la Universidad de las Ciencias Informáticas, el plan de estudios de la carrera de ICI plantea que la disciplina Matemática tiene dentro de su objeto de estudio las formas y relaciones del mundo real abstraídas de la realidad y lógicamente posibles, determinadas sobre la base de las ya conocidas (DDM-UCI, 2013). Su importancia radica en que desarrolla los fundamentos para la formación de un ingeniero, dado que considera representaciones técnicas y científicas en términos matemáticos para reflejar los rasgos cuantitativos de los fenómenos que estudia. Además, tiene como propósito de su enseñanza adiestrar a los estudiantes en la utilización de métodos analíticos y aproximados, el uso de asistentes matemáticos e implementación de esquemas de cálculo en máquinas computadoras, desarrollando su pensamiento lógico, heurístico y algorítmico. Para esta carrera, la disciplina Matemática se considera pertinente ya que amplía la madurez y la capacidad de trabajo con la abstracción, desarrolla habilidades para la comunicación de propiedades y características de magnitudes en forma gráfica, numérica, simbólica y verbal, además de que contribuye a conformar, en los estudiantes, una cultura científica general e integral actualizada. En la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, se muestra la distribución de contenidos por a signaturas que componen esta disciplina, así como sus características en cuanto al tipo de evaluación, el número de horas lectivas y la distribución de las asignaturas en la malla curricular.

Tabla 1. Distribución de los contenidos de las asignaturas de la disciplina Matemática de la carrera de ICI

CURRÍCULO BASE				
Asignaturas	**Contenido**	**Horas**	**Evaluación**	**Año/ Semestre**
Matemática I	Cálculo diferencial e integral de una variable	96	Examen Final	1ero./I
Álgebra Lineal	Sistemas de ecuaciones lineales, matrices, espacios vectoriales, aplicaciones lineales	64	Sin Examen Final	1ero./I
Matemática Discreta I	Teoría de conjuntos, lógica, demostraciones y teoría de la computabilidad	64	Examen Final	1ero./I
Matemática II	Cálculo diferencial e integral de varias variables	96	Examen Final	1ero./II
Matemática Discreta II	Relaciones de recurrencia y grafos	64	Sin Examen Final	1ero./II
Matemática III	Series y ecuaciones diferenciales	64	Examen Final	2do./III
Matemática IV	Matemática numérica	64	Sin Examen Final	2do./III
Total horas		**512**		

La distribución dentro la malla curricular permite realizar el estudio de las acciones para garantizar los niveles de precedencia del contenido así como el establecimiento de los nodos de articulación.

El sistema de evaluación de la disciplina es cualitativo y comprende asignaturas sin acto examen final, en estos casos, la nota final que alcanza el estudiante se basa en el resultado de las evaluaciones frecuentes y parciales que se le realizan, además de la actitud del estudiante y el éxito de su transformación durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Referentes teóricos y metodológicos

En la propuesta se asume como intradisciplinariedad “la derivación e integración de los contenidos de los programas de una disciplina o asignatura en sí mismo y entre ellos” (Colectivo de autores, 2006, p. 69). Es por ello que para su desarrollo se requiere del establecimiento de una coherencia donde se tomen en cuenta los niveles de precedencia y la ubicación de los contenidos dentro de la malla curricular como se mostró en la Tabla 1.

Las relaciones de intradisciplinariedad se establecen partiendo de la identificación de las ideas rectoras de la asignatura, basándose en las invariantes de la ciencia, expresadas mediante los conceptos, principios y teorías del sistema de conocimientos. Estos expresan rasgos, características y relaciones esenciales, estables e internas del objeto de estudio, facilitando las relaciones dentro de un mismo sistema de conocimientos de una asignatura, o entre los sistemas de conocimientos de las asignaturas que conforman la disciplina (Colectivo de autores, 2006). La articulación intradisciplinaria se materializa a través de los nodos de articulación vistos como contenido de un tema de una asignatura o de una disciplina que incluye los conocimientos, las habilidades y los valores asociados a él (Fernández, 2001).

Para la orientación a los profesores sobre cómo abordar las relaciones intradisciplinarias en la carrera de ICI, se realizaron actividades metodológicas en el colectivo de asignatura Álgebra Lineal que se impartió en el primer semestre del curso 2016-2017, con la participación activa de los docentes, propiciando un proceso de enriquecimiento curricular mutuo y de aprendizaje como un producto del reconocimiento y desarrollo de los nexos dentro de la disciplina.

Las actividades docentes planificadas para los estudiantes y que se proponen a los profesores para su realización se enmarcan en una concepción del aprendizaje sustentada en la teoría de la actividad, mediante la formación por etapas de las acciones mentales que tiene dentro de sus exponentes a Galperin (1987), asumiendo la actividad como proceso mediante el cual el hombre transforma la realidad objetiva y a sí mismo y que cada contenido para ser asimilado debe ser incluido en la actividad. Para planificar la actividad docente deben ser tomados en cuenta sus componentes funcionales: motivación (establecer un motivo que provoque en el estudiante la necesidad de búsqueda de un nuevo conocimiento, o la necesidad de aplicar un conocimiento ya instalado en la resolución de un problema nuevo), orientación (crear una base de orientación para la acción, donde el estudiante debe apropiarse del plan de acción para la ejecución de la tarea propuesta o de resolución de un problema), ejecución (momento de realización de la acción en el plano práctico) y control (momento para asegurarse de la calidad de las decisiones tomadas y de recoger las señales de aviso en este sentido).

Para las actividades metodológicas se tomó como referencia el Reglamento Docente Metodológico del Ministerio de Educación Superior de la República de Cuba (MES, 2007) y se determinó el tipo de actividad metodológica a desarrollar y su objetivo.
En estas actividades participó un total de 28 profesores, que se pudieron estratificar de la siguiente forma:

- Por años de experiencia en la asignatura: entre 0 y 2 años: 18, , entre 3 y 5 años: 5, más de 10 años: 2 y más de 20 años: 3.
- Por titulaciones: de Licenciatura en Matemática: 4, de Licenciatura en Educación (Especialidad Matemática): 4, de Ingeniería en Ciencias Informáticas: 18 y de otras licenciaturas: 2.

Como se observa en la descripción anterior, el claustro está compuesto en su mayoría por profesores de poca experiencia docente y escasa formación matemática, lo que evidencia la necesidad de brindar a los docentes la posibilidad de encontrar respuestas a ¿cómo enfrentar metodológicamente la vinculación entre las asignaturas de la disciplina?, lo cual constituye una carencia presente en el colectivo y que no solo afecta el desempeño de los profesores noveles.

No obstante, en las indagaciones previas los docentes coincidieron en que, dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra Lineal, se manifiestan dificultades tales como: desmotivación en los estudiantes, baja calidad en los resultados docentes, deficiencias de los estudiantes cuando tienen que aplicar lo aprendido en las asignaturas precedentes a la solución de problemas, insuficiente vinculación de los temas que aborda con otras asignaturas y escasa vinculación con el perfil del profesional.

Actividad metodológica No. 1:

Tipo: Reunión Metodológica
Objetivo: Analizar los aspectos teóricos y metodológicos para establecer la articulación entre las asignaturas de la disciplina.

En esta actividad se definieron los referentes teóricos, se determinaron los nodos de articulación y las asignaturas de la disciplina con las que se realizaría la articulación.

Los referentes teóricos definidos fueron expuestos en la sección anterior.
Tomando como fundamentos los resultados de investigación de Vargas, Pérez y Fabián (2017), se procedió a la identificación de los nodos (cognitivos) de articulación adecuada a la disciplina Matemática en la ICI, estableciéndose una analogía con las cuatro etapas para el establecimiento de las relaciones interdisciplinarias planteadas por Fiallo (2001).

Para ello se estableció, a partir del plan de estudios de la carrera de ICI (DDM-UCI, 2013), que los estudiantes, en términos generales, deben ser capaces de: interpretar los conceptos, teoremas y métodos de trabajo de las asignaturas que componen la disciplina; utilizar los métodos estudiados en la disciplina para la resolución de problemas modelados con los conceptos de la misma y resolver problemas propios de la matemática y de aplicación, utilizando los conceptos y procedimientos estudiados.

Además de que en particular muchos de los procedimientos y conceptos del Álgebra Lineal se emplean en la resolución de problemas del resto de las asignaturas de la disciplina.

Como una vía para la autopreparación del profesor para la segunda actividad se dividieron los profesores en equipos y se les orientó realizar propuestas de ejercicios donde se evidencie la articulación entre las asignaturas. La tabla 2 muestra algunos de los nodos de articulación identificados:

Tabla 2. Nodos de articulación de la Disciplina Matemática en la carrera de ICI

Contenido del Álgebra Lineal	Asignatura en la que se aplica	Problema que resuelve
Espacios vectoriales	Matemática III	Ecuaciones diferenciales lineales
	Matemática IV	Aproximación de funciones
	Matemática III	Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas
Matrices y determinantes	Matemática Discreta II	Grafos y digrafos
	Matemática II	Determinación de extremos de funciones de varias variables
Sistemas de ecuaciones lineales	Matemática IV	Ajustes de curvas (polinomios)
Diagonalización	Matemática II	Graficación de ecuaciones cuadráticas
Valores y vectores propios	Matemática Discreta II	Relaciones de recurrencia lineales

Actividad metodológica No. 2:

Tipo: Clase Metodológica Instructiva (CMI)
Objetivo: Instruir a los docentes sobre la articulación entre las asignaturas de la disciplina.
Al inicio de la CMI, los equipos de profesores entregaron un conjunto de ejemplos resueltos donde se evidenció la articulación entre las asignaturas de la disciplina y se presentó una propuesta de clase a incluir en el plan calendario de la asignatura.

Esta propuesta de actividad se denomina Taller, que el reglamento docente metodológico del Ministerio de Educación Superior de la República de Cuba tipifica como: "tipo de clase que tiene como objetivo específico que los estudiantes apliquen los conocimientos adquiridos en las diferentes disciplinas para la resolución de problemas, partiendo del vínculo entre los componentes académico, investigativo y laboral que contribuye al desarrollo de habilidades para la solución integral de problemas en grupo, para el grupo y con la ayuda del grupo" (MES, 2007, p. 20).

A continuación, se describe el Taller y sus elementos en correspondencia con los componentes funcionales de la actividad:

Taller

Etapa de Motivación: Se pone al estudiante en un conflicto cognitivo ya que se requiere de la aplicación e integración de los conocimientos ya adquiridos en la asignatura para la resolución de problemas de otras materias. El interés del sujeto en este caso es lograr ser un profesional competente, lo cual se logrará con la destreza alcanzada para resolver problemas.

1. Objetivos:
- Interpretar los conceptos, teoremas y métodos de trabajo del Álgebra Lineal como manera de identificar las estructuras y relaciones generales entre objetos matemáticos, del mundo físico y de la especialidad que les son inherentes.
- Utilizar los conceptos, teoremas y métodos de trabajo del Álgebra Lineal y la Geometría Analítica para resolver problemas matemáticos, físicos y de la especialidad.

Etapas de Orientación y Ejecución: El estudiante requiere recuperar información sobre el problema a resolver y relacionar una información con otra, por sí mismo y con la ayuda del resto de los estudiantes que conforman su equipo y se va reflejando en la maqueta del documento a elaborar. Luego de la ejecución de la tarea en los planos verbal y mental para sí, los estudiantes justificarán los pasos o acciones a realizar como los criterios en que se basa su trabajo de forma reflexiva, exponiendo criterios técnicos y científicos en que se basa su propuesta.

2. Las temáticas a abordar se relacionan en la tabla 2, en la columna "problema que resuelve".

3. Orientaciones generales para el taller:
Crear en el grupo equipos de hasta tres estudiantes.
Cada equipo debe investigar sobre el tema seleccionado y exponer: ¿Qué elementos, conceptos y métodos del Álgebra Lineal se emplean para la solución del problema? ¿Con qué materia, asignatura o campo del conocimiento está relacionado el tema abordado? ¿Se relaciona el tema con la carrera?

En caso afirmativo, de qué forma.
Cada equipo debe exponer tres problemas resueltos.
El documento escrito debe ser entregado una semana antes de la fecha de su defensa.
La exposición se realizará en 10 min abordando los elementos esenciales de la investigación realizada.

Etapa de Control: Se ejecuta durante todo el proceso para asegurarse de la calidad de las decisiones tomadas ya sea por el profesor, por los miembros del equipo, el resto del grupo o mejor por el propio estudiante, lo que se convertiría en una autorregulación.

Un ejemplo relacionado con la temática es la "Solución de Relaciones de recurrencia", La relación de recurrencia $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$ se puede escribir en forma matricial como $\mathbf{x}_n = \boldsymbol{A}\mathbf{x}_{n-1}$, donde $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix}$ y $\mathbf{x}_{n-1} = \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{bmatrix}$.

Si se calculan los valores propios (λ_1 y λ_2) del polinomio característico $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$ de la matriz $\boldsymbol{A}$, su solución será $x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$, si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ o $x_n = c_1\lambda^n + c_2 n\lambda^n$, en caso de ser $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, para algunos c_1 y c_2 que se calculan a partir de las condiciones iniciales.

En este ejemplo se pone de manifiesto el empleo de la determinación de valores propios de una matriz (nodo de articulación, contenido del Álgebra Lineal) y su importancia en la solución de una relación de recurrencia (contenido que se imparte en Matemática Discreta II) en dependencia de las características de esos valores.

Conclusiones

El desarrollo de estas actividades metodológicas favoreció el aumento de la preparación técnica y metodológica de los profesores al interior de la disciplina y contribuyó a su perfeccionamiento. La adecuada interrelación entre los contenidos de la disciplina constituye la base para el desarrollo integral de un proceso de enseñanza aprendizaje desarrollador en la que el sujeto se manifieste como elemento activo y transformador de sí mismo y de su propia realidad toda vez que se la solución de problemas intradisciplinarias favorece la asimilación de los contenidos de la disciplina.

El empleo de actividades de carácter integrador de la disciplina, que en muchas carreras es vista por los estudiantes como materias aisladas sin nexos ni precedencias. El trabajo intradisciplinar sienta las bases para el futuro desarrollo de actividades de carácter integrador con otras disciplinas. Aunque el momento en que se imparte la asignatura constituye una dificultad ya que los estudiantes no han adquirido los conocimientos necesarios para resolver los problemas, el Taller constituye una primera aproximación al trabajo intradisciplinar y a que se destaque la importancia de la asignatura dentro del currículo.

Referencias bibliográficas

Colectivo de autores (2006). *Preparación pedagógica integral para profesores integrales*. La Habana: Félix Varela.
DDM-UCI (2013). *Plan de Estudios D de la Carrera ingeniería en Ciencias Informáticas.* La Habana: Universidad de las Ciencias Informáticas.
Delgado, Y., y Arza, L. (2011). El Álgebra Lineal en la formación del Ingeniero Informático. *Serie Científica de la*

Universidad de las Ciencias Informáticas, 4(1) ,1-10.
Dorier, J.-L. (Ed.). (2000). *On the Teaching of Linear Algebra*: Kluwer Academic.
Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J., y Rogalski, M. (1999). *Teaching and learning linear algebra in first year of French science university.* Ponencia presentada en el Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Osnabruck.
Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J., Rogalski, M., Harel, G., Hillel, J., y Sierpinska, A. (1997). Book Review. En F. Grandsard (Ed.), *L'Enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question* (La Pensée Sauvage ed., pp. 206-210). Brussels, Belgium: Recherches en Didactique des Mathématiques.
Fernández, B. (2001) *La interdisciplinariedad como base de una estrategia para el perfeccionamiento del diseño curricular de una carrera de ciencias técnicas y su aplicación a la Ingeniería en Automática en la República de Cuba*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad Tecnológica de La Habana "José Antonio Echeverría" (CUJAE).
Fiallo, J. P. (2001). *La interdisciplinariedad en el currículo: ¿utopía o realidad educativa?* La Habana: ICCP.
Galperin, P. (1987). *Sobre el método de formación por etapas de las acciones mentales*. Psicología Evolutiva y Pedagogía. URSS: Progreso.
Hurman, A. L. (2007). *El papel de las aplicaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra Lineal*. Recuperado de http://www.cimm.ucr.ac.cr/eudoxus/Algebra Teaching/pdf/Hurman A. El papel De las Aplicaciones en el Proceso de Enseñanza-Aprendizaje del Algebra Lineal.pdf
MES (2007). *Reglamento para el Trabajo Docente y Metodológico en la educación superior. Resolución 210/2007*. Recuperado el 12 de marzo de 2017 de http://intranet2.uci.cu/servicios/bases-legales/vista
Vargas, A.; Blanco, R., Pérez, O.L., Rodríguez, E. (2013). Desarrollo de la habilidad algoritmizar en el Álgebra Lineal. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26,* 1623-1629. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
Vargas, A.; Pérez, O.L., Fabián, Y. (2017). Actividades para la integración del Álgebra Lineal y la Programación en el primer año en la carrera de Informática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30*, 1180-1189.

LOS MODOS DE PENSAMIENTO EN EL PROCESO DE COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE BASE DEL ESPACIO VECTORIAL R^2 y R^3

Maria Guadalupe Vera Soria, Marcela Parraguez González, Irma Yolanda Paredes Águila, Dalmiro García Nava

Universidad de Guadalajara. (México). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)

guadalupe.vera@academicos.udg.mx, marcela.parraguez@pucv.cl, yolanda.paredes@academicos.udg.mx, dalmiro.garcia@academicos.udg.mx

Resumen

Este artículo expone los primeros resultados de una investigación destinada a estudiar el proceso de comprensión del concepto de base del espacio vectorial R^2 y R^3. Con base en el modelo de la comprensión en matemáticas y los modos de pensamiento de Anna Sierpinska (Sierpinska, 1994 y 2002) como marco de referencia, se indaga el proceso de construcción del concepto, a través de la valoración de las distintas formas de percibir el significado de base, mediante entrevistas con seis estudiantes universitarios participantes que realizaron actividades de exploración del concepto y otras nociones relacionadas (combinación lineal, conjunto generador e independencia lineal) en un ambiente gráfico-algebraico. Los resultados que se presentan dan cuenta de la forma en que se coordinaron los distintos modos de pensamiento: sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural, para llegar a sintetizar el sistema conceptual que conduce a la comprensión de la noción de base.

Palabras clave: comprensión conceptual, modos de pensamiento, estudio interpretativo

Abstract

This article presents the first results of a research aimed to study the understanding process of the concept of basis of the R^2 and R^3vector spaces. Based on the model of mathematical understanding and the modes of thinking of Anna Sierpinska (Sierpinska, 1994 and 2002) as the reference framework, we investigate the construction of the concept, through the assessment of the different ways of perceiving the meaning of basis, in interviews to college students who carried out activities of exploration of the concept and other related notions (linear combination, generator set, and linear independence) in a graphic and algebraic environment. The findings show the coordination of the different modes of thinking: synthetic-geometric, analytic-arithmetic and analytic-structural thinking, in order to synthesize the conceptual system that leads to the understanding of the notion of base.

Key words: conceptual understanding, modes of thinking, interpretative research

Introducción

El presente trabajo parte de la suposición fundamentada en la literatura, relativa a la complejidad epistemológica intrínseca en la abstracción de los conceptos axiomáticos del álgebra lineal (Dorier, 1995; Dorier y Sierpinska, 2002; Oktaç y Trigueros, 2010). En particular, aunque en su mayoría los reportes que anteceden a esta investigación describen resultados sobre elementos conceptuales y cognitivos involucrados en la construcción de la noción de base de un espacio vectorial (Chargoy, 2006; Da Silva y Lins, 2002; Kú, Trigueros y Oktaç, 2008), este trabajo se distingue por la evaluación sistémica de las componentes que integran el proceso de comprensión del concepto.

El estado del conocimiento del tema, revela que la comprensión del concepto de base es un fenómeno determinado por varios factores, entre ellos, que supone el reconocimiento de otros conceptos más elementales que lo definen (combinación lineal, conjunto generador e independencia lineal), desde los modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural, y que su formación se basa en la realización de un número de inferencias en torno a las ideas sintetizadas en las nociones involucradas (Chargoy, 2006; Da Silva y Lin, 2002, y Kú, Trigueros y Oktaç, 2008 y Vera-Soria, 2016).

El objetivo del estudio es describir el proceso de comprensión del concepto de base del espacio vectorial R^2 y R^3, ahondando en las operaciones de comprensión que en coordinación de determinados modos de pensamiento, se llevan a cabo por estudiantes que cursan la materia de álgebra lineal en el Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías de la Universidad de Guadalajara, México.

Este artículo describe los primeros resultados sobre la interpretación de la coordinación de los distintos modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural, mediante los cuales se sintetiza el sistema conceptual que conduce a la comprensión de la noción de base.

A continuación se presentan la perspectiva teórica y la trayectoria metodológica que se asumen en el estudio, para luego exponer la estrategia de análisis de los datos con la que se obtienen los resultados que describen la comprensión conceptual de los estudiantes, y se termina con los comentarios finales respecto la coordinación de los modos de pensamiento que se interpretan del análisis de la evidencia.

Marco teórico

El fundamento del que parte la investigación incorpora dos modelos teóricos en matemática educativa: el modelo de la comprensión en matemáticas y el modelo de los modos de pensamiento de Anna Sierpinska (Sierpinska, 1994 y 2002), y en este sentido, se asume una postura cognitiva de la comprensión que considera la formación mental de objetos matemáticos en un proceso de interpretación, en el que diferentes modos de pensamiento se coordinan en la abstracción de las ideas.

Para Sierpinska (1994), la comprensión es un "acto" por medio del cual un *objeto de comprensión* se relaciona con otro objeto que funge como *base de la comprensión* del primero; así se puede decir por ejemplo, que una persona ha comprendido una expresión cuando al escucharla dirige su pensamiento a un objeto distinto del que se menciona originalmente.

La autora señala el papel de cada una de las componentes que conforman un acto de comprensión:

> …el 'sujeto de comprensión' (*P*) – la persona que comprende. Está lo que *P* intenta comprender – 'el objeto de comprensión' (*X*). Está a lo que el pensamiento de *P* se dirige (o pretende) en el acto de comprensión: 'la base de la comprensión' (*Y*). [Además], está la operación mental que conecta el objeto de comprensión con su base (Sierpinska, 1994, p. 29).

El desarrollo de los conceptos desde este modelo se basa en la abstracción de pensamientos y la reflexión sobre las propias acciones sobre los objetos matemáticos, y en el proceso de abstracción, las características de los objetos matemáticos se destacan mediante las *operaciones de comprensión*, es decir, cuando éstos logran ser identificados, discriminados, generalizados y sintetizados.

Identificar un objeto de comprensión implica un sentimiento de descubrimiento o reconocimiento, “involucra primero que algo es revelado […] y segundo, que se ha reconocido como algo que se intenta entender” (Sierpinska, 1994, p. 56); mientras que la discriminación que se refiere a “la identificación de dos objetos como diferentes” (Sierpinska, 1994, p. 57), es decir, que implica un acto de comparación con respecto a algunas circunstancias.

La generalización es una operación mental en la cual un determinado objeto de comprensión se reconoce como un caso particular de otra situación, mientras que sintetizar significa “la búsqueda de un vínculo común, un principio unificador, una similitud entre varias generalizaciones y su aprehensión como un todo (un cierto sistema) sobre esta base” (Sierpinska, 1994, p. 60).

Por otra parte, Sierpinska (2002) identifica la existencia de tres categorías de pensamiento en el álgebra lineal: *sintético-geométrico*, *analítico-aritmético* y *analítico-estructural*, relacionadas con el uso de los lenguajes (gráfico, algebraico y abstracto) descritos por Hillel (2002). La autora precisa que, “mientras históricamente estos tres modos de pensamiento surgieron de forma secuencial, la aparición de cada uno de éstos no eliminó a los otros dos” (Sierpinska, 2002, p. 232) y afirma que estos modos de pensamiento son igualmente útiles, especialmente cuando están en interacción.
Sierpinska (2002) afirma que:

> La principal diferencia entre los modos pensamiento sintético y el analítico, es que en el modo sintético, los objetos son, en cierto sentido, aproximados directamente a la mente la cual trata de describirlos, mientras que en el modo analítico dichos objetos se aproximan de forma indirecta: de hecho ellos sólo pueden ser construidos a través de la definición de las propiedades de sus elementos (Sierpinska, 2002, p. 233).

Cada uno de estos modos de pensamiento en el álgebra lineal, utilizan un sistema de representación específico: el modo de pensamiento sintético-geométrico usa el lenguaje geométrico de planos, líneas e intersecciones, en el modo analítico-aritmético, las figuras geométricas son entendidas como conjuntos de n-uplas de números que satisfacen ciertas condiciones, por ejemplo en forma de sistemas de ecuaciones y, en el modo de pensamiento analítico-estructural, se sintetizan en una estructura los elementos algebraicos de las representaciones analíticas (Sierpinska, 2002).

Marco Metodológico

Con el fin de contar con evidencia empírica relevante para describir el proceso de comprensión del concepto de base, se propuso llevar a cabo un estudio cualitativo de corte hermenéutico-interpretativo, ya que esta estrategia de investigación procura “comprender un fenómeno o un proceso, la perspectiva de las personas involucradas o una combinación de éstas” (Merriam, 2002, p. 6). Se trata de entender el significado que las personas construyen, a través del diálogo exploratorio entre el investigador y los participantes (Martínez, 2006).

El esquema metodológico general, incluye una etapa inicial en la que se realiza un análisis epistemológico del concepto de base, y una etapa de elaboración y aplicación de instrumentos para la construcción del concepto por parte de los estudiantes, para posteriormente llevar a cabo la recolección, sistematización e interpretación de los datos obtenidos.

En particular, del análisis del concepto de base de un espacio vectorial se evidenció que la formación de esta noción depende de la capacidad para asimilar los conceptos germinales de combinación lineal, conjunto generador e independencia lineal, y que su comprensión involucra la articulación de los modos de pensamiento, que son los que deben interpretarse para distinguir las características esenciales de dichos conceptos (Chargoy, 2006; Da Silva y Lin, 2002; Kú, Trigueros y Oktaç, 2008 y Sierpinska, 2002).

Por este motivo, además de presentar a los estudiantes la definición de los conceptos en el modo analítico-estructural, se diseñaron instrumentos con actividades de exploración de las nociones que incluyeron el uso del programa *Geogebra*, por su potencial para ilustrar el significado de los conceptos, en la interacción de los modos sintético-geométrico y analítico-aritmético.

En cuanto a los participantes, tomando en cuenta el consentimiento de los estudiantes y la disponibilidad de tiempo para participar en una entrevista, se contó con el apoyo de seis estudiantes: E1, E2, E3, E4, E5 y E6 que realizaron la actividad de exploración de los conceptos y que fueron entrevistados para obtener información, desde sus diversas perspectivas, sobre las características que advertían de conjuntos de vectores de los espacios vectoriales R^2 y R^3 con los que se les propuso trabajar, y sobre la relación de dichos conjuntos con el espacio o subespacio vectorial que era posible construir con ellos.

Y luego se verificaron en las respuestas de los estudiantes, los argumentos con los que justificaron las características que interpretaban de los conceptos, para tratar de identificar tanto sus inferencias acerca de cada concepto en el sistema conceptual: combinación lineal, conjunto generador, independencia lineal y base, como los modos de pensamiento que involucraron para llegar a reconocer conjuntos de vectores que son base del espacio o de un subespacio vectorial de R^2 y R^3.

En lo que sigue, se describe la forma como se evaluaron las inferencias de los estudiantes sobre las nociones del sistema, y los modos de pensamiento que incorporaron en dicha comprensión.

Análisis de la evidencia

La estrategia de análisis hermenéutico, procura comprender el significado de los textos obtenidos de la recolección de los datos, en su contexto más amplio (el círculo hermenéutico), y mediante reiterados acercamientos sobre las primeras anticipaciones de sentido para interpretar la opinión del autor del texto (el espiral hermenéutico) (Weiss, 2011). Por este motivo, el proceso de análisis de los datos del estudio involucra esta estrategia en cada una de los procedimientos prácticos de reducción y visualización de la evidencia que se describen a continuación.

Las transcripciones de las entrevistas de los seis estudiantes seleccionados se examinaron para identificar las inferencias sobre las características que los estudiantes habían relacionado al concepto de base y a cada uno de los conceptos germinales, y se asignaron diversos extractos de texto a una o varias de las cuatro clases analíticas etiquetadas como: combinación lineal, espacio generado, independencia lineal y/o base (ver figura 1).

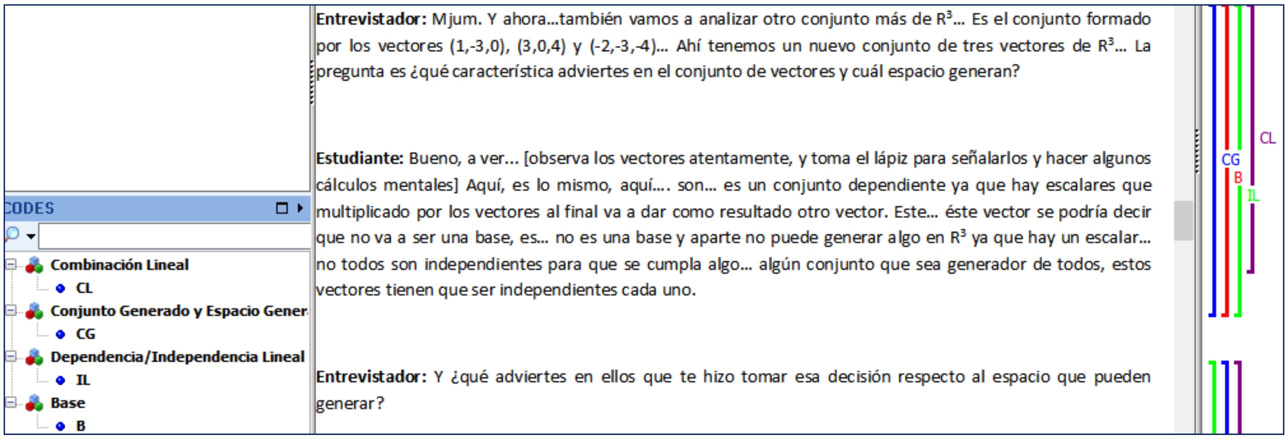


Figura 1. Extractos codificados en la entrevista al estudiante E1.

Posteriormente, para clasificar y condensar la información, se extrajeron para su reensamble en un arreglo matricial, un número de extractos de texto que se reunieron como material para analizar las inferencias sobre el significado de los conceptos (ver tabla 1). El significado que los estudiantes pudieron advertir se evaluó, como Sierpinska (1990) establece, a partir del referente y el sentido definidos, es decir, se examinó qué es lo que dijeron (el sentido) y sobre qué (el referente).

Tabla 1. Extracto de la Matriz de los significados en la entrevista al estudiante E1.

Conjunto Generador	Conjunto Generador **Referente**: Vector o conjunto de vectores **Sentido**: que genera un espacio o subespacio vectorial con base en las componentes de sus vectores y en la relación entre los vectores que conforman el conjunto. **CODE:** CG_E1_120 Entrevistador: Y, bueno, voy a poner también otro conjunto formado por estos tres vectores: es el vector (-1,3), (1,-1) y (1,1); es un conjunto de R² formado por tres vectores. Entonces, de nuevo la pregunta: en ese conjunto ¿cuáles características puedes advertir del conjunto de vectores y cuál es el espacio vectorial que se genera? Estudiante: Bueno, como son dos… mmm… son tres vectores, este… a simple vista… es… a ver deje resolverlos… [Observa los vectores atentamente y hace algunos cálculos mentales y anota un "-2" junto al segundo vector del conjunto]...ah, sí… Bueno, aquí tenemos… vamos… son tres vectores, son… de esos tres vectores… son… dos de ellos son independientes o, se podría decir que… bueno, aquí en estos, como es un vector que tiene solo dos en x y en y, solo formarían cualquier punto en R² y, no nomás por ser tres va a formar R³, no, ya que lo que nos dice si es R² o R³ es lo… el número de x, y o z, aquí solo tenemos x y y. Y, bueno, como aquí así a simple vista se podría decir que es cualquier punto en R².

Luego, las inferencias sobre el significado de los conceptos se reunieron en una nueva matriz llamada "matriz de correspondencias teóricas", y en este arreglo se analizaron detenidamente los modos de pensamiento y las operaciones mentales que intervinieron en la construcción del significado de los conceptos (ver tabla 2).

Tabla 2. Extracto de la Matriz de las correspondencias teóricas en la entrevista al estudiante E1.

Categorías **Conceptos**	**Significado**	**Base de la comprensión** **(modos de pensamiento)**	**Operación mental**
ombinación Lineal	El estudiante E1 distingue la relación representada por una combinación lineal, y relaciona esta noción con otras en el sistema conceptual. Señala: Referente- un vector Sentido- que resulta de la suma de múltiplos escalares de otros vectores.	La base de la comprensión que E1 ha referido para dar significado a una **combinación lineal** es el ***modo analítico-aritmético***. *"a simple vista vi que, este vector multiplicado por uno y este vector multiplicado por uno, se suman, nos podría dar este…* *[refiere a los vectores del conjunto (1,-3,0), (3, 0, 4), (-2,-3,-4)]* *Entrevistador: Ah, ok. Notaste que, si sumas el segundo vector con el tercero, te da el primero.* *Estudiante: Ajá."* *"es* <u>*independiente*</u>*, ya que son dos vectores que […] a cualquier vector multiplicado por un escalar no podría dar el otro…"* *"se podría decir que es* <u>*linealmente dependiente*</u>*, ya que, de acuerdo a éstos… hay escalares que multiplicado por dos vectores pueden* <u>*generar*</u> *el tercero."* *"Éste no podría ser una* <u>*base*</u> *ni éste, ya que son múltiplos y pues, este… más bien éste [señala el conjunto {(-1,3)}] se podría decir que es la base para generar cualquier de estos […] nada más necesitamos uno que, multiplicado por cualquier escalar, de los demás…"*	E1 ***identifica*** un vector que es combinación lineal de otros, principalmente en el modo de pensamiento analítico-aritmético.

Este procedimiento, se realizó con la finalidad de facilitar la relación de información entre los renglones la matriz de cada estudiante, para elaborar una segunda lectura comprensiva de las inferencias de cada concepto en el sistema conceptual que incluyera los modos de pensamiento y, la lectura vertical de las columnas que dio pie a la descripción de las operaciones mentales y los conceptos del sistema que los estudiantes involucraron en el reconocimiento de la noción de base del espacio vectorial R^2 y R^3.

La descripción de la comprensión conceptual de los estudiantes se realiza en medida que el significado de cada concepto en el sistema se relaciona con otros en una red de significados que se organiza y se presenta en un "diagrama configuración de los significados", que explicita el proceso que se interpreta (ver figura 2).

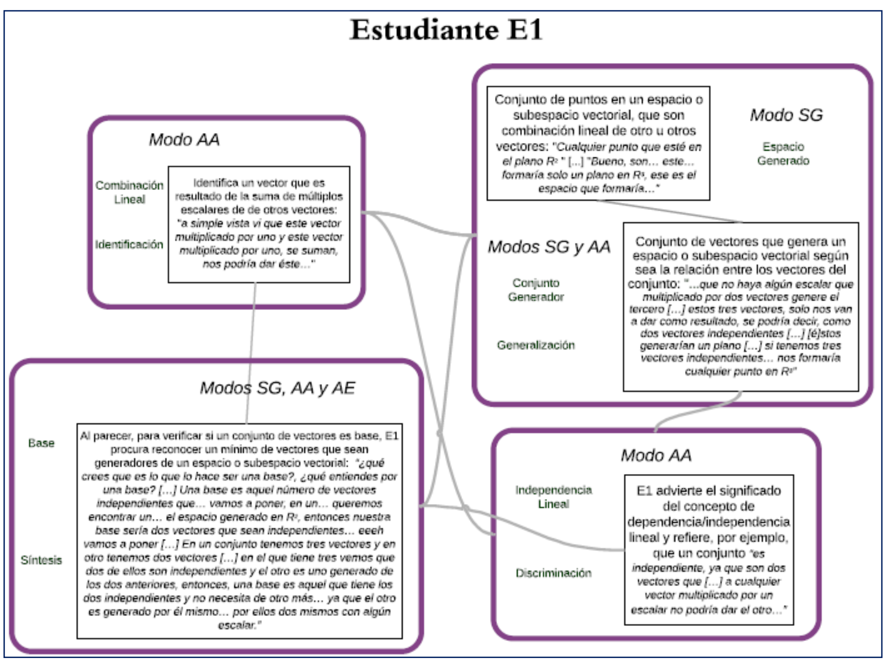


Figura 2. Diagrama de la configuración de los significados del estudiante E1.

A través de la interpretación de la evidencia obtenida de los seis estudiantes del estudio, se pretende desarrollar una explicación sobre la cadena de inferencias que los estudiantes realizan, a partir de los modos de pensamiento, para alcanzar determinado nivel de abstracción de las nociones ya sea sintetizar, generalizar, discriminar o identificar los conceptos del sistema conceptual.

En particular, en el siguiente apartado se describen algunas inferencias asociadas la coordinación de los distintos modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural, en el proceso por medio del cual el estudiante E1 sintetiza el sistema conceptual que conduce a la comprensión de la noción de base.

Conclusiones

Como resultado de la evaluación sistémica de las componentes en la comprensión del concepto de base, la evidencia mostró que el estudiante E1 logró sintetizar las nociones del sistema, llevando a cabo un proceso en el cual:

1) Al parecer fue suficiente advertir en el modo analítico-aritmético el vector que resulta de sumar múltiplos escalares de los vectores en un conjunto, para llegar a construir el concepto de combinación lineal y utilizarlo en la construcción de otros conceptos del sistema conceptual (ver figura 3).

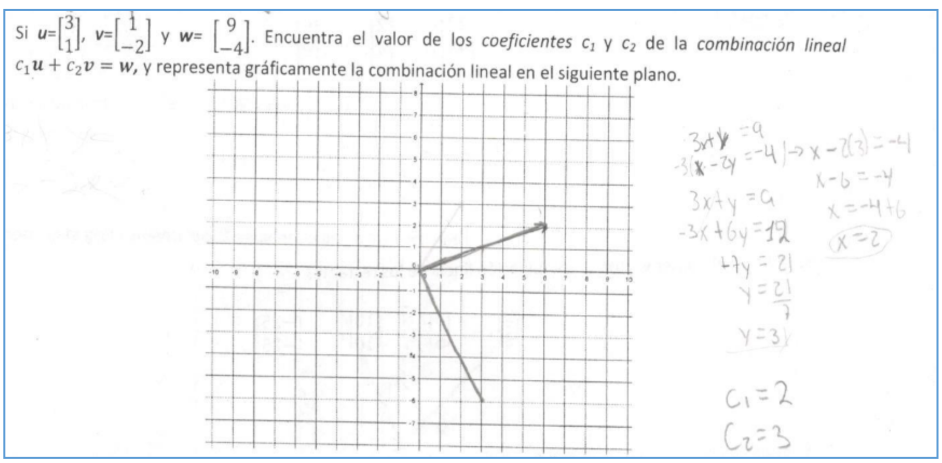


Figura 3. Modo analítico-aritmético en la identificación del concepto de combinación lineal.

2) Luego, la evidencia reveló que el estudiante pudo reconocer en el modo sintético-geométrico posibles grupos de combinaciones lineales generadas por diferentes conjuntos de vectores del espacio vectorial (el espacio generado), mientras que fundamentalmente a partir del trabajo realizado en el modo analítico-aritmético, que el estudiante E1 pudo abstraer la relación entre los vectores de un conjunto (independencia/dependencia lineal) (ver tabla 3).

Tabla 3. Modo analítico-aritmético en la discriminación del concepto de independencia lineal.

Independencia lineal Referente- Conjunto de vectores Sentido- en los cuales no hay uno que pueda obtenerse como múltiplo escalar de otro(s) en el conjunto.	Con base en el ***modo de pensamiento analítico-aritmético***, el estudiante E1 describe respecto al conjunto {(1, -3, 0), (3, 0, 4), (-2, -3, -4)} que *"es un conjunto dependiente ya que hay escalares que multiplicado por los vectores al final va a dar como resultado otro vector"* y cuando se le pide que lo aclare menciona que: *"a simple vista vi que, este vector multiplicado por uno y este vector multiplicado por uno, se suman, nos podría dar éste…* *Entrevistador: Ah, ok. Notaste que, si sumas el segundo vector con el tercero, te da el primero.* *Estudiante: Ajá."*	La operación mental que se asocia es la *discriminación* debido a que el estudiante E1 identifica diferentes casos en los que un conjunto de vectores es linealmente independiente o linealmente dependiente justificando la relación entre los vectores del conjunto, aunque se considera que E1 no llega a la generalización de éste concepto debido a que no reconoce por ejemplo, que cualquier conjunto de 4 vectores en R^3 es linealmente dependiente, y no conecta la solución de un sistema de ecuaciones con la dependencia o independencia lineal.

3) Así mismo, fue relevante la coordinación de los modos sintético-geométrico y analítico-aritmético, para que el estudiante pudiera dar cuenta precisa de las condiciones bajo las cuales determinado conjunto era generador o no de un espacio o subespacio vectorial de R^2 y R^3, es decir, que una vez que se identificó la relación entre los vectores en un contexto algebraico pudo llegar a establecer la relación del conjunto de vectores con el espacio que genera (ver tabla 4).

Tabla 4. Modos S-G y A-A en la generalización del concepto de conjunto generador.

Conjunto Generador Referente: Vector o conjunto de vectores Sentido: que genera un determinado espacio o subespacio vectorial con base en las componentes de sus vectores y en la relación entre los vectores que conforman el conjunto.	Se estima que la base de la comprensión del concepto de **conjunto generador** es ***la coordinación de los modos de pensamiento sintético-geométrico y analítico-aritmético***. Dado que el estudiante E1 justifica: *"[el conjunto {(1, -3, 0), (3, 0, 4), (-2, -3, -4)}] no puede generar algo en R^3 ya que hay un escalar… no todos son independientes, para que se cumpla […] que sea generador de todos, estos vectores tienen que ser independientes […] si genera algo en R^3 tiene que ser los tres vectores totalmente independientes, que no haya algún escalar que multiplicado por dos vectores genere el tercero […] estos tres vectores, solo nos van a dar como resultado, se podría decir, como dos vectores independientes […] [é]stos generarían un plano […] si tenemos tres vectores independientes… nos formaría cualquier punto en R^3"*	La operación mental relacionada es la *generalización*. Esto se debe a que el estudiante E1, con base en los modos de pensamiento sintético y analítico, advirtió que conjuntos de vectores linealmente independientes o linealmente dependientes, pueden ser generadores de un determinado espacio o subespacio vectorial.

4) Y finalmente, al haber reconocido el concepto de conjunto generador, el estudiante evaluó, con base en la coordinación de los modos sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural, las características particulares de distintos conjuntos de R^2 y R^3, diferenciando conjuntos de vectores generadores con un mínimo de vectores necesarios para generar un espacio o subespacio vectorial específico, lo que finalmente condujo a establecer las correspondencias entre las nociones germinales que lo llevaron a la comprensión del concepto de base, y a la síntesis del sistema conceptual (ver figura 2).

Referencias bibliográficas

Chargoy, R. (2006). *Dificultades asociadas al concepto de base de un espacio vectorial*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN, D.F., México.

Dorier, J. L. (1995). Meta Level in the Teaching of Unifying and Generalizing Concepts in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *29* (2), Advanced Mathematical Thinking, 175-197. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/3482902

Da Silva, A. y Lins, R. (2002). An analysis of the production of meaning for the notion of basis in linear algebra. *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)*. John Wiley Publishers. Crete: Greece.

Hillel, J. (2002). Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. En J. L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra in Question, 23*, 191-207. doi: 10.1007/0-306-47224-4_7

Kú, D., Trigueros, M., Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática, 20* (2), 65-89.

Martínez, M. (2006). *Ciencia y arte en la metodología cualitativa*. Segunda edición (reimpresión 2013). México: Trillas.

Mejía, J. (2011). Problemas centrales del análisis de datos cualitativos. *Revista Latinoamericana de Metodología de la Investigación Social, 1* (1), 47-60.

Merriam, S. and Associates, (2002). *Qualitative Research in Practice: Examples for discussion and analysis.* San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics (10)* 3, 24-41. Canada: FLM Publishing Association.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press. Recuperado de la base de datos Ebrary (10096967).

Sierpinska, A. (2002). On Some Aspects of Students' thinking in Linear Algebra. En J. L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra, 23*, 209-246. doi: 10.1007/0-306-47224-4_8

Sierpinska, A., Nnadozie, A. y Oktaç, A. (2002). *A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra.* Reporte de Investigación. Montreal, Canadá: Concordia University.

Vera-Soria, M. G. (2016). *La comprensión del concepto de base de un espacio vectorial en estudiantes universitarios*. (Tesis doctoral). Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente (ITESO). México.

Weiss, E. (2011). *La hermenéutica. Un enfoque para comprender al otro y para interpretar textos y significados culturales*. Manuscrito inédito.

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

LOS TIPOS BÁSICOS DE VARIACIÓN Y LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

Bogar Ulises Murillo Gastelum, Agustín Grijalva Monteverde
Universidad de Sonora. (México)
bogarulises@gmail.com, guty@gauss.mat.uson.mx

Resumen
Se presenta un avance del trabajo centrado en el diseño de secuencias de actividades didácticas que tienen el propósito de que el estudiante de bachillerato realice un estudio introductorio al Cálculo siguiendo un enfoque variacional, centrado en un estudio en el que caracterice y cuantifique los tipos básicos de variación utilizando la derivada. El diseño se realiza empleando algunas nociones teóricas del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS). Se realiza un análisis de las prácticas matemáticas que pretenden promover los programas de estudio de la Dirección General de Bachillerato y el Bachillerato General Universitario de las Preparatorias Incorporadas a la Universidad de Sonora en la asignatura de Cálculo Diferencial, con la intención de construir el significado institucional de referencia utilizado en nuestra propuesta.

Palabras clave: derivada, tipos básicos de variación

Abstract
This paper reports the advance of a research work focused on the design of sequences of didactic activities for high school students to carry out an introductory study to Calculus. They should follow a variational approach centered in a study where they can characterize and quantify the basic types of variation by using the derivative. The design is based on some theoretical notions of the Onto-semiotic Approach of Cognition and Mathematical Instruction (OSA). We analyze the mathematical practices that are intended to promote the programs of study of High School General Direction and University General High School of the preparatory courses incorporated into the University of Sonora in the subject of Differential Calculus in order to construct the institutional meaning used in our proposal.

Key words: derivative, basic types of variation

Introducción

En diversas investigaciones se reportan dificultades en el aprendizaje del Cálculo, debidos al predominio del tratamiento algorítmico-algebraico, con propuestas de enseñanza en las que no se logra una conceptualización significativa. Así, se dejan de lado procesos de análisis gráficos, visuales y variacionales, que permitirían un acercamiento distinto, como se ve en Cantoral y Farfán (1998), Flores (2006). Alrededor de esta problemática existen diferentes visiones y aportaciones que señalan aspectos de diversa índole, como las siguientes:

Existencia de cierta resistencia que muestran los estudiantes al uso de recursos visuales, Vinner (1989) citados por Hitt (2003b). Las dificultades para establecer una estructura conceptual de la relación funcional entre la variable dependiente y la independiente, pues para ello se requiere del razonamiento covariacional, Carson y Oehrtman (2005).

El tratamiento puntual en el currículo escolar a la derivada como la *pendiente de la recta tangente a la curva en un punto* se convierte en un obstáculo a la hora de conceptualizar a la derivada como una función, como puede verse en, Ibarra, Bravo & Grijalva (2001, p.116).

Algunas dificultades de los estudiantes para construir estrategias variacionales están asociadas a la actividad de analizar la gráfica de una función utilizando la primera, la segunda y tercera derivada, como puede verse en Cantoral et al (1998). Tomando en cuenta los resultados reportados consideramos la necesidad de promover el desarrollo de un pensamiento y lenguaje variacional entre los estudiantes, como una herramienta fundamental en el estudio del Cálculo, creemos que el impulso de éstos favorece al desarrollo de un significado rico de la derivada en contraste con las propuestas didácticas tradicionales, como se señala en Cantoral et al (1998). De modo que la derivada no sea un concepto matemático abstracto sino un concepto desarrollado para cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica, según Flores (2006).

Elementos teóricos y metodológicos

El diseño se hace con base en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Este enfoque permite abordar los procesos de enseñanza y aprendizaje con una visión holística y pormenorizada para profundizar y articular las facetas institucionales y personales del conocimiento matemático. Retomamos algunas nociones teóricas presentadas en Godino, Batanero y Font (2012), entre ellas, sistemas de prácticas (operativa y discursiva) las cuales se consideran el centro de la actividad matemática que el individuo usa para analizar, interpretar y resolver cierto tipo de situaciones problemas; la tipología de objetos y significados matemáticos que intervienen y emergen en los sistemas de prácticas, así como los criterios de idoneidad didáctica que utilizamos para diseñar y valorar las secuencias.

Cuando abordamos una *situación problema* utilizamos un determinado *lenguaje* verbal o simbólico. El lenguaje es la parte ostensiva que nos permite comunicar a otros lo realizado de manera argumentativa, los *argumentos* justifican los *procedimientos* y *proposiciones* que relacionan los *conceptos* entre sí. A estos seis tipos de entes intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas se les denomina objetos matemáticos primarios (Godino et al, 2008).

Los objetos personales e institucionales no tienen un único significado. Así, si en una clase de matemáticas (entendida como una institución) se lleva a cabo un sistema de prácticas de donde emerge un objeto matemático, el significado que los estudiantes asignen a dicho objeto está determinado por el contexto en el que se construye, es decir dependerá de los sistemas de prácticas que lleve a cabo esa institución en particular, Grijalva (2007) y Pino Fan (2013).

Para el diseño de esta propuesta se hizo un estudio del significado institucional de referencia, con el fin de determinar objetivos a alcanzar, tomando en cuenta herramientas teóricas señaladas. Por un lado analizamos el programa de la asignatura del Cálculo Diferencial propuesto por la Dirección General de Bachillerato (DGB) y el Bachillerato General Universitario de las Preparatorias Incorporadas a la Universidad de Sonora, a la vez analizamos las sugerencias bibliográficas que proponen dichos programas.

Con relación a los significados institucionales utilizamos los siguientes tipos.

- Referencial: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático.
- Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio

La propuesta

Nuestra propuesta está compuesta por secuencias las cuales se organizan en tres momentos: inicio, desarrollo y cierre. En las actividades de inicio, se plantean situaciones problema que permiten identificar y recuperar las experiencias y conocimientos que han adquirido los estudiantes en su formación previa, posteriormente en las actividades de desarrollo, se plantean situaciones problema de cuya solución deberán emerger nuevos conocimientos dando la oportunidad de contextualizar las situaciones planteadas y, por último, en las actividades de cierre, se integran todos los conocimientos desarrollados en las actividades de inicio y desarrollo, con el objetivo de institucionalizarlos

Con base en principios socio-constructivistas, donde los alumnos asuman la responsabilidad del aprendizaje; promuevan el debate y favorezcan el dialogo entre los sujetos, que cada uno reflexione a partir de lo que aportan los demás y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión Godino (2014). Para este fin se promueven momentos de trabajo individual, en los cuales los estudiantes deben responsabilizarse del estudio, reflexionar, comprender la situación problema abordada y construir su conocimiento subjetivo con base en las prácticas que realizan al resolver la situación abordada. Después se forman pequeños equipos en la que cada miembro expone sus conjeturas y reflexiones, enriqueciendo los puntos de vista logrados individualmente, refinando y validando su conocimiento subjetivo y, por último se realiza un trabajo grupal en el que los estudiantes interactúan con el profesor con la intención de que el docente reconozca y resuelva los posibles conflictos de los estudiantes, a la vez se tratará de re-direccionar las conjeturas erróneas construidas por los mismos.Un ejemplo de las situaciones que retomamos para el diseño de las actividades es el llenado de recipientes (entre otras situaciones), en particular utilizamos un recipiente cónico y uno rectangular. En la columna de contenido se especifican los puntos que se espera desarrollen los estudiantes.

Tabla 1. Secuencia 1

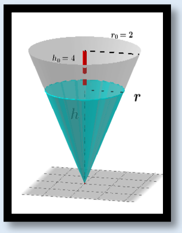
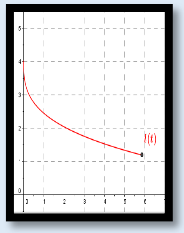
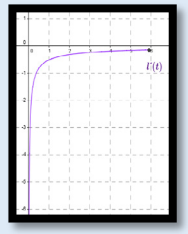
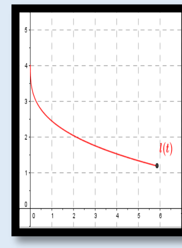
Secuencias	Momentos y actividades	Contenido
	Inicio Actividad 1. Trabajo individual (recipiente cónico).	Percibir el cambio usando la imagen del recipiente con agua.: ¿Qué magnitudes varían?, ¿Qué relación puedes establecer entre las magnitudes?, ¿Qué magnitudes dependen de la variación de otra?,.
	Actividad 2. Trabajo en equipo.	Con GeoGebra se hace un estudio dinámico, centrando el análisis en las preguntas de la Actividad 1. Se simula el proceso de llenado con el archivo "Recipiente cónico.ggb", con la finalidad de refinar el razonamiento variacional intuitivo inicial.
Secuencia 1	Actividad 3. Trabajo grupal.	Se propone cerrar la discusión, dirigida por el maestro dando la oportunidad a cada equipo de exponer sus inquietudes, reflexiones y conclusiones.

	Actividad 4. Trabajo en equipo.	Se estudian otros fenómenos, como: interpretar la variación del precio de una canasta alimenticia y propuestas de los estudiantes de fenómenos cambiantes que perciban en su cotidianeidad, etc.
	Desarrollo Actividad 1, 2, 3, 4. Trabajo en equipo. En estas actividades se sigue la misma estructura.	Con el archivo "recipiente cónico.ggb", se estudia la variación del ***área circular*** del agua de la parte transversal del cono al variar la ***altura***. Preguntas: ¿Cuánto varía la magnitud dependiente respecto a la independiente?, ¿La variación del área es siempre igual? Perciban patrones de cambio, y propongan una expresión analítica que modele la variación descrita. Otras preguntas: ¿Cómo se comporta la variación del área circular según los datos de la tabla y el bosquejo que realizaste? (creciente, decreciente o constante), ¿Cómo lo hace la variación del área circular y cómo se comporta la rapidez con la que crece o decrece según sea el caso? Esta última se realiza con la intención de que el estudiante se acerque cualitativamente a la rapidez con que varía una magnitud con base en las gráficas bosquejadas.
	Cierre Actividad 1. Se inicia trabajando en equipo y se cierra la actividad de manera grupal	Con los archivos "Actividad de cierre 1.ggb" y "Actividad de cierre 2.ggb", estudiamos los modelos de la variación, con en el fin de asociar un tipo básico de variación a cada modelo, realizando un estudio dinámico, visualizando la construcción de la gráfica y la variación de un punto que está sobre ella, a fin de caracterizar cada tipo básico de variación. Las preguntas que se formulan: ¿Cómo se comporta la variación?, ¿Cómo lo hace la rapidez con que varía?
	Actividad 2. Trabajo grupal	Estudiar la relación entre el radio y la altura del recipiente cónico con el dominio y rango de la función que modela la variación, al cambiar los valores y contrastar lo que sucede con la gráfica: ¿Qué diferencia se observa en la gráfica cuando se cambian los valores de radio y altura del recipiente?

La intención de trabajar con esta estructura radica en que el estudiante perciba las magnitudes cambiantes y precise el estudio de la variación, con esta secuencia se promueve el desarrollo de las nociones básicas necesarias para la construcción de la derivada, posteriormente el estudiante abordará una segunda secuencia, la cual estará centrada en cuantificar la rapidez promedio de la variación y la rapidez en un instante.

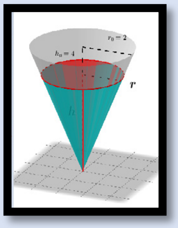
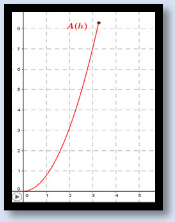
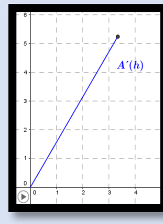
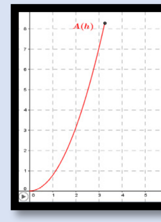
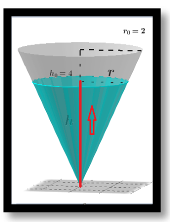
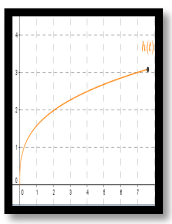
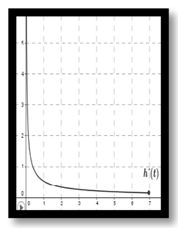
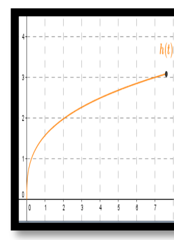
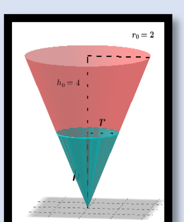
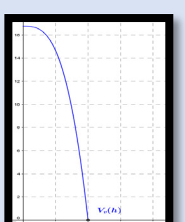
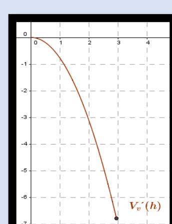
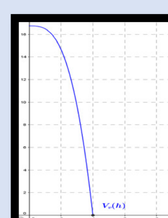
En cuanto a la propuesta, un ejemplo de una actividad es el llenado de un recipiente cónico en el que centramos la atención del estudiante en la variación de la longitud entre el borde del recipiente y la parte transversal del cono con agua cuando varía el tiempo y algunas otras. Resulta de nuestro interés que los estudiantes caractericen y cuantifiquen la variación de la rapidez con la que varía dicha longitud respecto al tiempo utilizando la función derivada implicada. Para su estudio se ha elaborado un archivo de GeoGebra como se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 2. Archivos de GeoGebra para el llenado de recipientes

Precisando el estudio de la variación	**Gráfica y expresión que modelan la variación**	**Rapidez de la variación**	**Tipo básico de variación**
 Variación de la longitud entre el borde del recipiente y la parte transversal del cono con agua cuando varía el tiempo.	 Expresión que modela la variación: $l(t) = h_0 - \sqrt[3]{\frac{3h_0^2 t}{\pi r_0^2}}$. Donde h_0 y r_0 representan la altura y el radio del recipiente respectivamente y t el tiempo transcurrido.	 La expresión que modela la rapidez con que varía la longitud está dada por, $l'(t) = -\sqrt[3]{\frac{h_0^2}{9\pi r_0^2 t^2}}$.	 Se trata de una variación decreciente con rapidez de decrecimiento a su vez decreciente (decrecimiento desacelerado).

Así, los estudiantes visualizan y relacionan el comportamiento del fenómeno por medio de la caracterización del decrecimiento y de la rapidez con la que decrece la longitud en relación al tiempo. A partir de aquí pueden obtener algunas conclusiones como: si $l'(t) < 0$ entonces la variación de la longitud respecto al tiempo se comporta de manera decreciente, a la vez que se observa la rapidez con que varía la longitud $l'(t)$ y la concavidad que se genera.
s
Desde el punto de vista del contenido curricular (entendido por la dupla programas y bibliografía) analizado anteriormente en donde se realizó un desglose de los conocimientos contemplados en el estudio de la derivada. El contenido curricular de esta tarea se asocia con: la función como relación entre magnitudes cambiantes, modelaje de fenómeno cambiante,

Tabla 3. Los tipos de variación

Precisando el estudio de la variación	Gráfica y expresión que modelan la variación	Gráfica y expresión que modela la rapidez de la variación	Tipo básico de variación
 Variación del área circular de la parte transversal del cono cuando varía la altura de agua.	 La expresión que modela la variación está dada por, $A(h)=\frac{\pi h^2}{4}$. Donde h representa el cambio en la altura de agua.	 La expresión que modela la rapidez con que varía el área está dada por, $A'(h)=\frac{\pi \mathrm{h}}{2}$.	 Variación creciente con rapidez de crecimiento a su vez creciente.
 Variación de la altura de agua cuando varía el tiempo.	 La expresión que modela la variación está dada por, $h(t)=\sqrt[3]{\frac{3h_0^2 t}{\pi r_0^2}}$. Donde h_0 y r_0 representan la altura y el radio del recipiente y t el tiempo transcurrido.	 La expresión que modela la rapidez con que varía la altura está dada por, $h'(t)=\sqrt[3]{\frac{h_0^2}{9\pi r_0^2 t^2}}$.	 Variación creciente con rapidez de crecimiento a su vez decreciente.
 Variación del volumen de la parte vacía del	 La expresión que modela la variación está dada por,	 La expresión que modela la rapidez con	 Variación decreciente con rapidez de

cono cuando varía la altura de agua.	$V_v(h) = \frac{\pi}{3} r_0^2 h_0 \left(1 - \frac{h^3}{h_0^3}\right)$. Donde h_0 y r_0 representan la altura y el radio del recipiente respectivamente y h el cambio en la altura.	que varía el volumen de la parte vacía está dada por, $V'_v(h) = -\pi \left(\frac{r_0}{h_0}\right)^2 h^2$.	decrecimiento a su vez creciente.

Referencias bibliograficas

Cantoral, R., & Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon, 42*(14), 3.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., &Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA,* 8(2), 121-156.

Hitt, F. (2003b). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Edición Especial: Educación Matemática*, 213.

Flores, C. D. (2006). La derivada y el Cálculo. Una mirada sobre su enseñanza por medio de los textos y programas. Matemática educativa: Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula, 169.

Godino, J., Batanero, C., & Moll, F. (2012). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Perspectivas en la Didáctica de las Matemáticas, 47-48.

Godino, J. (2014). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuaderno de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (11), 12.

Ibarra, S., Bravo, J., & Grijalva, A. (2001). El Papel de los Registros de Representación Semiótica en la enseñanza del Cálculo Diferencial.

Grijalva, A. (2008). *El papel del contexto en la asignación de significados a los objetos matemáticos. El caso de la integral de una función.* Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Fan, L. R. P. (2013). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada* (Doctoral dissertation, Universidad de Granada).

Stewart, J. (2010). *Cálculo de una variable: Conceptos y contextos* (4ta ed). México: CENGAGE Learning.

LA DIMENSIÓN MATEMÁTICA EN EDUCACIÓN INTERCULTURAL BILINGÜE: EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y DIVERSIDAD

María del Carmen Bonilla, Milton Rosa, Roxana Auccahuallpa, María Eugenia Reyes
APINEMA Asociación Peruana de Investigación en Educación Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Universidad Nacional de Educación, Complejo Educacional Consolidada. (Brasil, Perú, Chile, Ecuador)
mc_bonilla@hotmail.com, milton@cead.ufop.br, roxana.auccahuallpa@unae.edu.ec, mreyeses@gmail.com

Resumen
En América Latina existen más de 600 pueblos originarios y grupos minoritarios, marginados históricamente por los sistemas educativos y la política social, que obtienen resultados menos exitosos en los logros de aprendizaje en matemáticas. Para fomentar la equidad en la educación y la pertinencia de los procesos de aprendizaje y enseñanza, es necesario incorporar en ellos la riqueza y diversidad cultural de los pueblos. De allí la importancia de desarrollar la Educación Intercultural Bilingüe y diseñar procesos de aprendizaje que utilicen los conocimientos matemáticos locales. El Grupo de Trabajo pretende dar a conocer la situación de la EIB en Ecuador, Chile y Perú, así como el bilingüismo de los sordos en Brasil, desarrollando aspectos de su dimensión matemática y proponiendo alternativas que contribuyan a solucionar la problemática planteada.

Palabras clave: educación intercultural bilingüe, bilingüismo en los sordos

Abstract
In Latin America, there are more than six hundred indigenous peoples and minority groups, historically marginalized by the educational systems and the social policy, who obtain less successful results in mathematics learning achievement. To foster the education equality as well as the appropriateness of the teaching and learning processes, it is necessary that they include the peoples' cultural richness and diversity. Hence, it is important to develop Intercultural Bilingual Education (IBE) and to design learning processes that use local mathematical knowledge. This Working Team seeks to show the situation of the IBE in Ecuador, Chile and Peru, as well as the bilingualism of the deaf in Brazil by developing aspects of the mathematical dimension and proposing alternatives that contribute to the solution of this issue.

Key words: intercultural bilingual education, bilingualism of the deaf

Contribuciones del programa etnomatemática para el desarrollo de la educación matemática de alumnos sordos que se comunican en la lengua brasileña de señales (Libras)

Consideraciones Iniciales

Los resultados obtenidos en algunos estudios (Nunes, 2004) evidenciaron una contribución importante del Programa de Etnomatemática en el desarrollo de la Educación Matemática de los alumnos sordos que se comunican en Lengua Brasileña de Señales (Libras). La metodología adoptada en los estudios estaba relacionada con la contextualización de los hechos cotidianos y la negociación de los significados, favoreciendo así la construcción de conceptos matemáticos y financieros. Se tomó en cuenta vivencias cotidianas relevantes para la promoción de una relación significativa entre el conocimiento cotidiano con aquel sistematizado por la escuela. La proliferación de indagaciones e investigaciones vinculadas con esta problemática recalca la importancia de evidenciar la realidad educativa de esa población estudiantil y justifica la relevancia de los resultados obtenidos en estos estudios.

La Perspectiva Intercultural y Bilingüe

Desde la perspectiva intercultural y bilingüe, en Brasil, se plantea que los Sordos no deben ser considerados discapacitados sino miembros de una cultura con su propio lenguaje, con una peculiar forma de pensar y actuar, que merece respeto. Entonces, ser bilingüe no es solamente conocer las palabras, las estructuras de las frases y la gramática de dos lenguas, sino también comprender en profundidad los significados sociales y culturales de la lengua que forma parte de las comunidades (Andreis-Witkoski, 2012). El bilingüismo es una propuesta educativa que recomienda que las personas sordas sean enseñadas en dos idiomas para permitir su acceso a los contextos sociales, culturales y educativos.

Uno de los principales supuestos del bilingüismo es que los sordos son bilingües porque adquieren la lengua de signos como lengua materna y como segundo idioma, el idioma oficial de su país, el portugués en el caso de Brasil (Perlin y Strobel, 2009). En el bilingüismo, la lengua de señales es importante para el desarrollo de las personas Sordas, ya que promueve la comunicación y desempeña una importante función de apoyo del pensamiento, estimulando el desarrollo cognitivo y social (Brito, 1993).

Etnomatemáticas y Cultura Sorda

Los Sordos no son considerados discapacitados ni deficientes, sino miembros de una cultura que tiene su propia lengua y que también tienen una forma peculiar de pensar y actuar, que merece respeto (Goldfield, 2002). En ese sentido, el programa etnomatemática puede posibilitar el proceso de socialización de los miembros de grupos minoritários, como los Sordos, porque las matemáticas pueden funcionar como una herramienta de empoderamiento que ayuda a mejorar la calidad de vida y la dignidad en las relaciones humanas (Rosa y Orey, 2006).

Este contexto ofrece una amplia visión de las etnomatemáticas que están enraizadas en diversos contextos culturales. Al reflexionar sobre las dimensiones sociales, educativas y políticas de las etnomatemáticas se abordan aspectos importantes de este programa de investigación que conlleva al desarrollo de personas críticas y reflexivas para el desarrollo de una sociedad dinámica (D’Ambrosio, 1990).

La etnomatemática reconoce que los miembros de distintos grupos culturales desarrollan técnicas, métodos y explicaciones matemáticos únicos, los cuales les permiten entender y transformar las normas sociales. Las bases teóricas de las etnomatemáticas ofrecen alternativas válidas a los estudios tradicionales que aluden los aspectos pedagógicos y la naturaleza de la matemática. Por ejemplo, Rosa y Orey (2006) sostienen que es esencial mostrar que las etnomatemáticas incluyen ideas, perspectivas y prácticas matemáticas de individuos en diferentes culturas y que estas ideas son manifestadas y transmitidas de diversos modos. Así, la cultura de los Sordos es el camino para que ellos se ajusten a su propia identidad en función de sus percepciones visuales.

Consideraciones Finales

Por mucho tiempo, la cultura de los Sordos ha sido negada y relegada por la cultura oyente mayoritaria que la invisibiliza en el contexto social en que se enmarca. En este sentido, la descolonización de esta cultura implica su recuperación, y sólo se logra a través del empoderamiento de los sectores subalternos, en este caso, las Personas Sordas. Este sector es representado más fielmente por aquellos que han permanecido al margen de toda capacidad de decisión, los fracasados de las escuelas y aquellos que nunca las visitaron. En Latinoamérica, como una manera de dar respuesta a la creciente necesidad de reconocer y valorar las culturas propias surge la idea de considerar los derechos de los pueblos originarios a ser educados en su propia lengua. Considerando una mirada más antropológica y más acorde a nuestra concepción de Persona Sorda, es necesario proponer una Educación Intercultural Bilingüe para los estudiantes Sordos basada en las etnomatemáticas.

La Educación Intercultural Bilingüe en Chile

Consideraciones Iniciales

En Chile existen leyes que favorecen la interculturalidad y el rescate de las lenguas originarias. El Programa de Educación Intercultural Bilingüe (PEIB) es opcional y está enfocado sólo a la difusión del lenguaje. Los establecimientos educacionales con un 20% de ascendencia indígena tienen PEIB, con textos escolares. La población en Chile tiene sólo un pequeño porcentaje de indígenas en sectores rurales, la población indígena está emigrando hacia los contextos urbanos. Por lo tanto el PEIB debería focalizarse, en todos los establecimientos educacionales del país independientemente del porcentaje.

La Perspectiva Intercultural y Bilingüe

En la década de los 90 el estado reconoce la Educación Intercultural Bilingüe (EIB) y pone a disposición recursos, organismos, legalidad y experiencias pilotos a favor de indígenas en sectores rurales dejando sin intervención a los indígenas que emigran al sector urbano.

La EIB se implementa en Chile a partir del año 2010, con la promulgación del Decreto 280 que mandata la enseñanza de la lengua en universidades, colegios, y en todos los establecimientos educacionales del país que lo deseen; y obligatoriamente, en los establecimientos con una matrícula indígena igual o mayor a 20%, apoyados con textos escolares asociados a contextos rurales y poca o nula presencia en los contextos urbanos.

En las universidades hay talleres a nivel formal dentro de cursos electivos programados y a nivel informal con asociaciones y comunidades.

Hay 297 escuelas que implementan el PEIB a nivel del país. (Chile, 2012). Una de las primeras críticas realizadas por las organizaciones indígenas es que existe una discriminación hacia los alumnos/as que no alcanzan el 20% que exige la ley.

Las escuelas y colegios que postulan a un proyecto pueden tener entre sus docentes a un educador tradicional. Los educadores tradicionales son los encargados de enseñar la lengua en una hora pedagógica (45minutos) semanal. Ellos tienen conocimientos de la lengua, pero no de pedagogía y hacen esfuerzos para conectarse a la cultura escolar.

En la actualidad muchas comunidades indígenas del país continúan recreando sus prácticas educativas ancestrales, las que corresponden a los procesos de reproducción de sus espacios e instituciones sociopolíticas y socioculturales, entendiendo que la educación es también un proceso formal de socialización y regulación comunitaria o intercomunitaria, fuera de la influencia directa del estado.

Interculturalidad y Etnomatemáticas en Chile

Otra crítica es que el PEIB ha implementado recursos en materia de producción de textos en lo que se refiere a las lenguas vigentes, dejando de lado la articulación con los otros sectores de aprendizajes, como la población indígena urbana y los establecimientos secundarios. El PEIB patrocinó un texto intercultural para el subsector de matemáticas sólo en el año 2005, enfocado al contexto rural, unificando contenidos matemáticos al contexto cultural mapuche, lo que representa un gran paso hacia la interculturalidad (Reyes, 2016).

Según Peña y Hueitra (2016), la inclusión de los conocimientos ancestrales de los pueblos originarios en la asignatura de Matemática en Chile resulta compleja por tres razones: porque la perspectiva epistemológica de la matemática dominante en el medio educativo no da cuenta del carácter sociocultural de los conocimientos matemáticos; porque los programas de estudio del sistema educativo chileno son nacionales, extensos y obligatorios; y porque las evaluaciones estandarizadas que constituyen la base para la calificación de las escuelas no miden tales conocimientos.

Una alternativa consiste en redactar un apartado, dentro del currículo formal, masificando el conocimiento de las lenguas y el rescate de los sistemas de numeración y saberes ancestrales, como el Rakin del pueblo mapuche, no sólo a los niños con ascendencia indígena, sino generalizar este conocimiento a todos los escolares. Existen investigaciones y experiencias pedagógicas exitosas en educación primaria en el contexto urbano, bajo el enfoque etnomatemático, que han desarrollado una matemática más cercana y significativa.

Consideraciones Finales

La difícil incorporación de la matemática ancestral a los programas interculturales es un camino incipiente en Chile. Para poder cambiar los paradigmas al interior de las escuelas y enseñar a través de su cosmovisión, como educadores, es necesaria la articulación de la escuela con asociaciones o comunidades indígenas. La educación matemática en la escuela es una de las asignaturas eurocéntricas que más se resiste a la interculturalidad. Es necesario realizar actividades pedagógicas en función de visibilizar la problemática indígena, realizar una inclusión de saberes ancestrales y fortalecer la identidad.

Educación matemática y diversidad en Ecuador

En la última década en Ecuador existe un intento por romper con la cultura de discriminación, intolerancia y exclusión, esto es señalado en la Constitución del 2008 y las leyes y reformas actuales. Ecuador es reconocido como un país intercultural y plurinacional, conformado por población indígena, negra y mestiza con 14 nacionalidades y 22 pueblos indígenas reconocidos por el Instituto de Idiomas, Ciencias y Saberes Ancestrales. Las nacionalidades con mayor número de habitantes son los Kichwas (724 721) y Shuar (79 709). Así, los principios de la Constitución y el Sistema de EIB establecen el derecho de las Comunidades, pueblos y nacionalidades a una educación de los indígenas para los indígenas y con el fin de construir la sociedad del *Buen Vivir o Sumak Kaway*.

¿Quién participa en las definiciones de las políticas EIB en el Ecuador?

Las políticas educativas en el Ecuador para el bienestar de los pueblos y nacionalidades han marcado fuertemente las luchas por una educación de calidad, en específico, reconocer la cultura de los pueblos para lograr aprendizajes en torno a sus vivencias culturales y modos de vida. El objetivo del Modelo del Sistema de EIB (MOSEIB) es fomentar y desarrollar la lengua y cultura ancestral mediante propuestas activas, centradas en el estudiante, considerando sus ritmos de aprendizaje, es decir, un aprendizaje contextualizado en los ámbitos social, psíquico, cultural y lingüístico. Por su parte, la Ley Orgánica de la Educación Intercultural (Ecuador, 2011) estipula la contextualización, valoración, respeto, desarrollo y transversalización de la Interculturalidad en el sistema de educación nacional, así se busca el fomento de la diversidad cultural y lingüística.

El 2016 Ecuador cambió el Currículo de los Niveles de Educación Obligatoria, mejorándose la educación en el país, sin embargo, los pueblos y nacionalidades aun no poseían una soberanía educativa. Por ello, para el año 2017 se crearon los Currículos Nacionales Interculturales Bilingües, en todo el sistema educativo, elaborados en las lenguas de las nacionalidades, iniciándose el fortalecimiento de la interculturalidad en la educación. El uso de la lengua de las nacionalidades es fundamental para la enseñanza, y se ha ido implementando en las Instituciones Educativas Interculturales bilingües del país.

Educación Intercultural Bilingüe y la Etnomatemática

La educación ecuatoriana tiene raíces milenarias, forjadas por mujeres y hombres de distintos pueblos, celebrando a la Pachamama, de la que somos parte, y que es vital para nuestra existencia. Los avances en la EIB durante el periodo de la Revolución Ciudadana (2007 - 2017) han sido: la creación de las Unidades educativas del milenio, Unidades guardianas de la lengua, la formación y capacitación de docentes, el Plan de Licenciatura.

En el Currículo de EIB, y sus adaptaciones para el 2017, los materiales y recursos educativos existen a través del MOSEIB en lenguas de todas las nacionalidades, y cuenta con guías para docentes en las lenguas kichwa y shuar. Así mismo, se considera la celebración de tradiciones culturales como el Raymic, los calendarios vivenciales, mingas permanentes, cuidado de la naturaleza (siembra, huertos, etc.), los proyectos escolares con pertinencia cultural. Estas adaptaciones para la EIB han promovido la Educación infantil comunitaria; la inserción a los procesos semióticos, el fortalecimiento cognitivo, afectivo y psicomotriz; el desarrollo de las destrezas y técnicas de estudio. Con todo ello, surge la etnomatemática como alternativa para la enseñanza y aprendizaje de la matemática en las instituciones educativas. Los enfoques que se le ha dado a la matemática, como la ciencia para la vida a través de la resolución de problemas y la Etnomatemática, buscan resolver situaciones de la realidad a través del saber actuar en el contexto.

Por su parte, instituciones como la Universidad Nacional de Educación - UNAE, forman educadores a la vanguardia de las necesidades de las instituciones educativas EIB promoviendo una enseñanza contextualizada, en específico, trabajar la Matemática a través de la Etnomatemática y los procesos de la misma, contar, medir, localizar, clasificar, ordenar (Bishop, 1999). Aún los desafíos en cuanto a la Etnomatemática en el Ecuador se hacen urgentes y nos preguntamos ¿Cuáles son los objetivos que busca la etnomatemática en la EIB?, ¿para qué la etnomatemática y cuál es su relación con la EIB?

Conclusiones

La Etnomatemática en la EIB en Ecuador no sólo debe entenderse como un campo de investigación basado en la descripción e interpretación de saberes matemáticos presentes en prácticas comunitarias, pueblos o nacionalidades, sino también debe ser desarrollada como un campo de investigación comprometido con la transformación y vinculación de la realidad educativa, a partir de los saberes ancestrales propios de las comunidades y pueblos. El desarrollo de la aplicación de las adaptaciones curriculares en la EIB se hace urgente y el trabajo fundamental de las universidades como la UNAE se propone determinar las prácticas y actividades de los pueblos y grupos sociales que favorezcan una construcción de un currículo adecuado para la enseñanza aprendizaje de las matemáticas a partir de la Etnomatemática.

La Dimensión matemática en EIB en Perú

Perú es un país pluricultural y multilingüe, reconociéndose la existencia de 55 pueblos originarios que hablan 47 lenguas. La diversidad es riqueza cultural. En ese contexto es necesaria la Educación Intercultural Bilingüe como una política prioritaria de equidad, que proporciona atención educativa de calidad a los pueblos originarios, formándolos con pertinencia en contextos de diversidad y respetando su derecho a la cultura y lengua materna. Hay que tomar en cuenta que según el Censo del 2007, el 17,02% de peruanos tiene una lengua originaria como lengua materna, el 15,8% de los estudiantes de la Educación Básica Regular pertenecen a los pueblos originarios y el 25% de las Instituciones Educativas del país son bilingües (Cáceres, Cavero y Gutiérrez, 2016).

Marco Legal que respalda la EIB

A nivel internacional existen leyes marco para la EIB, como el Convenio Nº 169 de la OIT sobre pueblos indígenas y tribales (1989) y la Declaración de las Naciones Unidas sobre los derechos de los pueblos indígenas (2007). A nivel nacional se han dado diversas leyes desde la década del 70, siendo las principales la Ley Nº 28044, Ley General de Educación, (2003); el Decreto Supremo 006-2016-MINEDU que Aprueba la Política Sectorial de Educación Intercultural y Educación Intercultural Bilingüe; y el Plan Nacional de Educación Intercultural Bilingüe al 2021(2016), entre otras.

Antecedentes

La EIB aparece en medio de dos tendencias contrarias: la homogenización frente a la diversidad lingüística y cultural. Paralelo a esto, se dan procesos de apropiación y despojo de las tierras y territorios que los pueblos indígenas habían logrado conservar desde la invasión española. En la colonia se desarrollaron escuelas bilingües que fueron cerradas después de las rebeliones emancipadoras (Túpac Amaru). En los años 30 y 40 del siglo XX, por el movimiento indigenista, se dan los primeros ensayos de EB, aparece el Instituto Lingüístico de Verano. En la década del 60, en Ayacucho se ejecuta un Programa piloto de investigación y experimentación de EB, que desarrolla un *Bilingüismo sustractivo*, que privilegia el castellano. En 1972, se decreta la Política Nacional de Educación Bilingüe, en el marco de la Reforma Educativa, en donde la EB es de *mantenimiento y desarrollo*, se consolida el manejo de la lengua materna de los educandos, y se propicia el aprendizaje de la segunda lengua. En la década del 80, se desarrolla la Educación Bilingüe Intercultural, enraizada en la cultura de los educandos, pero abierta a incorporar elementos de otras culturas. Ahora se propugna el Etnodesarrollo y de reacción frente al etnocidio. La problemática linguopedagógica se sitúa en un contexto político y cultural más amplio. La EIB ya no es de *asimilación* ni *integración* sino de *articulación*. Viene a ser un *Bilingüismo aditivo*. Se procura desarrollar una Ciencia indígena, etnociencia (López y Küper, 1999).

Implementación y participación en las definiciones de las políticas de EIB

Existe un soporte normativo e institucional que permite la implementación de la EIB: la Política Sectorial de Educación Intercultural y EIB, el Plan Nacional de EIB y el Modelo de Servicio en EIB. La elaboración del Plan Nacional de EIB al 2021 (Perú, 2016) fue el resultado de un proceso participativo, liderado por autoridades del Ministerio de Educación, en el que participaron especialistas, representantes de la cooperación internacional, académicos de universidades y centros de investigación, representantes regionales y locales del estado, líderes de organizaciones indígenas andinas y amazónicas, maestros y maestras bilingües. Ha pasado por el proceso de consulta previa a los pueblos originarios desde octubre del 2015 hasta enero del 2016, logrando su aprobación.

Proyecto Educativo Nacional de EIB al 2021

Para el logro de los objetivos del Proyecto Educativo Nacional de EIB al 2021 se debe:
1) fomentar y apoyar la constitución de redes escolares territoriales responsables del desarrollo educativo local; 2) establecer programas de apoyo y acompañamiento pedagógico con funciones permanentes de servicio a las redes escolares; y 3) fortalecer las capacidades de las instituciones y redes educativas para asumir responsabilidades de gestión de mayor grado y orientadas a conseguir mejores resultados.

Logros y desafíos de la Educación Matemática en EIB

Entre los principales logros se consideran: la creación, el 2012, del Registro Nacional de Instituciones Educativas de Educación Intercultural Bilingüe, la creación de redes educativas rurales, la elaboración de material didáctico escrito en las lenguas originarias, la legislación en EIB, entre otros.

Los desafíos serían: que los docentes den un uso adecuado de los recursos educativos elaborados por el Ministerio, para ello es un requisito que los docentes dominen la lengua originaria en forma oral y escrita, condición que debe cumplirse desde la formación inicial docente. Además, para lograr la equidad es indispensable disminuir la brecha que existe entre el nivel de desempeño satisfactorio en los aprendizajes en matemática de la zona rural y el mismo concepto en la zona urbana. Para ello es necesario garantizar un aprendizaje pertinente y de calidad en Educación Matemática en EIB, promoviendo investigaciones que den a conocer, descubran, los conocimientos matemáticos ya existentes de los pueblos indígenas, para que sean incorporados en los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica, desarrollándose así la Etnomatemática. Es importante articular la escuela a las dinámicas socioculturales y económicas de la comunidad, con la participación activa de los padres de familia, líderes comunitarios, sabios y sabias, mediante la transmisión pedagógica de los conocimientos de la cultura (Perú, 2016).

Referencias bibliográficas

Andreis-Witkoski, S. (2012). *Educação de surdos e preconceito*. Curitiba, PR: CRV.
Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Editorial Paidós. Barcelona.
Brito, L. F. (1993). *Integração social e educação de surdos.* Rio de Janeiro, RJ: BABEL Editora.
Cáceres, R., Cavero, O. y Gutiérrez (2016). *Diagnóstico descriptivo de la situación de los pueblos originarios y de la política de Educación Intercultural Bilingüe en el Perú*. Ministerio de Educación.
Chile. Ministerio de Educación. Unidad de Curriculum y Evaluación (2012). *Bases Curriculares*. Santiago de Chile.
D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática*. São Paulo, SP: Editora Ática.
Ecuador. Asamblea Nacional del Ecuador. (2011). *Ley Orgánica de Educación Intercultural*. Quito.
Ecuador. Ministerio de Educación (2013). *Modelo de Sistema de Educación Intercultural Bilingüe.* Recuperado de https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2014/03/MOSEIB.pdf
Goldfield, M. (2002). *A criança surda: linguagem e cognição numa perspectiva sócio-interacionista.* São Paulo, SP: Plexus.
López, L. y Küper, W. (1999) La educación intercultural bilingüe en América Latina: balance y perspectivas. *Revista Iberoamericana de Educación*, 20.
Nunes, T. (2004). *Teaching mathematics to deaf children*. London, England: Whurr.
Peña, P. y Hueitra, Y. (2016) Conocimientos [matemáticos] mapuche desde la perspectiva de los educadores tradicionales de la comuna de El Bosque. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*. 9(1), 8-25
Perlin, G. T., y Strobel, K. (2009). *Teorias da educação e estudos surdos*. Florianópolis, SC: CCE/UFSC.
Perú. Ministerio de Educación (2016). *Plan Nacional de Educación Intercultural Bilingüe al 2021.* Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/campanias/pdf/eib-planes/rm-629-2016-minedu-plan-nacional-eib.pdf
Reyes, M. y Oliveras, M. L. (2016). *Hacia la educación intercultural bilingüe. Análisis de textos de apoyo diseñados desde un enfoque etnomatemático.* Trabajo de fin de Máster. Universidad de Granada. España.
Rosa, M. y Orey, D. (2006). Abordagens atuais do programa etnomatemática: delinenando-se um caminho para a ação pedagógica. *BOLEMA*, 19 (26), p. 19-48.

ESTRATEGIA DE CREACIÓN DE PROBLEMAS DE QR EN EL ENFOQUE POR COMPETENCIAS EN ESTUDIANTES DE MATEMÁTICA BÁSICA

Alejandro Walter de la Cruz Sánchez, Edwin Nicolás Ávila Nano

Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas UPC. (Perú)

alejandro.delacruz@upc.pe, edwin.avila@upc.edu.pe

Resumen

La UPC ha optado por un modelo educativo basado en competencias. Una de sus competencias generales es el Razonamiento Cuantitativo, del inglés *Quantitative Reasoning* (QR). Este taller tiene como objetivo mostrar a los participantes las estrategias didácticas que empleamos en la creación de problemas con las cinco dimensiones del QR: interpretación, representación, cálculo, análisis y comunicación y argumentación. La metodología del taller se basa en la preparación de materiales para dos sesiones de trabajo en las que los participantes desarrollan las habilidades que se necesitan para elaborar problemas de razonamiento cuantitativo. Al finalizar el taller, los participantes lograron redactar problemas de QR contextualizados en la vida real y valoraron el método.

Palabras clave: competencias, razonamiento cuantitativo, estrategias didácticas

Abstract

Our university has chosen a competence-based educational model, being qualitative reasoning (QR) one of its general competences. According to Terrel (2010) "people with strong QR skills have the ability to reason quantitative problems out, from a wide variety of authentic contexts and situations of daily life." This workshop will show the participants the didactic strategies we use to create problems with the five dimensions of the QR: interpretation, representation, calculation, analysis, and communication and argumentation. Likewise, we will show the identification of indicators of the QR dimensions.

Key words: competences, quantitative reasoning, mathematics

Marco Teórico

El enfoque de formación basado en competencias implica que el aprendizaje comienza a ser el centro de la educación, más que la enseñanza. Esto significa que en vez de centrarnos en cómo dar una clase y preparar los recursos didácticos para ello, ahora el reto es establecer con qué aprendizajes vienen los estudiantes, que han aprendido y que no han aprendido, cuáles son sus estilos de aprendizaje y cómo ellos pueden involucrarse de forma activa en su propio aprendizaje. A partir de ello se debe orientar la docencia, con metas, evaluación y estrategias didácticas. Se debe planificar no sólo la enseñanza presencial sino también el tiempo de trabajo autónomo de los estudiantes. (Tobón, 2006). Asimismo, Reátegui, N. (2001) plantea que una competencia es el desempeño eficiente y eficaz de una actividad, y entraña una compleja red de saberes (saber qué, saber cómo y saber ser). También, Beneitone,

P. y Esquetini C. (2007) nos dicen que "El concepto de competencia, en educación, se presenta como una red conceptual amplia, que hace referencia a una formación integral del ciudadano, por medio de nuevos enfoques, como el aprendizaje significativo, en diversas áreas: cognoscitiva (saber), psicomotora (saber hacer, aptitudes), afectiva (saber ser, actitudes y valores)". También García – M. (2010) plantea que la competencia como constructo con antecedentes complejos es una *manifestación transversal de los componentes actitudinal, técnico, procedimental y social*. Si no confluyen estos cuatro componentes no se puede afirmar el logro de una competencia sino de un componente particular. Es precisamente este rasgo el que promueve el cambio curricular en el contexto universitario, puesto que requiere una *aplicación contextualizada, transferida a una situación de aprendizaje – evaluación concreta.*

Bennett J. y Briggs W. (2015) plantean que el enfoque de las matemáticas desde el razonamiento cuantitativo ayuda a los estudiantes a construir habilidades necesarias para comprender los principales problemas de la vida cotidiana y obliga a los estudiantes a adquirir las herramientas de resolución de problemas que necesitarán para pensar críticamente sobre cuestiones cuantitativas en la sociedad contemporánea. Gaze E. (2016) plantea que el empoderamiento de los números se hace a través de pensar cuantitativamente, esto es comunicarse con números y desarrolla al estudiante a pensar críticamente y ser alfabetizados numéricamente mientras muestran cómo usamos los números para comunicarnos en la vida cotidiana. El docente en este enfoque debe tener cultura educativa, es decir reflexionar e investigar continuamente para crecer como persona y educador trascendiendo en sus estudiantes, así como planificar el proceso de enseñanza aprendizaje a través de los diseños instruccionales de cada clase, incluyendo actividades en los mismos, trabajar en equipo, hacer uso de las nuevas tecnologías, entre otros.

Álvarez, M. (2011) presenta la actuación del docente en este enfoque por competencias: "La educación basada en el desempeño, no solo está centrado en el estudiantado, sino también en el rol docente. Compromete a éste en la modificación de su práctica docente, su manera de diseñar las actividades y estrategias, su planeación no como un mero requisito administrativo, sino como un referente de cómo conducir al estudiantado en la consecución de los objetivos, propósitos y en el desarrollo de sus competencias y conocimientos, de forma tal que les sirvan para enfrentar y responder a determinados problemas presentes a lo largo de la vida".

Vázquez, G. (2007) nos dice "El profesor competente es ese que ha adquirido y va perfeccionando progresivamente su capacidad de conocer (de conocer los contenidos y procesos a los que se aplican, sus alumnos y su entorno institucional y cultural)… esa capacidad cognitiva, o la dimensión cognitiva de su competencia personal- profesional implica la capacidad de comprensión del mundo pues, de otro modo, la función educativa perdería su sentido último: el de dar cuenta (darse cuenta, en el sentido consciente y cognitivo del término) de la relación hombre-mundo, de los hombres entre sí y del hombre en sí y consigo mismo".

Con respecto al tema de las competencias, es importante rescatar lo que propone Philippe Perrenoud (2005:10), en su texto "diez nuevas competencias para enseñar", en donde presenta las siguientes familias de competencias:

1. Organizar y animar situaciones de aprendizaje;
2. Gestionar la progresión de los aprendizajes;
3. Elaborar y hacer evolucionar dispositivos de diferenciación;
4. Implicar al alumnado en su aprendizaje y en su trabajo;

5. Trabajar en equipo;
6. Participar en la gestión de la escuela;
7. Informar e implicar a los padres;
8. Utilizar las nuevas tecnologías;
9. Afrontar los deberes y los dilemas éticos de la profesión,
10. Organizar la formación continua

Es importante a tener en cuenta en este proceso, las competencias docentes, los puntos coincidentes como las divergencias propias por la naturaleza de los cursos y el nivel en que se encuentren estas, las cuales estarán en función del ciclo en el que se encuentre el curso. Además, es importante que el docente tenga las competencias necesarias, tanto en ambientes presenciales como virtuales, ya que es un medio de aprendizaje en las nuevas generaciones de estudiantes.

Metodología

El instrumento de trabajo es un material preparado para dos sesiones de trabajo. El material consta de una lectura que contiene información cuantitativa y sirve de modelo de problemas QR para el participante. Posteriormente, los participantes se agrupan y elaboran problemas QR en base a ese modelo. El taller está dirigido a profesores de matemática de nivel universitario entre 25 y 50 años.

La estructura del taller consta de dos partes, cada una de ellas permite a los participantes alcanzar un logro determinado:

Primera sesión

Elaboración de los problemas de Razonamiento Cuantitativo

Los participantes recibirán materiales que permitan elaborar estos problemas según las cinco dimensiones del QR:

Interpretación: Describe la información en situaciones de contexto real.
Representación: Matematiza situaciones en contexto real.
Cálculo: Efectúa procedimientos matemáticos y/o estadísticos mediante algoritmos convencionales.
Análisis: Analiza los resultados dentro de un contexto real dado.
Comunicación/argumentación: Explica, con argumentos sencillos y evidentes, los resultados de su razonamiento haciendo uso adecuado del lenguaje matemático y/o estadístico ordenado. El problema modelo que reciben los participantes se muestra en el anexo 1, y busca desarrollar en los estudiantes las siguientes habilidades:

1. Interpreta el nivel de confianza a fin de calcular el nivel de significancia
2. Representa matemáticamente el nivel de confianza en términos del nivel de significancia: $1-\propto$
3. Calcula el subíndice de Z
4. Identifica el valor de Z
5. Identifica el tipo de variable para hacer uso de la fórmula
6. Reemplaza en la fórmula los valores correspondientes a fin de calcular n.
7. Aproxima n al entero inmediato superior.

8. Compara n/N con el valor 0,15
9. Decide usar el n corregido n^*
10. Representa matemáticamente el n^*
11. Expresa n^* en términos de los valores de N y n.
12. Calcula el valor de n^*
13. Aproxima n^* al entero inmediato superior.
14. Sugerencia de Gina a Miguel:
    Analiza de acuerdo a los resultados obtenidos que el servicio de atención al cliente es deplorable por lo que debe tomar decisiones inmediatas.

Segunda sesión

Identificación de indicadores de las dimensiones del QR

En esta sesión, los participantes tratan de clasificar las habilidades detalladas en la primera sesión dentro de cada una de las dimensiones. Del mismo modo que en la primera sesión, los participantes contrastan sus resultados con la propuesta del diseñador. Una propuesta de rúbrica para este problema es el que se muestra a continuación, en la cual se redactan los indicadores de cada una de las dimensiones.

Tabla 1. Rúbrica para este problema

Dimensiones del QR	Proceso de Solución	Logros			
		Destacado	Esperado	Proceso	Inicio
I	• Identifica el valor de Z. • Identifica los parámetros a emplear en la fórmula de n. • Identifica el tipo de variable para hacer uso de la fórmula dada.				
R	• Representa matemáticamente el nivel de confianza en términos del nivel de significancia. • Representa matemáticamente el n^*. • Expresa n^* en términos de los valores de N y n.				
C	• Calcula el subíndice de Z. • Reemplaza en la fórmula los valores correspondientes a fin de calcular n. • Aproxima n al entero inmediato superior. • Calcula el valor de n*. • Aproxima n^* al entero inmediato superior.				
A	• Compara n/N con el valor 0,15. • Decide usar el n corregido (n^*). • Analiza de acuerdo a los resultados obtenidos que el servicio de atención al cliente es deplorable.				
C/A	**Comunica** En ambos casos el proceso es errado y los resultados no son confiables.				

Conclusiones

Dentro del enfoque por competencias, la creación de problemas requiere al mismo tiempo el diseño de nuevas estrategias. La estrategia planteada en el taller es solo una de las alternativas propuestas, en ella se propone una estructuración de habilidades de menor a mayor jerarquía encajadas dentro de un sistema de dimensiones que la UPC propone. El hecho más relevante dentro de la estrategia propuesta es la contextualización de esa estructura dentro de un escenario simulado cercano tanto a los estudiantes como a los profesores.

Además podemos concluir que el solo hecho de acumular conocimientos no basta para que el estudiante logre una competencia, se hace necesario que este sea significativo. La propuesta del desarrollo de la competencia se dará solo si generamos actividades que conecten los contenidos teóricos con situaciones de la vida cotidiana, en donde el estudiante sea partícipe de la construcción de su aprendizaje. De esta manera el estudiante encontrará sentido a la actividad propuesta.

Todo ese proceso se constituye en un reto para el docente, en el que tendrá que aplicar toda su creatividad para diseñar e implementar métodos didácticos pensados con el fin de fortalecer y desarrollar las competencias que le exige el dictado de un curso en el marco de un currículo por competencias.

Referencias bibliográficas

Álvarez, M. (2011). Perfil del docente en el enfoque basado en competencias. Revista Electrónica Educare, vol. XV, núm. 1, enero-junio, 2011, pp. 99-107. Recuperado el 20 de enero del 2017 de: http://www.redalyc.org/pdf/1941/194118804008.pdf

Beneitone, Esquetini, González, Marty, Siufi, & Wagenaar. (2007). *Reflexiones y perspectivas de la educación superior en América Latina. Informe final* –Proyecto Tuning- América Latina 2004-2007 pp. 36. Bilbao, España: Universidad de Deusto y Universidad de Groninger. Recuperado de http://tuningacademy.org/wp-content/uploads/2014/02/TuningLAIII_Final-Report_SP.pdf

Bennett J. y Briggs W. (2015). *Using and Understanding Mathematics: A Quantitative Reasoning Approach*. Brunswick, EUA. Pearson.

Díaz, M. (2008). *Reseña de "DIEZ NUEVAS COMPETENCIAS PARA ENSEÑAR" de Philippe Perrenoud. Tiempo de Educar,* Enero-Junio, pp. 153-159. Recuperado el 7 de octubre de 2017 de: http://www.redalyc.org/pdf/311/31111439008.pdf

García, M. (2010). *Diseño y validación de un modelo de evaluación por competencias en la universidad. 2010* pp.43. Recuperado el 6 de octubre de 2017 de: http://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/5065/mjgsp1de1.pdf

Gaze E. (2016). *Thinking Quantitatively: Communicating with Numbers*. Brunswick, EUA. Pearson.

Reátegui, N (2001). *El reto de la Evaluación.* pp. 30 Recuperado de: https://www.google.com.pe/search?q=retos+para+la+evaluacion+de+norma+reategui&rlz=1C1CHZL_esPE719PE719&oq=retos&aqs=chrome.0.69i59j69i57j0l4.4086j0j8&sourceid=chrome&ie=UTF-8

Terrel L. R. (2010). *Quantitative Literacy VALUE Rubric.* Association of American Colleges and Universities. Recuperado el 20 de marzo del 2017 de: https://www.aacu. org/value/rubrics/quantitative-literacy

Tobón, S. (2006). *Aspectos básicos de la formación basada en competencias*. Proyecto Mesesup, 2006 pp. 14 -15. Recuperado el 20 de diciembre de 2016 de: http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:http://virtualnet.umb.edu.co/virtualnet/cursos/autores_2012/tobon_competencias.pdf

Vázquez, G. (2007). *La formación de la competencia cognitiva del profesor. Estudios Sobre Educación* pp. 49-50 Publicaciones de la Universidad de Navarra, 41(12), 41-57. Recuperado de: http://dadun.unav.edu/bitstream/10171/8995/1/12%20Estudios%20Ec.pdf

Anexo 1

Los jóvenes y los suplementos nutricionales

Natural Power Nutrition es una de las empresas peruanas líderes en el mercado de "Vitaminas y suplementos nutricionales para la salud y el deporte". Están presentes en las principales cadenas de gimnasios y en los distribuidores más importantes a nivel nacional.

Miguel es el Gerente General de la empresa y preocupado por la baja demanda a inicios del presente año como consecuencia de la migración de sus clientes a la competencia, desean identificar cuál es el nivel de satisfacción del cliente respecto a la atención entre otras interrogantes. Para el estudio que realiza decide tomar una muestra a partir de una población conocida de una encuesta anterior de 734 personas y para ello necesita conocer el tamaño de la muestra representativa, en el marco de un muestreo aleatorio simple, usando los siguientes valores.

1. Nivel de confianza[1] = 95%
2. Error máximo permitido: $e = 2\%$
3. Probabilidad que ocurra el suceso esperado $p = 0{,}3$
4. Probabilidad de que no ocurra el suceso esperado $q = 0{,}7$
5. Nivel de significancia: $\propto$

6. Fórmula para calcular el tamaño de la muestra para la estimación de una proporción

$$n = \frac{(Z_{1-\frac{\propto}{2}})^2 pqN}{e^2(N-1)+(Z_{1-\frac{\propto}{2}})^2 pq}$$

Además se sabe que:

$Z_{0,90}$	$Z_{0,95}$	$Z_{0,975}$	$Z_{0,980}$	$Z_{0,99}$
1,28	1,65	1,96	2,05	2,33

Para efectos de la investigación, dado que la población es homogénea, en el caso de que se obtenga que la razón entre el tamaño de la muestra y el tamaño de la población, sea mayor a 0,15 deberá calcular un nuevo tamaño de muestra (tamaño de la muestra corregida n*) mediante la fórmula definida como sigue:
El tamaño de la muestra corregida se define como el cociente entre el producto y la suma de los tamaños de la población y muestra inicial.

[1] Se define el nivel de confianza como uno menos que el nivel de significancia.

CUESTIONARIO

1. Género

   Masculino (   )   Femenino (   )

2. Edad: _____________
3. ¿Qué tipo de suplemento ingiere para ganar masa muscular?
   - Proteína (   )
   - Quemador de grasa (   )
   - Ganador de masa (   )
   - Pre – Entreno y aminoácidos (   )
   - Otros
4. ¿Cuál es el nivel de satisfacción del cliente respecto a la atención?
   - Muy insatisfecho (   )
   - Algo insatisfecho (   )
   - Indiferente (   )
   - Algo satisfecho (   )

Figura 1. Cuestionario.

Luego de procesar los datos, Miguel obtuvo los siguientes resultados:

1. El 60% de los encuestados son hombres.
2. El 55% de los encuestados ingiere proteínas para ganar masa muscular.
3. El 75% de los encuestados está totalmente insatisfecho con la atención.

Su amiga Gina que es una experta en Estadística al leer la encuesta y los procesos que ha seguido Miguel, le dice que debe tomar al menos una decisión inmediata.
¿Por qué dijo esto Gina?
¿Qué le sugeriría Ud. a Miguel, en base a los resultados obtenidos?

ANÁLISIS COMPARATIVO DE TEXTOS PARA LA ENSEÑANZA DE LA CIRCUNFERENCIA

Rafael Antonio Arana-Pedraza, Evaristo Trujillo-Luque, Omar Cuevas Salazar, Julia Xóchilt Peralta García

Instituto Tecnológico de Sonora. (México)

rafael.arana@itson.edu.mx, evaristo.trujillo@itson.edu.mx, omar.cuevas@itson.edu.mx, julia.peralta@itson.edu.mx

Resumen

En el presente trabajo se reporta la comparación del análisis de dos textos de matemáticas para la enseñanza de la circunferencia, a través de las nociones de sistema de prácticas y configuración epistémica propuestos por el Enfoque Ontosemiótico y la Instrucción Matemática (EOS) desarrollado por Godino, Batanero y Font (2007). El primer texto se caracteriza por ser utilizado en un esquema de enseñanza tradicional y el segundo es una propuesta didáctica generada con la intención de relacionar de manera oportuna los objetos matemáticos relacionados con la circunferencia puestos en juego y resaltando las relaciones entre ellos.

Palabras clave: análisis de textos, enfoque ontosemiótico (EOS), circunferencia

Abstrac

This paper aims to report the comparison between two mathematics texts used to teach topics related to the circumference, through the notions of systems of practices and epistemic configurations which are proposed in the Onto-semiotic Approach of mathematics instruction, (OSA) developed by Godino, Batanero and Font (2007). The first text is characterized for being used in a traditional-based teaching scheme, meanwhile the second one is a didactical proposal developed with the aim to properly link the primary mathematical objects related to the circumference, highlighting the relations between them.

Key words: text analysis, onto-semiotic approach (OSA), circumference

Introducción

Durante muchos años, la práctica matemática promovida en el aula se ha centrado en procesos de memorización y repetición de los ejercicios que el profesor desarrolla en el aula de clases. Una de las críticas más importantes fue que al imponer un proceso mecánico, se fuerza al alumno a confiar más en la memorización que en la comprensión. En este modelo de enseñanza tradicionalista se pide al alumno que imite al profesor y/o el libro que utilizan, enfrentándolo a diversos procedimientos que aprenden de memoria a fin de tener un amplio dominio de ellos. Estos procedimientos generalmente se presentan de manera desconectada entre sí, a pesar de ir encaminados a que el alumno los utilice en matemáticas superiores (Kline, 1976).

Aunado a lo anterior, no permitir los procesos de esquematización de la práctica matemática en el alumno es una parte primordial del problema de la falta de comprensión de dichos procesos. El desarrollo histórico de los diferentes objetos matemáticos es producto de procesos de esquematización progresiva, que si bien el estudiante no necesita repetirlos, tampoco es conveniente que parta del último punto al que se llegó anteriormente (Freudenthal, 1981/2001).

Esta y otras premisas han servido de base para generar un proceso de reestructuración de los contenidos de la materia de Fundamentos de Matemáticas, la cual es impartida en el Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON) como una materia remedial con el objetivo de nivelar el conocimiento de los alumnos en los contenidos matemáticos mínimos necesarios para la oferta educativa de ingeniería. De acuerdo a Arana, Peralta, Cuevas y Trujillo (2017) un análisis global sobre el texto utilizado anteriormente permitía visualizar una tendencia a la repetición y mecanización de los ejercicios planteados como método de enseñanza. Lo anterior llevó a que se generara una propuesta para la enseñanza de cada uno de los temas que comprenden el curso remedial, en dicha investigación generó el capítulo referente a la circunferencia del nuevo libro de texto, que además fue analizado tomando como referencia algunos constructos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS).

Objetivo

La presente investigación tiene como objetivo comparar el sistema de prácticas del manual anterior con la propuesta didáctica que se realizó, a través del análisis de la articulación de las configuraciones epistémicas de ambos textos, con el fin de identificar las diferencias en ambos sistemas de prácticas.

Marco Teórico

Según Godino, Batanero y Font (2007), se considera práctica matemática a toda actuación o expresión realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos. Sin embargo, más que estudiar una práctica en particular para un problema concreto, resulta de mayor interés estudiar el sistema de prácticas (operativas y discursivas) puestas en manifiesto al abordar algún tipo de situación problemática. Los sistemas de prácticas se pueden dividir en dos: el que realiza una persona (significados personales), o los que se realizan en el seno de una institución (significados institucionales).

La tipología básica de significados que establecen Godino, Batanero y Font clasifica a los significados institucionales en los siguientes tipos:

- Implementado: en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
- Evaluado: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.
- Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
- Referencial: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global

requiere realizar un estudio histórico – epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.

Respecto de los significados personales se clasifican los siguientes tipos:

- Global: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.
- Declarado: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- Logrado: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen.

En el EOS se considera que los objetos matemáticos emergen de un sistema de prácticas donde se ponen en juego diferentes elementos para resolver cierta situación que se presenta. Godino, Batanero y Font (2007) califican estos elementos en seis objetos matemáticos primarios: (1) Situaciones, (2) Lenguaje, (3) Conceptos, (4) Proposiciones, (5) Procedimientos y (6) Argumentos. El análisis de estos objetos y sus relaciones permiten establecer una estructura que se denomina Configuración Epistémica (ver Figura 1).

Font y Godino (2006), establecen que la forma en cómo interactúan los objetos puestos en juego en un texto matemático permiten conocer la anatomía del mismo.

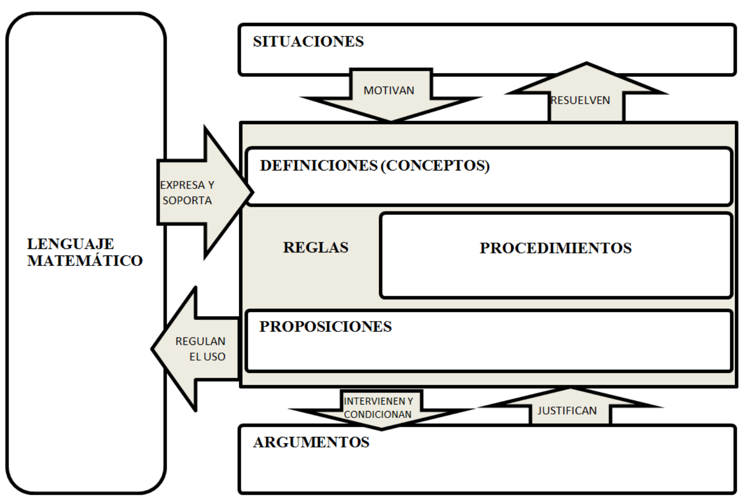


Figura 1. Relación de los objetos primarios en una configuración epistémica. Adaptado de "Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática" por Godino, Batanero y Font, 2009.

Contexto

El presente trabajo se realiza en el Instituto Tecnológico de Sonora, como parte del seguimiento a la reestructuración de la asignatura de Fundamentos de Matemáticas, la cual se oferta a los alumnos que cursan el primer semestre de los programas educativos de ingeniería en el nivel superior (18-22 años).

Diseño

Esta investigación se realiza desde un enfoque cualitativo utilizando constructos teóricos del EOS, principalmente se utiliza la noción de Configuración Epistémica a través de la identificación y relación de los seis objetos primarios que caracteriza la teoría: (1) situaciones, (2) lenguaje, (3) conceptos, (4) procedimientos, (5) proposiciones y (6) argumentos.

Procedimiento

1. Identificación de los objetos primarios promovidos por el manual: se dividió en unidades de análisis agrupando las situaciones que buscaban la emergencia de un mismo objeto matemático. A su vez cada una de las unidades de análisis se dividió en secciones, que se denominaron unidades epistémicas, con el objetivo de identificar los objetos primarios que se ponen en juego en cada una de ellas.

2. Estructuración de las Configuraciones Epistémicas: se estructuró para cada unidad de análisis una Configuración Epistémica de los elementos y sus relaciones. Además, se realizó una Configuración Epistémica global caracterizando el sistema de prácticas promovidas por los textos utilizados.

3. Comparación de los sistemas de prácticas: se estableció el sistema de prácticas del manual a través de las Configuraciones Epistémicas, el cual se comparó con los resultados obtenidos en la investigación realizada por Arana (2016) sobre la propuesta didáctica que desarrolla, para contrastar los elementos puestos en juego en cada uno de ellos.

Análisis de resultados

Para realizar la comparación entre los sistemas de prácticas que se promueven se analizaron los objetos matemáticos puestos en juego por cada uno de los documentos. El manual que se utilizaba anteriormente se divide en dos subtemas: (1) Distancia entre dos puntos y (2) Definición de Círculo. En cuanto a la propuesta didáctica se divide en cuatro subtemas: (1) La distancia entre dos puntos, (2) La ecuación y los elementos de la circunferencia, (3) La recta tangente a la circunferencia y (4) La longitud de arco y el área de sector circular.

Para caracterizar el sistema de prácticas del manual, se dividió en unidades de análisis de las cuales se distinguieron cuales objetos estaban presentes en el texto matemático y cuál era la naturaleza de sus relaciones a través de la articulación de diferentes configuraciones epistémicas. Una vez establecidas las configuraciones epistémicas para el manual, se retomaron las configuraciones realizadas por Arana (2016) para la propuesta didáctica y se realizó una comparación entre sus sistemas de prácticas propuestos.

Derivado de las comparaciones entre las configuraciones epistémicas de ambas propuestas se desprenden algunos resultados que se presentan a continuación. Respecto a las configuraciones en general se aprecian objetos matemáticos primarios similares en ambos textos, sin embargo, difieren en el uso y en los objetos matemáticos primarios en los que se centra. Lo anterior se puede notar en relación con los elementos lingüísticos que se utilizan, donde se percibe que las expresiones analíticas que se distinguen en el lenguaje son muy parecidas, no obstante, se nota una clara diferencia entre el número de figuras que se emplean y las descripciones en ambos casos. Por ejemplo, la figura que sirve como base para la emergencia del concepto circunferencia en el manual (ver figura 2) va muy enfocada a la relación con la ecuación y se muestran coordenadas que después no se mencionan o relacionan con algún otro objeto, en contraste en la propuesta didáctica la figura empleada (ver figura 3) proviene de un ejemplo mostrado en una actividad inicial que solicitaba encontrar distancias entre puntos en un plano cartesiano y el centro, retomando la característica de que algunos puntos se encontraban a la misma distancia y quedan sobre una curva que se traza al abrir un compás considerando la distancia del centro a algún punto en el plano. De esta manera se presentan objetos matemáticos en contextos muy distintos, en la propuesta existe una idea e interacción previa y se presenta una situación en la que se aprecia que la gráfica contiene a algunos puntos, efectivamente aquellos en que la distancia es la misma

Con referencia a los conceptos, existen diferencias en cuanto a la utilización de los términos circunferencia y círculo. En el caso del manual, se utiliza la definición: “el círculo es el conjunto de todos aquellos puntos del plano que se encuentran ubicados a una distancia fija r de un punto dado, llamado centro del círculo; r es el radio del círculo” como parte del objeto primario lenguaje en forma verbal, asociado a la forma gráfica que se muestra en la figura 2. Contario a la propuesta didáctica donde aparece la definición asociada a la figura 3 como:

> … [La circunferencia] se define como el conjunto de puntos que se encuentran a una misma distancia de un punto de origen (punto de referencia). Este punto de origen se define como centro y la distancia a la que se encuentran todos los puntos desde el centro de la circunferencia se le denomina radio (Arana, Trujillo, & Cuevas, 2016, p. 242)

Con relación al concepto de circunferencia, se considera que los objetos primarios asociados al concepto de distancia entre dos puntos juegan un papel importante ya que en ambos casos la emergencia de esta se basa en esta noción. En el manual se asocian diferentes notaciones con la distancia entre dos puntos como: “P_1P_2”, “$d_1 = x_2 - x_1$”, “$d_2 = y_2 - y_1$”, “$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$”, “distancia AB”, “$\overline{AB}$”, sin encontrar de manera explícita la idea de que todas representan a un mismo objeto; en la propuesta se hace el uso de la letra minúscula d para referirse a la distancia entre dos puntos.

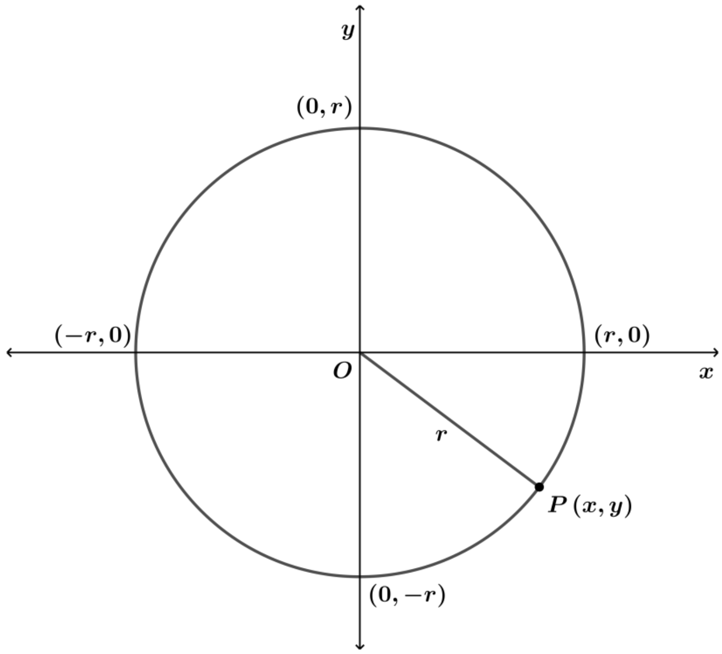


Figura 2. Gráfica para la emergencia del concepto de círculo. Adaptado de "Manual del Curso: Fundamentos de Matemáticas" por Morimoto, 2011.

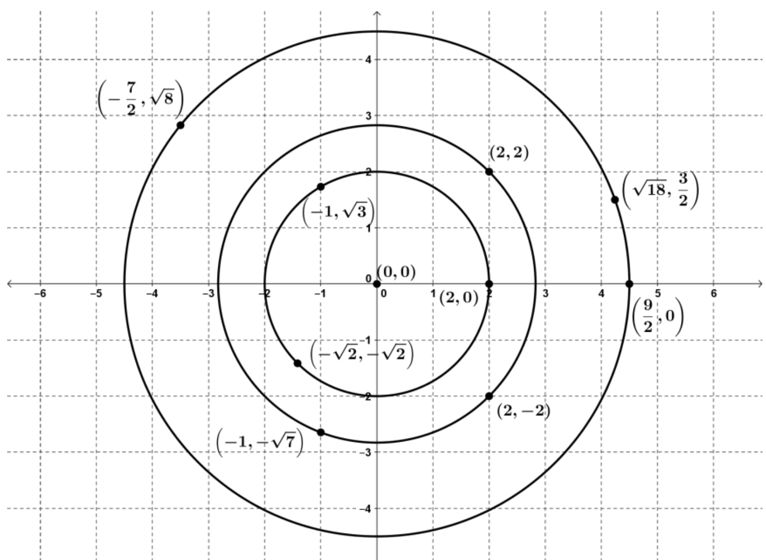


Figura 3. Gráfica para la emergencia del concepto de circunferencia. Adaptado de "La circunferencia" por Arana, Trujillo y Cuevas, 2016.

Las proposiciones y argumentos relacionados con la distancia entre dos puntos también tienen diferencias notorias, los argumentos utilizados en la propuesta para sustentar que el orden en que se tomen los dos puntos para calcular la distancia es indistinto se basan en la noción de desplazamiento y valor absoluto que se retoman de capítulos previos en el libro de texto. Contrario a los expuestos en el manual, donde se utiliza la noción de la potencia par de "$(x_2 - x_1)^2$ y $(y_2 - y_1)^2$" para sostener que al ser siempre cantidades positivas el cualquiera de los dos puntos puede ser el inicial. En esta idea se identifica un posible conflicto semiótico ya que el manual establece "En consecuencia, cuando se emplea esta fórmula, cualquiera de los dos puntos $(x_2 - x_1)^2$ o $(y_2 - y_1)^2$ puede tomarse como punto inicial" asociando la notación $(x_2 - x_1)^2$ o $(y_2 - y_1)^2$ al concepto de punto y no de cantidad como se utiliza previamente.

Respecto a los procedimientos se observan que son parecidos, en el caso del manual se identifican (Morimoto, 2011, p. 176):
complementamos los cuadrados en $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$

$$x^2 + y^2 + 6x + 10y + 32 = 0$$
$$(x^2 + 6x) + (y^2 + 10y) = -32$$
$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 + 10y + 25) = -32 + 34$$
$$(x + 3)^2 + (x + 5)^2 = 2$$

En la propuesta los procedimientos se acompañan del lenguaje verbal y se muestra el uso de las propiedades de la igualdad, por lo que se relacionan al menos los objetos primarios: procedimientos, lenguaje verbal y simbólico, proposiciones, argumentos y conceptos. Se muestra uno de los procedimientos encontrados en la propuesta:

> Primeramente, se ordenan los términos de forma descendente con el fin de acomodar aquellos que son semejantes, primero los que contengan x y después los que contengan y:
> $$x^2 + 6x + y^2 + 10y + 30 = 0$$
> Después se toma el coeficiente del término lineal de cada una, se divide entre dos y se eleva al cuadrado; sumando y restando para no alterarla ecuación:
> $$x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 + y^2 + 10y + \left(\frac{10}{2}\right)^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2 + 30 = 0$$
> Se simplifican las fracciones y se forman los trinomios cuadrados perfectos:
> $$(x + 3)^2 - (3)^2 + (y + 5)^2 - (5)^2 + 30 = 0$$
> Se pasan los términos independientes al lado derecho de la igualdad:
> $$(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = -30 + 25 + 9$$
> Se simplifica y se obtiene la ecuación de una circunferencia en forma estándar
> $$(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 4$$
> En esta ecuación puede observarse que el centro es $C(-3, -5)$ y el radio $r = 2$; por lo que se la ecuación $x^2 + y^2 + 6x + 10y + 30 = 0$ representa una circunferencia. (Arana, Trujillo, y Cuevas, 2016, pp. 247-248)

Conclusiones

A pesar de que el sistema de prácticas utilizado por ambos textos pudiera considerarse similar en tanto a los objetos primarios que pone en juego, la forma en que se presentan varía al momento de introducirlos. La presencia de los objetos primarios es importante, pero su articulación brinda situaciones más ricas que brindan la posibilidad de significados más robustos. El manual presenta los conceptos matemáticos al iniciar cada tema y los utiliza como herramientas al momento de solucionar una situación planteada, contrario a la metodología de la propuesta didáctica, donde se pone en juego una situación inicial que propicia el uso de diferentes objetos intervinientes y la emergencia de nuevos objetos a través de la misma. Los argumentos son una pieza clave en la construcción del significado y permite en algunas circunstancias que las relaciones entre los objetos primarios como los procedimientos, conceptos y situaciones tengan un sustento. La conexión entre los temas es importante para la construcción de significados; en el manual se observan procedimientos y proposiciones que pueden ser utilizados para la construcción de objetos emergentes, pero se detectó que en vez de ello se omiten estos u otros argumentos y, en el caso de que se usen otros argumentos estos aparecen de forma desarticulada.

Otro aspecto importante donde existe discrepancia es la concepción de lo que es una circunferencia y la diferencia con el círculo; en la propuesta didáctica se establece de manera ostensiva una diferencia entre ambos, mientras que en el manual no se utiliza el concepto de circunferencia y se usa indistintamente el de círculo, situación que genera de manera potencial un conflicto semiótico para los cursos sucesivos donde se utiliza este objeto matemático. El análisis de textos es importante para conocer el significado institucional de referencia, identificar el sistema de prácticas, conocer la estructura del texto. Se considera también oportuno como un medio para la formación docente ya que el modelo del CCDM considera que el profesor de matemáticas identifique el sistema de prácticas matemáticas, en la competencia de análisis ontosemiótico.

Referencias Bibliograficas

Arana, R. A. (2016). *Diseño y análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de la circunferencia* (tesis de maestría inédita). Instituto Tecnológico de Sonora, México.

Arana, R. A., Peralta, J. X., Cuevas, O., & Trujillo, E. (2017). Diseño y análisis de un texto para la enseñanza de la circunferencia a través de configuraciones epistémicas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30*, 624–632.

Arana, R. A., Trujillo, E., & Cuevas, O. (2016). La circunferencia. En O. Cuevas & J. X. Peralta (Eds.), *Fundamentos de matemáticas: una propuesta para su enseñanza y aprendizaje*. Editorial Tabook.

Font, V., & Godino, J. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaço Matematica Pesquisa*, *8* (1), 67-98.

Freudenthal, H. (2001). Problemas fundamentales de la educación Matematica. (Trad. A. López). ContactoS, *42*, 11–22. (Reimpreso de Educational Studies in Mathematics 12, pp. 133–150, por H. Freudenthal, 1981)

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, *39*(1), 127–135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Recuperado a partir de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Kline, M. (1976). El Fracaso de la Matemática Moderna: ¿Por qué Juanito no sabe sumar? Madrid: Siglo XXI de España Editores.

Morimoto, T. (2011). *Manual del Curso: Fundamentos de Matemáticas*. México: Instituto Tecnológico de Sonora

EL USO DE LAS GRÁFICAS Y LA TECNOLOGÍA EN EL BACHILLERATO

Julio Yerbes González, Claudia Leticia Méndez Bello
Casio México. (México)
julyer11@hotmail.com, claudia.mendez@casiomexico.com.mx

Resumen
El presente escrito resulta de las reflexiones obtenidas del taller presentado en Relme 31. En este se propone una actividad con el uso de una tecnología escolar, con la finalidad de generar diversos argumentos que suelen opacarse en el aula, al dar un tratamiento bajo una única mirada de estudio. También se propone un modelo que sirvió de referencia para el diseño de las actividades incorporando la tecnología. La actividad diseñada encuentra sustento dentro del marco de la Socioepistemología, pues busca la construcción social de conocimiento matemático, a través de un análisis gráfico, la identificación de tendencias y la modelación de estas, proporcionando información suficiente para una toma de decisiones.

Palabras clave: gráficas, comportamiento tendencial, predicción, tecnología

Abstract
The present paper is the result of the reflections obtained from the workshop presented in Relme 31. In this one proposes an activity with the use of a school technology, with the purpose of generating diverse arguments that often obscure in the classroom, when giving a treatment under a single study look We also propose a model that served as a reference for the design of the activities incorporating the technology. The activity designed finds support within the framework of Socioepistemology, as it seeks the social construction of mathematical knowledge, through a graphic analysis, the identification of trends and the modeling of these, providing sufficient information for a decision-making.

Key words: graphics, tendential behavior, prediction, technology

Introducción

En el presente escrito se pretende exhibir un ejemplo de una actividad con el uso de una tecnología escolar. En esta se pretende abordar un conocimiento matemático que tiene lugar en el bachillerato mexicano, los sistemas de ecuaciones lineales. La intención es que la tecnología sea un instrumento que permita discutir además del punto de intersección de las dos rectas, otros elementos como las tendencias en los comportamientos de las rectas, las cuales serán un elemento para realizar una predicción dado el problema expuesto.

La actividad que se presenta se configuró a raíz de un proyecto pensado para generar en un aula de clases de matemáticas un escenario de debate y construcción. La idea de establecer un *laboratorio tecnológico*, no es solo para tener un espacio físico con tecnología que se use para tratar cual o tal tema; sino que, nuestra propuesta es configurar un espacio de debate, experimentación y construcción de estrategias de solución donde la tecnología juegue un papel relevante para estudiar la matemática de la escuela desde otro plano, uno donde puedan generarse una diversidad de argumentaciones.

Habrá escenarios escolares que cuenten con la infraestructura para tener un laboratorio de matemáticas con diversos elementos puestos en juego (un aula exclusiva acondicionada para trabajar matemáticas con calculadoras o medios computacionales), habrá quienes no cuenten con ello. Por ello, Nuestra propuesta es hacer de la clase de matemáticas un laboratorio, donde los elementos primordiales sean el diseño o rediseño de situaciones o actividades matemáticas que, con el uso de la tecnología, nos permitan discutir diversas aristas de un objeto o concepto matemático.

Problemática

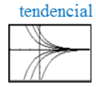
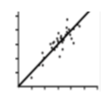
En SEP (2013a), se explicita que la tecnología de la información se ha introducido a la educación, en particular en el bachillerato y nivel universitario, sin embargo, no se reconoce un avance contra su uso es insuficiente. Ante lo anterior nos cuestionamos sobre el porqué no se percibe un avance, en el uso de la tecnología, consideramos que pueden ser muchos factores desde la falta de infraestructura hasta la falta de material disponible para trabajar, es así que presentamos una propuesta para trabajar con tecnología, donde el elemento clave es mirar de otra manera al conocimiento matemático y aprovechar los elementos tecnológicos que se tengan disponibles.

El trabajo que se desarrolla en este documento se encuentra enmarcado dentro de la Teoría Socioepistemológica, la cual desde sus planteamientos caracteriza al discurso Matemático Escolar (dME) que afecta a estudiantes y profesores, pues norma sus interacciones con un discurso vertical, que determina qué se debe enseñar, cómo se debe enseñar y qué se tiene que aprender, favoreciendo un único argumento y limitando las experiencias de los profesores y estudiantes (Cantoral, 2013).

Desde el planteamiento anterior consideramos que el dME también afecta las concepciones de los profesores y estudiantes sobre el uso de la tecnología en las clases de matemáticas, pues esta es considerada como una herramienta ajena al conocimiento y su uso es únicamente para representar a un objeto matemático, excluyéndola del conocimiento de quien la usa (Briceño, 2008).

Por ello, nuestro interés en este documento es presentar una actividad que permita mirar desde otro punto de vista a los sistemas de ecuaciones lineales, para ello, en la Tabla 1 se presenta un elemento teórico en el cual sirvió de referencia para el desarrollo de la actividad. En dicho cuadro se incluyen las situaciones de variación, aproximación y analiticidad de las funciones, Cordero (2008), y la de optimización Del Valle (2015). Este referente orientó las ideas y les dio un orden, el cual permitió la configuración de la actividad centrando la atención en los argumentos a desarrollar.

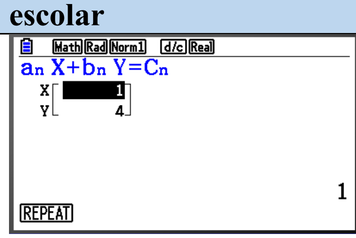
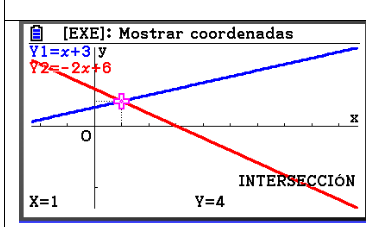
Tabla 1. *Cuadro socioepistemológico de situaciones que ilustran lo matemático (Cordero, 2008; Del Valle 2015)*

	SITUACIONES			
CONSTRUCCIÓN DE LO MATEMÁTICO	**VARIACIÓN**	**TRANSFORMACIÓN**	**APROXIMACIÓN**	**SELECCIÓN**
Significaciones	Flujo Movimiento Acumulación Estado Permanente	Patrones de comportamiento gráficos y analíticos	Límite Derivación Integración Convergencia	Patrón de adaptación
Procedimiento s	Comparación de dos Estados $f(x+h)-f(x)=\alpha h$ $\alpha=f'(x)$	Variación de parámetros $y=Af(Bx+C)+D$	Operaciones lógico formales (cociente) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$	Distinción de cualidades
Instrumentos	Cantidad de variación continua	Instrucción que organiza comportamientos	Formas analíticas	Lo estable
Argumentación	Predicción $E_o+Variación=E_f$	Comportamiento tendencial 	Analiticidad de las funciones $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2}+...$	Optimización 

Por otro lado, el referente anterior configura una propuesta para la descentración del objeto matemático, pues se busca rescatar el conocimiento funcional en situaciones específicas, en las cuales importan las *significaciones,* los *procedimientos* y los *instrumentos* que generan *argumentaciones* como la predicción, el comportamiento tendencial, la analiticidad de las funciones o la optimización.

Para dimensionar lo anterior presentamos el siguiente ejemplo relativo a los sistemas de ecuaciones lineales.

Tabla 2. Resolución de una actividad matemática con alguna tecnología escolar

Actividad escolar	**Solución con alguna tecnología escolar**	
Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones. $x-y=3$ $2x+y=6$		La solución del sistema es: $x=3$ $y=4$
		La coordenada del punto de corte es (1,4), así la solución del sistema es: $=3$ $y=4$

En el ejemplo anterior se puede observar que el uso que se le da a tecnología es únicamente para resolver algebraicamente o representar gráficamente el sistema de ecuaciones, es decir prevalece una centración en el objeto matemático excluyendo las argumentaciones funcionales del que aprende.

Aunado a lo anterior, en Cordero (2011), se considera que ignorar a la tecnología en la enseñanza de las matemáticas puede ser un error, con base en la Categoría Modelación-Graficación el papel de la tecnología debe ser como un instrumento de modelación y no como un instrumento que sirva para representar el concepto función, por ejemplo. Con ello la graficación no pudiese verse como un conocimiento a través del cual se modelaría o simularía una situación real. Por tanto, se propone una actividad que busca la incorporación de la tecnología educativa en el aula de matemáticas, como un instrumento en la construcción de conocimiento matemático de los estudiantes.

Diseño de la actividad

Para el diseño de las actividades, se tuvo como guía los programas de estudio que norman al bachillerato mexicano, (Sep, 2013b). Por su parte, la orientación teórica que se trabajó, fue mostrar la funcionalidad del conocimiento matemático, donde la tecnología puede tomar el rol de un instrumento si se realiza un diálogo entre ella y el conocimiento matemático (Briseño 2008), de tal suerte que ambas partes puedan ser nutridas.

Consideramos pertinente esclarecer, que la propuesta de usar la calculadora en las clases de matemáticas no tiene la intención de sustituir el uso de algoritmos y procesos que son necesarios para el aprendizaje de los estudiantes, sino que, sea una poderosa herramienta para direccionar la atención hacia la interpretación de la solución y resolver dicho problema. Esto se debido que a menudo, en ciertas situaciones o problemas que requieren de diversos cálculos, ocasionando que los estudiantes centren más su atención en los algoritmos, desviando así la atención del de la situación que se pretende resolver.

A continuación, se presenta un esquema que busca ilustrar el proceso de reflexión generado en la construcción y diseño de las actividades, considerando la inclusión de una tecnología escolar.

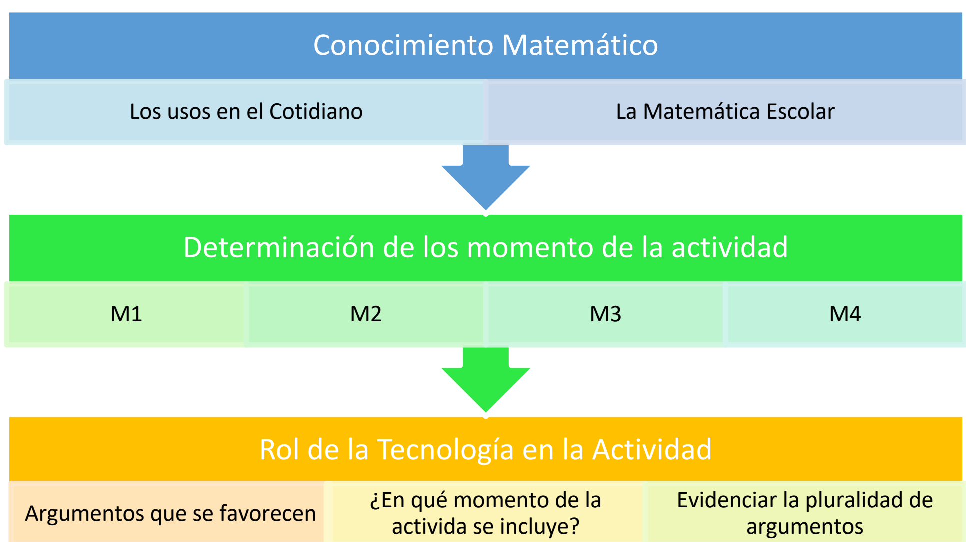


Figura 1. Elementos para estructurar una actividad con el uso de la tecnología

Una postura que se toma es que no toda actividad precisa de la tecnología para desarrollarse, es por ello que nuestro modelo para la generación de actividades parte del conocimiento matemático, debido a que el conocer su epistemología y sus usos, puede proporcionar elementos para decidir si se considera la tecnología o no, y en qué momento de la actividad es pertinente.

Estadísticas de los asaltos en una ciudad

La actividad pretende entender un fenómeno social que afecta a cualquier ciudadano, los asaltos. Esto se pretende a través del análisis de ciertos datos estadísticos de los robos con violencia y los robos sin violencia de una ciudad. Un elemento inicial a romper con la actividad es que para analizar una serie de datos, las medidas de tendencia central no son el único recurso matemático para proceder. Para el caso de la actividad que se presenta, el énfasis está en el análisis de dos tendencias, y predecir un comportamiento.

A continuación, se presenta una tabla que contiene los datos correspondientes a las estadísticas relacionadas con los robos con violencia y robos sin violencia, que han ocurrido en una ciudad a lo largo de 18 meses.

Tabla 3. Cantidad de robos con violencia y sin violencia en una ciudad

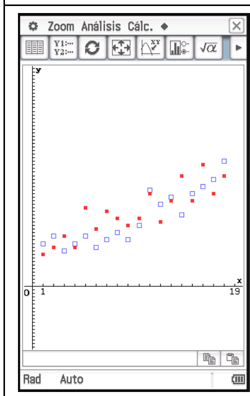
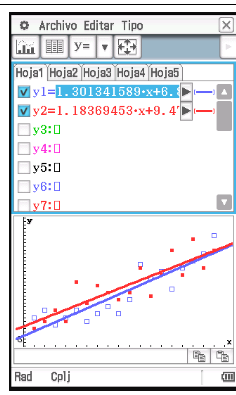
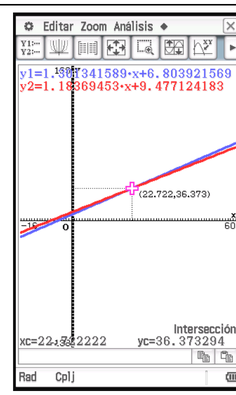
Mes	Robo con arma	Robo sin arma
1	12	9
2	14	11
3	10	14
4	12	11
5	14	22
6	11	16
7	13	21
8	15	19
9	13	17
10	17	19
11	27	26
12	23	18
13	25	24
14	20	31

15	26	24
16	28	34
17	30	26
18	35	31

Considerando los datos presentados en la tabla anterior responde las siguientes cuestiones.

a) ¿En qué mes después de los 18 meses del estudio, la cantidad de robos con arma será parecida a la de robos sin arma?
b) ¿Qué se puede decir de la tendencia de robos a con arma, con respecto a los robos sin arma?
c) ¿Qué puede esperar la sociedad dentro de un período de 2 años posteriores a los meses que se presentan en la tabla?

Tabla 4. Contraste entre un tratamiento tradicional al sistema de ecuaciones y el propuesto

<table>
<tr><td colspan="3">Resolución con una tecnología escolar</td></tr>
<tr><td>Visualización de los datos. Identificar patrones y tendencias en los comportamientos.</td><td>Modelación de las tendencias a través de una regresión lineal</td><td>Cálculo del valor que comparten los modelos genrados para a partir de ello tomar desiciones</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Reconocemos que en la actividad el estudiante tendría que recurrir a conocimientos fuera del currículum que norma su nivel educativo, sin embargo el énfasis no está en que el calcule la regresión y la aprenda, sino que use dicho conocimiento para obtener un modelo de las tendencias presentadas, es ahí que la tecnología en la actividad juega un papel primordial como un instrumento para la obtención de modelos y poder continuar con el análisis del comportamiento de los datos y realizar una toma de decisiones.

Comentarios finales

Se considera que el uso de la tecnología es un factor clave para aportar una nueva visión de las matemáticas en la escuela, sin embargo, dicho uso no puede ser arbitrario, sino que debe estar fundamentado para saber cuándo y cómo emplearla con el objetivo de mejorar los aprendizajes de las y los estudiantes en matemáticas.

Por otro lado, la tecnología educativa debe ser usada como apoyo en la construcción de conocimiento matemático, en lugar de usarla para representar o emular un objeto matemático. El cuadro de situaciones de variación, predicción y analiticidad de las funciones de Cordero (2008) y optimización de Del Valle (2015), es un elemento que puede servir de orientación para darle un giro a la matemática escolar, centrando la atención en los argumentos que los estudiantes expresan en una actividad.

Así, la propuesta que se describió a lo largo de este documento, busca exhibir un ejemplo que permita usar la tecnología para generar argumentos en los estudiantes, y así ampliar el tratamiento que comúnmente se le otorga al tema de *sistemas de ecuaciones lineales*, a través de la generación de argumentos relacionados con el establecimiento de comportamientos, tendencias y la predicción de estados o de comportamientos.

Referencias bibliográficas

Briceño, E. (2008). El uso de las gráficas desde una perspectiva instrumental. Un estudio socioepistemológico. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav IPN, D.F., México.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama & A. Romo (Ed.), Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano (pp. 285-309). México, D. F.: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Cordero, F. (2011). La modelación y la graficación en la matemática educativa escolar. En L. M. Rodríguez-Salazar, R. Quintero-Zazueta y A. R. Hernández-Ulloa (Coords.) Razonamiento matemático, epistemología de la imaginación: (Re)pensando el papel de la epistemología en la matemática educativa (pp. 377-399). Editorial Gedisa, Barcelona y Cinvestav, México.

Del Valle, T. (2015). *Los Usos de la Optimización: Un Marco de Referencia y la Teoría Socioepistemológica.* Tesis de Doctorado no publicada. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaiso-Chile.

Programa Sectorial de Educación (2013a). Recuperado el 10 de noviembre del 2014 de http://www.sep.gob.mx/work/models/sep1/Resource/4479/4/images/PROGRAMA_SECTORIAL_DE_EDUCACION_2013_2018_WEB.pdf

Programa Sectorial de Educación (2013b). Recuperado el 6 de mayo del 2017 de http://cosdac.sems.gob.mx/portal/index.php/en-el-aula/programas-de-estudio-del-bachillerato-tecnologico-formacion-profesional

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

EDUCACIÓN MATEMÁTICA PARA TODOS: EL GÉNERO EN EL DESARROLLO DE LA VISUALIZACIÓN ESPACIAL DESDE EL ENFOQUE DE LAS TRAYECTORIAS DE APRENDIZAJE

William Andrey Suárez Moya, Olga Lucía León Corredor
Universidad Distrital Francisco José de Caldas. (Colombia)
wasuarezm@correo.udistrital.edu.co, olleon@udistrital.edu.co

Resumen
La visualización ha influido en los procesos de enseñanza y aprendizaje privilegiando la comprensión de conceptos matemáticos particularmente de la geometría. Por su parte, aspectos que vinculan género como una construcción social, posibilitan el aprendizaje del espacio y construcción de ser con otros en el aula. De esta manera se constituye el presente trabajo, el cual presenta antecedentes teóricos sobre las habilidades de visualización espacial y género en el aula de matemáticas; las cuales se tomarán como referentes para la promover trayectorias de aprendizaje de la visualización espacial, en una educación matemática para todos.

Palabras clave: visualización espacial, trayectorias hipotéticas de aprendizaje, investigación de diseño, género

Abstract
Visualization has influenced the processes of teaching and learning, favoring the understanding of mathematical concepts, particularly of geometry. On the other hand, aspects that link gender as a social construction make possible the learning of space and the construction of being related with others in the classroom. So we elaborated this work that shows theoretical antecedents on the skills of spatial visualization and gender in mathematics classroom, which were taken as reference points to promote learning paths of spatial visualization in mathematical education for all.

Key words: spatial visualization, learning hypothetical paths, design-based research, gender

Género y visualización espacial

El género ha sido un componente que ha cobrado importancia en el contexto de la educación en Colombia en las dos últimas décadas, el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES) y el Ministerio de Educación de Colombia (MEN), (véase ICFES, 2012, 2013; MEN, 1997) documentan y analizan los resultados de desempeños entre niños y niñas en pruebas internacionales como el Estudio Internacional de Progreso en Comprensión Lectora (PIRLS) y el Estudio de las Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS), y pruebas nacionales en Colombia como SABER en el área de matemáticas. En el análisis de TIMSS se identifican diferencias de género en el desempeño en matemáticas de niños y niñas en problemas relacionados con "manejar mentalmente figuras tridimensionales y para reconocer figuras congruentes o semejantes, manejar o utilizar relaciones, en el conocimiento de algunas características de los cuadriláteros, y para manejar rotaciones en el plano" (León, 2012, p. 106).

Linn y Petersen, citados en ICFES (2013) refieren que una de las grandes diferencias de género en el aprendizaje de las matemáticas de niños y niñas, está asociada con la ventaja de los hombres en algunas habilidades espaciales. Otros autores afirman que no hay diferencias significativas en habilidades visuales, pero si diferencias cualitativas en las estrategias de procesamiento y estructuración empleadas por hombres y mujeres durante la resolución de actividades (Fennema, 2000; Gorgorio 1998; Rubio, 2000). Clements y Sarama (2009) mencionan que las niñas se pueden ver marginadas en su progresión en las matemáticas debido a la falta de atención por parte de los docentes en el desarrollo de habilidades espaciales en el área de geometría, apoyando esta tesis, se encuentran los trabajos de Casey, Nuttall y Pezaris (2001). En las investigaciones de Clements y Battista (1992), se estructuran tareas que tienden a disminuir las diferencias de género que los autores vinculan a factores de tipo cultural y/o biológico.

Sin embargo, la caracterización para género en estos trabajos citados y otros revisados en el marco del trabajo de investigación de Suárez (2017), se reduce a un sistema binario de sexo/género, en el que el sexo de la hembra va unido al género mujer, y el sexo del macho al género hombre. Por tanto, este sistema no contempla los cuerpos que no corresponden con estos sexos o los cuerpos que asumen un género no vinculado al sexo, denominándose bajo la categoría de identidad de género. Por cuanto más allá del sistema binario establecido, el género es una construcción social en la que se vinculan los cuerpos que expresan características biológicas, psicológicas, sociales y culturales (Suárez, 2017).

El género en tanto construcción social, vincula prácticas que dan forma a como los estudiantes visualizan los objetos, conceptos y procesos dentro de la actividad cognitiva. Estas prácticas se hacen evidentes en las acciones y producciones de los niños y niñas en el aula, por cuanto el interés por diseñar rutas que contemplen el género de los estudiantes y posibiliten el desarrollo de habilidades como la visualización espacial aprovechando prácticas como juegos y quehaceres. Las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA), son la mejor opción para diseñar estas rutas; como mencionan Clements y Sarama (2009), las THA, "ayudan a los maestros a entender la variedad de niveles de conocimiento y de pensamiento de sus clases y de los individuos dentro de ellas, como fundamentales para satisfacer las necesidades de todos los niños" (p.16). Por su parte, en la investigación, estudiantes con sexo de hembra se reconocieron como mujeres y estudiantes con sexo de macho se reconocieron como hombres, sin que apareciera otra denominación que no correspondiera a estas identidades.

Procesos que desarrollan la Visualización Espacial

El desarrollo de la visualización espacial exige que se deba producir un dinamismo en las imágenes mentales. El desarrollo temprano del pensamiento espacial y de la visualización espacial da cuenta que las imágenes mentales de los niños y niñas inicialmente son estáticas; por tanto, el promover tareas que posibiliten el desarrollo del proceso de transformación de imágenes mentales o dinamizar imágenes mentales es fundamental.

Desde el trabajo de la Trayectoria de Aprendizaje de la Visualización Espacial e Imágenes de Clements y Sarama (2009), se determina que los movimientos de deslizar, voltear y girar son los más fáciles para que los niños y niñas comiencen con el desarrollo de la transformación de la imagen mental. La dirección del movimiento incide en la dificultad de transformar la imagen; pero dependiendo de la tarea instruccional esta dificultad podrá solucionarse.

Haciendo énfasis sobre los movimientos de deslizar, voltear y girar, los cuales serán objeto en la THA diseñada, en adelante son considerados procesos condicionados al desarrollo de la transformación de imágenes en la visualización espacial.

La THA permite destacar aspectos en el desarrollo de la visualización espacial como la importancia del cuerpo en actividades que promueven el desarrollo de la visualización espacial en niñas (Clements & Sarama, 2009).

De esta manera, se consolidó la THA de la visualización espacial, que tuvo seis niveles de pensamiento (Figura 1). En cada nivel se vinculó una hipótesis acerca de los procesos que desarrollan la visualización espacial.

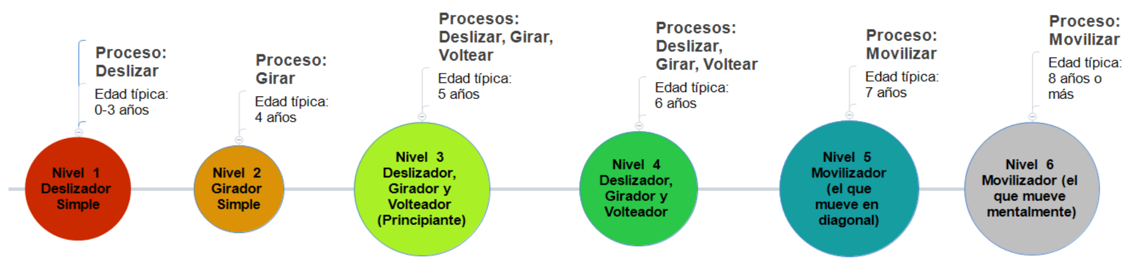


Figura 1. Niveles de pensamiento de la THA de la visualización espacial en niños y en niñas. Fuente propia

Diseño metodológico de la investigación

La metodología de la Investigación de Diseño resultó indicada para este trabajo puesto que al mismo tiempo que se estudia el proceso de aprendizaje, se analizan los modos por los cuales el aprendizaje se sustenta y se organiza (Cobb & Gravemeijer, 2008). Así mismo, la Investigación de Diseño permite la comprobación de los supuestos del modelo teórico, transformados en hipótesis, de acuerdo a la validez que evidencian según el análisis de los datos obtenidos (Confrey, 2006; Steffe & Thompson, 2000). En el marco de la Investigación de Diseño se encuentran los Experimentos de Enseñanza, los cuales permitieron determinar la eficacia del diseño de la THA que vinculó hipótesis sobre bases teóricas que asocian estudios de género en el desarrollo de la visualización espacial de los niños y niñas. Para el diseño de la THA se consideraron tres componentes, a) Las metas de aprendizaje en el desarrollo de la visualización espacial; b) La ruta de desarrollo constituida por los niveles de pensamiento; c) Un conjunto de actividades instruccionales (Clements & Sarama, 2009).
Entre las actividades instruccionales se encuentran las siguientes:

Tabla 1. Actividades instruccionales de la THA.

Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5	Nivel 6
Organización el aula	Pantominós	Doblar, Limpiar y barrer	Teselados	Reflejos	Poleas
Construyendo siluetas con imaginación	Tangram (Tablet)	Logimax	Origami	Mosaicos geométricos	Razonamiento abstracto
El recorrido del orden	Match		Cubos-soma	Los ángulos del reloj	Que ficha le falta al rompecabezas
Camino a la casa					

A partir del ciclo de enseñanza propuesto por Simon y Tzur (2004), se hizo un ajuste para las fases metodológicas de la investigación (Figura 2):

Figura 2. Cuadro metodológico. Fuente propia

Análisis de verificación de hipótesis sobre visualización espacial

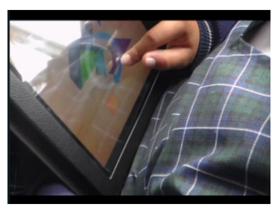
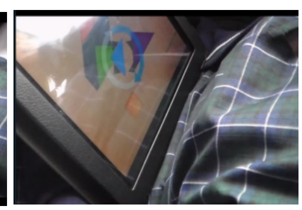
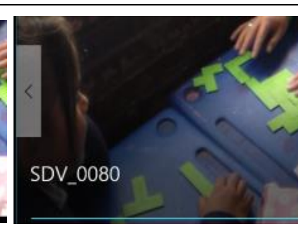
Teniendo en cuenta las hipótesis del nivel y el descriptor del nivel, se verificó el cumplimiento de estas hipótesis por medio de los indicadores de nivel. En la Tabla 2 se muestra el ejemplo para el Nivel 2 de pensamiento: Girador Simple, en el que se describen las hipótesis de nivel, el descriptor del nivel y los indicadores del nivel:

Tabla 2. Hipótesis, descriptor e indicadores del nivel 2 de la visualización espacial.

Hipótesis del nivel	• Los niños de cuatro a cinco años de edad pueden hacer giros si tienen tareas simples y claves, como tener una marca clara en el borde de una figura y no una forma "girada" como distractor (Clements & Sarama, 2009). • Los niños y niñas de entre cuatro a ocho años, no muestran diferencias de género en tareas que involucran movimientos con deslizar y girar (Moyer, 1978).
Descriptor del nivel	Gira objetos en tareas fáciles
Indicadores del nivel	• Replica patrones de bloques. • Arma rompecabezas simples. • Anticipa mentalmente los movimientos.

Para dar cuenta del cumplimiento de la hipótesis de nivel 2, donde el proceso de girar se identifica con la realización de tareas simples y claves, se asocia el descriptor de nivel en estos términos, gira objetos en tareas fáciles. Posteriormente, se asociaron los indicadores de nivel con este descriptor señalando tres tareas simples asociadas a este movimiento. Con ello se verificaron estos indicadores en las actividades, tal y como se muestra en la Tabla 3:

Tabla 3. Verificación de las hipótesis para el nivel 2 de la visualización espacial.

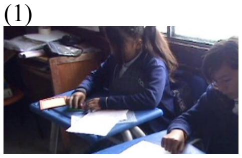
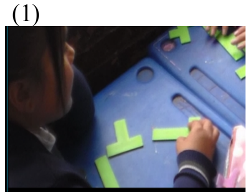
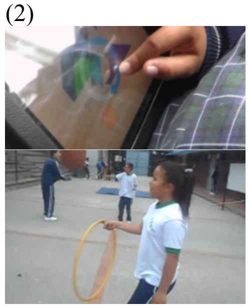
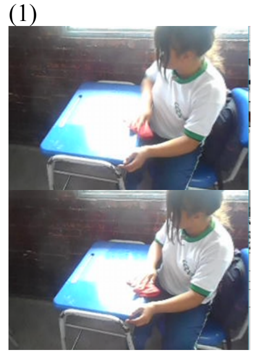
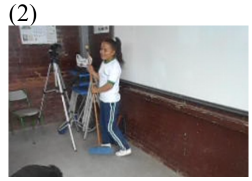
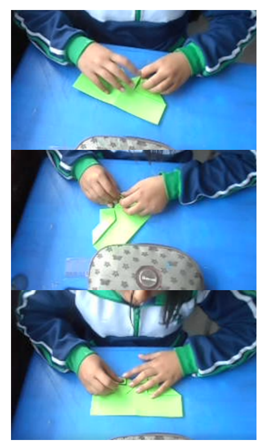
Cumplimiento del indicador	Evidencia
En cuanto al primer indicador del nivel, arma rompecabezas simples. En la actividad del tangram en la tablet, los estudiantes giran las fichas del juego (1) con el fin de encajarlas en la configuración de la silueta de la figura que muestra la tablet.	 
Esta tarea resulta fácil puesto que la silueta de la figura a armar estaba presente para encajar las fichas.	
En cuanto al segundo indicador del nivel, replica patrones de bloques. En la actividad del pentominó, los estudiantes giran las fichas del juego (1) con el fin de encajarlas en la configuración de un rectángulo.	 
Esta tarea resulta ser fácil puesto que en la instrucción de la actividad se mencionaba que no se debía utilizar necesariamente todas las fichas del juego para armar el rectángulo.	
En cuanto al tercer indicador del nivel, anticipa mentalmente los movimientos. En la actividad de match, los estudiantes anticipaban sus movimientos mentalmente antes de realizarlos (1), esto se observó al momento en el que se iba a dar giros al hula hula, a la cuerda y sobre la colchoneta.	 

En esta actividad se tuvo en cuenta la experiencia previa en el movimiento del cuerpo, particularmente en los juegos del hula hula, lazo, pirinola, yoyo, lanzamiento de disco y botes sobre colchoneta, donde se exigía cierta precisión, fuerza y ángulo en los movimientos.

Análisis de progresión de niveles de la THA

A partir del cumplimiento parcial y total de las hipótesis formuladas en el diseño de la THA, a continuación, se muestra el progreso de una estudiante en cuatro niveles de la THA tomando el proceso de Girar (Tabla 4). Además, se describen maneras en que los procesos se produjeron a partir de la intervención del cuerpo.

Tabla 4. Análisis de progresión de niveles de la THA de la visualización espacial.

NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
Se identificaron dos maneras de girar en tres actividades de este nivel: Girando sus manos sobre las fichas del tangram para llevarlas de una ubicación a otra (1). Girando la regla con una mano, y girando la mesa con una mano mientras la otra mano está fija (2). (1)  (2) 	Se identificaron tres maneras de girar en tres actividades de este nivel: Girando sus manos sobre las fichas del pentominó para encajarlas (1). Moviendo el dedo sobre la superficie de la Tablet haciendo arcos para girar las fichas del, y sobre la superficie del hula hula (2). (1)  (2) 	Se identificaron dos maneras de girar en una actividad de este nivel: Girando sus manos sobre el trapo para limpiar la superficie de la mesa (1). Dando giros con su cuerpo mientras camina para barrer el piso (2). (1)  (2) 	Se identificó una manera de girar en una actividad de este nivel: Girando sus sobre el papel para hacer pliegues sobre la mesa (1). (1) 

A partir de lo anterior, se constituyen los resultados del análisis de la progresión de niveles de la THA con la representación gráfica para los procesos. En el gráfico se presentan las maneras en las que el proceso Girar se dio en cada estudiante, mostrando el número de incidencias que tuvo tal manera en los niveles de la THA (Figura 3).

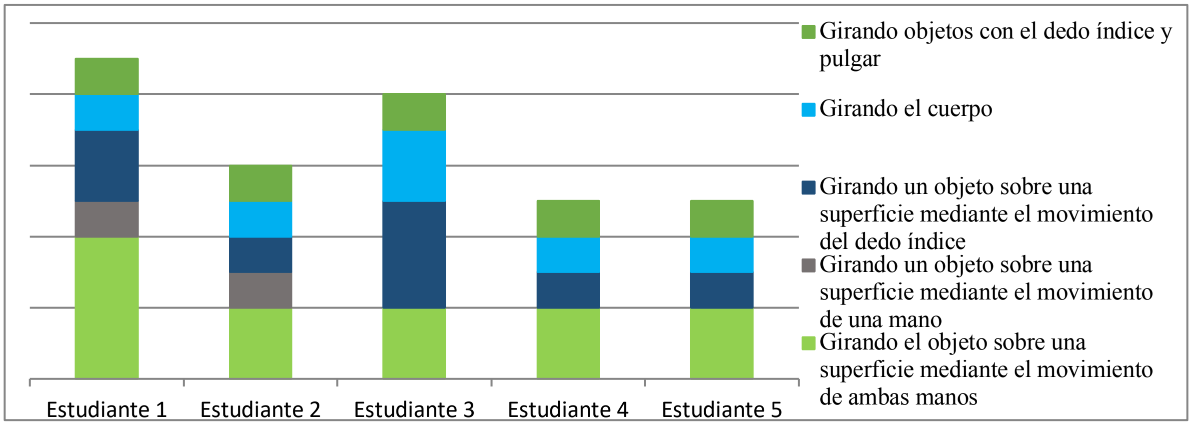


Figura 3. Proceso de girar en los estudiantes durante la THA. Fuente propia.

Los resultados de la THA dan cuenta de cinco Trayectorias Reales de Aprendizaje (TRA) (Figura 4), cada una asociada a cada estudiante, y que muestran la ruta que tuvieron los niños y las niñas durante la aplicación de las actividades para el desarrollo de la visualización espacial.

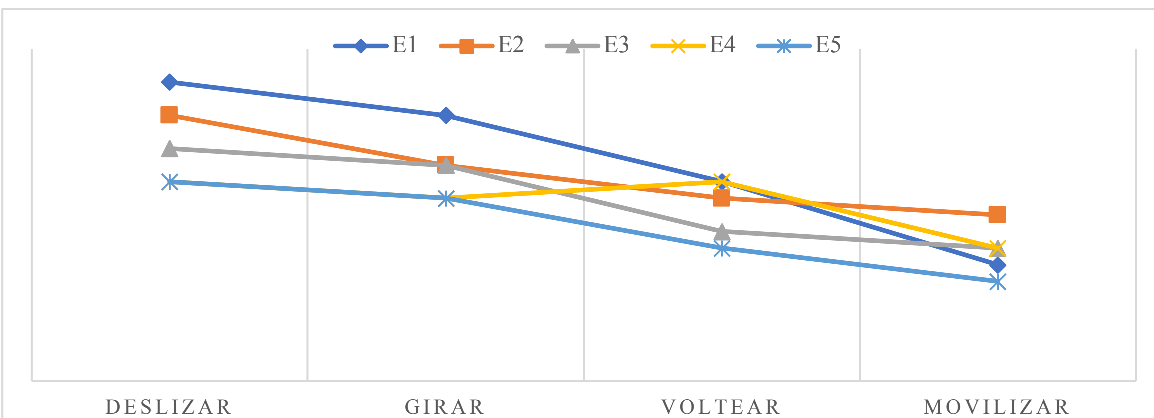


Figura 4. Resultados de las cinco TRA de la visualización espacial vinculadas al género. Fuente propia

CONCLUSIONES

En la revisión de trabajos sobre estudios de género y desarrollo de la visualización espacial, se identificaron hipótesis para la meta de aprendizaje y cuatro niveles de pensamiento en las que se describen diferencias de género en las habilidades espaciales de estudiantes al momento de realizar tareas que involucran rotación mental, por lo que se diseñaron diferentes actividades que promovieron el desarrollo de la visualización espacial en los niños y niñas.

El diseño de varias actividades en cada nivel de pensamiento posibilitó el desarrollo de la visualización espacial por diferentes entradas en los niños y niñas. Evidencia de ello se encuentra en los resultados de la progresión de niveles de pensamiento, en donde los niños y niñas avanzaron en cada nivel a partir de la verificación de los procesos que desarrollan la visualización espacial afianzando diferentes maneras en las que se puede dar determinado proceso. Por cuanto sin importar la favorabilidad de una determinada actividad al género del estudiante, lo fundamental fue posibilitar el progreso de los niños y niñas por los niveles de pensamiento.

Las maneras en las que cada niño y niña desarrollaba la actividad, dan cuenta a un arraigo de prácticas socioculturales en las que los niños y niñas han vivido, por cuanto actividades relacionadas con juegos infantiles y quehaceres de la casa dieron evidencia en la progresión en los procesos de la visualización espacial de manera distinta. Las experiencias previas extraescolares con este tipo de actividades permiten el avance de los estudiantes entre los niveles de pensamiento.

Reconocimiento

Este trabajo hace parte del proyecto de la Maestría en Educación: Un estudio de género en Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje de la Visualización Espacial, el cual está vinculado a AIDETC (Programa Nacional Colciencias código 1419-6614-44765), y al proyecto internacional ACACIA (código 561754-EPP-1-2015-1-COEPPKA2-CBHE-JP) cofinanciado por el Programa Erasmus+ de la Unión Europea.

Referencias bibliograficas

Casey, M., Nutall, R., & Pezaris, E. (2001). Spatial–mechanical reasoning skills versus mathematics self-confidence as mediators of gender differences on mathematics subtests using cross national gender based items. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(10), 28–57

Clements, D., & Battista, M. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. En D. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 34-67). New York: NCTM.

Clements, D., & Sarama, J. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research*. Nueva York: Routledge.

Cobb, P, & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to Support and Understand Learning Processes. (A. E. Kelly, R. A. Lesh, & J. Y. Baek, Edits.) *Handbook of Design Research Methods in Education: Innovations in Science, Technology, Engineering, and Mathematics Learning and Teaching*, 68 - 95.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. (R. K. Sawyer, Ed.) Nueva York: Cambridge University Press.

Fennema, E. (2000). Gender Equity for Mathematics and Science. *Office of Educational Research and Improvement, 12*.

Gorgorió, N. (1998). *Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation.*

ICFES (2012). *Colombia en PIRLS 2011*. Bogotá. ICFES.

ICFES (2013). *Análisis diferencias de género en desempeño de estudiantes colombianos en matemáticas y lenguaje*. Bogotá. ICFES.

León, O. (2012). Cien años de reformas y un problema actual en la enseñanza de la geometría. En L. Camargo (Ed.), *Investigaciones en Educación Geométrica*. Bogotá, D.C.: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 30-40.

MEN (1997). *Análisis y resultados de las pruebas de matemáticas – TIMSS* – Colombia. Bogotá. MEN.

Moyer, J. C. (1978). The relationship between the mathematical structure of Euclidean transformations and the spontaneously developed cognitive structures of young children. *Journal for Research in Mathematics Education, 9*(2), 83-92.

Rubio, M. (2000). Género y diferencias cognitivas en la solución de problemas de razonamiento espacial. *Tecné, Episteme Y Didaxis: Revista de La Facultad de Ciencia Y Tecnología, 8*, 25–30.

Simon, M, & Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91 - 104.

Suárez, W. (2017). *Un estudio género en Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje de la visualización espacial*. Tesis de Maestría. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Steffe, L., & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 267-307.

FORMACIÓN DE PROFESIONALES DESDE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Ruth Rodríguez Gallegos, Rodolfo David Fallas Soto, Diana del Carmen Torres Corrales, Jesús Eduardo Hinojos Ramos, Atenea de la Cruz, Hipólito Hernández
Tecnológico de Monterrey. CINVESTAV. Universidad Autónoma de Chiapas. (México)
ruthrdz@itesm.mx, rfallass@cinvestav.mx, diana.torres@cinvestav.mx,
jesus.hinojos@cinvestav.mx, **ateneadr@hotmail.com**, **polito_hernandez@hotmail.com**

Resumen
El presente escrito muestra una síntesis sobre una serie de trabajos presentados en el grupo de discusión donde se dialoga alrededor de la importancia de conocer las prácticas de modelación de los ingenieros en su actividad profesional y cómo el caracterizar estas prácticas nos permite eventualmente identificar lo que debería estar presente en el aula escolar y sobre todo el diseñar actividades de aprendizaje para los ingenieros en formación. La idea es continuar avanzando juntos en esta dirección y como grupo poder aportar conocimientos sobre las prácticas ingenieriles en diversos contextos y su uso adecuado desde la formación de profesionales.

Palabras claves: ingeniería, modelación, simulación, prácticas, tecnología

Abstract
This paper provides a set of reports drawn from recent research of the discussion group where we argue for the importance of knowing the modeling practices of engineers in their professional activity. We also analyze how the characterization of these practices allows us to eventually identify what should be present in the school classroom and, above all, the design of learning activities for training engineers. The idea is to continue getting on together with this experience, and to be able to provide knowledge about the engineering practices in diverse contexts and their appropriate use from the training of professionals.

Keywords: engineering, modeling, simulation, practices, technology

Desarrollo del tema

Se mostrará una serie de trabajos donde se muestre la riqueza de estudiar y caracterizar prácticas ingenieriles. Iniciamos con una experiencia con ingenieros civiles al sur de México, posteriormente en áreas electrónicas y eléctricas el interés en el estudio de funciones trigonómetricas y álgebra lineal para robótica y a partir de estas revisiones el establecer los fundamentos teóricos para el posterior diseño de actividades basadas en estas prácticas ingenieriles previamente reportadas.

Los trabajos desarrollados por Atenea de la Cruz e Hipólito Hernández de Chiapas exponen las diversas actividades que se han llevado a cabo en el marco de la investigación de los factores que determinan la formación matemática en el nivel medio-superior y su influencia en el ingreso al nivel superior, específicamente en la licenciatura de Ingeniería Civil de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Chiapas (UNACH).

En un primer momento, las investigaciones se centran en el análisis del plan de estudios de la Licenciatura en Ingeniería Civil, encontrándose que se divide en cinco áreas de conocimiento. A su vez esta área está delimitada en diversas áreas curriculares de las ciencias básicas como: cálculo diferencial, cálculo integral, geometría analítica, álgebra superior, ecuaciones diferenciales, álgebra lineal y métodos numéricos.

Es importante resaltar que en este documento las Matemáticas se presentan como un medio para resolver, modelar, identificar, predecir los problemas y fenómenos que se presentan en el entorno social, mismo que brindan la idea de predicción de fenómenos físicos, a pesar de que los contenidos matemáticos no están integrados en la noción de predicción. De aquí que, ante la necesidad de implementar la modelación matemática en ingeniería civil, surjan preguntan tales como: ¿Cómo obtener un modelo matemático que represente la función infiltración que estamos estudiando cuando los datos los hemos obtenido experimentalmente? ¿Cómo podemos expresar una curva si no tiene una expresión matemática sencilla?

Bajo este panorama previo, surge la necesidad de la implementación de situaciones didácticas que permitan integrar los contenidos de materias básicas con las materias propias de la ingeniera civil. Tal es el caso del cálculo diferencial y el fenómeno de infiltración, retomando la práctica social de la predicción en Ingeniería Civil. Los participantes en la puesta en escena de la situación didáctica fueron: un profesor, titular de asignatura de la licenciatura de ingeniería civil, un alumno de la maestría en matemática educativa. En la primera puesta en escena participaron diez alumnos, en la segunda puesta en escena participaron 20 alumnos, en ambas situaciones, los alumnos cursaban la materia de ecuaciones diferenciales, como parte del currículo correspondiente al tercer semestre de la carrera de ingeniería civil.

Como antecedente importante, debemos mencionar que los estudiantes han aprobado previamente cursos de álgebra superior y cálculo diferencial en el primer semestre; de cálculo integral y álgebra lineal en el segundo semestre; además de asignaturas como la geometría analítica y cinemática. El titular de la asignatura está adscrito a la Academia de Ciencias Básicas de Ingeniería y Humanísticas de la facultad de ingeniería; e imparte las materias de: ecuaciones diferenciales y métodos numéricos. Los estudiantes participaron en esta secuencia como una actividad del curso, durante el horario oficial de clases, incorporándose ésta como una práctica en la que se pretende reintegrar los contenidos de naturaleza matemática y/o físico en las ciencias de la ingeniería.

Al hablar de predicción generalmente se remite a interpolación, actividad que no es más que la construcción de una función que ajusta cierto número de puntos obtenidos por muestreo o a partir de un experimento. Igualmente el término interpolación está asociado a la aproximación de una función complicada por una más simple y de esta manera introducir datos. Como un método de predicción en el fenómeno de infiltración se encuentra el método de Horton (Aparicio, 2004), usado comúnmente para ejemplificar el comportamiento de dicho fenómeno, a pesar de que este método generaliza los tipos de suelos, dando como parámetros únicamente tres clasificaciones, partiendo de factores sin gran relevancia tales como: la vegetación en términos “desnudo o cubierto de vegetación” cuando en realidad esas son solo condiciones ideales.

De aquí que, reflexionando a partir de los resultados del análisis de fenómeno de infiltración por medio de la ecuación de Horton y del polinomio de interpolación de Newton, se concluye que lejos de unificar y uniformizar el tipo de suelo, el polinomio de interpolación es una herramienta que logra ejemplificar explícitamente y con mayor veracidad dicho fenómeno ya que se obtiene una gráfica de datos que manifiesta el comportamiento clave de éstos, logrando así uno de los "beneficios" de este estudio: la predicción de fenómenos físicos mediante la modelación.

Los trabajos de Hinojos y Farfán (2017) nos permiten conocer una caracterización de las prácticas alrededor del estudio de fenómenos que presentan estabilidad, concretamente en Ingeniería en Electrónica. Esta caracterización se pretende hacer a partir de los argumentos e hipótesis epistemológicas que surgieron de una problematización de las nociones del estado estacionario, tomando como punto de partida la analogía entre los fenómenos eléctricos y térmicos, en obras originales de científicos del siglo XIX.

La *problematización del saber* es una herramienta metodológica que tiene la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME, Cantoral, 2013), que consiste en dos fases: un análisis histórico-epistemológico de obras originales, donde se identifican argumentaciones, hipótesis y obstáculos, observando cómo evolucionaron las producciones de sus autores alrededor de una noción matemática concreta, tomando en consideración los contextos de significación específicos, el contexto social y los paradigmas de pensamiento de la época (historización); y una confrontación entre el análisis histórico-epistemológico de un saber y la forma en que dicho saber es enseñado actualmente (llamada dialectización).

En el caso particular de la presente investigación, se reporta en Hinojos y Farfán (2017), lo referente a la dialectización; mientras que en un artículo posterior (aún en revisión), se reportará parte del análisis histórico-epistemológico, donde se analizaron las obras referentes a la electricidad de Ohm, Thomson y Maxwell, donde aparece de manera explícita la analogía entre el calor y la electricidad. En la obra de Ohm (1827), se identificó que la ecuación de difusión del calor (de Fourier, 1822) es obtenida al analizar un circuito eléctrico en corriente directa, cuando Ohm trataba de dar una explicación para el fenómeno de la conducción de la electricidad; en la obra de Thomson (1872), se encontró una comparación entre el fenómeno térmico y la noción de la difusión del calor, con el fenómeno electrostático y las fuerzas de atracción entre cuerpos cargados; mientras que en la obra de Maxwell (1881), se encontró que se obtiene nuevamente la ecuación de difusión de Fourier al estudiar la difusión de la electricidad en el contexto de las comunicaciones transatlánticas, como un modelo para explicar la comunicación por telégrafo a grandes distancias.

De las obras de Ohm y Thomson, además, se identificó la presencia de un *obstáculo epistemológico*, llamado paradigma de pensamiento sustancialista (Bachelard, 2000), que consiste en considerar como sustancias a fenómenos que no lo son, a partir de las percepciones obtenidas a través de los sentidos al interactuar con ellos; Maxwell en su obra da evidencia de una confrontación con dicho obstáculo, lo cual se observa en los argumentos utilizados en su libro.

Este obstáculo epistemológico, su confrontación y la noción de estado estacionario, fueron utilizados para la elaboración de un diseño de intervención mediante el método de la ingeniería didáctica; a través de dicho diseño se espera caracterizar las prácticas que los estudiantes de ingeniería en electrónica ponen en juego, al menos a nivel de acción o actividad según la TSME, al resolver problemas relacionados con nociones de estabilidad, mediante el uso de la analogía entre el calor y la electricidad (esto se realizará en una fase posterior de la investigación); actualmente el diseño se encuentra en fase de experimentación piloto, donde se esperan obtener elementos para robustecerlo o modificarlo, de tal manera que en la fase de obtención de datos este sea más preciso.

Los trabajos de investigación de Torres-Corrales (2014), fundamentados en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), tienen como objetivo es estudiar los usos de la Trigonometría para dejar de separar su enseñanza con los problemas que resuelve. Esta investigación se basa en Torres-Corrales (2014), donde se identificó que los estudiantes de Ingeniería de últimos semestres de una institución del norte de México no reconocían a la Trigonometría en los problemas de su especialidad, sino se referían a ella solamente como las "fórmulas de senos y cosenos"; aunado a lo anterior, los profesores de esas asignaturas argumentaban que la Trigonometría era fundamental para la profesión, y que, con el fin de disminuir el índice de reprobación porque los estudiantes suelen no recordar las fórmulas, daban un repaso de la matemática necesaria.

Las dos situaciones antes descritas, se atribuyen: (1) la *organización curricular* que tradicionalmente coloca las asignaturas de Ciencia Básicas (específicamente de Matemática) al inicio de la formación escolar para que sean aplicadas en las asignaturas de Ciencias de la Ingeniería (común entre programas educativos) e Ingeniería aplicada (específicas de cada programa); y (2) desde el fundamento teórico la TSME, al *discurso matemático escolar (dME)*, el cual favorece argumentos, significados y procedimientos limitados, en ocasiones únicos, que provocan que, si el estudiante no identifica las estructuraciones formales de la matemática escolar (propias de las Ciencias Básicas, en los tópicos de las Ciencias de la Ingeniería o de la Ingeniería Aplicada), tampoco reconozca el conocimiento matemático que pone en juego. El dME son "…las bases de comunicación para la formación de consensos y la construcción de significados compartidos relativos a la matemática" (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez-Sierra, 2006, p. 86).

De manera particular, en algunas investigaciones (ver Montiel y Jácome, 2014), se han identificado algunas características del dME, tal como su *carácter hegemónico* que se refiere a la supremacía de argumentos, significados y procedimientos frente a otros, por ejemplo, en la razón trigonométrica, es enseñarse como la división de dos longitudes en la ilustración de un triángulo rectángulo, para que posteriormente el estudiante la aplique a ejercicios y/o problemas donde se forme un triángulo rectángulo, pero sin medir y comprobar que se trata de esa figura geométrica. Esto es, precisamente, lo que pretende contrarrestar esta investigación, primero se enseña Trigonometría y luego se *aplica* a problemas, es decir, *atomizado en objetos matemáticos*, característica del dME. Se pretende pues, dejar de separar la enseñanza de la Trigonometría con los problemas que resuelve; y esos problemas tienen la particularidad de usar y necesitar esta matemática y no otra.

Por los motivos antes expuestos, se han planeado hasta el momento las siguientes etapas: *Etapa 1. Revisión de planes y programas de estudio*: del Instituto Tecnológico de Sonora, se delimitó la investigación a Ingeniería Mecatrónica, por la variedad de objetos matemáticos relacionados con Trigonometría que declara su currículo.

Etapa 2. Revisión bibliográfica de Trigonometría y modelación: revisar el tópico Trigonometría permitió identificar en la investigación educativa cuál es su didáctica, y en revistas especializadas de Ingeniería, cómo se articula el conocimiento (matemático y especializado), y dio un primer acercamiento a los tipos de problemas que se resuelven en esta disciplina. El tópico modelación permitió asumir una postura desde la Matemática Educativa acorde al nivel superior.

Etapa 3. Caracterizar la práctica de referencia: se refinó y planteó el problema de investigación, ya que la *práctica de referencia* se refiere a "la expresión material e ideológica de un paradigma (ideológico, disciplinar y cultural)" desde la TSME (Cantoral, 2013, p. 155). Esta caracterización permitió situar y delimitar de forma precisa el escenario de la Ingeniería en Mecatrónica (la Robótica), el tipo de problemas (cinemáticos de posición en robots industriales de tipo serial) y los conocimientos (matemáticos y especializados) necesarios para estudiar los usos de la Trigonometría (la parte técnica del robot para su funcionamiento, y el Álgebra Lineal, como vectores, matrices y métodos numéricos, que permiten estudiar el movimiento del robot).

Finalmente nos gustaría mencionar muy de la mano del estudio anterior el trabajo de Rodolfo Fallas-Soto (ver un antecedente en Fallas-Soto y Cantoral, 2016) donde se desea enfocarse en el estudio de la trayectoria de un dron. Actualmente, dentro de la ingeniería y Teoría de control se realizan trabajos con drones o también llamado por sus siglas en inglés UAVs (*Unmanned Autonomous Vehicles*) siendo un vehículo aéreo no tripulado. Un problema que se trabaja en estas disciplinas, es el programar estos vehículos para que puedan seguir una trayectoria previamente calculada, con el objetivo de cumplir varias funciones, como: la vigilancia del tráfico en carreteras, recolección de información para tener datos para la predicción meteorológica, detección de alguna irregularidad en reservas biológicas y naturales (tales como incendios), entre muchas otras. Para nuestro trabajo, es de interés conocer las tareas y acciones presentes en trabajos relativos a la simulación de la trayectoria de vuelo de un dron, rescatando los elementos esenciales a considerar a la hora de diseñar situaciones o actividades para con estudiantes de ingeniería en formación. Por eso, se decide estudiar el trabajo de Rosales, Scaglia, Carelli & Jordan (2011) que trata de dar un seguimiento de trayectoria de un mini helicóptero de cuatro rotores basados en métodos numéricos, con el objetivo de encontrar las acciones de control optimas que permiten llevar al vehículo del estado actual al deseado.

Los autores deciden abordar su estudio con estos vehículos por su versatilidad y maniobrabilidad que permiten un gran número de tareas. Rosales *et al*. (2011) mencionan que el control automático del cuadrirotor en el vehículo ha despertado el interés de los investigadores en los últimos años quienes se interesan cada vez más por el estudio y desarrollo de leyes de control no lineales para controlar la dinámica de dichos vehículos. El trabajo desarrollado por ellos, presenta un modelo dinámico de un helicóptero de cuatro rotores para luego aproximarlo con el modelo del vehículo utilizando métodos numéricos y obtener la expresión del controlador propuesto, posteriormente se presentan los resultados de realizar una simulación del algoritmo de control para terminar con conclusiones y propuestas. Durante el diseño del controlador, mencionan que construyen una ley de control capaz de generar señales, con el objetivo de que *la posición del helicóptero siga la trayectoria deseada*. Justamente esta frase, se interpreta como un uso de la unicidad y estabilidad en el comportamiento del fenómeno, colocando las condiciones necesarias para que tenga la solución que se desea obtener. En este sentido, demuestran que para que el error de seguimiento tienda a cero, se define las siguientes diferencias:

Drones de cuatro rotores o cuadrirotor

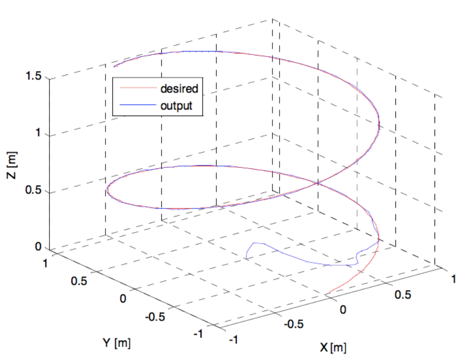
$$x1_{(n+1)} = x1d_{(n+1)} - kx_1\left(x1d_{(n)} - x1_{(n)}\right)$$
$$x3_{(n+1)} = x3d_{(n+1)} - kx_3\left(x3d_{(n)} - x3_{(n)}\right)$$
$$x5_{(n+1)} = x5d_{(n+1)} - kx_5\left(x5d_{(n)} - x5_{(n)}\right)$$
$$x7_{(n+1)} = x7d_{(n+1)} - kx_7\left(x7d_{(n)} - x7_{(n)}\right)$$
$$x9_{(n+1)} = x9d_{(n+1)} - kx_9\left(x9d_{(n)} - x9_{(n)}\right)$$
$$x11_{(n+1)} = x11d_{(n+1)} - kx_{11}\left(x11d_{(n)} - x11_{(n)}\right)$$

Referencias de velocidades para que el vehículo pueda seguir la trayectoria deseada, Fuente: Rosales et al. (2011, pág. 498)

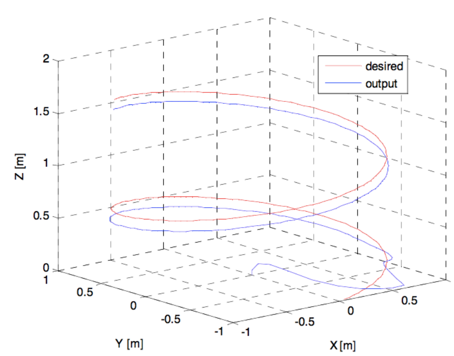
Figura 1

Para que el error tienda a cero, concluyen que $0 < kx_1, kx_3, kx_5, kx_7, kx_9, kx_{11} < 1$ recordándonos un caso especial de la condición de Lipschitz llamada contracción.

Al final, los autores dan resultados de la simulación, comparando siempre la evolución de la posición del cuadrirotor con error del movimiento. Con esta breve narración presentada del trabajo de Rosales et al. (2011)*,* se identifica que las ideas que respaldan a la unicidad están presentes en determinar la ruta que se desea del vehículo, muy asociado al error, trabajando con la simulación desarrollada y luego la simulación con un error en los parámetros para estudiar así el nuevo cambio. En un primer momento se obtiene un error que tiende a cero con los parámetros que dieron al controlador.



Evolución de la posición del cuadrirotor. Fuente: Rosales et al. (2011, pág. 499).



Evolución de la posición del cuadrirotor, con un error de los parámetros del 20%. Fuente: Rosales et al (2011, pág. 499).

Figura 2

Posteriormente agregan un error entre los parámetros del controlador y del modelo real, del orden del 20% y observan el cambio entre ambos comportamientos. Esta comparación que realizan es una herramienta de análisis para comprobar la robustez del controlador frente a errores en los parámetros. Esto es un resultado importante, de acuerdo a los autores, ya que aseguran que no siempre se cuenta con los valores de los parámetros y los que ellos dan ayudan a tener respuestas satisfactorias.

Las conclusiones que se pueden obtener para beneficio de este trabajo, es que la idea de unicidad y estabilidad está asociada a la pequeña variación y el estudio del error, no solamente a la condición inicial, sino también en los parámetros que estén en juego en el modelo que describe el fenómeno. Esto con el fin de comparar las trayectorias antes y después de aplicar esa "pequeña" variación, concluyendo en este caso la robustez del controlador frente a los errores.

Para la realización de un diseño de situación o actividades, es pertinente realizar dos preguntas asociadas dado a la funcionalidad que se ha estudiado, la primera más ligado a la práctica de predicción y la segunda asociada a la práctica de control:

1. Dada una condición inicial de un fenómeno y su comportamiento, se obtiene un cierto modelo que lo describe, ¿Qué ocurre con el fenómeno y el modelo, cuando se recibe una pequeña variación a la condición inicial o pequeña variación en los parámetros que estén en juego?,
2. ¿Dado el fenómeno y el modelo en estudio, qué condiciones en los parámetros y sobre la condición inicial se deben realizar para obtener un estado futuro deseado?

Conclusiones preliminares

Sin duda alguna los trabajos previamente presentados y desarrollados brevemente en este escrito muestran la riqueza de las investigaciones en actualmente en curso, que abonan de manera directa al tema principal en nuestro grupo de investigación. Se da cuenta de la riqueza asociado desde la práctica profesional de los ingenieros de ideas como la estabilidad, la predicción, la unicidad y existencia de soluciones, todos conceptos base en la enseñanza de Matemáticas a los ingenieros. La búsqueda de significados de los conceptos matemáticos desde la comunidad de expertos en cada área es una tarea que desde la matemática educativa hemos adoptado este grupo y este escrito en particular pretende aportar en esta dirección. Se espera que en futuras ediciones se puedan reportar diseño de actividades basadas en estas prácticas de modelación previamente observadas y resultados de implementación con los grupos de estudiantes de ingeniería.

Referencias bibliográficas

Aparicio F. (2004). *Fundamentos de Hidrología de Superficie*. Limusa y Grupo Noriega Editores. México.

Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico*. Argentina, México: Siglo XXI.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. España: Gedisa.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J., Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (número especial)*, 83-102.

Cantoral, R (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. España: Gedisa.

Fallas-Soto, R. y Cantoral, R. (2017). Estudio socioepistemológico del teorema de existencia y unicidad en las ecuaciones diferenciales ordinarias. *HisteMat* 2(3), 256-280.

Hinojos, J. y Farfán, R. (2017). Breve recorrido por el discurso matemático escolar de la serie de Fourier en el contexto del ingeniero en electrónica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30*, 838-846.

Maxwell, J. (1881). *A Treatise on Electricity and Magnetism volume 1*. Reino Unido: Cambridge University Press.

Montiel, G. y Jácome, G. (2014). Significado trigonométrico en el profesor. *Boletim de Educação Matemática 28*(50), 1193-1216.

Ohm, G. (1827). *Die Galvanische Kette Mathematisch Bearbeitet*. Alemania.

Rosales, C., Scaglia, G., Carelli, R., & Jordan, M. (2011). Seguimiento de trayectoria de un mini-helicóptero de cuatro rotores basado en métodos numéricos. *XIV Reunión de Trabajo Procesamiento de la Información y Control*, (págs. 495-500).

Thomson, W. (1872). *Reprints of Papers on Electrostatics and Magnetism*. Reino Unido: Macmillan & Co.

Torres-Corrales, D. (2014). *Un entorno geométrico para la resignificación de las razones trigonométricas en estudiantes de Ingeniería*. Tesis de Maestría no publicada, Instituto Tecnológico de Sonora. México.

Universidad Nacional Autónoma de Chiapas [UNACH] (2007) *Plan de estudios de la Licenciatura Ingeniería Civil*. Facultad de Ingeniería UNACH-México.

EL NIVEL DE ENCULTURACIÓN MATEMÁTICA

Neptali Antony Reyes Cabrera
Universidad Nacional Mayor de San Marcos. (Perú)
neptali.antony@gmail.com

Resumen
El presente trabajo es una síntesis de la investigación realizada en la Facultad de Educación de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos que evalúa a los estudiantes de la Especialidad de Matemática y Física sobre su nivel de enculturación matemática para verificar si esta variable se encuentra relacionada con su rendimiento académico.

Palabras clave: educación, enculturación, apropiación cultural, rendimiento académico

Abstract
This report is a summary of a research work carried out at the faculty of Education in the University of San Marcos. It evaluates the students who are majoring in mathematics and physics concerning their level of mathematical-cultural- transmission process in order to verify if this variable is related with their academic performance.

Key words: education, cultural transmission process, cultural appropriation, academic performance

Introducción

Mediante esta investigación, realizada en la Facultad de Educación de la Universidad Nacional de San Marcos, se pretendió demostrar si existe relación entre las variables “nivel de enculturación matemática” y “rendimiento académico”, para lo cual se tomó una prueba de enculturación matemática. Ésta fue construida siguiendo el desarrollo de la teoría antropológico-cultural de la educación matemática y se aplicó a una muestra representativa de población. Tras un análisis correlacional y de distribución de probabilidades Chi-cuadrado, se concluyó que no se presenta relación entre el rendimiento académico y el nivel de enculturación matemática.

Objetivos

- Determinar la relación entre las variables “nivel de enculturación matemática” y “rendimiento académico” en la formación académica de los futuros docentes de la Especialidad de Matemática y Física de la Facultad de Educación de la UNMSM en el año 2015.
- Reconocer el nivel o estrato de cultura matemática en que se forman los futuros docentes de la Especialidad de Matemática y Física de la Facultad de Educación de la UNMSM.

- Señalar los valores que corresponde incluir en la formación de los futuros docentes de la Especialidad de Matemática y Física de la Facultad de Educación de la UNMSM.
- Presentar aportes, desde la teoría antropológico-cultural, que posibiliten el desarrollo de nuevas propuestas a la metodología educativa en la formación de los futuros docentes de la Especialidad de Matemática y Física de la Facultad de Educación de la UNMSM.

Desarrollo teórico

Es evidente que la educación y la cultura tienen una relación intrínseca y nativa. También subyace ante la observación que tanto una como otra se necesitan mutuamente para su existencia. La definición de cultura, sin embargo, no se encuentra presente en la educación formal lo que muestra un desfase entre las concepciones de educación y cultura. Para cubrir dicha brecha, la teoría antropológico-cultural de la educación plantea las siguientes definiciones básicas:

Cultura

Conjunto de significaciones persistentes y compartidas, adquiridas mediante la filiación a un grupo social concreto, que llevan a interpretar los estímulos del entorno según actitudes, representaciones y comportamientos valorados por esa comunidad: significados que tienden a proyectarse en producciones y conductas coherentes con ellos (Sáez, 2006).

Valor cultural

O simplemente valor. Es el significante (compresión o idea) básico y autónomo que comparten los miembros de una cultura frente a cualquier particularidad (objetos, sonidos, acciones, etcétera) de su entorno (Bishop, 1999) y (Peñaloza R., 2005).

Educación

Acción o praxis humana orientada a trasmitir la cultura del entorno, así como posibilitar el desarrollo de ésta, teniendo en cuenta que las acciones se encuentran restringidas por la ética de las culturas intervinientes (Salazar B., 1967) y (Peñaloza R., 2005) y establecen los siguientes fines:

- Trasmisión de cultura.
- Formación del educando para que desarrolle aportes a la cultura que se le trasmite (Bruner, 2000) (Rico R., 1997).
- Colaboración con el desarrollo de la cultura matriz (Peñaloza R., 2005).

Matemática

Es la subcultura desarrollada al interior de una o más culturas que surge de las actividades universales de medir, contar, localizar, diseñar, jugar y explicar. Así, se tiene la matemática institucionalizada o internacional, que es la matemática formal que todos conocen, y la matemática desarrollada en culturas matrices, a la que se denomina etnomatemática (Reyes C., 2010), (De Faria. R., 2008), (White, 1983) y (Bishop, 1999).

La definición de cultura permite hacer el siguiente enunciado en forma de corolario: Sea "x" un individuo cualquiera y A, el conjunto de individuos pertenecientes a una cultura £ con $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ valores culturales. $x \in A \leftrightarrow x$ posee parte, o todos, valores $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$.

Un agente cultural es un individuo que tiene la capacidad de educar y ser educado (Salazar B., 1967) (Reyes C., 2010), así se tiene que:

Sea $\mathbb{H} = \{\text{x/x es } \mathit{un\ agente\ cultural\ con\ la\ capacidad\ de\ educar}\}, W$ Un conjunto de individuos con la capacidad de ser educados, además se tiene la cultura £ con los valores culturales $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, donde los elementos de esta cultura es el conjunto $A = \{\text{y/y } \mathit{es\ un\ elemento\ de}\ \text{£}\}$ $\mathbb{H} \subset A$ se define la función llamada educación: $\mathbb{E}: \mathbb{H}xW \rightarrow A$ donde y=$\mathbb{E}(h; w)$ $\mathit{donde}\ h \in \mathbb{H}\ y\ w \in W$ donde $\mathbb{E}(h; w)$ tiene como parte de sus constructos mentales a los valores culturales $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$.
Así, como la educación es un proceso social, se establece una gradualidad de apropiación de sus valores culturales: este proceso se denomina enculturación.

Como la matemática es un caso particular de cultura, satisface entonces las condiciones y fines de la educación. El proceso de apropiación de la cultura matemática se denomina enculturación matemática. La cultura matemática tiene sus propios valores que se presentan organizados en las siguientes tablas (Bishop, 1999) y (Reyes C., 2010).

Tabla 1. Dimensiones del nivel de enculturación

Dimensiones longitudinales		**Dimensiones trasversales**	
Componente	**Valor**	**Componente**	**Valor**
Componente "ideológico": La mente en relación con la matemáticas	Racionalismo Objetismo	Componente "cultural": La relación entre la matemática y la cultura del educando	Reconocimiento
Componente "sentimental": Los sentimientos que genera la matemática en los individuos	Control Progreso		
Componente "sociológico": La relación entre los individuos desde el conocimiento de la matemática	Apertura Misterio		Aporte

Tabla 2. Indicadores de los valores matemáticos

<table>
<tr><th colspan="3">Dimensiones</th><th rowspan="2">Indicadores</th></tr>
<tr><th></th><th>Componentes</th><th>Valores</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Dimensiones longitudinales</td><td rowspan="2">Componente ideológico (I): La mente en relación con la matemática</td><td>Racionalismo (R)</td><td>I.R.1 Pensar deductivamente
I.R.2 Realizar conexiones lógicas entre dos o más ideas (inferencias)
I.R.3 Argumentar y explicar razonamientos
I.R.4 Comprender el lenguaje y los símbolos matemáticos</td></tr>
<tr><td>Objetismo (O)</td><td>I.O.1 Objetificar abstracciones
I.O.2 Manifestar ejemplos
I.O.3 Manifestar contraejemplos
I.O.4 Manifestar generalizaciones.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Componente sentimental (Se): Los sentimientos que genera la matemática en los individuos</td><td>Control (C)</td><td>Se.C.1 Demostrar teoremas
Se.C.2 Controlar normas de la matemática
Se.C.3 Controlar fenómenos naturales mediante la matemática
Se.C.4 Matematizar
Se.C.5 Aplicar con seguridad la matemática</td></tr>
<tr><td>Progreso (P)</td><td>Se.P.1 Aplicar algoritmos a otros problemas
Se.P.2 Apreciar alternativas
Se.P.3 Establecer dudas
Se.P.4 Construir nuevas perspectivas y convicciones.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Componente sociológico (So): La relación entre los individuos desde el conocimiento de la matemática</td><td>Apertura (A)</td><td>So.A.1 Examinar propiedades y verdades de la matemática
So.A.2 Comprender y explicar demostraciones
So.A.3 Formalizar principios y algoritmos</td></tr>
<tr><td>Misterio (M)</td><td>So.M.1 Conocer la matemática y sus aportes
So.M.2 Conocer los aportes de las diferentes culturas a la matemática</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Dimensiones Trasversales</td><td rowspan="2">Componente cultural (Cu): La relación entre la matemática y la cultura del educando</td><td>Reconocimiento (Re)</td><td>Cu.Re.1 Reconocer ideas de la matemática en su cultura y naturaleza.
Cu.Re.2 Reconocer semejanzas y diferencias entre la matemática de su cultura o etnomatemática y la matemática institucional o internacional</td></tr>
<tr><td>Aporte (At)</td><td>Cu.At.1 Realizar aplicaciones nuevas a la matemática
Cu.At.2 Utilizar construcciones (valores) vividas para desarrollar aportes tanto en la matemática institucional como en la de su cultura.</td></tr>
</table>

Materiales y métodos

Como instrumento de recolección de datos, se confeccionó una prueba que consta de 11 preguntas con un puntaje máximo de 160 puntos. Su validez se realizó mediante un jurado experto; mientras que su confiabilidad, mediante el índice Alfa de Cronbach que tuvo un resultado de 78.9 % confirmando la misma. Como la población de estudiantes de la Especialidad de Matemática y Física de la Facultad de Educación de la UNMSM que lleva cursos de matemática es de 140, se tomó una muestra aleatoria de 35 alumnos siguiendo el parámetro de tamaño de muestra de cuando se conoce la cantidad de población (Torres & Inga, 2001).

$$n = \frac{NxZ_{\alpha}^{2}xPxQ}{d^{2}x(N-1)+Z_{\alpha}^{2}xPxQ}$$

Ilustración 1: Fórmula para cálculo de muestra

La variable rendimiento académico fue tomada del promedio obtenido por los alumnos hasta el ciclo académico 2015-I.

Resultados

Nivel de enculturación

Tabla 3. Frecuencias de nivel de enculturación matemática

Frecuencias de nivel de enculturación matemática					
Frecuencias		**Frecuencia**	**Porcentaje**	**Porcentaje válido**	**Porcentaje acumulado**
Válido	[0;32>	10	28,6	28,6	28,6
	[32;64>	18	51,4	51,4	80,0
	[64;96>	4	11,4	11,4	91,4
	[96;128>	3	8,6	8,6	100,0
	Total	35	100,0	100,0	

Tabla 4. Estadísticas de nivel de enculturación matemática

Estadísticas de nivel de enculturación matemática	
Media	50,2
Mediana	45,0
Moda	22,0
Desviación estándar	27.44

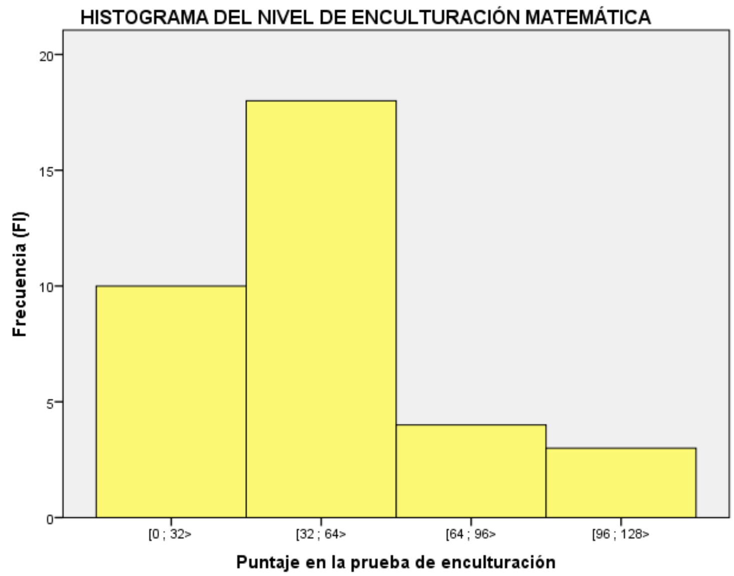


Figura 2: Histograma de nivel de enculturación matemática

Rendimiento académico

Tabla 5. Frecuencias de rendimiento académico

Frecuencias de rendimiento académico					
Intervalos		**Frecuencia**	**Porcentaje**	**Porcentaje válido**	**Porcentaje acumulado**
Válido	[12 ; 16>	30	85,7	85,7	85,7
	[16 ; 20]	5	14,3	14,3	100,0
	Total	35	100,0	100,0	

Tabla 6. Estadísticas de rendimiento académico

Estadísticas de rendimiento académico	
Media	14,49
Mediana	14,57
Moda	13,94
Varianza	1,425
Desviación estándar	1.193

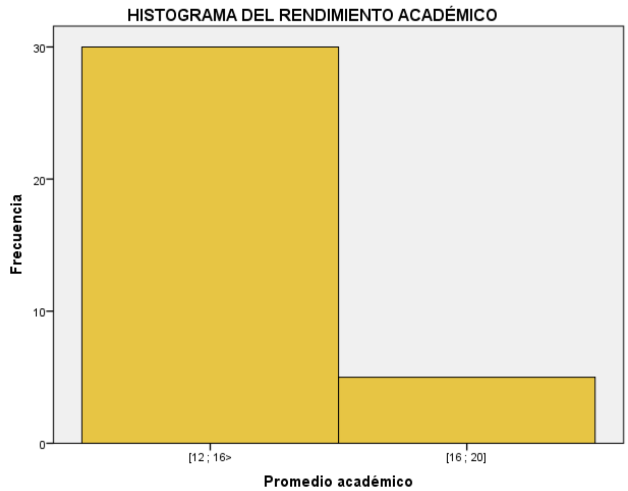


Figura 3: Histograma de rendimiento académico

Las hipótesis planteadas fueron:

- (H_0) No se presenta relación entre el rendimiento académico en matemática y el nivel de enculturación matemática alcanzado por los futuros docentes de la Especialidad de Matemática y Física de la Facultad de Educación de la UNMSM en el año 2015.
- (H_1) La relación entre el rendimiento académico en matemática y el nivel de enculturación matemática alcanzado por los futuros docentes de la Especialidad de Matemática y Física de la Facultad de Educación de la UNMSM en el año 2015 es directa.

Así, el análisis correlacional muestra un índice de -0,109; mientras que el análisis con distribución de Chi-cuadrado, de 0,260>0.05 por lo que, en ambos casos, resulta que no se presenta relación entre estas variables. Es decir, que las variables “nivel de enculturación académica” y “rendimiento académico” son independientes. No se puede refutar, por tanto, la hipótesis nula (H_0).

Conclusiones

- No se presenta relación entre las variables “nivel de enculturación matemática” y “rendimiento académico” debido al coeficiente de correlación de -0.109.
- Los estudiantes presentan un nivel muy bajo de enculturación con un promedio de 50.20 en un intervalo de <42,3579; 58,0421> y una confianza de 90%.
- El valor desarrollado de manera más homogénea por los estudiantes es el de “Apertura” con un coeficiente de variación de 46%. Sin embargo, su media es de 6.62 de 15 puntos por lo que -a pesar de que su desarrollo es más homogéneo que el de los demás valores- aún se considera bajo.
- El valor con desarrollo más desigual o heterogéneo es el “Misterio” con un coeficiente de variación de 88.11%, lo que implica que no se presenta un adecuado conocimiento de la matemática como proceso social e histórico.
- El valor “Racionalismo”, que es el más relevante para la docencia en matemática (Bishop, 1999), tiene apenas una media de 11 de 43 puntos con un coeficiente de asimetría de 1.2 > 0 lo que indica que sus mayores frecuencias están en los intervalos de bajo o muy bajo.

- La Teoría Antropológico-Cultural de la Educación Matemática (TACUM) es todavía incipiente y cuenta con pocas investigaciones que justifiquen sus planteamientos. Espero, por tanto, que el presente trabajo promueva su fortalecimiento, así como, la realización de más investigaciones sobre la misma.

Referencias bibliográficas

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural.* Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Bruner, J. A. (2000). *La educación, puerta a la cultura.* Madrid, España: Visor.

De Faria. R., D. A. (2008). *Enculturação e aculturação matemática: Interações culturais e reações afetivas dos alunos em sala de aula.* Belo Horizonte, Brasil: Universidade Federal De Minas Gerais.

Peñaloza R., W. (2005). *El Currículo Integral.* Lima, Perú: Unidad de Posgrado de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Reyes C., N. A. (2010). *Enculturación matemática en los alumnos del quinto año de educación secundaria del distrito de Bolognesi, provincia de Pallasca, región de Ancash en el año 2009. (Tesis inédita de Licenciatura).* Lima, Perú: Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Rico R., L. (1997). *Bases Teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria.* Madrid, España: Síntesis.

Sáez, R. (2006). La educación intercultural. *Revista de educación*, 859-881.

Salazar B., A. (1967). *Didática de la filosofía.* Lima, Perú: Arica.

Torres, M., & Inga, K. (2001). Tamaño de muestra para una investigación de mercado. *Facultad de Ingeniería de la Universidad Rafael Landívar*, 1-13.

White, L. A. (1983). *La ciencia de la cultura: Un estudio sobre el hombre y la civilización.* Barcelona, España: Paidós.

LA VALIDACIÓN MATEMÁTICA COMO PROCESO DE CONSTRUCCIÓN COLABORATIVO. UNA EXPERIENCIA CON ACODESA

Álvaro Sebastián Bustos Rubilar, Gonzalo Zubieta Badillo
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. (Chile, México)
abustos@cinvestav.mx, gzubieta@cinvestav.mx

Resumen
En este trabajo reportamos una experiencia de implementación de una actividad de contenido geométrico diseñada bajo los lineamientos de la metodología ACODESA (aprendizaje colaborativo, debate científico y autorreflexión), mostramos cómo los estudiantes, luego de validar individualmente una conjetura, construyen de manera colaborativa una nueva validación para la misma conjetura. El estudio es de corte cualitativo y la población participe estuvo compuesta por futuros profesores de matemática.

Palabras clave: validación matemática, metodología ACODESA, aprendizaje colaborativo

Abstract
In this paper, we report an experiment on the implementation of a geometry activity designed under the guidelines of collaborative learning, scientific debate and self-reflection (CLSDSR) methodology. We show how students, after individually validating a speculation, collaboratively constructed a new validation for the same speculation. This is a qualitative study, which was carried out with mathematics prospective teachers.

Key words: mathematics validation, ACODESA method, collaborative learning

Introducción

En este trabajo presentamos parte del análisis de una experimentación llevada a cabo con futuros profesores de educación secundaria de México, a quienes se les propusieron actividades de contenido geométrico con la intención de que conjeturaran y posteriormente validaran dichas conjeturas. En esta investigación ocupamos el término validación para referirnos a los procedimientos (orales o escritos) que un estudiante pudiera proporcionar para justificar una aserción matemática. Esta validación la entendemos como un proceso de carácter dinámico el cual esperamos evolucione (en el sentido de Brousseau) de acuerdo con el contexto en el cual trabaje el estudiante.

Las actividades fueron diseñadas siguiendo los principios de la metodología de aprendizaje colaborativo, debate científico y autorreflexión (ACODESA), propuesta por Hitt (2007). Ello, con el fin de generar en el aula un ambiente de interacción social y trabajo colaborativo, donde los estudiantes tuvieran oportunidad de debatir e intercambiar ideas para refinar sus validaciones. La metodología ACODESA promueve el aprendizaje colaborativo mediante la interacción social y el uso de tecnología, con esta metodología se logra generar un ambiente donde los estudiantes pueden conjeturar, argumentar y validar (Hitt, Sabolla, & Cortés, 2016). El objetivo de este trabajo fue determinar cómo los estudiantes, luego de validar individualmente una conjetura, construyen en forma colaborativa, al trabajar en equipo, una nueva validación para la misma conjetura.

Referentes teóricos

Los principales elementos teóricos en los cuales está sustentada la investigación tienen relación, por una parte, con la metodología ACODESA (Hitt, 2007; Hitt et al., 2016) y el debate científico en la clase de matemáticas (Alibert & Thomas, 1991; Legrand, 2001). Por otra parte, se utilizó la tipología de niveles y tipos de prueba confeccionada por Balacheff (1987) para identificar y categorizar los procedimientos elaborados por los estudiantes para validar sus conjeturas geométricas, y así poder distinguir las diferencias entre la validación formulada por un estudiante de manera individual y la confeccionada durante la etapa de trabajo en equipo.

A partir del análisis de los procedimientos elaborados por estudiantes para validar sus conjeturas, Balacheff (1987) propone dos niveles de prueba; pragmáticas e intelectuales. En el primero encontramos las pruebas que recurren a la acción y a ejemplos concretos.

Empirismo ingenuo. El estudiante afirma la validez de un enunciado después de verificarlo en casos particulares. En este tipo de prueba se evidencia una resistencia del estudiante a la generalización.

Experiencia crucial. El estudiante verifica con un ejemplo lo menos particular posible. En este tipo de prueba el alumno generaliza explícitamente a partir del ejemplo con el cual verifica el enunciado.

Ejemplo genérico. El estudiante da un ejemplo que representa la generalidad, es decir, un ejemplo que no es considerado un caso particular, sino un representante de una clase de casos para los cuales sí es verdadero el enunciado. En este tipo de prueba el enunciado es justificado por medio de operaciones y transformaciones del objeto matemático.

En el segundo nivel se encuentran las pruebas apoyadas en la formulación de propiedades matemáticas puestas en juego y en la relación que existe entre ellas.

Experiencia mental. El estudiante explica las razones mediante el análisis de las propiedades implicadas en el enunciado, descontextualizándolo y sacándolo de una representación particular.

Calculo sobre los enunciados. Construcciones intelectuales basadas en teorías más o menos formalizadas o explícitas, originadas en una definición o propiedad y se basan en la transformación de expresiones simbólicas. Este tipo de prueba oscila entre la experiencia mental y la demostración.

Otro referente teórico utilizado en la investigación, son los lineamientos del debate científico en la clase de matemática (Alibert & Thomas, 1991; Legrand, 1993, 2001). En el debate científico en matemáticas deben prevalecer los argumentos racionales –justificaciones sustentadas en el corpus teórico de la matemática–, más que en evidencia empírica o declaraciones carentes de una validación propia de la disciplina. Durante el desarrollo del debate, el rol del profesor consiste en facilitar la manifestación de ideas y permitir esclarecer los diferentes puntos de vistas para que los estudiantes sean quienes defiendan sus aserciones, siempre y cuando sientan que son más razonables que las expresadas y justificadas por sus pares. Los estudiantes mismos deben ser quienes lideren el consenso de lo debatido.

Metodología

La investigación es de corte cualitativo y la población participante estaba compuesta por futuros profesores de matemáticas nivel secundaria. El tiempo dedicado para implementar cada actividad fue de dos sesiones de clases de dos horas cada una. El propósito general de las actividades fue generar un ambiente de trabajo en el cual los estudiantes pudieran conjeturar y enseguida validar sus conjeturas en forma individual y en colaboración con sus pares. Como el objeto de estudio en la investigación son las validaciones elaboradas por los alumnos, las actividades fueron diseñadas para que los estudiantes no dedicaran mucho tiempo al proceso de conjeturar, y así disponer de mayor tiempo para elaborar validaciones.
La recolección de datos se hizo a través de distintas fuentes, se utilizaron videocámaras para capturar planos generales y específicos en el salón de clases. También se grabó, por medio de grabadoras de audio, todos los diálogos producidos por los estudiantes. Además, fueron recopiladas las hojas de trabajos de los alumnos cuando trabajaron en las distintas etapas de la metodología ACODESA, detalladas a continuación.

1. **Trabajo individual**. El estudiante desarrolla la actividad en forma individual con papel y lápiz.
2. **Trabajo en equipo**. Los estudiantes trabajan en equipos compuestos por dos o tres integrantes.
3. **Debate científico**. Los estudiantes debaten, en el sentido de Legrand (2001) las propuestas de solución presentadas por cada equipo.
4. **Autorreflexión**. Cada estudiante reconstruye individualmente con papel y lápiz la respuesta al problema.
5. **Institucionalización**. El docente presenta la solución institucional –en el sentido de Brousseau (2002) – del problema.

El enunciado principal de la actividad de la cual se analizaron los resultados reportados aquí trataba de dos cuadrados congruentes adyacentes; en el interior de uno se tenían cuatro círculos congruentes tangentes entre sí y tangentes al cuadrado, mientras que en el otro cuadrado se tenía un círculo inscrito (Figura 1).

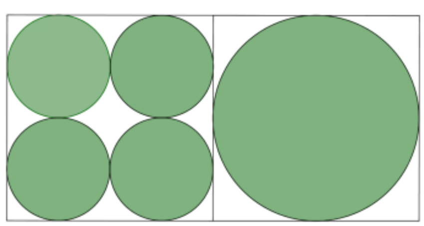


Figura 1. Círculos inscritos.

Por limitaciones de espacio, en este escrito solo se reporta el análisis de uno de los incisos de la actividad propuesta a los estudiantes. Se analiza la justificación proporcionada por los alumnos para validar la conjetura formulada por un estudiante ficticio llamado Oscar.

Oscar: ...El diámetro de un círculo pequeño es la mitad del lado del cuadrado, y el del círculo grande es igual al lado del cuadrado.

A partir de la afirmación de Oscar se solicitó a los estudiantes responder la siguiente pregunta: *¿cuál sería para ti la justificación matemática de la conjetura formulada por Oscar?*

Análisis de resultados

Por razones de espacio solo mostraremos el caso de un equipo integrado por cuatro estudiantes; Karina, Michel, Juan y Marce. Cada estudiante elaboró una validación durante la etapa de trabajo individual, y durante el trabajo en equipo contrastaron sus respuestas e intercambiaron ideas y comentarios que ayudaron al surgimiento de argumentos cada vez más sólidos para justificar la conjetura de Oscar. Por ejemplo, en la etapa de trabajo individual Marcela elaboró la siguiente respuesta (Figura 2).

Considero que el razonamiento que realiza Oscar es lógico pero efectivamente como lo menciona Diana no es una demostración formal, detallada que nos muestre un resultado evidente. en un grado más avanzado

Figura 2. Validación elaborada por Marcela.

Observamos que la validación proporcionada por Marce tiene características de un discurso descriptivo, más que el de una justificación matemática. Ello, porque la estudiante menciona relaciones, pero no las justifica, además de afirmar de diferente manera lo ya dicho por Oscar. Esto último quedó en evidencia en la etapa de trabajo en equipo, la cual inició con la lectura de la validación proporcionada por Marce. Luego que la estudiante finalizara de leer su respuesta a sus compañeros, Juan intervino y afirmó que su justificación era similar a lo formulado por Oscar.

[1] Juan: *Más o menos como lo que va diciendo Osc...*
[2] Marce: *Sí, más o menos lo que dijo Oscar.*
[3] Juan: *Sí, es lo que dijo Oscar.*
[4] Marce: *Yo decía que era por lo de tangencias, pero ¿podría yo hacer eso para justificarlo?*

En el diálogo entre Juan y Marce observamos que Juan no considera una justificación lo hecho por su compañera, incluso la misma estudiante da indicios en [4] de no estar convencida de si puede justificar como lo hizo. Luego de lo anterior, es Juan quien explica a sus compañeros su forma de validar lo conjeturado por Oscar.

[5] Juan: *Si trazamos una paralela a un lado del cuadrado, que pase por el centro de la circunferencia* [grande], *nos daríamos cuenta de que efectivamente, el segmento determinado por los puntos de tangencia de la circunferencia con respecto al cuadrado forma un lado del mismo cuadrado, es decir, si trazáramos una paralela y luego que lo determina su punto de tangencia, se forma un segmento igual al del lado del cuadrado.*
Del mismo modo, si trazamos una paralela a cualquiera de los cuatro lados del cuadrado, que pase por... digamos que hacemos lo mismo, pero con las

circunferencias chiquitas, también se forma un lado del cuadrado.
...entonces, ya nos daría que la suma de los diámetros chiquitos es igual al diámetro del círculo mayor, por haber trazado las paralelas y habernos dado cuenta de eso.

En la propuesta de Juan, observamos que él trata de justificar visualmente mediante el trazado de rectas o segmentos paralelos a los lados del cuadrado. Para el caso del círculo mayor, explica por qué el segmento paralelo que propone trazar por el centro de la circunferencia pasa por los puntos de tangencia de la misma. Probablemente, Juan apoya sus argumentos en las propiedades de la circunferencia inscrita en un polígono regular como el cuadrado, aunque no lo explicita.

[6] Marce: *No que él* [Oscar] *decía que este diámetro* [de un círculo pequeño] *era la mitad de un lado del cuadrado.*
[7] Juan: *Pero primero dice: el radio de un círculo pequeño es la mitad de un lado del cuadrado, y del círculo grande es igual a un lado del cuadrado.*
Yo con la paralela, yo según "demostré" efectivamente, que un diámetro del círculo grande es igual a un lado del… cuadrado.

Juan supone haber demostrado de manera visual la conjetura de Oscar, aunque Marce y sus otros compañeros de equipo no daban muestras de estas convencidos de lo dicho por Juan. Luego de intercambiar algunas ideas, Marce intervino nuevamente para tratar de explicar y dar las razones de lo que ella trató de hacer al retomar su respuesta.

[8] Marce: *Es que yo decía que trazáramos la línea de tangencia.*
[9] Juan: *Mm...*
[10] Marce: *Que es esta* [trazo rojo en Figura 3]*, la que pasa por este punto y este punto... y al verlo así, pues nos damos cuenta de que divide en la mitad* [al lado del cuadrado].
Se supone que si este es tangente... se supone que si [los círculos pequeños] *son tangentes entre sí y los círculos son iguales. Y si pasamos la línea de tangencia por la mitad* [entre dos círculos pequeños]*, esta línea de tangencia va a dividir al segmento* [lado del cuadrado] *por la mitad, ¿por qué? porque este* [diámetro de un círculo pequeño] *es igual a este* [diámetro del círculo tangente al anterior].

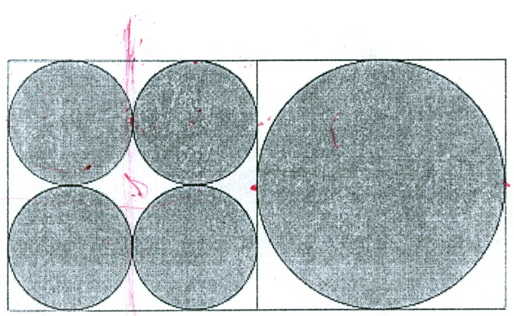


Figura 3. Trazos señalados por Marce.

Ambos estudiantes trataron de justificar de manera similar, mediante el trazo de segmentos o rectas. La diferencia entre sus validaciones es la forma, por una parte, Juan sostiene que el segmento paralelo a un lado del cuadrado y que pasa por el centro del círculo mayor, pasará también por los puntos de tangencia. Entonces, el segmento que une los puntos de tangencia será un diámetro del círculo e igual al lado paralelo del cuadrado, y de forma análoga para justificar que el diámetro de un círculo pequeño es la mitad del lado del cuadrado. Por otra parte, la estrategia de Marce fue trazar un segmento que pasara por el punto de tangencia entre dos círculos tangente (trazo rojo en

Figura 3). Los dos estudiantes basan sus afirmaciones en el trazado de segmentos auxiliares y no explicitan las propiedades relacionadas con sus afirmaciones, aun así, consideramos sus validaciones como pruebas de tipo ejemplo genérico, ya que siempre se refieren a la figura como una representación general. Aunque no observamos una prueba intelectual, sí notamos un claro avance en los argumentos escrito por Marce, por ejemplo, y los que proporciona oralmente cuando dialoga con Oscar. Argumentos que son expresados de manera más formal por escrito y mejorados en las siguientes etapas de la metodología ACODESA, debate y autorreflexión.

Conclusiones preliminares

En general, en las hojas de trabajo de los estudiantes se observaron desde validaciones apoyadas en evidencia empírica (verificaciones para casos particulares), hasta justificaciones más apegadas a pruebas intelectuales, en el sentido de Balacheff (1987). Aquellos estudiantes quienes apoyaron sus argumentos en evidencia empírica fueron quienes más enriquecieron sus validaciones durante la etapa de trabajo en equipo y de debate.

Los resultados obtenidos nos permiten, de manera preliminar, concluir que las actividades diseñadas bajo los lineamientos de la metodología ACODESA ayudaron a crear un ambiente propicio en el aula, donde los estudiantes tuvieron instancias en las cuales validaron en forma individual una conjetura, y luego al trabajar en equipo compartieron y contrastaron sus validaciones con las confeccionadas por sus compañeros. Esta forma de trabajo colaborativo generó un ambiente en el cual los estudiantes intercambiaron ideas y puntos de vista, hecho que les ayudó para refinar sus validaciones, y a la vez, aportar en la construcción de una nueva validación como equipo, consensuada por todos. Observamos que al implementar actividades enmarcadas en ACODESA la calidad de los argumentos utilizados por los estudiantes para justificar una conjetura matemática mejoró, sobre todo durante las etapas en las cuales interactuaron entre ellos.

Referencias bibliograficas

Alibert, D., & Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 215–230). New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Klower Academic.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 147–176. https://doi.org/10.1007/BF00314724

Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds.). New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic.

Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés*, 65–88.

Hitt, F., Sabolla, M., & Cortés, J. C. (2016). Task design in a paper and pencil and technological environment to promote inclusive learning: An example with polygonal numbers. *En proceso de publicación*.

Legrand, M. (1993). Debat scientifique en cours de mathematiques et specificite de l'analyse. *Repères-IREM*, *10*, 123–159. Recuperado a partir de http://www.univ-irem.fr/exemple/reperes/articles/10_article_68.pdf

Legrand, M. (2001). Scientific Debate in Mathematics Courses. En *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (pp. 127–135).

ANIMACIONES DE FUNCIONES TRASCENDENTES Y CAMPOS VECTORIALES EN GEOGEBRA

Alexandra Bulla Buitrago, Christian Camilo López Mora, William Alfredo Jiménez Gómez, Joel Fernando Morera Robles
Universidad de los Andes y Universidad Pedagógica Nacional. (Colombia)
alexandrabulla128@gmail.com, clopezcamilom@gmail.com, williamajg@gmail.com, joemore05@gmail.com

Resumen
En este trabajo, describimos dos propuestas enfocadas a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en ámbitos universitarios. Estas propuestas, se diseñaron e implementaron con el objetivo de establecer relaciones entre los sistemas de representación gráfico y algebraico mediante el uso de la herramienta GeoGebra. En primera instancia, se usa la definición de campo vectorial para explicar el proceso general de programación y construcción de campos vectoriales en 2D y 3D. Posteriormente, se describe un proceso para realizar algunas animaciones que involucran movimientos rígidos sobre funciones, con el fin de comprender cambios sobre su dominio y rango. Por último, concluimos que el uso de la herramienta GeoGebra, permite establecer relaciones entre los sistemas de representación gráfico y algebraico, para generar una mejor comprensión de los conceptos matemáticos en nuestros estudiantes.

Palabras clave: campos vectoriales; dominio y rango de una función; GeoGebra

Abstract
In this paper, we describe two proposals focused on higher education mathematics teaching and learning process. These proposals were designed and implemented with the aim of establishing relationships between the graphic and algebraic representation systems by using GeoGebra. Firstly, we describe a process to produce some animations involving rigid motions on functions, in order to understand changes in their domain and range. Subsequently, we use the definition of vector field to explain the general process of programming and construction of vector fields in 2D. Finally, we conclude that GeoGebra allows establishing relationships between the graphic and algebraic representation systems, to lead to better understanding of mathematical concepts in our students.

Keywords: vector fields; domain and range of functions

Introducción

En el contexto académico, existe un alto interés en los profesores de matemáticas por realizar propuestas de enseñanza y aprendizaje, que involucren situaciones con el uso de herramientas tecnológicas (Araya, 2007). De igual manera, se reconoce la importancia por el uso y las relaciones entre diferentes registros de representación para fortalecer el aprendizaje de los estudiantes respecto a los conceptos matemáticos (Gómez, 1997). En este sentido, implementamos una propuesta orientada a estudiantes universitarios en la ciudad de Bogotá, con el objetivo de establecer relaciones entre los sistemas de representación gráfico y algebraico a partir del sistema de representación ejecutable.

En primera instancia, nos centramos en el desarrollo de una actividad para comprender la noción de campo vectorial en 2D y 3D. Esta actividad, la propusimos con base en aspectos que habíamos identificado en algunos cursos universitarios de cálculo vectorial en los que enseñamos dicho tema. Por ejemplo, sabíamos que era posible enseñar la definición de campo vectorial mediante el uso de un sistema algebraico y hacer una representación del campo vectorial en un plano cartesiano. Lo anterior implicaba que nuestros estudiantes representaran algunos puntos y sus vectores en 2D, sin comprender en su totalidad la verdadera representación y su comportamiento en general. Como docentes queríamos que los estudiantes obtuvieran la mejor representación de un campo vectorial. Por tal razón, diseñamos un proceso de construcción basados en la programación de GeoGebra. Esta construcción nos permitió enseñarles a nuestros estudiantes diversas características que no habíamos contemplado anteriormente. El uso de la GeoGebra nos permitió establecer relaciones entre el sistema de representación algebraico y gráfico, de igual manera, los estudiantes observaron la construcción de un campo vectorial paso a paso. También, se realizó una programación para determinar el dominio del campo vectorial, luego la construcción de los vectores. Finalmente, cada estudiante obtuvo la representación en 2D y 3D de diversos campos vectoriales de manera dinámica. Adicionalmente, durante el desarrollo de la propuesta se logró evidenciar interés de los estudiantes al comprender la utilidad de los campos vectoriales en diferentes situaciones. Por ejemplo, al modelar distribuciones de fuerzas de naturaleza electromagnética o gravitatoria en el espacio, en el estudio del movimiento de los vientos o al analizar las características del vuelo de un avión.

Posterior a la actividad de campos vectoriales, describimos el proceso de construcción que utilizamos para diseñar algunas animaciones en la herramienta GeoGebra, basándonos en funciones sobre el plano cartesiano. Esta idea surge con la intención de afianzar conceptos relacionados con los movimientos rígidos en el plano sobre una función haciendo énfasis en identificar el cambio de las características propias de la función (dominio, rango,…). Esta actividad se relaciona con la actividad de campos vectoriales en sus propósitos de dar sentido a un concepto matemático a partir de las diferentes traducciones en los sistemas de representación y lograr un mejor aprendizaje de nuestros estudiantes con el uso de herramientas tecnológicas.

Fundamentos teóricos

Las matemáticas escolares son complejas, porque cada concepto matemático admite una multiplicidad de significados (Cooney, 2004, p. 511; Rico, Castro, Castro, Coriat y Segovia, 1997). Los conceptos matemáticos tienen sus propias características y se pueden evidenciar a partir de sus diferentes representaciones (Cañadas, Gómez y Pinzón, 2016). Seguimos el trabajo de Kaput (1992) quién menciona que un sistema de representación es “un sistema de reglas para (i) identificar o crear signos, (ii) operar sobre y con ellos y (iii) determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia)” (p. 523).

En esta propuesta, consideramos el sistema de representación ejecutable definido por Cañadas, Gómez y Pinzón (2016) quienes afirman que el programa de geometría dinámica GeoGebra se considera un sistema de representación ejecutable, porque tiene elementos propios y sus propias reglas para combinar, operar y representar con esos elementos. Por tanto, estableceremos relaciones entre las representaciones simbólicas y gráficas por medio de GeoGebra de algunos conceptos y procedimientos propios del Cálculo. En términos específicos nos centramos en la transformación de funciones y algunos conceptos básicos como la función, su dominio y rango y los campos vectoriales.

En cuanto a la enseñanza del cálculo, Hitt (2018) reconoce que “en las primeras investigaciones con tecnología se tenía una gran tendencia en tratar de demostrar que dentro de un medio tecnológico podría ser más adecuada la enseñanza del cálculo que sin tecnología”.

Para el desarrollo de esta propuesta, tomamos como referente otros trabajos que utilizan la herramienta GeoGebra para abordar el aprendizaje y enseñanza de temas matemáticas. Por ejemplo, Rey, Bulla, Jiménez, y Rojas (2013) proponen utilizar GeoGebra para construir animaciones creativas para comprender características de las funciones en un plano cartesiano. También López, Morera, y Jiménez (2016) utilizaron GeoGebra como recurso para realizar una introducción a la noción de campos vectoriales en 2D.

Método y resultados

En este apartado, describimos el método y los resultados obtenidos durante el desarrollo de las actividades propuestas. La propuesta de animaciones de funciones, implementó con estudiantes de una Licenciatura en Matemáticas en una universidad pública de Bogotá. En cuanto a la construcción de campos vectoriales, se implementó con estudiantes de Ingeniería en una universidad privada en Bogotá. Para la primera actividad, nos basamos en la noción de campo vectorial en términos generales.

Un campo vectorial es una función $F\colon D \subseteq R^n \to R^n$ que relaciona a cada punto $X = (x_{1,}x_2, \dots, x_n)$ del dominio correspondiente el vector que tiene la forma $F(X) = (F_1(X), F_2(X), \dots, F_n(X))$. Con lo anterior, establecimos las siguientes expresiones para 2D y 3D respectivamente: $F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$ y $F(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$.

El primer paso de la construcción con los estudiantes, se relaciona con el dominio de puntos que determinará el campo vectorial. Por ejemplo, en la figura 1, se muestra el dominio de puntos que fue generado por un deslizador y con el uso de la instrucción *secuencia* en la herramienta GeoGebra.

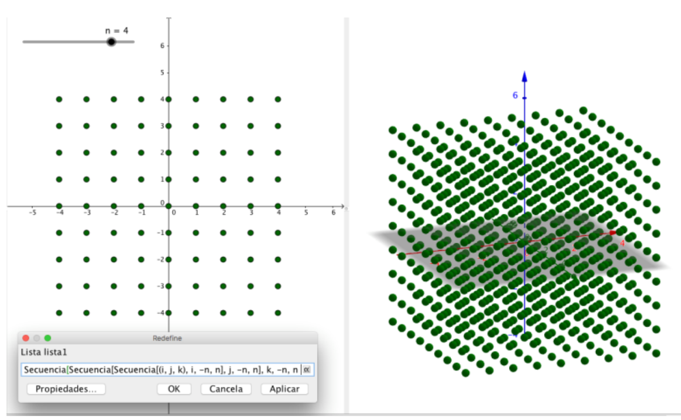


Figura 1. Secuencia de puntos

Es importante resaltar que los estudiantes identificaron que era necesario solo una programación para determinar esta secuencia en 2D y 3D. Es decir, programar la lista de puntos en 3D genera directamente los puntos en 2D. En el mismo sentido, esta programación inicial permite generar la construcción del dominio para cualquier campo vectorial. Posteriormente, construimos una secuencia de vectores (figura 2), con el objetivo que los estudiantes identificarán como determinar una secuencia de vectores relacionados con el dominio dado.

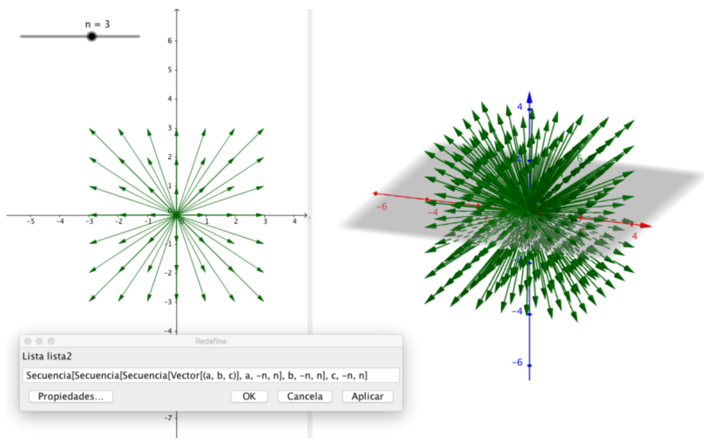


Figura 2. Secuencia de vectores

Por último, se construye el campo vectorial. Por ejemplo, en la figura 3, se muestra la representación del campo vectorial en 2D correspondiente a $F(x,y) = \left(P(x,y), Q(x,y)\right)$ en donde $P(x,y) = -y$; $Q(x,y) = x$, y la representación en 3D correspondiente a $\mathrm{F(x,y,z)} = \left(\mathrm{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)}\right)$ en donde $P(x,y,z) = -y$; $Q(x,y,z) = x$; $R(x,y,z) = z$.

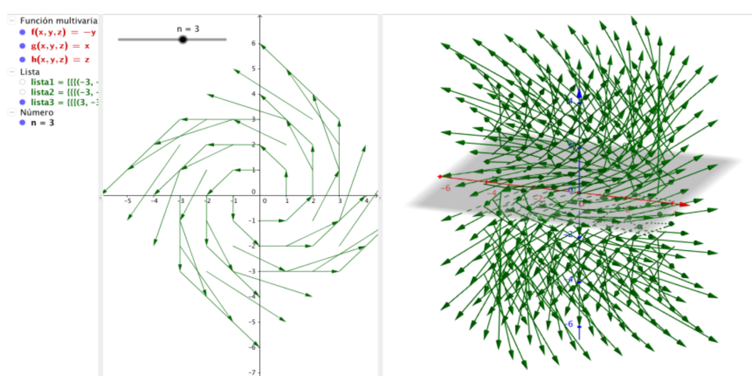


Figura 3. Campo vectorial

Al finalizar esta actividad, obtuvimos que los estudiantes lograron realizar la representación de algún campo vectorial en 2D y 3D logrando explicar a sus compañeros la definición del campo vectorial. La figura 4, muestra algunas representaciones que realizaron nuestros estudiantes.

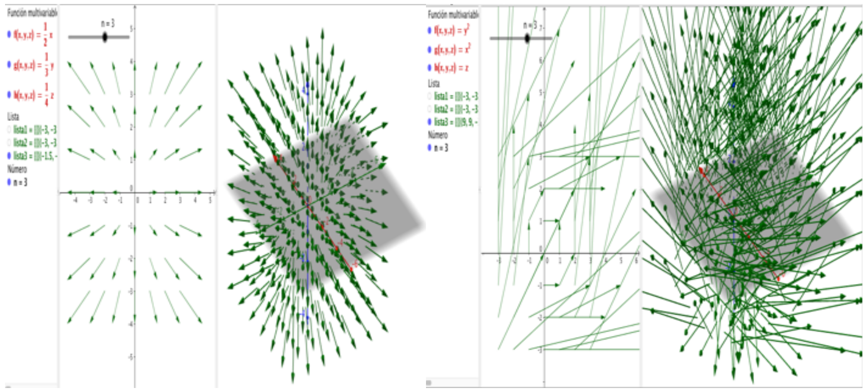


Figura 4. Campo vectorial 2

En cuanto a la propuesta de animaciones de funciones, esta idea se centra en utilizar nociones de movimientos rígidos, como rotaciones, traslaciones y reflexiones en el plano, para comprender nociones de dominio y rango de funciones carteicoanes y polares. Por ejemplo, se utiliza la construcción de una animación que permita evidenciar las características antes nombradas mediante el uso de deslizadores y de comandos como Funcion[f,a,b], que permite graficar funciones con dominio restringido. Por ejemplo, tomamos como referencia la $f(x) = senx$, luego, se realizan transformaciones para obtener la función $\mathrm{f}(x) = sen(x - 0.5) - 4.5$. Posteriormente, se cambia el dominio de la función, para el diseño del movimiento de un *pequeño gusanito con un pájaro* sobre el valle (figura 5). A partir de la figura 5, se realizan cambios para generar nuevas gráficas (figura 6). Además, consideramos algunas funciones polares para este trabajo definidas como: $Curva(3z(t)\,3\,cos(t) - 15, z(t)\,3\,sen(t + a) + 7.79, t, 0, 6.28319)$, $Curva(3r(t)\,3\,cos(t) - 19, r(t)\,3\,sen(t) + 10, t, 0, 6.28319)$ y $Curva(3r(t)\,3\,cos(t) - 19, r(t)\,3\,sen(t) + 10, t, 0, 6.28319)$.La construcción está basada en 4 deslizadores y los lectores pueden ver dicha aplicación en el enlace https://www.geogebra.org/m/eVNJ3w2a.

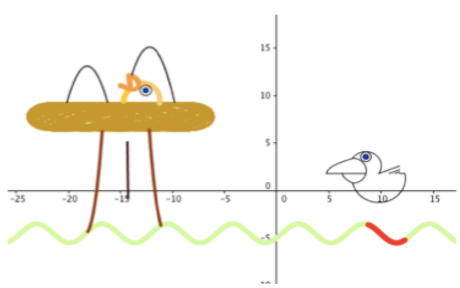


Figura 5. Representación inicial del Barco

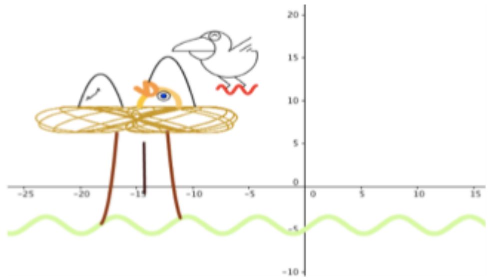


Figura 6. Movimiento generado

Conclusiones

El uso de la herramienta GeoGebra como sistema de representación manipulable permitió que los estudiantes identificaran relaciones entre representaciones gráficas y simbólicas. En los campos vectoriales, los estudiantes afianzaron la definición de campo vectorial al realizar un proceso de construcción para la representación del campo vectorial en 2D y 3D. En cuanto a la animación de funciones, nuestros estudiantes pudieron observar e identificar características de las funciones y realizar diversos movimientos rígidos en el plano con funciones dadas.

La propuesta de actividades con el uso de un software educativo, en este caso GeoGebra, generó interés en los estudiantes por el aprendizaje de conceptos matemáticos relacionados con los campos vectoriales y las animaciones de funciones.

Las animaciones de funciones y los campos vectoriales son contenidos que deben seguirse trabajando para su aprendizaje y enseñanza, se deben continuar realizando estas propuestas enfocadas al uso de herramientas tecnológicas y con aplicaciones o uso de situaciones cercanas al estudiante.

Aunque las propuestas fueron implementadas en cursos universitarios, consideramos que otros colegas puedan desarrollar este tipo de actividades con estudiantes de otros niveles escolares.

Referencias bibliográficas

Araya, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 2(3), 11-44.

Cañadas, M., Gómez, P. y Pinzón, A. (2016). *Módulo2: Análisis de contenido*. Documento no publicado. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/6453/1/ApuntesModulo2MAD3.pdf

Cooney, T. (2004). Pluralism and the teaching of mathematics. En B. Clarke, D. M. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johansson, D. V. Lambdin, F. K. Lester, A. Wallby & K. Wallby (Eds.), 23 *International perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 503- 517). Göteborg: National Center for Mathematics Education.

Gómez, P. (1997). Tecnología y educación matemática. *Informática Educativa*, 10(1), 93-111.

Hitt, F. (2018). Nuevas tendencias en la enseñanza del cálculo: la derivada en ambientes TICE. *Revista electrónica AMIUTEM*, 2(2), 1-19

Kaput, J. (1992). Technology and Mathematics Education. En Grouws, D.A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillan, pp. 515-
556.

López, C., Morera, J. y Jiménez, W. (2016). *Campos vectoriales en GeoGebra*. Congreso Latinoamericano de GeoGebra. Medellín. Memorias en proceso de publicación.

Rey, R., Bulla, A., Jiménez, W., y Rojas, S. (2012). *El dominio, rango y la transformación de funciones construyendo animaciones en GeoGebra*.

Rico, L., Castro, E., Castro, E., Coriat, M., y Segovia, I. (1997). *Investigación, diseño y desarrollo curricular. En L. Rico (Ed.), Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 265-318). Madrid: Síntesis.

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

ATIVIDADE PARA DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO DE ESTUDANTES DOS ANOS INICIAIS POR MEIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA

Morgana Scheller, Zulma Elisabete de Freitas Madruga, Lori Viali
IFC–Rio do Sul, UESC, PUCRS. (Brasil)
morganascheller@yahoo.com.br, zulma.freitas@ulagos.cl, viali@pucrs.br

Resumo
Apresenta-se experiência de Modelagem na Educação desenvolvida com estudantes do 4º ano, a qual pode possibilitar o desenvolvimento do pensamento algébrico com a utilização de linguagem simbólica na expressão de modelo matemático que resolve a situação-problema. Para isto foi desenvolvida prática de Modelagem na Educação intitulada '*Uma fita, muitas ideias*' com dezesseis estudantes do Ensino Fundamental de uma escola pública brasileira. A investigação sobre a *Fita Möebius* proporcionou condições para a obtenção de generalizações a respeito do número de fitas e largura das mesmas, quando realizado cortes longitudinais nas *Möebius*. Assim, obtiveram dois modelos expressos nas linguagens natural, tabular e simbólica. Desse modo, a atividade demonstrou que o método proporciona à criança condições para utilização de linguagem simbólica, contribuindo assim para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Palavras-chave: ensino de matemática por investigação, modelagem na educação, pré-álgebra

Abstract
We report an experience of Modeling in Education developed with fourth-grade students. It can enable the development of algebraic thinking by using symbolic language in the expression of a mathematical model that solves the problem situation. Thus, a Modeling in Education practice entitled 'A strip, many ideas' was developed with sixteen students from the Elementary School of a Brazilian public school. The investigation of Möebius strip provided conditions to obtain generalizations regarding the number of strips and their length, when making longitudinal cuts in the Möebius strip. This way, they obtained two models expressed in the natural, tabular and symbolic languages. So, the activity demonstrated that the method provides the child with conditions to use of symbolic language, what contributes to the development of algebraic thinking.

Keywords: research mathematics teaching; modeling in education; early algebra

Introdução

A Modelagem Matemática (MM) na Educação constitui-se atualmente um meio reconhecido na área da Educação Matemática para a abordagem do ensino de Matemática na perspectiva da investigação (Scheller et al, 2017; Biembengut (2011, 2007). Pode contribuir para uma educação algébrica como foco no desenvolvimento do pensamento algébrico e sua significação. Propostas curriculares orientam para o desenvolvimento de práticas de MM, as quais podem contribuir para os 'letramentos' do estudante, inclusive o matemático. Ademais, um ensino com pesquisa instiga o estudante no sentido da curiosidade em direção ao mundo que o cerca, possibilitando que o estudante possa ser protagonista na busca de conhecimento.

No entanto, os índices ilustram que o letramento matemático ainda não atende ao desejado, no Brasil. Dentre as várias tendências da Educação Matemática que visam auxiliar no processo de ensino e de aprendizagem de modo a contribuir para a melhoria de tais índices está a MM, um método de ensino com pesquisa para os limites da sala de aula de Biembengut (2014). De acordo com a autora, o método pode ser utilizado em qualquer etapa da educação e, ao ser utilizado na sala de aula, a(s) criança(s) elabora(m) modelo(s), que em níveis mais avançados de ensino pode requerer linguagem simbólica, contempladas por meio de uma abordagem algébrica no ensino. Estudos, tais como os indicados anteriores, apontam que os modelos são expressos pelos que realizam as atividades de modelagem de acordo com as capacidades cognitivas e experiências que cada um possui em relação com o tema ou/e com o método. Por outro lado, no Brasil, a educação algébrica nos anos inicias da Educação Básica não estava destacada explicitamente. No entanto sabe-se que há necessidade de propostas que incentivam e orientam o desenvolvimento do pensamento algébrico já nos Anos Iniciais, como indicam o *National Council of Teachers of Mathematics* - NCTM (2007) e, recentemente, a Base Nacional Comum Curricular de abril de 2016 (Brasil, 2016).

Partindo do pressuposto que estudantes de todas as etapas da Educação Básica elaboram modelos para resolução de situação-problema em MM e que crianças dos anos iniciais ainda não possuem o domínio algébrico simbólico, como elas determinam modelos matemáticos que possibilitam a resolução do problema? Como uma atividade proposta possibilita a mobilização de linguagem simbólica pelas crianças contribuindo para o desenvolvimento do pensamento algébrico?

O estudo decorreu após revisão da literatura a respeito do tema – pensamento algébrico. Estudos de Schoenfeld (1995), Kaput (2008), Kieran (1996, 2004, 2007), Blanton e Kaput (2005), Schliemann, Carraher e Brizuela (2007), Kaput, Carraher e Blanton (2008) e Canavarro (2007) dentre outros, baseados na evolução histórica da álgebra, apontam para a importância de que o desenvolvimento algébrico e o aritmético ocorram simultaneamente, desde os Anos Iniciais da Educação Básica. A defesa é decorrente do próprio conceito de álgebra. Quando o foco refere-se à alfabetização algébrica, no cenário internacional, dentre os estudos, encontra-se a expressão '*Early Algebra*' (EA), utilizada para designar pesquisas cujos objetivos referem-se a significado diferente do costumeiro dos Anos Finais. A EA busca o reconhecimento do pensamento algébrico em atividades de matemática nos anos anteriores ao 7º Ano. Para Blanton e Kaput (2005, p. 413), o pensamento algébrico refere-se ao "processo pelo qual os estudantes generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade". Acredita-se que neste processo fazem uso de diferentes registros de representações utilizando linguagens variadas. Para estes autores o pensamento algébrico se subdivide em aritmética generalidade (generalização das operações e o pensamento relacional entre números) e pensamento funcional (descrição da variação numérica em certo domínio, ideia similar do conceito de função). Neste último é que pode ser desenvolvida a simbolização de quantidades, operações com estas, além da determinação de relações funcionais e representação gráfica que podem subsidiar a previsão de resultados. Segundo Kieran (2004, p. 149), nos anos iniciais, o pensamento algébrico

> [...] envolve o desenvolvimento de formas de pensar no âmbito das atividades para as quais a linguagem simbólica pode ser usada como uma ferramenta, mas que não são exclusivas para álgebra e com as quais podem se envolver sem usar qualquer linguagem simbólica, tais como analisar relações entre quantidades, observar a estrutura, estudar variações, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, provar e prever (Tradução nossa).

Carraher, Schliemann e Brizuela (2008) e Kaput (2008) expõem que um dos meios para que os estudantes consigam este desenvolvimento é proporcionando condições para que os mesmos expressem afirmações matemáticas por meio de variadas representações como tabelas, sequências numéricas, gráficos cartesianos, notação algébrica simbólica e, claro, a linguagem natural. Considerando o potencial da MM na Educação e as características do pensamento algébrico dos Anos Iniciais, acredita-se que atividades com MM como método de ensino com pesquisa podem se constituir em uma alternativa e potencializar tais características, propiciando ao estudante condições de, inclusive, expressar simbolicamente generalizações. Nesse sentido, apresenta-se atividade idealizada e desenvolvida.

Procedimentos metodológicos

Para obter respostas às indagações presentes até então, desenvolveu-se pesquisa na perspectiva qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994) em uma instituição pública de Ensino Fundamental brasileira. Participaram do desenvolvimento da atividade dezesseis estudantes (oito meninos e oito meninas) de faixa etária nove a dez anos, membros este pertencentes ao quarto ano do Ensino Fundamental de uma escola do campo.

A atividade escolhida para de MM na Educação, desenvolvida em grupo de quatros elementos e denominada '*Uma fita, muitas ideias',* foi desenvolvida na perspectiva da *Early Algebra* ao longo de dez horas/aula, no primeiro semestre de 2015. A experiência pautou-se na concepção de Modelagem na Educação de Biembengut (2014) de acordo coma as três fases, não disjuntas, denominadas de:

Fase 1 - *percepção e apreensão* - envolve a percepção no reconhecimento da situação-problema relativa ao tema e apreensão na familiarização com o assunto a ser modelado.

No início da atividade o pesquisador, de posse de duas tiras retangulares de papel, indagou a turma sobre a quantidade de superfícies em cada uma delas. Após o apontamento das hipóteses sugere à turma a união das extremidades de cada uma das fitas de modo a obter um anel cilíndrico e uma fita de *Möebius*. Posteriormente solicita que, com auxílio de um lápis colorido, percorra longitudinalmente cada uma das fitas de modo a obter respostas a fim de confirmar as hipóteses. Solicita que registre suas observações a respeito de cada uma das fitas e procure justifica-las. Na sequência, questiona sobre o que a turma pensa ocorrer se cortar a fita longitudinalmente ao meio. Em seguida solicita que seja efetuada a secção e o registro do encontrado e sua justificativa para tal. Para finalizar a fase, toda a turma é instigada após a percepção dos primeiros cortes nas fitas a buscarem mais informações sobre o que constitui a *Fita de Möebius* e onde é utilizada. Além das informações obtidas pelas crianças na tarefa de casa, a pesquisadora proporcionou à turma uma série de textos sobre o assunto, o qual foi estudado pelas crianças para que, ao final, elaborassem um pequeno texto sobre o assunto.

Fase 2 - *compreensão e explicação* – refere-se a compreensão na formulação do problema, explicitação na formulação do modelo matemático e explicitação na resolução do problema a partir do modelo.

Embora o problema possa advir dos estudantes, nesta atividade, o pesquisador sugere a situação-problema ao grupo, visto sua intencionalidade de *Early Algebra.* Assim apresentou a situação problema: *O que acontece com a largura da largura da fita e com o número de fitas, na medida em que aumentam as secções longitudinais na fita de Möebius?* Para isto proporciona condições para a obtenção de dados e solicita o registro escrito das percepções feitas ao efetuarem cada uma das secções nas fitas, sempre aumentando o número de 'riscos', conforme Figura 1.

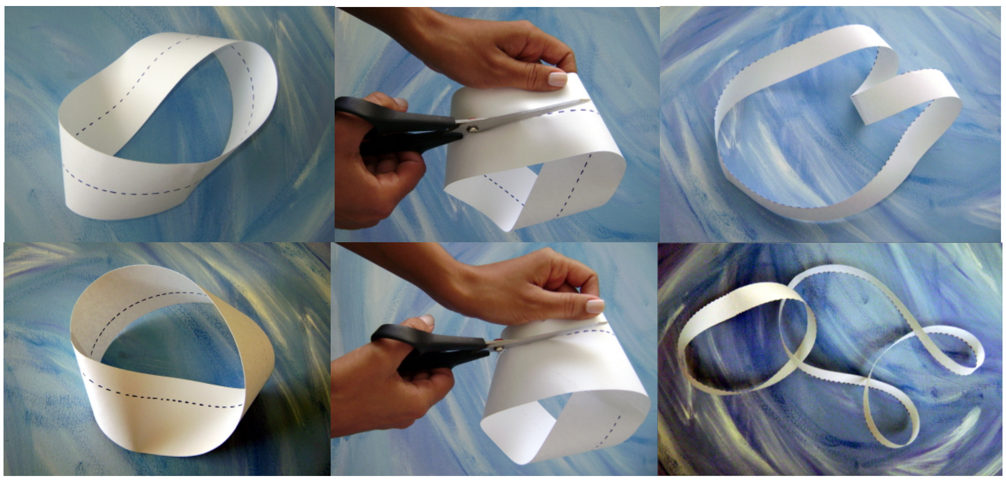


Figura 1. Ilustração da realização de secção longitudinal (ao meio e terça parte) na fita de Möebius. Fonte: http://www.unifal-mg.edu.br/extensao/?q=logo_extensao (2014)

Durante a realização dos cortes (até seis riscos), o pesquisador reforça a importância do registro das observações no caderno, visto que aqueles se constituem os dados para a resolução do problema, porém não infere sobre a o tipo de linguagem a ser utilizada para tal. Em seguida, sugere à turma a discussão sobre o obtido e durante a mediação aborda ou reforça conceitos matemáticos auxiliares (fração, razão, operações com decimais, dentre outros) que subsidiam a elaboração do modelo que resolve a situação problema. A sistematização das informações é incentivada pelo professor com a argumento de 'escrever mais resumido, em menos espaço', forma está utilizada e que direciona para o extrapolar a linguagem natural para a forma tabular. Esta parte é a mais desafiadora e necessita que o professor medeie a ação por questionamentos e não pelo apontamento de soluções, de modo que sejam as crianças que sugeriram os procedimentos e exercitem o pensamento criativo, crítico e argumentativo. São as indagações que farão com que as crianças cheguem ao modelo e resolvem a situação problema.

3) *significação e expressão* - envolve a significação na interpretação da solução e validação do modelo e a expressão do processo e do resultado.

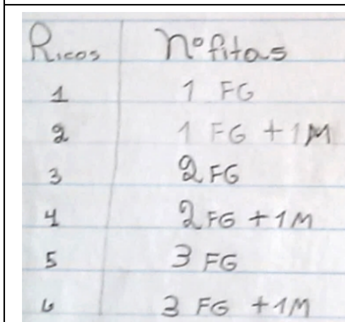
A partir do modelo, as crianças interpretaram a solução verificando se o mesmo atende ao proposto. Compararam por visualização os dados da tabela e os obtidos a partir de demais cortes. Também compararam os valores obtidos pela generalização com aqueles discriminados na tabela. Posteriormente, devem organizar as informações no caderno, apresentando os resultados a outras turmas da escola ou em feiras e amostras de conhecimento, de modo que o novo conhecimento seja explicitado.

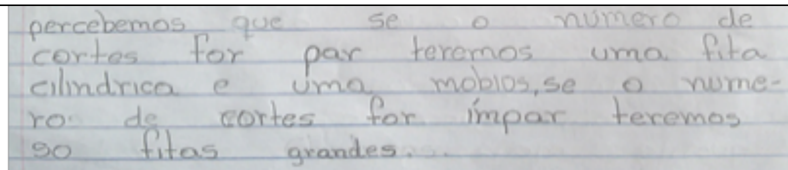
Alguns resultados da atividade

A atividade de Modelagem evidencia que práticas desenvolvidas em qualquer etapa de escolaridade obtêm resultados que evidenciam desenvolvimento cognitivo. Na Figura 2, apresenta-se uma síntese do expresso pelas crianças na atividade explicitada anteriormente.

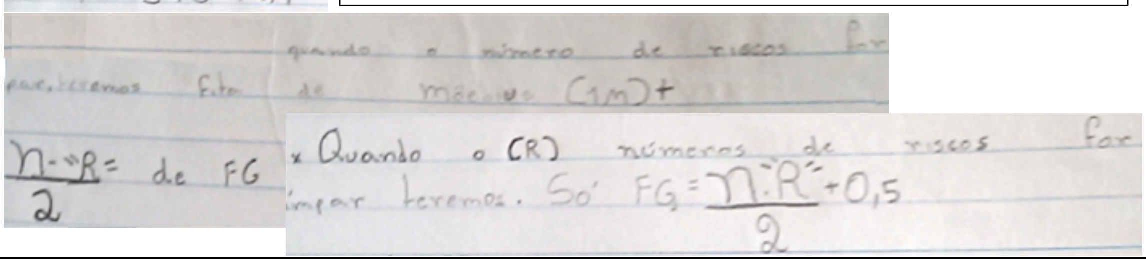
Estratégia escolhida - Confeccionar várias fitas de *Möebius* de mesma largura, fracionando cada uma delas em várias partes (ao meio, terça parte, quarta parte, ...). Anotar considerações decorrentes da observação na própria fita, após, todos juntos com o professor anotando na lousa, organizar em tabelas as informações obtidas, observando até o sexto corte, o número de fitas e largura da fita até o fracionamento total de cada uma delas.

Representação das percepções obtidas pelos Estudantes 5 e 9 e modelo matemático, elaborados a partir da obtenção de dados oriundos dos cortes e expressos nas linguagens natural, tabular e simbólica.





O número de fitas é sempre a metade, por exemplo, o 6. A metade de 6 é 3. Então, 3 fitas grandes enroladas. Como é par tem mais uma de Möebius. O 5, a metade de 5 é 2,5. Não dá para ter meia fita, então nós aumentamos 0,5 e ficam 3 fitas (E5).



Em relação a largura da fita afirmaram ser $\frac{1}{s}$ da largura original quando se fazer 'R' riscos nela. A linguagem escolhida - o 's' que vem depois do 'R' no alfabeto para representar a ideia de sucessor.

Figura 2. Estratégia escolhida pelos estudantes diante da situação-problema e representações para os modelos obtidos na atividade de Modelagem Matemática. Fonte: Os autores (2017).

Nos apontamentos orais e escritos conclusivos observou-se que as crianças utilizam conceitos matemáticos e apresentam raciocínio matemático bastante desenvolvido para o nível em que se encontram. Visto que os primeiros estão fortemente identificados com quatros tipos de sistemas simbólicos chave (linguagem natural, numérica, geométrica e notação algébrico-simbólica), cada um com função importante a desempenhar e com regras de expressão e lógica interna (Schliemann et al, 2003). Movimentar-se de um para outro foi essencial e necessário para os estudantes determinarem o modelo. Fato considerado difícil por Schliemann, mas possível por esses estudantes dos Anos Iniciais. Confirmando os apontamentos English (2010) e English e Waltters (2004a, 2004b), os estudantes extrapolaram o simples levantamento de dados. No processo de resolução das situações-problema apresentaram estratégias criativas/reflexivas para resolver as mesmas e diferentes linguagens para um mesmo objeto matemático (modelo) e a utilização de diferentes registros ora ocorreu pela mediação incentivadora do professor, ora por iniciativa dos próprios estudantes. O papel do professor nas atividades foi determinante para o desenvolvimento do pensamento algébrico, principalmente para que os mesmos utilizassem dentre os diferentes registros.

Na segunda generalização, referente a largura da fita, as crianças buscaram expressar o que era mais significativo para elas, aquela simbolição que fazia mais sentido naquele contexto. O pesquisador conduziu a discussão para os estudantes concluíssem que a largura da fita seria o sucessor de *'r'(r+1)*. No entanto, a linguagem escolhida foi equivalente, uma vez que o 's' que vem depois do 'r' na sucessão alfabética. Para Kaput (2008), as crianças devem ser encorajadas a utilizar seus próprios recursos e também a utilizarem a notação convencional, pois todos os dois processos enriquecem e aprofundam os raciocínios algébricos. A ideia de sucessor foi justificada pelos estudantes na sequência das letras do alfabeto, portanto, a linguagem matemática pode se constituir com auxílio de outros tipos de linguagem. Percebeu-se então que as crianças conseguem emitir considerações que levam a emissão de uma generalização, porém ainda não dominam uma linguagem pertinente uma vez que não é de seu conhecimento, mas já possuem uma que é equivalente. Ilustram desta forma que estão envolvidas em um movimento na zona de desenvolvimento proximal próximas de um nível de desenvolvimento potencial (Vygosty, 1984). No entanto, se pode afirmar que elas pensaram algebricamente. Pensamento este que se manifestou quando elas, vivenciando uma situação, desenvolveram o processo matemático de generalização a partir da observação das fitas e dos dados organizados nos quadros, utilizando variados recursos de linguagem cada vez mais sofisticados, conforme descritos por Kaput (2008) e Carraher; Schliemann e Brizuela (2008): a linguagem visual, a numérica, a natural e a simbólica.

Considerações Finais

O estudo procurou evidenciar o potencial de uma atividade de MM para o desenvolvimento do pensamento algébrico quando propiciou a utilização de linguagem (pré) simbólica. Similar aos estudos de Schliemann e Carraher (2002) e Blanton e Kaput (2005) dentre outros, percebeu-se na atividade, que crianças dos Anos Iniciais conseguem raciocinar sobre funções sendo capazes de descrever modelos matemáticos em linguagem natural, tabular e simbólica. A presença das fitas fracionadas, os quadros e tabelas elaboradas, a linguagem natural e a simbólica se tornaram, nesta prática, importantes estruturas no raciocínio matemático das crianças, pois em torno delas que os estudantes desenvolveram o pensar algebricamente. Para Canavarro (2007, p. 106), "a possibilidade de utilização de diversas formas de representação amplia as hipóteses dos alunos mais jovens conseguirem organizar o seu pensamento, para além de facilitar a sua comunicação, nomeadamente ao considerarem-se as representações não convencionais."

Percebeu-se que as crianças em atividades de EA não conseguem obter a generalização (uma fórmula) de modo tão natural e rápido, uma vez que utilizam suas próprias maneiras de expressão não convencionais. Isso porque elas não estão familiarizadas com 'letras' para 'escrever resumidinho' e, até mesmo, expressar uma variável. O processo de generalização é um processo que exige do professor paciência na mediação de forma a conduzir a criança a expressar o que consegue perceber nas várias representações semióticas anteriores à representação algébrica. Trata-se de um processo gradual. A leitura/estudo das figuras e tabelas e devida reflexão sobre o que está sendo realizado auxilia o estudante a determinar o próximo número não presente na representação e assim, obter a generalização, expressando-a por meio de uma notação matemática. É um processo de reflexão sobre a ação realizada e a expressão das várias significações dadas a ela.

Referências bibliográficas

Biembengut, M. S. (2014). *Modelagem no ensino fundamental*. Blumenau: Edifurb.

Biembengut, M. S. (2011). Modelagem na Educação Matemática e Ciências nos anos inicias do Ensino Fundamental. *Educação Matemática em Revista*, 12(1), 29-41.

Biembengut, M. S. (2007). Modelling and applications in primary education. In W. BLUM et. al. (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education – discussion document.* pp. 451-456. New York: Springer.

Blanton, M. & Kaput, J.J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.

Bogdan, R. C. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação*: *uma introdução à teoria e aos métodos*. Lisboa: Porto Editora.

Brasil. (2016). *Base Nacional Comum Curricular* - proposta preliminar. 2. Versão revista. Ministério da Educação. Secretária de Educação Básica. Brasília: MEC, SEB.

Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, 16(2), 81-118.

English, L. D. (2010). Modeling with complex data in the primary school. In Lesh, R. et al. (Eds.), Modeling students' mathematical modeling Competencies. *ICTMA 13* (pp. 287-300). New York: Springer.

English, L. D. & Watters, J. J. (2004a). Mathematical Modelling with young children. In: Høines, J.; Fuglestad, A. B. (Eds.). *The 28 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Bergen (pp. 335-342).

English, L. D. & Watters, J. J. (2004b). Mathematical modeling in the early school years. *Mathematics Education Research Journal*, 16(3), pp.58-80.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In: Kaput, J.; Carraher, D.; Blanton, M. (Eds.). *Algebra in the Early Grades.* pp.5-17. New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J.J., Carraher, D. & Blanton, M. (Eds.). (2008). Algebra in the Early Grades. New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), pp.139-151.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. ALSINA et al. (Eds.). In *8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures*. pp. 271-290. Sevilha, Espanha: S.A.E.M. Thales.

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante*, 16 (1), 5-26.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Trabalho original publicado em 2000. Tradução da Associação de Professores de Matemática (APM). Lisboa: APM/IIE.

Scheller, M. et al. (2017). Modelagem nos anos iniciais da educação básica: como os estudantes modelam situações-problema? *Ciência & Educação*, 23 (1), 197-217. Doi: http://dx.doi.org/10.1590/1516-731320170010012.

Schliemann, A. D. & Carraher, D. W. (2002). The evolution of mathematical understanding: Everyday versus idealized reasoning. *Developmental Review*, 22(2), 242–266.

Schliemann, A. D. et al. (2003). Algebra in Elementary School. *27th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Honolulu, HI, July.

Schliemann A. D., Carraher D. W. & Brizuela B. M. (2007). Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic: From Children's Ideas to Classroom Practice. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Schoenfeld, A. (1995). Report of Working Group 1. In C. B. Lacampagne, W. Blair, & J. Kaput (Eds.), The algebra initiative colloquium (Vol. 2, pp. 11–18). Washington, DC: U.S. Department of Education, Office of Educational Research and Improvement.

Vygotsky, L.S. (1984). *A formaçao Social da mente*. Sao Paulo: Martins Cortez.

UNA HERRAMIENTA DIDACTICA PARA AYUDAR A CONSTRUIR DEFINICIONES DE CONCEPTOS MATEMATICOS

Mabel Susana Chrestia
Universidad Nacional de Río Negro. (Argentina)
mchrestia@unrn.edu.ar

Resumen
Este trabajo resume la experiencia de haber dictado el taller denominado "Una herramienta didáctica para ayudar a construir definiciones de conceptos matemáticos" en el contexto de la XXXI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, celebrada en la ciudad de Lima. En primer lugar, se realiza una introducción al tema, comentando antecedentes, objetivos y metodología implementada. Luego, se describe lo vivido en las dos sesiones del taller, describiendo algunas de las actividades desarrolladas. Los participantes se introdujeron en la temática de las definiciones de conceptos matemáticos, y pudieron conocer y experimentar un nuevo recurso didáctico, descubriendo sus beneficios, y discutir acerca de su uso en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Palabras clave: definición de conceptos matemáticos, construcción del conocimiento, aprendizaje significativo, herramientas didácticas

Abstract
This work summarizes the experience of having developed the workshop named "A didactic tool to help to construct mathematical concept definitions" in the 31st RELME held in Lima City. First, there is an introduction to the topic, commenting on precedents, aims and implemented methodology. Then, we described the experiences obtained in the two meetings of the workshop, including some of the activities. The participants got involved in the topic of mathematical concept definitions, which allow them to know and try out a new didactic tool, discovering its benefits and its use in the teaching-learning process.

Key words: mathematical concept definitions, knowledge building, activities in the classroom, significant learning, didactic tools

Introducción y antecedentes

En este artículo relataré lo acontecido en el taller denominado "Una herramienta didáctica para ayudar a construir definiciones de conceptos matemáticos" en el contexto de la XXXI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, celebrada en la ciudad de Lima. Asistieron a este curso quince docentes de niveles medio y superior de diferentes países, los cuales pudieron conocer un nuevo recurso didáctico, y realizaron diversas actividades relacionadas con el tema.

Los siguientes autores, muestran clasificaciones a las definiciones, veamos: García de Q. (2001) menciona los tipos de definición propuestos por Trimble en 1986, muy difundidos y utilizados. Según Trimble, existen tres tipos de definición: la formal, la semi-formal y la no formal. La primera presenta una estructura de la forma X = Y + característica, donde X es la unidad léxica, Y el hiperónimo, y la característica sirve para distinguir a X de otras unidades léxicas de la misma categoría. Un ejemplo de este tipo de definición es: "un número racional es un número real que puede escribirse como el cociente de dos números enteros, siendo el segundo distinto de cero". Aquí, X es "un número racional", Y es "un número real" y el resto de la frase es la característica distintiva de X, en este caso, la que la distingue de otros números reales, los números irracionales.

La definición semi-formal muestra una estructura X = característica. No aparece Y. Un ejemplo es: "un número racional puede escribirse como cociente de dos números enteros, siendo el segundo distinto de cero". Es posible que el hiperónimo se elimine por no ser necesario; en el ejemplo se puede interpretar que "un número racional es un número real" resulta evidente y por eso se suprime de la definición. Por último, la definición no formal incluye palabras generales, utilizando sinónimos, para acercar el significado del término a definir mediante otro vocablo conocido.

Alberdi, X. y otros (2008) incluyen en su trabajo, varios tipos de definiciones, distinguiendo, las definiciones descriptivas, en las que se realiza una descripción minuciosa del término, y las definiciones operativas, en las que se relata "el proceso o la operación que hay que realizar para obtener como resultado aquello que se pretende definir".

Objetivos del taller

El taller que da título a este trabajo formó parte de la RELME 31 y tuvo como objetivos generales los siguientes: a) Introducir a los asistentes en la temática de las definiciones en matemática, su clasificación y diferenciación con el concepto de noción; b) Conocer algunas propuestas de actividades para que los alumnos puedan armar sus propias definiciones; c) Conocer otros recursos didácticos que pueden resultar útiles para facilitar la construcción de definiciones en matemática.

Metodologia implementada

El taller se desarrolló en dos sesiones de una hora y media cada una. En la primera sesión se realizó una introducción al tema, mostrando las características de una definición matemática, distinguiéndola de una "noción". Posteriormente, se realizaron actividades introductorias, para luego presentar la propuesta de herramienta didáctica para ayudar a los alumnos a elaborar definiciones de conceptos matemáticos.

En la segunda sesión se continuó trabajando con las actividades. Luego se mostró cómo los mapas conceptuales, además de ser herramientas para apoyar un aprendizaje significativo, pueden también ayudar en la creación de definiciones de conceptos matemáticos (Moreira, M., 1988). Posteriormente se realizó una reflexión y cierre del taller.

Las actividades formaron parte de una secuencia didáctica, cuyo propósito fue la apropiación por parte de los estudiantes de una estrategia para poder construir definiciones de conceptos matemáticos (Chrestia, M., 2015). Cabe aclarar que esta propuesta es aplicable también en otras áreas del conocimiento, no necesariamente en matemáticas.

Es importante tener en cuenta que en un taller, se prioriza la "práctica" sobre la "teoría", aunque no se descarta ninguno de estos dos aspectos, ya que se considera que son dos instancias necesarias en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por otro lado, la idea fundamental es "aprender haciendo", es decir, los conocimientos adquiridos por cada asistente se deben a la propia producción personal y a la experiencia adquirida, ya sea en forma individual o grupal. (Kac, M., 2011)

Desarrollo del taller

El taller tuvo diferentes momentos, comenzando con una introducción al significado de *definición*, distinguiendo este término del de *noción*. En las Figuras 1 y 2 se pueden apreciar las diapositivas del taller, en la que se sintetizan los significados y diferencias entre ambos vocablos.

Noción

- Conocimiento o idea que se tiene de algo.
- Conocimiento elemental.

Ejemplos:
"tengo nociones de historia"
"tengo una noción de italiano"

Definición

- Acción y efecto de definir.

- Proposición que expone con claridad y exactitud los caracteres genéricos y diferenciales de algo material o inmaterial.

Figura 1. Significado de los términos NOCION y DEFINICION (diapositiva del taller).

NOCION	DEFINICION
Vaguedad, ambigüedad.	Exactitud, precisión.
Idea general, elemental, básica, incompleta.	Idea acabada, completa, en profundidad.
Lenguaje riguroso o no riguroso.	Lenguaje riguroso o no riguroso.
Características: una o varias.	Características: las necesarias y suficientes.
Subjetividad.	Objetividad.
No permite individualizar un concepto.	Permite individualizar un concepto.
Se puede enunciar utilizando lenguaje oral, escrito, gráfico.	Se puede enunciar utilizando lenguaje oral, escrito, gráfico.

Figura 2. Diferencias y similitudes entre los términos NOCION y DEFINICION (diapositiva del taller).

La primera actividad consistió en el análisis de las respuestas de alumnos durante la toma de un examen en el que se les solicitaba responder la pregunta ¿qué es un polinomio? Luego de leídas y debatidas cada una de las contestaciones, los asistentes al taller concluyeron que las oraciones fueron intentos de definir el concepto mencionado, sin ninguno lograrlo. Es decir, todos los alumnos tenían *nociones* de qué es un polinomio, pero ninguno logró redactar una *definición* del mismo.

La siguiente actividad tuvo como objetivo la comprensión de los términos *hipónimo* e *hiperónimo*. La Figura 3 muestra una de las diapositivas del taller en la que se introducen dichos vocablos.

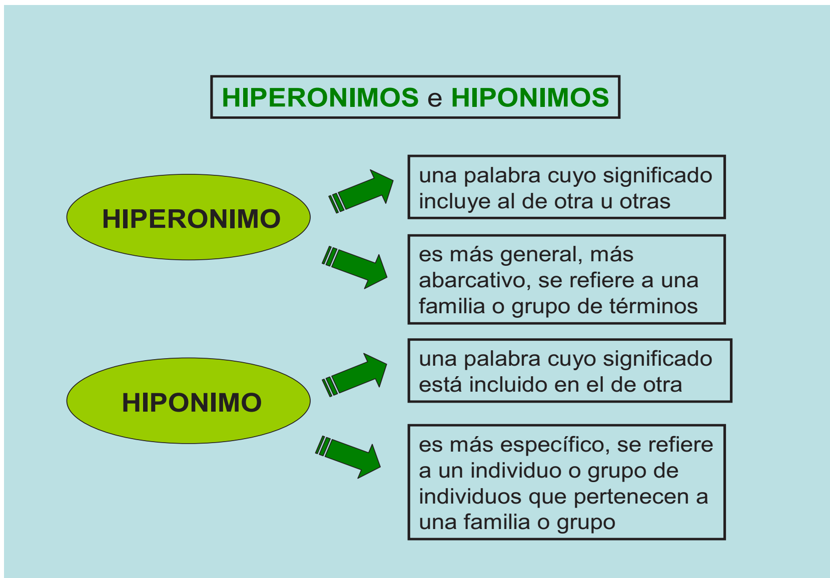


Figura 3. Presentación de los términos hiperónimo e hipónimo (diapositiva del taller).

Estos dos términos se presentan debido a ser necesarios para aplicar la herramienta didáctica propuesta en este taller. Se realizaron algunas breves actividades para lograr la comprensión de los mismos. Por ejemplo, dada una lista de hipónimos, hallaron el hiperónimo correspondiente; o bien, dado un hiperónimo, hallaron algunos hipónimos referidos a él. Se comenzó primero con ejemplos generales, y luego con aplicaciones a las matemáticas.

Se presentó luego la propuesta para definir conceptos matemáticos. La misma consta de diez pasos, que se sintetizan en la Figura 4.

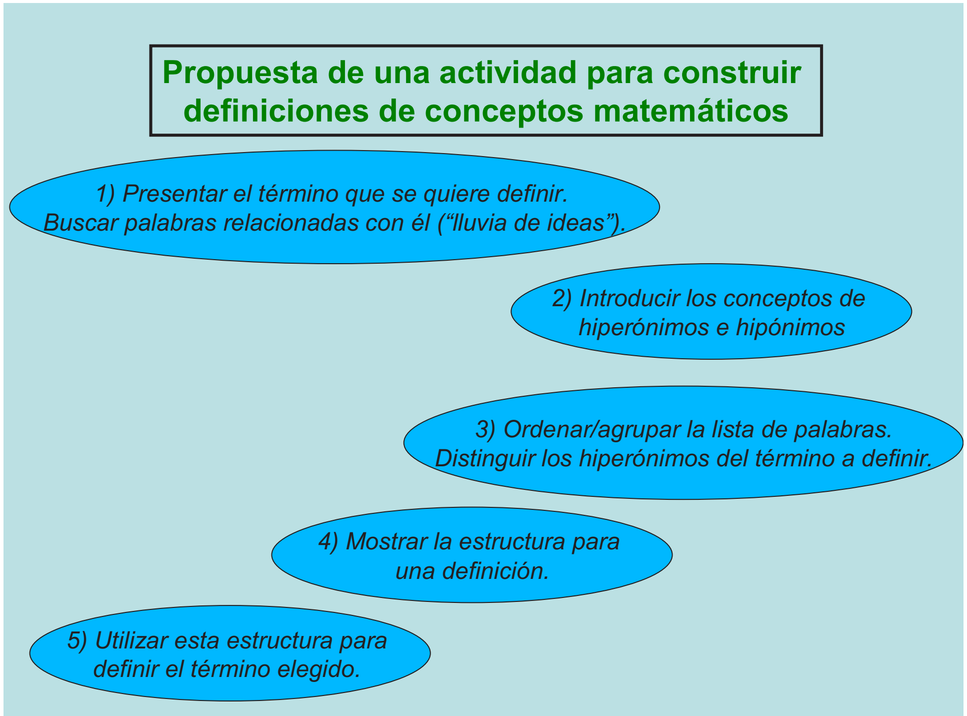


Figura 4. Pasos de la propuesta para construir definiciones de conceptos matemáticos (diapositiva del taller).

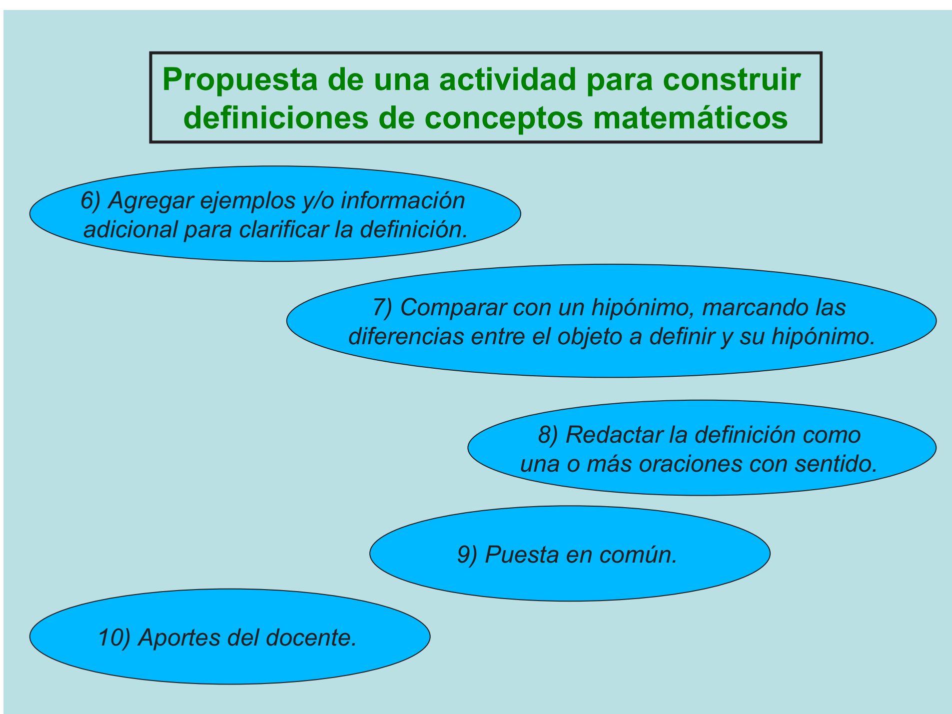


Figura 4 (continuación). Pasos de la propuesta para construir definiciones de conceptos matemáticos (diapositiva del taller).

En el cuarto paso se propone una estructura para armar definiciones la cual se detalla en la Figura 5. Luego de explicar cada parte de dicha estructura, se la aplicó al concepto que se estaba tratando de definir entre todos ("triángulo"). Se muestra entonces una posible definición en la Figura 6.

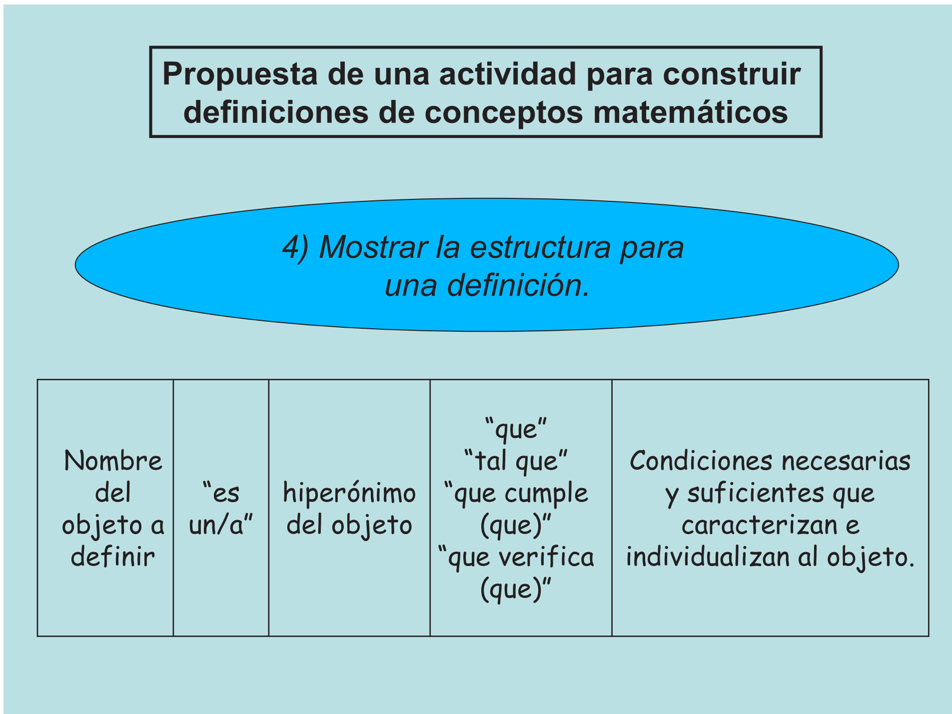


Figura 5. Estructura para armar una definición de un concepto matemático (diapositiva del taller).

Un triángulo	es una	figura geométrica	tal que	tiene tres vértices, tres lados y tres ángulos

Figura 6. Una posible definición del concepto triángulo utilizando la estructura propuesta.

Los pasos siguientes (del seis en adelante) contribuyen a "completar" la definición, con aportes del grupo y del docente. Una definición del término en cuestión lograda fue la siguiente: "*Un triángulo es una figura geométrica tal que tiene tres vértices, tres lados y tres ángulos. Los triángulos se clasifican según sus lados en equiláteros, isósceles y escalenos, y según sus ángulos en rectángulos, obtusángulos y acutángulos. Una propiedad de los triángulos es que la suma de los tres ángulos interiores es siempre igual a 180 grados.*"

Conclusiones y reflexiones finales

Considero que este taller permitió a los asistentes introducirse en la temática de las definiciones de conceptos matemáticos, conociendo sus principales características, y proporcionando una manera para que los docentes puedan ayudar a los alumnos a lograr definiciones válidas y completas.

Luego de realizada la presentación y puesta a prueba de la propuesta con un concepto a definir, a modo de ejemplo, se realizó un debate acerca de la utilidad de la herramienta, ventajas y desventajas. Los docentes que estuvieron presentes en el curso se mostraron satisfechos y motivados para seguir indagando acerca de la temática. Una de las propuestas fue cómo insertarla en las diferentes corrientes didácticas, como por ejemplo la de la teoría de las situaciones didácticas.

Referencias bibliográficas

Alberdi, X. y otros (2008). La definición: del paradigma de la tradición lexicográfica (y termino-gráfica) al discurso expositivo en textos técnicos; estrategias discursivas. *Actas del XXXVII Simposio Internacional de la Sociedad Española de Lingüística*. (pp. 9-24). Pamplona, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Navarra.

Chrestia, M. (2015). De la noción a la definición en matemática: una propuesta para construir definiciones. *Novedades Educativas*, *Agosto (296)*, 70-76.

García de Q., M. (2001). Estructura definicional termino-gráfica en el subdominio de la oncología médica. *Estudios de Lingüística del español, 14(1)*,1-20.

Kac, M. (2011). *El taller como estrategia metodológica del trabajo grupal*. Recuperado el 1 de abril de 2015 de https://es.scribd.com/doc/79871324/El-taller-como-estrategia-metodologica

Moreira, M. (1997). *Mapas conceptuales y aprendizaje significativo*. Recuperado el 20 de marzo de 2015 de https://www.if.ufrgs.br/~moreira/mapasesp.pdf

ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN AFÍN: UN ANÁLISIS ONTOSEMIÓTICO

Anderson Danny Chavez Marcelo
Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle La Cantuta. (Perú)
AndersonDny@gmail.com

Resumen
En este artículo se comunica los resultados de una investigación, cuyo objetivo es encontrar las causas de algunos de los errores que se manifiestan en el aprendizaje de la función afín en estudiantes del segundo año de educación básica. Como marco teórico-metodológico de corte cualitativo se utiliza al Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) cuyos dos primeros niveles de análisis didáctico responde a preguntas como, ¿qué pasó aquí? y ¿por qué ha ocurrido eso?, para así identificar a los errores y explicar la causa que los origina.

Palabras clave: errores, enfoque ontosemiótico, función afín

Abstract
This paper reports the results of an investigation which is aimed at finding the causes of some errors that second-year basic education students made in the learning of the linear function. As the qualitative theoretical-methodological framework, we use the Onto-semiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction (OSA), in which case the first two levels of didactic analysis answer questions such as, what has happened here? and why has it happened? in order to identify the errors and explain the cause that originates them.

Keywords: errors, onto-semiotic approach, linear function.

Introducción

Una organización de cómo ha cambiado el análisis de errores en la investigación en educación, lo propone Socas (2011), este autor manifiesta que podemos distinguirlas en tres etapas: la primera, enfocada a encontrar errores de tipo matemático; la segunda, la considera como algo normal en los procesos de enseñanza y aprendizaje, además, se considera a otras variables como causales de este (el profesorado, currículo, el contexto, etc.); y la tercera etapa, considera que existe la necesidad de tener marcos teóricos para su identificación, explicación/comprensión y su tratamiento (Radatz, 1979 cp. Socas, 2011).

La motivación nace en la experiencia como profesor en aula del segundo año de secundaria del Colegio Experimental de Aplicación de la Universidad Nacional de Educación (CEAUNE), durante el mes de abril de los años 2015 y 2016, en Perú. Pues, se observaron errores en las acciones de los estudiantes en el aprendizaje de la función afín, ya sea tanto en interacción –en el aula– como en los cuestionarios (exámenes). Si considerásemos solo la dicotomía de correcto o incorrecto, para el análisis de errores, este no ayudará a comprender el fenómeno sino solo a su descripción y, en consecuencia, no se podrían diseñar e implementar procesos de instrucción eficaces, ya sea, la Ingeniería Didáctica cuya teoría base sea la Teoría de las Situaciones Didácticas, o el EOS u otros. Consideramos a ésta como la principal pertinencia de esta investigación. Como pregunta y objetivo de investigación tenemos, según los constructos del EOS: ¿Cuáles son las causas de algunos de los errores en el significado declarado de la función afín de los estudiantes del segundo año de educación secundaria del CEAUNE? Y para responder a la pregunta se proponen los siguientes objetivos: a) reconstruir el significado de referencia de la función afín del texto, Matemática de la Enseñanza (MEM) y los textos del segundo de secundaria del Ministerio de Educación del Perú (MED); b) reconstruir el significado implementado y construir el significado evaluado de la función afín del CEAUNE; c) identificar algunos de los errores en el significado declarado de la función afín en los estudiantes del segundo año de educación secundaria del CEAUNE; y d) determinar los conflictos semióticos de tipo cognitivo y epistémico de los errores en los significados declarados de la función afín de los estudiantes del segundo año de educación secundaria del CEAUNE.

Marco teórico-metodológico

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción matemáticos (EOS) cuyo uso como marco teórico-metodológico brinda en sus dos primeros niveles de análisis didáctico, el sistema de prácticas y la configuración de objetos y procesos. Estos niveles de análisis responden las preguntas, ¿qué pasó aquí? y ¿por qué pasó eso? Con estas herramientas es posible identificar el error y, además explicar/comprender la causa de estos. Estos a través de constructos teóricos que se han venido construyendo como: problema; práctica, objeto, proceso y significado personal e institucional; conflicto semiótico; funciones semióticas y etc. (Godino, Batanero y Font, 2009).

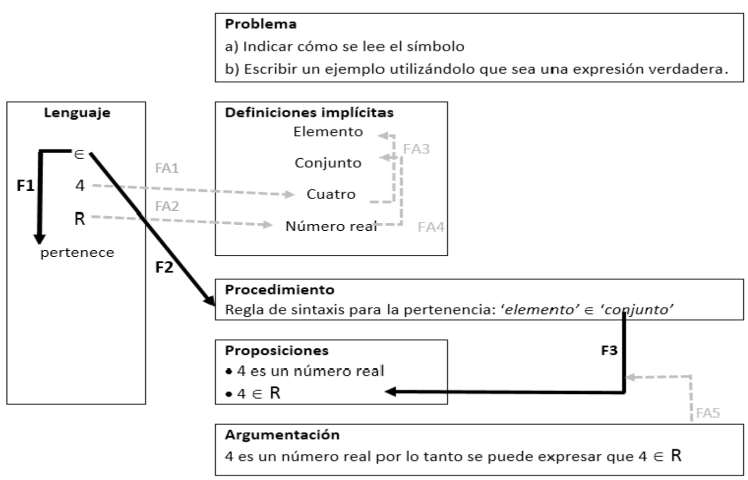


Figura 1. Configuración epistémica y funciones semióticas. Fuente: Distéfano M. y Pochulu M. (2017, p.5)

En la figura 1, se muestra un esquema, que es más operativa que las configuraciones ontosemióticas y funciones semióticas, ya que las asocia; sin embargo, debido a que las reglas o criterios de correspondencia de las funciones semióticas no están explícitas, se realizará algunos ajustes: FR_m, Función Semiótica con criterio representacional de orden "m"; FI_n, Función Semiótica con criterio instrumental de orden "n"; y FC_p, Función Semiótica con criterio componencial de orden "p".

El marco metodológico propuesto por el EOS clasifica a las cuestiones de investigación didáctica según cuatro ejes: el foco, el fin, la generalizabilidad y el nivel de la investigación (Godino, 2002 c.p. Quiroz 2015). Estos ejes son adaptados a la investigación como sigue:

- el foco tiene carácter "epistémico", debido a la necesidad de construir el significado de referencia de la función afín del texto, Matemática de la Enseñanza Media "MEM" de Lages et al (2000) y de los textos del Ministerio de Educación "MED" (2016), reconstruir el significado implementado de la función afín del CEAUNE y construir el significado evaluado de la función afín soportado en un instrumento (cuestionario),

- éste significado se construyó por la comparación (congruencia) entre las configuraciones ontosemióticas parcial-empírica del significado implementado y el evaluado para así mostrar su validez y confiabilidad por ser de representatividad; así mismo, posee el carácter "cognitivo", debido a que es necesario identificar los significados declarados de 8 de los estudiantes del segundo año de educación secundaria del CEAUNE y esto se logrará gracias al cuestionario construido;

- el fin de esta investigación es describir los distintos significados institucionales (de referencia, implementado y evaluado) y personales (declarados) de la función afín para su comparación y encontrar algunos de los errores en el aprendizaje del objeto en mención. Además, explicar a través de las funciones semióticas la causa de éstos errores ya sean debido a conflictos semióticos de tipo cognitivo o epistémico;

- la generalizabilidad de este estudio es exploratorio, debido a que se está trabajando con un grupo de 8 estudiantes del 2do año de educación secundaria del Colegio Experimental de Aplicación de la Universidad Nacional de Educación;

- por último, el nivel de análisis es puntual porque está relacionado con los errores en el aprendizaje de la función afín, frente a un cuestionario (no en interacción áulica).

Análisis

Potenciales Conflictos Semióticos de tipo Epistémico.
Para encontrar los potenciales conflictos semióticos de tipo epistémico realizamos la comparación entre significados de referencias de la función afín, del texto Matemática de la Enseñanza Media y los textos del MED (instituciones), y la comparación entre sus configuraciones epistémicas globales. Aquí mostramos una práctica y el objeto primario "proposiciones" y la comparación a través de su significado unitario (débil) o conceptual.

Para ambas instituciones, en la práctica: se representa gráficamente una función afín.

El MED moviliza el objeto primario, proposiciones: P7; se denomina función afín a una función que tiene como gráfica una línea recta que no pasa por el origen del plano cartesiano. P3; la representación gráfica de una función f en el plano cartesiano es el conjunto de puntos de coordenadas (x, f(x)), donde x pertenece al dominio de f.

Se muestra una disparidad con los significados unitarios de las proposiciones P7 y P3, ya que al considerar a una función afín con dominio entero en P3, esta no acepta a la P7 debido a que se refiere a un conjunto de puntos colineales y no a una línea recta, es decir, esta institución (MED) posee una cierta inconsistencia.

En el texto MEM, se moviliza la siguiente proposición: P2; el gráfico G de una función afín es una línea recta. Este objeto y su significado unitario muestra cierta disparidad con la P3 del MED, la explicación es similar a la anterior, por lo tanto, existe un posible conflicto semiótico de tipo epistémico.

Significado Evaluado de la función afín del CEAUNE

En este apartado se presentan: sub problemas, prácticas, esquemas que asocian la configuración epistémica y la trama de funciones semióticas del significado evaluado: problema; Yaneth es una estudiante universitaria a la que le gusta escuchar música de buena calidad y por eso, ha pagado S/120 para ser subscriptora (socia) en una página web y si desea descargar una música solo le costará S/2. La práctica, representa gráficamente (tabla y plano) la función afín:

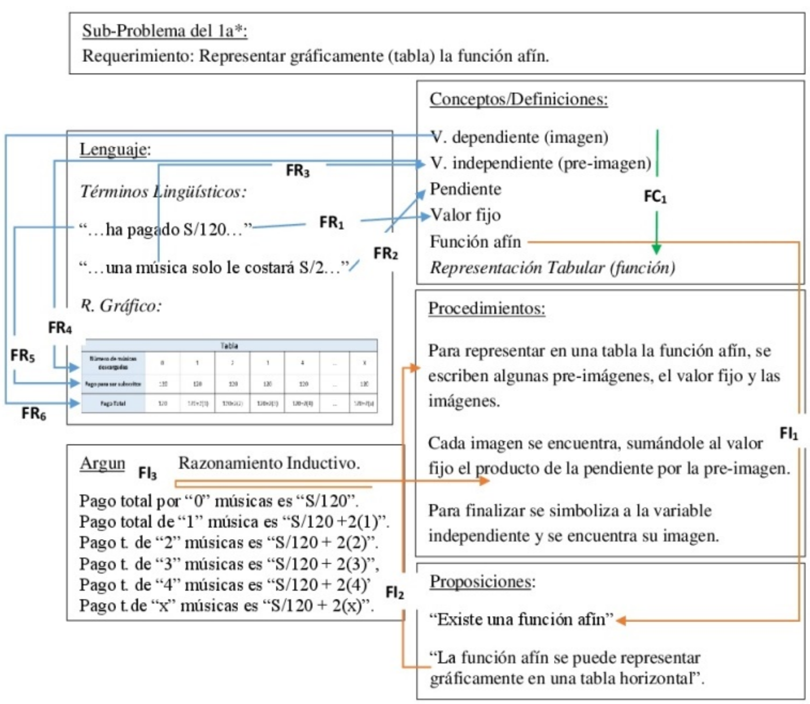


Figura 2. Configuración epistémica puntual y funciones semióticas del problema 1a*. Creación personal

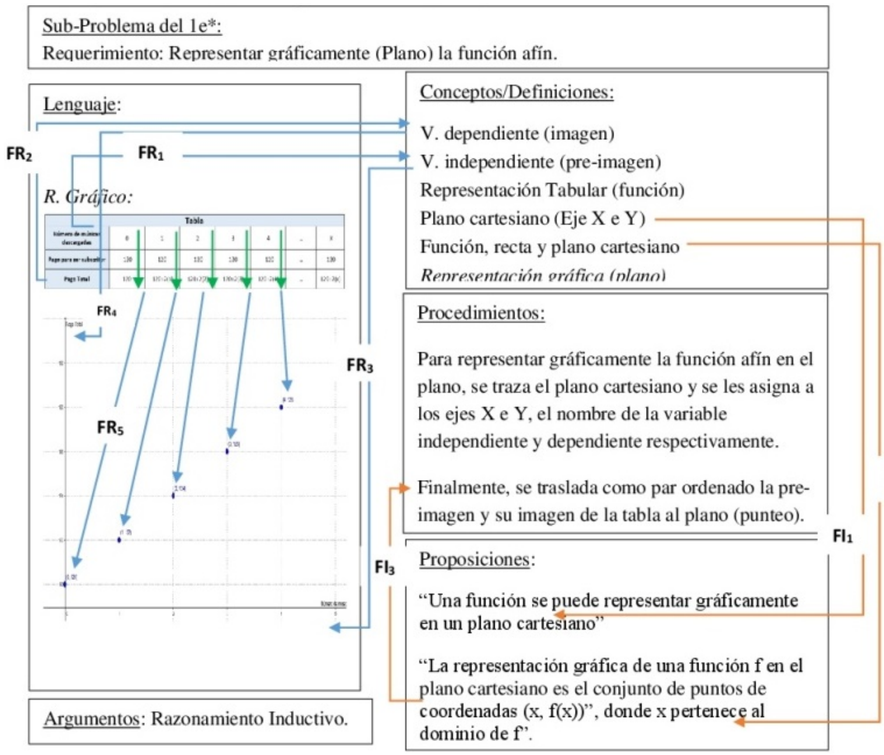


Figura 3. Configuración puntual epistémica y funciones semióticas del problema 1e*. Creación personal

En las figuras 2 y 3, se observa el esquema que mencionábamos. También resaltamos que consideramos como causa de los errores a los conflictos de tipo cognitivo y epistémico, debido a que nos interesa el significado declarado y el evaluado –y no en interacción–, y para explicar estas causas se realizan a través del constructo teórico, funciones semióticas.

Significado declarado de la función afín estudiantes

El error para el EOS es la práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución a la cual pertenece. En ese sentido, al analizar el cuestionario presentado a los estudiantes, se encontraron algunos errores en las prácticas: representa gráficamente (tabla y plano), verbalmente, simbólicamente y se calcula el costo de 13 músicas.

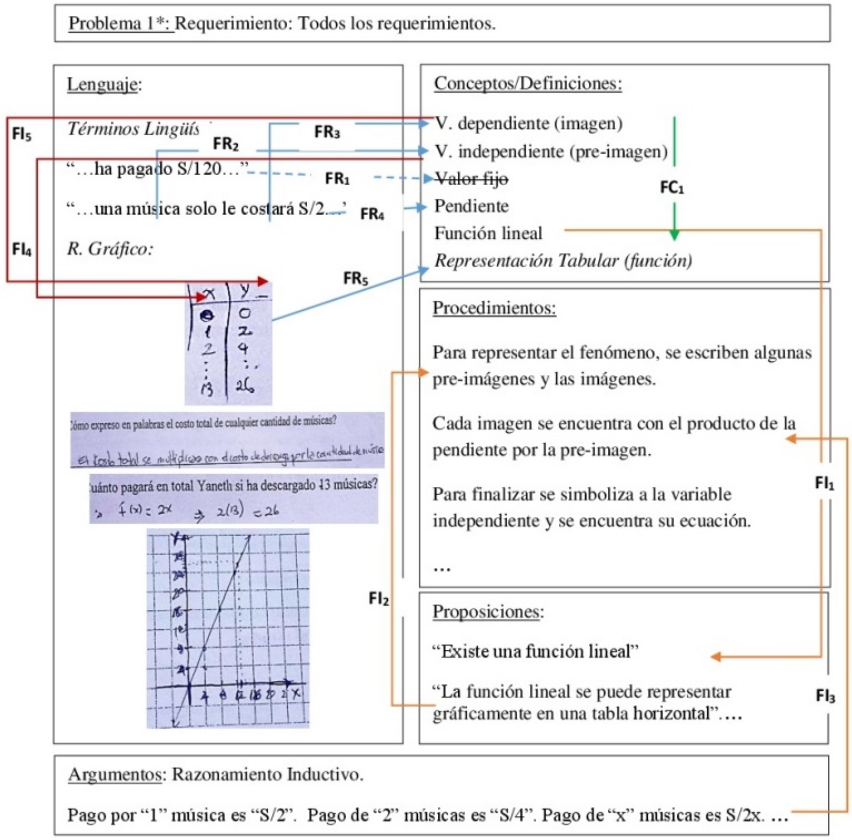


Figura 4. Configuración puntual cognitiva y funciones semióticas del problema 1. Creación personal

La causa del error se apoya en la figura 4: todos los errores en las distintas prácticas se encuentra en un conflicto semiótico de tipo cognitivo y esto se explica al no relacionar con una función semiótica del tipo representacional "FR1", la expresión "ha pagado S/120" con el significado "valor fijo" (concepto), en esta instancia no podemos decir que existe alguna disparidad entre significados atribuidos a esta expresión, pero sí podemos decir que existe un error por ausencia de relación y no por mala relación. Sin embargo, esto si desencadenará a la FI5 cuya expresión "variable dependiente" le corresponde como significado lingüístico "costo por cualquier cantidad de músicas", pero dicha institución (MED) acepta como significado de esta expresión como el "costo total por cualquier cantidad de músicas".

Además, añadimos que, la expresión "se ha pagado S/120" ha generado complicaciones (como se observó con otros estudiantes) en su interpretación debido al tiempo en el que pertenece, es decir, que como S/120 es un pago que ya se realizó, éste no se considera en el fenómeno. Además, por último, en el error "se representa gráficamente la función", la causa del error se encuentra en un conflicto semiótico de tipo epistémico y se resalta que un principio fue declarado como un conflicto semiótico potencial de tipo epistémico entre los significados unitarios de las proposiciones de las instituciones: MED-MED y EMM-MED, y este puede explicarse al comparar el significado de la función semiótica "FI_2" del significado evaluado del CEAUNE, "La representación gráfica de una función f en el plano cartesiano es el conjunto de puntos de coordenadas (x, f(x)), donde x pertenece al dominio de f", con el significado unitario de la proposición, "Se denomina función afín a una función que tiene como gráfica una línea recta que no pasa por el origen del plano cartesiano", estos tienen como expresión al concepto función, recta y plano y existe una disparidad entre significados atribuidos a ésta expresión.

Consideraciones finales

Algunas causas de los errores son debido a conflictos semióticos de tipo epistémico y cognitivo. Algunas de éstas con relación al significado declarado las presentamos a continuación: Existe un conflicto de tipo cognitivo y la explicación es debido a una ausencia de una función semiótica de tipo representacional, que involucra al "se ha pagado S/120", con el objeto "valor fijo": existe un conflicto de tipo epistémico (que fue declarado como potencial en un análisis a priori), cuya explicación está en la comparación entre significado unitarios (conceptuales) de las proposiciones: "La representación gráfica de una función f en el plano cartesiano es el conjunto de puntos de coordenadas (x, f(x)), donde x pertenece al dominio de f" y la proposición "el gráfico G de una función afín es una línea recta".

Además, debido a la evidencia que se mostró de los potenciales conflictos semióticos de tipo epistémico entre las instituciones de referencia, llegamos a proponer que, estos conflictos pueden ser identificados en un "análisis a priori de los significados de referencias" o mejor llamados "análisis a priori de los errores a través de un conflicto semiótico de tipo epistémico entre instituciones diferentes" como se muestra en la figura 5.

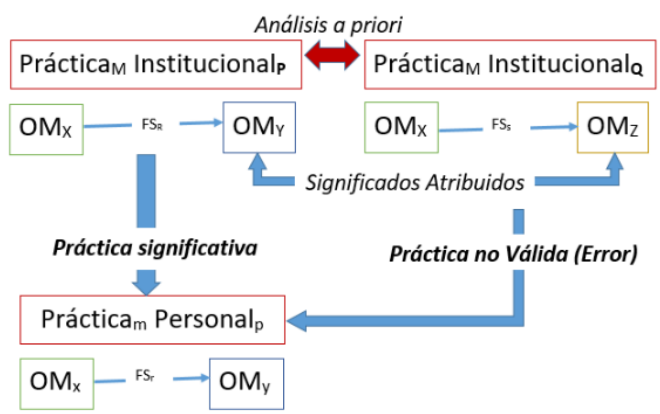


Figura 5. Análisis a priori de los errores en un conflicto semiótico de tipo epistémico entre instituciones diferentes. Creación personal.

Según la figura 5, los símbolos que se ven hacen alusión a: Práctica$_M$ Institucional$_P$, es una práctica cualquiera "M" de una institución cualquiera "P". OM$_X$, objeto matemático cualquiera "X" de la Institución P o Q. OM$_Y$, objeto matemático cualquiera "Y" de la Institución P y FS$_R$, una función semiótica cualquiera "R" de la Institución P. Práctica$_M$ Institucional$_Q$, es una práctica cualquiera "M" de una institución cualquiera "Q". OM$_Z$, objeto matemático cualquiera "Z" de la Institución Q y FS$_S$, una función semiótica cualquiera "S" de la Institución P. Práctica$_m$ personal$_p$, es una práctica cualquiera "m" de una persona cualquiera "p", perteneciente a la institución P. OM$_x$, objeto matemático cualquiera "x" de la persona p. OM$_y$, objeto matemático cualquiera "y" de la personal p y FS$_r$, función semiótica cualquiera "r" de la persona p.
Además, se encontró cierta inconsistencia entre una misma institución "MED" (textos del segundo año de secundaria del Ministerio de Educación con relación al capítulo de función afín). Éste análisis a priori tiene la misma estructura que se presenta en la figura 5. Resaltamos que, para ambos análisis solo fue

necesario la comparación entre la configuración ontosemióticas y el significado unitario correspondiente a cada expresión, sin embargo, no se realizó un análisis a través de las funciones semióticas y sugerimos que en futuras investigaciones se realice esto, ya que éstos conflictos de este tipo son necesarios para determinar los cognitivos.

Con relación a los conflictos semióticos de tipo cognitivo se observa en la figura 6, que una vez identificada el error y la causa de éste (conflicto tipo cognitivo), la explicación de la causa puede ser a través de las funciones semióticas, ya sea por "mala relación", que es como normalmente se la presenta a los conflictos semióticos y por "ausencia de relación" que es la comparación de las funciones semióticas de la institución "MED" y la del estudiante –que pertenece a ésta-, esto es posible debido a que se quiere indagar acerca de los errores en el aprendizaje del estudiante y éste ha tenido que haber realizado un acoplamiento progresivo de los significados del objeto en cuestión.

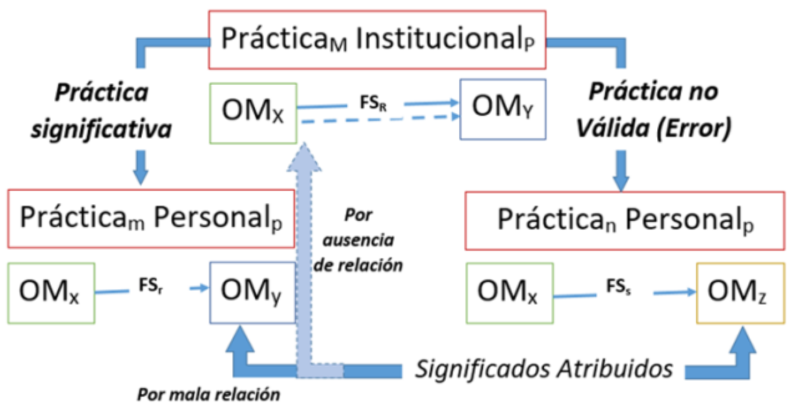


Figura 6. Análisis de errores en un conflicto semiótico de tipo cognitivo. Creación personal.

Según la figura 6, los símbolos que se ven, hacen alusión a: Práctica$_M$ Institucional$_P$, es una práctica cualquiera "M" de una institución cualquiera "P"; OM$_X$, objeto matemático cualquiera "X" de la Institución P; OM$_Y$, objeto matemático cualquiera "Y" de la Institución P; FS$_R$, una función semiótica cualquiera "R" de la Institución P; Práctica$_m$ personal$_p$, es una práctica cualquiera "m" de una persona cualquiera "p", perteneciente a la institución P; Práctica$_n$ personal$_p$, es una práctica cualquiera "n" de una persona cualquiera "p", perteneciente a la institución P; OM$_x$, objeto matemático cualquiera "x" de la persona "p"; OM$_y$, objeto matemático cualquiera "y" de la personal "p"; OM$_z$, objeto matemático cualquiera "z" de la personal "p"; FS$_r$, función semiótica cualquiera "r" de la persona "p"; y FS$_s$, función semiótica cualquiera "s" de la persona "p". Y, por último, mencionamos que existieron errores que se sistematizaron y por ende la causa de ellos también (independientemente si fue debido a un conflicto semiótico de tipo cognitivo o epistémico) y presuponemos que es debido a la naturaleza de los significados de los objetos matemáticos por ser consideradas como "sistema de prácticas", en este caso la llamaríamos "sistema de prácticas no válidas". Añadimos también que existe un origen común a dicho sistema de práctica no válidas en los distintos errores encontrados.

Referencias bibliográficas

Distéfano, M.L. y Pochulu, M. D. (2017). *Trama de funciones semióticas en actividades de simbolización.* Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.htm

Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.* Departamento de didáctica de la matemática. Disponible en http://www.ugr.es/~jgodino/funcionessemioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Lages, E., Pinto, P., Wagner, E., & Morgado, A. (2000). La matemática de la enseñanza media. Lima: IMCA.

Ministerio de educación, Perú (2016). *Matemática 2°.* Perú: Santillana.

Quiroz, J. (2015). *Construcción de un significado de referencia de la adición de números naturales en el sistema curricular peruano de educación primaria.* PUCP, lima.

Socas, M. (2007). *Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas.* Laguna, Tenerife.

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

RESIGNIFICACIÓN DE ALGUNAS NOCIONES MATEMÁTICAS EN ESCENARIOS DE LA BIOLOGÍA

Daniela Soto Soto; Karina Vilches Ponce
Universidad de Santiago de Chile; Universidad Católica del Maule. (Chile)
daniela.soto.s@usach.cl, kvilches@ucm.cl

Resumen
En Chile la modelación se ha integrado al currículo nacional como una habilidad para el desarrollo del pensamiento matemático. Asumimos la problemática que se produce cuando el profesor se ve enfrentado a desarrollar esta habilidad, la cual ha sido vagamente abordada en su formación inicial y continua. En este sentido, y a partir de un trabajo interdisciplinario que articula la Matemática Educativa y la Biomatemática, se ha logrado configurar un conjunto de propuestas de situaciones de modelación que reflejan el diálogo entre la funcionalidad de la matemática y una realidad particular: escenarios biológicos, lo cual, presumimos, da contexto y permite la resignificación de diferentes nociones de la matemática escolar. En este documento presentamos una situación de modelación que permite la resignificación de lo asintótico y las consideraciones que se debieron atender, entre ambos campos disciplinares, al momento de ser diseñadas.

Palabras claves: modelación, socioepistemología, siomatemática, situaciones de modelación

Abstract
In Chile, modeling has been integrated into the national curriculum as a skill to develop from an early age in students. We assume that the problem occurs when the teacher is faced with new structures for the teaching of mathematics, forms that have not been studied in their initial or continuous training. In the particular case of modeling, we can realize the need of reflection and action on this notion. In this sense and based on a multidisciplinary work, combining Educational Mathematics and Biomathematics, it has been possible to elaborate a set of learning situation proposals that reflect the dialogue between mathematics functionality and a specific reality: biological scenarios, which provide context and support to different notions of school mathematics. In this report, we present a modeling situation and the considerations that should be taken into account when designing it.

key words: modeling, socio-epistemology, biomathematics, modeling situations

Introducción

Hoy los actores sociales y educativos se hacen cargo de nuevas estructuras de la Matemática Escolar, por ejemplo, en los planes y programas de enseñanza media de la educación chilena se ha integrado la modelación como una habilidad para el desarrollo del pensamiento matemático. Por tanto, es importante generar reflexión continua, desde enfoques innovadores, acerca de esta práctica social, la cual ha permitido la construcción de conocimiento matemático y la aplicación de nociones matemáticas en diferentes escenarios.

Este documento refleja el esfuerzo, por parte de investigadores de campos disciplinares distintos; la Matemática Educativa y la Biomatemática, por explicitar la funcionalidad de la matemática en escenarios donde juega un rol de herramienta. Lo cual permitió el análisis, la simulación y predicción de fenómenos relacionados a la realidad observable. En particular, se estudió una noción biológica; **capacidad de soporte**, que admite la resignificación de lo asintótico. Se señala *lo asintótico* para diferenciar de la *asíntota*, concepto que ha promovido el discurso matemático escolar, aspecto que se revisará en el diseño de la situación.

Así, el propósito de este documento es presentar el rediseño de una situación de modelación a partir de la consideración de elementos de análisis en escenarios biológicos, justificar las propuestas y reflexionar acerca del diálogo que se debió llevar a cabo, entre dos campos disciplinares distintos, que se articularon con el fin de fortalecer la modelación matemática escolar.

La modelación en la educación matemática

Según Cordero (2015) existen dos grandes vertientes sobre la modelación (sin adjetivos) en la sociedad: representar la realidad y aplicar una estructura de conocimiento a una situación real, con modelos empíricos o analíticos según los intereses disciplinares (Bissell y Dillon, 2012). En particular, en la disciplina de la matemática suele definirse a la modelación como una teoría que estudia las características cualitativas de las estructuras matemáticas: se exige de un objeto predeterminado (una realidad), ya sea para ser reproducido o para ser distinguido de otros objetos. Se asume que la modelación matemática es fundamental en los métodos de investigación aplicados en otras disciplinas; en este sentido, la matemática, a través de la modelación matemática, se transforma en una herramienta para la construcción de conocimiento en diversos campos disciplinares. Desde una perspectiva más empírica, Modelar matemáticamente consiste en una acción por la cual se construyen objetos mentales que, sustentados en conceptos (componentes) y teorías matemáticas (relaciones), simulan sus correspondientes en una realidad idealizada. Estos ideales o modelos son analizados desde una perspectiva matemática con base en los intereses de los campos disciplinares que aportan el contexto. Para el marco curricular chileno, la modelación es una de las cuatro habilidades para el desarrollo del pensamiento matemático.

Por otro lado, desde la investigación al seno de la disciplina Matemática Educativa, existen diferentes visiones acerca de lo que significa modelar. Una mirada cognitiva, concibe a la modelación a partir de la estructura de las representaciones y los registros semánticos que establecen relaciones con los procesos cognitivos de los individuos (Cordero, 2015). Para profundizar más al respecto puede consultarse a Blum (2002). Una mirada didáctica, señala que es necesario implementar la modelación en el aula a través de proyectos y resolución de problemas (Aravena, Camaño y Giménez, 2008). Desde esta perspectiva se destaca la aplicación de los conocimientos matemáticos a situaciones reales que estén en estrecha relación con la temática de estudio y sean susceptibles a la formulación matemática propuesta. Solar, Azcárate, y Deulofeu (2012) reconocen los procesos de modelización como competencias matemáticas. Todos los trabajos anteriormente mencionados dan cuenta de la importancia de la modelación en el aula y muestran que, al margen de los intereses y preocupaciones en torno a la modelación, se presume que está ligada con la realidad. Este es un aspecto significativo cuando se piensa en integrar esta habilidad a la formación de un ciudadano.

La teoría socioepistemológica (TS) ha señalado que es importante considerar las diversas realidades donde se expresa, emerge y se usa el conocimiento matemático. A estos diferentes contextos se les denomina *escenarios*, algunos de ellos son: el histórico epistemológico, el cotidiano, los escenarios culturales, de la escuela y de los diferentes dominios disciplinares. Específicamente, para la TS, reconocer estos escenarios ha permitido la resignificación progresiva de algunas nociones de la matemática escolar (Cantoral, 2013), y la consideración de categorías transversales que permiten la construcción del conocimiento matemático. Para esta investigación se considera la categoría Modelación-Graficación (M-G) construida por Suárez (2014), la cual expresa un argumento que permite vislumbrar la funcionalidad del conocimiento matemático.

Desde la TS, se considera que la M-G es una práctica socialmente compartida que permite la construcción del conocimiento, por tanto, se puede encontrar en los escenarios y situaciones propias de cada comunidad. De esta forma, un aspecto innovador es primero reconocer y explorar escenarios donde la M-G es una práctica, que permite la construcción de conocimiento, con el fin de diseñar situaciones que promuevan la resignificación de diferentes nociones de la matemática escolar. En otras palabras, mientras la mayoría de las perspectivas en torno a la modelación buscan situaciones reales en donde se apliquen conocimientos matemáticos específicos (por ejemplo: función lineal, cuadrática, entre otras), e identificar los procesos que lleven al estudiante a la adquisición conceptual del objeto, la propuesta de este trabajo es examinar las prácticas de la comunidad de conocimiento específica, para luego proponer las situaciones que harán emerger conocimientos matemáticos.

La Biomatemática y la modelación matemática

Uno de los primeros indicios sobre cómo dialoga la matemática con otras disciplinas y sobre el uso de la matemática para describir relaciones abstractas entre variables cuantificables, que representan aspectos de la observación de la realidad, es decir a la práctica de modelar matemáticamente, se remontan a Galileo, Gilbert, entre otros, en el siglo XVII (Dougherty y Neto, 2006). Un siglo más tarde, la construcción de la Teoría de Ecuaciones en Derivadas Parciales emerge desde las Leyes Gravitacionales de Newton en el siglo XVIII, a partir de los trabajos de Euler, Lagrange, Laplace, Hamilton, Poincaré, entre otros, (Dyson, 1972). Específicamente, a fines del siglo XVIII Malthus, es uno de los primeros autores que modela el crecimiento poblacional, a partir de consideraciones sociales, este autor publica su ensayo formulando a través de evidencia empírica un modelo de crecimiento exponencial en 1798. Este modelo se utilizó para evidenciar la necesidad de generar políticas de control de natalidad en Londres (Mathus, 1888). A partir del ensayo de Malthus, Verhults observa que el crecimiento de la población humana, no sólo está determinado por el número de nacimientos y muertes, sino que también existen variables externas que intervienen en el cambio de una población, por lo que el crecimiento exponencial puede ser realista en un corto plazo, pero en el largo plazo es necesario considerar nuevas variables involucradas en el proceso. Es así como, Verhulst escribe sobre los modelos de crecimiento de las poblaciones desde una perspectiva matemática, por lo que los primeros indicios formales sobre la irrupción matemática en la ecología de poblaciones se remontan a inicios del siglo XIX (Verhulst, 1845). Un hecho destacable del trabajo de Verhulst, es la introducción de la capacidad de soporte de un sistema (en inglés *Carrying Capacity*), la cual llama en su trabajo el *límite extremo de una población*, y la calcula para Bélgica en 6 millones y para Francia en 40 millones, basado en su modelo que él mismo nombra de *Logístico* y en los datos estadísticos poblacionales existentes y de fuente que el autor considera oficial. Apunta a que existen limitados recursos ambientales, principalmente tierras de cultivo, y que éstos limitan el crecimiento de una población.

Desde el siglo XIX, la Biomatemática aparece constituyendo un espacio común entre dos campos disciplinares, la Biología y la Matemática. En este lugar común, biólogos y matemáticos dialogan para la construcción y validación de modelos que permiten comprender fenómenos y/o procesos complejos. En este sentido, algunos autores afirman que los modelos matemáticos en las ciencias de la vida son necesarios para dar un carácter predictivo y analítico a este campo disciplinar siendo una componente importante del área de la Biología Teórica.

En este trabajo se reconoce la importancia de la matemática como herramienta que permite dar explicaciones a fenómenos en otras disciplinas, como la biología, y construir conocimiento nuevo en ambos campos disciplinares. Sin embargo, se considera que para que esto sea vinculado con la educación de un ciudadano, será importante el diálogo entre la Matemática Educativa y la Biomatemática. A continuación, se presentará la metodología que se utilizó para promover este diálogo entre estas dos disciplinas y el resultado será materializado en un rediseño de una situación de modelación, que se fundamenta en la modelación-graficación como una práctica socialmente compartida, que ha reconocido la Matemática Educativa, y el estudio de dinámica poblacional, específicamente la noción de capacidad de soporte, como una práctica propia de la comunidad de biomatemáticos.

Situación de resignificación de la Asintoticidad

Este documento reporta las diferentes etapas por las que debieron transitar investigadores de diferentes campos disciplinares, para generar un diálogo interdisciplinar, que buscó obtener como producto final, un conjunto de situaciones de modelación que aportaron al desarrollo de esta habilidad. De esta forma, la unidad de análisis es el diálogo interdisciplinar, lo cual llevó a la síntesis de tres etapas del rediseño de una situación de modelación: la funcionalidad, los momentos y las crisis. Para ello, se tomará una de las situaciones de modelación diseñada, la cual tiene por objetivo la resignificación de lo asintótico en un escenario biológico, particularmente en dinámica poblacional. Esta propuesta es un rediseño de la investigación desarrollada por Domínguez (2003) desde la disciplina de la Matemática Educativa. Este autor propone una situación que resignifica la noción de asíntota presente en el discurso matemático escolar; donde los significados recaen en una recta que nunca toca a la función de la cual es asíntota. Esto lo desarrolla a partir de tres momentos: la asíntota como una recta, la asíntota como una curva y la rapidez de la asíntota.

Las tres etapas del diálogo interdisciplinar son:

Primera etapa: *la funcionalidad del conocimiento matemático en el escenario*
Se estudiaron los significados gráficos de la asíntota en la dinámica de poblaciones. Una asíntota marca la tendencia, la estabilidad de la dinámica de poblaciones. En particular, la búsqueda documental en ambientes de ecología llevó a destacar un concepto dentro del contexto de la dinámica de poblaciones que evidencia la funcionalidad de lo asintótico, este es: *la capacidad de soporte*, la cual hace referencia a potencial abiótico donde la población se encuentra localizada, es decir, representa el número máximo de individuos sostenible en el *hábitat*.

Segunda etapa: *los momentos de la situación*
En esta etapa se relacionó *la capacidad de soporte* con los tres momentos construidos por Domínguez

(2003) en su propuesta. Se resignificó la noción de asintoticidad como la capacidad de soporte de un sistema biológico, lo cual dio paso a reestablecer momentos: *La Capacidad de soporte como una asíntota horizontal*, *la Capacidad de soporte como una curva asintótica a la función población* y *la rapidez del comportamiento de la capacidad de soporte*.

Tercera etapa: *las crisis que permiten la resignificación*
Se identificaron las crisis dentro de la situación que permitirían la resignificación de la capacidad de soporte como lo asintótico. Gráficas como las que se muestran en la Figura 1 se presentan dentro del primer momento de la situación de modelación. Donde se desarrolla un análisis sobre el comportamiento de una población de organismos vivos.
Los momentos de la situación de modelación son:

Momento 1: En el primer momento de la situación de modelación se transita de la argumentación gráfica a la algebraica de la noción de capacidad de soporte, donde se introduce la noción de límite y de asintoticidad.

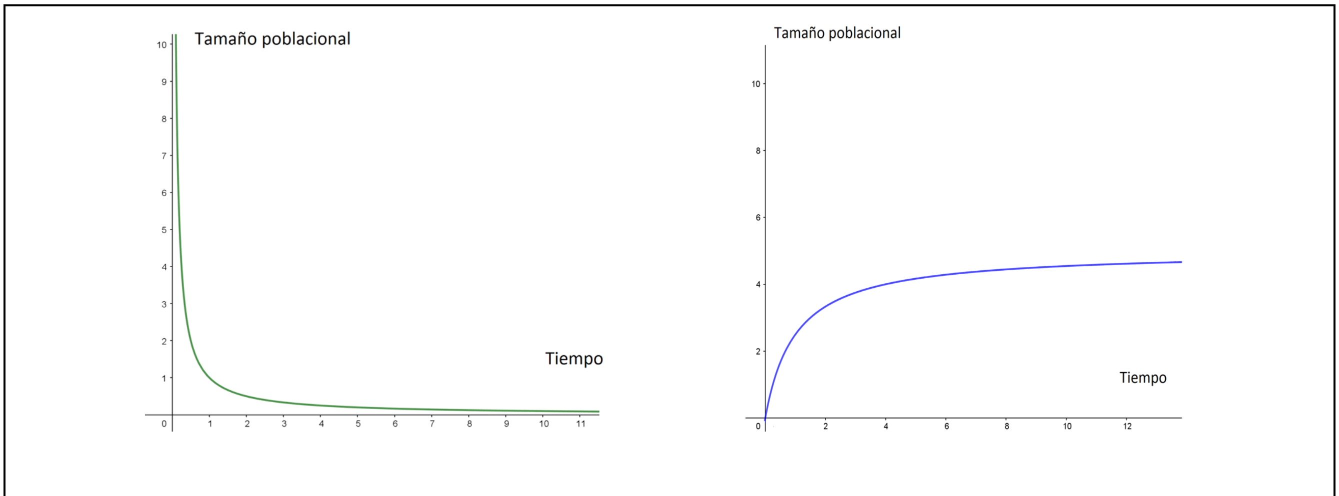


Figura 1. Primer Momento de la situación de modelación, pregunta 1.

Se desarrollan preguntas como las siguientes:

Construya una función que represente la dinámica de una población no constante que cumpla, $\lim_{t\to\infty} f(t) = K$; *donde f(t) es la función que modela la población y K la capacidad de soporte.*

Este primer momento se concluye con la siguiente pregunta: *¿Cuál es la relación entre la población y su capacidad de soporte?* Aquí se espera que los estudiantes argumenten a través de la noción de asíntota para establecer que la capacidad de soporte es la recta que marca la tendencia de la población.

Momento 2: En el segundo momento de la situación de modelación se espera resignificar la asíntota desde la concepción como la "recta que nunca toca a la función", a la asíntota como una "función que marca la tendencia de otro comportamiento". Se formulan preguntas como las siguientes:

Supongamos que la capacidad de soporte del planeta tierra es variable, en la cual estamos incluyendo nuevos factores ambientales, sociales, entre otros, que hacen variar la capacidad de soporte con relación al tiempo como se muestra en las siguientes figuras:

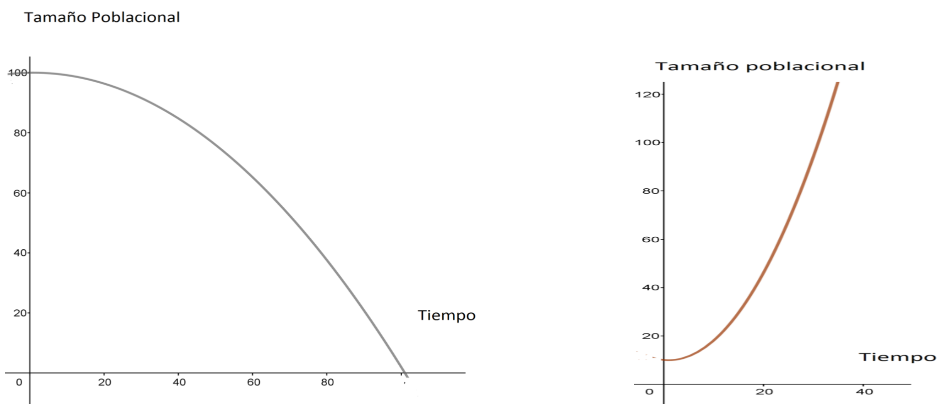


Figura 2. Momento 2 de la situación de modelación, pregunta 1.

3. Construya una función $f(t)$ de dinámica de población para cada inciso, que cumpla que cuando el tiempo tienda a infinito, $f(t)$ tienda a la función $k(t)$ (función capacidad de soporte) para los siguientes k(t): a) $k(t) = 3$; b) $k(t) = t^2 + 1$; c) $k(t) = sin\ (t)$.
5. Determina la capacidad de soporte para el comportamiento de las siguientes poblaciones.

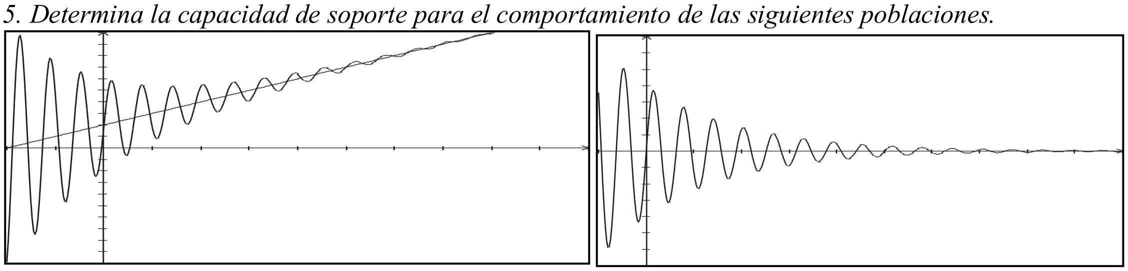


Figura 3. Momento 2 de la situación de modelación

Además, en este momento se busca determinar la relación entre la función y la asintoticidad. Esto es que: $\lim_{t\to+\infty} f(t) - k(t)$ es igual a 0.

Momento 3: El tercer momento de la situación de modelación busca la discusión respecto de la rapidez de la asintoticidad. La primera pregunta de este momento es la siguiente:

1. *En la gráfica la población es la curva de color negro. Indique el color de su capacidad de soporte. Justifique.*

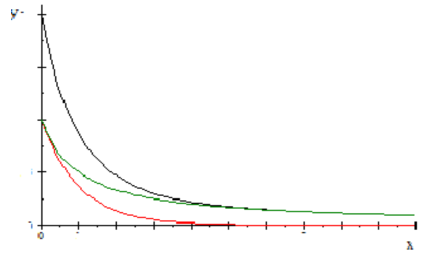


Figura 4. Momento 3 de la situación de modelación, pregunta 1.

Se espera concluir que la relación $\lim_{t\to+\infty} f(t)-k(t)$=0 no es suficiente para determinar cuál es la asíntota de una función. La segunda pregunta es:

2. Dada la población $f(t)=e^{-t}+\frac{1}{t+1}$, decreciente en el tiempo, deseamos encontrar su capacidad de soporte. Determine usando el criterio

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)-k(t) \ (1)$$

¿Cuál de las siguientes funciones $k_1(t)=e^{-t}$ o $k_2(t)=\frac{1}{t+1}$ corresponde a la capacidad de soporte del medio en el cual habita?

Figura 5. Momento 3 de la situación de modelación

El nuevo criterio que aparece es que el límite del cociente entre la función y su asíntota debe ser igual a 1.

Estos tres momentos no solo permiten resignificar el concepto de asíntota a la noción de un comportamiento con tendencia: lo asintótico, sino que generan el análisis desde una noción propia del estudio de dinámica poblacional; la capacidad de soporte. Como se ha señalado la dinámica poblacional muestra al conocimiento matemático puesto en uso (como herramienta) en escenarios biológicos (Biomatemática) y por tanto la resignificación progresiva (Cantoral, 2013).

Reflexiones finales

El trabajo interdisciplinario llevado a cabo entre los dos campos disciplinares señalados, ha permitido la discusión de aspectos fundamentales para la construcción o rediseños de situaciones de modelación. La importancia de la modelación en la escuela es la relación que produce entre la realidad y la matemática. Justo esta consigna es donde los diferentes estamentos y grupos preocupados por el desarrollo del pensamiento matemático en la escuela han adoptado.

En este documento se presentó el rediseño de una propuesta que se había desarrollado bajo una visión socioepistemológica, acerca de la asintoticidad (Domínguez, 2003). El aporte del diálogo conjunto entre la Matemática Educativa y la Biomatemática fue explicitar la funcionalidad de lo asintótico en un escenario de dinámica poblacional. Se ha mostrado el diálogo como un proceso de tres etapas para el rediseño: identificación de la funcionalidad, diseño de los momentos y búsqueda de la crisis dentro de la situación.

Este equipo interdisciplinario también ha construido situaciones partiendo de ideas de la Biomatemática en dialogo con la Matemática Educativa. Esto ha permitido diseñar situaciones de modelación que no han sido presentadas en este escrito por asuntos de espacio. Sin duda este es un esfuerzo que permitirá consensuar, discutir y contribuir a la modelación en la educación matemática.

Referencias bibliográficas

Aravena, M. Caamaño, C y Giménez, J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11(1)*. 49-52.

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education–Discussion document. *Educational studies in mathematics, 51(1),* 149-171.

Dyson, F. J. (1972). Missed opportunities. *Bulletin of the American Mathematical Society, 78(5),* 635-652.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: estudios sobre construcción social del conocimiento*. Ciudad de México: Gedisa.

Cordero, F. (2015). Modelación, Funcionalidad y Multidisciplinariedad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz. *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la Matemática Educativa* (pp.59-88). Madrid, España: Ediciones Díaz de Santos.

Domínguez, I. (2003). *La resignificación de lo asintótico en una aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Dougherty, E. R., y Braga-Neto, U. (2006). Epistemology of computational biology: mathematical models and experimental prediction as the basis of their validity. *Journal of Biological Systems*, 14(01), 65-90.

Malthus, T. R. (1888). An essay on the principle of population: or, A view of its past and present effects on human happiness. *Reeves & Turner*.

Poincaré, H. (1914). Science et méthode (1908). Book II.

Smith, R. L., & Smith, T. M. (2007). *Ecología*. Pearson Education.

Solar, H., Azcárate, C., & Deulofeu, J. (2012). Competencia de argumentación en la interpretación de gráficas funcionales. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(3), 133-154.

Suárez (2014). *Modelación-graficación para la matemática escolar*. Madrid: Ediciones Díaz de Santos.

Verhulst, P. F. (1845). Recherches Mathématiques sur La Loi D'Accroissement de la Population, *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, 18,* Art. 1, 1-45.

Bissell, C., & Dillon, C. (Eds.). (2012). Ways of thinking, ways of seeing: mathematical and other modelling in engineering and technology (Vol. 1). Springer Science & Business Media.

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

LA NOCIÓN DE EQUIVALENCIA EN ALUMNOS CON DISCAPACIDAD INTELECTUAL: CONSTRUCCIÓN DE SU PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Paulina Romero Montes de Oca, Carolina Carrillo García, J. Marcos López Mojica
Universidad Autónoma de Zacatecas, Universidad de Colima. (México)
pauu.montes.de.oca@gmail.com, cgcarolin@hotmail.com, mojicajm@gmail.com

Resumen
A partir de mi experiencia docente surge la necesidad de implementar actividades favorecedoras hacia la inclusión para niños con discapacidad intelectual, para lo cual, con base en un marco de referencia epistemológico cognitivo se propondrá una situación de enseñanza del concepto equivalencia para alumnos con discapacidad intelectual. Para la implementación se contempla el uso de materiales didácticos específicos para propiciar la motivación de los niños. Ésta es una investigación de corte cualitativo en la que se recabarán datos por el método de observación y entrevista, para posteriormente identificar y analizar las nociones desarrolladas en los alumnos en torno al concepto de equivalencia. Todo ello basándonos en los principios de "*Early Algebra*" pero adecuándolo al área de la educación especial.

Palabras clave: discapacidad intelectual, equivalencia, *early algebra*

Abstract
From my teaching experience, the need to implement activities that can favor the inclusion of students with intellectual disabilities has emerged. So, I propose a teaching situation of the concept of equivalence for students with intellectual disabilities, based on a cognitive-epistemological reference framework. To implement the activity, I take into consideration the use of specific teaching materials to encourage children's motivation. This is a qualitative research where we will collect data by using observation and interview, to subsequently identify and analyze the notions students could develop with respect to the concept of equivalence. We will base it all on "Early Algebra" principles, but adapting them to the special education context.

Key words: intellectual disability, equivalence, early algebra

Introducción

Indagar sobre el pensamiento matemático de personas con discapacidad es un reto actual de la matemática educativa. Este tema es una línea de investigación relativamente joven con muchos campos posibles de actuación. Sin embargo, el establecimiento de marcos de referencia para la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de tópicos matemáticos es objeto de estudio de escasas investigaciones. Es por ello que la problemática atendida desde esta investigación recae en el poco énfasis que se ha tenido en la educación especial y, por consiguiente, en la falta de atención en el ámbito educativo hacia personas con discapacidad intelectual.

Por otro lado, diversos resultados de investigación en torno a la enseñanza del álgebra han reconocido la transición de la aritmética al álgebra como un factor determinante que puede provocar errores en el pensamiento algebraico, y produce no sólo frustración y rechazo por parte de los alumnos sino también poca comprensión (Palarea y Socas, 1994; Aké, 2013). Kaput y Blanton (2001) argumentan la importancia de enseñar los conceptos algebraicos en el sistema educativo básico ya que el pensamiento algebraico se encamina a desarrollar habilidades de generalización, expresión y justificación.

Indagación bibliográfica

Se han realizado diversas investigaciones para determinar qué tratamiento didáctico se debe emplear para disminuir la ruptura entre la aritmética y el álgebra. Es de llamar la atención la propuesta llamada "*Early algebra*" que propone un cambio en el currículo escolar a nivel primaria, implementando el álgebra en este nivel educativo con la finalidad de que se comiencen a trabajar principios básicos (nociones), de manera que en la secundaria los alumnos tengan una mayor movilidad de saberes algebraicos y puedan comprender mejor sus conceptos y principios, enriqueciendo la enseñanza tradicional de las matemáticas (Socas, 2011).

Al respecto, Blanton y Kaput (2005) afirman que incorporar actividades propias de álgebra en educación primaria ayuda a generar un ambiente de trabajo en matemáticas en la que los alumnos exploran, realizan situaciones, predicen, discuten, argumentan y comprueban ideas. En este mismo tenor, Butto y Rojano (2010) advierten que "no es agregar contenido al programa escolar, sino tratar con mayor profundidad los que ya se cubren, subrayando las ideas de generalización, estructura y relaciones" (pág. 59).

Como puede apreciarse, el estudio del álgebra constituye un elemento fundamental en el razonamiento del individuo, por lo que es imperante su acercamiento a la población con discapacidad para ofrecer una educación matemática básica integral. En ese sentido, la pregunta que da inicio y rige esta la investigación es *¿qué caracteriza el pensamiento algebraico de niños con discapacidad ante situaciones de equivalencia?*

Como objetivo se pretende establecer un marco de referencia para la construcción de su pensamiento matemático, ante situaciones matemáticas de equivalencia, en las cuales se empleen materiales didácticos. Asimismo, se pretende desarrollar algunas estrategias para tratar de disminuir los problemas de alumnos con discapacidad intelectual y así contribuir en su formación académica. Una estrategia es el diseño de materiales didácticos que favorezcan la introducción de las nociones matemáticas y así promover su pensamiento matemático.

Problema

Como puede apreciarse en los antecedentes revisados, no existe una atención adecuada para los niños con discapacidad intelectual en el área de la Matemática Educativa, lo cual provoca que los alumnos no puedan promover o dar a conocer sus capacidades de manera más precisa, o bien tratar de desarrollarlas, debido a que incluso los docentes aún no tenemos la suficiente preparación para trabajar con alumnos con estas características, lo que posteriormente genera su deserción. Por tal motivo es importante buscar estrategias que permitan al estudiante con discapacidad intelectual desarrollar su pensamiento algebraico.

Por otro lado, el estudio del álgebra constituye un elemento fundamental en el razonamiento del individuo, por lo que es imperante su acercamiento a la población con discapacidad para ofrecer una educación matemática básica integral.

Marco teórico

Para construir nuestro marco teórico tomaremos en cuenta dos ejes indispensables para esta investigación: el eje epistemológico, que se orienta por el conocimiento matemático (el concepto de equivalencia y las definiciones del signo igual); por otro lado, el eje cognitivo, donde se considera el desarrollo del pensamiento de los niños con discapacidad intelectual.
Eje cognitivo:

Primeramente estableceremos qué vamos a entender por "discapacidad intelectual". Nos apegamos a la definición de la SEP (2010), que refiere que:

> Es una condición de vida caracterizada por limitaciones en el funcionamiento intelectual y en la conducta adaptativa que interfiere en la autonomía para el cuidado personal y la capacidad de adaptar su conducta ante diversas situaciones sociales. Las habilidades de adaptación pueden estar afectadas en mayor o menor grado dependiendo de la calidad e interacción que tenga la persona con su entorno familiar, escolar y en su comunidad. (SEP, 2010).

Eje epistemológico:

En cuanto al aspecto epistemológico, nos basamos en el trabajo de Molina (2006) para definir algunos aspectos:

Equivalencia

Define *equivalencia* como toda relación que cumpla propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. En particular, la igualdad es una relación de equivalencia. Especialmente se destaca la relación de equivalencia definida para ecuaciones, afirmaciones o fórmulas, considerándose equivalentes cuando son simultáneamente verdaderas o falsas para cada conjunto admisible de valores de ciertos parámetros.

Significados actuales del signo igual

Propone algunos de los significados que se le otorgan a este signo de igualdad en el contexto de la aritmética y el álgebra escolar presentados en la Tabla 1.

Tabla 1. Significados dados al signo de igualdad

Significados	Definición	Ejemplo
El signo " = " como propuesta de actividad de cálculo	Significado del signo igual en expresiones incompletas que contienen una cadena de números y/o símbolos, encadenados con símbolos operacionales, seguida a su derecha del signo igual. Este tipo de expresiones se utilizan en actividades de cálculo de operaciones o simplificación de expresiones, para proponer al alumno una actividad a realizar que no necesariamente ha de abordarse en el formato de una igualdad.	Ejemplo: $3 = x(x+1) - 3x(x+5)$
Operador	Significado del signo igual en igualdades o sentencias, unidireccionales, compuestas por una cadena de operaciones, dispuesta a su izquierda, y su resultado, dispuesto a la derecha. En estos casos el signo igual indica la respuesta a un cálculo o simplificación; es interpretado como un operador. Este significado es denominado por algunos autores como significado aritmético u operacional del signo igual.	Ejemplo: $4 \times 5 = 20$
Separador	Significado del signo igual otorgado por los alumnos al hacer uso de este signo como separador de los pasos realizados en la resolución de una actividad. En este caso el signo igual relaciona expresiones que pueden no tener relación alguna, siendo pasos sucesivos en la resolución de la actividad en cuestión.	Ejemplo: $f(x) = x^2 = f2(x) = x^4$
Expresión de una equivalencia condicional (ecuación)	Este significado del signo igual se encuentra en el contexto del álgebra en situaciones en las que la equivalencia expresada por medio del signo igual sólo es cierta para algún o algunos valores de la variable o variables, pudiendo no existir ninguno.	Ejemplo: $2x + x = 5x - 2x$
Expresión de una relación funcional o de dependencia	Este significado del signo igual se refiere al uso del signo igual para indicar cierta relación de dependencia entre variables o parámetros	*Ejemplo*: $y = 3x + 2$
Indicador de cierta conexión o correspondencia	Significado impreciso del signo igual que refiere a su uso entre objetos no matemáticos o de distinta naturaleza, por ejemplo, entre imágenes o figuras y números, o entre expresiones matemáticas y expresiones no matemáticas.	*Ejemplo*: Precio de una bicicleta $= 3x + 5$, siendo x el precio de un balón de baloncesto.

Aproximación	Este significado corresponde a las situaciones en las que este símbolo relaciona una expresión aritmética y una aproximación de su valor numérico. En estos casos el signo igual puede ser reemplazado por el signo "~".	*Ejemplo*: $1/_3 = 0.333$
Definición de un objeto matemático	En este caso el signo igual se utiliza para definir un objeto matemático o asignarle un nombre. En algunos contextos se utiliza el símbolo "≡" en vez del signo igual, así ocurre cuando se considera la ecuación o ecuaciones de una recta o plano.	*Ejemplo*: $r = ax + by + c$

Metodología

A partir de entrevistas clínicas, se pretende aplicar el método propuesto por Inhelder (1971), el cual consiste en analizar los desempeños ante situaciones que promuevan el uso de material concreto. Lo anterior complementado con el método de observación para hacer un análisis del trabajo de los alumnos en cada una de las actividades planteadas. (López-Mojica, 2013).
Para ello, se realizará una observación previa a un determinado grupo de alumnos con discapacidad intelectual, con el objetivo de identificar la manera en la que ellos trabajan y las actividades que realizan de manera cotidiana, para poder establecer las que serán más adecuadas y en qué grado de dificultad deberán considerarse.

Posteriormente se realizará la aplicación de las actividades planteadas con el objetivo de que los alumnos comiencen a tener nociones de equivalencia, llevadas a cabo a partir de una secuencia didáctica.

Otra técnica a emplear serán las entrevistas, de tal forma que a través de ellas podamos identificar aspectos relevantes que nos den pauta a identificar aspectos importantes sobre las nociones concebidas.

Por último, se realizará un análisis de los resultados obtenidos en las entrevistas y las observaciones realizadas, con el objetivo de identificar y analizar las nociones desarrolladas en los alumnos en torno al concepto de equivalencia.

De esta forma se espera contribuir en la determinación de un marco de referencia para la construcción del pensamiento algebraico en alumnos con discapacidad intelectual.

Conclusiones parciales

A pesar de que la inclusión educativa es un tema muy repetido dentro del ámbito de la educación básica regular, al analizar la bibliografía existente en torno a la educación especial se pudo apreciar que existen muy pocas investigaciones enfocadas a este aspecto.

Como lo señalan Acle *et al.* (2007), sigue sin atenderse en las escuelas regulares a niños que presentan discapacidad. También argumentan que algunos menores con necesidades educativas especiales, con o sin discapacidad, se han visto confrontados a un cambio respecto a la manera en que han sido atendidos, que aunados a factores de riesgo y de vulnerabilidad pueden potenciarse si al interior de las Unidades de Servicios de Apoyo a la Educación Regular (USAER) o los Centros de Atención Múltiple (CAM) no se cuenta con respuestas satisfactorias a sus necesidades educativas que faciliten su integración, educativa y social de manera plena. La atención de poblaciones con discapacidad es una competencia que como docentes de educación básica debemos adquirir.

De esta manera es indispensable que nos acerquemos a la educación inclusiva, como lo menciona Stainback, Stainback y Jakson (s.f.) se ha adoptado este término por ser más claro y preciso con lo que se necesita hacer "hay que incluir a todos los niños en la vida educativa y social de sus escuelas… no sólo de sus clases normales" (p. 21).

Finalmente, coincidimos en que la propuesta de *Early algebra* puede ayudar a desarrollar el pensamiento numérico y algebraico desde la educación primaria, con la finalidad de desarrollar un aprendizaje que facilite el estudio posterior del álgebra en educación secundaria. Si bien esta propuesta está pensada para alumnos regulares de primaria, se considera de suma importancia que existan actividades específicas para estudiantes con discapacidad intelectual, debido a la importancia de la inclusión educativa, ya que todos los alumnos tienen derecho de tener oportunidades de aprendizaje acorde a sus características y necesidades.

Referencias bibliográficas

Acle, G., Roque, M., Zacatelco, F., Lozada, R. y Martínez, L. (2007). Discapacidad y rezago escolar: riesgos actuales. *Acta Colombiana de psicología, 10*(2), 19-30.

Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación*. (Tesis de doctorado inédita). Universidad de Granada. España.

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice that Promotes Algebraic Reasoning. Journal for Research in Mathematics Education, 36(5), 412-446.

Butto, C. y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno logo. *Educación Matemática 22*(2), 55-86.

Inhelder, B. (1971). *El diagnóstico del razonamiento en los débiles mentales*. España: Nova Terra.

Kaput, J. y Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. Part I: Transforming task structure. En H. Chick, K. Stacey, J. Vicent, y J. Vicent (Eds.). The Future of the Teaching and Learning of Algebra. *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference*, Vol. 1 (pp. 344-350). Melbourne: University of Melbourne.

López-Mojica, J.M. (2013) *Pensamiento probabilístico y esquemas compensatorios en la educación especial* (Tesis doctoral no publicada). Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV. México.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* (Tesis doctoral). Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. España.

Palarea, M. y Socas, M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. Revista *SUMA, 16*, pp. 91-98.

Secretaría de Educación Pública (2010). Discapacidad intelectual. Guía didáctica para la inclusión en educación inicial y básica. México D.F.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 77*, 5-34.

Stainback, S., Stainback, W. y Jackson, H. J. (s.f.). Hacia las aulas inclusivas. *Aulas inclusivas. Un nuevo modo de enfocar y vivir el currículo.* (p. 21).

PROPUESTA DE ENSEÑAZA DE LA ESTADÍSTICA PARA FOMENTAR ACTITUDES ANTE CATÁSTROFES NATURALES: EL CASO DE TALCAHUANO

Teresa Carrasco, Marco Rojas, Fabián Quiroga
Universidad de Concepción. (Chile)
terecarrasco@udec.cl, marcrojas@udec.cl, fquiroga@udec.cl

Resumen
La investigación desarrolla una propuesta de enseñanza con centro en el valor de uso de la matemática (estadística), basados en la Teoría Socioepistemológica y el Modelo de enseñanza Análisis Exploratorio de Datos. Frente a la necesidad de contextualizar y problematizar al estudiante, nos valemos del conocimiento levantado por el Departamento de Gestión Integral de Riesgo de Talcahuano, con el fin de fomentar una actitud crítica frente a catástrofes naturales, como un medio de respuesta a las interrogantes ¿Cómo se educa al estudiante para enfrentar este tipo de situaciones? ¿Quién se hace cargo? Finalmente, logramos construir la propuesta mediante formato de Manual para el Docente, la cual fue analizada por la Teoría antropológica de lo didáctico, indicando que si facilita el aprendizaje al estudiante.

Palabras clave: enseñanza de la estadística, socioepistemología, catástrofes naturales

Abstract
This research develops a teaching proposal centered on the value of the use of mathematics (statistics), based on the Socio-epistemological Theory and the Model of Data Exploratory Analysis (DEA). Given the need to provide students with the contextualization and problematization of content, we use the knowledge raised by the Department of Risk Comprehensive Management of Talcahuano, in order to promote a critical attitude towards natural disasters, as a means of answering the questions: How do we teach the students to face this type of situations? Who is in charge? Finally, we were able to elaborate a Manual for teachers and we analyzed the proposal through the Anthropological Theory of Didactics, indicating that it facilitates student's learning.

Key Words: statistics teaching, socio-epistemology, natural disasters

Planteamiento del problema

El Sistema de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE), evalúa el logro de los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios (OF-CMO) del Marco Curricular vigente, el cual año tras año arroja bajos resultados en la prueba obligatoria de matemática. En octavo básico ha habido un avance de 253 a 263 puntos en los último 10 años, situación similar ocurre con los segundos medios, con un avance de 246 a 262 puntos de una escala de 200 a 300 puntos, según la Agencia de la calidad de la educación en Chile.

En la organización curricular de matemática los conocimientos se articulan en cuatro ejes temáticos: Números, Álgebra y Funciones, Geometría, y Probabilidad y estadística. Ahondamos en el análisis de estos ejes en 4 establecimientos de diferentes dependencias en la comuna de Talcahuano. En el establecimiento A de dependencia municipal el mayor puntaje lo tiene el eje de Números, en el establecimiento B de dependencia municipal, el eje de Geometría alcanza el mayor puntaje, en el Liceo C de dependencia particular subvencionado fue el eje de Álgebra que llegó a 7 de 10 puntos y finalmente se repite el eje de Números en el colegio D de dependencia particular pagado con el mayor puntaje, si bien en 3 establecimientos el puntaje menor lo comparte el eje de Probabilidad y Estadística con los otros 2 ejes, en el establecimiento particular subvencionado se queda en el último lugar, lo que deja al Eje de datos y Azar como el que menos logra alcanzar los objetivos fundamentales propuestos por el Currículo en estas 4 unidades educativas de Talcahuano. Atribuimos las causas del bajo puntaje, al desarrollo de las actividades propuestas para lograr los objetivos, que se desarrollan tanto en el currículo, en el Manual para el docente y en el Texto del estudiante, ya que cerca de un 92% de los docentes declara usar el texto del MINEDUC, ya sea en forma exclusiva o complementaria para el desarrollo de sus clases, según un estudio realizado por el centro de Microdatos de la Universidad de Chile.

Por otra parte, el Departamento de Gestión Integral de Riesgo en la comuna de Talcahuano, realiza un trabajo constante respecto de las catástrofes naturales a las que está sometida la comuna, dada su ubicación geográfica, a través de campañas de promoción de reducción de riesgo de desastre en establecimientos educacionales, estas campañas son realizadas como actividades extra-curriculares; sin embargo, dentro del sistema educativo ¿Cómo se educa al estudiante para enfrentar este tipo de situaciones? ¿Quién se hace cargo? Teniendo en cuenta lo anteriormente expuesto, vemos que no existe una propuesta de enseñanza para la estadística, con centro en el valor de uso del conocimiento matemático (estadístico) en contextos cotidianos, de tal forma que la matemática sea utilizada como ayuda para solucionar problemas, comprender realidades sociales y para adquirir habilidades transversales que utilicen el contexto y realidad territorial.

Revisión de literatura

La alfabetización estadística es un proceso continuo que tiene como meta el desarrollo del pensamiento estadístico. Uno de los objetivos principales de la educación estadística es ayudar a los alumnos a desarrollar el pensamiento estadístico. (del Pino & Estrella, 2012).

En palabras de Cobb y Moore (1997), “la estadística requiere una manera diferente de pensar, porque los datos no son números, se trata de números con un contexto. [...] En la Matemática el contexto obscurece la estructura. [...] En el análisis de datos, el contexto le da sentido”. (pp. 801-803).

Centrados en el análisis de los bajos resultados en la Unidad de Estadística, se hace necesario en indagar las razones por las cuales los estudiantes no han logrado el aprendizaje, Según Batanero (2006) “Hay dos razones más que posiblemente influyan en la dificultad del tema: En primer lugar, la Probabilidad y la Estadística tienen un desarrollo reciente. Por otro lado, gran parte de los conceptos estadísticos han tenido su origen fuera del campo estricto de la matemática. La Estadística ha sido desde sus comienzos una ciencia interdisciplinar y las grandes etapas de su progreso han estado marcadas por aportaciones originadas a partir de la necesidad de resolver problemas en campos diversos. En la enseñanza los conceptos se presentan aislados de las aplicaciones originales”.

Estructura teórica

En primer lugar, el trabajo es sustentado por la teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, la cual asume que para estudiar fenómenos didácticos ligados a las matemáticas se precisa acudir, a un examen minucioso del saber, a su problematización. (Cantoral, Reyes-Gasperini, & Montiel, 2014). En base a esto, nos valemos del conocimiento levantado por el Departamento de Gestión Integral de Riesgo (DGIR) de Talcahuano y sus distintos marcos referenciales por ellos elaborados, con el fin de contextualizar y problematizar al estudiante.

Según Torres (2016) "El riesgo es la probabilidad de que ocurran consecuencias perjudiciales o pérdidas esperadas (muertes, lesiones, propiedad, medios de subsistencia, interrupción de actividad económica o deterioro ambiental)" El ciclo de riesgo se compone de cuatro fases: Prevención y mitigación, preparación, respuesta y recuperación. El trabajo de promover una "cultura de prevención" a través de la concientización y la educación pública, para cambiar la actitud y los comportamientos sociales se desarrolla en la primera fase. Esta etapa –previa a la emergencia- involucra todas aquellas actividades que tienden a evitar o reducir el impacto adverso de amenazas sobre las personas, los bienes y el ambiente expuestos. Para ello, se generan estrategias que apunten a minimizar vulnerabilidades y fortalecer las capacidades del sistema.

Cuando hablamos de socioepistemología, uno de sus principios es que las matemáticas viven de manera diferente cuando se usan en la vida a cómo viven en la escuela. ¿Cómo enfrentar este desafío? Creemos que un camino es intentar flexibilizar nuestra manera de entender las matemáticas. De aquí que sea importante reconocer los elementos matemáticos que pertenecen al currículo, pero también se puede poner acento en las prácticas que acompañan al conocimiento. En el currículo chileno se tiene por objetivo que, mediante el eje de Estadística y Probabilidad, se responda a la necesidad de que todos los estudiantes aprendan a realizar análisis, inferencias y obtengan información a partir de datos estadísticos. Se espera formar alumnos críticos que puedan utilizar la información para validar sus opiniones y decisiones; que sean capaces de determinar situaciones conflictivas a raíz de interpretaciones erróneas de un gráfico y de las posibles manipulaciones intencionadas que se pueden hacer con los datos. Para esto, basándonos en los Aprendizajes Esperados que nos entrega el currículo para la unidad, se utiliza también el modelo de enseñanza del Análisis Exploratorio de Datos (EDA).

El EDA (por sus siglas en inglés) enfatiza principalmente en dos aspectos:

(a) la participación activa de los estudiantes en la organización, descripción, interpretación, representación y análisis de situaciones de datos sobre temas cercanos al mundo de los estudiantes, y la
(b) incorporación de herramientas tecnológicas para el simple uso de diversas representaciones de datos y transformaciones de éstas. (Ben-Zvi, 2001)
En este modelo se describe un ciclo de investigación PCAIC (plantear, recopilar, analizar, interpretar y comunicar) propuesto por Graham (1987) y Kader & Perry (1994).

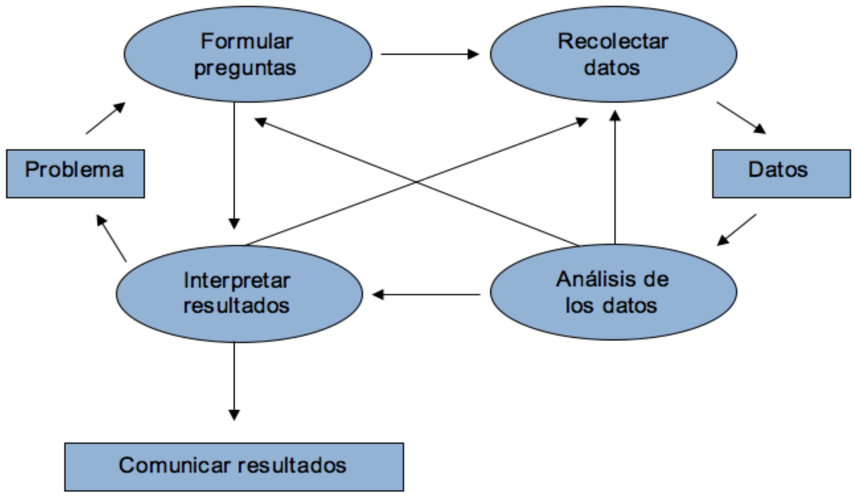


Figura 2: Ciclo PCAIC en Ben-Zvi (2001) (Traducido del original)

Con esto, se pretende que el estudiante logre:

- familiarizarse con el problema actual, identificar preguntas de investigación y formular hipótesis sobre los posibles resultados;
- recoger, organizar, describir e interpretar datos;
- construir, leer e interpretar representaciones de datos;
- desarrollar una actitud crítica hacia los datos;
- hacer inferencias y argumentos basados en el análisis de datos;
- comprender y aplicar medidas de tendencia central, variabilidad (y correlación10);
- utilizar el ajuste de curva para predecir a partir de datos;
- comunicar los resultados de su investigación.

Finalmente, con el fin de verificar si la actividad propuesta facilita el aprendizaje al estudiante, utilizamos el marco entregado por la Teoría Antropológica de los Didáctico (TAD).

La TAD propone modelar una actividad humana mediante una herramienta fundamental llamada praxeología (praxis + logos), y considera a la matemática como una actividad humana que puede describirse en términos de praxeología u Organizaciones Matemáticas (OM) y vínculos entre ellas. Según Chevallard (1997) los elementos que forman la estructura de la praxeología se pueden distinguir en dos aspectos inseparables: el nivel de la práctica o praxis que consta de tareas y técnicas que se identifican generalmente con el saber hacer. De forma vinculada e inseparable se encuentra el discurso razonado sobre la práctica o "logos" formados por las tecnologías y las teorías.

Metodología

Se entenderá que, al hablar de diseño de investigación, haremos referencia al plan de acción que seguimos para lograr nuestros objetivos propuestos. Nuestra metodología está bajo la lógica de creación de una unidad didáctica y para ello es necesario, por un lado, el análisis de las distintas teorías que nos permitan fundamentar su construcción, por otro, el análisis del territorio de Talcahuano respecto de las catástrofes naturales latentes, y finalmente un método de validación de la propuesta diseñada, bajo lo que denominamos grupo de expertos tanto del área de gestión de riesgo, que lo fueron el equipo de Gestión de Riesgo de Talcahuano, los cuales analizan la propuesta de modo que responda a los principios que busca promover, tales como el ciclo de manejo del riesgo con sus cuatro fases, que sean actividades coherentes al entorno sociocultural y geográfico, y que estén adaptadas al currículum nacional para insertarlas en el ámbito escolar. En el ámbito de la estadística, una retroalimentación del Dr. Dani Ben-Zvi en el Marco de las XX Jornadas Nacionales de Educación Matemática realizadas en Valparaíso, Chile.

Análisis de resultados

Logramos desarrollar una propuesta de enseñanza para la estadística, bajo la estructura de Manual para el docente, la cual consta de una planificación clase a clase, y de talleres que son entregados a los estudiantes, más los respectivos instrumentos de evaluación durante la unidad. Se cumplen los lineamientos del Análisis Exploratorio de Datos bajo el Ciclo de Investigación, en el cual los estudiantes se problematizan con el tema de las catástrofes naturales y específicamente con la de tsunami apoyándonos también en la TSME para esta etapa, crean conjeturas a verificar, para ello construyen una encuesta que les permitirá recolectar datos, donde tendrán una salida a terreno en la comuna, luego analizarán los datos para dar respuesta a las conjeturas creadas en la segunda etapa y finalmente comunicarán esta información tanto a sus compañeros como a la comunidad. Con respecto a la efectividad de la unidad, podemos concluir que, según la Teoría Antropológica de lo Didáctico cumple con los requerimientos que facilitan el aprendizaje al estudiante, son enfrentados a 9 tareas, para los cuales disponen desde 2 a 4 técnicas para desarrollarlas, todas las tecnologías están basadas en las etapas del ciclo de investigación.

Conclusiones

Luego de haber realizado una revisión bibliográfica respecto de las nuevas metodologías de enseñanza de la estadística, y los lineamientos generales que permiten la realización de este tipo de prácticas, consideramos que efectivamente fue posible realizar una propuesta de enseñanza que permitiera hacer uso de la matemática como una herramienta para solucionar problemas. Lo anterior queda en evidencia ya que además de crear las actividades, se estableció una relación intencionada entre los elementos teóricos disponibles en la literatura respecto de la estadística, junto al valor de uso que se le da a la matemática según la teoría socioepistemológica, las cuales fueron articuladas con la información que nos entrega el DGIR que permitieron sentar las bases del diseño de las actividades propuestas. En estas la matemática no es enseñada a través de conceptos, sino que surge como una práctica social, para estimar el riesgo que pueden producir los contenedores ubicados en el puerto de Talcahuano, frente a un posible tsunami.

Podemos entonces dar respuestas a las interrogantes ¿Cómo se educa al estudiante para enfrentar este tipo de situaciones? ¿Quién se hace cargo? Pues la clase de matemática estaría permitiendo un desarrollo de habilidades, fomentando actitudes y entregando conocimientos asociados a la catástrofe, lo cual permite generar reflexiones respecto al tema y adquirir de esta forma la resiliencia ante una catástrofe.

Con la presentación de las actividades y su respectivo fundamento logramos generar evidencia que permita un cambio en las prácticas de los profesores, respecto a la participación activa que se le da al estudiante en temas estadísticos, ya que si bien en el Currículo Nacional de matemática se enuncia que es el eje en que mayor sentido de realidad se le puede dar a la matemática, muchas veces esa realidad es ajena al contexto en el que se sitúan los estudiantes.

Futuros proyectos están cursados a la aplicación de la unidad y a la investigación con respecto a los procesos evaluativos. Además, se espera difundir el trabajo en formato de libro, para que tenga mayor alcance ante los docentes de la comuna de Talcahuano.

Referencias bibliográficas

Batanero, C., Godino, J., Green, D., Holmes, P. & Vallecillos, A. (2012) Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *Internation Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547

Ben-Zvi, D., & Arcavi, A. (2001). Junior high school students' construction of global views of data and data representations. *Educational Studies in Mathematics*, *45*, 35–65

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*,*4*, 91-116

Chevallard, Y. (1985). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Bue- nos Aires, Aique. (La traducción que se cita es de 1997).

Cobb, G., & Moore, D. (1997). Mathematics, Statistics, and Teaching. *American Mathematical Monthly*, 104(9), 801–823.

Del Pino, G. & Estrella, S. (2012) Educación estadística: relaciones con la matemática. *Revista de Investigación Educacional Latinoamericana*, 49(1), 53-64

Torres, M. (2016). *Estrategias Territoriales para la Reducción del Riesgo de Desastres*. Talcahuano, Chile.

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN DE ESTUDIANTES DE MEDICINA

Cintya Gonzales, Victor Papuico, Mónica Cabrera
Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. (Perú)
pcmacgon@upc.edu.pe, victor.papuico@upc.edu.pe, monica.cabrera@upc.pe

Resumen
En este trabajo, presentamos una propuesta de Actividad de Estudio e Investigación sobre sistemas de ecuaciones lineales, mediante la modelización matemática, para estudiantes de Ciencias de la Salud. Consideramos que el hacer matemáticas en la universidad es un medio para generar cuestiones problemáticas cuyas respuestas desencadenarán organizaciones matemáticas, que constituyen la razón de ser del nuevo conocimiento a aprender. Por ello, partimos de una pedagogía no monumentalista, para enseñar la matemática de modo que sea más significativa, útil y con conexiones en el desarrollo profesional del estudiante universitario.

Palabras clave: TAD, actividad de estudio e investigación, medicina

Abstract
In this paper, we present a proposal of Research and Study activity on systems of linear equations, by using mathematical modeling for Health Sciences students. We believe that doing mathematics in the university is a means to generate problematic questions whose answers will trigger mathematical organizations, which constitute the raison d'être of the new knowledge to be learned. Therefore, we start from a non-monumental pedagogy, to teach mathematics in such a way that be more meaningful, useful and with connections in the professional development of the university student.

Key words: TAD, research and study activity, medicine

Introducción

Nuestra experiencia en la enseñanza de las matemáticas para estudiantes de la carrera de Ciencias de la Salud, nos llevó a plantearnos la cuestión sobre la forma de enseñar y la manera en la que aprenden los estudiantes para que provean de sentido y funcionalidad a la matemática que se les enseña. Esto hace que nosotros reflexionemos sobre nuestra práctica docente. Por ello, buscamos un marco teórico para sustentar nuestro proyecto de investigación.

Observamos que las matemáticas se presentan de manera acabada donde los conocimientos matemáticos se muestran de forma descontextualizada. No estamos afirmando que sea malo, pero sí sin un fin determinado, el cual al parecer solo posee el objetivo de llenar de contenidos al estudiante, es decir, solo se lleva a cabo el principio de monumentalización de los contenidos matemáticos, en el sentido de Chevallard (2005), según el cual los estudiantes son invitados a visitarlos, mas no a cuestionarlos. Además, en la actividad de estudio, se otorga más valor a las respuestas que a las preguntas.

Con relación a la organización tradicional de los contenidos de enseñanza como indica Barquero (2009), este tipo de organización tiene la desventaja de esconder las cuestiones problemáticas que constituyen la razón de ser de los conceptos, propiedades, técnicas y teoremas que han acabado cristalizando el saber matemático que se pretende enseñar. Asimismo, al situar los elementos teóricos en el origen de la actividad matemática, se tiende a construir tipos de problemas que los alumnos aprenderán a resolver, los cuales se deberán inscribir en uno de estos temas y, por lo tanto, mantendrán un carácter relativamente cerrado y aislado. También, es muy probable que lo mismo ocurra con las aplicaciones que aparecen al final de cada tema como ejemplificaciones específicas de cada uno de los contenidos. Barquero, Bosch y Gascón (2011) sostienen que se prioriza una enseñanza lógico-deductiva que parte de una construcción teórica de las nociones y considera posteriormente sus posibles utilizaciones, a diferencia de un enfoque lógico-constructivo en el que los conocimientos se construyen a partir de cuestiones o problemas prácticos.

Por otro lado, para algunos estudiantes la transición de la secundaria a la universidad es una nueva etapa en la que están desprovistos de herramientas matemáticas para poder desempeñarse con éxito. Además, observamos que desconocen la articulación de los contenidos matemáticos escolares, con lo cual coincidimos con García (2005), quien afirma, en base a sus estudios en España, que no se le brinda la importancia necesaria a la articulación de saberes. Por ejemplo, él refiere los conceptos de las proporciones y las demás relaciones funcionales.

Marco teórico

Tomamos como referencia la Teoría Antropológica de lo didáctico (TAD) propuesta por Yves Chevallard. La cual ha ido evolucionando desde de la teoría de transposición didáctica, hasta llegar a un dispositivo didáctico denominado Recorrido de Estudio e Investigación (REI), en nuestro caso trabajaremos una Actividad de Estudio e Investigación (AEI) debido a los alcances de la realidad de la sala de clases.

Para esta teoría la didáctica es la ciencia de las condiciones y restricciones de la difusión de las praxeologías en las instituciones de la sociedad. Por ello tiene como base que toda actividad humana puede ser modelizada mediante praxeologías, las cuales están compuestas por un bloque practico-técnico $[T, \tau]$, en la cual encontramos las tareas, tipos de tareas T; y técnicas τ, que son la manera de resolver las tareas. Además del bloque tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$, donde se encuentra la tecnología θ, que envuelve la justificación de las técnicas; y la teoría Θ, que a su vez justifica las tecnologías.

Tipos de praxeologías u organizaciones matemáticas.

Las OM se clasifican de acuerdo al grado de complejidad de sus componentes, en:

Organizaciones matemáticas puntuales (OMP), cuando están constituidas por un único tipo de tareas, que es un conjunto de tareas del mismo tipo.
Organizaciones matemáticas locales (OML) cuando resultan de la integración de varias OMP que comparten la misma tecnología.
Organizaciones matemáticas regionales, las que están constituidas por la coordinación y articulación de

OML referentes a la misma teoría matemática.
Organizaciones matemáticas globales, las que emergen de la agregación de las diversas praxeologías regionales a partir de la integración de diferentes teorías.

Por ejemplo, los tipos de tareas que vive en la secundaria, en el caso de geometría, calcular la medida del área de cuadriláteros dada una unidad como referencia; en álgebra, determinar las soluciones de una ecuación cuadrática, etc. Se debe aclarar que esto depende de la institución I, ya que lo que es una tarea en una I_1, puede ser una técnica o un paso de esta en I_2, para describir cada una de estas OMP, es necesario posicionarnos, Gonzales (2014).

Actividad de estudio e investigación

Chevallard (2005), se centra en la reformulación del problema de la razón de ser de las organizaciones matemáticas que son enseñadas en las instituciones, para lo cual propone la modelización matemática mediante la creación de un dispositivo didáctico, Actividad de Estudio e Investigación (AEI). Este dispositivo se considera como un nuevo tipo de organización didáctica que podemos utilizar como modelo de referencia para el análisis, diseño y experimentación de los modelos docentes no «monumentalistas». Su objetivo principal es el de introducir una nueva epistemología en la escuela cuyo paradigma central viene a reemplazar el paradigma de «inventariar» los saberes por un paradigma de cuestionamiento del mundo con el que se dé sentido y funcionalidad al estudio escolar de las matemáticas en su conjunto. Esto no significa que no consista en el estudio de una situación matemática.

En Bosch y Gascón (2010, p.81), sedefine la AEI como:

> "las AEI vienen determinadas por una organización matemática local (OML) que un profesor Y debe hacer estudiar, reconstruir y hacer accesible a un grupo de alumnos X. Para ello es necesario partir de una cuestión generatriz Q cuyo estudio conduzca a la reconstrucción de los principales elementos de la OML de partida. Se genera así un sistema didáctico que podemos designar como S(X; Y; Q) cuyo desarrollo debe conducir, de alguna manera, a una respuesta final en forma de praxeología. Esta respuesta final se designa generalmente mediante el símbolo $R^{\heartsuit}$ por constituir el objetivo del proceso de estudio que se desea alcanzar. En el caso de un proceso de estudio praxeológicamente finalizado como es una AEI, se impone la condición que $R^{\heartsuit}$ "contenga" los principales componentes de una OML previamente determinada y conocida de antemano, que se designa $R^{\lozenge}$ por construir una respuesta etiquetada de algún modo por la institución escolar."

Para la implementación del AEI, se tiene en cuenta la metodología propia de la TAD, en primer lugar un análisis preliminar, en la que tomamos en cuenta un modelo epistemológico alternativo para el diseño de las actividades. Según Chevallard (2002, citado en Vázquez et al, 2016) en este proceso está asociado a tres momentos:

- Momento de primer encuentro. Se refiere al encuentro con una cuestión matemática, que implica para ser resuelta un tipo de tareas matemáticas. Esta cuestión surge de una situación matemática o extra matemática, y las organizaciones puntuales aisladas no pueden responderla.

- Momento del trabajo de la técnica. Para reconstruir la OML la comunidad de estudio explora el tipo de tareas relacionadas con la cuestión. La exploración hace emerger y elaborar una o más técnicas para enfrentar el tipo de tareas.
- Momento tecnológico-teórico e de institucionalización. En este momento se generan explicaciones y justificaciones que aseguren que las técnicas utilizadas son válidas.

Método

Nuestro trabajo se basa en un enfoque cualitativo, de corte exploratorio, el cual consiste en poner en práctica una nueva forma de enseñar; esto es mediante la AEI en un contexto controlado. La investigación se desarrolla con un grupo de 16 estudiantes voluntarios. Esta propuesta se desarrolla en dos sesiones de clase en un total de cinco horas.

En cada sesión, el profesor es el que dirige la secuencia diseñada, en colaboración con el profesor investigador que es observador participante. Estas tareas permiten generar registros de clase, recogidos mediante la elaboración de un portafolio. Se analizan los resultados obtenidos para determinar la organización matemática efectivamente reconstruida.

Diseño de una AEI basada en las necesidades energéticas

A continuación presentamos el diseño de una parte de la AEI que según Bosch, Fonseca y Gascón (2004) se puede describir en términos de una arborescencia de cuestiones propuestas (en este caso determinadas de antemano) donde se parte de una cuestión generatriz Q_0 hasta las últimas que constituyen las praxeologías cada vez más amplias y relativamente más completas. Además ponemos en evidencia solo algunos tipos de cuestiones que podrían generar las sucesivas praxeologías, y algunas técnicas, tanto previstas como no previstas, que emergieron de este estudio; no describiremos a detalle todos los elementos de las praxeologías.

Partimos de una cuestión cuyo nicho es el ámbito de ciencias de la salud, más concretamente a la nutrición. La cuestión generatriz que planteamos es el siguiente:

Q_0: *¿Cómo podríamos combinar adecuadamente la cantidad de alimento que consumimos a media mañana y en el almuerzo, para que nos aporte las calorías necesarias?*

1. Momento de primer encuentro con T

En una primera etapa se propone listar algunos elementos de los que dependa el problema, en nuestro caso solicitamos a manera de cuestiones; surgieron estas distintas propuestas: índice de masa corporal, índice de grasa corporal, necesidades energéticas tanto para hombres como para mujeres, medidas antropométricas (peso, estatura, contorno de cintura, etc.), cantidad en gramos de alimento, cantidad de calorías que aporta cada alimento, actividad física, cantidad de carbohidratos, proteínas y grasas, etc. En la figura 1, se muestran algunos ejemplos.

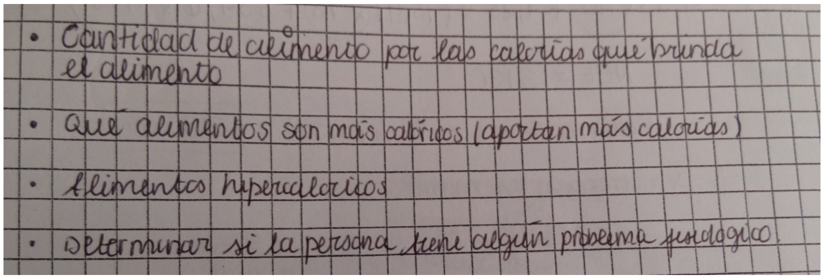


Figura 1. Algunas cuestiones planteadas a partir de Q_0

2. Momento de la exploración de T y de la emergencia de la técnica

Para que los estudiantes puedan identificar las combinaciones de comida a media mañana, se les dio una propuesta de la nutrición de uno de sus compañeros para el cual se le presentó una combinación de dos alimentos. Se plantea la cuestión, la cual hace emerger distintas técnicas.

3. Momento construcción del bloque tecnológico-teórico e institucionalización

Tarea 1 (primera parte)

Consumir 50 g, no importa la cantidad de calorías, deciden plantear su ecuación $5x + 2y = 50$, comienzan a armar combinaciones, de donde surge una ecuación lineal diofántica $ax + by = c$, donde a, b y c son enteros y $ab \neq 0$. En esta tarea surgió la siguiente pregunta: ¿por qué no pueden ser decimales? En esta parte se hace a reflexión de que la solución a la parte matemática está condicionada a la situación planteada.

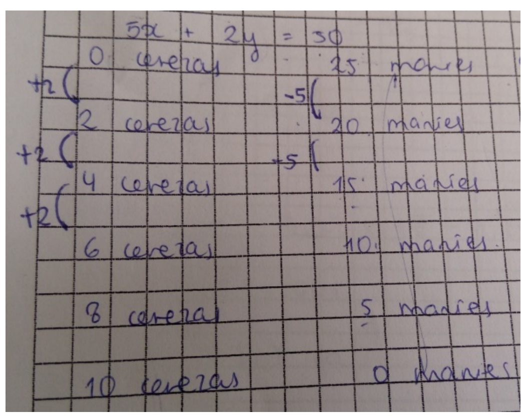


Figura 2. Técnica propuesta por la estudiante X

Cuya técnica está justificada por el siguiente teorema:

Si $g = mcd(a, b)$, $g|c$, y x_0 e y_0 es una solución particular de la ecuación lineal diofántica en dos variables $ax + by = c$, entonces toda solución *x* e *y* está dada por las ecuaciones $x = x_0 + \frac{b}{g}t$ y $y = y_0 - \frac{a}{g}t$, donde *t* es un entero.

Tarea 1 (segunda parte)

Se le da una condición adicional que el total de calorías sea 118, listaron todos los valores que satisface esta ecuación con lo cual llegaron a una sola respuesta.

Esta primera parte se consiguió que los estudiantes se valieran de sus conocimientos para dar solución, emplearon la técnica de la primera parte, encontramos la técnica que denominamos como falsa suposición. Así como algunos estudiantes recordaron las técnicas escolares, hubo otros estudiantes que colocaron ostensivos, pero no le dieron la valencia instrumental, ni semiótica.

$2x + 5y = 50$ y $3x + 10y = 118$

Tarea 2

Para la solución de la tarea era necesario conocer la cantidad de calorías que aporta el agua, la densidad del agua, conversión litros a gramos, los cuales hicieron la búsqueda, el peso y la cantidad de calorías de una manzana. En esta tarea algunos estudiantes hicieron uso de sistemas de ecuaciones, en este caso la técnica más eficaz era la de sustitución.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ \quad dy = e \end{cases}$$

Tarea 3

En esta tarea también se tenía que acceder a una fórmula que pudiera determinar la necesidad energética a media mañana, en donde se debía tener como datos algunas informaciones. Además se dieron cuenta que el planteo de la ecuación tenía la necesidad de emplear una técnica más eficaz que la anterior ya que se tenía ecuaciones donde los resultados no necesariamente daban enteros, por lo que no era posible utilizar la primera técnica, y la segunda porque no era económica.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dy + ey = f \end{cases}$$

Resultados

En primer lugar, comprobamos que la enseñanza mediante cuestiones motivó a los estudiantes a la búsqueda de información y favoreció su autonomía. Las responsabilidades tanto del profesor como de los estudiantes dan lugar a que el estudiante sienta la necesidad de aprender por sí mismo. En segundo lugar, evidenciamos que la diversidad de conocimientos de los estudiantes traídos de la enseñanza secundaria dificulta la construcción y reconstrucción de la actividad matemática. La AEI depende de la institución.

Conclusiones

Se debe tener presente que ante la propuesta de cambios de enseñanza, al inicio, hay un rechazo por parte de los estudiantes, ya que están acostumbrados a la forma de enseñanza tradicional. Pero luego se sienten complacidos que ellos mismos son parte del desarrollo, de la construcción de su aprendizaje. Podemos afirmar que la modelización matemática en el sentido de la TAD, nos ha proporcionado las herramientas necesarias para el diseño e implementación de un dispositivo didáctico, el análisis permitió mostrar la evolución y organización del problema de las cantidades necesarias de calorías, la puesta en práctica permitió generar diversas cuestiones, en cuyas respuestas se hizo presente nuestro modelo de referencia alternativo. De esta forma, los contenidos matemáticos tienen funcionalidad y razón de ser aprendidos.

Referencias bibliográficas

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas*. Tesis de doctorado no publicada, Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2011). Los Recorridos de Estudio e Investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las Ciencias Experimentales. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *29(3)*, 339-352.

Bosch, M. & Gascón, J. (2010). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los "talleres de prácticas matemáticas" a los "recorridos de estudio e investigación". En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds.) Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action (p. 49-85), Montpellier, París: IUFM de l'Académie de Montpellier.

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. *La place des mathématiques vivantes dans l'education secondaire*, *APMEP*, 239-263.

García, F. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Jaén, España.

Gonzales, C. (2014). *Una praxeología matemática de proporción en un texto universitario*. Tesis de maestría no publicada, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.

Vázquez, R., Romo, A., Romo-Vázquez, R., & Trigueros, M. (2016). La separación ciega de fuentes: un puente entre el álgebra lineal y el análisis de señales. *Educación matemática*, *28(2),* p.31-57.

Anexo

Actividades

Tarea 1 (primera parte)

Deseamos combinar adecuadamente la cantidad de alimento que consume, a media mañana, uno de sus compañeros para que le aporte las calorías necesarias.
A media mañana, el consume una merienda que consiste en cerezas y maníes. Debiendo consumir entre los dos una cantidad de 50 g. ¿Cuántos de cada uno es posible consumir?

limento	lasa	alorías por unidad
cereza 	g	cal
maní 	g	10 cal

Tarea 2 (segunda parte)

¿Cuántas cerezas y maníes se deben consumir para cubrir una porción de 50 g que nos aporte 118 calorías?

Tarea 3

Deseamos combinar adecuadamente la cantidad de botellas agua de 500 mL y manzanas de 100 g, que aporta 50 calorías, cada una, para que aporte las calorías necesarias, a media mañana. De tal forma que consuma 700 g entre agua y manzana y un total de 100 calorías.

Tarea 4

Deseamos combinar adecuadamente la cantidad de alimento que consume, a media mañana, uno de sus compañeros para que le aporte las calorías necesarias, a media mañana. De tal forma que consuma 50 g, entre cerezas y maníes, y cubra sus necesidades energéticas en la merienda.

UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA MEDIADA POR EL SOFTWARE GEOGEBRA

Cintya Gonzales, Katia Vigo, Nancy Saravia, Elizabeth Advíncula
Pontificia Universidad Católica del Perú – Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas TecVEM – IREM. (Perú)
cintya.gonzales@pucp.pe, kvigo@pucp.pe, nsaraviam@pucp.pe, eadvincula@pucp.edu.pe

Resumen
Diversas investigaciones del concepto de derivada presentan dificultades para los estudiantes, lo cual confirmamos en nuestra práctica docente. El objetivo de este trabajo es realizar actividades que permitan la comprensión de la función derivada tomando en cuenta aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica que nos ayudan a analizar los significados de los estudiantes con respecto a dicho objeto matemático, con el apoyo del software GeoGebra. La metodología que usaremos es cualitativa. El uso del software facilitó la comprensión del concepto de la función derivada pues permitió observar cambios instantáneos de la variable dependiente respecto a la variable independiente.

Palabras clave: derivada, registros, tasa de variación, GeoGebra

Abstract
According to different investigations, students have difficulties to understand the concept of derivative, what we can confirm from our teaching practice. Therefore, we consider it is necessary to understand the processes through which students give it a meaning. The objective of this workshop is to carry out activities to understand the derivative function and some of its applications, taking into account aspects of the Theory of Registers of Semiotic Representation that help us analyze the meanings attributed to such mathematical object with the support of the GeoGebra software. We will use a qualitative methodology since we are interested in describing the phenomena of our researched reality.

Key words: derivative, registers of representation, variation rate, GeoGebra

Introducción

En nuestra práctica docente observamos que los estudiantes presentan dificultades para comprender el concepto de la derivada así como para usarla en la resolución de problemas en los que se requiere el uso de dicho concepto. Ante esta problemática surge la necesidad de conocer cómo los estudiantes le dan un significado a la derivada, cómo la interpretan y representan, y cómo la usan en la resolución de problemas. En nuestro acercamiento a esta problemática, coincidimos con Silva (2012), quien afirma que se puede construir la noción de tasa de variación instantánea a partir de un abordaje intuitivo de la tasa de variación media. Por otro lado, encontramos diversas investigaciones, como la realizada por Ruiz, Córdoba y

Rendón (2014) quienes han elaborado una propuesta didáctica para la comprensión del concepto de derivada mediante el uso de GeoGebra; y la de Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008) para quienes los modos de representación del concepto de derivada influyen en el establecimiento de relaciones lógicas entre los elementos matemáticos necesarios en la resolución de problemas.
Por ello, en este trabajo se proponen dos actividades iniciales que faciliten a los estudiantes la comprensión de la noción de derivada de manera intuitiva, a través de la tasa de variación media e instantánea, luego de la institucionalización de la derivada, proponemos otras dos actividades donde se emplea la derivada en la resolución de problemas, utilizando para ello diferentes registros de representación con énfasis en el registro gráfico. Para cada actividad propuesta se presenta un análisis didáctico.

Aspectos teóricos

Según Duval (2016), el papel de las representaciones semióticas no se reduce a designar objetos o a ser consideradas como objetos sino, cualesquiera que sean las representaciones semióticas utilizadas, estas se pueden cambiar por otras representaciones semióticas sin el apoyo de datos nuevos u observaciones empíricas. Pero eso depende del sistema semiótico dentro del cual se producen las representaciones semióticas.

Además, debemos tener en cuenta las diferencias entre los sistemas de representación semiótica usados para analizar los procesos de pensamiento complejos y específicos que están implicados en la actividad matemática. Como Duval (2016, p.72) expresa: “Lo que interesa para comprender los procesos de pensamiento involucrados en cualquier actividad matemática es enfocarse en el nivel de los sistemas de representación semiótica y no en la representación particular producida”.

Para el investigador, existen cuatro tipos muy diferentes de sistemas semióticos, los que denomina registros de representación: Lengua materna, registro algebraico, registro gráfico y registro numérico. Un sistema semiótico es un registro solo si permite tres actividades cognitivas, fundamentales:

La formación de una representación semiótica es basada en la aplicación de reglas de conformidad y en la selección de algunas características del contenido involucrado.
El tratamiento de una representación es la transformación de representaciones que ocurren dentro del mismo registro. El tratamiento es, entonces, una transformación interna en un registro.

Duval (2016) resalta el hecho de que los tratamientos que se realizan dependen especialmente de las posibilidades de transformación semiótica que son específicos para el registro utilizado.

La conversión de una representación es una transformación de esta representación en una representación de otro registro.

Según Duval (2016), la conversión es más compleja que el tratamiento, “La conversión requiere implícitamente siempre que se deban usar juntos, de manera interactiva, dos registros o incluso tres” (Duval, 2016, p. 75). Asimismo, para el investigador disponer de varios registros de representación no es suficiente para garantizar la comprensión. Una segunda condición se hace necesario y es la coordinación de representaciones formuladas en diferentes registros.

Método

Nuestro trabajo se sitúa dentro de una metodología cualitativa, que trata de identificar la naturaleza profunda de las realidades, su estructura dinámica, aquella que da razón plena de su comportamiento y manifestaciones, según lo indica Martínez (2006). En particular la metodología cualitativa descriptiva, según Hernández, Fernández y Baptista (2010), busca especificar las propiedades y las características de cualquier fenómeno que se someta a análisis. En nuestro caso nos interesa describir de manera detallada cómo ocurre la comprensión del concepto de derivada.

Los procedimientos metodológicos seguidos fueron: búsqueda de la literatura, tratando de comprender mejor el tema y/o problema de investigación (comprensión del concepto de la derivada), planteamiento de hipótesis para la reflexión y discusión del tema investigado (diseño de actividades), levantamiento de información recolectada en una realidad observada (observación a participantes), utilización de diferentes instrumentos para colectar la información recogida en la realidad observada (actividades usando el software GeoGebra).

Análisis didáctico de las actividades

En este apartado presentaremos el análisis didáctico de cuatro actividades, para realizar este análisis hemos tomando aspectos de la teoría de registros de representación semiótica. La primera y la segunda actividad han sido adaptadas de Silva (2012), que consisten en una aproximación del paso de la tasa de variación media a la tasa de variación instantánea, y las otras dos actividades hacemos uso de la derivada.

Actividad 1

Se observa que inicialmente el volumen del agua en un tanque es de 100 litros. Este es abastecido por un caño cuyo flujo de agua es constante e igual a 10 litros por minuto y, simultáneamente, su contenido se vacía por un sumidero, cuyo flujo de agua es controlado a razón constante de 15 litros por minuto.

a) Exprese, por medio de una expresión matemática, el volumen de agua v después de t minutos.
b) Usando las herramientas del software GeoGebra, represente gráficamente la expresión $y = 100 - 5x$. Luego realice las siguientes acciones:
   i. En el gráfico marque un punto cualquiera en el eje x, renombra ese punto con la letra A, trace una recta perpendicular al eje x pasando por A y determine su intersección con la gráfica de la recta.
   ii. Renombre esa intersección con la letra B y trace una recta perpendicular al eje y pasando por B, a continuación, mueva el punto A y responda:
      - ¿Qué puede afirmar si las variables de la ecuación de la recta dada ahora representan las variables consideradas en el ítem a)? Indique los valores que puede asumir t en el contexto de esta actividad.
      - Cuando los valores de x aumentan una unidad, ¿cuántas unidades varían los valores correspondientes a y?
   iii. Seleccione la herramienta “pendiente”, haga click sobre la recta que representa gráficamente la función v. Calcule la razón entre las medidas del segmento vertical y el segmento horizontal. ¿Qué se puede observar entre esa razón y la variación del volumen de agua del tanque cuando los valores del tiempo aumentan una unidad?

Análisis Didáctico

La actividad tiene como propósito que los estudiantes perciban la tasa de variación de $v(t)$ en relación a t, cuando los valores de t aumentan una unidad en cualquier instante. Además, por medio de la representación gráfica de la función v, que el estudiante afirme que la tasa de variación corresponde a la pendiente de la recta.

En el ítem a) esperamos que los estudiantes determinen la relación de dependencia entre las magnitudes dadas, realizando una conversión de la representación de la función volumen del registro en lengua natural al algebraico.

En el ítem b) se espera en primer lugar, que el estudiante teniendo la representación gráfica de la ecuación $y = 100 - 5x$ conciba una correspondencia entre las variables x, y con t y v respectivamente, para luego determinar la restricción del modelo. En segundo lugar, por medio de tratamientos en dicho registro el estudiante perciba que al hacer variar los valores del tiempo una unidad, los valores del volumen disminuyen en cinco unidades, y que dicha variación es constante. Finalmente, se espera que el estudiante determine la tasa de variación de y en relación a x por medio del cociente entre las medidas de los catetos del triángulo obtenido por la herramienta "pendiente", y perciban intuitivamente que la tasa de variación de $v(t)$ en relación a t corresponde a la pendiente de la recta $y = 100 - 5x$.

Actividad 2

En un circuito de carreras de motos se realizó una prueba de velocidad a fin de verificar si se encuentra en condiciones óptimas. Se constató que su movimiento, en un intervalo de tiempo relativamente pequeño, obedece la función $s(t) = -\frac{1}{t}$, s en metros y t en segundos.

a) En GeoGebra, construya el gráfico de la ecuación $y = -\frac{1}{x}$, que representa la función que describe el movimiento de la moto, luego:
- Ubique en el gráfico de la ecuación las coordenadas de un punto fijo A que tiene abscisa igual a 1. Para fijar el punto haga click izquierdo sobre el punto, seleccione propiedades y luego marque objeto fijo. Determine la ordenada del punto A.
- Grafique un punto P cualquiera sobre el gráfico, luego trace la recta AP. Para esto, haga click en el ícono 
- Trace una recta, L_1, perpendicular al eje Y que pasa por el punto P. Luego, trace la recta L_2 perpendicular a L_1 por el punto A. Indique el punto de intersección de las rectas anteriores. Renombra a este punto con la letra B. En seguida, calcule la razón entre los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{PB}$. *Esta razón representa la variación media entre la medida de dichos segmentos*.
- Seleccione la herramienta "*pendiente*" y haga click sobre el gráfico de la recta AP. ¿Qué relación existe entre el valor hallado en iii) y la medida de esta pendiente?
- Deslice el punto P sobre la curva en dirección al punto A, ¿a medida que el valor de *x* se acerca cada vez más a *1* cómo varía la medida del segmento $\overline{PB}$?

b) Denota la medida del segmento $\overline{PB}$ por Δt, ¿qué significa Δt?

c) Considere el intervalo de tiempo [1; 1+Δt], determine la expresión matemática que representa la velocidad media de la moto en ese intervalo de tiempo. Si Δt se acerca a 0, ¿a qué valor se aproxima la velocidad media?
d) Escriba la ecuación de la recta *r* que pasa por el punto $A(1,-1)$ y tiene como pendiente el valor de la velocidad media hallado en c).
e) En GeoGebra, grafique la recta *r*, encuentre su pendiente usando la herramienta respectiva. Compare su resultado con el hallado en d).

Análisis Didáctico

Esta actividad tiene como propósito que los estudiantes identifiquen la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $s(t) = -1/t$ en el punto A(1,-1) como la tasa de variación instantánea de $s(t)$ en el instante *t=1*.

Esperamos que en el ítem (a) los estudiantes relacionen la pendiente de la recta secante con la medida de la variación media. Para esto, mediante tratamientos en el registro gráfico los estudiantes conjeturan propiedades que los lleva a afirmar la relación deseada.

El estudiante en el ítem (b) podría percibir que Δt es la longitud de un intervalo de tiempo cuando *x* se acerca a *1*. En el ítem (c) esperamos que el estudiante utilice la representación de la función en el registro gráfico para encontrar la variación media en el intervalo dado. Además, suponemos que el estudiante determina el valor aproximado de la velocidad en *t=1*. Además, esperamos en el ítem (d) que el estudiante en el registro algebraico determine la representación de la recta r y en el ítem (e) podría relacionar el valor de la pendiente de la recta tangente a la función en *t=1* con la velocidad instantánea en ese punto.

Actividad 3

Considere la función $f(x) = \sqrt{x}$.
a) Usando la vista gráfica del software GeoGebra grafique f.
b) Ubique el punto $A(1,1)$ sobre la gráfica de f y grafique la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 1$.
c) ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente representada por L_1 que aparece en vista algebraica?
d) Grafique un punto P cualquiera sobre el gráfico de f. Trace una recta L_2 perpendicular al eje x que pase por el punto P y localice Q punto de intersección entre las rectas L_1 y L_2.
e) Deslice el punto P sobre la gráfica de la función f e indique qué sucede con la longitud del segmento $\overline{PQ}$ cuando se aproxima al punto A.
f) Use la herramienta propiedades para mostrar las coordenadas del punto Q, luego ubique el punto cuando la abscisa del punto es 1.17. ¿Cuál es la ordenada en ese valor?
g) ¿Qué significa la ordenada hallada en el ítem anterior?

Análisis didáctico

En esta actividad se pretende que el alumno observe que alrededor del punto de tangencia, las representaciones gráficas de la recta tangente y de la función se encuentran próximas para puntos cercanos a dicho punto. Usando esta idea, podemos obtener algunos valores aproximados de la función utilizando la recta tangente.

En los ítems a) y b) se pretende usando la vista gráfica que el alumno grafique la función raíz cuadrada y su recta tangente en el punto $A(1,1)$.

El ítem c) tiene por finalidad que el alumno conozca la regla de correspondencia de la función recta tangente usando la vista algebraica.

En el ítem d) pretendemos localizar un punto cualquiera sobre la curva, trazar la recta L_2 que pase por dicho punto y sea perpendicular al eje x para luego determinar el punto de intersección entre la recta L_2 y la recta tangente obtenida en b). El ítem e) tiene por finalidad que el alumno al desplazar el segmento $\overline{PQ}$ note que la longitud de este segmento se aproxima a cero cuanto más cerca está del punto A. En el ítem f) se espera que el estudiante haga zoom para localizar el punto Q, y concluya que la ordenada de Q cuando su abscisa es 1.17 es 1.09. En el ítem g) se espera que el alumno interprete el valor de la ordenada hallado en el ítem f) y que concluya que dicho valor es una aproximación de $\sqrt{1.17}$ ya que al haber usado zoom se debe haber dado cuenta que siempre hay una distancia entre la recta y la curva por más mínima que sea.

Actividad 4

Abra el archivo Actividad 4.ggb. En la vista gráfica 3D se muestra un cilindro circular recto inscrito en un cono circular recto de 6 cm de altura y 3 cm de radio de su base. Además, en la vista gráfica se muestra un deslizador h que permite modificar la altura del cilindro inscrito.
Manipule el deslizador h en la vista gráfica y responda lo siguiente:
a) ¿Qué valores puede tomar la altura h del cilindro inscrito? Explique.
b) ¿Qué valores puede tomar el volumen V del cilindro inscrito? Explique.
Observe la vista gráfica 2 donde se muestra un plano cartesiano con eje horizontal h y eje vertical V, y un punto P de coordenadas (h, V). Active el rastro del punto P, manipule el deslizador h y responda lo siguiente:
c) Describa la trayectoria que recorre el punto P.
d) Observando las distintas posiciones que toma el punto P, ¿es posible determinar el máximo valor que puede tomar V? Si es posible, diga para qué valor de h ocurre esto. Explique.
e) En la vista gráfica 2, trace la gráfica de la función f definida por $f(x) = \pi\left(\frac{6-x}{2}\right)^2 x$ y describa la relación que existe entre esta gráfica y la trayectoria que describe el punto P.
f) Determine la función volumen V en términos de la altura h. Luego, haga el cambio de variable $h = x$ y trace la gráfica de la función V en la vista gráfica 2. Responda lo siguiente:
   - f1) ¿Es posible trazar una recta tangente a la gráfica de V que sea horizontal? Si es posible, trace dicha recta y denote el punto en qué ocurre con la letra T.
   - f2) Explique la relación que existe entre la pendiente de la recta tangente trazada en el ítem anterior y la derivada de la función V en la abscisa del punto T. ¿Qué ocurre en dicho punto?
   - f3) Indique cuál es el máximo valor que puede tomar V y para qué valor de x ocurre este máximo. Justifique.

Análisis didáctico

Esta actividad tiene como propósito que los estudiantes utilicen el concepto de derivada para determinar el volumen máximo de un cilindro circular recto inscrito en un cono de dimensiones constantes. En el ítem (a) esperamos que determinen los posibles valores que puede tomar la altura h. En el ítem (b) esperamos que los estudiantes determinen los posibles valores que puede tomar el volumen V. En el ítem (c) esperamos que apoyados de la opción rastro del GeoGebra identifiquen la trayectoria que describe el punto P, cuyas coordenadas relacionan la altura h y el volumen V del cilindro inscrito. En el ítem (d) esperamos que de manera exploratoria descubran el volumen máximo del cilindro inscrito y para qué valor de h ocurre esto. En el ítem (e) esperamos que tracen una función dada y reconozcan que dicha gráfica contiene a los puntos descritos por el punto P. En el ítem (f) esperamos que determinen la función volumen V en términos de la altura h tomando en cuenta las restricciones del problema dado. Luego, esperamos que hagan el cambio de variable indicado para que puedan graficar en GeoGebra la función volumen V en términos de x. En el ítem (f1) esperamos que tracen una recta tangente horizontal a la gráfica de V y reconozcan de manera gráfica que en este punto de tangencia ocurre el máximo volumen. En el ítem (f2) esperamos que expliquen la relación que existe entre la pendiente de la recta tangente horizontal y la derivada de la función V en la abscisa del punto de tangencia. Asimismo, esperamos que reconozcan que en el punto de tangencia de la recta horizontal se da el volumen máximo del cilindro inscrito. En el ítem (f3) esperamos que indiquen el volumen máximo que puede tomar el cilindro inscrito y el valor de la altura donde ocurre dicho volumen. En conclusión, esperamos que los estudiantes comprendan y usen el concepto de la primera derivada para optimizar, en nuestro caso, para hallar el volumen máximo de un cilindro inscrito circular recto en un cono circular recto de dimensiones constantes.

Consideraciones finales

Durante el desarrollo del taller observamos que los participantes se familiarizaron con el concepto de derivada a partir de representaciones gráficas, relacionándola con la interpretación de la pendiente de la recta tangente y con la razón de cambio instantánea; además, usaron el concepto de la derivada en aplicaciones relacionadas con la aproximación lineal y con la optimización, realizando en primer lugar manipulaciones en el registro gráfico y luego en el registro algebraico.

Por otro lado, el uso del GeoGebra facilitó la visualización de los objetos matemáticos involucrados con la interpretación del concepto de la derivada debido a su dinamismo y flexibilidad para realizar cambios de manera inmediata y para verificar conjeturas.

Referencias bibliográficas

Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En Duval y Sáenz-Ludlow (Eds.) *Comprensión y Aprendizaje en matemáticas: Perspectivas Semióticas Seleccionadas*, Capítulo 2, p. 61-94. Colombia.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación* (5ª Ed.). México: McGraw Hill Educación.

Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (síntesis conceptual). *Revista IIPSI*, 9, 123-146.

Ruiz, K; Córdoba, Y. y Rendón, C. (2014). La comprensión del concepto de derivada mediante el uso de GeoGebra como propuesta didáctica. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, *1(1),* 125-130.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), 267-296.

Silva, E. (2012). *Uma proposta para o ensino da noção de taxa de variação instantânea no Ensino Médio*. Tesis de maestría no publicada, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

POSIBLES PERSPECTIVAS PARA PROFUNDIZAR EN EL CAMPO DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Esperanza Lozada
Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de los Lagos, Osorno. (Chile)
elozada@udec.cl

Resumen
En este ensayo se revisa la teoría de resolución de problemas y con la finalidad de dar un impulso al aparentemente estancado desarrollo de esta línea de investigación de la educación matemática se proponen tres posibles vías o perspectivas de investigación dentro de la teoría, las cuales permitirían dar saltos cualitativos en la construcción de una teoría de resolución de problemas más completa y por ende más compleja. En primer lugar se propone el estudio del nexo de la resolución de problemas con la creatividad en matemática, como una segunda vía el análisis de la relación de la resolución de problemas con la construcción de pruebas matemáticas formales y en una tercera opción es estudiar de manera integrada la resolución de problemas, la creatividad y la prueba matemática. La prueba y la creatividad se presentan con mayor frecuencia en la enseñanza de la matemática de nivel universitario y son de gran utilidad para la generación de nuevo conocimiento disciplinar matemático.

Palabras clave: resolución de problemas, creatividad, prueba matemática

Abstract
In this work, we review the problem solving theory with the aim of making a boost to the apparently stagnant development of this research line in mathematics education. We propose three new possible research ways or perspectives in this theory, which would contribute to the qualitative development of a more complex problem solving theory. First, we propose to study the link of problem solving with creativity in mathematics. The second perspective is the analyses of the relationship of problem solving with the construction of formal mathematical proofs. And the third option of development is the integrated study of problem solving, creativity in mathematics and mathematical proof. The creativity and the proof are more frequently used in mathematics teaching at the university level and they are very useful in the generation of new mathematical knowledge

Key words: problem solving, creativity, mathematical proof

Introducción

La investigación de la resolución de problemas es un área de investigación con una historia de aproximadamente setenta años, si es que se cuenta desde el primer trabajo de Polya (1945). A lo largo de todos estos años hubo periodos marcados con una mayor actividad. En este sentido, se puede señalar que hubo una ligera actividad por la investigación de esta temática en la década de los 50 y los 60. Este hecho fue motivado por la búsqueda de heurísticas para la resolución de problemas por parte de Polya (Voskoglou, 2011). Luego un gran crecimiento de la teoría se dio a partir de la década de los 80, el cual fue motivado por distintos factores. Entre ellos se pueden señalar, por ejemplo, los dos siguientes: (i) en esta época se publicaron los resultados de la investigación conducida por Schoenfeld (1985) y (ii) La "National Council of Teachers of Mathematics" puso a la resolución de problemas en su agenda para la década de los 80 (*Nacional Council of Teachers of Mathematics, 1980*). En la época posterior a los 80 y hasta el 2008 la motivación por investigar sobre la teoría de resolución de problemas permaneció como una de las líneas principales de desarrollo de la Educación Matemática. En particular como lo señalan English y coautores (English, Lesh y Fennewald, 2008) que la resolución de problemas es una teoría que ha recibido más de cincuenta años de atención y que en la mayor parte de casos sólo ha tenido embellecimientos y no cambios profundos, por lo cual debe enfrentar con claridad una refundación en sus principios. Además de esto los autores exponen cinco factores que en su opinión son los limitantes causales para que la teoría de resolución de problemas aparezca como en un periodo de estancamiento en su evolución y así mismo proponen dos perspectivas claras: el cambio en los curriculums y el uso de los modelos y el modelamiento matemático. Entre el 2008 y la actualidad la investigación hacia el modelamiento matemático se ha tornado como una tendencia mundial muy marcada (*Huicahue y Mena-Lorca, 2015*).

Por otro lado, desde el punto de vista de las políticas públicas educativas mundiales, ha existido un claro favoritismo para desarrollar esta teoría. En un aspecto global se puede señalar que lo documentado en relación a uno de los objetivos específicos de la prueba PISA (OECD, 2014) establece que:

La prueba PISA une (y evalúa) el concepto de cultura matemática para referirse a la capacidad de los estudiantes para analizar razonar y comunicar efectivamente la formulación, solución e interpretación de problemas en una variedad de situaciones que involucran conceptos cuantitativos, espaciales, probabilísticos o matemáticos.

Es claro entonces que la enseñanza basada en la resolución de problemas permitiría lograr este objetivo específico, debido a que presenta todas estas características. Ahora, de manera más local, en Chile, de acuerdo a los Estándares Pedagógicos y Disciplinares desde el 2012 (MINEDUC, 2012) los objetivos de aprendizaje deben considerar transversalmente cuatro habilidades matemáticas: resolver problemas, argumentar y comunicar, modelar y representar. Es así que el desafió de investigar sobre la resolución de problemas se ve favorecida de manera explícita por este objetivo y por ende a adquirido un rol protagónico en los distintos niveles: la formación matemática en la enseñanza básica, la formación de los futuros profesores de matemática, la formación de los futuros científicos en matemática o áreas afines y la capacitación en resolución de problemas de docentes en ejercicio de la profesión y que fueron formados bajo otros enfoques de la práctica de enseñanza de la matemática.

En este trabajo, aprovechando este ambiente favorable retomamos lo expresado por English y coautores (English *et al*, 2008) sobre la refundación de la teoría de resolución de problemas proponemos dos perspectivas en las cuales es meritorio realizar una profundización de esta: la creatividad y las pruebas formales en matemática. Ambas áreas de investigación y de acuerdo a nuestro conocimiento han sido poco exploradas. Uno de los motivos, que en nuestra opinión, han contribuido a que haya poca investigación en estas áreas es que la resolución de problemas se ha investigado en la enseñanza de la matemática a nivel de la enseñanza básica, media y universitaria de primeros años pero no a nivel de la matemática universitaria avanzada. En la matemática universitaria avanzada es algo fundamental el desarrollo de pruebas matemáticas formales y la creatividad.

El trabajo es organizado como sigue: en la sección 2 se presenta una revisión de la creatividad y la prueba en matemática, en la sección 3 se presenta un plan de investigación y en la sección 4 se presentan algunas conclusiones.

Aspectos teóricos

El trabajo es centrado en tres conceptos: resolución de problemas, creatividad en matemática y la prueba en matemática. El primero de estos conceptos es claramente establecido y difundido, en cambio los otros dos merecen ser precisados y es algo que describiremos en esta sección.

La creatividad en matemática.

(Erkii, 1997) realizó una revisión acerca del estado del arte sobre la creatividad matemática. En este estudio partió estableciendo lo que se entiende por creatividad. En esta revisión pone en contexto todas las posibles acepciones del término. En primer lugar deja claro que la creatividad no solamente forma parte de los artistas o de los científicos, si no que forma parte de la vida diaria de toda persona. Así mismo aclara sobre la creencia típica que la matemática es una repetición de conocimientos inventados y que se repiten de acuerdo a reglas ya establecidas y en este contexto la creatividad no juega ningún rol y que aún hay quienes piensan que creatividad y matemática no tienen nada de relación la una con la otra. Posteriormente, el autor expresa que existen al menos dos maneras complementarias de pensar en matemática: pensamiento creativo y pensamiento analítico. El primero de estos es guiado por la intuición y el segundo por la lógica. Es así que el autor enfatiza que la creatividad es una acción intrínseca al aprendizaje y desarrollo de la matemática y que puede presentar distintos niveles, de acuerdo con las exigencias de pensamiento necesarios para resolver un problema. Además, (Erkki, 1997) señala que no hay una definición científica común aceptada para la creatividad, existiendo diversas versiones y que probablemente la más universal de estas es la siguiente: “acto por el cual un individuo está produciendo algo nuevo e impredecible” (Bergström, 1991).

Otro de los aspectos interesantes del trabajo de (Erkki, 1997) es que establece un nexo de la creatividad con la resolución de problemas. El nexo lo hace explicito y argumenta que la resolución de problemas fomenta la creatividad. Sin embargo, no cita a ningún trabajo que valide esta afirmación. Es así que hay un espacio abierto que necesita ser validado científicamente con estudios profundos.

En las últimas dos décadas la enseñanza y el aprendizaje de la geometría tuvo un avance significativo, este avance es gracias a los diversos ambientes de geometría dinámica (DGE); tales como: Cabri, derive, etc. Estos ambientes como se conoce presenta espacios que permiten al docente generar actividades y tareas que ayuden al estudiante a trabajar con conceptos matemáticos a través de lo experimental. En particular, referimos el trabajo de (Santos-Trigo, 2008), quien investiga resolución de problemas haciendo uso de recursos tecnológicos. En ese trabajo el autor distingue dos etapas. Una primera etapa donde las tareas, problemas o actividades son de tipo rutinario, es decir los estudiantes están más centrados en explorar y aprender a manipular el software. En una segunda etapa el estudiante ya no toma en cuenta el aprendizaje del software y aprovecha esta herramienta como una oportunidad para poder identificar y explorar diversas relaciones matemáticas. Es claro que el autor genera ambientes que estimulan la creatividad. Sin embargo la creatividad como tema de investigación no es parte del objetivo de la investigación desarrollada por el autor. Además, el trabajo de este artículo es totalmente posible de ser modificable y centrarlo en estudiar la creatividad porque permite en el estudiante desarrollar dimensiones fundamentales de la creatividad tales como: fluidez, flexibilidad y novedad. Así, que se podría estudiar el grado con el cual se desarrollan estas dimensiones y qué relación tienen con el desarrollo de la creatividad en sí.

Otra manera de fomentar la creatividad es a través de actividades basadas en el uso de material concreto y que son frecuentemente utilizadas en la vida cotidiana. En este caso se deben crear actividades, las cuales a través de diversas representaciones de los objetos matemáticos que se encuentran en el mundo real, puedan ser llevadas a un ambiente geométrico, propiciando un proceso de reflexión y argumentación, siendo esta una de las características esenciales del razonamiento humano y en consecuencia de su creatividad.

Al estudiar la creatividad aparece de manera natural una pregunta ¿Cómo medir la creatividad? La respuesta a esta inquietud es tan compleja como medir el razonamiento humano. Sin embargo, en las últimas décadas se han desarrollado formas de hacerlo, desde distintos enfoques. Una síntesis de esto aparece en el trabajo de (Nilsson, 2012), en donde se muestran cuatro modelos para medir la creatividad. Sin embargo, este enfoque preliminar de medición puede ser profundizado aun más si se utilizara las ideas de M. Gr. (Voskoglou, 2014) para medir la incertidumbre. En el trabajo de (M. Gr. Voskoglou, 2014), se presenta un modelo difuso que le permite describir las etapas del proceso de razonamiento humano: imaginación, visualización e innovación. Este modelo, a través de un cálculo de probabilidad, entrega los posibles perfiles cuantitativos y cualitativos del razonamiento humano.

La prueba en matemática

Es ampliamente conocido que matemática existen distintos lenguajes de comunicación de los resultados, entre ellos figuran, por ejemplo, el lenguaje aritmético, el lenguaje algebraico, el lenguaje geométrico y en cada uno de estos hay niveles desde el nivel informal que no es estructurado hasta el nivel formal donde existe una estructura formal. En el último de estos niveles se encuentran lo que se conoce como prueba matemática y que tiene una estructura formal y puede estar expresada en cualquiera de los lenguajes utilizados para comunicar los resultados matemáticos.

No existe ninguna definición formal sobre “prueba matemática”, pero si existe una extensa discusión sobre su naturaleza y existen distintas aproximaciones, las cuales están diseminadas en el volumen 15 del ICMI (Hanna, G., Villiers, M., 2012) y también previamente en el trabajo de G. Hanna y H. N. Jahnke (1996). Entre otros aspectos, en este trabajo se señala que la prueba matemática es un constructo social y así se podría aceptar como definición de prueba matemática: “una secuencia lógica argumentativa se llama una prueba matemática después del acto social de aceptarlo como prueba escrita en un lenguaje formal”. En consecuencia, el hecho de que exista una prueba matemática depende de varios factores entre ellos de la comunidad matemática, la cual es la que valida cuando esta es verdadera o falsa.

En el contexto de educación matemática se debe señalar que la prueba matemática como uno de los aspectos didácticos para enseñar matemática también ha sido utilizada en distintas épocas de manera implícita o explícita. Uno de estos trabajos es el desarrollado por Heinze y Reiss (2004) para el nivel secundario. En este trabajo, los autores realizan un estudio del arte que resulta interesante. Además se enfocan en el desarrollo de competencias argumentativas y desde el punto de vista cualitativo. A pesar de ser concreto el estudio, en el sentido que se establece una población específica con seis etapas de análisis específico, es necesario realizar un estudio de tipo cualitativo que dé cuenta de las distintas categorías del pensamiento necesario al desarrollar las pruebas matemáticas.

Por otro lado, hemos encontrado solamente el trabajo de Oldenburg, K. R, and Freinburg, A. R. (2002) el cual vincule la resolución de problemas con la "prueba matemática" en su análisis pero no en la práctica.

Propuesta

En base a lo discutido previamente es claro que existe la posibilidad de investigar sobre la resolución de problemas y su nexo con la creatividad en matemática y la prueba en matemática. Más precisamente se plantea lo siguiente:

A) El primer proyecto seria investigar sobre la conjetura de Erkki (1997) al afirmar que existe un nexo entre la creatividad y la resolución de problemas al establecer que "la resolución de problemas fomenta la creatividad". En este sentido sería conveniente hacer estudios en distintos niveles de enseñanza de la matemática y que permitan validar o refutar esta afirmación. En particular, de manera cualitativa sería conveniente establecer los distintos estados de creatividad que se pueden lograr con un determinado tipo de problemas matemáticos.
En este contexto sería necesario también avanzar en el sentido de definir con mayor precisión la creatividad en matemática. En particular para realizar estudios de tipo cuantitativo sería necesario tener una medida de la creatividad, probablemente definiendo "niveles de creatividad" o "grados de creatividad".

B) Un segundo proyecto es la investigación sobre la prueba matemática y su relación con la resolución de problemas. El trabajo de Oldenburg y Freinburg (2002) establecevarias características para "la prueba matemática" y su utilización en la enseñanza de la matemática. En particular cita al trabajo de Bero (1999), el cual establece seis etapas diferentes de la prueba matemática:

1. *Conjetura.* El establecimiento de la conjetura es una fase en la cual se hace un estudio de la situación problemática y la identificación de los argumentos que soportan la evidencia.
2. *Formulación de las condiciones.* En esta fase se establecen de manera precisa las conjeturas y estas formaran la base de las actividades de las siguientes fases.
3. *Exploración*. En esta etapa se hace ejemplos o casos particulares de la situación general que se está probando.
4. *Selección de argumentos*. En esta etapa se establecen los argumentos lógicos para la prueba y se hace la combinación en una cadena inductiva de todos estos.
5. *Organización de los argumentos*. En esta etapa se revisa la cadena argumentativa y se preocupa que este acorde de los argumentos matemáticos estándar.
6. *Propuesta de una prueba*. Se propone la prueba matemática formal.

Es necesario destacar que Oldenburg y Freinburg (2002) en defensa del modelo de Bero (1999) establecen una comparación con el trabajo de Shoenfeld (1993). Además para diferenciarse del trabajo de Polya establece que las etapas de 1 hasta 6 en el trabajo de Bero (1999) no son lineales, es decir que no necesariamente se dan en esa secuencia y que es posible conectar una con otra etapa en orden distinto al establecido por la enumeración.

Otra de los aspectos interesantes del trabajo de Oldenburg y Freinburg (2002) es que establece que la "prueba matemática" en educación matemática tiene un objetivo distinto al utilizado en la investigación en matemática. El establecimiento de esta diferencia no es claro de manera inicial y es bueno que se establezca. El objetivo en ciencia es establecer una prueba matemática para ser publicada en una revista especializada o para una comunidad técnicamente preparada. En cambio en la sala de clase la prueba matemática tiene como objetivo que los estudiantes creen los argumentos lógicos suficientes que confirmen el aprendizaje de un determinado concepto matemático y además estos lo comuniquen adecuadamente en su comunidad.

El modelo de Bero (1999) y el análisis preliminar de Oldenburg y Freinburg (2002) por establecer el paralelo con el trabajo de resolución de problemas de Shoenfeld (1993) marca la primera fase de un estudio que merece ser profundizado. El trabajo establece que hay similitudes en ambos enfoques. Así que en un primer trabajo seria de vital importancia buscar diferencias a nivel de los fundamentos teóricos si es que estas existen. Posteriormente, sería conveniente realizar estudios que comparen las diferencias o similitudes de su aplicación en la sala de clase.

C) Un tercer proyecto sería el estudio de la relación entre prueba matemática, la resolución de problemas y la creatividad matemática. Un estudio de estos tres conceptos de manera integrada llevaría a establecer un avance de la teoría de resolución de problemas.

Estas vías de exploración para la resolución de problemas presentan una ventaja transversal en el sentido que puede ser aplicados en distintos niveles de enseñanza de la matemática, de la enseñanza básica hasta la universitaria avanzada e inclusive en el desarrollo de la matemática como ciencia, dado que la prueba y la argumentación lógica son altamente importantes en la enseñanza de las asignaturas avanzadas de los futuros científicos.

Conclusiones

El estudio de la teoría de resolución de problemas se encuentra en un punto de evolución tal que es necesario proponer perceptivas de investigación que le permitan salir de este estancamiento. Es así que en este trabajo se establece la exploración de su nexo con otros dos conceptos utilizados en la educación matemática: la creatividad y la prueba matemática. Además, se hace una revisión preliminar del estado del arte que compara estos tres conceptos y se establece que hay una necesidad de profundizar estos trabajos.

Referencias bibliográficas

Bero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof.* 7/8

Bergström, M. (1991): Luovuus ja aivotoiminta (Creativity and brain function).—In: R. Haavikko; J.-E. Ruth/ Eds., *Luovuuden ulottuyuudet (Dimensions of creativity).* pp. 159-172.

Hanna, G.; Jahnke, H. N. (1996): Proof and proving.—In: Bishop, A. J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., Laborde, C. (Eds.), *International handbook of mathematics education*. Vol. 4, Pt. 2. Dordrecht:

Kluwer, pp. 877–908.
Hanna, G., & Villiers, M., (2012). *International Handbook of Mathematics Education, Vol 15 (Proof and Proving in mathematics educations).* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers,
Heinze, A. & Reiss, K. (2004). The teaching of proof at the lower secondary level—a video study. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik , 36*, 98-104.
Huicahue, J., y Mena-Lorca, J. (2015) Modelacion matemática en la formación inicial de profesores, *Actas XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática*, Villarrica, Chile, 2015, pp. 184-191
English, L., and Lesh, R., and Fennewald, T. (2008). *Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development*. Paper presented for TSG 19 at the International Congress on Mathematics Education, Monmterrey, Mexico, July 6-13.
Erkii P, H. (1997). The state-of-art in mathematical creativity. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 29*: pp 63-67.
Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económica. (2014), *PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do – Student Performance in Mathematics, Reading and Science* (Volume I, Revised edition, February 2014), PISA. OECD Publishing. doi: 10.1787/9789264201118-en.
Ministerio de Educación (2012). *Curriculum en linea*. Visitado el 12 de Enero de 2015, http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/w3-propertyvalue-49395.html
Nacional Council of Teachers of Mathematics (1980). *An agenda for action: Directions for school mathematics for the 1980s*. Reston, VA.
Nilsson, P. (2012). *Four Ways to Measure Creativity. Sense and Sensation Writing on Education, Creativity, and Cognitive Science*. http://www.senseandsensation.com/2012/03/assessing-creativity.html
Oldenburg, K. R, and Freinburg, A. R. (2002) Learning to prove: the idea of heuristic examples, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *34*, 29-35.
Polya, G.(1945). *How to solve it?* USA: Princeton.
Schoenfeld, A. H. (1985) . Orlando, FL: Acedemic Press.
Schoenfeld, A. H. (1993). Learning to think Mathematically. In D. G. Grouws, (ed.) *Handbook of reserach in mathematics teaching and learning* (pp. 334-370) New York, NY: Macmillan.
Voskoglou, M. Gr. (2011) Problem-solving from Polya to nowadays: A review and future perspectives, In Nata, R. V. (Ed.): *Progress in Education*, Vol.22, Nova Publishers, NY, Chapter 4, pp.65-82

REPRESENTACIONES MATEMÁTICAS EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO: UNA VISIÓN DESDE EL COTIDIANO

Francisco Emmanuel González Ángeles, Erendira Hernández Lemus
Dirección de Investigación y Docencia del Colegio Japonés de Morelos. Universidad Politécnica de Morelos. (México)
fga_1994@hotmail.com, ehernandezl@upemor.edu.mx

Resumen
Las apreciaciones que se han formado estudiantes de bachillerato acerca de las matemáticas son objeto de estudio en esta investigación mixta con carácter exploratorio. Su propósito es describir estas representaciones expresadas, el uso cotidiano y la significación matemática. Se adopta la perspectiva teórica de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa desde el cotidiano y estudios de creencias manifestadas vía la representación. Los resultados reportan que el discurso matemático escolar prevalece como una perspectiva limitada con bases mínimas de un pensamiento crítico reflexivo. Finalmente se reflexionan las consecuencias de estas ideas al adoptar una forma matemática de pensar y hacer.

Palabras clave: usos, percepción, pensamiento, transposición, innovación

Abstract
The assessment that high school students have made with respect to mathematics constitute the subject matter of this mixed research which has an exploratory nature. It aims to describe the students' mathematical representations, their daily use and mathematical meaning. This research is based on the theoretical perspective of the socio-epistemological theory of mathematical education from its daily use, as well as the studies of beliefs shown via representation. The results revealed that school mathematical discourse prevails as a limited perspective with very few bases on reflective thinking. To conclude we reflect on the consequences of these ideas when adopting a mathematical way of thinking and doing

Key words: uses, perception, thinking, transposition, innovation

Introducción.

El próximo ingreso a la universidad es algo que compromete a ir tras las huellas de las valoraciones personales que se hacen de la matemática los posibles próximos universitarios siendo este el objeto de estudio en esta investigación. La realidad en América Latina de acuerdo a los registros que reporta la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) es que por cada 100 estudiantes de entre 15 y 19 años, 35 desertan. Uno de los principales factores de deserción es el bajo rendimiento académico que se tiene durante los primeros ciclos de formación, pues en ellos se cursan las asignaturas de tronco común donde aparecen las matemáticas. De acuerdo con la Cámara de Diputados (2015), México presenta índice de deserción escolar de 50%, uno de los más elevados en nuestro continente.

Aunque los factores son diversos, se le atribuyen a la complejidad de las ciencias exactas esos resultados (Rivas, 2005). Ante este panorama la Secretaría de Educación Pública (SEP) propuso la ruta de mejora como estrategia que pretende realizar cambios en la calidad educativa para detectar problemáticas en la calidad del proceso de enseñanza y aprendizaje, dentro de la cual existe un rasgo de normalidad mínima que hace referencia a el desarrollo del pensamiento matemático y dominio de las matemáticas de acuerdo al nivel de educación básica. Es así como problemáticas didácticas de este nivel se heredan en algunos casos a los estudiantes de bachillerato siendo determinantes en la elección de su carrera profesional o decidirse por alguna otra actividad no académica. En algunas de esas decisiones los estudiantes perciben poca practicidad de la disciplina pues no encuentran razón para ver la matemática como una herramienta de uso en su vida cotidiana.

En este contexto se tiene como propósito dar cuenta de las representaciones, usos y atribuciones que desde su cotidiano expresaron estudiantes de bachillerato de una escuela privada en el Estado de Morelos. Ocupa a los autores de la presente contribución prospectar una concepción idónea de la disciplina por considerarla transversal a cualquiera área del conocimiento a la que se vayan a perfilar los bachilleres.

Es por ello que se propone la siguiente investigación con la intención de construir un precedente en la percepción que los estudiantes tienen de la matemática en su vida cotidiana para que posteriormente se elaboren propuestas de enseñanza estratégica contextualizada y situada.

Las preguntas de investigación que se plantearon son: ¿Cómo se percibe la matemática desde el punto de vista de un estudiante del nivel medio superior? ¿Qué usos cotidianos tiene la matemática para los estudiantes? ¿Qué consecuencias provocan estas ideas para la matematización?

Marco teórico

La perspectiva teórica se enmarca primeramente en la tendencia del uso del conocimiento en su sentido común con sus respectivas imágenes, creencias y representaciones, pues indican la forma de pensar, teniendo en consecuencia, pensamientos que guían sus prácticas sociales en los distintos espacios de la vida cotidiana (Piña, 2003). Al respecto Martínez Sierra (2011) señala que aprender matemáticas está relacionado con "saber hacer operaciones básicas" (suma, resta, multiplicación y división) y ejecutarlas en un proceso concreto.

De esta manera Chevallard (1997) advierte que el sistema representacional influye en la construcción de realidad escolar alrededor de las matemáticas y guía las prácticas sociales que se llevan a cabo en la vida institucional. Menciona las avenencias que se provocan durante la conceptualización de un objeto si se desfragmenta, ya que puede confundirse con otro concepto de características similares. O bien, el otro caso extremo, cuando se ve superficialmente que el análisis queda incompleto resultando frustrante para el alumno pues al percibir poca información por lo general afirma que es un objeto de estudio irrelevante sin importancia en su vida. Es por ello que se debe cuidar al diseñar una secuencia didáctica que el objeto no quede ambiguo durante el proceso de transposición con el fin de evitar alguna zona de sombra.

Es así que cuando se estudia matemáticas suceden dos cosas curiosas al mismo tiempo; la primera es la asociación del objeto de estudio con el sentido común de manera física, y la segunda cuando la comprensión de su pensamiento concreto debe relacionarse con el pensamiento abstracto. Por lo que el proceso de transposición resulta ser más complejo que en algunos otros objetos de estudio y requiere que el profesor tenga dominio y versatilidad de métodos de transposición. El dominio del objeto de estudio es inevitable para dar claridad durante la transposición didáctica y el estudiante alcance una percepción clara de lo que está estudiando. La versatilidad es imprescindible para utilizar las técnicas adecuadas al estudiante o por lo menos a la mayoría de los estudiantes, considerando sus estilos de aprendizaje, inteligencias múltiples dominantes, contexto, dominio cerebral que motiven el aprendizaje sin perder propósito de objeto matemático.

El segundo referente que se considera en este estudio es el quehacer de la Matemática Educativa en la actualidad ya que para Cordero y Silva-Crocci (2012) interpreta y estudia fenómenos vinculados a la construcción social del saber matemático, con la clara intención de lograr equidad en la construcción de este conocimiento en los diferentes planos de la sociedad, tales como el escolar y la cotidianidad, con la expectativa de que este conocimiento transforme la vida de los ciudadanos; la práctica del pensamiento matemático tiene dos funciones, de reflejar, tanto los procesos institucionales, como el de ser un mecanismo de construcción de conocimiento en una situación específica.

En la tercera vertiente, el uso de métodos de instrucción se retoma como parte del marco conceptual, enfocando la atención hacia el aprendizaje acelerado creado por Georgi Lozanov, nombrado así por el mismo como sugestiopedia, teoría desarrollada para aprender lenguajes, que trabaja bajo la idea de aprovechar las reservas de la mente ayudando con técnicas de asociación y memorización. Asegura además que cualquier persona tiene la capacidad de aprender y recordar. Al respecto la matemática cumple con las características propias de un lenguaje, realiza las funciones gramaticales y las funciones sociales (Hernández, 2015).

Para Kasuga, Gutiérrez y Muñoz (2000) dentro de los aspectos importantes para el aprendizaje se encuentra el contexto como uno de los primeros puntos a considerar, entiéndase contexto como aquellos factores que rodean a un individuo considerando su pasado hasta su presente. Es así que el medio, experiencias y circunstancias influyen en la manera en que los estudiantes aprenden. De manera que si los factores representaran reforzadores positivos en el estudiante estos pudieran direccionar al aprendizaje. Pero el contexto va más allá de los reforzadores, incluye las circunstancias que estimulen el proceso de enseñanza y de aprendizaje. Conocer aquellos estímulos a los que los estudiantes pueden reaccionar para atraer la atención y diseñar las experiencias de aprendizaje que faciliten la comprensión de los objetos de estudio, seria de especial interés en los objetos abstractos.
En matemáticas como en otras ciencias exactas la construcción de actividades, proyectos o secuencias puede ser una herramienta versátil e innovadora que, estructurada de manera cuidadosa y organizada didácticamente, evitarían la desfragmentación innecesaria del objeto de estudio. En donde algunas veces resulta ser la desfragmentación desgastante tanto para el estudiante como para el profesor, pues propicia la confusión del concepto, su reestructuración y por lo general no se alcanzas niveles altos de logro.

En cambio, sí se establecen actividades que incluyan corrientes como los 4 cuadrantes de Ned Herman estilos de aprendizajes, inteligencias múltiples, en particular la inteligencia emocional, técnicas de aprendizaje y factores de mediación en la enseñanza se pueden generar ambientes de aprendizaje que faciliten el "gusto" de aprender matemáticas con el "puedo" aprenderlas, fortaleciendo así también la inteligencia emocional de cada individuo. Es decir que para lograr aprender matemáticas recuperando la idea de Kasuga pero en otra palabras, hay que "querer hacerlo", "tener deseos de logro", del mismo modo hay que llevar a cabo una serie de acciones por parte de estudiante para entender el comportamiento de su propio proceso cognitivo y lograr "poner atención", "estudiar" y "concentrarse".

Finalmente, Espíndola (2001) hace referencia a reforzadores negativos o positivos para incentivar a los alumnos, en particular la motivación propia mediata hace referencia a la utilidad de la matemática en la resolución de problemas en una situación en particular, en algún fenómeno natural, económico o social, es decir la contextualización del objeto matemático. Además, hace mención a características que debe cumplir un profesor como empatía y respeto hacia el alumno, elementos que fortalecen la autoestima del estudiante y crecimiento en la inteligencia emocional. Dentro de su "reingeniería" menciona los procesos internos para considerar la percepción de un ente: memoria, imaginación, fantasía y sentido común. Afirma que un problema grave del proceso de enseñanza radica en la claridad de los objetos de estudio abstractos, es decir conflictos de percepción. En algunos de los casos la velocidad de los estímulos durante las cátedras; en otras el impacto del estímulo, o bien las metas no son claras para el estudiante y en vez de ampliar el campo de percepción se le restringe a un espacio y pensamiento determinados.

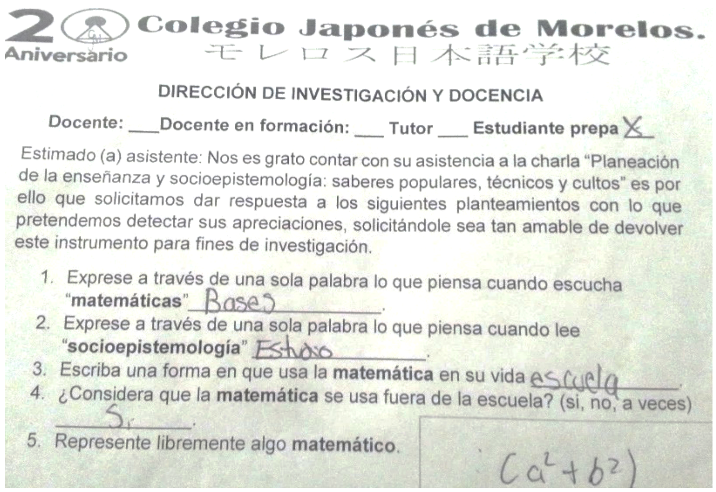
Método

La metodología empleada para la indagación es de naturaleza mixta haciendo énfasis en la descripción de las variables.

La población son todos los estudiantes del Colegio Japonés de la generación 2016-2017. La muestra intencionada consta de 9 estudiantes de nivel preparatoria. En una sola aplicación se recolectaron sus apreciaciones y representaciones con respecto a las matemáticas mediante una encuesta. El cuestionario tiene características que permitieron interpretar sus planteamientos a través de categorías de análisis curriculares y no curriculares. Las características de sus reactivos son:

- Tanto las preguntas y respuestas son concretas.
- Las respuestas son abiertas y eso ofrecen la posibilidad de elegir contestaciones de interpretación personal.
- Dan la posibilidad de responder de acuerdo a su contexto personal.
- Permite identificar el uso y la importancia o no de las matemáticas.
- Permite determinar la existencia de pensamiento abstracto, concreto, y en su caso el nivel de ellos.

En la siguiente ilustración se puede observar la instrumentación de la técnica aplicada.



20 Aniversario Colegio Japonés de Morelos.
モレロス日本語学校

DIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN Y DOCENCIA

Docente: ___ Docente en formación: ___ Tutor ___ Estudiante prepa X

Estimado (a) asistente: Nos es grato contar con su asistencia a la charla "Planeación de la enseñanza y socioepistemología: saberes populares, técnicos y cultos" es por ello que solicitamos dar respuesta a los siguientes planteamientos con lo que pretendemos detectar sus apreciaciones, solicitándole sea tan amable de devolver este instrumento para fines de investigación.

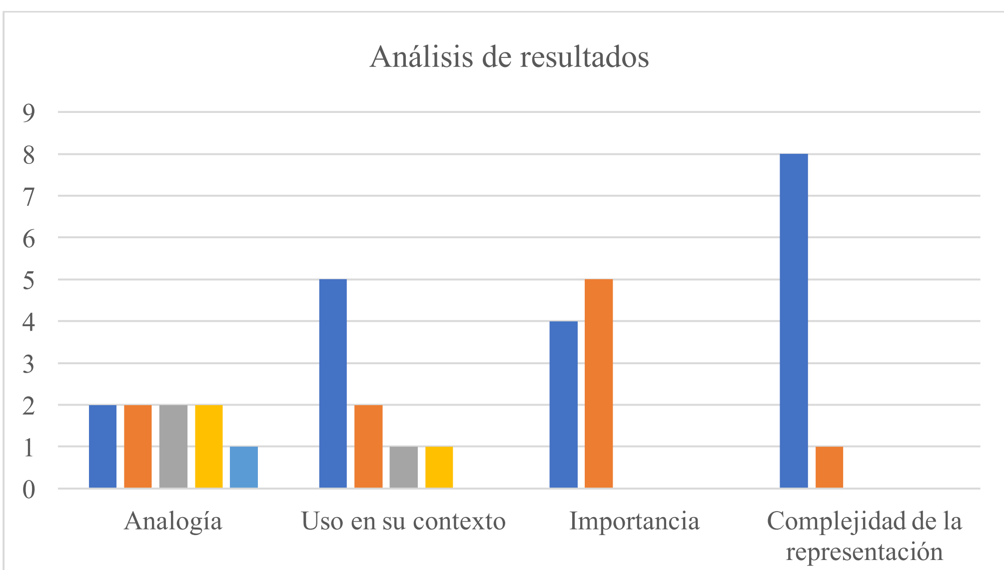
1. Exprese a través de una sola palabra lo que piensa cuando escucha "**matemáticas**" Bases.
2. Exprese a través de una sola palabra lo que piensa cuando lee "**socioepistemología**" Estudio.
3. Escriba una forma en que usa la **matemática** en su vida escuela.
4. ¿Considera que la **matemática** se usa fuera de la escuela? (si, no, a veces) Si.
5. Represente libremente algo **matemático**. (a^2+b^2)

Figura 1. Instrumento aplicado

El primer reactivo pide al estudiante que escriba en una palabra lo que piensa cuando escucha la palabra matemáticas con el fin de obtener la asociación inmediata del recuerdo del sujeto. El tercer y cuarto reactivo tienen el objetivo de asociar la experiencia del sujeto con la materia y su utilidad en la vida cotidiana o escuela. Finalmente, se busca determinar el nivel de asociación gráficamente entre ambos ejes, además de distinguir entre los tipos de pensamiento el abstracto y el concreto.

Resultados

La presente gráfica da cuenta de los resultados obtenidos en los instrumentos de investigación aplicados e interpretados.



Gráfica 1. Categorización de los resultados

Para lo referido a la analogía que hacen de la palabra "matemáticas" se obtuvo que de 9 estudiantes 2 la relacionan con números, 2 con cuentas, 2 con operaciones lógicas, 2 con bases de aprendizaje y 1 con inteligencia. En cuanto al uso que le dan a las "matemáticas" 5 refirieron que la utilizan únicamente en la escuela, 2 la usan en todo, 1 para el ahorro y las finanzas personales y 1 para calcular su tiempo. En lo relativo a sus representaciones gráficas de la disciplina se reconoce en 8 representaciones la presencia de expresiones algebraicas a través de algoritmos y solo en 1 gráfica se representó un edificio. De acuerdo a sus concepciones se presume que estos 8 estudiantes pudieran haber ya pasado de conceptos formales a abstractos por los algoritmos que han representado. Llama la atención el hecho de que solo un 33.33% identifique la matemática más allá de lo algorítmico, en este mismo sentido el que un 55.5 % vea una utilidad puramente académica es extraordinario para la comunidad docente al advertir la urgencia de incorporar estrategias de enseñanza pertinentes que permitan ampliar el horizonte de matematización en contraste con un 44.5% que si logra diversificar su utilización.

Conclusiones

A partir de los resultados se advierte una visión condicionada de las matemáticas pues un poco menos de la mitad de los estudiantes saben que es importante, sin embargo no pueden generar una representación matemática. Mientras que varias de ellos la asocian al uso escolar, echo que pudiera estar influyendo en la falta de visualización de su aplicación fuera del aula. A pesar de estos resultados, se observa que algunos estudiantes realizan una asociación rápida de elementos y características de la matemática. En el momento posterior al estudio, las reacciones de los estudiantes fueron de curiosidad por determinar si sus respuestas eran o no correctas, y en sobre la tercera pregunta se realizó un debate entre ellos de si sus respuestas eran aceptables. Estas consecuencias podrían ser útiles para generar en ellos la curiosidad trasladando los problemas aprendidos en la escuela al ámbito familiar y social.

La adopción de una perspectiva ampliada por parte de los bachilleres dependerá en gran medida de la mediación establecida entre los sujetos que aprenden, los objetos de conocimiento y las prácticas culturales propuestas desde su cotidiano para darse cuenta que el conocimiento matemático debe ser rediseñado a través del DME (Discurso Matemático Escolar). Al respecto se pretende diseñar una propuesta didáctica que supere las nociones reconocidas, favoreciendo así el desarrollo del pensamiento crítico frente a lo matemático. La propuesta sugiere tomar algunos de los principios de la sugestiopedia en especial de la enseñanza contextualizada para redireccionar en algunos de los casos a la percepción de la matemática útil para la vida; mientras que en otros mejorar las habilidades matemáticas encaminadas a los logros de su asignatura. Tal diseño dependerá de su nivel de percepción básico de lo abstracto hasta un nivel biyectivo entre lo concreto y lo formal.

Ésta primera investigación quedará en el Colegio como precedente para crear un archivo general de la sección preparatoria por generaciones continuando su aplicación durante el ciclo escolar 2017-2018. El archivo generacional obtenido ayudará a identificar los factores contextuales que influyen en las respuestas, y además se investigará el cambio entre las generaciones para ver si existe correlación entre ellas, alguna relación o patrón, que encaminen a construir estratégicamente experiencias que propicien el aprendizaje de las matemáticas ya sea influenciados por la motivación generada por su sentido, por su génesis o la innata del objeto.

Referencias bibligráficas

Cámara de Diputados (2015). *México presenta índice de deserción escolar de 50 por ciento, uno de los más elevados en América Latina*. Recuperado de: http://www5.diputados.gob.mx/index.php/esl/Comunicacion/Boletines/2015/Octubre/02/0125-Mexico-presenta-indice-de-desercion-escolar-de-50-por-ciento-uno-de-los-mas-elevados-en-America-Latina

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Cordero Osorio, F y Silva-Crocci, H. (2012). Matemática Educativa, Identidad y Latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 15* (3), 295-318.

Espíndola, J. (2000). *Reingeniería educativa*. México: Pax.

Hernández, E. (2015). *El desarrollo de la capacidad de abstracción mediante el aprendizaje acelerado en la enseñanza de las ecuaciones lineales* (tesis de maestría no publicada). Universidad Politécnica de Morelos, México.

Kasuga, L., Gutiérrez, C., & Muñoz, J. (2000). *Aprendizaje Acelerado: Estrategias para la potencialización del aprendizaje.* Distrito Federal: Grupo Editorial Tomo.

Martínez, G. (2011). Representaciones sociales que poseen estudiantes de nivel medio superior acerca del aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas*. Perfiles Educativos, XXXIII* (132), 90-109.

Piña, J.M. (2003*).* Imágenes sobre la calidad de la educación. Los actores de tres carreras de la UNAM. En J.M. Piña (Ed.), *Representaciones, imaginarios e identidad: actores de la educación superior* (pp. 17-71). México, UNAM-Centro de Estudios sobre la Universidad.

Rivas, P. (2005). La Educación Matemática como factor de deserción escolar y exclusión social. *Educere*, 9 (29), 165-170.

MATERIAL MANIPULATIVO ABARCANDO: FUNÇÕES, GEOMETRIA, BELEZA E CRIATIVIDADE

Karly Barbosa Alvarenga, Rodrigo Damasceno Leite
Universidade Federal de Goiás. (Brasil)
karlyba@yahoo.com.br, rodrigoxleite8@gmail.com

Resumo
O presente trabalho apresenta a experiência da oficina Material Manipulativo Abarcando: Funções, Geometria, Beleza e Criatividade realizada na Reunião Latinoamericana de Matemática Educativa na sua trigésima primeira edição. A oficina apresentou uma alternativa metodológica para o estudo de funções e geometria com o uso do material didático, tipo quebra-cabeça que forma um lindo mosaico de um lado, caso conseguimos montar corretamente o quebra-cabeça que está do outro lado. Ela foi realizada de forma colaborativa, na montagem dos mosaicos e nos debates em como utilizá-lo abordando os conceitos de área, perímetro, proporção e fração. Os participantes a classificaram como desafiadora e ao mesmo tempo interessante e criativa. Sua elaboração e implementação está fundamentada sob teóricos que tratam da importância do estudo de funções e à luz da utilização de material didático como facilitador da aprendizagem matemática e seu uso reflexivo e cuidadoso.

Palavras-chave: funções; geometria; material concreto; ensino de matemática

Abstract
This report shows the experience of a workshop on Manipulative Material involving: Functions, Geometry, Beauty, and Creativity held at the Latin American Convention of Educational Mathematic in its 31st edition. The workshop presented a methodological alternative for the study of functions and geometry with the use of puzzle-type didactic material, which forms a beautiful mosaic on one side, if we can correctly assemble the puzzle that is on the other side. It was carried out in a collaborative way, both the assembly of the mosaics and the debates on how to use them, approaching the concepts of area, perimeter, proportion and fraction. The participants valued it as a challenging but interesting and creative proposal. We elaborated and implemented the methodological alternative based on the theories that deal with the importance of the study of functions focused on the use of teaching materials to favor mathematical learning as well as their reflective and careful use.

Key words: functions; geometry; concrete material; mathematics teaching

Introdução

A oficina é um dos resultados do projeto Aprenda matemática por meio de materiais lúdicos, desenvolvido por alunos do Estágio Supervisionado II e do Programa de Bolsas de Extensão e Cultura (PROBEC), que originou-se a partir das inquietações para utilizar os materiais disponíveis no Laboratório de Educação Matemática (LEMAT) da Universidade Federal de Goiás (UFG), e reproduzi-los com a utilização de lixos reutilizáveis.

Sob essa perspectiva propomos uma atividade que envolva o conteúdo de funções e geometria. Sobre a aplicabilidade das funções Alvarenga e outros (2014, p.4) afirmam "Sabemos que o estudo de funções é a base para o estudo de vários outros conteúdos de matemática como limite, derivada e integral". Porém, existe uma dificuldade, por parte dos estudantes, tanto do ensino médio quanto do superior, em lidar com confiança e corretamente, esse conceito (Alvarenga et *al*, 2014). Destacamos assim a importância de elaborar materiais que abordam esses conteúdos para os estudantes desenvolverem os seus conhecimentos.

O conceito de função é geralmente associado às atividades do cotidiano e à algum tipo de fenômeno de origem natural ou de transformação humana, essa associação é feita por meio da modelagem matemática, Barbosa (2004) diz que,

> O ambiente de modelagem está associado à problematização e à investigação. O primeiro refere-se ao ato de criar perguntas e/ou problemas enquanto o segundo, à busca, à seleção, à organização e à manipulação de informações e reflexão sobre elas. Ambas as atividades não são separadas, mas articuladas no processo de envolvimento dos alunos para abordar a atividade proposta. Nela, podem-se levantar questões e realizar investigações que atingem o âmbito do conhecimento reflexivo. (Barbosa, 2004, p.3)

Além do conteúdo de funções, o material oportuniza a revisão dos conteúdos de geometria tais como: área, perímetro e características propícias dos triângulos, quadriláteros e a montagem de mosaicos onde identificamos padrões e simetrias.

Os mosaicos são estruturas muito comuns em nosso dia a dia. Eles aparecem em tetos e painéis de parede de templos ou palácios, azulejos de paredes, malhas entrelaçadas das cercas e calçamentos de ruas.

Segundo Martins e Fioreze (2008, p.10), "A construção de mosaicos, além da beleza artística, contém padrões geométricos que apresentam certo tipo de simetria ornamental, com emprego de figuras relativamente simples, cuja repetição e interação formam um todo harmonioso e estético".

Para significação do trabalho envolvendo os conteúdos de funções e geometria utilizamos do material concreto como auxiliador e potencializador da aprendizagem. Nos embasamos em Moreira (2010), Rêgo M. e Rêgo G. (2006) e Lorenzato (2006) por seus argumentos estarem bem próximo do que acreditamos. Moreira destaca assim a sua importância, sobre a reestruturação do conhecimento e significação com o uso do material potencialmente significativo:

> Na aprendizagem significativa, o aprendiz não é um receptor passivo. Longe disso. Ele deve fazer uso dos significados que já internalizou, de maneira substantiva e não arbitrária, para poder captar os significados dos materiais educativos. Nesse processo, ao mesmo tempo que está progressivamente diferenciando sua estrutura cognitiva, está também fazendo a reconciliação integradora de modo a identificar semelhanças e diferenças e reorganizar seu conhecimento. Quer dizer, o aprendiz constrói seu conhecimento, produz seu conhecimento. (Moreira, 2010, p.5)

O material concreto proporciona ao aluno a exploração, experimentação e abstração, colocando-o no centro do ensino, as aulas se tornam interativas, os estudantes passam a ser construtores de novos saberes e o processo permite a reestruturação dos seus conhecimentos. Sobre o potencial do material concreto Rêgo M. e Rêgo G. (2006) afirma que:

> O material concreto exerce um papel importante na aprendizagem. Facilita a observação e análise, desenvolve o raciocínio lógico, crítico e científico, é fundamental para o ensino experimental e é excelente para auxiliar o aluno na construção de seus conhecimentos. (Rêgo M. e Rêgo G., 2006, p.61).

|Ainda Lorenzato (2006, p.22) diz que:

> É muito difícil, ou provavelmente impossível, para qualquer ser humano caracterizar espelho, telefone, bicicleta ou escada rolante sem ter visto, tocado ou utilizado esses objetos. Para as pessoas que já conceituaram esses objetos, quando ouvem o nome do objeto, sem precisarem dos apoios iniciais que tiveram dos atributos tamanho, cor, movimento, forma e peso. Os conceitos evoluem com o processo de abstração; a abstração ocorre pela separação. (Lorenzato, 2006, p.22).

Assim acreditamos na importância do trabalho com os conteúdos de funções e geometria de forma a proporcionar ao aluno a compreensão dos conteúdos do Ensino Básico, mas também como uma preparação para o Ensino Superior. Cremos na potencialidade que o material concreto tem em motivar, estimular a criatividade e o trabalho em grupo e dar significado ao aprendizado, desde que corretamente utilizado, com planejamento e objetivos determinados.

Propósito e Alcance

A oficina tem por objetivo principal propiciar aos participantes a montagem de um mosaico, que se forma por meio de um quebra-cabeça, envolvendo questões relacionadas ao estudo de funções. A atividade foi pensada para um contexto de revisão, para o conteúdo de funções e para introduzir e/ou revisar os conteúdos de geometria, proporção e fração. Sendo possível trabalhar desde o ensino básico até o superior, adequando o conteúdo para cada um destes.

O mosaico utilizado possui trinta e duas peças e dois lados indicados pelas figuras 1 e 2. O lado colorido é o mosaico propriamente dito, onde pode ser explorado os elementos geométricos; e o lado branco, é o quebra cabeça onde trabalhamos com funções por meio de questionamentos. Salientamos que o material pode ser elaborado com lixos reutilizáveis. É o lixo que vira luxo nas mãos de professores e estudantes criativos, nesse caso foi o papelão.

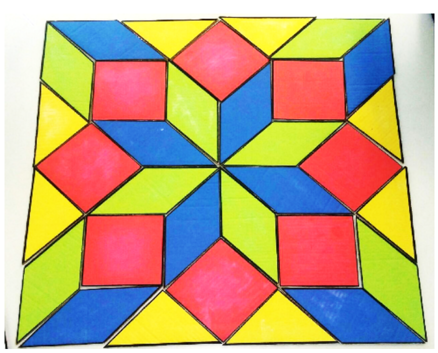


***Figura 1*:** O lado do mosaico em si. Arquivo dos autores.

Em cada uma das peças que compõem o mosaico estão perguntas e respostas referentes ao conteúdo de funções, de forma que o aluno ao unir todas as peças, lado a lado com as perguntas e suas respectivas respostas ele estará indiretamente formando o mosaico da figura 1. Isso poderá ser feito, pois cada peça possui um lado branco onde estão tais perguntas e respostas, e um lado colorido que deve ficar todo o momento virado para baixo e formará o padrão ao final.

Sendo assim, uma sugestão é que o professor comece a atividade sem comentar sobre o mosaico e somente ao final após os alunos reunirem todas as peças, seja pedido que eles virem todas elas e vejam a imagem que foi formada. Já o conteúdo de geometria pode ser explorado após a montagem do quebra-cabeça (mosaico) de forma construtiva por meio de perguntas e discussões acerca dos conceitos geométricos.

Figura 2. Lado do mosaico com questões a serem resolvidas. Arquivo dos autores.

A Oficina

A programação é dividida em dois dias com duração de uma hora e meia cada. As atividades se distribuem em etapas de apresentação de conceitos e de manipulação dos materiais.

Na primeira parte é feita uma breve introdução teórica sobre o contexto em que a oficina foi elaborada, da dificuldade dos alunos relacionadas ao ensino de funções e geometria e o embasamento teórico para a utilização de materiais manipuláveis. Trazemos aí algumas pesquisas e falas de teóricos que discutiam sobre o assunto.

Logo após, na segunda parte, discutimos o que é um mosaico, como funciona o nosso, debatemos sobre as possibilidades de trabalharmos com outros conteúdos matemáticos como área e perímetro dos quadriláteros e refletimos sobre os possíveis "lixos" que podem ser utilizados para fabricar o material. Os participantes parecem ter compreendido as nossas ideias sobre como os alunos podem aprender ou revisar os conceitos matemáticos em situação que professor está trabalhando em sua sala de aula e de forma simples, sem demandar muito tempo. O material pode ser construído pelos próprios alunos e à medida que eles constroem, o professor os instiga a pensar na matemática.

O próximo momento é o trabalho colaborativo com o intuito de montar os quebra- cabeças. A princípio os participantes podem apresentar de dificuldade para montá-lo talvez associada ao nível das perguntas e uma grande quantidade de peças. A mesma atividade já havia sido aplicada aos estudantes do ensino superior, futuros professores de matemática. Eles consideraram as perguntas diferenciadas das normalmente encontradas nos livros didáticos e avaliaram como grau médio de dificuldade, com efeitos de "levar o aluno a pensar e não somente decorar" e a caracterizaram como "desafiadora" e "diferente".

Observamos que os participantes haviam sentado ao redor das peças e todos começaram a formar uma parte do quebra-cabeça individualmente. Só após vários minutos eles começaram a se comunicar sobre quais respostas estavam procurando e que era importante tentar conectar esses pequenos quebra-cabeças para que o mosaico tomasse forma. A atividade proporcionou que eles trabalhassem de forma colaborativa e assim a execução se tornou mais rápida. Após alguns minutos eles conseguiram terminar o quebra cabeça e observamos a satisfação destes ao virarem as peças e verem o mosaico formado (figura 3).

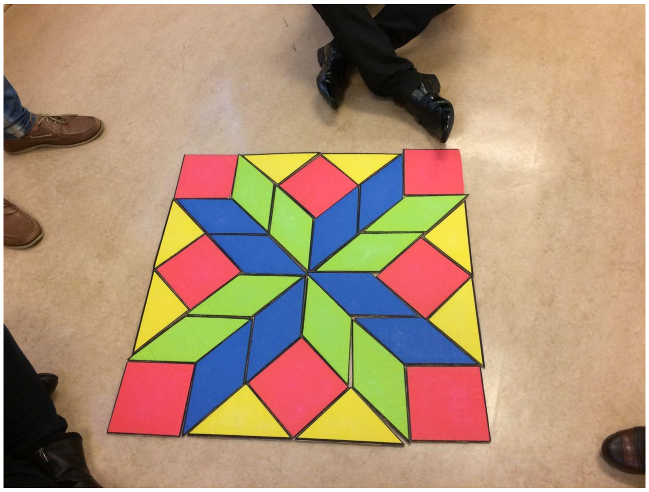
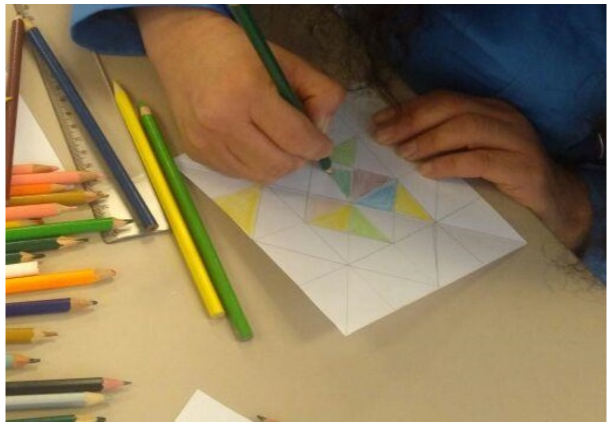


Figura 3. Mosaico montado pelos participantes da oficina. Arquivo dos autores.

No quarto momento houve discussão sobre os diferentes tipos de mosaicos e a matemática envolvida na construção e eleição de polígonos em um mosaico. Foram apresentados diferentes tipos de mosaicos em construções e pinturas como os famosos mosaicos de Escher com sua enorme beleza e os de Penrose, formados por "dardos" e "pipas". Comentamos também a importância da medida dos ângulos das figuras que concorrem em um vértice, para que se forme um mosaico a soma dessas medidas devem corresponder a 360°. Discutimos ainda que não existe mosaicos regulares (mosaico montados com um tipo de polígono regular) formado por polígonos com sete ou mais lados e não existe um semirregular (formado por dois tipos ou mais de polígonos regulares) composto por polígonos com doze ou mais lados.

Em uma quinta etapa há uma construção de outros mosaicos com conceitos diferenciados à escolha do participante. Entreguemos papéis, lápis de cores, tesouras, réguas e borrachas. Ele pesquisa na internet com seu *smarthphone* ou elabora questões que sejam interessantes para se trabalhar com os mosaicos. Muitos gostaram de desenhar e colorir os seus mosaicos afirmando ser como uma terapia que eles não praticavam há anos. A fig. 4 apresenta uma participante, docente, criando o seu mosaico.



Figuras 4. Construção de mosaicos. Arquivo dos autores.

Por fim, pedimos à aqueles que participam que façam avaliação da atividade.

■ Considerações

Sabemos da importância do estudo de funções como base para diversos outros conhecimentos matemáticos como, por exemplo, o limite, a derivada, a integral, para modelar vários fenômenos e que grande parte dos alunos do ensino médio e do superior apresenta dificuldade com esses conteúdos (Alvarenga et *al*, 2014). Acreditamos ser interessante a realização de atividades que proporcionem aos alunos uma aprendizagem mais significativa como afirma Moreira (2010), que estruture o seu conhecimento. Não devemos optar somente por atividades que motivem a aprendizagem matemática por meio de um caminho só formal. Assim, consideramos que o material concreto é um bom instrumento, se devidamente utilizado, para potencializar essa aprendizagem, pois este tem o aspecto de estimular a participação, o trabalho colaborativo entre os estudantes e suas criatividades. Além disso auxilia na abstração desses conteúdos e desenvolve o pensamento lógico, crítico e científico (Lorenzato, 2006; Rêgo M. e Rêgo G., 2006) por meio da manipulação e experimentação.

A proposta tem suas dificuldades de implementação, mas tem se mostrado bem aceita pelos participantes. Eles a avaliaram como desafiadora e ao mesmo tempo interessante e criativa. A montagem do quebra-cabeça proporcionou que todos trabalhassem juntos para vencer o desafio e esses se mostraram motivados a construir os seus mosaicos. Temos notícias de participantes que estão aplicando essa ideia em suas salas de aula.

Sabemos que a atividade Mosaico de Funções não é a solução para todos os problemas e dificuldades apresentadas pelos alunos no conteúdo de funções, e ela nem tem a pretensão de ser, mas acreditamos que ela possa fazer parte desse processo de trazer dinamicidade no ensino desse conteúdo, mais motivação, conhecimento de diversos tipos de representações, de enfoques, de estética e harmonia entre formas matemáticas e cores. Além disso oportuniza a colaboratividade e pode ser uma alternativa para uma aula desafiadora, inclusiva para um conceito apresentado de forma tão estática nos livros e nas práticas docentes.

Referências bibliográficas

Alvarenga, K., Barbosa, C. V. & Ferreira, G.M. (2014). O conceito de função: o desenvolvimento baseado em alguns modelos desde o ano de 2000 a.C. até o século XX. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 9, 159-178

Barbosa, J. C. (2004). Modelagem matemática: O que é? Por quê? Como? *Veritati*, n. 4, p.
73-80.

Lorenzato, S. (2006). Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: S. Lorenzato. *Laboratório de Ensino de Matemática na formação*

Martins, L. Fioreze, L. (2008). O Uso do Software Régua e Compasso Na construção de mosaicos**.** *Disciplinarium Scientia*, v.9.n.1, p.143-162.

Moreira, M. A. (2010). *Aprendizagem Significativa Crítica.* Porto Alegre: UFRGS.

Rêgo, R. M., Rêgo, R. G. (2006). Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In: S. Lorenzato. *Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores* (pp. 39-56). Campinas: Autores Associados.

Rodrigues F. C. & Gazire E. C. (2012). Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática,* v. 07, n. 2.

RAZONAMIENTO INFERENCIAL INFORMAL EN PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Nicolás Sánchez Acevedo, Blanca Ruiz Hernández
CICATA-IPN. Tecnológico de Monterrey. (México)
nicolas1983@cicata.edu.mx, bruiz@itesm.mx

Resumen
Últimamente, la estadística se ha incorporado en los currículos de educación primaria, debido a la creciente necesidad de formar personas con capacidad de analizar e interpretar la realidad. Para ello, es necesario contar con profesores con una formación adecuada y conocimientos actualizados para integrar y articular las ideas estadísticas. El objetivo del taller es poner a discusión una propuesta de enseñanza de la estadística cuyo objetivo central sea interconectar ideas estadísticas por medio de la Inferencia informal. La metodología propone un trabajo colaborativo y reflexivo permitiendo a los profesores cuestionar cómo se enseña estadística y discutir herramientas para el diseño de clases de estadística.

Palabras clave: enseñanza de la estadística, inferencia informal, razonamiento de inferencia informal

Abstract
Lately, statistics has been included into the school program of primary education, due to the growing need to train people who are able to analyze and interpret reality. That is why, it is necessary to have teachers with adequate training and updated knowledge to integrate and articulate statistical ideas. The objective of the workshop is to discuss a statistical teaching proposal aimed at interconnecting statistical ideas through informal inference. The methodology suggests a collaborative and reflective work which allows teachers to ask how statistics is taught and to discuss teaching tools for the design of statistical classes.

Key Words: statistical teaching, informal inference, informal inference reasoning

Fundamentación

Desde hace algunos años, la inclusión de la estadística en el currículo escolar ha ido en aumento, aun cuando esta ha sido gradual desde los primeros años de educación. Con esto se busca que los estudiantes desarrollen la capacidad de formular, preguntar y recoger datos relevantes para responder a estas preguntas contextualizadas (NCTM, 2000). En relación a la idea anterior, el informe GAISE (Franklin, Kader, Mewborn, Moreno, Peck, Perry, y Scheaffer, 2005) plantea que una de las ideas más relevantes a desarrollar en el pensamiento estadístico de los estudiantes es el de *variabilidad*, pues al comprender que esta idea está presente en la mayoría de los procesos de la vida cotidiana se podrán percibir y explicar los problemas en relación a la toma de decisiones.

El currículo Matemático, al incluir la estadística desde los niveles escolares iniciales de enseñanza, debe contar con profesores con capacidad para exponer las estadísticas en relación al contenido estadístico base en estos niveles (Leavy, 2010), para desarrollar capacidades en los estudiantes como análisis de información, recolección de datos, organización por medio de gráficos y tablas, por medio de la comparación de fenómenos y la toma de decisiones fundadas en datos contextualizados (Ruiz-López, 2015). Lo anterior hace necesarias dos cosas, por una parte que los currículos de Matemáticas incorporen el desarrollo de las ideas y conceptos estadísticos de manera gradual, con el fin de profundizar y asegurar la comprensión por parte de los estudiantes y luego potenciar con el uso de herramientas estadísticas más formales.

Este último aspecto, plantea la necesidad de proponer y desarrollar estrategias para los profesores que enseñan estadística en los niveles tempranos, puesto que se hace indispensable que el profesor adquiera herramientas adecuadas que le permitan reflexionar en cuanto a saber interpretar y adaptar el currículo a contextos específicos (Ponte, 2011).

Un enfoque eficaz y alternativo de enseñanza en el nivel primario (en particular), es el de inferencia informal (IE), enfoque que cumple un rol central en la comprensión de conceptos y la importancia del contexto desde donde emergen los datos, pues es a través de estos que es posible potenciar el desarrollo de razonamientos informales en distintos contextos. Estos razonamientos actúan como mediadores entre la etapa de elaborar un razonamiento hasta la etapa de entregar la inferencia derivada de este razonamiento. Aun cuando no se tiene una idea común para preparar a los profesores para enseñar estadística por medio de la inferencia informal, es una línea que adquiere relevancia (De Vetten, Schoonenboom, Keijzer y Van Oers, 2016; BenZvi, Bakker y Makar, 2015).

La inferencia informal surge como propuesta para incorporar el razonamiento estadístico, dejando de lado los procedimientos formales de estadística como pruebas de hipótesis, intervalos de confianza, valor p, etc. El foco está centrado en una propuesta para apoyar la comprensión conceptual de los procesos inferenciales formales (Makar y Rubin, 2009). La enseñanza, basada sobre la inferencia informal, es mostrarse como una herramienta que permita a los profesores de educación primaria (en este caso), reflexionar sobre la importancia que tienen los datos y su contexto para ser enseñada y no asimilarla a la enseñanza de las Matemática (Sánchez y Ruiz, 2017), pues esta última sirve de soporte a la primera.

■ Marco Conceptual: Inferencia Estadística Informal

Apoyados en Makar y Rubin (2009), consideramos el razonamiento inferencial informal como la profundización sobre la comprensión que pueden llegar a lograr los estudiantes sobre algún objetivo planteado, es decir, la aplicación contextualizada de los conceptos y las conclusiones emanadas de los datos.

Para Makar y Rubin (2009) la inferencia informal es una herramienta potencial para que los estudiantes (en cualquier nivel) puedan profundizar y comprender el propósito y utilidad de los datos de forma más general y la aplicación que estos tienen de forma directa con el contexto y la realidad. Este marco conceptual contempla aspectos críticos, que se traducen en tres componentes (Makar y Rubin, 2009, p. 85), (Figura 1):

- La generalización, incluyendo predicciones, estimación de parámetros y conclusiones que se extiendan más allá de la descripción de los datos. Estas generalizaciones se evidencian en la identificación de patrones de datos.
- La evidencia en los datos, que sostienen esa generalización, predicción o conclusión, es decir dar argumentos implícitos o explícitos que justifique su decisión de la inferencia estadística.
- Uso de un lenguaje probabilístico. Presencia de la incertidumbre al relacionar o plantear una generalización a la población

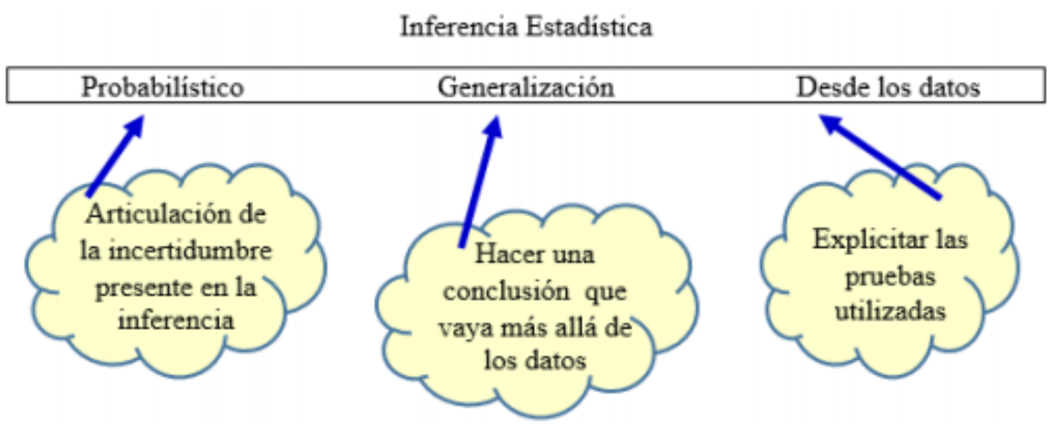


Figura 1. Marco de evaluación de razonamiento inferencial informal (Makar y Rubin, 2009)

En este marco, se parte de la idea, que el razonamiento estadístico se desarrolla progresivamente con la identificación de, y desde los datos. Estos datos permiten dar sustento a los razonamientos que se fundan en contextos particulares; la progresión y evolución de los tipos de razonamientos está sujeta al trabajo reflexivo, las representaciones, los argumentos y la presencia de la variabilidad.

Presentación de la propuesta del taller

Este taller se compone de dos actividades tomadas y adaptadas de investigaciones previas de enseñanza. Ambas actividades fueron seleccionadas por haberse desarrollado en contexto de profesores y estudiantes de educación primaria. Cada una de las dos actividades contempla el objetivo que se pretende alcanzar y el desarrollo de tareas específicas, de tal modo que los profesores se involucren activamente. No se pide para el desarrollo de estas tareas conocimientos profundos de Matemáticas.

Objetivos del taller

El objetivo del taller es poner a discusión una propuesta de enseñanza de la estadística cuya intención principal es interconectar ideas sobre la base de razonamientos inferenciales informales para enseñar estadística. Específicamente se pretende discutir, reflexionar y analizar la relevancia que tienen los datos para enseñar estadística por medio de actividades adecuadas. Este objetivo busca guiar las actividades que han sido propuestas y adaptadas para los participantes. Dichas actividades se caracterizan por incluir elementos de inferencia informal y hacerlos emerger en los profesores.

Destinatarios

El taller se presenta para profesores de educación primaria, que estén en formación o ejercicio y que desarrollen su labor enseñando Matemáticas en alguno de los niveles de educación primaria. Lo anterior no excluye la participación de profesores de educación secundaria.

La modalidad de trabajo y las tareas propuestas

La secuencia del taller está compuesta por dos actividades independientes. En cada una de las tareas se proponen consignas para guiar la interacción y el trabajo cooperativo, con la intención de hacer emerger los razonamientos informales en los profesores participantes, logrando proyectar posibles interrelaciones de trabajo con sus estudiantes al enseñar estadística.

a) Primer momento: se expone el acercamiento que hace la inferencia informal para el razonamiento estadístico y sus objetivos, así como su pertinencia y características distintivas.
b) Segundo momento: se entrega a cada uno de los participantes documentos con las indicaciones y tareas de las dos actividades, para abrir la reflexión y discusión.
c) Tercer momento: Trabajo en grupos para consensuar opiniones en relación a las preguntas planteadas en el taller. Sobre los datos y los contextos.
d) Cuarto momento: Plenario. Discusión para alinear, discutir y reflexionar sobre las ideas relevantes derivadas del taller y las ideas de cada grupo. Reflexiones de práctica docente.

Primera Actividad

El objetivo de esta actividad es explorar razonamientos inferencias informales de profesores de educación básica en relación a una actividad de comparación de datos (Orta, Altamirano, García-Ríos y Sánchez, 2015).

En un bingo, se invita a los asistentes a participar en uno de los dos juegos propuestos. Uno de los asistentes, Juanito, solo puede participar en uno de los juegos, pero no en ambos. Para saber por cuál decidirse observa, anota y ordena los resultados de dos muestras de 10 personas que han participado ya en cada juego anteriormente. Las pérdidas (-) o premios (+) en efectivo que han obtenido las 20 personas se muestran en las siguientes listas:

Juego 1	15 -21 -4 50 -2 11 13 -25 16 -4
Juego 2	120 -120 60 -24 -21 133 -81 96 -132 18

Descripción: este taller tendrá cinco partes. Cada una de las partes del taller incluye las tareas a desarrollar con las cuestiones específicas que se deben responder.

- *Parte 1 (15 min. Aprox.):* Exposición de encargados del taller sobre el rol de la estadística y qué aspecto tiene la inferencia informal como herramienta para enseñar estadística.
- Parte 2 (20 min. Aprox.): Entrega de material. Se trabaja, analizan y calculan estadísticas básicas de forma individual en el documento, respondiendo las siguientes preguntas:
  a) Si tienes la posibilidad de participar en un solo juego ¿Cuál juego elegirías? Explica y justifica tus formas de proceder y calcular
  b) ¿Por qué? Justifica detalladamente tus respuestas

- Parte 3 (30 min. Aprox.): Reunirse en grupos de 2 o 3 personas y discutir las respuestas a las que cada uno llegó en la parte 2 del taller. Consideren las siguientes preguntas guías:
  a) ¿Llegaron a las mismas respuestas en relación a la elección del juego que es más conveniente?
  b) Si encontraron diferencias ¿a qué creen que se debe esa diferencia en la elección de un juego y no de otro?
  c) Si las muestras de pérdidas y ganancias, en ambos juegos fuesen otras, ¿los resultados serían los mismos? ¿Por qué creen que si? o ¿por qué creen que no? Expliquen sus ideas.

- Parte 4 (20 a 25 min. Aprox.): Plenario. Los grupos exponen los resultados de sus discusiones, tanto de la parte 2 como de los resultados y conclusiones obtenidas de la parte 3 sobre la actividad.
- Parte 5 (10 min. Aprox.): Conclusiones

Segunda Actividad

Objetivo: Explorar, analizar y discutir inferencias informales en relación a la predicción, tomando en cuenta la variabilidad de las muestras de datos, particularmente la talla de zapatos de los participantes (Makar, 2016).
Descripción: A cada grupo se le entrega una base de datos con distintas tallas de zapatos diferenciados por sexo. Las tallas de las mujeres irán con la sigla M y las de hombres con la sigla H, por ejemplo 41-H o 36-M, que significa talla 41 de hombre o talla 36 de mujer.

- Parte 1 (15 min. Aprox.): Forman parejas (dependiendo de la cantidad de asistentes). Seleccionar al azar una muestra de 5 datos por sexo e inventar un método para registrar datos (estadísticas o gráficas). Responder las siguientes preguntas:
  a) ¿Por qué seleccionan este método y no otro?
  b) ¿Qué conclusiones pueden sacar a partir de los datos del tamaño de zapatos?; ¿Cuál es la talla de zapato más grande?; ¿Y la menor? ¿Cuál de las tallas es la más común?
  c) ¿Podrían extraer alguna conclusión con respecto a la talla de zapato de la muestra? Por ejemplo conclusiones provisorias sobre el tamaño más grande, más pequeño y más común del zapato en su pareja, usando los datos hasta ahora como evidencia.
- Parte 2 (15 a 20 min. Aprox.): unirse con otra pareja, es decir formar grupos de 4 integrantes. Ahora, tendiendo una muestra de 10 tallas de zapatos, trabaje sobre las siguientes cuestiones:
  a) Teniendo más datos agregados a la muestra (10). ¿Qué método elegirían para representar sus datos?; ¿El mismo que eligieron como parejas en la parte 1, u otro método?; ¿Por qué?
  b) ¿Cómo interpretarían los datos, gráficos o estadísticos que seleccionaron en la viñeta anterior con base en el contexto de las tallas de estos zapatos?; ¿Por qué?
  c) ¿Las conclusiones que han sacado seguirían siendo las mismas si tomamos muestras de tamaño mayor?; ¿por qué creen que si o no?
- Parte 3 (25 min. Aprox.): Unirse en grupos de ocho integrantes, es decir, dos cuartetos.
  a) Siendo grupos de ocho integrantes, comparar las respuestas de la actividad realizada en la parte (2), y respondan:
     i) ¿Las representaciones seleccionadas por cada cuarteto fueron las mismas o fueron diferentes? ¿por qué? Si estas fueron diferentes ¿sirven ambas o no? O como se podrían integrar todas en una sola muestra
  b) ¿Qué grado de validez asignarían a las conclusiones extraídas con base en los datos de la muestra que poseen?

c) Ahora, siendo ocho integrantes, se forma una muestra de tamaño n=20, con tallas de zapatos diferentes. Trabaje las siguientes preguntas:
d) Teniendo una muestra de 20 datos ¿Seleccionarían el mismo método de representación de sus datos?; ¿Será mejor este método que los anteriores? ¿Por qué? ¿Creen que al tener más datos se hace necesario utilizar otro método de representación?
i) ¿Cómo interpretarían los datos, gráficos o estadísticos utilizados en contexto del tamaño de los zapatos?; ¿Qué tan fiables podrían ser las conclusiones que pueden extraer a partir de una muestra mayor de datos?
ii) De las conclusiones a las que han llegado, ¿seguirán siendo las mismas si tomamos muestra de tamaño mayor? ¿Por qué creen que si o no?
iii) Si este mismo taller se realizará en otra ocasión, con los mismos participantes y condiciones ¿Los resultados obtenidos serían los mismos? ¿Qué información aportan los resultados obtenidos en este taller en relación a la realización de otro similar? Justifiquen detalladamente

- Parte 4 (15 min. Aprox.): Plenario. Los grupos exponen los resultados de sus discusiones, tanto de la parte 1, parte 2, como también las justificaciones y conclusiones obtenidas de la parte 3 de la actividad.

- Parte 5 (15 min. Aprox.): Conclusiones

Reflexiones

La propuesta de taller mostrada busca dotar de sentido a la enseñanza de la estadística como disciplina incluida en el currículo escolar de Matemáticas desde cómo la conciben los profesores, desde una perspectiva constructivista y reflexiva, en tanto sirve para comprender diversos fenómenos de la realidad.

Quienes enseñan estadística, principalmente profesores, deben comenzar a familiarizarse con metodologías que propicien espacios para que los estudiantes analicen datos para comprender distintos fenómenos y que, justamente en estos, la componente de variabilidad está presente. Sin la comprensión, por parte de profesores, de este componente; la naturaleza de los datos y la variabilidad, se torna complejo lograr que la enseñanza de la estadística se trabaje de manera adecuada a nivel escolar.

La propuesta intenta poner en discusión y problematizar la relevancia del trabajo colaborativo y reflexivo basado en tareas relacionadas con la elaboración de inferencias informales para dar sentido a los datos en su contexto y no fuera de estos. Además, se pretende plantear que esta disciplina tiene su esencia en los datos contextualizados y que la matemática es una herramienta de apoyo. La idea de esta propuesta es justamente presentar una alternativa de enseñanza a profesores para que se apropien de estrategias para enseñarla, de manera fundamentada cuando seleccionen tareas. Justamente, Henriques y Oliveira (2014) plantean que “el trabajo basado en la organización y descripción de datos permite apoyar el cambio en el enfoque y la atención de los estudiantes en relación a medidas específicas y ver los datos no de forma aislada, tomando en cuenta la variabilidad como base de los razonamientos inferenciales informales” (170).

Referencias bibliográficas

Ben-Zvi, D., Bakker, A., y Makar, K. (2015). Learning to reason from samples. *Educational Studies in Mathematics, 88*(3), 291-303. doi: 10.1007/s10649-015-9593-3

De Vetten, A., Schoonenboom, J., Keijzer, R., y Van Oers, B. (2016a*). Exploring student teachers' reasoning about informal statistical inference when engaged in a growing samples activity.* Paper presented at the Thirteenth International Conference on Mathematical Education (ICME13), Hamburg, Germany.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D. S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., y Scheaffer, R. (2005). *A Curriculum Framework for K-12 Statistics Education. GAISE Report.* American Statistical Association. Recuperado de http://www.amstat.org/education/gaise/GAISEPreK-12_Full.pdf

Henriques, A. C., y Oliveira, H. (2014). Raciocínio inferencial informal de alunos do 8.º ano no contexto de uma investigação estatística usando o Tinkerplots. *Atas do EIEM - Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 159-172). Sesimbra: SPIEM.

Leavy, A. (2010). Teaching statistics at the primary level: Identifying obstacles and challenges in teacher preparation from looking at teaching. En C. Reading (Ed.), Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS-8, July, 2010), Ljubljana, Slovenia. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. [Online: http://iase-web.org/documents/papers/icots8/ICOTS8_3B3_LEAVY.pdf].

Lester, F. (2010). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. En B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers.* Heidelberg: Springer.

Makar, K. (2016) Developing Young Children's Emergent Inferential Practices in Statistics, *Mathematical Thinking and Learning, 18*(1), 1-24, DOI: 10.1080/10986065.2016.1107820

Makar, K. (2013). Teaching Statistics using informal statistical inference. *The Australian Mathematics Teacher, 69*(4), 34-40.

Makar, K., y Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal, 8*(1), 82-105.

Orta, J., Altamirano, J., García-Ríos, V., y Sánchez, E. (2015). Estudio exploratorio sobre el razonamiento inferencial de profesoras en formación. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria.*

Ponte, J. P. (2001). Investigating in mathematics and in learning to teach mathematics. En T. J. Cooney & F. L. Lin (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 53-72). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ruiz-López, N. (2015). La enseñanza de la Estadística en Educación Primaria en América Latina. *Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 13*(1), 103-121.

Sánchez, N., y Ruiz, B. (2017). La inferencia informal en la enseñanza de la estadística. Una propuesta por medio del estudio de clases. En Rosas, Alejandro (Ed.), *Avances en matemática educativa. El profesor investigador* (pp. 117-133). México: Lectorum.

Zieffler, A., Garfield, J., Delmas, R., y Reading, C. (2008). A Framework to Support Research on Informal Inferential Reasoning. *Statistics Education Research Journal: 7*(2), 40-58.

EL SIGNIFICADO DE INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN A PARTIR DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ACUMULACIÓN

Ramiro Ávila Godoy, Jorge Ávila Soria, José María Bravo Tapia
Universidad de Sonora. (México)
ravilag@gauss.mat.uson.mx, javilas9@gmail.com, jmbravo@mat.uson.mx

Resumen
Este es el reporte de un proyecto de investigación cuyo propósito es evaluar la eficacia de un modelo de enseñanza diseñado para promover que los estudiantes construyan primero un *significado contextual* (*semántico*) del objeto matemático *integral de una función,* basado en la resolución de problemas de acumulación; a partir del cual el significado sintáctico (operacional) que dicho objeto tiene en un sistema matemático de signos (SMS), tenga sentido como estrategia de resolución de problemas. El respaldo teórico de este diseño está basado en el EOS de Godino (2010a, 2010b) y los Modelos Teóricos Local y Global de Filloy, Rojano y Solares (2003).

Palabras Clave: resolución de problemas, significados contextuales

Abstract
This is the report of a research project which aims to evaluate the effectiveness of a teaching model designed to encourage students to first construct a contextual (semantic) meaning of the integral mathematical object of a function, based on problem solving of accumulation; from which the syntactic(operational) meaning that such object has in a Mathematical System of Signs (MSS), makes sense as a solving problem strategy. This design is theoretically based on the Onto-semiotic Approach (OSA) of Juan Godino and the Local and Global Theoretical Models of Eugenio Filloy, and his collaborators.

Key Words: problem solving, contextual meanings

Introducción

Este es un reporte parcial del desarrollo de un proyecto de investigación cuyo propósito fundamental es evaluar la eficacia de un modelo de enseñanza diseñado para promover que los estudiantes construyan primero un *significado contextual* (*semántico*) del objeto matemático *integral de una función* a través de la resolución de problemas de acumulación; a partir del cual, el significado sintáctico (operacional) que dicho objeto tiene en un sistema matemático de signos (SMS), tenga sentido como estrategia de resolución de problemas. En Ávila R., Ávila J. (2017) *El significado de integral de una función a partir de la resolución de problemas de acumulación* (aparece publicada una comunicación breve en la que se muestra el proyecto del que ahora se presenta este reporte parcial.

El modelo didáctico cuya eficacia se investiga, se diseñó y desarrolló por considerar que en la enseñanza tradicional, el tratamiento de la integral en los cursos de Cálculo, en las carreras de ingeniería, con frecuencia se orienta fundamentalmente al conocimiento de las técnicas de integración, que a su vez, por lo general, se restringen a las técnicas de anti-derivación, dando lugar a que los estudiantes consideren que integrar es sinónimo de anti-derivar y que este significado de la integral como un procedimiento, limita las posibilidades de uso de este objeto matemático en el análisis, interpretación y resolución de problemas y ocasiona que las técnicas de anti-derivación aprendidas, en poco tiempo se olviden (Ímaz y Moreno, 2010).

Consideraciones teóricas en las que se basó el diseño y desarrollo del proyecto

El modelo de enseñanza cuya eficacia se investiga tiene como respaldo teórico algunas premisas del EOS de Godino (2010a, 2010b) y otras de los Modelos Teóricos Local y Global del Filloy, Rojano y Solares (2003). Las premisas teóricas del EOS, que se consideraron en el diseño de este modelo de enseñanza son especialmente las relativas al carácter sistémico de los significados de los objetos matemáticos que parten de concebirlos de naturaleza pragmática antropológica y, en consecuencia, de carácter contextual; de la misma manera se asume la validez de las premisas en los que se considera que al modelar situaciones concretas en un Sistema Matemático de Signos (SMS), el contexto de cada situación le da sentido y significado (semántico) a los signos empleados en el modelo lo cual permite hacer una serie de inferencias analíticas válidas, derivadas del significado contextual del modelo; inferencias que servirán para interpretar adecuadamente la sintaxis operacional del modelo, es decir, dotarán de sentido los procedimientos de transformación operacional del modelo.

Metodología de investigación utilizada en el diseño y desarrollo del proyecto

La metodología utilizada para llevar a cabo esta investigación es de carácter cualitativo y está constituida por cuatro etapas. En la primera de estas etapas se diseñaron las actividades del modelo de enseñanza empezando por la selección de una situación problémica como el objeto de estudio, luego se diseñó una secuencia de actividades didácticas organizadas para desarrollarse en tres momentos: *inicio*, *desarrollo* y *cierre*; las correspondientes al primer momento, con el propósito de provocar el surgimiento, en los estudiantes, de los conflictos cognitivos que motiven el estudio de la situación problémica planteada, a través del cual se pretende dar sentido al uso de la función integral como el objeto matemático que modela y resuelve dichos conflictos, las actividades del segundo momento se diseñaron para conducir el proceso de estudio que se requiere desarrollar al analizar, interpretar y resolver tales conflictos y las actividades del tercer momento, esto es, las de *cierre*, tienen como propósito, institucionalizar lo aprendido al realizar las actividades de la secuencia.

Un ejemplo del proceso de diseño de una secuencia didáctica es el siguiente: Consideremos la siguiente situación problémica "*El cálculo de la distancia que recorre un móvil, en un cierto intervalo de tiempo, al desplazarse por una trayectoria recta*". En las actividades de inicio relacionadas con esta situación, se empieza planteando a los estudiantes el caso elemental de calcular dicha distancia cuando la velocidad es constante, asumiendo que esto ya saben resolverlo, luego se les plantea el caso en el que la velocidad es variable, pero la aceleración es constante, que también se considera que saben resolverlo y, al final, se les plantea el caso más general, cuando la velocidad y la aceleración son variables. La primera situación tiene el propósito de asegurar el nivel de partida de los estudiantes, específicamente que se hagan conscientes de que la distancia recorrida por un móvil se calcula con la fórmula $\boldsymbol{d = vt}$, esto es, multiplicando la velocidad por el tiempo que dura el recorrido, sólo si la velocidad es constante; la segunda situación está orientada a que los estudiantes se hagan conscientes de que esta fórmula no puede utilizarse para calcular la distancia recorrida por el móvil si su velocidad es continuamente variable, en cuyo caso, es necesario calcular v_m, la velocidad media del recorrido, para luego calcular la distancia recorrida con la fórmula $d = v_m t$ y que calcular v_m resulta relativamente fácil cuando la aceleración (la rapidez con que cambia la velocidad) es constante, dado que, por medio de una serie de transformaciones algebraicas puede obtenerse la fórmula $d = v_o t + \frac{1}{2} a t^2$ que permite calcular la distancia recorrida a partir de los valores de v_o (la velocidad inicial del recorrido), a (la aceleración) y t (el tiempo que dura el recorrido). Finalmente se plantea el caso en el que tanto la velocidad como la aceleración son variables con el propósito de que se hagan conscientes de que, en este caso, la velocidad media no es posible calcularla de la manera que se hizo cuando la aceleración era constante. Cuando los estudiantes se han hecho conscientes de que las estrategias utilizadas para calcular la distancia recorrida en los dos primeros casos, no pueden utilizarse en esta nueva situación, esto es, cuando tanto la velocidad como la aceleración son variables, se consideran concluidas las actividades de inicio.

Las actividades del segundo momento, esto es, las del momento de desarrollo, se diseñaron para conducir el proceso de estudio que permita resolver el problema que se planteó al final de las actividades de inicio, es decir, el problema de ¿Cómo calcular la velocidad promedio de un móvil cuando tanto la velocidad como la aceleración son variables? La estrategia utilizada parte de que los estudiantes han logrado reconocer que si un móvil se mueve por una trayectoria recta durante un cierto intervalo de tiempo en el que recorre una cierta distancia, entonces debe haber una velocidad constante con la que habría recorrido la misma distancia en el mismo intervalo de tiempo y que a esa velocidad es a la que se denomina velocidad promedio o simplemente velocidad media; esto con el objeto de hacer surgir el conflicto de cómo calcular dicho valor cuando lo que se conoce es la función que permite calcular el valor de la velocidad en cualquier instante del intervalo de tiempo que duró moviéndose el móvil ya que, de calcular la velocidad media se podrá calcular la distancia recorrida por el móvil multiplicando dicha velocidad por el valor del intervalo de tiempo que duró el recorrido. La estrategia utilizada en este modelo de enseñanza, para calcular la velocidad media del recorrido, en una primera etapa, consiste en un proceso de aproximación a la velocidad media a partir de dividir el intervalo de tiempo en un número cada vez mayor de sub-intervalos y tomar, de cada sub-intervalo, la velocidad máxima y la velocidad mínima y calcular, por una parte, el promedio de las velocidades máximas por sub-intervalo y, por otra, el promedio de las velocidades mínimas por sub-intervalo y observar que a medida que aumenta el número de sub-intervalos en que dividimos el intervalo, el promedio de las velocidades máximas irá disminuyendo pero siempre será mayor que la velocidad media de todo el intervalo; mientras que el promedio de mínimas irá creciendo, pero siempre será menor que el promedio de todas, de tal manera que se generarán dos sucesiones, una creciente, el de las velocidades mínimas y otra decreciente, el de las velocidades máximas cuya diferencia de ambos promedios, será cada vez menor, lo cual permitirá determinar el valor de la velocidad media de todo el intervalo como el valor límite de las dos sucesiones si la diferencia de los promedios tiende a cero, que equivale a decir que el promedio de mínimas y el promedio de máximas se irán aproximando al mismo valor que será necesariamente el promedio de todas las velocidades. Este proceso de aproximación permitió, a su vez, percatarse que para que el promedio de máximas se aproxime al promedio de mínimas, el valor de la velocidad máxima y el valor de la velocidad mínima, en cada sub-intervalo, tenderán a ser iguales y que el tamaño de los sub-intervalos tenderá a cero; este proceso de reflexión es con el propósito de que resulte comprensible y con sentido, hablar de que un intervalo de tiempo cualesquiera puede concebirse formado por un número infinito de sub-intervalos de tamaño infinitamente pequeño de tal manera que, si $v = f(t)$, permite calcular el valor de la velocidad en cada instante y dt representa el tamaño de un intervalo infinitamente pequeño, al que se denomina *diferencial* *de tiempo*, entonces $f(t)dt$ representa la distancia infinitamente pequeña que recorre el móvil en el instante considerado, que podemos representar con dx y llamar *distancia diferencial* o *diferencial de distancia* puesto que representa el producto de la velocidad, $f(t)$, por dt**,** un diferencial de tiempo**,** lo cual implica que $dx = f(t)dt$ y que $\frac{dx}{dt} = f(t)$**,** lo que a su vez equivale a decir que $f(t)$ es la derivada de x con respecto a t y de ahí deducir que x debe ser la función posición y la distancia recorrida por el móvil cuya velocidad sea la que representa $\boldsymbol{f(t)}$ será la suma de todas las distancias infinitamente pequeñas que recorrió el móvil en un intervalo de tiempo determinado. Si la suma de las distancias infinitamente pequeñas recorridas por el móvil en el intervalo de tiempo $[a, b]$ la representamos $\int_a^b f(t)dt$, entonces dicha expresión representará la distancia recorrida por el móvil en el intervalo de tiempo indicado y por tanto será igual a $x_b - x_a$ puesto que, conocida la *función posición*, la distancia puede calcularse restando a la posición final, la posición inicial; pero como lo que se conoce es la función derivada de la función posición, para obtener ésta es necesario *anti-derivar* la función $f(t)$, es decir, es necesario determinar la función cuya derivada es la función velocidad. Este proceso permite, en este contexto, concebir a *la integral* como una suma y a *anti-derivar* como un procedimiento para obtener el resultado de la suma y como consecuencia, pasar del problema de querer calcular la velocidad promedio al problema de calcular la suma de una cantidad infinita de cantidades infinitamente pequeñas utilizando como estrategia para obtenerla, la anti-derivación de la función velocidad, que constituirá el nuevo problema.

Las actividades del tercer momento, esto es, las actividades de cierre, cuyo propósito es institucionalizar lo aprendido, están diseñadas para que los estudiantes se den cuenta que el problema original planteado, esto es, el problema de *calcular la distancia que recorre un móvil al desplazarse por una trayectoria recta, durante un cierto intervalo de tiempo, cuando se conoce su velocidad,* puede resolverse de manera general concibiendo dicha distancia como la suma de un número infinito de distancias infinitamente pequeñas y como método general de resolución, la obtención de la función posición anti-derivando la función velocidad. Este ejemplo ilustra la manera en que el contexto genera lo que se denomina el significado semántico del objeto matemático.

Después de la situación problémica que hemos mostrado, relativa al movimiento, se diseñaron varias secuencias de enseñanza relacionadas con el cálculo del área de una región del plano que tiene al menos un lado curvo, que es gráfica de una función, el cálculo del volumen de sólidos de revolución, el cálculo de la longitud de una curva. Para cada situación problémica de las mencionadas se diseñó una secuencia de actividades didácticas con la misma estructura de la mostrada en el ejemplo; esto es, una serie de actividades de inicio, luego una serie de actividades de desarrollo y al final las actividades de cierre a través de las cuales la integral de la función $\int_a^b f(x)dx$ fue adquiriendo diversos significados contextuales, por ejemplo, en el caso del cálculo de áreas, la expresión $f(x)dx$ representa el área de un rectángulo diferencial donde $f(x)$ es su altura y dx es su base diferencial, que permite ver a la integral como la suma de las áreas diferenciales de un número infinito de rectángulos diferenciales y a la anti-derivada de $f(x)$ como la función con la que se calcula el área de la región señalada en el problema. Lo mismo para cada situación problémica.

Estas experiencias del uso de la integral permiten que el problema de obtener la anti-derivada de una función tenga sentido y se convierta en el significado sintáctico (operacional) de la misma como el procedimiento para obtener el resultado de una suma que tiene un número infinito de sumandos de tamaño infinitamente pequeño.

En la segunda etapa, estas actividades didácticas son desarrolladas por un grupo de estudiantes de ingeniería en un curso de Cálculo Integral, en una universidad del norte de México; durante el desarrollo de las actividades se realizan y registran observaciones de los sucesos que se presentan en cada uno de los momentos y al finalizar, los estudiantes entregan un reporte escrito de lo que hicieron al resolver las actividades. En la tercera etapa se planteó a esos mismos estudiantes una serie de problemas cuya resolución requiere el uso de la función integral con el propósito de observar y valorar la manera en que proceden al analizarlos y tratar de resolverlos, además de formularles una serie de interrogantes orientadas a evaluar los significados construidos de los objetos matemáticos que constituyen el objeto matemático integral de una función. En esta tercera etapa también se hicieron observaciones y registros de lo sucedido y los estudiantes entregaron un reporte escrito de lo realizado.

Finalmente, en la cuarta etapa, se analizaron y valoraron, tanto las observaciones registradas durante la realización de las actividades didácticas y la resolución de los problemas; como los reportes escritos de cada uno de los estudiantes; con el propósito de formular las conclusiones relacionadas con la interrogante fundamental de la investigación.

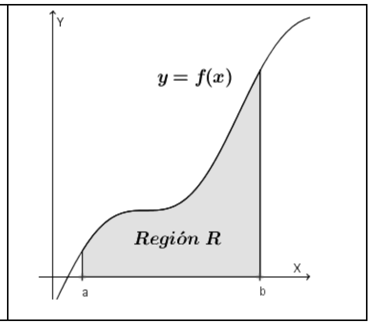
Conclusiones

Del análisis de las observaciones registradas en las etapas 2 y 3 del desempeño de los estudiantes en el proceso de resolución de las actividades didácticas que se les propusieron, se desprenden dos tipos de conclusiones: unas relativas a los significados semánticos que los estudiantes construyeron del objeto integral de una función, que resultaron en buena medida, acordes a las expectativas de la investigación, y otras que ponen en evidencia las dificultades que se presentan al tratar de construir el significado sintáctico de la integral que implica reconocer la expresión $\int_a^x f(t)dt$ como función y su relación con la función $f(t)$
Al final se diseñó una secuencia de actividades para institucionalizar los significados sintácticos (operacionales) del objeto matemático integral de una función en la que el énfasis está puesto en los diversos métodos de integración y en las propiedades fundamentales de la integral.

Las secuencias didácticas elaboradas conformadas por una serie de problemas relativos a la situación problémica seleccionada, dieron lugar a la entrega de diversos reportes por parte de los estudiantes y a la aplicación de diversos cuestionarios que permitieron valorar los avances y detectar las dificultades. La valoración que se ha hecho de los resultados obtenidos indica que un porcentaje de aproximadamente el 75% dio muestras de un nivel aceptable de desempeño académico en la resolución de diversos problemas. En las reflexiones hechas por escrito por cada uno de los estudiantes respecto a lo que consideran haber aprendido en el curso, un porcentaje muy alto de aproximadamente el 90% opina positivamente de su experiencia de haber participado en el curso. Para terminar este reporte, muestro el problemario de autoevaluación que se propuso como la última actividad a realizar por los estudiantes.

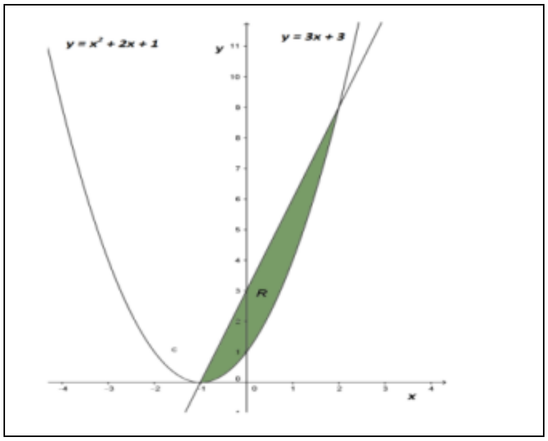
Problemario de autoevaluación

Problema 1
El valor del área de la región R señalada en la Figura se obtiene calculando el valor de $\int_a^b f(x)dx$. Sabiendo eso, indica ¿Qué representa, en ese caso:

a) $f(x)$ **para cada valor de** x**?** **b)** dx**?** c) $f(x)dx$**?** **d) El signo** $\int$? e) a y b? **f)** $\int_a^b f(x)dx$**?** $F(x) = \int_a^x f(u)du$**?** h) ¿Qué relación existe entre las funciones $F(x)$ y $f(x)$?	

Problema 2

Explica al menos dos maneras de calcular el área de la región sombreada y calcúlala



Problema 3

Si $v = f(t)$ es la función que representa la velocidad de una partícula que se desplaza por una línea recta, indica ¿Qué representa:

a) $f(t)$ para cada valor de t? b) dt? c) $f(t)dt$? d) El signo $\int$?

e) a y b? f) $\int_a^b f(t)dt$? g) $F(t) = \int_a^t f(x)dx$?

h) ¿Qué relación existe entre las funciones $F(t)$ y $f(t)$?

Problema 4

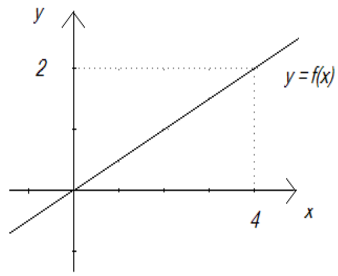
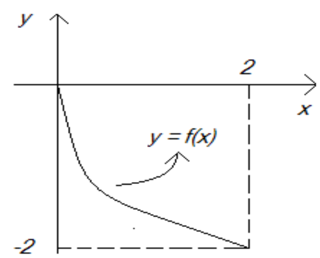
Si $F(x) = \int_a^x f(u)du$ es la función con la que se calcula el volumen de un sólido de revolución que tiene como eje de rotación el eje X, Qué representa:

a) u b) $f(u)$ c) $d(u)$ d) $f(u)d(u)$?

Problema 5

Y cuando el eje de rotación es el eje Y, ¿ $Qué\ representan$?

Problema 6

La siguiente gráfica corresponde a la función $y = f(x)$. Determina el valor de $\int_0^4 f(x)\,dx$ 	Sabiendo que el área de la región sombreada es $\frac{5}{4}$ determina el valor de $\int_0^2 f(x)\,dx$, cuya gráfica se muestra a continuación 

Problema 7
Si $y = f(x)$ es una función cualquiera, entonces $F(x) = \int f(x)dx$ y $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$; en este caso ¿Qué representa $F(x)$ y $F(b) - F(a)$? Y ¿Cómo de obtiene $F(x)$ a partir de $f(x)$?

Referencias bibliográficas

Ávila, R. y Ávila, J. (2016). El significado de la integral de una función a partir de la resolución de problemas de acumulación. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30*, 747-755.

Filloy, E.; Rojano, T. y Solares A. (2003) Two meanings of the 'equal' sign and senses of comparison and substitution method. *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2, pp. 417-424. Hawaii, USA.

Godino, J. (2010a). *Perspectiva de la didáctica de la matemática como disciplina tecnocientífica.* (Consultado el 12-01-2011 de http://www.ugr.es/local/jgodino)

Godino, J. (2010b). *Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático.* (Consultado el 12-01-2011 de http://www.ugr.es/local/jgodino)

Ímaz, C. y Moreno, L. (2010). *La génesis y la enseñanza del Cálculo. Las trampas del rigor.* Trillas. México.

ANÁLISIS HISTÓRICO DEL CÁLCULO FRACCIONARIO

Adrian Muñoz, Flor Rodríguez, Martin Arciga
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
adrianmunozorozco@hotmail.com, flor.rodriguez@uagro.mx, mparciga@gmail.com

Resumen
El cálculo fraccionario actualmente tiene un alto potencial de desarrollo en la modelación matemática a través de las ecuaciones diferenciales fraccionarias y permite además la extensión, a órdenes no enteros, de conceptos como la derivada y la integral. Es un nuevo enfoque que tiene antecedentes en los trabajos de Leibniz. Una problemática asociada a los conceptos matemáticos que se enseñan en la actualidad, reside en que estos carecen de una contextualización de su propia génesis y en consecuencia se presentan como objetos terminados sin un precedente histórico. En este documento presentamos un avance de la obra de Liouville (1832) la cual es considerada por los historiadores como fundamental en el desarrollo del cálculo fraccionario, usando el método de investigación histórica y análisis cualitativo de textos. La investigación nos permite identificar algunos aspectos históricos y epistemológicos que permitieron el desarrollo del cálculo fraccionario.

Palabras clave: historia, cálculo fraccionario, Liouville, análisis cualitativo

Abstract
Nowadays, fractional calculus has a high development potential in mathematical modeling through fractional differential equations and it also allows the extension, to non-integer orders, of concepts such as derivative and integral. It is a new approach that includes previous Leibtniz´s research works. An issue related to mathematical concepts that are taught at present is the lack of their own genesis contextualization. Consequently, they are presented as ended objects with no historical precedent. In this paper, we present an advance of the analysis of Liouville's work (1832) which is considered essential in the development of the fractional calculation, by historians. We use the historical research method and the qualitative analysis of texts. The investigation let us identify some historical and epistemological aspects that led to the development of fractional calculus development.

Key words: history, fractional calculus, qualitative analysis

Introducción

La investigación histórica en didáctica de la matemática tiene como objetivos no sólo el generar aportes en los procesos de enseñanza aprendizaje a través de propuestas de aula sino en el sentido más general interpretar, evaluar y sintetizar evidencia sistemática y objetiva para establecer hechos y extraer conclusiones acerca de acontecimientos pasados. Este tipo de investigación se ha ido fortaleciendo en las últimas tres décadas a través de investigaciones como la de Anacona (2003), quien menciona que desde los estudios históricos se pretende mostrar que las matemáticas son una construcción humana, y como tal están ligadas al ámbito social y cultural que las produce.

La problemática principal consiste en que los conceptos y las ideas matemáticas que se tratan a nivel escolar, se presentan de una forma cerrada y acabada, como si se tratara de un resumen de los conocimientos más desarrollados en la ciencia, olvidando que han surgido después de un largo proceso de gestación. (Sierra, 2000; González, 2004; Nolla, 2006; Cantoral & Farfán, 2004). Es decir, la enseñanza actual de la matemática deja de lado los sucesos, los problemas y las dificultades que incidieron en la formación de un objeto matemático.

Desde la investigación histórica en didáctica de la matemática, se han analizado diferentes conceptos matemáticos, por ejemplo Valdivé y Garbien (2008) estudiaron los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal; Oller y Gairín (2013) realizaron una revisión histórica de algunos conceptos fundamentales relacionados con la proporcionalidad aritmética, como son la razón y la proporción; Gallardo y Basurto (2010) desarrollaron una investigación histórica en la cual destacan tres episodios cruciales en la trayectoria hacia la expansión del dominio numérico de los naturales a los enteros; y Doorman y Maanen (2008) investigaron sobre los orígenes de la derivada con el objetivo de generar reflexiones históricas que contribuyan a mejorar las prácticas de enseñanza de las matemáticas. Bajo este enfoque, las investigaciones se caracterizan por interpretar cada uno de los aspectos incidieron en la constitución de los conceptos matemáticos, tanto para proporcionar un marco histórico social y cultural como para buscar favorecer los procesos de enseñanza-aprendizaje del mismo.

En este sentido, esta investigación muestra un análisis histórico epistemológico del concepto de cálculo fraccionario, dado que este concepto permite modelar crecimiento de poblaciones, fenómenos físicos y fenómenos sociales, que usualmente no se ajustan de forma idónea a los modelos usuales como el exponencial. La revisión bibliográfica pone en manifiesto que desde la Didáctica de la Matemática son escasos los trabajos sobre el Cálculo Fraccionario y particularmente en la línea histórica.

Este artículo se presenta un avance de investigación que describe a través del análisis histórico y del análisis cualitativo de textos, las primeras definiciones presentadas por Liouville (1832) sobre el Cálculo Fraccionario y algunos de los problemas que se resolvían empleando este concepto.

Marco Teórico y Metodológico

El enfoque histórico ofrece la posibilidad de estudiar los aspectos que dieron origen a un concepto determinado, mostrando que las matemáticas son el resultado de un proceso en continua evolución, en los cuales se han presentado dificultades y épocas de estancamiento. Este enfoque, deslumbra como aparecen las teorías matemáticas el contexto en las cuales surgieron y los problemas que resolvieron (Sierra, 2000). Desde la aportación hacia la enseñanza, la investigación histórica le permite al docente de matemáticas mejorar su discurso matemático (Anacona, 2003); y desde la aportación del aprendizaje se favorece el entendimiento de las dificultades que pueden tener los estudiantes en ordenar y establecer lo que es una demostración (Sierra, 2000) y de enseñar los objetos de forma distinta a la que se presenta en el aula de forma acabada y como una verdad absoluta (González, 2011).

Desde el aporte hacia la historia social de las matemáticas, el enfoque histórico provee información sobre el contexto sociocultural donde emerge el concepto matemático, mostrando que las matemáticas son producto de las actividades culturales enmarcadas en un contexto (Sierra, 2000). Así, desde esta perspectiva se estudia el papel de las instituciones educativas, al análisis de textos de enseñanza, revisión de currículos, directrices políticas-educativas, y de todos aquellos aspectos que impidieron o fomentaron el desarrollo de un concepto matemático (Anacona, 2003). Este tipo de estudios permite una comprensión más profunda de las dificultades que han surgido a lo largo de la constitución de un objeto, relacionándolas con las dificultades que enfrentan los estudiantes en la comprensión de los conceptos (González, 2011). Desde el aporte hacia la enseñanza de las matemáticas, el enfoque histórico sustenta diseños de propuestas de enseñanza de las matemáticas que contemplan conceptos o métodos históricos que pueden incidir, directa o indirectamente, en las reflexiones sobre la enseñanza o el aprendizaje de las matemáticas (Anacona, 2003). Por lo general en este tipo de investigaciones se recurre a teorías de la didáctica de las matemáticas para diseñar, aplicar, y analizar el impacto de dichas propuestas; como por ejemplo la transposición didáctica que explica las transformaciones que tiene el saber matemático hasta convertirse un objeto de enseñanza (Chevalard, 1985).

Ahora bien, para el análisis de los textos recurrimos al método de investigación histórica, el cual es definido por Cohen y Manion (2002) como la situación, evaluación y síntesis de la evidencia sistemática y objetiva con el fin de establecer los hechos y extraer las conclusiones acerca de acontecimientos pasados. Este método indica las etapas elección de tema, recopilación de datos, evaluación y redacción del informe de investigación. La elección de tema consiste en escoger el tema que se va a estudiar, considerando su impacto en la Didáctica de la Matemática, el problema y objetivo de investigación y las acotaciones necesarias. La recopilación de los datos consiste en identificar distintas fuentes de información como documentos escritos, sonoros pitagóricos, memorias, diarios, periódicos, revistas, guías, libros de actas entre otros. Los elementos de consulta se catalogan en fuentes primarias y fuentes secundarias.

La evaluación que plantea el método, consiste en la autenticidad de la fuente y la precisión de la información brindada, estos procesos se conocen como crítica externa y crítica interna respectivamente. En la crítica externa se evalúa que la fuente encontrada se encuentre en buen estado, que sea legible, que la información no está distorsionada o que se trate de una falsificación de la obra original. En la crítica interna se analiza la relevancia de la información contenida en las fuentes verificadas, y los aportes de estas a la investigación. Finalmente la cuarta fase consiste en sintetizar lo que se ha desarrollado en las tres fases anteriores, mediante la presentación del informe. Esta es quizás la fase más difícil de este tipo de investigaciones, ya que conlleva a niveles elevados de objetividad, creatividad y análisis sistemático de las fuentes encontradas.

Específicamente, para la crítica interna se recurrirá al análisis cualitativo de textos propuesto por Kuckartz (2014), que tiene como objetivo de realizar análisis de textos con altos estándares de objetividad, fiabilidad y valides. Esta metodología, se divide en cinco fases: en la primera se lee y se interpretar el texto de la investigación; en la segunda se construyen categorías; en la tercera se codifican los elementos del texto; en la cuarta se analizan están categorías y en la última fase se presentan los resultados. Figura 1

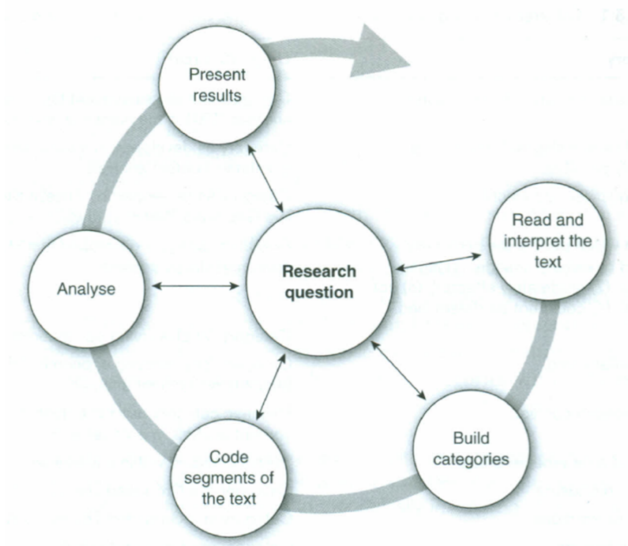


Figura 1. Proceso general del análisis cualitativo de textos (Kuckartz, 2014).

Desarrollo del Cálculo Fraccionario desde el trabajo de Liouville

Para analizar el aporte de Liouville consideraremos la fuente *Mémoire Sur quelques Questions de Géométrie et de Mécanique, et sur un nouveau genre de Calcul pour résoudre ces Questions* escrita en 1832 y publicada en el *Journal de l'École Polytechnique.* Dado que, en investigaciones como las de Ross (1977) y Sánchez (2011) consideran esta obra como relevante en el desarrollo del Cálculo Fraccionario, ya que en esta se presenta las primeras definiciones formales de este concepto y además las primeras aplicaciones del mismo.

Ahora bien, de acuerdo con la metodología de análisis de textos en primer lugar se realiza una lectura concienciada por parte de los investigadores de la obra de Liouville (1832) y a partir de esa lectura se diseñan las siguientes categorías de análisis presentadas en la tabla 1.

Tabla 3. Categorías de análisis.

Fuente de análisis	Categorías de Análisis	Códigos
Liouville (1832)	Definiciones	DE
	Teoremas	TE
	Tipos de problemas	TP

Del análisis se identifica que la primera definición dada por Liouville sobre el cálculo fraccionario es

$$\frac{d^{\mu}(f)}{dx^{\mu}} = \sum A_m\, e^{mx} m^{\mu} \qquad (1)\ \text{DE}$$

Donde μ es el orden la derivada, y μ puede ser un número entero, racional, irracional o complejo; además si μ es negativo se considera que es una integral fraccionaria**.** Para Liouville llegar a esta definición parte de la premisa de que toda función se puede expresar como la suma de funciones exponenciales

$$f(x) = \sum A_m\, e^{mx} \qquad (2)$$

Y al derivar (2) n veces, con $n \in N$ se obtiene $\frac{d^n(f)}{dx^n} = \sum A_m\, e^{mx} m^n$, dado que la derivada de una función exponencial es la misma función multiplicada por la derivada interna en este caso m. Ahora, de forma arbitraria Liouville expande este razonamiento para $\mu \in \mathbb{C}$ llegando a la definición presentada en (1). Es decir, Liouville generaliza la derivada de orden n, con $n \in Z$ a una derivada de orden μ, con $\mu \in \mathbb{C}$.

Liouville considera que la definición (1) presenta algunas deficiencias entre ellas, la dificultad para expresar cualquier función como la suma de funciones exponenciales, el radio de convergencia de esta expansión; y que para llegar a una definición solida de un nuevo campo de análisis no basta con crear denominaciones aleatorias y anotaciones arbitrarias. Por estos motivos Liouville considera que es necesario definiciones más amplias y sólidas llegando a dos definiciones más del cálculo Fraccionario, específicamente para la función $f(x)=\frac{1}{x}$, para posteriormente generalizarla para la función $f(x)=\frac{1}{x^n}$. Estas definiciones se presentan en su obra como:

$$\frac{d^\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^\mu}=\frac{(-1)^\mu\Gamma(1+\mu)}{x^{1+\mu}} \qquad (3)$$

con $\mu \in \mathbb{C}$ y Γ conocida como la función Gama (DE); y

$$\frac{d^\mu\left(\frac{1}{x^n}\right)}{dx^\mu}=\frac{(-1)^\mu\Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n)x^{n+\mu}} \qquad (4)$$

con $\mu \in \mathbb{C}$ (DE).

Para llegar a la definición de la ecuación (3), Liouville consideró dos casos. El primero para $x>0$ y el segundo para $x<0$. Para el primer caso, parte de la igualdad

$$\frac{1}{x}=\int_0^\infty e^{-\propto x}\,d\alpha \qquad (5)$$

la cual puede ser verificada al calcular la integral de lado derecho de la igualdad en términos de α. Ahora bien, derivando a ambos lados de la ecuación (5) en términos de x, y empleando el resultado de la ecuación (1) se obtiene

$$\frac{d^\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^\mu}=\int_0^\infty e^{-\propto x}\,(-\alpha)^\mu\,d\alpha \qquad (6).$$

Para el segundo caso, se recurre a la equivalencia $\frac{1}{x}=-\int_0^\infty e^{\propto x}\,d\alpha$ (7) y empleando un pensamiento análogo al primer caso se llega a

$$\frac{d^\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^\mu}=-\int_0^\infty e^{\propto x}\,\alpha^\mu d\alpha \qquad (8)$$

Ahora bien, las expresiones encontradas en (6) y (8) pueden verse sintetizadas en una única expresión considerando dos aspectos: el primero es la sustitución $\alpha x=\theta$ en (6) y $\alpha x=-\theta$ en (8); el segundo aspecto es considerar la función gama definida como

$$\Gamma(\mu)=\int_0^\infty e^{-\theta}\,(\theta)^{\mu-1}d\theta$$

con $\mu \in \mathbb{C}$. Así, realizando las sustituciones mencionadas y realizando los procesos algebraicos necesarios, la expresión en (6) se convierte en

$$\frac{d^\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^\mu}=\frac{(-1)^\mu\Gamma(1+\mu)}{x^{1+\mu}} \qquad (3) \qquad \text{(DE)}$$

Dado que si $\alpha x=\theta$ entonces $\alpha=\frac{\theta}{x}$ y $d\alpha=\frac{d\theta}{x}$ y además $\int_0^\infty e^{-\theta}\,(\theta)^\mu d\theta=\Gamma(1+\mu)$. Realizando un proceso análogo en (8) como el desarrollado en (6) se llega una vez más a (3) cuando $x<0$.

Considerando ahora, el caso de la tercera definición del Cálculo Fraccionario, expresada en (4) de la función $f(x) = \frac{1}{x^n}$. Liouville parte de que $x > 0$ y de la sustitución $\alpha x = \theta$ en la integral $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\, \alpha^{n-1} d\alpha$, obteniendo la expresión

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\, \alpha^{n-1} d\alpha = \int_0^\infty e^{-\theta} \left(\frac{\theta}{x}\right)^{n-1} \left(\frac{d\theta}{x}\right) = \frac{\int_0^\infty e^{-\theta}\theta^{n-1} d\theta}{x^n} \qquad (9)$$

En consecuencia, al sustituir $\int_0^\infty e^{-\theta}\theta^{n-1} d\theta$ por $\Gamma(n)$ y al realizar una trasposición de términos en (9) se llega a

$$\frac{1}{x^n} = \frac{\int_0^\infty e^{-\alpha x}\alpha^{n-1} d\alpha}{\Gamma(n)} \qquad (10)$$

y al derivar a ambos lados μ veces d (10), empleando la definición (1) y en términos de x,se llega a

$$\frac{d^\mu\left(\frac{1}{x^n}\right)}{dx^\mu} = \frac{\int_0^\infty e^{-\alpha x}\alpha^{n-1}(-\alpha)^\mu d\alpha}{\Gamma(n)},$$

lo que puede reescribir como

$$\frac{d^\mu\left(\frac{1}{x^n}\right)}{dx^\mu} = \frac{(-1)^\mu \int_0^\infty e^{-\alpha x}\alpha^{n+\mu-1} d\alpha}{\Gamma(n)} \qquad (11).$$

Al realizar nuevamente la sustitución $\alpha x = \theta$ en (11) conduce a

$$\frac{d^\mu\left(\frac{1}{x^n}\right)}{dx^\mu} = \frac{(-1)^\mu \int_0^\infty e^{-\theta}\theta^{n+\mu-1} d\alpha}{\Gamma(n)x^{n+\mu}},$$

Llegando finalmente a

$$\frac{d^\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^\mu} = \frac{(-1)^\mu\Gamma(1+\mu)}{x^{n+\mu}} \qquad (4) \qquad \text{(DE).}$$

En general las definiciones presentadas en (1) y (4) son conocidas por los historiadores como la primera y segunda definición de Liouville sobre el cálculo fraccionario. Sin embargo, desde nuestra interpretación se presentaron tres definiciones, pero si se analiza a fondo la definición en (3) es un caso particular en (4) cuando $n = 1$. Además, desde la perspectiva de Liouville las definiciones (3) y (4) son consideradas como dos simples ejemplos de una teoría mucho más avanzada.

Una de las intenciones con las cuales Liouville presenta esta memoria es con el objetivo de solucionar nueve problemas, que desde las teorías matemáticas ya conocidas hasta el momento hay algunas impresiones, o que sencillamente no se pueden solucionar. Para ello, Joseph recurre a la demostración de tres teoremas, los cuales será considerado como ampliaciones a las definiciones presentadas hasta el momento.

Ahora bien, Liouville no utiliza un enunciado para estos teoremas, simplemente los presenta como una ecuación, en este orden de ideas los tres teoremas presentados en la obra de Liouville sin profundizar en ellos por razones de extensión:

$$\int^u \phi(x) dx^\mu = \frac{1}{(-1)^\mu\Gamma(\mu)} \int_0^\infty \phi(x+\alpha)\alpha^{\mu-1} d\alpha \qquad \text{(TE);}$$

$$\frac{d^\mu\phi(x)}{dx^\mu} = \frac{1}{(-1)^p\Gamma(p)} \cdot \int_0^\infty \frac{d^n\phi(x+\alpha)}{dx^n}\, \alpha^{p-1} d\alpha \qquad \text{(TE);}$$

$$\int_0^\infty \phi(x^2+\alpha^2)\alpha^{2\mu-1} d\alpha = \frac{(-1)^\mu\Gamma(\mu)}{2} \int_0^u \phi(x^2)\, d\,(x^2)^\mu \quad \text{(TE).}$$

Donde, en los tres casos $\phi(x) = \sum A_m \, e^{mx}$ y p es un número real positivo.

Una vez Liouville realiza la demostración de los teoremas anteriores pasa la enunciación de nueve problemas y solución de los mismos utilizado los teoremas demostrados. Los problemas enunciados tienen las siguientes características: el primero referente a geometría (TP). El segundo y el tercero relacionan con fuerzas atractivas, que se derivan de elementos de hilos conductores, es decir electromagnetismo (TP). El cuarto y el quinto problema también aluden a fuerzas atractivas pero en contextos diferentes, para el cuarto problema se analiza la atracción entre dos sustancias (física mecánica) contenidas en recipientes cuyo formas son paralelipedos (TP), y en el quinto también se expresa en términos de atracción entre dos sustancias, sin embargo en este caso se considera cuerpos en forma esférica ((TP). El sexto problema, de la tautochrone de física mecánica. El séptimo y octavo de geometría (TP), y noveno nuevamente de fuerzas de atracción (TP).

Conclusiones

El análisis histórico del cálculo fraccionario permite comprender como fue el desarrollo de este concepto, y en especial si se consideran fuentes primarias como en este caso. Destacando que uno de los motivos por lo cual nace este concepto es por la necesidad de los matemáticos de generalizar pasado de un orden natural a uno complejo. Asimismo, se hace hincapié que es la obra de Liouville donde se presenta una amplia aplicación de este concepto ya que desde su nacimiento en 1965 (Ross, 1997), era un concepto que se creía prácticamente teórico, sólo se había encontrado una aplicación en el problema de la tautócrona que Liouville retomó en el problema seis. Este análisis también muestra la aplicabilidad de este concepto es diferentes campos como la geometría, la física mecánica y el electromagnetismo. También se hace explícitos la noción de ecuaciones diferenciales, dado que en algunos de los problemas resueltos se trataba de encontrar la función $\phi(x)$.

Desde el punto de vista didáctico los problemas reportados en la obra de Liouville pueden ser retomados por docentes universitarios e involucrarlos en sus prácticas de enseñanza. Además, pueden ser considerados en futuras investigaciones mediante rediseños para ser llevados al aula de clase y posteriormente analizado el impacto de estos problemas en el aprendizaje con otras teorías de educación matemática.

Referencias bibliográficas

Anacona, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *Revista EMA*, *8*(1), 30-46.

Cantoral, R., & Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del Cálculo*. México: Internacional Thomson Editores.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique; du savoir savant au savoir enseigné*. Paris: La Pensée Sauvage.

Cohen, L. y Manion, L. (2002). *Métodos de investigación Educativa.* Madrid: La Muralla.

Dorman, M, y Maanen, J. (2008). A Historical Perspective on Teaching and Learning Calculus. *Australian Senior Mathematics Journal*, *22*(2), 4-14.

Gallardo, A., y Basurto, E. (2010). La negatividad matemática: antesala histórica de los números enteros. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(4), 255-268.

González, M. (2011). Revisitando los conceptos de máximo y mínimo a través del libro de L'Hôpital. *Epsilon - Revista de Educación Matemática, 28*(77), 83-97.

González, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma: Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, (45), 17-28.

Kuckartz, U. (2014). *Qualitative Text Analysis: A Guide to Methods, Practice and Using Software*. London: Sage publications.

Liouville, J. (1832). Mémoire Sur quelques Questions de Géométrie et de Mécanique, et sur un nouveau genre de Calcul pour résoudre ces Questions. *Journal de l'École Polytechnique*, *21*(13), 1-69.

Nolla, R. (2006). *Estudis i activitats sobre problemes clau de la història de la matemàtica*. Barcelona: l'Institut d'Estudis Catalans.

Oller, A., & Gairín, J. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *16*(3), 317-338.

Ross, B. (1977). The development of fractional calculus 1695-1900. *Historia Matemática, 4,* 75-89.

Sánchez, J. (2011). Génesis y desarrollo del Cálculo Fraccional. *Pensamiento Matemático*, *1*(2), 1-15.

Sierra, M. (2000). El papel de la historia de la matemática en la enseñanza. *Números,* (43-44), 93-96.

Valdivé, C., y Garbin, S. (2008). Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(3), 413-450.

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

ENFOQUES TEÓRICOS EN INVESTIGACIÓN CON TECNOLOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Daysi Julissa García-Cuéllar
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. (Brasil)
ra00193072@pucsp.edu.br, garcia.daysi@pucp.pe

Resumen
Existen diversas investigaciones en educación matemática que centran su estudio en el uso de las tecnologías, las cuales nos hace reflexionar sobre: ¿Qué enfoques teóricos se utilizan en investigaciones en educación matemática? La conferencia especial tuvo por objetivo dar a conocer diferentes enfoques teóricos que son utilizados en investigaciones en Educación Matemática para la integración de tecnologías en la enseñanza y aprendizaje. Se abordarán antecedentes y conceptos centrales de los enfoques de Transposición Informática, Enfoque Instrumental y la Orquestación Instrumental.

Palabras clave: transposición informática; enfoque instrumental, orquestación instrumental, tecnologías

Abstract
There are several researches in mathematics education that focus their study on the use of technologies, which makes us reflect on: What theoretical approaches are used in mathematics education researches? The special lecture aimed to present the different theoretical approaches that are used in mathematics education researches towards the integration of technologies in teaching and learning. The background and central concepts of Information Technology Transformation, Instrumental Approach and Instrumental Orchestration will be tackled.

Key words: information technology transformation; instrumental approach, instrumental orchestration, technologies

Introducción

Las tecnologías están inmersas en diversos ámbitos como el laboral, el cultural, el social y el educativo. Es en este último que las tecnologías generan nuevas formas de trabajo, recursos, procesos de enseñanza y aprendizaje. Por ello, se presenta la necesidad de investigar el uso de las TIC en el aula.

Para Gallegos y Peña (2012), la integración y la utilización de las TIC es el centro de muchas investigaciones en Educación Matemática.

> La integración y utilización de las TIC en el proceso educativo de matemáticas es un asunto que viene ocupando el trabajo de los investigadores en Educación Matemática. La investigaciones tratan de determinar los posibles beneficios que la utilización de las TIC conlleva, así como diversas metodologías y entornos interactivos multimedia de aprendizaje

> que produzcan mejoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Gallegos et al. 2012, p.11).

El presente trabajo se propone abordar algunos enfoques teóricos que son usados en investigaciones con la integración de las tecnologías a los procesos de enseñanza y aprendizaje en matemática. La discusión se centrará en la pregunta: ¿Qué enfoques teóricos se utilizan en investigaciones en educación matemáticas y de qué ofrecen dichos enfoques?

Enfoques teóricos

A continuación se presentas los antecedentes y conceptos centrales de tres enfoques teóricos sobre la integración de las tecnologías en Educación Matemática, estos son: La Transposición Informática de Balacheff (1994), el Enfoque Instrumental de Rabardel (1995) y la Orquestación Instrumental de Trouche (2004).

Transposición informática

Balacheff (1994), crea este enfoque a partir de la Inteligencia Artificial de Bruillard (1991) y Transposición Didáctica de Chevallard (1991).

El objetivo práctico de la Inteligencia Artificial (IA) es el diseño e implementación de dispositivos informáticos cuyo comportamiento parece inteligente, es decir, que la observación del sistema llevaría a pensar que su comportamiento está guiado por el razonamiento. El desafío de IA en el campo de la didáctica es crear condiciones favorables para la construcción del estudiante de un conocimiento aceptable con referencia a un objeto de instrucción y proporcionar información relevante.

En cuanto a la Transposición Didáctica, tiene por objeto de estudio del saber, el saber matemático que tiene un lugar en el Edificio Matemático (saber sabio o erudito), que no es el mismo en el que se sitúa en la matemática escolar (Saber enseñado). La distancia que hay entre ambos saberes, se produce por la serie de transformaciones que los hacen accesible a un determinado nivel. Considerando que el saber del profesor y su relación con el saber sabio es base de este estudio, Chevallard dice:

> "El profesor tiene que enseñar una parte del "saber sabio o erudito", del cual los matemáticos profesionales e investigadores puros son sus poseedores y fabricantes. La sociedad demanda enseñar una parte de este saber, lo que supone que ella debe tener utilidad social. Para responder a esta demanda, es necesario transformar el conocimiento para que se vuelva enseñable a un nivel dado. Este punto es clave en cuanto a que el profesor debe cuestionarse acerca de su relación con el saber a enseñar, así como con el saber erudito"

Para Balacheff (1994) el desarrollo de ambientes informáticos y la introducción de las tecnologías en las escuelas trae nuevas Transformaciones. El autor introduce el término de Transposición informática para hablar del tratamiento del conocimiento que permite representarlo e implementarlo en dispositivos informáticos.

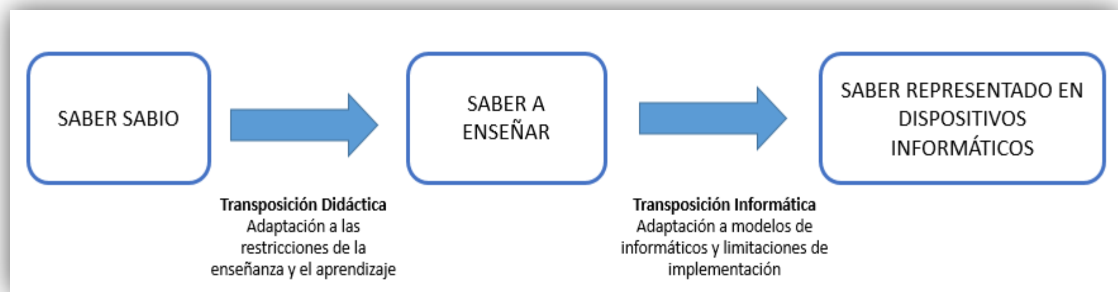


Figura 1. Esquema que explica cómo se relaciona la transposición didáctica y la informática. (Elaboración propia)

Para el autor una "representación del mundo" no es el "mundo" Por ello, diferencia tres universos relacionados con un dispositivo informático:

- *El universo interno*: Representación operativa por lenguajes de programación, dispositivo informático
- *La interfaz* como un lugar de comunicación entre el usuario y el dispositivo informático
- *El universo externo*, en el que se encuentra el usuario y donde posiblemente sea accesible otros dispositivos

La figura 2, se muestra un ejemplo que da Balacheff sobre estos tres universos.

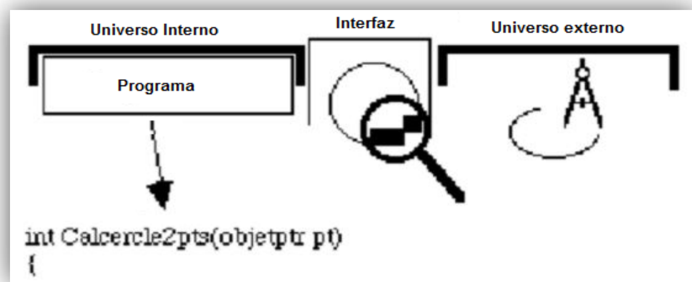


Figura 2. Tres universos relacionados con un dispositivo informático. Balacheff (1993).

La figura muestra el ejemplo del círculo. En el *universo interno*, asociado a líneas de programa en un idioma dado, esta representación sufre restricciones específicas de este idioma y la forma en que se implementa. En *la interfaz*, el círculo es un conjunto de píxeles en un estado particular, por ejemplo negro en una pantalla en blanco. Dependiendo de las características de la pantalla, el diseño del círculo producido por el dispositivo informático se percibirá más o menos como un círculo en el sentido común. De hecho, en cualquier caso, es un conjunto complejo de píxeles que no se refiere a ningún conjunto de líneas en el sentido habitual de la geometría. En el *universo externo*, el círculo es una entidad cuya naturaleza está vinculada a los modos de representación y tratamiento disponibles, pero también a las clases de situaciones asociadas con él.

Aspectos del Enfoque Instrumental

Este enfoque surge a partir de la Ergonomía cognitiva de Rabardel (1995) y la Teoría Antropológica de lo didáctico de Chevallard (1999).

El Enfoque Instrumental aborda la dimensión tecnológica de la Educación Matemática, articulando los aspectos importantes de la integración tecnológica en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Salazar (2009), en su investigación, presenta las nociones claves de este Enfoque son las siguientes:
Esquema: Es una organización invariante de la conducta del sujeto para una clase determinada de situaciones.
Artefacto: Es un objeto material o simbólico, destinado a dar sustento a la actividad del sujeto en la ejecución de un cierto tipo de tarea.
Instrumento: Es lo que un sujeto construye a partir del artefacto (figura 3); es entonces una entidad mixta que contiene a la vez un artefacto, material o no, y esquemas de utilización construidos por el sujeto durante su interacción.

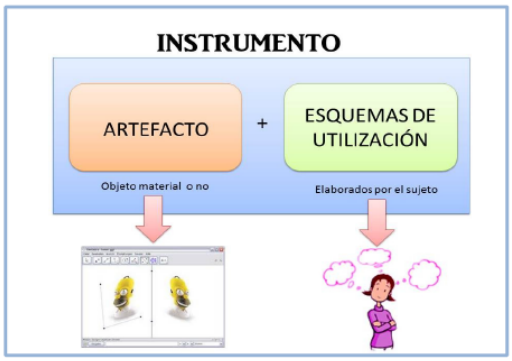


Figura 3. Componentes de un instrumento. Tomado de García-Cuéllar (2014)

De acuerdo con Rabardel (1995), el Enfoque Instrumental estudia la diferencia que existe entre el artefacto, instrumento y los procesos que desenvuelven la transformación progresiva del artefacto en instrumento, transformación que denominó como proceso Génesis Instrumental. El autor considera tres polos importantes en la Génesis instrumental, estos son: *el sujeto*, que puede ser un usuario, operario, trabajador o agente; *el instrumento*, que se refiere de la herramienta, máquinas, sistemas, utensilio, etc.; y *el objeto*, al cual va dirigida la acción con ayuda del instrumento, este puede ser la materia prima, objeto de la actividad o trabajo.

El investigador sostiene que el instrumento no existe en sí, sino que es el resultado de asociar el artefacto a la acción del sujeto, como medio para la misma. El autor señala que el artefacto pasará al estado de instrumento, cuando el sujeto le asigne los esquemas de utilización correspondientes.

En cuanto a la Génesis Instrumental, esta consta de dos dimensiones: La instrumentalización y la instrumentación.

> Los procesos de *instrumentalización* están dirigidos hacia el artefacto: selección, agrupación, producción e institución de funciones, usos desviados, atribuciones de propiedades, transformaciones del artefacto, de su estructura, de su funcionamiento, etc. […] los procesos de *Instrumentación* están relacionados con el sujeto: con la emergencia y evolución de los esquemas sociales de utilización y de acción instrumentada: su constitución, su evolución por acomodación, coordinación y asimilación recíproca, la asimilación de artefactos nuevos a los esquemas ya constituidos, etc. (Rabardel, 1995, p. 215).

Por lo anterior, las dos dimensiones de la Génesis Instrumental, dependen de su orientación:
La instrumentalización está dirigida hacia la parte artefactual del instrumento, consta del enriquecimiento de las propiedades del artefacto por parte del sujeto. Es decir, es el resultado de la atribución de una función al artefacto por parte del sujeto.

La instrumentación está dirigida hacia el sujeto. Se refiere a la construcción de esquemas de uso por parte del sujeto, relativos a la ejecución de ciertas tareas. En este proceso se lleva a cabo la asimilación de nuevos artefactos a los esquemas y la acomodación de los esquemas para dar nuevos significados a los artefactos**.**

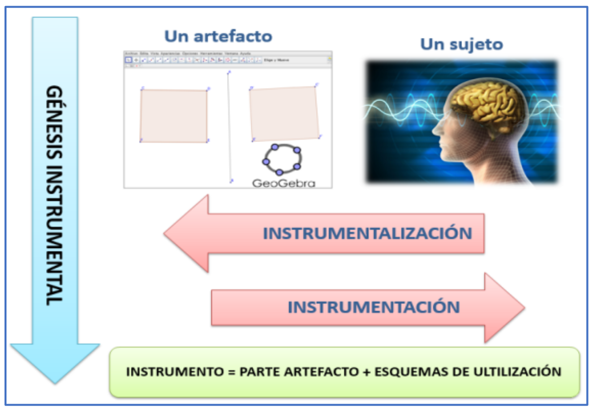


Figura 4. El proceso de Génesis Instrumental. (Elaboración propia)

En ese sentido, Trouche (2016) sostiene que estas dos dimensiones de la Génesis Instrumental no son independientes una de la otra, sino que son entrelazadas. Pero, para distinguirlos en el análisis, se puede focalizar por un lado en el estudiante (¿En qué medida la integración de un nuevo artefacto modifica la forma de su actividad?), y por otro lado, en el artefacto (¿En qué medida este aporta al vestigio de la actividad del estudiante, de su poder creativo?).

El Enfoque Instrumental se basa en la noción de esquema de Vergnaud (1996), para este último un esquema:

- Es una organización invariante de la actividad para una clase de situación dada.
- Está formado necesariamente por cuatro componentes:
-
    - ✓ Un objetivo, sub-objetivo y anticipaciones
    - ✓ Reglas de acción, formada de informaciones y control
    - ✓ Invariantes operatorios (reglas de acción y teoremas en acción)
    - ✓ Posibilidades de inferencias en una situación

Rabardel (1995), a partir de esta noción de esquema, define los esquemas de utilización como el conjunto estructurado de las características generalizables de la acción que permiten repetir la misma acción o aplicarlas en nuevos contextos. Estos esquemas, a la vez, pueden ser clasificados en esquemas de uso (dirigidas a tareas secundarias), esquemas de acción instrumentada (dirigidas a la tarea principal o primaria) y esquemas de acción colectiva instrumentada (cuando el colectivo comparte el mismo instrumento o trabaja con la misma clase de instrumento, buscando alcanzar una meta en común).

Orquestación Instrumental

El enfoque de la Orquestación Instrumental surge a partir del Enfoque Instrumental, es por ello que los términos artefacto, instrumento, esquemas de utilización, instrumentalización, instrumentación y génesis instrumental, tienen el mismo sentido que se definió en la segundo Enfoque teórico tratado en este escrito.

Trouche (2004) utiliza la noción de Orquestación de manera metafórica con el propósito de describir la gestión que hace el profesor de los instrumentos individuales en los procesos de aprendizaje colectivo, en el sentido de que las génesis instrumentales necesitan ser monitoreadas por el profesor a través de la orquestación de situaciones matemáticas.

Según el Trouche (2005), una Orquestación Instrumental es el arreglo sistemático e intencional de los elementos (artefactos y seres humanos) de un ambiente, realizado por un agente (profesor) con el fin de hacer efectiva una situación dada y, en general, guiar a los aprendices en las génesis instrumentales y en la evolución y equilibrio de sus sistemas de instrumentos. Es sistemático porque como método, se desarrolla en un orden definido y con un foco determinado, pudiendo ser entendido con un arreglo integrado a un sistema; es intencional porque una orquestación no describe un arreglo existente (siempre existe uno), pero apunta a la necesidad de un pensamiento a priori de ese arreglo.

Una Orquestación Instrumental, se refiere entonces a los estudiantes, a los artefactos y a la situación matemática, así como una orquestación musical se refiere a los músicos, a los instrumentos ya una partitura musical. Permite crear un medio (en términos de Brousseau) para el aprendizaje.

Figura 5. Componentes de una Orquestación Instrumental. Luc Trouche (2016)

El autor, manifiesta que, concebir una Orquestación Instrumental consiste en dos elementos: una configuración didáctica y un modo de explotación.

- Configuración didáctica es un arreglo particular (una arquitectura) de los estudiantes y de los artefactos. Trouche, presenta una configuración, indicada como emblemática, la configuración del estudiante-sherpa (figura 6). Los artefactos de los estudiantes son las calculadoras, los artefactos del profesor son la pizarra, una pantalla de proyección, un retroproyector y un cable que conecta la calculadora a la pantalla de proyección. La configuración del estudiante-sherpa se refiere a un papel particular dado a ese estudiante que consiste en proyectar en la pantalla lo que se hizo con la calculadora, explicando procedimientos y raciocinio adoptados

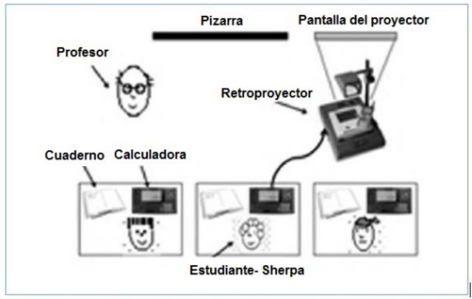


Figura 6. La configuración del estudiante-Sherpa. Trouche (2016)

- Modo de explotación de una configuración didáctica es la manera como el profesor decide explotarla para beneficio de sus intenciones didácticas. Incluye las decisiones sobre la forma en que una tarea es introducida y trabajada, sobre los posibles roles que juegan los artefactos y sobre los esquemas y técnicas a ser desarrollados.

Conclusiones

La Transposición Informática se centra en reconocer las ventajas y limitaciones de los ambientes informáticos y cómo el conocimiento es transformado a partir del uso de dichos ambientes.

El Enfoque Instrumental, se centra en el proceso de Génesis Instrumental que es la transformación de un artefacto hacia un instrumento por el sujeto. A través de los procesos de instrumentalización (enfocada al artefacto) y la Instrumentación (enfocada al sujeto y a los esquemas de utilización).
La Orquestación Instrumental, centra su mirada en la Gestión de los instrumentos por parte del docente y cómo generar la Génesis Instrumental de sus estudiantes.

Los tres Enfoque se relacionan pues dentro del proceso de la Génesis Instrumental, específicamente en la Instrumentalización, se centra en conocer las ventajas y limitaciones el artefacto, pues es allí donde la Transposición informática aporta para dicho análisis. Y la Orquestación Instrumental amplia el proceso de la Génesis Instrumental pues da configuraciones para poder realizar Génesis colectivas.

Referencias bibliográficas

Nicolas Balacheff (1993). *La transposition informatique, un nouveau problème pour la didactique*. Recherches en didactique des mathématiques. pp.364-370, 1993
Balacheff, N. (1994) *Didactique et intelligence artificielle*. Recherches en Didactique des Mathématiques, La Pensée Sauvage, 1994, 14, pp.9-42.
Bruillard E. (1991) *Mathématiques et EIAO : une vision hyprtexte des environnements d'apprentissage*. Thèse. Le Mans : Université du Maine.
Chevallard, Y. ; Johsua, M. (1991). *La transposition didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
García-Cuéllar, D. (2014). Simetría axial mediado por el Geogebra: un estudio con estudiantes de primer grado de educación Secundaria. Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/5651
Gallegos, D y Peña, A. (2012). Las TIC en geometría, una nueva forma de enseñar. Bogotá : Ediciones de la U.
Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies : approche cognitive des instruments contemporains*. Paris :

Armand colin.

Salazar, Jesús V. F. (2009). *Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de transformações geométricas no espaço*. (Tesis doctoral). Pontificia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

Trouche, L. (2004). *Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations.* International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9(3), 281-307.

Trouche, L. (2005). *Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations*. Recherches en Didactique des Mathématiques. v.25, pp. 91-138, 2005.

Trouche, L. (2016). *Compreender o trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático*. I LADIMA, Bonito, Brasil.

Vergnaud, G. (1996). *A teoria dos campos conceptuais. En Jean Brun (org), Didáctica das matemáticas*. (pp. 155-189). Lisboa: Horizontes pedagógicos.

ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA CON PROYECTOS Y COMPRENSIÓN GRÁFICA

Carmen Batanero y Pedro Arteaga
Universidad de Granada. (España)
batanero@ugr.es, parteaga@ugr.es

Resumen
En este trabajo se describe un curso corto presentado en RELME, donde se analizó el interés que para la formación de profesores tiene la realización de proyectos estadísticos en que estos recogen sus propios datos para responder una pregunta, completando un ciclo de investigación estadística. El análisis de los gráficos producidos en uno de estos proyectos trabajado dentro del curso permitió reforzar los componentes de la comprensión gráfica y los conocimientos didácticos de los participantes, en particular sobre los errores más frecuentes en la construcción de gráficos y los niveles de lectura de los gráficos.

Palabras clave: proyectos estadísticos, comprensión gráfica, errores estadísticos, niveles de lectura, formación de profesores

Abstract
In this paper we describe the workshop presented in RELME, where we analyzed that statistical projects are an issue of interest in teacher training, as teachers collect their own data to answer a research question and complete a cycle of statistical investigation. The analysis of graphs produced in one of these projects carried out in the workshop allow reinforcing the components of graphical competence as well as the didactic knowledge of participants, in particular, on the most common errors in building graphs and on the reading levels of the graphs.

Key words: statistical projects, graphical understanding, statistical errors, reading levels, teacher training.

Introducción

Aunque la enseñanza de la estadística en la Educación Secundaria tiene una trayectoria de más de 30 años, su presencia en la Educación Primaria es reciente. En España, se incorporó en este nivel educativo, dentro del Bloque Tratamiento de la información, azar y probabilidad del área de Matemáticas, en el currículo anterior (Ministerio de Educación y Ciencia [MEC], 2006), donde se incluyeron en el primer ciclo (6 y 7 años) las técnicas elementales para la recogida de datos, los gráficos estadísticos, e introducción al lenguaje del azar. Se continuaban estos contenidos en segundo ciclo (8-9 años), incluyendo las tablas de datos y de doble entrada. En tercer ciclo (10-11 años) se ampliaba el trabajo con gráficos, resaltando la importancia de analizarlos críticamente. Igualmente se trataba la media aritmética, moda y rango, y la estimación de la probabilidad de un suceso. Contenidos similares se contemplan en el currículo actual (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte [MECD], 2014), aunque ahora se da libertad a las comunidades autónomas a organizar estos contenidos por ciclo.

Una condición para asegurar el éxito de estas propuestas es la formación de los profesores de Educación Primaria, puesto que pocos han seguido un curso completo de estadística durante su formación. Menos aún han trabajado con proyectos estadísticos; además, es necesaria la formación de los aspectos didácticos que se han de tener en cuenta en la enseñanza de la estadística. En este curso corto se sugirió el interés de organizar secuencias didácticas dirigidas a estos profesores, en las que, en primer lugar completan un proyecto estadístico y posteriormente realizan un análisis didáctico del mismo y de sus soluciones, con la finalidad de reforzar diferentes componentes de su conocimiento como profesores.

El interés del trabajo con proyectos es resaltado en estos currículos, así como el proyecto GAISE (Franklin, *et al.* 2005), con la finalidad que los estudiantes experimenten el ciclo completo del trabajo estadístico, diseñando investigaciones, formulando preguntas de investigación, recogiendo datos de observaciones, encuestas o experimentos, y obteniendo conclusiones y predicciones basadas en el análisis de los datos. Batanero y Díaz (2011) y McGilliwray y Pereira-Mendoza (2011) indican que al trabajar con proyectos se contextualizan los conceptos y técnicas y se presentan al estudiante las diferentes fases de una investigación estadística. Murray y Gal (2002) sugieren que el trabajo con proyectos desarrolla nuevas competencias, pues la comprensión, interpretación y reacción frente a la información estadística no sólo requiere conocimiento estadístico o matemático, sino también habilidades lingüísticas, conocimiento del contexto, capacidad para plantear preguntas, y una postura crítica que se apoya en un conjunto de creencias y actitudes, que se desarrollan en el proyecto.

■ Marco teórico

El marco teórico del trabajo se basa en dos componentes que resumimos a continuación: a) Trabajos teóricos sobre comprensión gráfica y b) Modelos de conocimiento del profesor para enseñar matemáticas.

Comprensión gráfica

La propuesta que presentamos en el curso se orienta a mejorar la comprensión gráfica de los futuros profesores, ya que los gráficos estadísticos son parte de la cultura estadística necesaria en la sociedad actual, donde argumentar y representar son habilidades recomendadas en muchos currículos (Estrella, Olfos, Morales. y Vidal-Szabó (2017).

Bertin (1967) indica que el primer paso en la lectura de un gráfico es la identificación externa del tema al que se refiere el gráfico. En segundo lugar se lleva a cabo, una identificación interna, interpretando las variables representadas y sus escalas. Posteriormente se produce la comprensión de la correspondencia entre las dimensiones interna y externa del gráfico, con lo que se obtienen conclusiones sobre las variables, su rango de variación, su distribución y sus características, en la situación real representada.

A partir de estas ideas Bertin (1967) definió los siguientes niveles de lectura de un gráfico:

- *B1: Extracción de los datos*: El nivel más básico, en el que sólo se lee exactamente uno de los datos que hay en el gráfico, por ejemplo, se lee la frecuencia que corresponde a una categoría.
- *B2: Extracción de las tendencias*: Implica, además de la lectura simple, la percepción entre la relación de dos subconjuntos de datos que intervienen en el gráfico, para lo cual hay que operar con los datos o compararlos.

- *B3: Análisis de la estructura de los datos:* Comparación de tendencias en dos o más variables o grupos.

Por otro lado, Curcio (1987) propone los siguientes niveles de lectura.

- *C1: Leer los datos*: Consiste en la lectura literal de la información representada en el gráfico. Este nivel es equivalente al nivel B1 de Bertin.
- *C2: Leer dentro de los datos:* Lectura de una información basada en los datos del gráfico, pero que no es representada explícitamente. Equivalente al nivel B2 de Bertin.
- *C3: Leer más allá de los datos:* Realización de inferencias con la información presentada en el gráfico, más allá de la realización de cálculos y/o comparaciones, así como por ejemplo, predicciones sobre qué valor tomará un dato que no está en el gráfico. Este nivel no es tenido en cuenta por Bertin.
- Shaughnessy (2007) amplía la clasificación anterior definiendo un nuevo nivel, que es posteriormente recogido en Friel, Curcio y Bright (2001): C4: *Leer detrás de los datos* o valoración crítica de los datos, la cual no supone únicamente tener comprensión gráfica, sino además conocer el contexto de los datos. Este nivel no es tenido en cuenta por Bertin. Un ejemplo sería dar al alumno un gráfico con la escala no proporcional y preguntarle si en el gráfico hay algún error.

Varias investigaciones evalúan la construcción de gráficos estadísticos por parte de los estudiantes. El primer paso es la elección de un gráfico adecuado, aunque algunos estudiantes, según Li y Shen (1992) utilizan gráficos inadecuados al tipo de variable o problema; por ejemplo, diagramas de barras para representar datos bivariantes. Los autores encuentran también los siguientes problemas en las escalas de los gráficos construidos:
(a) Elegir una escala inadecuada (por ejemplo no se cubre todo el campo de variación de la variable representada);

(b) Omitir las escalas en alguno de los ejes;
(c) No especificar el origen de coordenadas y
(d) No proporcionar suficientes divisiones en las escalas.

Por su parte Arteaga, Batanero, Contreras y Cañadas (2016) encuentran los siguientes errores en la construcción de gráficos por parte de futuros profesores:

1. *Errores de interpretación de las convenciones de construcción de los gráficos.* Por ejemplo, no entender que hay que incluir en el eje X sólo los valores de la variable cuya frecuencia es no nula. Esto lleva a omitir los valores de frecuencia nula en los gráficos de barras, polígonos de frecuencia e histogramas; dicha omisión también fue descrita por Bruno y Espinel (2005).

2. *Errores en interpretación de la finalidad de cada gráfico*. Por ejemplo, representar variables no comparables en el mismo gráfico, error encontrado por Li y Shen (1992).

3. *Errores de representación de números en la recta real,* detectados por Bruno y Espinel (2005) y Espinel (2007). Por ejemplo, producir escalas no proporcionales o representar valores numéricos no ordenados.

4. *Errores conceptuales*, como confusión entre variable continua y discreta, representación incorrecta de un intervalo numérico, confusión entre variables y frecuencia o asociar un rango a un conjunto de distribuciones (y no a cada distribución).

Formación de profesores para enseñar matemáticas

Como hemos indicado, nuestra propuesta se dirige a completar la formación de profesores de Educación Primaria para enseñar estadística en este nivel educativo; por tanto es importante tener en cuenta los componentes de conocimiento que requieren los profesores para abordar con éxito la enseñanza. Shulman (1986) desglosó el conocimiento requerido por los profesores para abordar con éxito la enseñanza de la matemática en conocimiento del contenido, conocimiento del contenido pedagógico y conocimiento del currículo. Esta investigación promovió un gran número de estudios orientados a la evaluación y desarrollo del mismo en los profesores de matemática (descritos, por ejemplo, en Even y Ball, 2009 y Llinares y Krainer, 2006).

En nuestra propuesta consideramos un marco teórico que ha tenido un gran impacto en la investigación sobre formación de profesores de matemáticas y de estadística, que es el del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008). Al igual que en el trabajo de Shulman (1986), se considera el conocimiento del contenido y el conocimiento del contenido pedagógico.

- El conocimiento del contenido se divide en tres componentes: a) El *conocimiento común del contenido,* es el que posee una persona (no necesariamente el profesor) después de haber estudiado el tema; b) El *conocimiento matemático avanzado* (que los autores denominan conocimiento en el horizonte matemático), va más allá del conocimiento común; incluye conocimiento del tema a un nivel superior y las conexiones con otras materias; y c) El *conocimiento especializado del contenido,* es el aplicado por el profesor para articular tareas de enseñanza referidas al tema a enseñar.
- Respecto al conocimiento didáctico del contenido, se considera: a) el *conocimiento del contenido y los estudiantes* o conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden un objeto matemático; b) el *conocimiento del contenido y la enseñanza* (*KCT*) resulta de la integración del contenido matemático con el conocimiento de la enseñanza de dicho contenido y c) el *conocimiento del currículo,* que se refiere a las directrices curriculares, orientaciones, fines y motivaciones de las mismas, materiales curriculares y secuenciación del tema en los diferentes ciclos formativos.

Actividad desarrollada con futuros profesores

La actividad que llevamos a cabo en el curso se ha experimentado en los últimos cursos con futuros profesores de Educación Primaria de la Universidad de Granada, distribuidos en pequeños grupos (20 - 30 alumnos por grupo). En cada curso han participado unos 100 estudiantes de segundo año de sus estudios universitarios. En el primer año se estudian, durante alrededor de 15 días, los gráficos y tablas estadísticas elementales, las medidas de posición central y dispersión y nociones de probabilidad. También se trabaja con un proyecto estadístico diferente del que se describe en este trabajo.

En la Universidad de Granada, la actividad se organiza en tres sesiones de clase, cada una de dos horas de duración. En la primera sesión, los participantes resuelven un proyecto estadístico, titulado *Comprueba* *tus intuiciones sobre el azar* que se describe en Batanero y Díaz (2011), en el cual los futuros maestros recogen los datos a través de un experimento aleatorio y posteriormente comparan tres pares de variables estadísticas para concluir sobre las intuiciones del grupo sobre los fenómenos aleatorios. La secuencia de actividades es la siguiente:

1. *Presentación del proyecto y realización del experimento:* En la primera sesión, una vez que el formador de profesores explica la finalidad del proyecto, los futuros profesores llevan a cabo un experimento aleatorio para decidir si tienen o no buenas intuiciones sobre el azar. El experimento consta de dos partes. En la primera parte (secuencia inventada), cada participante inventa una secuencia de 20 lanzamientos de una moneda sin realmente lanzar dicha moneda, de tal modo que otra persona pudiera pensar que se trata de una secuencia aleatoria y completa sus resultados en una hoja de registro. En la segunda parte (secuencia real) los participantes anotan en la hoja de registro los resultados de lanzar 20 veces una moneda (Ver Figura 1).

Experimento. Abajo tienes dos cuadrículas. En la primera de ellas escribe 20 resultados de lanzar una moneda como pienses que saldrían al realizar el experimento, pero sin hacerlo. Para rellenar la segunda fila, lanza la moneda 20 veces y escribe los resultados obtenidos. Pon C para cara y + para cruz.

Secuencia inventada:																			

Secuencia real (lanzando la moneda)																			

Figura 1. Experimento realizado por los futuros profesores para recoger sus propios datos

2. *Recogida de datos:* Finalizado el experimento, el formador de profesores inicia un debate pidiendo a los participantes, sugerencias para comparar las secuencias inventadas y reales generadas en el experimento en el total del grupo. Se acuerda comparar las siguientes variables estadísticas: número de caras, número de rachas y longitud de la racha mayor en las secuencias real y simulada. Cada estudiante anota los valores de estas seis variables en su propio experimento en una hoja de registro proporcionada por el profesor (Ver la primera línea de la hoja de recogida de datos en la Tabla 1).

Tabla 1. Hoja de recogida de datos en el experimento

	Secuencia inventada			Secuencia real		
Alumno. Nº	Nº caras	Nº rachas	Longitud de la racha mayor	Nºcaras	Nº rachas	Longitud de la racha mayor
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						

3. *Análisis de los datos:* El formador proporciona a cada participante una copia de la hoja de registro con los datos obtenidos por el conjunto de la clase (20 a 30 alumnos) para las variables descritas. Como tarea extraescolar, para traer a la segunda sesión los futuros profesores realizan un informe escrito con los resultados del análisis de los tres pares de variables estadísticas (número de caras, número de rachas y longitud de la racha más larga en las secuencias real e inventada de cada estudiante). Tienen libertad para el análisis de los datos. La mayoría realizan tablas de frecuencia y diversos tipos de gráfico, como diagramas de barras o de líneas; generalmente, también se calcula la media, moda y rango de cada variable. Deben finalizar el informe con una conclusión sobre la intuición de la aleatoriedad en el conjunto de estudiantes.

4. *Conclusiones:* Durante la segunda sesión se discute el análisis de datos y las conclusiones obtenidas en un debate general, organizado por el formador de profesores. La principal conclusión del análisis de los datos es que los estudiantes tienen buena intuición sobre el valor esperado en el número de caras, pues las secuencias inventadas por ellos tienen un número medio de caras cercano al valor teórico 10. En cambio, su percepción de la variabilidad o del número de rachas es mucho peor, ya que las secuencias son poco variables y la longitud de las rachas muy cortas. Tanto el análisis como las conclusiones son presentadas y discutidas en la clase por los estudiantes hasta llegar a un consenso.

5. *Análisis de los gráficos producidos por los estudiantes.* En la última parte de la segunda sesión y en la sesión tercera se examinan los diferentes gráficos producidos por los futuros profesores, con el fin de detectar posibles errores en su elaboración y corregirlos en lo posible. Para ello se examina en primer lugar si los gráficos elegidos son adecuados o no al tipo de variable. En segundo lugar se buscan aquellos gráficos en que los futuros profesores no llegan a formar la distribución, sino que representaron los datos uno a uno. Seguidamente se analizan las escalas producidas para detectar posibles problemas de falta de proporcionalidad, escalas demasiado amplias o que no cubren el rango de variación de las variables. Se comprueba igualmente que la representación de números e intervalos en la recta numérica sigue los convenios de representación numérica. Finalmente se pide a los futuros profesores que han cometido errores en algunos de los pasos anteriores, que vuelvan a elaborar los gráficos correctamente. Finalizada la actividad de corrección de gráficos se describen los diferentes niveles de lectura de gráficos y se pide pensar preguntas de cada uno de los niveles para los gráficos que han construido.

Conclusiones

La actividad descrita ha resultado interesante a los participantes que deseaban recoger sus propios datos para averiguar si sus intuiciones sobre la aleatoriedad eran correctas (o en qué puntos eran correctas o incorrectas). Además les proporcionó una oportunidad de aplicar sus conocimientos estadísticos elementales y reforzar así su conocimiento común y avanzado de estadística. El trabajo con proyectos les proporcionó un ejemplo de cómo llevar a cabo la enseñanza de la estadística con este método, por tanto reforzó su conocimiento del contenido y la enseñanza. La corrección de los errores en los gráficos producidos mejoró su competencia en la evaluación y su conocimiento del contenido y los estudiantes.

En consecuencia pensamos que actividades como la descrita permiten mejorar diferentes componentes del conocimiento matemático para la enseñanza, sobre todo cuando se dispone de poco tiempo para la formación de los profesores. Una formación puramente matemática, que sólo tenga en cuenta el conocimiento del contenido no es suficiente. Esperamos que la descripción de esta experiencia, así como la reproducción que se hizo en el curso corto ofrecido en Relme 31 sobre la misma pueda ser útil a los formadores de profesores.

Agradecimientos

Proyectos EDU2013-41141-P y y EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y Grupo FQMN-126 (Junta de Andalucía).

Referencias bibliográficas

Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. M. y Cañadas, G. R. (2016). Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos por futuros profesores. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa (Relime), 19*(1), 15-40.

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Batanero, C. y Díaz, C. (Eds.) (2011). *Estadística con proyectos* Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática. Online: www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Libroproyectos.pdf.

Bertin, J. (1967). *Semiologie graphique.* Paris: Gauthier-Villars

Bruno, A. y Espinel, M. C. (2005). Recta numérica, escalas y gráficas estadísticas: un estudio con estudiantes para profesores. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemáticas, 7*, 57-85.

Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education 18(*5), 382-393.

Estrella, S., Olfos, R., Morales, S. y Vidal-Szabó, P. (2017). Argumentaciones de estudiantes de primaria sobre representaciones externas de datos: componentes lógicas, numéricas y geométricas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa (Relime), 20*(3), 345-370.

Espinel, C. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 99-119). La Laguna, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Even. R. y Ball, D. (2009). *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI Study.* New York: Springer.

Friel, S., Curcio, F., y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 124-158. doi: 10.2307/749671

Franklin, C., Kader. G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A Pre-K-12 curriculum framework.* Alexandria, VA: American Statistical Association. Online: www.amstat.org/Education/gaise/.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Li, D. Y., y Shen, S. M. (1992). Students'weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics 14*(1), 2-8.

Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 429-459). Rotherdam: Sense Publishers.

McGillivray, H. y Pereira-Mendoza, L. (2011). Teaching statistical thinking through investigative projects. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 109-120). New York: Springer.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las* *enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación primaria.* Madrid: Autor.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.* Madrid: Autor.

Murray, S. y Gal, I. (2002). Preparing for diversity in statistics literacy: Institutional and educational implications. En B. Phillips (Ed.). *ICOTS-6 papers for school teachers.* [CD-ROM]. Cape Town: International Association for Statistics Education.

Shaughnessy, J.M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. En F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 957-1009). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

LA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA COMO HERRAMIENTA DE ENSEÑANZA EN LA EDUCACIÓN SUPERIOR: MODELOS LINEALES EN ECUACIONES DIFERENCIALES

Luis Jaimes, Efrén Baquero, Margarita Rey
Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito. (Colombia)
luis.jaimes@escuelaing.edu.co, efren.baquero@escuelaing.edu.co,
margarita.rey@escuelaing.edu.co

Resumen
Este trabajo presenta la forma como la herramienta "descomposición genética", definida desde la teoría APOS, favorece la comprensión de objetos matemáticos utilizados en cursos de matemáticas universitarias. Lo anterior como parte de un proyecto de investigación, desarrollado en la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito, con el objetivo de identificar las formas de comprender la ecuación diferencial lineal de segundo orden que modela un sistema masa resorte con movimiento libre amortiguado; dentro de los resultados se presentan algunas dificultades para comprender el objeto de estudio y la necesidad de diseñar instrumentos de recolección de información que complementan las observaciones de los docentes en clase.

Palabras Clave: sistemas masa – resorte, teoría APOS, descomposición genética

Abstract
This paper presents the way in which the tool "genetic decomposition", defined from the APOS theory, favors the understanding of mathematical objects used in university mathematics courses. The previous as part of a research project, developed in the Colombian School of Engineering Julio Garavito, with the objective of identifying the ways to understand the linear differential equation of second order that models a spring mass system with free motion damped; Within the results there are some difficulties to understand the object of study and the need to design information collection instruments that complement the observations of teachers in class.

Key words: mass-spring system, APOS theory, genetic decomposition

Planteamiento del problema

La investigación en educación matemática, continuamente aporta al fortalecimiento de las prácticas educativas, para que estas, no se limiten a métodos de enseñanza tradicional, basados en la memorización de algoritmos o fórmulas que en algunos casos pueden carecer de significado para el estudiante. Trabajos relacionados con la enseñanza del cálculo, y particularmente de las ecuaciones diferenciales (ED), indican que en estos cursos predomina el enfoque algebraico (Morales y Salas, 2010), y que objetos o conceptos matemáticos se ocultan mediante fórmulas o algoritmos que impiden su comprensión (Nápoles, González, Brundo, Genes, y Basabilbaso, 2004), lo que puede representar que la asignatura reste importancia para un estudiante en relación a su programa de formación, dado que no es perceptible su interacción con otros ejes de formación. Así mismo, cabe destacar que aunque los aportes de la investigación en educación matemática tengan como objetivo mejorar la forma de comprender los objetos matemáticos, el probar un nuevo modelo de enseñanza, que privilegie su comprensión, sobreponiéndolos a procesos algebraicos o logarítmicos, implica encontrar nuevas dificultades, por ejemplo, en el caso de las ecuaciones diferenciales, dichas dificultades están asociadas con el planteamiento de la ecuación diferencial en determinado modelo matemático, antes que con el proceso algebraico para resolverla (Jaimes, Chaves y Hernández, 2015).

Los elementos anteriores han sido considerados, para realizar una propuesta de enseñanza, basada en una teoría de enfoque cognitivo, que busca describir las construcciones mentales y los mecanismos de construcción que un estudiante desarrolla para comprender un objeto matemático. El objeto de estudio, son los sistemas masa resorte, particularmente, la ecuación diferencial que modela estos sistemas cuando se considera la fuerza de amortiguamiento que afecta el movimiento. La elección del objeto de estudio, radica en su aplicación en diferentes campos de la ingeniería, por ejemplo, publicaciones relacionadas con aplicaciones de las ecuaciones diferenciales, evidencian que en la ingeniería biomédica, los sistemas masa – resorte pueden ser utilizados en el estudio de la otosclerosis (Fragoso, Magalhães, Las Casas, Santos, Rabelo Y Oliveira, 2014), y en la ingeniería mecánica, para modelar el sistema de suspensión de un vehículo.

Antecedentes

Al realizar una exploración bibliográfica tanto en artículos y publicaciones, se han encontrado investigaciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, resaltando que todas estas, independiente del enfoque teórico que utilizan, tienen el propósito de fortalecer su comprensión, que ha estado limitada a registros algebraicos y algorítmicos (Guerra, 2003; Dullius, 2009; Napóles, 2009; Chaves y Jaimes, 2014). Así mismo, se hizo una revisión en libros de ecuaciones Diferenciales que generalmente se utilizan como texto guía, para identificar la forma como es construida y presentada la ecuación diferencial que modela un sistema masa – resorte con movimiento libre amortiguado. De esta revisión se resaltan los textos de Zill y Kullen (2008) y, Edwards y Penney (2009) quienes utilizan constructos diferentes para presentar la ecuación diferencial. Por ejemplo, mientras que en el libro de Zill y Kullen (2008), cada una de las fuerzas implicadas en el movimiento de un sistema masa resorte amortiguado, son justificadas desde leyes físicas (Ej. Ley de Hooke, segunda ley de Newton, etc.) que hacen parte de currículos previamente vistos, en el libro de Edwards y Penney (2009), se trata de presentar al lector mediante un razonamiento *"lógico"* cada uno de los componentes de la ecuación diferencial. Sin embargo, se encontró que ninguno de los autores explica el por qué la fuerza amortiguadora que se considera en este tipo de movimiento, es proporcional a la velocidad y actúa en dirección opuesta; fenómeno físico explicado por la ley de Stokes.

Marco teórico

Esta investigación se desarrolla desde la perspectiva de una teoría cognitiva llamado APOS, cuya sigla corresponde a la forma como se escriben en ingles las palabras Acción–Proceso–Objeto–Esquema, fue desarrollada por Ed. Dubinsky (1991) y un grupo de investigadores del Research in Undergraduate Mathematics Education Community (RUMEC). Se basa en la Abstracción Reflexiva; idea introducida por

Piaget, y se extiende a nociones matemáticas avanzadas, que describe las construcciones mentales y mecanismos de construcción que un estudiante desarrolla para comprender un concepto u objeto matemático, y se sintetiza en lo que desde la teoría se conoce como *descomposición genética*.

Las construcciones mentales corresponden a diferentes niveles de comprensión de objetos matemáticos. En la teoría APOS las construcciones mentales que se consideran son: acciones, procesos, objetos y esquemas. Una *acción* es cualquier actividad mental o física que transforma de alguna manera un objeto matemático, son algorítmicas por naturaleza y permiten realizar un primer contacto con los objetos matemáticos; esto se logra a través de las experiencias del estudiante al tratar con el objeto. Un nivel de comprensión *proceso* se presenta si una acción es interiorizada por su repetición y el reflejo de la misma. Si un estudiante puede reflexionar de manera más general sobre un proceso particular, y lo concibe como una totalidad y si puede efectuar transformaciones sobre el mismo, se dice que ha encapsulado el proceso y alcanzado un nivel de comprensión de *objeto* (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Fuentes, Trigueros y Weller, 2014).

En relación a lo anterior, la descomposición genética de un objeto matemático parte de un análisis que identifica las construcciones mentales previamente mencionadas, que un estudiante puede requerir en su aprendizaje. En este análisis los investigadores plantean desde su experiencia como docentes del curso de ecuaciones diferenciales una descomposición genética preliminar del objeto de estudio. Luego, producto de la misma investigación se refina de modo que se presente de mejor forma lo que hacen los estudiantes cuando trabajan con él.

Metodología

La investigación se desarrolló con 26 estudiantes de la Escuela Colombiana de Ingeniería inscritos en un curso de ecuaciones diferenciales; cabe resaltar que a estos cursos, asisten estudiantes de diferentes programas de ingeniería (Civil, eléctrica, industrial, electrónica, mecánica, biomédica y ambiental). Se siguió el marco metodológico propuesto por la teoría APOS, bajo los tres componentes planteados en el ciclo de investigación:

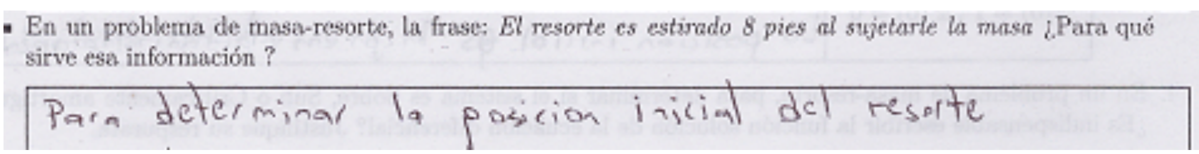
Inicialmente se realiza un *Análisis teórico***,** que implica la elaboración de una descomposición genética preliminar, la cual describe las construcciones mentales que deben realizar los estudiantes para comprender la ecuación diferencial lineal de segundo orden (EDLO2) que modela sistema de masa resorte con movimiento libre amortiguado. Posteriormente se elabora un *Diseño e implementación de enseñanza*, en este segundo componente se escogen ciertas actividades basadas en la descomposición genética preliminar, estas actividades pueden ser: entrevistas, observaciones en clase, revisión de los libros de texto, estudios epistemológicos e históricos, exámenes, entre otros (Arnon, et al, 2014). Finalmente el tercer componente que es *la recolección y análisis de datos* que tienen como base las actividades elaboradas en el componente anterior. Seguido de este análisis de datos, se realiza un nuevo análisis teórico, repitiendo; de ser necesario, el ciclo anterior para refinar la descomposición genética preliminar, indicando las construcciones mentales y los mecanismos de construcción que un estudiante realiza para comprender el objeto en cuestión.

Algunos Ejemplos

Dentro, del trabajo realizado con los estudiantes, se encontraron elementos que evidencian dificultad para comprender la ecuación diferencial que modela un sistema masa resorte, tanto en el planteamiento, como en el significado de la misma.
Dentro de las actividades mencionadas en el segundo componente del ciclo de investigación, se diseñó y aplicó un taller que permitiera observar:

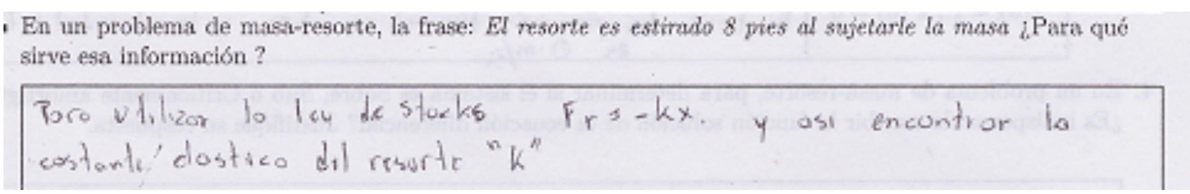
a) La forma como los estudiantes identifican la información dada en el enunciado de un problema y la aprovechan para plantear su solución
b) El reconocimiento de las características propias de la ecuación diferencial que modela un sistema masa – resorte amortiguado, y de las soluciones de su ecuación característica.
c) El paso del registro algebraico a lenguaje natural, dada una ecuación diferencial y condiciones iniciales, que se ajustan a un sistema masa – resorte amortiguado.
d) Los alcances de la ecuación característica y sus soluciones para determinar el tipo de movimiento.

En relación al inciso a) se dio el enunciado de un problema masa – resorte, y se plantearon preguntas relacionadas con la información extraída del problema, al plantear la ecuación. Se encontró que algunos estudiantes confunden la información dada para determinar la constante de resistencia con una condición inicial del problema, incluso confunden el nombre de ley física que están utilizando; ley de Hooke con ley de Stokes (Figuras 1 y 2).


▪ En un problema de masa-resorte, la frase: *El resorte es estirado 8 pies al sujetarle la masa* ¿Para qué sirve esa información ?

Para determinar la posición inicial del resorte

Figura 3. Reconocimiento de la información en el enunciado del problema. Elaboración propia.


▪ En un problema de masa-resorte, la frase: *El resorte es estirado 8 pies al sujetarle la masa* ¿Para qué sirve esa información ?

Para utilizar la ley de stocks Fr = -kx. y asi encontrar la constante elastica del resorte "k"

Figura 4. Reconocimiento de la información en el enunciado del problema. Elaboración propia.

Sobre el inciso b) En la ecuación diferencial $mx'' + \beta x' + kx = 0$, toda solución real, o también parte real de una solución imaginaria debe ser negativa, dada la naturaleza de los coeficientes de la ecuación. Partiendo de esto, se dio una lista de posibles raíces para una ecuación diferencial de segundo orden, y ellos debían seleccionar las que cumplían con esta condición, pero se evidencia que algunos estudiantes toman cualquier tipo de raíz, la escriben como factor, resuelven, expresan la ecuación característica, y su respectiva ecuación diferencial sin importar el signo de los coeficientes (Figura 3).

Seleccione cuales de las anteriores estan relacionadas con un sistema masa-resorte; De estas, determine cual es la ecuación diferencial correspondiente y su respectiva solución

$r_1 = -3 \quad r_2 = 1 \quad \boxed{y'' + 2y' - 3y = 0}$

$y = e^{-3x}c_1 + c_2 e^{x}$

$(x+3)(x-1) = 0$

$x^2 + 3x - x - 3 = 0$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$r_1 = -2 + \sqrt{2} \quad r_2 = -2 - \sqrt{2}$

$y = e^{-2+\sqrt{2}x} c_1 + e^{-2-\sqrt{2}} c_2$

$(x + 0.58)(x + 3.41) = 0$

$x^2 + 0.58x + 3.41x + 1.97 = 0$

$x^2 + 3.99x + 1.97 = 0$

$\boxed{y'' + 3.99y' + 1.97y = 0}$

Figura 5. Considerar raíces positivas en la solución de la ecuación característica. Elaboración propia.

En el paso del registro algebraico a lenguaje natural, indicado en el inciso c) Confunden la naturaleza del problema o su relación con las soluciones, por ejemplo, si la solución de la ecuación característica, es irracional pero negativa, esta puede ser la solución de un sistema masa resorte, pero se tiende a confundir valores imaginarios de la forma $\alpha \pm i\beta$, con números irracionales que se escriben de la forma $\alpha \pm \sqrt{\beta}$, con $\beta > 0$.

Finalmente, en el inciso d), relacionado con los alcances de la ecuación característica y sus soluciones para determinar el tipo de movimiento, manifiestan que es indispensable resolver la ecuación diferencial para determinar si el sistema es sobre, sub o críticamente amortiguado. Es decir, se puede deducir que están pensando en la gráfica de la función para determinar el comportamiento de la misma, desconociendo que ese análisis se puede realizar utilizando el discriminante de la ecuación característica (Figura 4).

Figura 6. No consideración del discriminante para identificar el tipo de movimiento. Elaboración propia.

4. En un problema de masa-resorte, para determinar si el sistema es Sobre, Sub o Críticamente amortiguado ¿Es indispensable escribir la función solución de la ecuación diferencial? Justifique su respuesta.

Si, para poder observar con claridad el tipo de movimiento y como se comportará

4. En un problema de masa-resorte, para determinar si el sistema es Sobre, Sub o Críticamente amortiguado ¿Es indispensable escribir la función solución de la ecuación diferencial? Justifique su respuesta.

si, debido a que la solucion contiene la amplitud de las oscilaciones y se pueden llegar a reemplazar los datos en la formula.

4. En un problema de masa-resorte, para determinar si el sistema es Sobre, Sub o Críticamente amortiguado ¿Es indispensable escribir la función solución de la ecuación diferencial? Justifique su respuesta.

si para encontrar los puntos más ("criticos") del sistema

Análisis de Resultados

Al realizar un análisis de la información recopilada, se plantea que al solucionar un problema de sistemas masa – resorte, los niveles de comprensión o construcciones mentales parten de la desencapsulación del modelo mediante acciones como:

- Relacionar la ecuación característica con la ecuación diferencial
- Extraer las condiciones iniciales del enunciado del problema

- Realizar las conversiones de unidades requeridas para dar tratamiento a las variables del problema.

Así mismo, la coordinación de algunos procesos relacionados con:

- la identificación y comprensión de variables y constantes dadas de forma explícita o implícita en el enunciado del problema.
- La comprensión de las leyes de la naturaleza que hacen parte del sistema.
- Interpretación de la ley de Hooke, la información que aporta sobre la característica del resorte.
- Interpretar la ley de Stokes, como una justificación a que la fuerza amortiguadora sea proporcional a la velocidad.

Además, se hace necesaria la interiorización de los procesos que

- Relacionan el discriminante de la ecuación característica con el tipo de movimiento del sistema.
- Establecen la solución de la ecuación diferencial, diferenciando las funciones solución, correspondientes a cada raíz de la ecuación característica.

Las construcciones mentales anteriormente descritas, junto con los mecanismos de desencapsulación, coordinación e interiorización, pueden favorecer la comprensión y del objeto ecuación diferencial $mx'' + \beta x' + kx = 0$, que modela un sistema masa resorte.

Conclusiones

Aunque los libros de texto proporcionan las ecuaciones diferenciales que modelan ciertos fenómenos físicos, y en particular la que modela un sistema masa – resorte, no es clara la forma como se deben construir estos objetos, partiendo inicialmente de que cada autor, construye o presenta la ecuación diferencial desde justificaciones físicas que si bien convergen a la misma ecuación, no son coherentes, pero en este trabajo se han encontraron de forma preliminar niveles de comprensión o construcciones mentales, que por medio de mecanismos de construcción como la desencapsulación, coordinación, e interiorización, permiten la compresión de estos objetos, sin depender del texto guía utilizado.

Identificar la forma como se comprenden algunos objetos matemáticos, son estrategias que pueden mejorar los métodos de enseñanza-aprendizaje, y de esta forma presentar alternativas a los modelos de enseñanza tradicional, la cual como mencionan algunos autores, en ocasiones solo se basa en la forma como los comprende el profesor del curso (Alvarenga, 2006).

La triangulación de la información para diseñar una descomposición genética es una de las tareas que enriquece los conocimientos de quienes la están construyendo y gesta un marco de referencia para formar a los profesionales que la deseen utilizar.

Identificar y utilizar las construcciones mentales que hacen los estudiantes al comprender un objeto, son estrategias que pueden cambiar la práctica profesional docente e impulsar un cambio en la enseñanza tradicional del cálculo.

La teoría APOS y su elemento principal; la descomposición genética, puede considerarse como un punto de convergencia de diferentes profesionales cuya labor está relacionada con la enseñanza del cálculo, y deseen mejorar sus prácticas de enseñanza, o aportar a la investigación en educación matemática.

Referencias bibliográficas

Alvarenga, K. (2006). *Inecuaciones: un análisis de las construcciones mentales de estudiantes universitarios.* (Tesis Doctoral). Instituto Politécnico Nacional. México.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. Springer New York.

Chaves, R. y Jaimes, L. (2014). *Descomposición genética de la ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas*. Tesis de maestría. Universidad Pedagógica Nacional.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-126). Springer Netherlands.

Dullius, M. (2009). *Enseñanza y aprendizaje en ecuaciones diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico.* Tesis Doctoral. Universidad de Burgos. España. En línea http://hdl.handle.net/10259/110

Edwards, C. H., y Penney, D. E. (2009). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera.* Pearson Educación.

Fragoso, L., Magalhães, M., Las Casas, E., Santos, J., Rabelo, A., y Oliveira, R. (2014). A mass-spring model of the auditory system in otosclerosis. *Revista Brasileira de Engenharia Biomédica, 30*(3), 281-288.

Guerra, M. (2003). Esquemas del Concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria en un Contexto Curricular Tradicional. *Matemática, Educación e Internet. 4*(1). En línea http://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/2343

Jaimes, L., Cháves, R., y Hernández, C. (2015). Planteamiento de una ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas: Una dificultad en la movilización entre registros de representación, lengua natural y algebraico. *Elementos*, *5(*5), 23-31.

Morales, Y., y Salas, O. (2010). Incorporación de la tecnología para la enseñanza y aprendizaje de las ED ordinarias. *Cuadernos de Investigación y Formación enEducación Matemática, 6*, 155-172.

Napóles, J. (2009). La resolución de problemas en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Un enfoque histórico. *Revista Educación y Pedagogía*, *15*(35), 163-181. Recuperado de http://aprendeenlinea.udea.edu.co

Nápoles, J., González, A., Brundo, M., Genes, F., y Basabilbaso, F. (2004). El enfoque histórico problémico en la enseñanza de la matemática para ciencias técnicas: el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias. *Acta Scientiae, 6* , 41-59.

Peña, M. A. L., García, S. F., y Porras, S. T. *Enseñanza-Aprendizaje De Las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.* 4º Congreso Internacional de Investigación CIPITECH 2011. Área 6: Matemáticas y Física.

Zill D. y Cullen M. (2008). *Matemáticas avanzadas para ingeniería, Vol 1. Ecuaciones diferenciales Tercera Edición*, Editorial McGraw-Hill.

RAZONAMIENTO INFERENCIAL INFORMAL EN PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Nicolás Sánchez Acevedo; Blanca Ruiz Hernández
CICATA-IPN, Tecnológico de Monterrey. (México)
nicolas1983@cicata.edu.mx, bruiz@itesm.mx

Resumen
Últimamente, la estadística se ha incorporado en los currículos de educación primaria, debido a la creciente necesidad de formar personas con capacidad de analizar e interpretar la realidad. Para ello, es necesario contar con profesores con una formación adecuada y conocimientos actualizados para integrar y articular las ideas estadísticas. El objetivo del taller es poner a discusión una propuesta de enseñanza de la estadística cuyo objetivo central sea interconectar ideas estadísticas por medio de la Inferencia informal. La metodología propone un trabajo colaborativo y reflexivo permitiendo a los profesores cuestionar cómo se enseña estadística y discutir herramientas para el diseño de clases de estadística.

Palabras clave: enseñanza de la estadística, inferencia informal, razonamiento de inferencia informal

Abstract
Lately, statistics has been included into the school program of primary education, due to the growing need to train people who are able to analyze and interpret reality. That is why, it is necessary to have teachers with adequate training and updated knowledge to integrate and articulate statistical ideas. The objective of the workshop is to discuss a statistical teaching proposal aimed at interconnecting statistical ideas through informal inference. The methodology suggests a collaborative and reflective work which allows teachers to ask how statistics is taught and to discuss teaching tools for the design of statistical classes.

Key words: statistical teaching, informal inference, informal inference reasoning

Fundamentación

Desde hace algunos años, la inclusión de la estadística en el currículo escolar ha ido en aumento, aun cuando esta ha sido gradual desde los primeros años de educación. Con esto se busca que los estudiantes desarrollen la capacidad de formular, preguntar y recoger datos relevantes para responder a estas preguntas contextualizadas (NCTM, 2000). En relación a la idea anterior, el informe GAISE (Franklin, Kader, Mewborn, Moreno, Peck, Perry, y Scheaffer, 2005) plantea que una de las ideas más relevantes a desarrollar en el pensamiento estadístico de los estudiantes es el de *variabilidad*, pues al comprender que esta idea está presente en la mayoría de los procesos de la vida cotidiana se podrán percibir y explicar los problemas en relación a la toma de decisiones.

El currículo Matemático, al incluir la estadística desde los niveles escolares iniciales de enseñanza, debe contar con profesores con capacidad para exponer las estadísticas en relación al contenido estadístico base en estos niveles (Leavy, 2010), para desarrollar capacidades en los estudiantes como análisis de información, recolección de datos, organización por medio de gráficos y tablas, por medio de la comparación de fenómenos y la toma de decisiones fundadas en datos contextualizados (Ruiz-López, 2015). Lo anterior hace necesarias dos cosas, por una parte que los currículos de Matemáticas incorporen el desarrollo de las ideas y conceptos estadísticos de manera gradual, con el fin de profundizar y asegurar la comprensión por parte de los estudiantes y luego potenciar con el uso de herramientas estadísticas más formales.

Este último aspecto, plantea la necesidad de proponer y desarrollar estrategias para los profesores que enseñan estadística en los niveles tempranos, puesto que se hace indispensable que el profesor adquiera herramientas adecuadas que le permitan reflexionar en cuanto a saber interpretar y adaptar el currículo a contextos específicos (Ponte, 2011).

Un enfoque eficaz y alternativo de enseñanza en el nivel primario (en particular), es el de inferencia informal (IE), enfoque que cumple un rol central en la comprensión de conceptos y la importancia del contexto desde donde emergen los datos, pues es a través de estos que es posible potenciar el desarrollo de razonamientos informales en distintos contextos. Estos razonamientos actúan como mediadores entre la etapa de elaborar un razonamiento hasta la etapa de entregar la inferencia derivada de este razonamiento. Aun cuando no se tiene una idea común para preparar a los profesores para enseñar estadística por medio de la inferencia informal, es una línea que adquiere relevancia (De Vetten, Schoonenboom, Keijzer y Van Oers, 2016; BenZvi, Bakker y Makar, 2015).

La inferencia informal surge como propuesta para incorporar el razonamiento estadístico, dejando de lado los procedimientos formales de estadística como pruebas de hipótesis, intervalos de confianza, valor p, etc. El foco está centrado en una propuesta para apoyar la comprensión conceptual de los procesos inferenciales formales (Makar y Rubin, 2009). La enseñanza, basada sobre la inferencia informal, es mostrarse como una herramienta que permita a los profesores de educación primaria (en este caso), reflexionar sobre la importancia que tienen los datos y su contexto para ser enseñada y no asimilarla a la enseñanza de las Matemática (Sánchez y Ruiz, 2017), pues esta última sirve de soporte a la primera.

Marco Conceptual: Inferencia Estadística Informal

Apoyados en Makar y Rubin (2009), consideramos el razonamiento inferencial informal como la profundización sobre la comprensión que pueden llegar a lograr los estudiantes sobre algún objetivo planteado, es decir, la aplicación contextualizada de los conceptos y las conclusiones emanadas de los datos.

Para Makar y Rubin (2009) la inferencia informal es una herramienta potencial para que los estudiantes (en cualquier nivel) puedan profundizar y comprender el propósito y utilidad de los datos de forma más general y la aplicación que estos tienen de forma directa con el contexto y la realidad. Este marco conceptual contempla aspectos críticos, que se traducen en tres componentes (Makar y Rubin, 2009, p. 85), (Figura 1):

- La generalización, incluyendo predicciones, estimación de parámetros y conclusiones que se extiendan más allá de la descripción de los datos. Estas generalizaciones se evidencian en la identificación de patrones de datos.
- La evidencia en los datos, que sostienen esa generalización, predicción o conclusión, es decir dar argumentos implícitos o explícitos que justifique su decisión de la inferencia estadística.
- Uso de un lenguaje probabilístico. Presencia de la incertidumbre al relacionar o plantear una generalización a la población

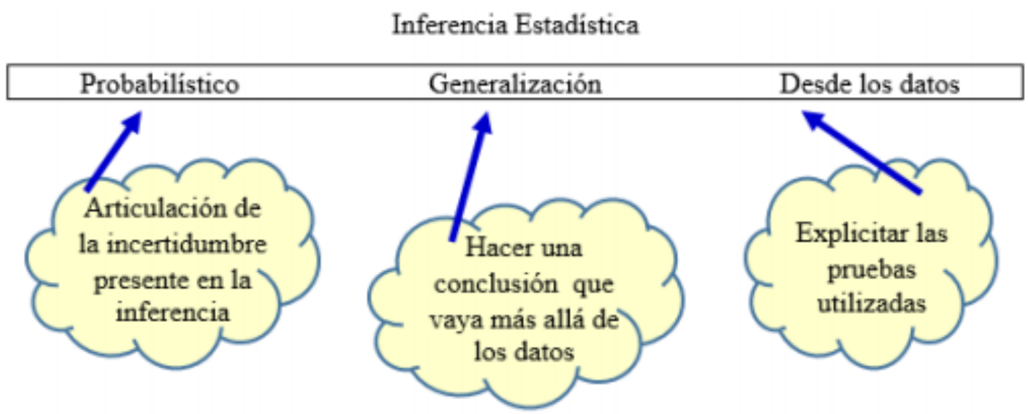


Figura 1: Marco de evaluación de razonamiento inferencial informal (Makar y Rubin, 2009)

En este marco, se parte de la idea, que el razonamiento estadístico se desarrolla progresivamente con la identificación de, y desde los datos. Estos datos permiten dar sustento a los razonamientos que se fundan en contextos particulares; la progresión y evolución de los tipos de razonamientos está sujeta al trabajo reflexivo, las representaciones, los argumentos y la presencia de la variabilidad.

Presentación de la propuesta del taller

Este taller se compone de dos actividades tomadas y adaptadas de investigaciones previas de enseñanza. Ambas actividades fueron seleccionadas por haberse desarrollado en contexto de profesores y estudiantes de educación primaria. Cada una de las dos actividades contempla el objetivo que se pretende alcanzar y el desarrollo de tareas específicas, de tal modo que los profesores se involucren activamente. No se pide para el desarrollo de estas tareas conocimientos profundos de Matemáticas.

Objetivos del taller

El objetivo del taller es poner a discusión una propuesta de enseñanza de la estadística cuya intención principal es interconectar ideas sobre la base de razonamientos inferenciales informales para enseñar estadística. Específicamente se pretende discutir, reflexionar y analizar la relevancia que tienen los datos para enseñar estadística por medio de actividades adecuadas. Este objetivo busca guiar las actividades que han sido propuestas y adaptadas para los participantes. Dichas actividades se caracterizan por incluir elementos de inferencia informal y hacerlos emerger en los profesores.

Destinatarios

El taller se presenta para profesores de educación primaria, que estén en formación o ejercicio y que desarrollen su labor enseñando Matemáticas en alguno de los niveles de educación primaria. Lo anterior no excluye la participación de profesores de educación secundaria.

La modalidad de trabajo y las tareas propuestas

La secuencia del taller está compuesta por dos actividades independientes. En cada una de las tareas se proponen consignas para guiar la interacción y el trabajo cooperativo, con la intención de hacer emerger los razonamientos informales en los profesores participantes, logrando proyectar posibles interrelaciones de trabajo con sus estudiantes al enseñar estadística.

a) Primer momento: se expone el acercamiento que hace la inferencia informal para el razonamiento estadístico y sus objetivos, así como su pertinencia y características distintivas.
b) Segundo momento: se entrega a cada uno de los participantes documentos con las indicaciones y tareas de las dos actividades, para abrir la reflexión y discusión.
c) Tercer momento: Trabajo en grupos para consensuar opiniones en relación a las preguntas planteadas en el taller. Sobre los datos y los contextos.
d) Cuarto momento: Plenario. Discusión para alinear, discutir y reflexionar sobre las ideas relevantes derivadas del taller y las ideas de cada grupo. Reflexiones de práctica docente.

Actividades

Primera Actividad

El objetivo de esta actividad es explorar razonamientos inferencias informales de profesores de educación básica en relación a una actividad de comparación de datos (Orta, Altamirano, García-Ríos y Sánchez, 2015).

En un bingo, se invita a los asistentes a participar en uno de los dos juegos propuestos. Uno de los asistentes, Juanito, solo puede participar en uno de los juegos, pero no en ambos. Para saber por cuál decidirse observa, anota y ordena los resultados de dos muestras de 10 personas que han participado ya en cada juego anteriormente. Las pérdidas (-) o premios (+) en efectivo que han obtenido las 20 personas se muestran en las siguientes listas:

Juego 1	15 -21 -4 50 -2 11 13 -25 16 -4
Juego 2	120 -120 60 -24 -21 133 -81 96 -132 18

Descripción: este taller tendrá cinco partes. Cada una de las partes del taller incluye las tareas a desarrollar con las cuestiones específicas que se deben responder.

- *Parte 1 (15 min. Aprox.):* Exposición de encargados del taller sobre el rol de la estadística y qué aspecto tiene la inferencia informal como herramienta para enseñar estadística.

- *Parte 2 (20 min. Aprox.):* Entrega de material. Se trabaja, analizan y calculan estadísticas básicas de forma individual en el documento, respondiendo las siguientes preguntas:

a) Si tienes la posibilidad de participar en un solo juego ¿Cuál juego elegirías? Explica y justifica tus formas de proceder y calcular
b) ¿Por qué? Justifica detalladamente tus respuestas

- *Parte 3 (30 min. Aprox.):* Reunirse en grupos de 2 o 3 personas y discutir las respuestas a las que cada uno llegó en la parte 2 del taller. Consideren las siguientes preguntas guías:

a) ¿Llegaron a las mismas respuestas en relación a la elección del juego que es más conveniente?
b) Si encontraron diferencias ¿a qué creen que se debe esa diferencia en la elección de un juego y no de otro?
c) Si las muestras de pérdidas y ganancias, en ambos juegos fuesen otras, ¿los resultados serían los mismos? ¿Por qué creen que si? o ¿por qué creen que no? Expliquen sus ideas.

- *Parte 4 (20 a 25 min. Aprox.):* Plenario. Los grupos exponen los resultados de sus discusiones, tanto de la parte 2 como de los resultados y conclusiones obtenidas de la parte 3 sobre la actividad.
- *Parte 5 (10 min. Aprox.):* Conclusiones

Segunda Actividad

Objetivo: Explorar, analizar y discutir inferencias informales en relación a la predicción, tomando en cuenta la variabilidad de las muestras de datos, particularmente la talla de zapatos de los participantes (Makar, 2016).

Descripción: A cada grupo se le entrega una base de datos con distintas tallas de zapatos diferenciados por sexo. Las tallas de las mujeres irán con la sigla M y las de hombres con la sigla H, por ejemplo 41-H o 36-M, que significa talla 41 de hombre o talla 36 de mujer.

- *Parte 1 (15 min. Aprox.):* Forman parejas (dependiendo de la cantidad de asistentes). Seleccionar al azar una muestra de 5 datos por sexo e inventar un método para registrar datos (estadísticas o gráficas). Responder las siguientes preguntas:

a) ¿Por qué seleccionan este método y no otro?
b) ¿Qué conclusiones pueden sacar a partir de los datos del tamaño de zapatos?; ¿Cuál es la talla de zapato más grande?; ¿Y la menor? ¿Cuál de las tallas es la más común?
c) ¿Podrían extraer alguna conclusión con respecto a la talla de zapato de la muestra? Por ejemplo conclusiones provisorias sobre el tamaño más grande, más pequeño y más común del zapato en su pareja, usando los datos hasta ahora como evidencia.

- *Parte 2 (15 a 20 min. Aprox.):* unirse con otra pareja, es decir formar grupos de 4 integrantes. Ahora, tendiendo una muestra de 10 tallas de zapatos, trabaje sobre las siguientes cuestiones:

a) Teniendo más datos agregados a la muestra (10). ¿Qué método elegirían para representar sus datos?; ¿El mismo que eligieron como parejas en la parte 1, u otro método?; ¿Por qué?
b) ¿Cómo interpretarían los datos, gráficos o estadísticos que seleccionaron en la viñeta anterior con base en el contexto de las tallas de estos zapatos?; ¿Por qué?
c) ¿Las conclusiones que han sacado seguirían siendo las mismas si tomamos muestras de tamaño mayor?; ¿por qué creen que si o no?

- *Parte 3 (25 min. Aprox.):* Unirse en grupos de ocho integrantes, es decir, dos cuartetos.

a) Siendo grupos de ocho integrantes, comparar las respuestas de la actividad realizada en la parte (2), y respondan:

i) ¿Las representaciones seleccionadas por cada cuarteto fueron las mismas o fueron diferentes? ¿por qué? Si estas fueron diferentes ¿sirven ambas o no? O como se podrían integrar todas en una sola muestra

a) ¿Qué grado de validez asignarían a las conclusiones extraídas con base en los datos de la muestra que poseen?

b) Ahora, siendo ocho integrantes, se forma una muestra de tamaño n=20, con tallas de zapatos diferentes. Trabaje las siguientes preguntas:

c) Teniendo una muestra de 20 datos ¿Seleccionarían el mismo método de representación de sus datos?; ¿Será mejor este método que los anteriores? ¿Por qué? ¿Creen que al tener más datos se hace necesario utilizar otro método de representación?

i) ¿Cómo interpretarían los datos, gráficos o estadísticos utilizados en contexto del tamaño de los zapatos?; ¿Qué tan fiables podrían ser las conclusiones que pueden extraer a partir de una muestra mayor de datos?

ii) De las conclusiones a las que han llegado, ¿seguirán siendo las mismas si tomamos muestra de tamaño mayor? ¿Por qué creen que si o no?

iii)Si este mismo taller se realizará en otra ocasión, con los mismos participantes y condiciones ¿Los resultados obtenidos serían los mismos? ¿Qué información aportan los resultados obtenidos en este taller en relación a la realización de otro similar? Justifiquen detalladamente

- *Parte 4 (15 min. Aprox.):* Plenario. Los grupos exponen los resultados de sus discusiones, tanto de la parte 1, parte 2, como también las justificaciones y conclusiones obtenidas de la parte 3 de la actividad.

- *Parte 5 (15 min. Aprox.):* Conclusiones

Reflexiones finales

La propuesta de taller mostrada busca dotar de sentido a la enseñanza de la estadística como disciplina incluida en el currículo escolar de Matemáticas desde cómo la conciben los profesores, desde una perspectiva constructivista y reflexiva, en tanto sirve para comprender diversos fenómenos de la realidad.

Quienes enseñan estadística, principalmente profesores, deben comenzar a familiarizarse con metodologías que propicien espacios para que los estudiantes analicen datos para comprender distintos fenómenos y que, justamente en estos, la componente de variabilidad está presente. Sin la comprensión, por parte de profesores, de este componente; la naturaleza de los datos y la variabilidad, se torna complejo lograr que la enseñanza de la estadística se trabaje de manera adecuada a nivel escolar.

La propuesta intenta poner en discusión y problematizar la relevancia del trabajo colaborativo y reflexivo basado en tareas relacionadas con la elaboración de inferencias informales para dar sentido a los datos en su contexto y no fuera de estos. Además, se pretende plantear que esta disciplina tiene su esencia en los datos contextualizados y que la matemática es una herramienta de apoyo. La idea de esta propuesta es justamente presentar una alternativa de enseñanza a profesores para que se apropien de estrategias para enseñarla, de manera fundamentada cuando seleccionen tareas. Justamente, Henriques y Oliveira (2014) plantean que “el trabajo basado en la organización y descripción de datos permite apoyar el cambio en el enfoque y la atención de los estudiantes en relación a medidas específicas y ver los datos no de forma aislada, tomando en cuenta la variabilidad como base de los razonamientos inferenciales informales” (170).

Referencias bibliográficas

Ben-Zvi, D., Bakker, A., y Makar, K. (2015). Learning to reason from samples. *Educational Studies in Mathematics, 88*(3), 291-303. doi: 10.1007/s10649-015-9593-3

De Vetten, A., Schoonenboom, J., Keijzer, R., y Van Oers, B. (2016a*). Exploring student teachers' reasoning about informal statistical inference when engaged in a growing samples activity.* Paper presented at the Thirteenth International Conference on Mathematical Education (ICME13), Hamburg, Germany.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D. S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., y Scheaffer, R. (2005). *A Curriculum Framework for K-12 Statistics Education. GAISE Report.* American Statistical Association. Recuperado de http://www.amstat.org/education/gaise/GAISEPreK-12_Full.pdf

Henriques, A. C., y Oliveira, H. (2014). Raciocínio inferencial informal de alunos do 8.º ano no contexto de uma investigação estatística usando o Tinkerplots. *Atas do EIEM - Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 159-172). Sesimbra: SPIEM.

Leavy, A. (2010). Teaching statistics at the primary level: Identifying obstacles and challenges in teacher preparation from looking at teaching. En C. Reading (Ed.), Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS-8, July, 2010), Ljubljana, Slovenia. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. [Online: http://iase-web.org/documents/papers/icots8/ICOTS8_3B3_LEAVY.pdf].

Lester, F. (2010). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. En B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers.* Heidelberg: Springer.

Makar, K. (2016) Developing Young Children’s Emergent Inferential Practices in Statistics, *Mathematical Thinking and Learning, 18*(1), 1-24, DOI: 10.1080/10986065.2016.1107820

Makar, K. (2013). Teaching Statistics using informal statistical inference. *The Australian Mathematics Teacher, 69*(4), 34-40.

Makar, K., y Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal, 8*(1), 82-105.

Orta, J., Altamirano, J., García-Ríos, V., y Sánchez, E. (2015). Estudio exploratorio sobre el razonamiento inferencial de profesoras en formación. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria.*

Ponte, J. P. (2001). Investigating in mathematics and in learning to teach mathematics. En T. J. Cooney & F. L. Lin (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 53-72). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ruiz-López, N. (2015). La enseñanza de la Estadística en Educación Primaria en América Latina. *Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 13*(1), 103-121.

Sánchez, N., y Ruiz, B. (2017). La inferencia informal en la enseñanza de la estadística. Una propuesta por medio del estudio de clases. En Rosas, Alejandro (Ed.), *Avances en matemática educativa. El profesor investigador* (pp. 117-133). México: Lectorum.

Zieffler, A., Garfield, J., Delmas, R., y Reading, C. (2008). A Framework to Support Research on Informal Inferential Reasoning. *Statistics Education Research Journal: 7*(2), 40-58.

UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA SOBRE LA FUNCIÓN LINEAL EN EL CONTEXTO DE ADMINISTRACIÓN Y NEGOCIOS

Agustín Curo Cubas, Verónica Neira Fernández, Mihály Martínez-Miraval
Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. (Perú)
agustin.curo@upc.edu.pe, pcmavnei@upc.edu.pe, pcmammar@upc.edu.pe

Resumen

El presente curso tuvo por finalidad presentar, de una manera alternativa y visual, una forma de trabajar la función lineal, sus elementos y su aplicación en problemas contextualizados. Se presenta una secuencia didáctica, mediada por el GeoGebra, basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica, en la que se desarrollan problemas en el contexto de la Administración y Negocios para que los docentes en formación continua trabajen los diferentes registros y puedan movilizar el concepto de función lineal. A partir de lo vivenciado en el curso, se espera que los docentes puedan implementar en su práctica lo aprendido.

Palabras claves: Función lineal, Registro gráfico, Registro verbal, Registro algebraico.

Abstract

This course aims to present a visual alternative way of working with the linear function, its elements and its implementation in contextualized problems. We show a GeoGebra-assisted teaching sequence based on the Theory of Semiotics Representation Records which includes a variety of problems in the field of Business and Administration in order that teachers in continuous training be able to work the different records as well as to use the concept of linear function. We expected that teachers in continuous training be able to put into practice all what they could learn in this course.

Key words: Linear function, Graphical representation, Verbal representation and Algebraic representation

Introducción

Existen investigaciones como la de Díaz, Haye, Montenegro y Córdoba (2015); Prada-Núñez, Hernández y Ramírez-Leal (2016) y; Coronado (2015) que ponen en evidencia las dificultades que los estudiantes presentan cuando se desarrolla el tema de función lineal e indican la importancia de incidir en el uso de diferentes registros cuando se trabaja dicho contenido y no sólo con el registro algebraico. Es por ello que el presente curso tuvo como propósito presentar una propuesta de secuencia didáctica, basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica (Duval, 1999), para trabajar la función lineal en el contexto de

Administración y Negocios dirigido a docentes de matemáticas en el nivel superior, basándonos en Hoffmann, Bradley y Rosen (2006). Tomamos como metodología de investigación a la Ingeniería Didáctica (Artigue 1995).

En el curso se propusieron dos actividades para ser desarrolladas por los docentes participantes, donde se puso énfasis en las conversiones de registros cuando se trabajaba el contenido de función lineal.

Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica

Duval (1999) señala que las representaciones semióticas son importantes porque la forma de los símbolos en matemáticas en relación con el contenido representado, la diversidad de formas de representación para un contenido representado y el cambio de forma de representación por razones de economía de tratamiento. Un sistema de representación semiótica es un sistema específico de signos relativos a cada representación semiótica. Entonces, la noción de representación semiótica supone la consideración de diferentes sistemas de representación y una operación cognitiva de conversión de un sistema a otro, esto implica obtener representaciones "equivalentes" en otros sistemas.

Pero esta operación no es tan simple, en palabras de Duval (1999),

El paso de un sistema de representación a otro, o la movilización simultánea de varios sistemas de representación en el transcurso de un mismo recorrido intelectual (…) para nada son evidentes o espontáneos para la mayoría de los alumnos. Estos, por lo regular, no reconocen el mismo objeto a través de las representaciones que pueden darse en sistemas semióticos diferentes: la escritura algebraica de una relación y su representación geométrica sobre una recta o en el plano, el enunciado de una fórmula en lenguaje cotidiano y la escritura de esta fórmula en forma literal, etc. (p. 16).

Duval (1999), señala que se puede hablar de registros de representación semiótica, si los sistemas semióticos permiten el cumplimiento de tres actividades cognitivas innatas a toda representación: formación, tratamiento y conversión. La *formación* de representaciones está relacionada a un conjunto de marcas o signos perceptibles que identifican la representación de alguna cosa en un sistema determinado. Un *tratamiento* es una transformación que genera otra representación en el interior del mismo registro. Esta nueva representación puede constituir una ganancia de conocimiento con respecto a la representación inicial. Y la *conversión* es una transformación que genera una representación en otro registro diferente al de la representación inicial, es decir, se realiza una transformación externa al registro representación de partida.

Para el autor, "la conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los alumnos" (Duval, 1999, p. 49). Entre las razones planteadas figuran: la ausencia de reglas de conversión en la mayoría de los casos, la frecuencia en el cambio de registros realizados por simplicidad y economía de tratamiento y la creencia en que un cambio de registro es inmediato y no presenta complejidad.

Los registros de representación semiótica pueden ser clasificados en cuatro tipos:

Cuadro 1. Clasificación de los registros de representación semiótica. Adaptado de Siano (2007, p. 37)

	REPRESENTACIÓN DISCURSIVA	**REPRESENTACIÓN NO-DISCURSIVA**
REGISTRO MULTIFUNCIONAL: Los tratamientos no son algoritmizables.	**Lenguaje Natural:** Asociaciones verbales (conceptos). Forma de razonar: ▪ Argumentaciones a partir de observaciones, de opiniones… ▪ Deducciones validas de teoremas y definiciones.	**Registro Figural:** Figuras geométricas planas y sus vistas. (Configuraciones de 0, 1, 2 y 3 dimensiones). ▪ Aprehensión operatoria y no solo perceptiva. ▪ Construcción con instrumentos.
REGISTRO MONOFUCIONAL: Los tratamientos son principalmente algoritmizables.	**Sistema de Escritura:** ▪ Numéricas (binarias, decimal, fraccionaria…) ▪ Algebraicas; ▪ Simbólicas (lenguaje formal). Cálculo.	**Registro Gráfico:** ▪ Plano cartesiano. ▪ Cambio de sistema de coordenadas. ▪ Interpolación y extrapolación.

En el curso propuesto se trabajó con los siguientes registros:

- El registro verbal (lenguaje natural) se puede apreciar como una descripción verbal de lo que se espera que el alumno realice.
- El registro gráfico se puede apreciar al graficar las funciones en el plano cartesiano. También se puede considerar el manejo de las coordenadas cartesianas para efectos operativos.
- El registro algebraico se presenta en el manejo de la escritura algebraica.

De lo expuesto, anteriormente, podemos reconocer la importancia de las representaciones dentro de los procesos de enseñanza y de aprendizaje como un mecanismo que permite la mejor aprehensión de un concepto o de un significado.

Análisis a priori y a posteriori de la Propuesta

El curso se desarrolló en dos sesiones, en cada una de ellas se aplicaron dos actividades, dichas actividades presentaron problemas contextualizados para la carrera de Administración y Negocios para que se movilicen los conceptos: de pendiente y la ordenada en el origen, elementos de la función lineal y que ahora tienen un significado según el contexto del problema dado.

En el análisis a priori se menciona lo que se esperaba en el desarrollo de las actividades por parte de los participantes y en el análisis a posteriori, lo que realmente realizaron en dichas actividades.

En este escrito, se presenta el análisis a posteriori en relación a una parte de la primera actividad en donde el objetivo era que los participantes logren identificar la información que se presenta en la representación gráfica del ingreso y la utilidad para luego hacer conversión hacia los registros algebraicos y verbales, y finalmente, graficar la función costo.

Problema 1

La figura 1 muestra las representaciones gráficas del ingreso I y la utilidad U de una fábrica de lámparas, en base a la información que proporcionan dichas representaciones responda:

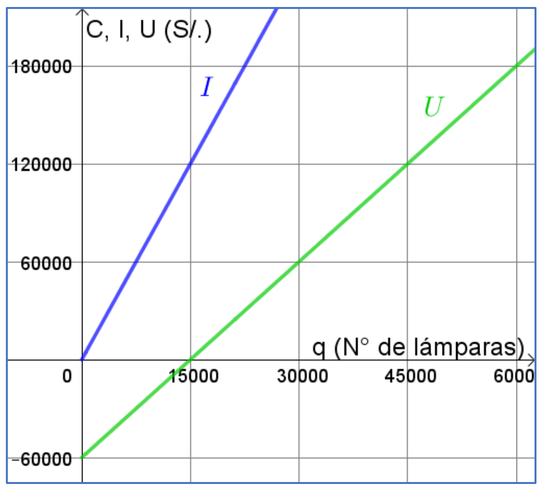


Figura 1. Gráficas de las funciones Ingreso y Utilidad (Problema 1)

a. ¿Cuál es el precio unitario del producto?

En el análisis a priori, se esperaba que los participantes observaran las representaciones en el registro gráfico de la función ingreso I, identificaran los puntos de paso de dicha representación gráfica contextualizando el significado de cada coordenada y luego usaran el registro algebraico para determinar el precio unitario del producto.

Si por 15 000 unidades obtiene un ingreso de 120 000 soles y se sabe que $I(q) = p \times q$, entonces el precio unitario es:

$$p = \frac{120000}{15000} = 8\, soles$$

También pueden responder haciendo uso directo de los datos numéricos.

Para el análisis a posteriori de las actividades tomamos las respuestas de uno de los participantes del curso.

A posteriori se obtuvo que a diferencia de lo esperado en el a priori, el participante reconoce que el precio es la pendiente de la función ingreso (ver figura 2). Por ello, realiza tratamientos en el registro algebraico haciendo cálculos para hallar el valor del precio unitario.

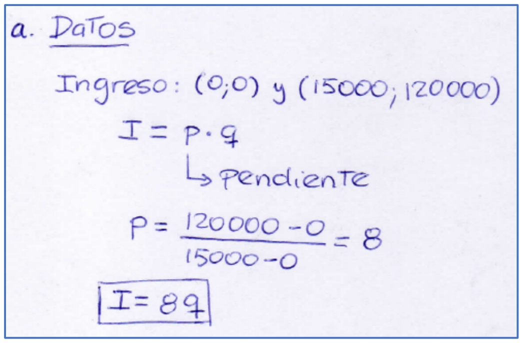


Figura 2. Desarrollo del ítem a) del problema 1, realizado por un docente participante.

b. ¿Cuál es el nivel de ventas mínimo para dejar de perder?

A priori, se espera que los participantes observen la representación gráfica de la utilidad e identifiquen el punto en donde la utilidad es cero, de esta manera utilizará el registro en lengua natural (verbal) para indicar que cuando se producen y venden 15 000 lámparas se deja de perder.

A posteriori, el docente participante, usando el registro verbal manifestó que se deja de perder cuando se producen y venden 15 000 lámparas.

c. ¿Cuánto es el valor del costo total para el nivel de ventas hallado en el ítem b?

Esperamos que los participantes primero hagan uso del registro algebraico al plantear la ecuación $U = 0$ cuando $q = 15\,000$ y además relacione que cuando $U = 0$ también se da que $I = C$, en ese sentido al identificar en la representación gráfica que en $q = 15\,000$ lámparas el ingreso es 120 000 soles por lo tanto, el costo total es de 120 000 soles.
A posteriori, como se puede evidenciar en la figura 3, el participante ha desarrollado la pregunta según lo previsto en el análisis a priori.

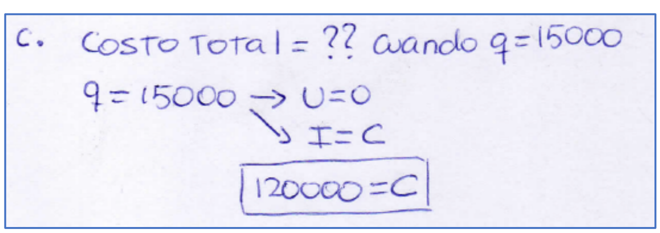


Figura 3. Desarrollo del ítem c) del problema 1, realizado por un docente participante.

d. ¿Cuál es el valor del costo fijo?

En esta pregunta pensamos que los participantes hagan la conversión del registro gráfico al registro algebraico y relacionarán que cuando q = 0, U = - C_f; por lo tanto, a partir del registro gráfico de la utilidad se observa que cuando no se produce ninguna lámpara la utilidad es de – 60 000 soles, entonces utiliza el registro en lengua natural para indicar que el costo fijo es de 60 000 soles.

En el análisis a posteriori, según lo previsto en el análisis a priori, el participante identifica el costo fijo a partir de la representación gráfica de la función utilidad.

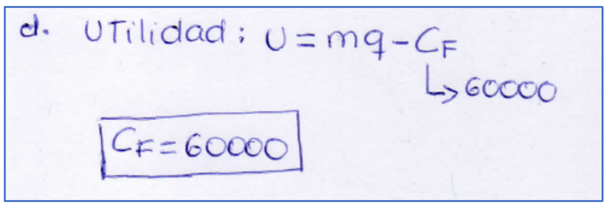


Figura 4. Desarrollo del ítem d), del problema 1, realizado por un docente participante.

e. Trace la gráfica del costo total en la figura

A priori pensamos que los participantes tendrán en cuenta que para realizar el registro gráfico del Costo, al ser una función lineal, optarán por utilizar los puntos (0; 60 000) y el punto (15 000; 120 000). En esta pregunta se buscaba las conversiones del registro gráfico al algebraico y del algebraico al registro gráfico.

A posteriori, el profesor participante desarrolló la pregunta según lo esperado, logrando hacer la conversión entre registros y además, contextualizando los datos dados pues identificó los elementos de la función costo

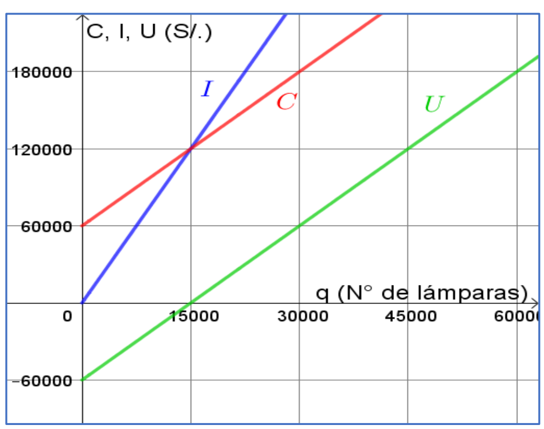


Figura 5. Desarrollo del ítem e), del problema 1, realizado por un docente participante.

Esta propuesta permitió ver una de las aplicaciones de la función lineal dentro del contexto Administrativo y Negocios, entender que dentro de un problema en contexto tanto los puntos de intersección con los ejes, los puntos de intersección entre las rectas y las pendientes respectivas adquieren un significado que nos permite ilustrar uno de los campos donde son aplicadas las funciones lineales.

Algunas conclusiones:

- En base a las investigaciones tomadas como referencia, pudimos rescatar que pocas veces se plantean actividades donde los participantes puedan hacer uso de varias representaciones de la Función Lineal en diferentes registros.

- La actividad permite trabajar las diferentes representaciones de la función lineal en los registros verbal, algebraico y gráfico; y reconocer qué conversiones y tratamientos entre representaciones realizan los participantes.

Referencias Bibliográficas

Artigue, M. (1995). *Ingeniería didáctica en educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje del cálculo.* Bogotá, Colombia. Editorial Iberoamérica

Córdoba, L., Díaz, M. E., Haye, E. E., & Montenegro, F. (2015). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *Revista Ibeoamericana de Educación Matemática*, 41, 20-38. Recuperado de: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2015/41/Artigo1.pdf

Coronado, A. (2015). Un modelo teórico a priori para una caracterización de la competencia matemática representar asociada a la función lineal. *RECME*, *1*(1), 119-124. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/8547/1/Coronado2015Modelo.pdf

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. (Traducción de Miryam Vega). Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Hoffmann, L., Bradley, I. y Rosen, K. (2006). *Cálculo para administración, economía y ciencias sociales*, 8va ed. Bogotá, Colombia: McGraw-Hill/Interamericana Editores S.A.

Prada-Núñez, R., Suárez, C. H., & Ramírez-Leal, P. (2016). Comprensión de la noción de función y la articulación de los registros semióticos que la representan entre estudiantes que ingresan a un programa de Ingeniería. *Revista Científica*, *2*(25), 188-205. Recuperado de: https://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/article/download/10385/11807

Siano, R (2007). *Un estudo com os números inteiros usando o programa Aplusix com alunos de 6ª série do ensino fundamental*.Tesis. PUC/SP. São Paulo. Recuperado de: http://www.pucrs.br/famat/viali/tic_literatura/dissertacoes/renata_siano_goncalves.pdf

SECCIÓN 3

ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 3 / ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR
VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

EL PROGRAMA ETNOMATEMÁTICA Y SUS ENFOQUES INNOVADORES

Milton Rosa
Universidade Federal de Ouro Preto. (Brasil)
milton@cead.ufop.br

Resumen
Este trabajo teórico ofrece una amplia visión en etnomatemáticas que incluye ideas, procedimientos y prácticas enraizadas en diversos contextos culturales. Al reflexionar en las dimensiones sociales, educaciones y políticas de la etnomatemática se abordan ogros aspectos importantes de este programa de investigación que conlleva al desarrollo de enfoques innovadores para el desarrollo de una sociedad dinámica y *glocalizada*. La etnomatemática reconoce que los miembros de distintos grupos culturales desarrollan técnicas, métodos y explicaciones matemáticos únicos, los cuales les permiten entender y transformar las normas sociales. Por lo tanto, es importante entender los temas relacionados con las etnomatemáticas y sus enfoques innovadores y también el papel de este programa en la Educación Matemática.

Palabras clave: cultura, programa etnomatemática, enfoques innovadores

Abstract
This theoretical research work offers a wide-ranging view on ethno-mathematics that includes the ideas, procedures, and practices rooted in diverse cultural contexts. By reflecting on the social, educational, and political dimensions of ethno-mathematics, other important aspects of this research program raise, which lead to the development of innovative approaches for the development of a dynamic and globalized society. Ethnomathematics recognizes that members of different cultural groups develop unique mathematical techniques, methods, and explanations that allow them to understand and transform social norms. Therefore, it is important to understand the issues related to ethno-mathematics and also its innovative approaches and the role of this program in Mathematics Education.

Key words: culture, ethno-mathematics program, innovative approaches

Antecedentes; los entornos culturales diferenciados

Las etnomatemáticas ofrecen una visión más amplia de las matemáticas, que abarca las ideas, nociones, procedimientos, procesos, métodos y prácticas arraigadas en entornos culturales diferenciados; la cual conduce a una mayor evidencia de los procesos cognitivos, capacidades de aprendizaje y actitudes que los procesos de aprendizaje directo que ocurre en las aulas.

Además, la reflexión sobre las dimensiones sociales, culturales y políticas de las etnomatemáticas, conduce a abordar otro aspecto importante de este programa, que es la posibilidad de desarrollar de enfoques educativos innovadores. En este contexto, el *Trívium Curriculum* para las Matemáticas propuesto por D'Ambrosio (1999) es un enfoque importante que necesita más investigación con el fin de hacer frente a los propósitos pedagógicos; tanto en la formación inicial y continua de los profesores de matemática en la modalidad a distancia, como en la formación docente indígena.

Un marco conceptual para debatir los enfoques innovadores en Etnomatemática

Es necesario discutir y debatir enfoques innovadores relacionados con los trabajos etnomatemáticos y su relación con: la justicia social, los derechos civiles, la educación indígena, los contextos profesionales, los juegos y lo lúdico, los contextos urbanos, rurales y del campo, la etno-transdisciplinariedad, la etno-pedagogía, la etno-metodología, la etno-modelación, la etno-computación, la educación popular, la educación profesional, el uso cotidiano de las matemáticas, las matemáticas comerciales y las matemáticas de los ingenieros y de los científicos.

Vamos a mostrar algunos ejemplos de estos enfoques innovadores.

Justicia social

Según D'Ambrosio (2009), cada vez es más necesario capacitar a los estudiantes, enseñándoles acerca de los problemas del mundo real e inculcar en ellos el deseo de buscar y trabajar hacia este objetivo. Entonces, es importante empoderarlos para que tomen posición sobre los problemas del mundo real e inculcar en ellos el deseo de buscar y trabajar hacia sus propios objetivos.

Así, los estudiantes que no creen, no valoran o no reconocen sus propias raíces culturales pueden asimilar fácilmente la cultura dominante sin reflexionar críticamente sobre los valores de esta cultura.

Por lo tanto, es extremadamente necesario contextualizar las matemáticas; para esto los profesores deben saber más acerca de las matemáticas y las competencias de su comunidad con el fin de ayudar a los estudiantes realizar un examen crítico y reflexivo de los conocimientos matemáticos que les son propios y les hacen únicos.

Etno-computación

Según Eglash et al. (2006) la etno-computación es el estudio de las interacciones entre los ordenadores y el conocimiento cultural que se desprende de los miembros de grupos culturales diferenciados.

Constituye un campo de investigación que estudia las aplicaciones de la computación en diferentes entornos culturales y ofrece una herramienta para el desarrollo de un enfoque multicultural en la enseñanza de la computación, ya que reconoce la influencia de orígenes sociales y culturales en la tecnología informática.

Además, propicia un medio computacional expresivo que ofrece nuevas oportunidades para explorar las relaciones entre la identidad y la cultura juvenil, la construcción cultural de las matemáticas y la informática, y la formación de la hibridación cultural y tecnológica.

Etno-modelación

Las prácticas matemáticas que se refieren a relaciones numéricas que se pueden encontrar en la medición, clasificación, cálculo, medición, juegos, adivinación, navegación, astronomía, la modelación y una amplia variedad de otros procedimientos matemáticos utilizados en la producción de artefactos culturales (Eglash et al., 2006).

Según Rosa y Orey (2010), permite el desarrollo de una definición de etno-modelación como la traducción de las ideas locales matemáticas, que relaciona el prefijo *etno* con los procedimientos y las prácticas relacionadas con un conocimiento matemático específico, que ha sido desarrollado por los miembros de grupos culturales diferenciados.

Por lo tanto, es necesario comenzar por estudiar el contexto social, la realidad y los intereses de los estudiantes y obligarlos a la aplicación de un conjunto de valores externos para ellos. En este sentido, el aspecto principal del enfoque que propone la etno-modelación no radica sólo en resolver problemas, ni en la creación de una sencilla comprensión de los sistemas matemáticos alternativos, sino también orienta a los estudiantes hacia una comprensión más profunda de la importancia y el papel de las matemáticas en su sociedad y en su contexto (Rosa y Orey, 2007).

Además, la etno-modelación es un enfoque que permite valorar el uso de las etnomatemáticas y la aplicación de herramientas y técnicas de modelación matemática que permite percibir la realidad mediante el uso de diferentes lentes, lo que conduce a una comprensión holística de las matemáticas y provee un enfoque pedagógico adecuado, ya que contextualiza el conocimiento matemático desarrollado localmente, y estudia los fenómenos matemáticos que se dan en diversos contextos culturales (Rosa y Orey, 2017).

El contexto holístico creado a partir del análisis de la realidad en su conjunto, permite a los estudiantes participar en el proceso de modelación con el fin de estudiar y comprender los aspectos y componentes de los sistemas de la realidad, así como sus interacciones.

Trívium curriculum

D'Ambrosio (1999) propuso el plan de estudios trívium para las matemáticas, en el cual la etnomatemática se concibe como un importante enfoque innovador que necesita más investigación con el fin de hacer frente a los propósitos pedagógicos.

El Trívium comprende el estudio de diversas relaciones entre: el número (aritmética) y el estudio del tiempo; del espacio (geometría); del número en el tiempo (música) y del número; y, del espacio y el tiempo (astronomía).

Desde la perspectiva de Rosa y Orey (2015), el curriculum trívium para las matemáticas se compone de *literacia*, *materacia*, y la *tecnoracia*, y permite el desarrollo de las actividades escolares teniendo como fundamento las etnomatemáticas y la modelación.

Literacia

La literacia es la capacidad que poseen los estudiantes para procesar y utilizar la información presente en su vida cotidiana mediante la aplicación de técnicas y estratégias de lectura, escritura, lo que representa el cálculo y el uso de diversos medios de comunicación e internet.

Materacia

La materacía es la capacidad de los estudiantes para interpretar y analizar los signos, las señales y los códigos, con el fin de proponer modelos para encontrar soluciones a los problemas que ellos enfrentan diariamente. Proporciona instrumentos simbólicos y analíticos que ayudan a los estudiantes a desarrollar la creatividad y que les permite comprender y resolver problemas y situaciones nuevas.

Tecnoracia

La tecnoracia es la capacidad que poseen los estudiantes para utilizar y combinar diferentes instrumentos tecnológicos que les ayudan a resolver los problemas que enfrentan en sus actividades cotidianas, con el fin de evaluar la razonabilidad de los resultados y su contextualización.

Desde una perspectiva etnomatemática, la tecnoracia es una característica importante de los conocimientos científicos, así como su cosificación como artefactos tecnológicos: la cual se puede manifestar en las herramientas tecnológicas, traducidas en formas de tratar con ambientes naturales, sociales, culturales, políticos y económicos.

Etnomatemática y la Formación Inicial y Continua de Profesores a Distancia

Los resultados de los estudios realizados por Rosa y Orey (2013) recomiendan una propuesta etnomatemática para la formación inicial y continua de los profesores de matemática que está en sintonía con las tendencias actuales de la Educación Matemática; ya que estos profesores pueden desarrollar habilidades específicas para investigar las ideas y las prácticas matemáticas que ocurren fuera del contexto escolar, para exponerlas pedagógicamente por medio de actividades contextualizadas abordadas desde una perspectiva etnomatemática.

Sin embargo la mayoría de los profesores no utiliza esta visión, pues normalmente no poseen una formación adecuada para implantar esa tendencia en el currículo escolar. De modo que es importante que el trabajo pedagógico que se desarrolle desde la perspectiva etnomatemática en el ambiente de aprendizaje a distancia, esté relacionado con la realidad de los polos de manera atinente con la utilización de situaciones contextualizadas que tengan relación con el bagaje cultural de los profesores en formación.

De este modo, es imperiosa la necesidad de insertar en los cursos de formación de profesores de matemática -en la modalidad a distancia-, la investigación de las prácticas matemáticas locales desde la perspectiva etnomatemática.

Uno de los propósitos de este enfoque es ofrecer algunas sugerencias para aplicar esta visión en las prácticas pedagógicas desarrolladas en la enseñanza y aprendizaje de la matemática en la modalidad a distancia; así como también presentar un abordaje metodológico basado en la perspectiva etnomatemática, que pueda implicarse en la formación de profesores de matemática para la modalidad de enseñanza y aprendizaje a distancia.

■ Etnomatemáticas y la Formación Docente Indígena

Gavarrete (2015) expone la evolución y resultados de una investigación desarrollada con profesores indígenas que trabajan en entornos indígenas en Costa Rica; la cual posee un doble objeto de estudio: las etnomatemáticas de tres grupos étnicos y la formación docente en etnomatemáticas dentro de un modelo intercultural.

Dicho estudio posee como fundamentos teóricos las etnomatemáticas, la enculturación matemática y el aprendizaje a través de proyectos; así como también posee unos fundamentos empíricos que están constituidos por cuatro sub-estudios, los cuales consistieron en un diagnóstico de carácter etnológico realizado a tres grupos étnicos de Costa Rica. Por otra parte, Gavarrete (2013) recomienda que se deban sumar acciones respecto a las investigaciones etnomatemáticas y su papel en la educación para promover un currículo basado en el respeto, la tolerancia y la equidad.

A partir de dicha fundamentación, se estableció el modelo de un *Curso de Formación Docente basado en Etnomatemáticas Indígenas*, específico para quienes trabajan en estos entornos, donde la experiencia de implementación de dicho modelo se evaluó a través de un enfoque etnográfico participativo, el cual generó evidencias de la formación docente a través de un portafolio y un microproyecto curricular basado en etnomatemáticas indígenas.

El *Modelo de Formación Docente basado en Etnomatemáticas Indígenas* desarrollado aporta elementos de discusión acerca de la pertinencia cultural y la formación docente, así como acerca de la relación entre el conocimiento cultural y el conocimiento matemático escolar, lo cual constituye otro de los propósitos de este artículo, pues conduce a orientar la visión etnomatemática en las prácticas pedagógicas desarrolladas para la formación de profesores que desenvuelven el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en grupos diferenciados.

■ Conclusiones

Las Etnomatemáticas se basan en las experiencias y prácticas socioculturales de los estudiantes, sus comunidades y la sociedad en general, usándolos no sólo como vehículos para hacer el aprendizaje matemático más significativo y útil, sino también, para proporcionar a los estudiantes las percepciones de que el conocimiento matemático está incrustado en diversos ambientes.

Las Etnomatemáticas ofrecen una visión más amplia de las matemáticas, las cuales abarcan ideas, nociones, procedimientos, procesos, métodos y prácticas culturales arraigadas en distintos ambientes, lo cual favorece un aumento de la evidencia de los procesos cognitivos, capacidades de aprendizaje y actitudes que se fomentan en las aulas y una reflexión sobre las dimensiones sociales y políticas de etnomatemáticas, pues se favorece la posibilidad de desarrollar enfoques innovadores para una sociedad dinámica y *glocalizada*.

La *glocalización* (*glo*bal + lo*cal*) se entiende como la relación entre los conocimientos locales y globales y está relacionada con un abordaje dialógico del conocimiento; donde dicha relación puede ser considerada como la aceleración e intensificación de la interacción e integración entre los miembros de grupos culturales diferenciados (Orey y Rosa, 2015).

En este trabajo teórico abordamos algunas ideas claves que pueden proporcionar una comprensión más clara de las etnomatemáticas como campo de investigación por medio de la discusión de sus enfoques innovadores y su papel en la Educación Matemática.

Referencias bibliográficas

D'Ambrosio, U. (1999). Literacy, matheracy, and technoracy: a trivium for today. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2): 131–53.

D'Ambrosio, U. (2009). A nonkilling mathematics. In J. E. PIM (Ed.). *Toward a nonkilling paradigm* (pp. 241-270). Honolulu, HW: Center for Global Nonkilling.

Eglash, R., Bennett, A., O'Donnell, C., Jennings, S., y Cintorino, M. (2006). Culturally situated designed tools: ethnocomputing from field site to classroom. *American Anthropologist, 108*(2), 347-362.

Gavarrete, M. E. (2013). La Etnomatemática como campo de investigación y acción didáctica: su evolución y recursos para la formación de profesores desde la equidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 6*(1), 127-149.

Gavarrete, M. E. (2015). Etnomatemáticas indígenas y formación docente: una experiencia en Costa Rica a través del modelo MOCEMEI. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 8*(2), 136-176.

Orey, D. C., y Rosa, M. (2015). Three approaches in the research field of ethnomodeling: emic (local), etic (global), and dialogical (glocal). *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 8*(2), 364-380.

Rosa, M., Orey, D. C. (2007). Cultural assertions and challenges towards pedagogical action oy f an ethnomathematics program. *For the Learning of Mathematics, 27*(1), 10-16.

Rosa, M.; y Orey, D. C. (2010). Ethnomodeling: a pedagogical action for uncovering ethnomathematical practices. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(3), 58-67.

Rosa, M., y Orey, D. C. (2013). A etnomatemática como uma perspectiva metodológica para o ambiente virtual de aprendizagem a distância nos cursos de formação de professores. *RBAAD, 12*(1), 27-46.

Rosa, M., y Orey, D. C. (2015b). A trivium curriculum for mathematics based on literacy, matheracy, and technoracy: an ethnomathematics perspective. *ZDM, 47*(4), 587-598.

Rosa, M., y Orey, D. C. (2017). *Etnomodelagem: A arte de traduzir práticas matemáticas locais*. São Paulo, SP: Editora Livraria da Física.

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA DE TRIGONOMETRÍA EN INGENIERÍA APLICADA

Diana del Carmen Torres Corrales, Gisela Montiel Espinosa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)
diana.torres@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx

Resumen
Presentamos un avance de una investigación doctoral enmarcada en la Socioepistemología, cuyo *objetivo* es estudiar a las Matemáticas de forma articulada con otras áreas del conocimiento, en particular, estudiar usos de la Trigonometría en la Ingeniería aplicada. Para ello elegimos la Ingeniería Mecatrónica como población y un escenario de trabajo, la Robótica. En este documento presentamos la revisión bibliográfica relativa a la Trigonometría en Ingeniería aplicada, que más que un contexto de aplicación de lo ya aprendido en las asignaturas de Ciencias Básicas (Matemáticas), lo reconocemos como un escenario para su resignificación, en tanto plantea usos distintos al de la tradición escolar; elegimos el área especializada del diseño de máquinas, donde buscamos reconocer, en la funcionalidad del conocimiento trigonométrico, usos y significados que le son propios.

Palabras clave: matemáticas para ingeniería, modelación, conocimiento trigonométrico

Abstract
We present a preview of a doctoral research under the Socio-epistemological Theory of Mathematics Education, which aims to study the Mathematics connected with other areas of knowledge. Particularly, we focus on the study of trigonometry uses in applied engineering. We chose Mechatronics Engineering as the research population and Robotics as the working scene. In this paper we present a bibliographic review on Trigonometry in applied Engineering, which more than a context for implementing what has been learned in the subjects of Basic Sciences (Mathematics), we recognize it as a setting for its re-signification, as it raises uses different from those of the school tradition; we chose the specialized machine design, where we seek to recognize, within the functionality of trigonometric knowledge, uses and particular meanings of its own area.

Key words: mathematics for engineering, modelling, trigonometric knowledge

Introducción

Este artículo presenta un avance de un proyecto doctoral que tiene como *objetivo* estudiar a las Matemáticas de forma articulada con otras áreas del conocimiento, en particular, estudiar *usos* de la Trigonometría en la Ingeniería aplicada. En (Torres-Corrales y Montiel, 2017) se reportó que en las asignaturas de Ingeniería aplicada (del área de especialidad), cuando se requiere de la aplicación de todo de las asignaturas de Ciencias Básicas, generalmente, el estudiante no identifica el conocimiento matemático a aplicar. Esto, desde la perspectiva de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática

Educativa (TSME), se explica como un efecto del *discurso Matemático Escolar* (dME), pues privilegia, en la enseñanza de las Ciencias Básicas y las Ciencias de la Ingeniería, limitados significados, procedimientos y argumentos que provocan que el estudiante no articule las estructuras formales de la matemática con las situaciones de la Ingeniería, ni tampoco reconozca como matemático el conocimiento que pone en juego.

Para el caso de la Trigonometría, desde (Montiel, 2011) se han reportado, documentado y ampliado los fenómenos didácticos de *aritmetización trigonométrica, extensión geométrica-analítica* e *indiferencia a la fundamentación analítica*, provocados por el dME y que explican las dificultades y las concepciones reportados en la investigación didáctica, tales como: indiferencia entre la razón y la función, técnica de cálculo (división de longitudes), curvas onduladas, confusión en el uso de grado o de radián, entre otros. Estos fenómenos se repiten en el contexto universitario de la Ingeniería, en las asignaturas de Ciencias Básicas; sin embargo, en las asignaturas de Ingeniería Aplicada, se amplían sus contextos de uso y ello, desde nuestra perspectiva teórica, abre la posibilidad a su resignificación.

Con nuestra investigación, pretendemos estudiar los usos para explicitar significados, de las herramientas trigonométricas, que han quedado invisibilizados por los enfoques tradicionales centrados en el dominio de los objetos (razón, función y serie). Para ello, desde Torres-Corrales y Montiel (2017), delimitamos la investigación a una población, la Ingeniería Mecatrónica, y al realizar una revisión de sus planes y programas de asignaturas elegimos uno de sus escenarios de trabajo: la Robótica. Al estudiar los usos de la Trigonometría en la Robótica, tendremos un contexto situacional donde el conocimiento trigonométrico será empleado o adoptado para resolver diferentes problemas, de donde podremos reconocer sus significados, más allá de aquellos impuestos por el dME en las asignaturas de Matemáticas.

Con el propósito de delimitar nuestro objeto de estudio, realizamos una revisión bibliográfica orientada hacia dos temas centrales: la modelación y la Trigonometría. Elegimos a la *modelación* porque es un quehacer natural para resolver problemas de la Ingeniería, y pretendemos estudiarla desde algún enfoque teórico de la Matemática Educativa acorde al nivel educativo; esta revisión fue reportada en (Torres-Corrales y Montiel, 2017).

En este avance del proyecto doctoral presentamos una síntesis de la revisión relativa a la Trigonometría, tanto en investigaciones educativas como en desarrollos en Ingeniería Aplicada. Las primeras, nos permitirán situar nuestra investigación en el campo disciplinar de la Matemática Educativa; con las segundas, contextualizar el uso de la herramienta trigonométrica a estudiar.

Antecedentes

Nuestra concepción para estudiar los usos de la Trigonometría en la Robótica cambia la perspectiva de ver a la Ingeniería aplicada como un contexto de aplicación, de lo ya aprendido en las asignaturas de Ciencias Básicas (Matemáticas), a reconocerla como un escenario para su resignificación, en tanto plantea usos distintos al de la tradición escolar. En este sentido, proponemos, es posible trabajarlo desde aquello que le es propio, lo que en Socioepistemología se denomina su naturaleza social. Para el caso que nos compete, una caracterización de la *naturaleza social de la Trigonometría* fue reportada por Montiel (2011).

En particular, en su problematización de la razón trigonométrica, la autora reconoce *la relación no proporcional* entre un ángulo central y la cuerda que subtiende en el círculo, así como la obtención de la medida de uno a partir del otro, como el problema detonador de la Trigonometría. El trabajo, propiamente geométrico, que deviene de dicho problema es el contexto de significación de esta relación y lo que eventualmente se asume como cantidad trigonométrica. En ese sentido, la naturaleza social de la razón trigonométrica trata del uso de una herramienta proporcional para el estudio y cuantificación de la relación no proporcional *ángulo central – cuerda subtendida* o, dado el contexto escolar, la relación *medio ángulo – semicuerda*.

En la didáctica de la Trigonometría encontramos investigaciones que han centrado su atención en conocer cuál método de enseñanza (triángulo y círculo) es más favorable para su aprendizaje. Algunas investigaciones recomiendan utilizar el triángulo rectángulo para las razones trigonométricas, y el círculo para las funciones trigonométricas. A manera de ejemplo, mostramos una investigación que ha dejado de separar los métodos de enseñanza para articular de forma coherente las nociones matemáticas involucradas (ángulo y radio): Moore (2014) reconoce las dificultades y la escasez en la comprensión del concepto escolar de ángulo en estudiantes universitarios de una asignatura de Matemáticas (Cálculo diferencial), y a partir de ahí elabora un experimento de enseñanza que permitió un cambio significativo en el cómo abordar las nociones trigonométricas: el manejo del ángulo se hace con la razón entre el radio y la circunferencia.

La razón trigonométrica en la Ingeniería aplicada

De las áreas especializadas de la Ingeniería, nos enfocamos al diseño de máquinas, que responden a necesidades específicas de la sociedad. Y para explorar el funcionamiento del conocimiento matemático en un primer momento, buscamos estudios relacionados con la razón trigonométrica.

Una de las consideraciones para estudiar al diseño como área especializada de la Ingeniería, fue la importancia que resalta Layton (1976): desde el punto de vista de la *Ciencia Moderna*, el diseño no es nada, pero desde la *Ingeniería*, el diseño lo es todo; representa la adaptación intencional de los medios para alcanzar un fin preconcebido, la esencia misma de la Ingeniería. Además, hemos tenido la oportunidad de consultar documentos de organismos acreditadores de Ingeniería en México que declaran de manera explícita al *diseño como un quehacer del ingeniero en sus distintas ramas* (por ejemplo, Civil, Electrónica, Industrial y Mecatrónica).

El *diseño* de ingeniería se ha definido como “el proceso de aplicar las diversas técnicas y principios científicos con el propósito de definir un dispositivo, un proceso o un sistema con suficientes detalles que permitan su realización” (Norton, 2009, p. 7). La palabra *dispositivo*, proviene del latín *dispuesto*, que en sí es un *aparato o mecanismo* que desarrolla determinadas acciones. Un *mecanismo* es “un dispositivo que transforma el movimiento en un patrón deseable, y por lo general desarrolla fuerzas muy bajas y transmite poca potencia; por ejemplo, un sacapuntas, un reloj análogo, una silla plegable y un paraguas” (Norton, 2009, p. 4). Cuando se unen varios mecanismos para producir y transmitir fuerzas significativas se configura una *máquina*, la cual es “…la combinación de cuerpos resistentes acomodados para hacer que las fuerzas mecánicas de la naturaleza realicen trabajo acompañadas por movimientos determinados” (Norton, 2009, p. 32). Un *cuerpo resistente*, es también llamado *cuerpo rígido*, es decir, un cuerpo capaz de soportar su carga inherente de trabajo sin sufrir deformación irreversible.

Máquinas

Meraz y Majewski (2007) realizaron una investigación sobre el diseño de balanceo automático en un plano para un rotor experimental; un rotor es el componente que gira en una máquina eléctrica para trasmitir potencia mecánica. La necesidad del balanceo automático, comentan los autores, se debe a dar solución al trabajo ineficiente del rotor cuando está desbalanceado, porque produce vibración y cargas dinámicas adicionales en la máquina rotatoria. Por otro lado, lo que comúnmente se hace para solucionar este problema, es reiniciar la máquina, lo que provoca que dicha solución de balanceo sea costosa e impráctica, pues recordemos que la pérdida de tiempo se resume en pérdida de dinero.

Para dar una solución de balanceo pertinente, los autores realizan un análisis de un método alterno, que consiste en un sistema a base de esferas dispuestas en un disco de pared delgada y de masa despreciable. El trabajo que hacen las esferas, consiste en posicionarse libremente dentro del disco en la dirección opuesta a la fuerza inercial (la que actúa sobre la masa cuando un cuerpo está sometido a una aceleración) de desbalance, esta fuerza es provocada por la excentricidad del centro de gravedad con respecto al eje geométrico (o de simetría), es decir, la excentricidad es la no coincidencia del eje de rotación con el eje geométrico, y resulta importante anularla porque provoca desgaste desigual de las superficies que tienen contacto.

Para realizar el análisis del comportamiento del rotor y de las esferas, junto con el sistema completo de la máquina, se realizó la simulación por medio de software matemático, este permitió resolver las ecuaciones diferenciales no lineales que modelan matemáticamente este problema; el trabajo del rotor se representa por ecuaciones de energía cinética (producida por el movimiento), que producen traslación (desplazamiento) y rotación (ángulo). Los autores muestran un extenso tratamiento matemático para obtener las ecuaciones diferenciales de las esferas y del rotor. Finalmente, mencionan que se puede hacer un arreglo generalizado de todo el sistema:

Desbalance del rotor:

$$Q_x = M\omega^2 cos\omega t \;\ldots[1];\; Q_y = M\omega^2 sen\omega t \;\ldots[2]$$

donde Q es el desbalance, M la masa, ω es la velocidad angular, t es el tiempo.

Fuerzas que provocan las esferas:

$$P_{ix} = m_i\, R_i(\omega + \dot{\alpha}_i)^2 \cos(\omega t + \alpha_i) \;\ldots[3];\; P_{iy} = m_i\, R_i(\omega + \dot{\alpha}_i)^2 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_i) \;\ldots[4]$$

donde P_i es la fuerza, m_i la masa, R es el radio del disco, ω es la velocidad angular, $\dot{\alpha}_i$ es la velocidad de las esferas, α_i posición final de las esferas y t es el tiempo.

Recordemos que para este tratamiento matemático se utilizó un software, que en síntesis da como resultado, que la oscilación del rotor es mínima y propia de toda condición de rotación, esta oscilación es aproximadamente 0.11°. Esto lo comprobaron los autores con la posición final de las esferas, que es de 115° y 230°, aproximadamente. Posteriormente, los autores analizaron el modelo experimentalmente con una lámpara estroboscópica (permite visualizar un objeto que está girando como si estuviera inmóvil o girando muy lentamente) para tomar fotografías de las esferas que estaban en el disco. Con esto, supusieron que cuando las esferas se colocan a casi 180° entre sí, se tiene un balanceo automático, porque se compensan a sí mismas, ya que el desbalance es casi nulo. Sin embargo, al observar con detenimiento las esferas, percibieron que el ángulo formado es menor a 180° y esto se debe a que siempre se obtiene un desequilibrio remanente, lo que causa que una de las esferas no se coloque diametralmente opuesta a la otra. Para eliminar este remanente, colocaron una masa menor conocida, un tornillo (ver figura 1).

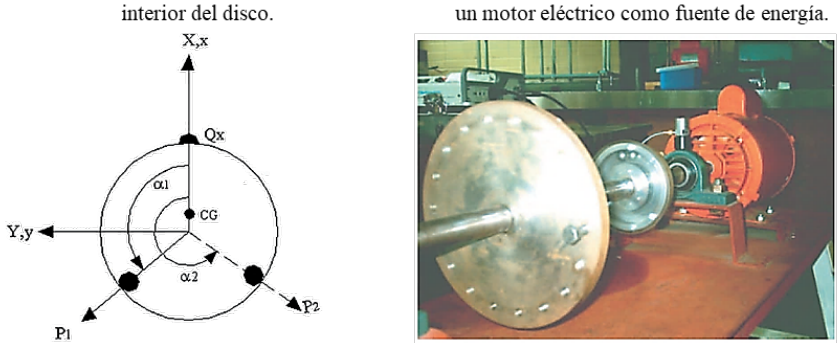


Figura 1. Diagrama cinemático y experimental del rotor con esferas. Adaptado de (Meraz y Majewsk, 2007, p. 161)

Los autores indican que lo innovador de este modelo, es que se han incorporado masas balanceadoras en discos (cuya masa del disco se toma despreciable), colocadas en diferentes posiciones a lo largo del eje, y que en todo momento están girando con el rotor. Dadas las condiciones de frecuencia, masa y rigidez, se provocará la eliminación y/o reducción significativa del valor de desbalance. Finalmente, mencionan que pese a la amplitud de vibración de 1.4 milésimas de pulgada, que todavía es importante en este modelo prototipo, en trabajos posteriores buscarán la manera de que la vibración residual sea la adecuada bajo estándares de vibración mecánica, para aplicar este modelo en equipos más completos, por ejemplo, lavadoras de ropa, donde la masa giratoria es variable.

Robots

Un robot es una máquina, y se define de manera formal en la Organización Internacional para la Estandarización (ISO), como un manipulador multifuncional reprogramable, capaz de mover materiales, piezas, herramientas o dispositivos especiales, a través de movimientos variables programados, para el desempeño de tareas diversas. La diferencia que tiene respecto a otras máquinas es su capacidad de reprogramación y multifuncionalidad para más trabajos. Gutiérrez, Reséndiz, Santibáñez y Bobadilla (2014) realizaron un estudio sobre el diseño de un robot industrial de 5 grados de libertad (movimientos posibles). Los movimientos que efectúa el robot, los validaron con programas computacionales que simulan su trabajo a través de las posibles formas geométricas que le permitan alcanzar una ubicación (desplazamiento) y orientación (ángulo) deseada (ver figura 2).

Sistema de referencias para el análisis — Diagrama a bloques del sistema de referencia

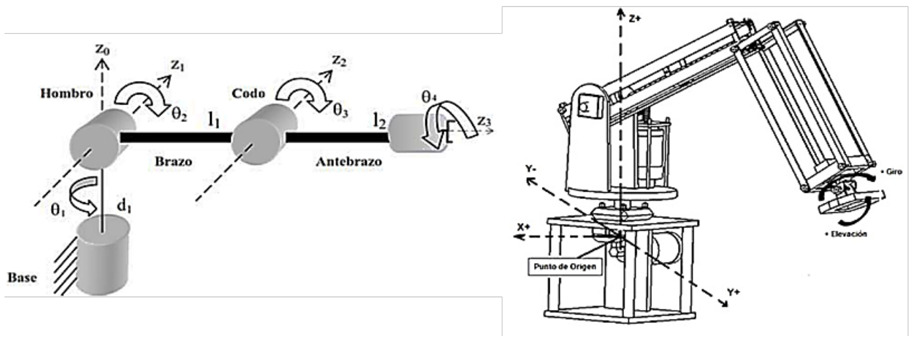


Figura 2. Cinemática directa del robot. Adaptado de (Gutiérrez *et al*, 2014, p. 79)

Para el cálculo de la cinemática directa, los autores utilizaron un algoritmo estandarizado llamado Denavit-Hartenberg (D-H), que incluye coordenadas y transformaciones homogéneas para simplificar las transformaciones entre el marco de referencia (base del robot) y las articulaciones (uniones que permiten al robot moverse). Por cada grado de libertad se calculó su matriz (por simplificación $c = coseno\ y\ s = seno$), por ejemplo, para la primera articulación:

Transformación homogénea correspondiente de la base hasta la primera articulación:

$${}^{0}_{1}A = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ldots[5]$$

Una vez efectuados los cálculos de las articulaciones: 1 a 2, 2 a 3, 3 a 4, y 4 a 5, se procede a multiplicar todas las matrices en un solo producto:

$$T = A_1^0 A_2^1 A_3^2 A_4^3 A_5^4 \ldots[6];\ T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & P_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & P_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ldots[7]$$

A modo de cierre de la revisión

En áreas especializadas de la Ingeniería, los objetos matemáticos no se trabajan tal y como se enseñan en las asignaturas de Matemáticas (por ejemplo, razón y función trigonométrica), sino que se han integrado a estructuras matemáticas diversas. Con nuestra revisión identificamos a los *vectores, las matrices y los métodos numéricos*, donde tales objetos matemáticos se vuelven funcionales para el ingeniero al hacer uso de estos en articulación con otros conocimientos de la Ingeniería, para resolver problemas de su quehacer profesional. Esta puede ser la causa de por qué algunos estudiantes de últimos semestres responden que no, cuando se les pregunta si utilizan Trigonometría en los problemas que abordan en su área de especialidad; es decir, la enseñanza y el uso de la Trigonometría se encuentra separadas.

Con estos dos ejemplos de diseño ingenieril y otros que estudiamos, pudimos identificar, en los modelos geométricos, por qué la necesidad del conocimiento trigonométrico y su traducción en nuevas estructuras matemáticas, que ayudan a comunicarse con la máquina haciendo uso de programas de cómputo especializados. Nosotros llamamos *modelos geométricos* a lo que la Ingeniería denomina diagramas cinemáticos (ver figuras 1 y 2), estos permiten hacer explícitos los elementos geométricos (ángulo, medidas y sus relaciones), para representar y analizar el trabajo que la máquina realiza. Estos modelos geométricos utilizan una simbología propia de la Ingeniería, y ésta se articula con simbología matemática, por ejemplo, el plano cartesiano y el espacio tridimensional, con ángulos y medidas del modelo.

Reflexiones

Lo subsecuente para nuestra investigación de acuerdo a nuestro fundamento teórico, la Socioepistemología, es *estudiar la Robótica desde una práctica de referencia, la Ingeniería Mecatrónica*. La *práctica de referencia* se refiere a “la expresión material e ideológica de un paradigma (ideológico, disciplinar y cultural)” (Cantoral, 2013, p. 155), y en ese sentido nos proveerá de un contexto situacional y de significación del quehacer del estudiante de Ingeniería Mecatrónica, y por lo tanto del conocimiento que pone en uso y construye; caracterizar la práctica de referencia nos permitirá refinar el planteamiento inicial de investigación. Posteriormente, consideramos configurar detalladamente el marco teórico y la metodología a utilizar, que en estos momentos es un método etnográfico.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento. España: Gedisa.

Gutierrez, C., Reséndiz, J., Santibáñez, J. y Bobadilla, G. (2014). A model and simulation of a five-degree-of-freedom robotic arm for mechatronic courses. *IEEE Latin America Transactions 12(2)*, 78-86.

Layton, E. (1976). American ideologies of science and engineering. *Technology and Culture 17*, 688–701.

Meraz, M. y Majewski, T. (2007). Balance automático en un plano para rotor experimental. *Ingeniería Mecánica. Tecnología y Desarrollo 2(5)*, 157-163.

Montiel, G. (2011). Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico. México: Diaz de Santos.

Moore, K. (2014). Quantitative reasoning and the sine function: The case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education 45(1)*, 102-138.

Norton, R. (2009). Diseño de Maquinaria: síntesis y análisis de máquinas y mecanismos. Cuarta Edición. México: McGraw-Hill.

Torres-Corrales, D. y Montiel, G. (2017). Modelación y uso de conocimiento trigonométrico en Ingeniería. Un primer acercamiento a su estudio. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30*, 75-83.

UNA MIRADA SOCIOEPISTEMOLÓGICA A UNA COMUNIDAD DE FÍSICOS EL CASO DE UN EXPERTO ANTE UN PROBLEMA ESPECÍFICO

Alba Gabriela Lara Medina, Astrid Morales Soto
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
g.laramedina@gmail.com, ammorales@ucv.cl

Resumen
Se presenta una investigación en curso en la cual reportamos los usos de las gráficas ante un problema propuesto específico de una situación del cotidiano de un físico. El objetivo es reportar el uso de las gráficas que tiene el físico como parte de una comunidad de conocimiento interesada en la enseñanza de dicha ciencia, obteniendo elementos de interés para el rediseño del discurso matemático escolar. Como parte de los resultados, se mostrará que dichos usos tienen un carácter funcional y un sentido específico que no depende de alguna expresión analítica, sino de las formas gráficas observadas y la relación que tiene con la pregunta planteada en un problema donde el foco es la variación de las velocidades.

Palabras claves: uso de gráficas, física, cotidiano, comunidad de conocimiento

Abstrac
We present an investigation that is now in progress, in which we report the uses of graphs in the face of a specific problem of a daily situation proposed by a physicist. The objective is to show the use of graphs by a physicist as part of the knowledge community that is concerned with the teaching of this science, obtaining elements of interest for the redesign of the school mathematical discourse. Among the results, it will be shown that such uses have a functional nature and a specific sense that does not depend on any analytical expression, but of the graphic forms observed and the relation they have with the question posed in a problem focused on the variation of the speeds.

Key words: uses of graphs, physics, daily, knowledge community

Introducción

Una temática que se ha abordado en varias investigaciones tiene su relación con el discurso Matemático Escolar, el cual refuerza una epistemología dominante que *no considera, ni conoce el uso del conocimiento matemático de la gente, por ende, ni de los estudiantes* (Cordero 2016). Un resultado de dichas investigaciones, es mostrar la diversidad de epistemologías en la cual se incluye el conocimiento del cotidiano de la gente, además de evidenciar la desconexión existente entre el cotidiano y la matemática escolar (Cordero, 2013).

Es así que en nuestra investigación realizamos una pregunta que no es la típica escolar, la cual está relacionada con una actividad deportiva como el rafting, esto nos permite encontrar usos de conocimiento matemático en el desarrollo de la solución, enfocándonos en los usos de las gráficas.

Marco Teórico

La Socioepistemología llama la atención a la necesidad de incorporar marcos de referencia que den cuenta de la articulación del cotidiano del ciudadano con la matemática escolar, esta Teoría aporta con constructos para analizar dicha articulación, principalmente con la noción de uso del conocimiento en una situación y escenario específico. La necesidad de provocar diálogo entre el cotidiano y la matemática escolar, ubica la atención en el cotidiano de otros dominios, puesto que es en donde podemos encontrar elementos de cómo usan y expresan su conocimiento, además de generar argumentos que dan evidencia del conocimiento funcional. Es decir, lo que interesa es reconocer el conocimiento que la comunidad tiene, pero además conocer las razones de lo que dice y hace con su conocimiento de tal manera que sea funcional.

Se destaca la idea de caracterizar lo propio de la comunidad de conocimiento, es decir su naturaleza reconociendo tres elementos reportados en Cordero (2016): *Reciprocidad: El conocimiento se genera por la existencia de un compromiso mutuo; Intimidad: Es el uso de conocimiento propio y privado que no es público; Localidad: El conocimiento es local, se da cuando existe una coincidencia en ideas, una jerga disciplinar, trabajo u oficio, intereses, la región, entre otros*. Los elementos anteriores, junto con los momentos de identidad, conforman un modelo que ayuda a analizar los usos del conocimiento matemático propios de una comunidad de conocimiento en una situación específica.

Esta investigación aborda los elementos anteriormente mencionados, pero ante una comunidad de físicos, analizando el uso de las gráficas ante una situación específica, en la cual las gráficas son la argumentación en una situación concreta, que provocan que se genere conocimiento (Morales, Mena, Vera y Rivera 2012). El análisis de usos de gráficas se realiza a través del funcionamiento y la forma; entendiendo que la *forma está relacionada con los significados y procedimientos asociados a cómo un estudiante las obtiene y el funcionamiento está asociado a los significados y argumentos que los estudiantes tienen como un medio y un propósito en uso de las gráficas* (Suárez, 2014, p. 48).

Uso de gráficas en Oresme

La idea central del Tratado de Oresme es que las figuras geométricas y las proporciones ayudan a comprender fenómenos en lo que se producen cambios de la realidad física que pueden estudiarse como cambios en las cantidades (Suárez 2014).

El funcionamiento y la forma de las figuras (gráficas) es diferente a la de las gráficas cartesianas, no consistía en la descripción de la posición de los puntos respecto de coordenadas rectilíneas, sino que las figuras mismas eran la cualidad de la cantidad continua, es así que las figuras geométricas adquirían un significado global asociado a la variación. Las propiedades de la figura podían representar propiedades intrínsecas a la misma cualidad. Tal vez por ello, Oresme al generar un nuevo funcionamiento del uso de las figuras geométricas para modelar situaciones de variaciones resignifica las figuras geométricas para establecer diferentes tipos de variación: usa un rectángulo para representar una variación uniformemente uniforme (Figura 1.a); un triángulo o trapecio para representar una variación uniformemente deforme (Figura 1.b); y una figura irregular para representar una variación deformemente deforme (Figura 1.c).

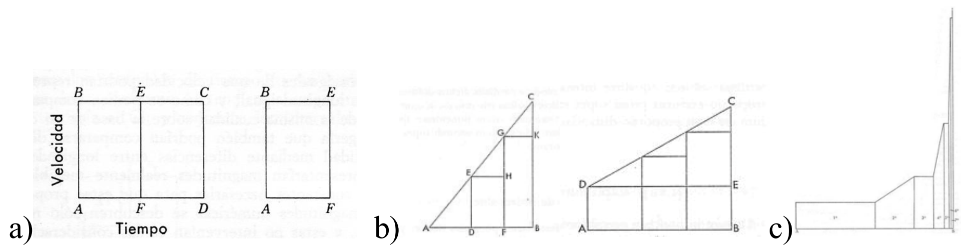


Figura 1. a) Variación uniformemente uniforme, b) variación uniformemente deforme, c) variación deformemente deforme.

En Suárez 2014 se pueden encontrar fragmentos del trabajo de Oresme: "Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum" de los cuales se obtienen datos epistemológicos de la Resignificación del uso de las figuras geométricas para modelar el movimiento.

Nuestro análisis se realiza desde esta perspectiva de usos, el foco está en la variación en un ámbito de una comunidad de físicos en enseñanza superior.

Una comunidad de conocimiento de físicos

Para poder caracterizar a una comunidad de conocimiento debemos detallar lo propio de ella, es decir, su naturaleza. Para ello se requiere del constructo de comunidad del conocimiento (CC) como una triada: reciprocidad, intimidad, localidad (Cordero, 2016). Además, se consideran dos aspectos que son ejes transversales para la explicación de los elementos: la institucionalización y la identidad. Estos elementos en conjunto, formulan un modelo que ayuda a analizar los usos del conocimiento matemático propios de una comunidad de conocimiento en una situación específica (Figura 2).

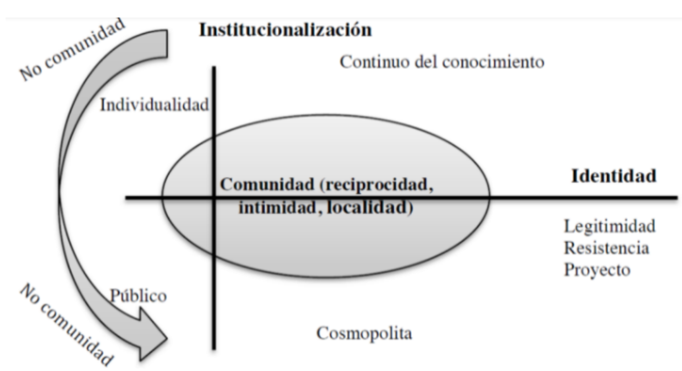


Figura 2. Modelo de Comunidad de Conocimiento Matemático

La comunidad está compuesta por físicos profesores e investigadores del Instituto de Física de una universidad de Valparaíso y creadores del Grupo de Tecnología Educativa (GTE) del mismo instituto (2007). Con la creación del GTE se enfocaron a investigar en la enseñanza de la física de manera más específica. A continuación describiremos algunos de estos elementos que se han logrado caracterizar hasta ahora en la comunidad de físicos estudiada.

En cuanto a *reciprocidad* se refiere, el Grupo de Tecnología Educativa mantiene interacción académica con centros, grupos, redes o programas (dentro de Chile y con otras universidades de Estados Unidos y México) dedicados a la investigación formativa para mejorar la docencia, participando de manera colaborativa. Es decir, existe una relación tanto dentro como fuera del GTE en el que pone en juego los saberes; la existencia de una red y los frutos en esta relación da evidencia que existe un aporte de investigaciones, cursos y conocimientos que se comparten entre sí, y permiten generar nuevos saberes en la comunidad científica. Este elemento permite ver la relación que se crea en la comunidad, una relación en la que el beneficio y enriquecimiento con respecto al conocimiento es mutuo.

La *localidad* es un elemento que permite romper con la generalidad, y hablar de una comunidad específica. En este caso en particular, la comunidad que estudiamos está compuesta por dos profesores de jornada completa jerarquizados, un profesor asociado y dos profesores no jerarquizados. Este grupo, se formó por una necesidad que surgió durante su trabajo desarrollado en la universidad de integrar elementos tecnológicos y material (que muchas veces ellos mismos elaboran para el laboratorio) que tengan un enfoque educativo, no sólo para los estudiantes que están formando sino para los futuros estudiantes que estos formarán. Se han preocupado de generar innovaciones para avanzar hacia una educación de mejor calidad.

Una comunidad con adjetivo las distingue de otras, entonces se requiere de momentos de identidad: legitimidad, resistencia y proyecto. Así la identidad, con sus momentos, será otro eje transversal (Cordero, 2016).

La *legitimidad* es una forma en que la CCMFis (Comunidad del Conocimiento Matemático en Físicos) da evidencia que cree en lo que hace, y más aún valida lo que hace a través de la investigación. El trabajo desarrollado por el GTE ha dado fruto de diversas maneras, la elaboración de artículos en revistas indexadas de interés para la comunidad científica, elaboración de cursos, talleres, ponencias en diversos escenarios, elaboración de material didáctico. En otras palabras, el trabajo de investigación es el medio a través del cual pueden dar evidencia y comunicar a la comunidad científica los avances de los trabajos que están desarrollando.

En cuanto a la resistencia, se puede mencionar que los trabajos han llevado a debatir ciertos aspectos con sus colegas. Podemos destacar un caso: las presiones negativas en un Sifón. Por ejemplo mencionamos aspectos que este grupo declara en su artículo “Negative Pressures and the First Water Siphon Taller than 10.33 Meters” (Vera, Rivera, Romero, Villanueva, 2016), en que se hace referencia a la controversia sobre el mecanismo subyacente que explica el funcionamiento de un sifón. Hoy en día hay un debate entre las personas que creen que los sifones son impulsadas por las diferencias de presión y las personas que creen que los sifones son impulsados por la fuerza de la gravedad. Las discusiones referentes a la física de un sifón suelen referirse a conceptos como las presiones negativas absolutas, la fuerza de la cohesión del líquido y la posibilidad de un sifón trabajando en vacío o en presencia de burbujas (Vera, Rivera, Romero, Villanueva, 2016).

Un sifón es un dispositivo que se usa para drenar un recipiente, con el agua subiendo dentro de una manguera en forma de U invertida y luego bajando hacia un punto de descarga situado debajo del nivel inicial del agua (ver Figura 3).

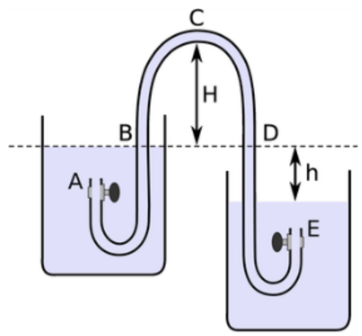


Figura 3. Diagrama de la disposición para el sifón utilizado en el experimento.

Aunque su funcionamiento es muy simple es muy común que los profesores de física lo explican conceptualmente mal ya que creen que es la diferencia de presión la que causa el movimiento del agua obligándola a subir por la manguera como se muestra en la figura.

Los físicos de esta comunidad consideran que para los profesores es difícil darse cuenta de que es la fuerza de gravedad la que obliga al fluido a moverse. En el trabajo realizado con un alumno de Pedagogía en Física y otro miembro del grupo, se explica la causa del movimiento del agua, discuten la perspectiva histórica y además reportan en la revista *PLoS ONE* el primer sifón que funciona levantando agua hasta una altura H mayor a 10 metros cuando se suponía (según Torricelli) que esto era imposible. Este trabajo además es de mucha importancia para comprender como los árboles logran subir agua en regímenes de presión absoluta negativa.

El *proyecto* del grupo tiene un objetivo muy bien definido, a través de los trabajos desarrollados se han enfocado en llegar al nivel básico a través del nivel universitario enfocándose en los docentes en física en formación.

Método

La investigación se desarrolla con un enfoque cualitativo, un estudio de caso (Stake 2007). La población a la cual se aplicó la situación fue de dos doctores en Física, profesores de jornada completa, quienes son docentes en las carreras de licenciatura y pedagogía en Física, y realizan investigación relacionada a la enseñanza de su disciplina, presentaremos el caso de uno de ellos. Se eligieron estos profesores por que imparten las clases de cátedra y laboratorio relacionadas a Mecánica.

El instrumento usado es una situación, en la cual se presenta un problema específico. Se plantea una pregunta relacionada con la seguridad de realizar rafting de acuerdo al comportamiento de un río, el problema consta de dos partes: considerando la forma del río visto desde el exterior y la segunda parte incorporando diferentes opciones para la base del río. La entrevista fue grabada para su posterior análisis.

Datos: La situación

Entenderemos a "La situación" como la pregunta que propicia una problematización. En este caso particular, se cuestiona el movimiento del fluido (agua) a través de la variación de la velocidad. Para ello recurrimos a la idea de un río, en el cual un grupo de rafting desea recorrerlo, pero se pregunta sobre la seguridad, lo que lleva a pensar en las diferentes velocidades del agua en el río.

Para lo anterior, se presenta la situación en dos partes, pero haremos menciona una de ellas:

- Se pregunta explícitamente sobre la seguridad del río, para ello se proporciona una imagen del río con una estructura específica (Figura 4). Momento en el que el físico responde libremente, y se enfoca en responder respecto al ancho del río.

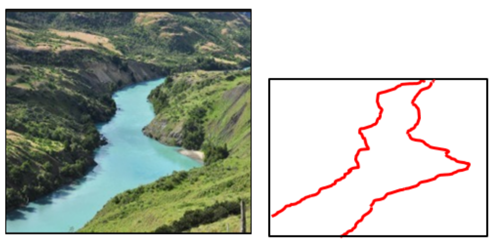


Figura 4. Figura propuesta de la forma del rio

La epistemología se relaciona con la Figuración de las cualidades de Oresme, quien "establece relaciones entre figuras geométricas y situaciones específicas de variación" (Suárez y Cordero, 2010. p. 323), Oresme construye un dibujo de lo que varía y en particular le interesa describir la variación de las cualidades.

Resultados

Durante el desarrollo de la solución del problema, el académico físico entrevistado presenta respuestas asociadas a lo icónico, aparecen flechas indicando la velocidad, señalando que el tamaño de la flecha indica si la velocidad es menor o mayor. Además, señala lo geométrico, debido a que al cambiar el área cambia la velocidad con la cual se mueve el agua del río (ver Figura 5).

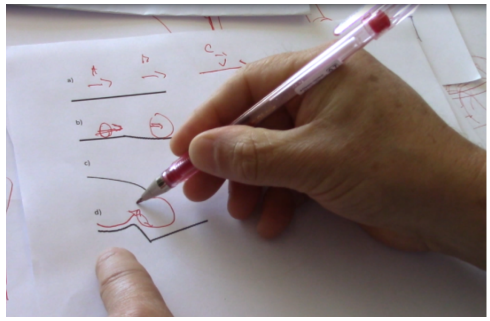


Figura 5. Desarrollo de la situación por el entrevistado.

Los usos de las gráficas en una Comunidad de Físicos

En esta sección mostraremos las respuestas a las preguntas planteadas y en las cuales se han encontrado los siguientes usos de las gráficas:
Al preguntar al físico sobre la situación planteada podemos encontrar elementos que coinciden con la epistemología de Oresme con respecto a la variación.
Al hablar de la velocidad, se apoya en segmentos para describir como al cambiar estas longitudes provocan variaciones en la velocidad, mientras más ancho sea el río más chica es la velocidad va a pasar el agua, mientras que si es más estrecho entonces la velocidad aumenta (figura 6).

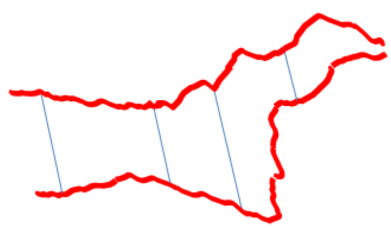


Figura 6. El ancho del rio es representado por medio de segmentos.

Otro aspecto tiene relación con la base o piso del río, Este elemento es de gran importancia ya que al variar el área varía la velocidad. El físico menciona que la misma cantidad que entra es la que sale (Figura 7), si tiene mayor área entonces sale más despacio.

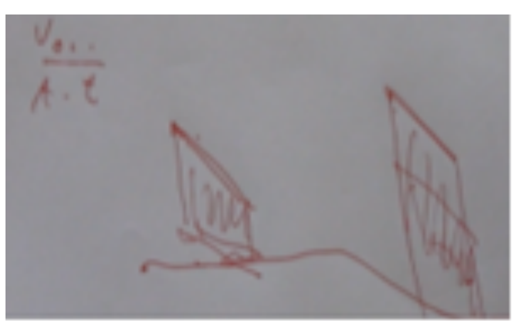


Figura 7. La cantidad de agua es la misma a pesar de cambios en el área.

Al cuestionarse el movimiento del fluido (agua) a través de la variación de la velocidad, se obtienen usos de las gráficas que no se parecen a los del discurso Matemático Escolar, pero que en el caso del físico surge de forma natural; los elementos icónicos representan lo que cambia en la situación propuesta, y es una manera de expresar conocimiento matemático.

Conclusiones

Al presentar esta situación permitió, además de identificar usos de las gráficas, obtener información de la comunidad de físicos. Se encontraron elementos que ayudan a caracterizar lo propio de la comunidad investigada, es decir, identificar elementos como reciprocidad, intimidad y localidad; elementos relacionados con el conocimiento. Además de distinguir los momentos de identidad: legitimidad, resistencia y proyecto.

El problema planteado permitió identificar momentos de uso de gráficas que no son las típicas del discurso Matemático Escolar.
El uso que se le da a las gráficas está relacionado con la variación, en nuestro caso particular la variación de la velocidad. El uso de los segmentos y áreas ayudan a comprender que al hablar de velocidad en el río, hay una estrecha relación con el área transversal; además, se generan argumentos sobre los cambios de velocidad.

Lo anterior permite considerar más investigaciones con respecto a las clases de física y matemática, con las cuales se puede dar mayor evidencia de la conexión y relación recíproca entre estas disciplinas y el cotidiano.

Referencias bibliográficas

Cordero, F. (2013). Matemáticas y el Cotidiano. *Diplomado Desarrollo de estrategias de aprendizaje para las matemáticas del bachillerato: la transversalidad curricular de las matemáticas Módulo III*. Documento interno. Cinvestav –IPN.
Cordero, F. (2016). Modelación, funcionalidad y multidisciplinareidad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz (Eds.). *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa.* Barcelona. España: Editorial Gedisa.
Morales, A.; Mena, J.; Vera, F.; Rivera, R. (2012). El rol del tiempo en un proceso de modelación utilizando videos de experimentos físicos. *Revista Enseñanza de las Ciencias 30*(3), 237-256.
Stake, R. (2007). *The art of case study research.* Thousand Oaks: Sage Publications.
Suárez, L. (2014). *Modelación - Graficación para la matemática escolar*. México: Díaz De Santos.
Suárez, L. & Cordero, F., (2010). Modelación – Graficación, Una Categoría Para La Matemática Escolar. Resultados De Un Estudio Socioepistemológico. *Revista Latinoamericana De Matemática Educativa, 13*(4-II), 319-333.
Vera, F.; Rivera, R.; Romero, D.; Villanueva, J. (2016). Negative Pressures and the First Water Siphon Taller than 10.33 Meters. *PLoS ONE 11*(4): e0153055.

PENSAMIENTO Y LENGUAJE ALGEBRAICO DESDE UNA PERSPECTIVA SOCIOEPISTEMOLÓGICA

Luis López-Acosta, Gisela Montiel, Ricardo Cantoral
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)
lalopeza@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav,mx

Resumen
Se reportan los avances de una investigación que está centrada en estudiar y profundizar en la construcción social del pensamiento algebraico. Se tiene como hipótesis en el trabajo que el pensamiento algebraico comprende la construcción y manipulación del lenguaje simbólico. Se recurre a la teoría socioepistemológica de la matemática educativa para aportar una visión pragmática sobre el lenguaje algebraico, con base en la problematización del saber. De la revisión bibliográfica preliminar se ha identificado que la articulación entre la lingüística y la semiótica pueden configurar un marco de referencia para analizar el lenguaje algebraico.

Palabras claves: socioepistemología, pensamiento algebraico, lenguaje simbólico

Abstract
We report the progress of a research that aims to study and go deeply into the social construction of algebraic thinking. We focus on the hypothesis that algebraic thinking involves the construction and manipulation of the symbolic language. We considered the mathematics education socio-epistemological theory to provide a pragmatic view of the algebraic language, based on knowledge problem posing. From the preliminary bibliographic review we have identified that the connection between linguistics and semiotics can constitute a reference framework to analyse algebraic language.

Key words: socio-epistemology, algebraic thinking, symbolic language

Introducción

Existe gran cantidad de investigaciones en Matemática Educativa que han abordado el problema del aprendizaje del Álgebra, principalmente porque el Álgebra escolar es un factor importante en la deserción escolar (Stacey y Chick, 2004; Mason 2017).

Algunos autores han enfatizado el hecho de que existe una tendencia en promover de manera apresurada el paso de las palabras a los símbolos (Mason, 1996), lo cual, desde nuestra postura ocasiona una falta de progreso en el desarrollo del Pensamiento Algebraico (PA) de las y los estudiantes en los sistemas educativos.

En los últimos resultados de la prueba PLANEA 2016 (SEP, 2017), los estudiantes de bachillerato se encuentran en el nivel inferior de aprovechamiento, bajo los estándares de dicha prueba, en la cual, un gran porcentaje de los reactivos se relacionan con la determinación de expresiones algebraicas, por lo que, consideramos que el estudio del PA aún representa una problemática vigente y sobre la cual es viable investigar para proponer rutas de intervención fundamentadas.

De hecho, según Socas (2011), aún hace falta generar un entendimiento más profundo sobre cómo caracterizar el PA. Es decir, responder al cuestionamiento de "¿Qué es el PA y cuáles son las razones esenciales de la actividad algebraica que deben constituir las metas que tenemos para el aprendizaje de los alumnos en este campo?" (Socas, 2011, p. 26).
Con respecto a la pregunta de Socas, muchos estudiosos de este tópico han planteado caracterizaciones sobre el PA y sobre la actividad que demanda esta forma particular de pensamiento.

Por ejemplo, Radford (2006), señala que el PA está relacionado con un sentido de indeterminación, con objetos indeterminados que son manipulados analíticamente y con un modo simbólico peculiar que tiene para designar sus objetos.

Kieran (2004), describe que se relaciona con "el desarrollo de formas de pensar como analizar las relaciones entre cantidades, observar la estructura, estudiar el cambio, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, probar y predecir" (p. 149).

Por su parte Mason (1996) considera que se relaciona con actividades como "la expresión de la generalidad, posibilidades y restricciones, reorganización y manipulación y con la aritmética generalizada" (p. 66).

De acuerdo con Kaput (2008) el PA se caracteriza por dos núcleos: "generalización y expresión de la generalización en sistemas de símbolos progresivamente sistemáticos y convencionales y, por la acción sintácticamente guiada sobre los símbolos dentro de sistemas de símbolos organizados" (p. 10).

Si bien coincidimos con las caracterizaciones citadas anteriormente, estamos interesados en ampliar las caracterizaciones sobre el pensamiento algebraico, hacia una forma de caracterizar la actividad algebraica, desde la perspectiva de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME). Es decir, nos interesa estudiar cómo se produce la necesidad de algebrizar, desde una explicación basada en prácticas, en las que podamos generar entendimientos más profundos que lleven al estudiante a participar de la construcción del álgebra como un lenguaje simbólico, construido con base en prácticas, susceptible de ser manipulado con fines diversos, toda vez que éste es transversal a la matemática y a otras disciplinas.

Nuestra hipótesis de investigación se basa en que "el Pensamiento Algebraico se desarrolla al seno de prácticas como la generalización, la predicción y la comunicación, entre otras; cuyo objetivo es la construcción y manipulación de lenguajes simbólicos que permiten describir, analizar, estudiar y manipular abstracciones de la realidad.

De esta manera, las preguntas de investigación que nos hemos planteado son las siguientes:

- ¿Qué elementos de la actividad humana matemática permite la construcción del símbolo algebraico?

- ¿Cuáles son los mecanismos que permiten la constitución de un lenguaje algebraico, socialmente compartido?
- ¿Qué elementos de la actividad humana general la necesidad matemática de manipulación de lo simbólico?

Metodología y marco teórico

La metodología de nuestra investigación se desprende de los principios y fundamentos teóricos que caracterizan la TSME, los cuales describen una postura sobre el conocimiento matemático en la que se reconoce como aspecto fundamental a la práctica social. Esto implica que para estudiar el conocimiento matemático es necesario reconocer la relación dialéctica entre éste y el sujeto individual, colectivo e histórico, de modo que pueda desentrañarse la naturaleza sociocultural que acompaña al conocimiento (Cantoral, 2013).

Por lo tanto, el conocimiento matemático tiene un elemento de transversalidad, pues se asume bajo esta postura que el saber está en lo *popular*, lo *técnico* y lo *culto*. De ahí que los estudios socioepistemológicos, no solo estudien lo histórico del conocimiento matemático, sino que dialectiza con otros escenarios, como prácticas de referencia específicas relativas al conocimiento de interés.

Así, la metodología que proponemos en nuestra investigación está centrada en la *problematización del saber*, constructo que describe una forma sistémica de analizar el conocimiento matemático desde sus dimensiones cognitiva, epistemológica, didáctica y social. Estos cuatro aspectos permiten construir una mirada condensada del objeto de estudio, la cual Reyes-Gasperini (2016) ha denominado *uase* (unidad de análisis socioepistémica), una estructura teórica-metodológica que estará caracterizada por la síntesis y simbiosis del producto de la problematización del saber.

Una vez construida la uase, ésta es empleada para estudiar el conocimiento puesto en "uso" en marcos de referencia distintos a los cultos y escolares que den evidencia sobre cómo el saber vive en comunidades de conocimiento en la actualidad, para finalmente construir modelos hipotéticos de anidaciones de prácticas que puedan ser puestos a prueba en escenarios didácticos.

De manera que, en términos generales, la investigación se dividirá en cuatro fases:

1. Fase de problematización del saber.
2. Fase construcción de la uase.
3. Fase de análisis de prácticas de referencia.
4. Fase de validación del modelo de anidación de prácticas en un escenario didáctico experimental.

Momento actual de la investigación

Actualmente estamos construyendo un marco bibliográfico que nos permitirá generar una unidad de análisis para estudiar el lenguaje y con ello fortalecer el marco teórico y metodológico para determinar métodos de análisis de datos.

La revisión que estamos haciendo al momento consiste en el análisis de tres tipos de estudios: obras psicológicas respecto al lenguaje y su adquisición, obras sobre disciplinas que se encargan de estudiar el lenguaje y, estudios que relacionen el lenguaje y las matemáticas o álgebra.

En primera instancia, rescatamos que el lenguaje según Vygotsky (1987) está relacionado con las herramientas lingüísticas del pensamiento y la experiencia sociocultural (p. 114), por lo que éste es un mediador del pensamiento. No obstante, coincidimos con Papini (2003), cuando menciona que el desarrollo del lenguaje y el pensamiento, de manera general se da porque se está en constante contacto con el lenguaje cotidiano, mientras que el Lenguaje Algebraico no es de uso cotidiano, por lo tanto, esta relación resulta compleja de entender a la luz de sus ideas.

Hasta el momento hemos revisado dos posturas lingüísticas, que fueron identificadas por referencias en artículos dentro de la Matemática Educativa. Una de ellas, la Gramática Generativa (GG) de Noam Chomsky, quien señala que la razón de la existencia del Lenguaje en los humanos no es únicamente para la comunicación, sino para la creación y expresión del pensamiento (Birchemall & Müller, 2014), con lo cual coincidimos, puesto que nuestra postura ante el lenguaje algebraico es que no es únicamente para comunicar, sino también una forma de construcción de nuevo conocimiento que deviene de un interés personal por entender la realidad, aspecto que no suele estar presente cuando se habla del lenguaje.

Desde la GG, se asume que existe un dispositivo de adquisición del lenguaje el cual es una:

> "estructura mental innata que permite la producción y comprensión de cualquier enunciado en cualquier idioma natural, posibilitando además que el proceso de adquisición y dominio del lenguaje hablado requiera muy poco input lingüístico para su correcto funcionamiento y se desarrolle de manera prácticamente automática" (Birchemall & Müller, 2014, p. 418).

Dicho dispositivo está compuesto por tres elementos: un componente sintáctico, semántico y fonológico, puesto que la GG se interesa por el lenguaje hablado y no en el lenguaje escrito, por lo que provee una mirada parcial de la adquisición del lenguaje, además de que los constructos están enmarcados en describir un modelo cognitivo.

Otra perspectiva encontrada en la literatura de la disciplina es la de la Lingüística Sistémico-Funcional (LSF) de M.K. Halliday. Un aspecto de especial interés en la LSF es que se centra en estudiar la naturaleza social del lenguaje y de su uso (van Dijk, 2012), aspecto que se relaciona con los principios de nuestra perspectiva teórica.

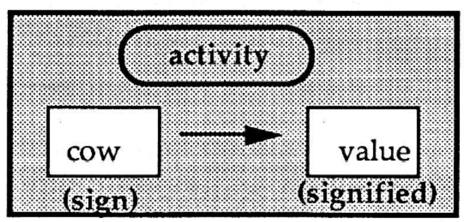
Halliday postula que el lenguaje es un *potencial de significado,* y como una parte inherente de la experiencia de los miembros de una sociedad y cultura (Menéndez, 2010; van Dijk, 2012). "Es un sistema semántico codificado formalmente, cuya significación sociocultural es lo que permite caracterizarlo […]" (Menéndez, 2010, p. 221).

El análisis del lenguaje lo hace mediante la noción de *texto* que refiere a una unidad de significado en uso coherente: cohesiva léxico-gramaticalmente y consistente en registro y género (Eggins, 2004, citados en Menéndez, 2010, p. 222). El léxico-gramático es un conjunto de opciones subordinadas por paradigmas que generan redes entre signos lingüísticos que corresponden a la estructura del texto, mientras que el registro corresponde a la variedad de uso que depende de la situación. El género, está relacionado con las convenciones de uso (Menéndez, 2010). Tanto el género como el registro son los aspectos que describen el contexto en el que el lenguaje está enmarcado y estos dependen de las condiciones socioculturales que lo permea.

Desde los acercamientos semióticos hacia el desarrollo del lenguaje matemático y, en particular el algebraico, se ha recurrido en su mayoría a la perspectiva de C. S. Peirce, en la que se establece una tríada que compone a los signos, *Objeto*, *representamen*, e *Interpetante*. Además, Peirce hace una clasificación de los tipos de signos (Leal, 1987): S*igno icónico:* si se parece a él, se asemeja a él. El signo de igualdad "=" es un ejemplo de signo icónico: es un icono de una idea. *Signo indexical:* implican un elemento de contextualidad, como el humo con respecto al fuego y, *Signo Simbólico*: se refiere a su objeto por medio de una regla, como palabras de lenguaje o fórmulas algebraicas. Las reglas simbólicas pueden formularse a priori, debido a convenciones, o a posteriori, debido a hábitos culturales.

Uno de los aportes de esta clasificación que hace Peirce es que cada "objeto" algebraico, dependiendo de la relación que se posea con él, es decir, del nivel interpretativo sobre él, permitirá definirlo como un cierto tipo de signo. Por ejemplo, la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ puede ser ícono, si se asocia únicamente por recuerdo de la imagen de su forma, índice cuando se ve como algo donde hay que sustituir los valores de a, b y c, o símbolo cuando se reconoce como el producto de convenciones (Presmeg, Radford, Roth y Kadunz, 2016).

Otros acercamientos semióticos como el de Radford (1998), hacen énfasis en la importancia de que los aspectos socioculturales juegan un papel preponderante respecto al significado del signo (Figura 1).



Semiotic map of the sign'

Figura 1. Mapa semiótico del signo (Radford, 1998)

Reflexiones finales

Es claro que el desarrollo del Pensamiento y el Lenguaje es sumamente complejo, como así también su estudio. Un indicador de esto es la gran cantidad de disciplinas científicas que lo estudian (Lógica, Historia, Fisiología, Psicología, Lingüística, Antropología, Semiótica, Sociología, entre otras) (Hjelmslev, 1976).

Otro aspecto de suma importancia es que existen diferencias en los procesos de adquisición del lenguaje hablado y el escrito, pues según Baquero (1996), citado en Papini (2003), menciona que:

> Las adquisiciones de las competencias para la escritura se posibilitan con la participación en situaciones sociales específicas, que si bien requieren de la existencia previa del habla no

> resultan de su evolución espontánea. La escritura requiere de mayor abstracción y para ello de un creciente control voluntario y consciente de los procesos psicológicos superiores (p. 63).

Con respecto a esta idea, en Leal (1987) se explica que el desarrollo de la escritura siguió un proceso largo y complejo que se caracterizó por diversas fases (Leal, 1987): *Pictográfica*, *Ideográfica*, *Silábica* y de *componentes mínimos* (vocales y consonantes). Fases que de alguna manera creemos que pueden asociarse a las descripciones de las fases *retórica*, *sincopada* y *simbólica* (Malisani, 1999), respecto al desarrollo del Álgebra.

De acuerdo con la revisión que estamos realizando, vislumbramos la necesidad de articular aspectos de análisis lingüísticos y semióticos. De hecho, esto es algo que Drouhard y Teppo (2004) señalan, toda vez que, para estos autores, el lenguaje algebraico es un "conjunto compuesto por *lenguaje natural, escritos simbólicos* algebraicos y *representaciones compuestas* (p. 230-231). Donde se considera que las representaciones compuestas son sistemas de signos que no pueden estudiarse bajo la lingüística, sino desde la semiótica.

Referencias bibliográficas

Birchenall, L. y Müller, O. (2014). La Teoría Lingüística de Noam Chomsky: del Inicio a la Actualidad. *Lenguaje, 42*(2), 417-442.
Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. México: Gedisa.
Drouhard, J-Ph. & Teppo, A. (2004), Symbols and Language. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.) *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study* (pp. 227-266). New York: Kluwer Academic Publishers.
Hjelmslev, L. (1976). *El Leguaje.* Madrid: Editorial Gredos.
Kaput, J. J. (2008). What is Algebra? What is Algebraic Reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.). *Algebra in the early grades* (pp. 5-19). Lawrence Erlbaum.
Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator, 8*(1), 139 – 151.
Leal, A. (1987). *Construcción de sistemas simbólicos: la lengua escrita como creación.* Barcelona: Gedisa.
Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Visión histórica. *Revista IRICE. 13*, 1-25.
Mason, J. (1996). Expressing generalityand roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (pp. 65-86). Dordrecht: Kluwer.
Mason, J. (2017). Overcoming the Algebra Barrier: Being Particular About the General, and Generally Looking Beyond the Particular, in Homage to Mary Bool. En S. Steward (Ed.) *And the rest is just algebra* (pp. 97-118). Dordrecht: Kluwer.
Menéndez, S. (2010). Opción, registro y contexto. *Tópicos del Seminario, 23*(enero-julio), 221-239.
Papini, M. (2003). Algunas explicaciones vogotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6*(1), 41-71.
Presmeg, N., Radford, L., Roth, W. & Kadunz, G. (2016). *Semiotics in Mathematics Education*. ICME-13 Topical Sruveys: Springer.
Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M. & Méndez, A. (Eds.) *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.2-21). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.
Radford, L. (1998). On Signs and Representations. A Cultural Account. *Scientia Paedagogica Experimentalis, 35* (1), 277-302.

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la transformación y la mejora educativa.* Tesis de doctorado no publicada. México:Cinvestav.

SEP (2017). *Planea en Educación Media Superior*. Recuperado de http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2016/DifusionPLANEA_EMS.pdf el 16 de Julio de 2016.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números 77*, p. 5-34.

Stacey, K. y Chick, H. (2004). Solving the problema with algebra. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.) *The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 1-20). Dordrecht: Kluwer.

Van Dijk, T. (2012). *Discurso y contexto.* México: Gedisa.

Vygotsky, Lev (1987). Thinking and speech, en: R.W. Rieber y A. S. Carton (eds.). *The collected works of L.S.Vygotsky.* (Trad. Por N. Minick), Nueva York, Plenum Press.

EL TRABAJO GEOMÉTRICO Y LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL DE LAS NOCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Gerardo Cruz-Márquez, Gisela Montiel Espinosa
Cinvestav-IPN. (México)
gerardo.cruz@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx

Resumen
En el marco de un proyecto de investigación cuya intención final es contribuir en el rediseño del discurso Matemático Escolar vigente –particularmente en el contexto de la formación inicial docente–, y desde la perspectiva que ofrece la Teoría Socioepistemológica, hemos realizado una problematización de las nociones trigonométricas en un escenario histórico, cuyo fin es identificar elementos que propiciaron su emergencia y evolución. De los fundamentos, métodos y resultados de esta etapa pretendemos dar cuenta en este espacio.

Palabras clave: trigonometría, teoría socioepistemológica, almagesto, Ptolomeo

Abstract
As part of a research project aimed at contributing in the redesign of the current School Mathematics discourse, particularly, in the context of prospective mathematics teacher's training, and from the perspective offered by the Socio-Epistemological Theory, we have made a problematization of trigonometric notions in a historical setting, which is intended to identify elements that favor its emergence and evolution. We seek to show the foundation, methods and results of this research stage.

Key words: trigonometry, socioepistemological theory, almagest, Ptolemy

Introducción

La Teoría Socioepistemológica sostiene que, en tanto el saber matemático se ha construido socialmente en ámbitos no escolares, en su introducción en el sistema educativo se producen discursos –denominados genéricamente discurso Matemático Escolar (dME)–, que además de facilitar la comunicación de conceptos y procedimientos matemáticos (Cantoral, 2013), norman la organización de la matemática escolar y determinan las formas de participación y consenso en el ámbito didáctico (Romero, 2016).

Desde esta perspectiva, y mediante el análisis de libros de texto, planes-programas de estudio y experiencias didácticas con profesores y alumnos del nivel Medio Superior, estudios como los de Montiel (2005; 2007), Jácome (2011) y Scholz (2014) observan que –bajo el dME vigente– las construcciones geométricas, al igual que su proporcionalidad, son dadas y que los problemas que se presentan en clase proveen de manera inmediata todos los datos necesarios para ser resueltos, reduciendo el trabajo del alumno a elegir la ‘fórmula’ trigonométrica adecuada, sustituir los datos y realizar las operaciones numérico-aritméticas que le permitan obtener el resultado que se solicita, esto es, a aprovechar las nociones trigonométricas como una *herramienta técnica* para el cálculo de un valor faltante.

Aunado a esto, Montiel y Jácome (2014) concluyen que la tradición escolar asocia a las nociones trigonométricas, además del significado como *técnica* antes mencionado, un *significado lineal* y *aritmético*. El primero de ellos refiere al constante manejo lineal que recibe la relación ángulo-lado en el triángulo rectángulo, mientras que el segundo alude a la centración en el dominio aritmético observada en el tratamiento escolar actual de la trigonometría.

En suma, la falta de análisis sobre la naturaleza particular de la relación ángulo-lado en el triángulo rectángulo y la invisibilidad de los procesos de construcción geométrica –que reducen su uso al de una herramienta técnica– promovida por el dME vigente, configuran el fenómeno didáctico denominado *aritmetización de la Trigonometría* (Montiel, 2011; Montiel y Jácome, 2014).

Ante esta problemática, y en el marco de un proyecto de investigación cuya intención final es contribuir en el rediseño del dME –específicamente en el contexto de la formación inicial docente en Honduras–, realizamos una problematización de las nociones trigonométricas en un escenario histórico, con el afán de acercarnos a sus usos y significados primeros, mismos que se han perdido paulatinamente en la introducción de la trigonometría al sistema educativo. De los fundamentos, métodos y resultados de esta etapa se pretende dar cuenta en este espacio.

Problematización en un escenario histórico

En nuestra disciplina, los estudios de corte histórico no suelen analizar las construcciones mentales, ni las obras didácticas u originales pertenecientes a otras áreas del saber, ya que no advierten en ellas valor matemático. Sin embargo, la Teoría Socioepistemológica parte del planteamiento diametralmente opuesto al afirmar que “el pensamiento humano posee una herencia” (Cantoral, 2013, p. 105).

En consecuencia, desde esta perspectiva teórica, más que historiar, nos interesa *historizar* el conocimiento matemático, en otras palabras, nos importa “no sólo la relatoría de hechos históricos, sino la búsqueda de las circunstancias socioculturales que rodean la generación de conocimiento matemático” (Montiel y Buendía, 2012, p. 68). Lo cual implica, para nuestro estudio, conocer y analizar las circunstancias sociales, culturales e institucionales que propiciaron la emergencia y evolución de las nociones trigonométricas.

Con esto en mente, tomamos al *Almagesto* como punto de partida y centro de nuestra historización. Esta obra, escrita alrededor del siglo II –en Alejandría– por el astrónomo, geógrafo y matemático greco-egipcio Claudio Ptolomeo, es señalada por la literatura como la evidencia más antigua del nacimiento de la trigonometría, en tanto estudio deliberado, sistemático y cuantitativo de la relación que se establece entre un ángulo y las distancias que este subtiende.

Esta historización se llevó a cabo con una configuración particular del análisis de contenido, que nos fue útil para acercarnos al contenido manifiesto, explícito, de nuestro objeto de análisis, así como al contenido latente, indirecto, del mismo (en el sentido que propone Cáceres, 2003); integrando consideraciones teóricas de nuestra fundamentación.

Para realizar el análisis contextual del *Almagesto* de Ptolomeo partimos de la propuesta metodológica planteada por Espinoza (2009), la cual sostiene que, para construir una explicación del significado sociocultural de una obra, esta debe verse al menos desde tres perspectivas: como una producción con historia, como un objeto de difusión y como parte de una expresión intelectual global. En este sentido, preguntas como *¿quién fue Claudio Ptolomeo?*, *¿qué eventos sociales, políticos y/o económicos son determinantes en la publicación del Almagesto?,* y *¿qué relación mantiene el Almagesto con otras obras matemáticas o didácticas relevantes en la época?* cobraron importancia en nuestro estudio (Cruz-Márquez y Montiel, en prensa).

Por otro lado, para realizar el estudio textual del *Almagesto*, seleccionamos el Capítulo IX del Libro I como objeto de análisis –puesto que en él Ptolomeo construye su tabla trigonométrica–; realizamos un estudio preliminar del mismo y de la literatura asociada; identificamos siete proposiciones o unidades de análisis; construimos códigos que hicieran posible la conversión de nuestro documento bruto en datos susceptibles de ser analizados; y finalmente, construimos tres niveles de análisis: análisis micro, análisis meso y análisis macro (Cruz-Márquez y Montiel, 2017). Estas últimas tenían como objetivo analizar la estructura de cada una de las proposiciones, estudiar bloques de proposiciones que compartían un fin y constituir una reflexión general sobre la estructura y propósito de nuestro objeto de análisis, respectivamente.

Análisis contextual

El análisis sociohistórico llevado a cabo nos mostró que, incluso previo al establecimiento de causalidades, las antiguas civilizaciones humanas no tardaron en asociar los movimientos de los cuerpos celestes con fenómenos naturales terrestres. Por ejemplo, el percatarse de que las inundaciones del valle del rio Nilo –que borraban los límites establecidos del terreno y causaba estragos en la ganadería y agricultura de la región– sucedían invariantemente poco después de la salida heliacal de Sirio , aproximadamente cada 365 días, fijó los ojos de Egipto en la bóveda celeste (Van der Waerden y Huber, 1974).

Así, construido este vínculo entre los acontecimientos astronómicos y los terrestres, y ante la imposibilidad humana de controlar el transcurso del tiempo, emergió la necesidad de anticipar los fenómenos astronómicos como una herramienta para organizar las actividades económicas, políticas y religiosas, de tal suerte que fueran lo más productivas posibles.
Los primeros instrumentos construidos con este fin fueron las tablas de registro –utilizadas de forma destacada por las civilizaciones mesopotámicas–, en ellas se identificaban y categorizaban los cuerpos celestes, al mismo tiempo que se registraban sus cambios. Estas tablas permitían, a mediano y largo plazo, identificar regularidades en el comportamiento de los astros y anticipar con un considerable grado de certeza sus cambios.

Con el asentamiento de las primeras colonias griegas, pueblos con el espíritu atrevido e imaginativo de aventureros y con una ventajosa posición –a lo largo de la costa del mar Negro y del mar Mediterráneo– que les permitía “un contacto más estrecho con los dos grandes valles fluviales de los que podía venir el conocimiento, por su proximidad” (Boyer, 1986, p. 75), comenzó gradualmente el movimiento de

racionalización del universo, esto es, se transitó paulatinamente de la cuestión oriental *¿cuándo?* a la cuestión científica moderna *¿cómo y por qué?* (Struik, 1980).
Como resultado de este afán por explicar la mecánica celeste, cobra relevancia la cosmovisión de la época, es decir, además de los fenómenos astronómicos observables por simple inspección desde la Tierra, se vuelve fundamental considerar el conjunto de creencias vigente respecto a cómo se comporta el universo. Dentro de estas, bajo la cosmovisión aristotélica –predominante en la época (DeWitt, 2010)–, situamos a la *inmovilidad* de la Tierra y su posición en el centro del cosmos; la *finitud* y *esfericidad* del universo; y la *esfericidad* de los cuerpos celestes y la *circularidad-uniformidad* de su movimiento.

En suma, ante la determinación por explicar y anticipar los movimientos celestes y dada la cosmovisión predominante en la época, que –como hemos mencionado– ubicaba a la Tierra estática en el centro del universo y a los planetas moviéndose de forma circular, uniforme e ininterrumpida alrededor de ella, los astrónomos griegos enfrentaron de forma recurrente el problema de *medir indirectamente* la distancia entre dos posiciones de un cuerpo celeste conociendo el ángulo central que las separa y viceversa (Fig. 1).

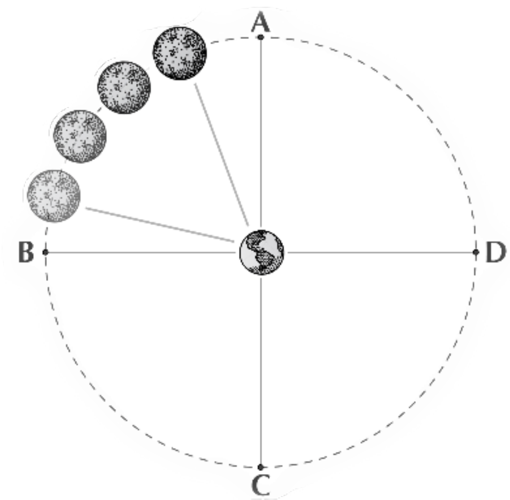


Figura 1. Problemática astronómica

Sin embargo, hasta ese momento no se contaba con una herramienta matemática que describiera de forma sistemática y cuantitativa la relación existente entre esas magnitudes, inconveniente que orilló a astrónomos como Hiparco de Nicea a, previo a atender el problema astronómico de su interés –las temporadas desiguales–, construir una tabla que correspondiera una amplia cantidad de ángulos centrales con las longitudes de las cuerdas que subtienden, lo que constituye tal vez el problema más antiguo que se resolvió utilizando una tabla trigonométrica (Bressoud, 2010).

Esta tabla, al igual que la mayor parte del trabajo de Hiparco, se ha perdido, hecho que nos llevó a estudiar la obra maestra de su más cercano sucesor, Ptolomeo, quien en el *Almagesto* –previo a iniciar la exposición de su sistema planetario–, se vio en la necesidad de construir una tabla trigonométrica que relacionara los ángulos centrales entre 0.5º y 180º –con un intermedio de medio grado– y sus respectivas cuerdas. Para ello, el autor contó con al menos tres herramientas fundamentales: la geometría axiomática-deductiva griega, los avances numérico-aritméticos de las civilizaciones mesopotámicas y un significado del ángulo en tanto cuantificación de la amplitud, concreto en un sistema de división de la circunferencia del círculo.

Finalmente, vale la pena mencionar que, además de las herramientas aludidas, Ptolomeo gozó de un ambiente social y académico al menos favorable para su labor científica. Dentro de los episodios socioculturales trascendentales para la emergencia, estructura y carácter del *Almagesto* destacamos la estabilidad y poderío socioeconómico de Alejandría en la época, la creación y auge del Museo y la Biblioteca de Alejandría –tal vez el primer antecedente de una política estatal de financiamiento de la actividad científica–, y la labor de Ptolomeo y sus antecesores científicos más cercanos –Euclides, Apolonio e Hiparco– en dicha ciudad (Boyer, 1986).

Análisis textual

Como hemos mencionado, para el estudio textual de nuestro objeto de análisis, el Capítulo IX del Libro I del *Almagesto*, posterior al estudio preliminar y la determinación de unidades y códigos de análisis, establecimos tres niveles de estudio: análisis micro, análisis meso y análisis macro.

El primero de ellos, nos fue útil para estudiar detalladamente la estructura y función de cada una de las proposiciones o unidades de análisis de la obra en cuestión. Gracias a él nos fue posible, durante el análisis meso, identificar tres bloques de proposiciones con un fin propio: los primeros pares ángulo-cuerda, los métodos geométricos y las cuerdas subtensas por ángulos centrales de 0.5º y 1º.

En el primer bloque, Ptolomeo establece cinco primeras relaciones ángulo-cuerda (Fig. 2), si bien bastante conocidas en la época al ser los lados de los polígonos regulares inscritos de tres, cuatro, cinco, seis y diez lados –subtensos por ángulos centrales de 120º, 90º, 72º, 60º y 36º, respectivamente–, estos pares le son necesarios como materia prima para los bloques posteriores.

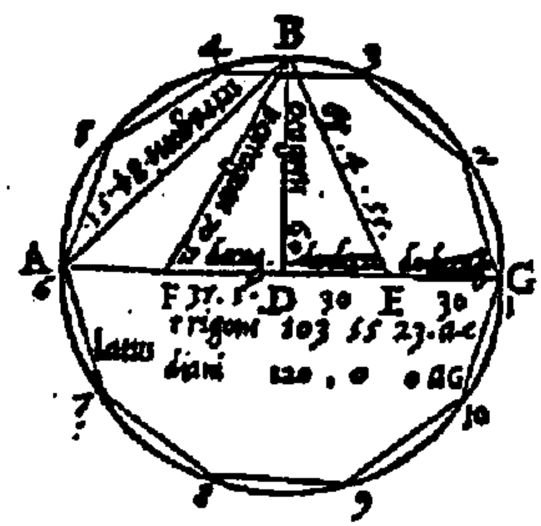


Figura 2*.* Primeros pares ángulo-cuerda (Tomado de Saiz, 2003, anexo)

Durante el segundo bloque de proposiciones, Ptolomeo enuncia y demuestra cuatro métodos geométricos para la aproximación de cuerdas (Fig. 3). Estos métodos son relaciones geométricas retomadas o construidas por el autor y fungen como puente entre los pares ángulo-cuerda ya conocidos y los buscados. Además, es en estos métodos que ubicamos el nacimiento de la trigonometría, en tanto constituyen el primer intento –del cual tenemos evidencia– por sistematizar el estudio de la relación no proporcional que se establece entre un ángulo central y las longitudes que este subtiende.

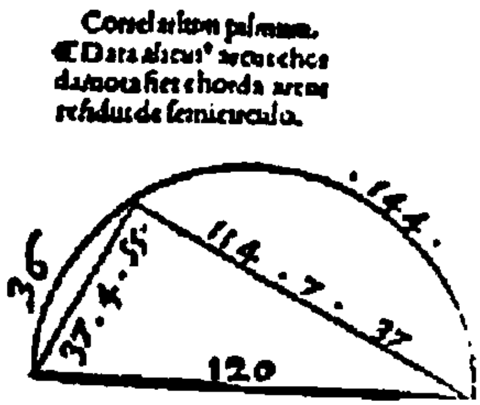


Figura 3. Primer método geométrico: cálculo la cuerda subtensa por el ángulo suplemento de un ángulo cuya cuerda es conocida (Tomado de Saiz, 2003, anexo)

Finalmente, para completar su tabla, y ante la imposibilidad de trisecar el ángulo, Ptolomeo debe aproximar las cuerdas subtensas por los ángulos centrales de 0.5º y 1º. Para ello, prueba que “la razón entre la cuerda mayor y la cuerda menor en un círculo es menor que la razón de sus respectivos arcos” (Fig. 4), esto, además de servirle de fundamento geométrico para aproximar las cuerdas deseadas, evidencia que las cuerdas no conservan la razón de los arcos –y de los ángulos centrales– que las subtienden, es decir, prueba que, a diferencia de la relación ángulo-arco, la relación ángulo-cuerda no es proporcional.

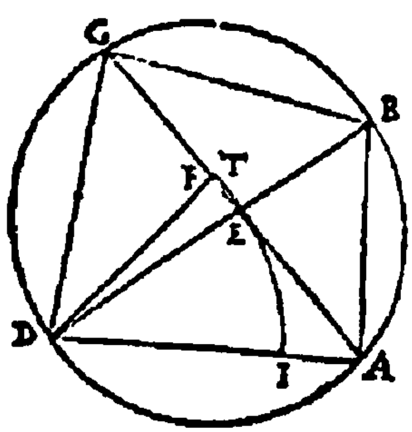


Figura. 4. Cuerdas subtensas por ángulos centrales de 0.5º y 1º (Tomado de Saiz, 2003, anexo)

Finalmente, el último nivel de análisis, el nivel macro, nos permitió reconocer que, en su afán por describir cuantitativamente la relación trigonométrica que se establece entre un ángulo central y las cuerdas que este subtiende, Ptolomeo hizo uso de las nociones geométricas con al menos tres propósitos distintos: *como herramientas de construcción*, útiles para introducir elementos geométricos iniciales y auxiliares; *como herramientas teóricas*, donde se sirvió de las propiedades de los objetos construidos anteriormente para probar las relaciones geométricas existentes entre ellos; y *como herramientas numérico-aritméticas*, donde –con ayuda de la división de la circunferencia, las operaciones numérico-aritméticas y los pares ángulo-cuerda conocidos– utilizó las relaciones geométricas establecidas en pro de agregar mediciones a su tabla. A la sinergia de estos tres usos que Ptolomeo da a las nociones geométricas –al construir su tabla trigonométrica– es lo en nuestro proyecto denominamos *Trabajo Geométrico*.

Algunas conclusiones

En síntesis, la historización realizada nos permitió, en primera instancia, observar con suma claridad cómo la necesidad humana de anticipar los fenómenos astronómicos "preconfigura la emergencia de un conocimiento y en consecuencia, de un saber institucional" (Montiel, 2011, p. 111). Al mismo tiempo, nos hizo conscientes de cómo el contexto, las herramientas heredadas y las ideas del autor se entretegen para enfrentar dicha problemática y construir la más antigua explicación sistemática y cuantitativa –que ha llegado hasta nosotros– de la relación que se establece entre un ángulo y las distancias que este subtiende.

Finalmente, esta problematización de las nociones trigonométricas en un escenario histórico hizo posible formular como hipótesis de partida que *la Medición Indirecta de Distancias en el contexto del círculo permite, mediante el trabajo geométrico, confrontar el significado lineal y aritmético que el dME vigente asocia a las razones trigonométricas, así como su resignificación mediante el uso*.

Referencias bibliográficas

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. (M. Martínez Pérez, Trad.). Madrid: Alianza.

Bressoud, D. (2010). Historical Reflections on Teaching Trigonometry. *Mathematics teacher*, 104(2), 106-112. (Suplemento 1: Historical Reflections on Teaching Trigonometry: Hipparchus).

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cruz-Márquez, G. y Montiel, G. (2017). Emergencia de las Nociones Trigonométricas en el Almagesto. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30* (pp. 981-989).

Cruz-Márquez, G. y Montiel, G. (en prensa). Preliminares trigonométricos en el Almagesto. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 1(2).

DeWitt, R. (2010). *Cosmovisiones. Una introducción a la historia y la filosofía de la ciencia*. (J. Sarret Grau, Trad.). España: Buridán.

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemologico*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Jácome, G. (2011). *Estudio socioepistemológico a las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Un acercamiento a los significados construidos por el profesor*. Tesis de Maestría no publicada. CICATA-IPN, México.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Montiel, G. (2007). Proporcionalidad y anticipación, un nuevo enfoque para la didáctica de la trigonometría. En Cecilia Rita Crespo (Ed*.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 590-595). Camagüey, Cuba: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico*. Un estudio Socioepistemológico. México: Ediciones Díaz de Santos.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones. *Metodología en matemática educativa: visiones y reflexiones*, 61-88.

Montiel, G. y Jácome, G. (2014). Significados trigonométricos en el profesor. *Boletim de Educação Matemática*, *28*(50), 1193-1216.

Romero, F. (2016). *Construcción Social de la Serie Trigonométrica de Fourier. Pautas para un Diseño de Intervención en el Aula*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Saiz, L. (2003). *El Capítulo IX del Libro I del Almagesto de Claudio Ptolomeo: "Sobre la medida de las líneas rectas que se trazan en el círculo"*. Madrid: Maxtor.

Scholz, O. (2014). *Construcción de significados para lo trigonométrico en el contexto geométrico del círculo*. Tesis de Maestría no publicada. CICATA-IPN, México.

Van der Waerden, B. y Huber, P. (1974). *Science awakening II*. Springer Science & Business Media, B. V.

EL CASO DE LOGARITMOS DE NÚMEROS NEGATIVOS. LA PRACTICIDAD DE LA INGENIERÍA Y EL RIGOR MATEMÁTICO

Francisco Javier Martínez Jiménez, Rosa María Farfán Márquez
Centro de investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)
francisco.martinez@cinvestav.mx, rfarfan@cinvestav.mx

Resumen
Se enfatiza una reflexión de una investigación en proceso, que pretende caracterizar la construcción de conocimiento matemático de estudiantes de ingeniería, cuando se les confronta en una situación de aprendizaje [SA] a los obstáculos epistemológicos [OE] derivados de la extensión del significado del logaritmo de un número negativo, que tuviera por resultado el origen de la variable compleja. Cuestionamiento entre Euler, Leibniz y Bernoulli, durante el siglo XVIII. Dado que la misma SA se aplicó en 1988, a docentes-matemáticos en formación, las producciones de ambos campos de estudio se contrastan, observándose sus particularidades. Se concluye que la practicidad matemática caracteriza las argumentaciones de los estudiantes de ingeniería y el rigor matemático, las producciones de los docentes-matemáticos en formación.

Palabras clave: ingeniería, socioepistemología, variable compleja

Abstract
Emphasis is placed in a reflection of an ongoing research that is intended to characterize the construction of engineering students' mathematical knowledge when they are confronted, in a learning situation [LS], to the epistemological obstacles[EO] resulting from the extension of the meaning of a negative number logarithm that would have as a product the origin of the complex variable. It was a question between Euler, Leibniz y Bernoulli, during the XVIII century. As the same learning situation was applied to prospective mathematics teachers during their education process in 1998, the productions from both areas of study are contrasted, and their special features are observed. We conclude that mathematical practicability is characterized by engineering students' arguments and the mathematical rigor, the productions of prospective mathematics teachers.

Key words: engineering, socio-epistemology, complex variable

Introducción

Este trabajo es una investigación en proceso que pretende aportar elementos para caracterizar la construcción de conocimiento matemático de estudiantes de ingeniería, cuando se les confronta a una situación de aprendizaje [SA] que contiene una serie de ideas clave, llamados obstáculos epistemológicos [OE], intrínsecos al saber matemático desde el marco teórico empleado, derivadas de un debate sobre la extensión del significado del logaritmo de un número negativo y que tuviera por origen a la teoría de variable compleja, debate que tuvo lugar en el siglo XVIII, con Euler, Leibniz y Bernoulli. Se contrastarán las diferencias y similitudes que dos campos de estudio presentan en sus argumentaciones, al confrontar los mismos OE inmersos en la SA.

La población con la que se trabaja son estudiantes de la carrera de Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica [ICE] del Instituto Politécnico Nacional, donde la teoría de variable compleja es una materia fundamental e indispensable pues se relaciona con la solución de problemas a fines a la ingeniería, por ejemplo, para la reducción de ecuaciones integrodiferenciales en análisis de circuitos. La variable compleja se encuentra de manera directa e indirecta en al menos cinco de los nueve semestres de la carrera, hecho de interés para observar y explorar la forma de construcción del conocimiento sobre el $\log(-x)$ en los estudiantes de ingeniería.

Se pretende que este acercamiento didáctico signifique la concepción de la teoría de variable compleja desde el contexto epistemológico, siendo una introducción al curso oficial, dado en tercer semestre de la carrera; favoreciendo el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes.

Desarrollo

La base de esta investigación se sustenta en el trabajo de Cantoral y Farfán (2008), en donde a partir de un análisis epistemológico diseñan la SA. Esta, se aplicó por primera vez en 1988, en el trabajo de Soto (1988) en una población de estudiantes universitarios que serían docentes en matemáticas (Docencia-Matemática), en el estado de San Luis Potosí, México. Y se aplica por segunda vez a principios de 2017, en estudiantes de ICE en el Instituto Politécnico Nacional en la Ciudad de México, México. Ambas poblaciones en formación, y sin haber cursado variable compleja al momento de resolver la SA.

La SA se ha reorganizado, respetando la esencia de origen y ha quedado conformada en tres partes que constan de introducción, primera parte y segunda parte.

> En la introducción se recoge una primera reflexión en torno a observar el conocimiento previo de los estudiantes, pues se cuestiona, a qué sería igual el $\log(-x)$ y cuál es la necesidad de considerar sólo los logaritmos de números positivos.
>
> En la primera parte, se muestra un discurso argumentativo a manera de persuadir sobre la existencia de $\log(-x)$, y aceptar en consecuencia que $\log(-x) = \log(x)$.
> Estos argumentos a favor de $\log(-x)$ son algebraicos, analíticos y gráficos y hacen alusión al campo real mediante la idea del $\log|x|$.
>
> La segunda parte crea una contradicción, pues mediante la fórmula dada en el siglo XVIII por Bernoulli (Citado en Cantoral y Farfán, 2008) para el cálculo del sector circular de radio a, se evalúa $\theta = \pi/2$; teniéndose que $\log(-1) = \pi i$, pero posteriormente se habría calculado $\log(-1) = 0$.

Contrastación

De acuerdo con las producciones de los estudiantes del trabajo de Soto (1988), se observa que una parte de ellos muestran una sistemática negativa a aceptar el $\log(-x)$, pese a que en la primera parte de la SA se les argumentó la posibilidad de su existencia.
La otra parte de esta población, que dudaron de la existencia de $\log(-x)$, se les permitió resolver la segunda parte de la situación, y llegaban a una conclusión similar; la negativa de aceptación. Argumentaban que de ser posible la existencia del $\log(-x)$ y explicar que $\log(-1) = 0$ y que $\log(-1) = \pi i$, tendrían que reconstruir la teoría actual que ellos conocían, pues no concebían un número al cual se eleve a una base y de como resultado un número negativo, de acuerdo a la definición escolar de logaritmo: $log_a b = N$, $a^N = b$. Pensaban en reconstruir la teoría de variable real.

En este sentido, Cantoral y Farfán (2008) concluyen que esta segunda parte de los estudiantes no son sensibles a la contradicción que genera $\log(-1)$, pues se quedan con lo institucionalizado, aquel referente generado en sus cursos de formación académica que niega la existencia de $\log(-x)$ e impide explicar tal contradicción; la serie de elementos teóricos brindados por el discurso matemático escolar [dME], influye en el arraigo de los estudiantes a no explorar sobre $\log(-1)$. Soto (1988) realiza otro aporte que evidencia al dME, pues argumenta que este arraigo se debe a que los cursos de formación de los estudiantes en general, está cargado por demostraciones matemáticas. Este fenómeno, por ejemplo, los hace no concluir en su totalidad, en su caso, la situación de aprendizaje, resistiéndose a explorar construcciones nuevas de conocimiento. Cabe mencionar que el trabajo de Cantoral y Farfán (2008) realiza una reinterpretación de análisis del trabajo de Soto (1988).

De acuerdo con la noción teórica de la Socioepistemología, el dME es el que establece e impone significados por sobre otros; en general sobre qué es matemática, cómo enseñarla, interpretarla y evaluarla. Mientras que se entenderá a la demostración matemática como aquella interpretada en Larios (2003), como rigor matemático; es decir, una serie de deducciones lógicas que hacen posible la derivación de un resultado matemático, pues la demostración matemática depende de su contexto y uso epistemológico.

Esta idea de rigor matemático, muy presente en los estudiantes de docencia-matemática, les permitió darse cuenta de que en la primera parte se hacía alusión al $\log|x|$. Realizaron críticas y discusión de ideas al discurso argumentativo, encontrando "inconsistencias", pero más que ello, eran realmente observaciones relativas, a simplemente dar cuenta que se hacía alusión del $\log(-x)$ mediante la idea de simetría que permite el $\log|x|$.

Ahora bien, para la aplicación de la SA a estudiantes de ingeniería, se hace uso de los constructos de la Socioepistemología, de las dimensiones del saber descritas en Cantoral (2013) a saber, la componente epistemológica, didáctica, cognitiva y sociocultural, analizadas en el análisis preliminar de la metodología usada, la ingeniería didáctica. A fin de que dichos componentes orienten sobre explicitar las lógicas de razonamiento de Euler, Leibniz y Bernoulli, y articular la forma de superación de los obstáculos epistemológicos como lo hizo Euler, por ello también, la reorganización de la SA.

A continuación, se enfatiza únicamente la componente epistemológica:

Bernoulli: Acepta el logaritmo de un número negativo, haciendo alusión al campo real pues se refiere al log $|x|$.
Leibniz: Niega sistemáticamente la existencia del log $(-x)$. Pues eso implicaría aceptar $\frac{1}{2}$ log $(-x)$ = log $(\sqrt{-x})$.
Euler: Integra ambos argumentos, expresando que el log $(-x)$ no es real, sino complejo. Para ello utiliza al número complejo.

Derivado de este análisis y la problematización del saber, se observan dos nociones importantes a considerar, por un lado, integrar a los números complejos en log $(-x)$ para dar pie a una nueva teoría y por otro, dar cuenta que en el dominio real el log $(-x)$ es alusivo a log$|x|$(lo que enfatizaban los estudiantes docentes-matemáticos). Considerando estos elementos se concuerda con la postura teórica de Bachelard, pues menciona que la superación radica en mostrar cómo un concepto produce otro y cómo se vincula con otro, respecto de la emergencia de una determinada noción (Bachelard, 2000).

Con las ideas antes mencionadas, el diseño y análisis a priori, fue el que permitió la reorganización de la SA al campo de estudiantes de ingeniería, conservando su esencia y llevando a la articulación de la misma para orquestar la superación de los obstáculos epistemológicos, teniendo una respuesta positiva.

Sin embargo, es en la etapa de confrontación del análisis a priori vs a posteriori, que se destaca las características de las argumentaciones en la población de estudiantes de ingeniería, que se pueden contrastar con aquellas exhibidas en la población del estudio de Soto (1988).

En estudiantes de ingeniería se muestra su disposición a explorar una ruta de incertidumbre que enmarca el $\log(-x)$, hecho que significó la culminación total de la situación de aprendizaje, estando en condiciones de explicar la contradicción sobre el $\log(-1) = 0 = \pi i$. Esto se debe a que no es esencial para ellos, usar demostraciones matemáticas cargadas de rigor, caso contrario a los docentes-matemáticos en formación que en todo momento pretenden refutar cada pregunta planteada de la SA, puesto que su intención es abstraer para todos los casos, el discurso argumentativo.

Los estudiantes de ingeniería muestran un arraigo a aceptar resultados que sean entendibles o bien, explicables para ellos, aunque estos fuesen incluso contradictorios, por ejemplo, tras aceptar el $\log(-x) = \log(x)$, expresaban estar aún en duda sobre la existencia de $\log(-x)$, sin embargo determinaban a puño y letra que, $\log(-1) = \log(1) = 0$. Los estudiantes docentes-matemáticos en una parte de su población, que fue representativa, no llegaron siquiera la parte de la SA que planteaba a $\log(-1) = 0 = \pi i$, puesto que si tenían duda no continuaban, sino que ahondaban y profundizaban sobre su base de rigor. Con lo anterior, se interpreta que los estudiantes de ingeniería, cambian de paradigma. Es así como se postran sensibles a la contradicción (Cantoral y Farfán, 2008) pues además de aceptar $\log(-x) = \log(x)$ es tendencia en ellos y ellas, dar cuenta que $\log(-1) = 0$ es un resultado debido al campo real y $\log(-1) = \pi i$, se debe al campo complejo, explicando así la contradicción. Sin embargo, quizá, esa falta de rigor los hace no argumentar, ni siquiera intentar debatir sobre el discurso argumentativo planteado en la primera parte, pues lo aceptan sin mayor restricción y sin indicios de dar cuenta que se habla del log $|x|$.

Como una posible característica del dME en la ICE, se observa que las producciones de los futuros ingenieros, fue tendiente a un discurso sobre cálculos y operaciones, pues cabe mencionar que, en la introducción de la SA, justifican sus respuestas basándose en la calculadora, mostrándose ésta como un referente equiparable al libro de texto. Decían que, log $(-\mathrm{x})$ no existía porque no se podía determinar en la calculadora.

Conclusiones

En ambas poblaciones de estudio, el dME es el que determina el trato hacia los objetos matemáticos e inhibe la superación de obstáculos epistemológicos como sucedió en el siglo XVIII con Euler. Sin embargo la ruta establecida y articulada para la superación de los mismos es válida, pues se contempla un caso donde un estudiante reconoció a $\log(-x)$ como parte de $\log|x|$ y también logro explicar $\log(-1) = \pi i$ y $\log(-1) = 0$, delimitando teorías respectivamente, variable compleja y variable real.

Se cree que la falta de rigor en el trato de los objetos matemáticos por parte de los estudiantes de ingeniería, aunado a la carente significación y construcción de la función logaritmo en el sistema escolar (Ferrari, 2001) no los hace dar cuenta de la función $\log|x|$. Por otro lado, el rigor matemático presente en los estudiantes docentes-matemáticos les impide llegar a la contradicción, y explicar que $\log(-1) = \pi i$ y $\log(-1) = 0$. En ambas poblaciones de estudio la tendencia es dar cuenta sólo de una noción, de las dos a considerar para la emergencia de la variable compleja, de acuerdo con la postura de Bachelard. Los estudiantes de ingeniería delimitan teorías integrando a $\log(-1)$ los números complejos, mientras que los estudiantes docentes-matemáticos, observan que $\log|x|$ permite $\log(-x)$ en variable real.

La población de futuros ingenieros e ingenieras exhibe una *practicidad* matemática, pues acepta el reto de explorar la SA, mostrar disposición para explicar los resultados que iban obteniendo, evidenciando cambios de paradigmas. Mostrando un arraigo que radica en que buscan una facilidad para operar conceptos matemáticos, basándose en la calculadora para establecer un resultado válido concluyendo que, si un resultado es viable entonces puede ser calculable. Es probable que los cursos de formación académica, en la carrera de ICE hasta tercer semestre haga uso de la matemática como una herramienta en el cálculo de operaciones, para la resolución de problemas afines en calculadora.

En ambos casos, los estudiantes de docencia-matemática e ingeniería, recurren a su marco de referencia permeado en su dME característico, evidenciando diferentes racionalidades, así como dos tipos de interpretaciones sobre la construcción de conocimiento sobre el $\log(-x)$. Aspectos que la teoría socioepistemológica reconoce respectivamente como racionalidad contextualizada y relativismo epistemológico, constructos mediante los cuales cada población de estudio da la siguiente introducción a la variable compleja:

> Los estudiantes de ingeniería desde la practicidad en el seno de la comprensión y limitándose a lo conceptual, sin expresar ideas de rigor dando su introducción desde la delimitación de teorías y siendo sensibles a las contradicciones. Concluyendo que el $\log(-x)$ tiene dos concepciones dependiendo el campo, real o complejo.
>
> Los docentes-matemáticos en formación desde su rigor, en términos de símbolos y lenguaje matemático basándose en ello para realizar las inferencias de que el discurso argumentativo en la SA es alusivo a $\log|x|$. Concluyendo que el $\log(-x)$ existiría si se cambia la teoría real, o la que conocían.

Las lógicas de razonamiento de Leibniz bien pueden representar a los docentes matemáticos en formación, pues no aceptan log $(-x)$ puesto que no lo pueden demostrar. En tanto que los estudiantes de ingeniería aceptan a log $(-x)$ haciendo alusión a la idea de simetría que plantea el log $|x|$, como Bernoulli lo hacía.

Ambas introducciones, dan luz a la teoría de variable compleja, pero sin superar a los obstáculos epistemológicos, no fue suficiente la reorganización de la SA para la superación de los mismos, lo que sensibiliza en ambos casos la idea de "analizar las cuestiones de orden social y cultural en el diseño de aproximaciones sistémicas para el aprendizaje de las matemáticas" (Cantoral y Farfán, 2008, p. 282). Pues un resultado en matemáticas no depende sólo de la lógica matemática.

Se concluye que, el obstáculo epistemológico es un elemento intrínseco y necesario de confrontar, para la construcción del conocimiento matemático acerca de logaritmos de números negativos, ya que los argumentos para responder a esta interrogante tienen una extrema similitud en tres épocas, geografías y distintos campos de estudio, involucrando a las poblaciones antes mencionadas con los matemáticos del siglo XVIII.

Referencias bibliográficas

Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico: contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo*. Ciudad de México: Siglo XXI.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R. & Farfán, R. (2008). Socioepistemología de la contradicción. Un estudio sobre la noción de logaritmo de números negativos y el origen de la variable compleja. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama, A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Un Reporte Iberoamericano*, (pp. 243-284), México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.-Díaz de Santos.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de maestría no publicada. Centro de investigación y de estudios avanzados del IPN.

Larios, V. (2003). Si no demuestro... ¿enseño Matemática?. *Revista Educación Matemática*, 15(2) 163-178.

Soto, M. (1988). *Una experiencia de redescubrimiento en el aula: acerca de los logaritmos de números negativos y los orígenes de la variable compleja*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE ALUMNOS Y ALUMNAS DE INGENIERÍA. EL CASO DE LOGARITMOS DE NÚMEROS NEGATIVOS

Francisco Javier Martínez Jiménez, Rosa María Farfán Márquez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)
francisco.martinez@cinvestav.mx, rfarfan@cinvestav.mx

Resumen

La variable compleja es indispensable en la formación de Ingenieros en Comunicaciones y Electrónica [ICE] del Instituto Politécnico Nacional. Desde esta perspectiva, se pretende caracterizar la construcción del conocimiento matemático de estudiantes de ICE y llevar la significación de la teoría desde su contexto de origen, bajo la idea del logaritmo de un número negativo. La ingeniería didáctica y la Socioepistemología respaldan este trabajo, y permiten rediseñar la situación de aprendizaje original dada por Cantoral y Farfán (2008), y así orquestar la superación de los obstáculos epistemológicos [OE] generados en el debate sobre el log $(-x)$, teniendo un caso de éxito. Se destaca al OE como intrínseco al saber matemático y necesario de confrontar en la construcción de conocimiento, la influencia del discurso Matemático Escolar en la aceptación de un resultado en matemáticas y en la forma de abordar los objetos matemáticos, en donde los estudiantes de ingeniería exhiben una practicidad matemática donde la calculadora es un gran referente.

Palabras clave: ingeniería, socioepistemología, variable compleja

Abstract

The complex variable is essential in the training of engineers in Communication and Electronics at the National Technical College. From this perspective, we seek to characterize the mathematical knowledge construction of students majoring in Communication and Electronics engineering, and to use the meaning of this theory from its context of origin, under the idea of a negative number logarithm. Didactic engineering and the theoretical framework of socio-epistemology support this research work. It allows redesigning the original learning situation proposed by Cantoral y Farfán (2008), thus overcoming the epistemological obstacles (EO) generated in the debate on the $\log(-x)$, having a case of success. This work emphasizes the EO as an inherent problem in mathematical knowledge, and it is necessary to confront it in the construction of knowledge, the influence of school mathematical discourse in the acceptance of a result in mathematics, and in the way to approach mathematical objects where engineering students show a mathematical practicability, with the calculator as a great referent.

Key words: engineering, socio-epistemology, complex variable

Problemática

En algunos escenarios del sistema escolar, no desencadenan verdaderos procesos de socialización en el aula, donde las nociones matemáticas sean discutidas y debatidas a fin de provocar un desarrollo del pensamiento matemático o acciones de entendimiento para comprender y aprender matemáticas dentro y fuera del salón de clases (Cantoral y Farfán, 2008). Dado que las matemáticas no fueron creadas para enseñarlas, se presentan a los estudiantes como segmentadas y desnaturalizadas de sus orígenes a fin de involucrarse en contenidos matemáticos en la escuela, para ser enseñados. Así, la ICE, no considera en la enseñanza de la teoría de variable compleja, el proceso de confrontación sobre el $\log(-x)$ que fue el origen de su existencia, omitiendo en consecuencia, los obstáculos epistemológicos[OE] que tuvieron que confrontar Bernoulli, Leibniz y que sólo superó Euler. Este proceso de intercambio de ideas generó una diversidad de argumentaciones por parte de los interlocutores, pues tuvieron que hacer frente a una pregunta teórica que no marcaba una "ruta de acción lógica" (Cantoral y Farfán, 2008, p. 281).
Este proceso de confrontación con los OE favorece el desarrollo del pensamiento matemático en el estudiante, dándole un papel más activo en su aprendizaje y en su formación académica, por ello la importancia de cimentar dicha teoría desde su génesis en la ICE; cabe mencionar que la teoría de variable compleja se encuentra en al menos cinco, de los nueve semestres en total, del plan de estudios de la carrera de ICE.

La metodología de la ingeniería didáctica en su etapa de análisis preliminar, se conjuga con la problematización del saber (Cantoral, 2013), para dar la mirada preliminar y elementos a considerar en la configuración de significados de la situación de aprendizaje [SA] para la guía sobre la superación de los OE como lo lleva a cabo Euler; inferir sobre las hipótesis y producciones de los estudiantes en la etapa posterior, el análisis a priori. La etapa final es la de análisis a posteriori que para el análisis de datos, retoma las categorías de análisis de Cantoral y Farfán (2008), donde se observa la influencia del discurso matemático escolar [dME] en las producciones de los estudiantes.

Marco teórico

La Teoría Socioepistemológica caracteriza fenómenos relativos a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, desde una mirada que implica elementos socioculturales. Se tiene la premisa de que la matemática es parte de la actividad humana, pues esta tiene un origen que involucra las prácticas de los individuos en sociedad, dependiendo de su cultura. Para estudiar la naturaleza del saber matemático, problematiza mediante un análisis de estudio sistémico. Se fundamenta en 4 componentes (Cantoral, 2013):

*Epistemológica***.** Es el desarrollo e ideas, histórico-conceptual que trae consigo la génesis original del saber matemático. Esta componente responde al cómo, por qué y para quién, el saber matemático, tuvo origen.
Cognitiva. Es relativa al proceso mental, cuando un sujeto está en la acción de aprender *Didáctica.* Exhibe las características del saber matemático, inmerso en un sistema escolar y estudia la costumbre didáctica.
*Sociocultural***.** Guía y permea a las anteriores, reconoce y describe la cultura sobre la que se fundó el saber matemático, y qué fin u aplicación tuvo este; actividades humanas implicadas en la construcción de conocimiento.

Consideramos desde el punto de vista socioepistemológico, que dada la masificación de la educación, se ha procedido a realizar acuerdos al respecto de cómo enseñar la matemática y cómo evaluarla. Estos factores que parecen impositivos a la sociedad escolar, pueden ocasionar limitantes para realizar la democratización de la matemática. Por ello la importancia de la problematización del saber matemático, pues es un método para lograr enfrentar esta problemática, con el fin de propiciar un escenario en donde las prácticas sean las protagonistas para un desarrollo del pensamiento matemático en el estudiante.

Desarrollo

Se parte del trabajo de Cantoral y Farfán (2008) que diseñan la SA y la aplican a una población de estudiantes de docencia-matemática; trabajo de Soto (1988). Cabe mencionar que el primero, reinterpreta y robustece el segundo trabajo.

A fin de articular la idea de superación del obstáculo epistemológico, aquella que plantea que la superación radica en mostrar cómo un concepto produce otro y cómo se vinculan, respecto de la emergencia de una determinada noción (Bachelard, 2000, p.20), se llevó a cabo la problematización del saber (Cantoral, 2013), orientándose en los hallazgos del estado del arte (Cantoral y Farfán, 2008; Gómez, Pardo y Pastor, 2003; Kleiner; 1988) que apuntan sobre la noción de que el $\log(-x)$ es real pues deviene de $\log|x|$, y es complejo en tanto se consideren a los números complejos en su explicación. De este modo, en el campo de estudiantes de ingeniería, se destaca en los componentes de la problematización del saber:

Epistemológica: Se explicitan las lógicas de razonamiento de los interlocutores. Bernoulli: Acepta la existencia del $\log(-x)$, sin dar cuenta que es alusivo a $\log|x|$ en el dominio real. Leibniz: Niega la existencia del $\log(-x)$ pues aceptarlo implica $\frac{1}{2}\log(-x) = \log(\sqrt{-x})$. Euler: Considera a los números complejos en la explicación de $\log(-x)$. *Hipótesis: Las argumentaciones tipo recaerán sobre las ya mencionadas; la lógica de razonamiento de Euler aparecerá si se articula la superación de los obstáculos epistemológicos.*

Cognitiva: La consideración de los complejos para explicar la relación existente con $\log(-x)$, es una tarea cognitiva seria. Bernoulli, Leibniz, y la población de estudiantes de docencia-matemática, muestran que no logran ver la relación; el rigor matemático es una dificultad en la superación de los OE (Kleiner, 1988; Soto, 1988). *Hipótesis: Las dificultades no se centrarán en el rigor matemático. Esta característica no se encuentra en la formación del estudiante de ingeniería.*

Didáctica: Por otro lado, Ferrari (2001) argumenta que en el sistema escolar se presenta lo logarítmico con carácter operatorio y como objeto teórico. Sin una transición y estructura entre ellos y dejando de lado su estudio como función. Mientras que los números complejos se presentan en ecuaciones de segundo grado, siendo su desarrollo epistemológico en ecuaciones de tercer grado (Kleiner, 1988). *Hipótesis: La idea de simetría en estudiantes (argumento gráfico de $log(-x)\ para\ x < 0\ y\ log(x)\ para\ x \geq 0$) dada la aceptación de $log(-x) = log\ (x)$, es una posibilidad para dar cuenta de que el $log(-x)$ es real dado $log\,|x|$. No se considerará a los números complejos en la explicación de log (-x) ni se reconocerá a la función $log\,|x|$.*

Rediseño

Los hallazgos de la problematización del saber, permitieron el rediseño de la SA de Cantoral y Farfán (2008), poniéndose énfasis en la persuasión del estudiante sobre la aceptación de $\log(-x) = \log(x)$ y en consecuencia $\log(-1) = \log(1) = 0$; pedir la gráfica resultante que han aceptado, de $\log(-x) = \log(x)$, explicitando la misma para $x < 0$ y $x \geq 0$, y posteriormente explicar la contradicción de $\log(-1) = \pi i = 0$. Esperando que al reconocer la función $\log|x|$, el estudiante identifique $\log(-x)$ y concluya que $\log(-1) = 0$ en el campo real, buscando otro camino para explicar $\log(-1) = \pi i$, considerando entonces a los números complejos y la necesidad de delimitar teorías, dando la introducción a la variable compleja, considerándola distinta a la real, superando los obstáculos epistemológicos.

Análisis a posteriori

Se retoman como base las categorías de análisis de Cantoral y Farfán (2008) para la interpretación y análisis de datos desde el enfoque Socioepistemológico. Después, se muestra un fragmento de los datos que fundamentan la correspondiente categoría.
Nomenclatura de los datos de campo: H-> hombres / M->Mujeres / E-> investigador.

Preguntas no escolares, cuando el tema no se ha visto en los libros ni en clases (Cantoral y Farfán, 2008)**.**

Hace referencia a que los alumnos y alumnas, niegan la existencia del $\log(-x)$, porque no está institucionalizado. Los estudiantes requieren del respaldo del dME para poder adentrarse en una reflexión nueva. Sin embargo, a diferencia de los resultados en Cantoral y Farfán (2008) los estudiantes de ingeniería tienden a reconocer conceptualmente al $\log(-x)$, es decir haciendo alusión al $\log|x|$.

E: ¿A qué es igual el logaritmo de un número negativo… ¿Cuál es la necesidad de considerar sólo a los números positivos?
M1: Simplemente metiendo el dato a la calculadora te marca error por lo que se deduce que no está definido, o en su defecto no existe…
H6: No existen los logaritmos negativos… siempre los logaritmos positivos y de hecho cuando lo meto a la calculadora me marca error.
E: ¿Por qué meter el dato a la calculadora?
M1: Para comprobar si existía… porque es más exacto el resultado… porque no se equivoca…
H6: Pues es la que hace todo prácticamente, casi siempre te apoyas a la calculadora… cuando haces el examen pues agarras la calculadora; el profesor está dando clase, también agarras la calculadora, pues costumbre.

Extensión de las operaciones, cuando la algoritmia permite refutar el enunciado (Cantoral y Farfán, 2008)**.**

Una vez que los estudiantes vislumbran una posibilidad de reflexión sobre la existencia del $\log(-x)$, son limitados por la algoritmia. Lo que hace que vuelvan al carácter operatorio y mecánico, sin la heurística de la que habla Soto (1988), que tendería a desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes. El dME es visible en lo que se dice y también en lo que se hace.

E: Puesto que la función logaritmo se caracteriza principalmente por las propiedades siguientes: $ln(xy) = ln(y) + ln(x)$ y $ln(x\text{^}m) = mln(x)$. ¿Tales igualdades seguirán siendo válidas al considerar a x e y negativos? Es decir, al aplicar el logaritmo a números negativos: $ln(-x)(-y) = ln(-y) + ln(-x)$.
M4: Como que ignoré el signo, ves que por leyes de signos dos negativos dan un positivo, entonces a eso me fui, de alguna manera… si porque realmente desconozco o desconocía si esto daba, a fin de cuentas, lo mismo, y solo me fui en signos …
H3: Teniendo en cuenta que los números negativos no existen en los logaritmos las igualdades ya no son válidas o no aplican.
H7: Sí el $\log(x)$ es igual al $\log(-x)$ y el $\log(-y)$ y es igual al $\log(y)$, entonces esto vendría siendo lo mismo….
Se observa en algunos estudiantes de ingeniería, la aceptación de $\log(-x)$, como H7.

Una deducción plausible y sensibilidad a la contradicción: cuando exploración produce divergencias fruto de la deducción (Cantoral y Farfán, 2008).

El dME permite reconocer como legítimo, elementos teóricos derivados de una enseñanza en el dominio real que no advierte de la existencia del logaritmo de un número negativo. Es así como los estudiantes no logran hacer una crítica al discurso argumentativo, no lo cuestionan y simplemente lo aceptan, si bien este era el objetivo, no pudieron inferir que el discurso argumentativo en la SA era el $\log(-x)$ debido al $\log|x|$.
M5: $\log(-1) = \log(1)$
$\log(1) = 0 \therefore \log(-1) = 0$ (lo acepta)
H6: $\log(-1) = \log(1) = 0$ (lo acepta)
E: Podemos llegar a la conclusión de que $\log(-\mathrm{x}) = \log(\mathrm{x})$, ¿lo aceptas?
H6: Pues si lo acepto ... ya mostró varios argumentos… que es verdadero …

Las primeras muestras de adhesión y la aceptación del contrato (Cantoral y Farfán, 2008).

El alumnado logra negociar y entrar a un nuevo contrato didáctico, dado la resolución de la SA, en este sentido, presentan cierta "resistencia" en diferentes puntos, defendían su postura porque, era lo que "ellos sabían", no argumentaban una explicación matemáticamente coherente, sin embargo, no se arraigan a lo que argumentaban y se observa en ellos, el cambio de paradigma.
E: $(-x)^2 = (x)^2$ => $\log(-x)^2 = \log(x)^2$ => $2\log(-x) = 2\log(x) \therefore \log(-x) = \log(x)$
H2: $(-x)^2 = (x)^2$;$4(-x) = 4(x)$; Estoy en duda porque ya avanzando a este nivel, pues digo como que este concepto ya está viejo…, al presentarme usted esto, como que me hizo cambiar […] mi criterio va cambiando… esto no es lo que creí en la preparatoria, es totalmente diferente… si me entró como que un cambio radical en mi criterio sobre este tema de los números negativos…
M2: $(-x)^2 = (x)^2$ …solamente aquí igual si se eleva al cuadrado un número negativo, queda positivo, ¿no?
E: Se le explica que se utilizaron las propiedades de los logaritmos positivos para calcular el logaritmo negativo, el dos pasa ahora como coeficiente, posteriormente acepta $\log(-x) = \log(x)$.

De la aceptación escolar al argumento matemático: sobre la contradicción en matemáticas (Cantoral y Farfán, 2008).

Dado que los estudiantes cambiaban de paradigma y aceptaban el log $(-x)$ se buscaba que explicaran la contradicción de la SA, cuando $\log(-1)=0$ y el $\log(-1)=\pi i$. Los estudiantes logran explicar la contradicción.
E: Como explica el resultado al que habíamos llegado $\ln(-1)=\ 0$ y $\ln(-1)=\pi i$. ¿Constituye una contradicción?
M4: Si, ¿no? ... podría ser, ¿no?... ajá… un ejemplo, esto aplica para los reales (log $(-1)\ =0$) y esto para los imaginarios (log $(-1)\ =\pi\mathrm{i}$), bueno, para otro campo… podría decir que a lo mejor descubriste una identidad…
E: ¿entonces… si yo te digo… a que es igual el log (-1)?… *M4:* …depende el campo, los reales o los complejos… si tú me dijeras en tal campo que no sea los reales seria ah pues πi eh, si tú me dices los reales, ah!, es cero…
H8: Concluí que sí hay una contradicción porque no puede haber dos resultados con el mismo procedimiento, podemos tener muchos procedimientos pero siempre obtener el mismo resultado sobre todo en matemáticas, fue ahí donde dije … tal vez alguno de estos dos argumentos, la primera parte o la segunda es incorrecta, porque no pueden dar dos resultados… y creí que como venía la i, dije, ha bueno, tal vez en el plano de los complejos, este resultado de log (-1) sea correcto… en el plano de los reales da un valor y en el plano de los complejos da otro… dije bueno tal vez pueda ser una transformación … o que en un plano de un valor y en otro, de otro…

El reflejo de los conocimientos culturalmente establecidos: la practicidad de la ingeniería y la demostración matemática.

La población de ingenieros no logran dar cuenta que en el campo real es alusivo a log $|x|$, sí delimitan teorías. Por otro lado, la *practicidad* del alumnado de ingenieros es una característica dada por el dME, pues la construcción de conocimiento se basa en la aplicabilidad del uso de la calculadora y que no se depende del rigor matemático, aunado al discurso planteado en la SA que se observó, no tenían mayor conflicto en cambiar de paradigma.
*E***:** *¿Cuál es la necesidad de considerar siempre sólo a los números positivos?*
H4: Se hace más fácil el manejo de los números… bueno de los logaritmos, que si fueran negativos…
M2: Para no tener ninguna dificultad al momento de hacer las operaciones.
M5: Que es más fácil responder problemas y graficar, muchas veces me he confundido al momento de usar números negativos y siento que usando números positivos la operación es más exacta y rápida.

Conclusiones

Con el rediseño de la situación de aprendizaje, se pudo explorar y desarrollar el pensamiento matemático en ingenieros e ingenieras en formación, por la diversidad y generación de argumentaciones sobre él $\log(-\mathrm{x})$; y que son equiparables a las que expresaban Leibniz, Bernoulli y Euler. Destacando al obstáculo epistemológico como intrínseco al saber matemático y necesario en la construcción del conocimiento. Así también, cabe mencionar la adaptabilidad de los OE en un campo de estudio distinto al de docentes matemáticos. Ahora bien, la articulación de las nociones para la superación de los OE tuvo un caso de respuesta positiva, delimitando teorías y reconociendo a $\log|x|$. En los otros casos se cree que el dME inhibe la reflexión sobre la función log|x|, clave para la superación, debido a su carente estudio en el sistema escolar. Los números complejos fueron considerados pues fue tendencia en los estudiantes la delimitaron teorías, explicando la contradicción generada del $\log(-1)$.

Los estudiantes de ingeniería aceptaron el reto de explorar la SA a diferencia de la población de Soto (1988), que no culminaron en su totalidad la SA. En ese sentido, el dME en los estudiantes de ingeniería tiene por objetivo emplear a las matemáticas como un fin, para la resolución de problemas; siendo evidente que facilitar cálculos para ellos, es prioritario; fenómeno que se ha denominado como *practicidad* matemática. Sin embargo, la ausencia de rigor matemático es un aporte para no reconocer a log|x|; cabe mencionar que en la población de Soto (1988), es tendencia observar que las argumentaciones contra el discurso argumentativo de la SA hacen alusión al log|x|.

Desde la Teoría Socioepistemológica, Cantoral y Farfán (2008), permite concluir y confirmar que un resultado en matemáticas no depende solo de la lógica matemática; depende también de interacciones sociales entre alumno-profesor-libro de texto, pues esta relación brinda la formación académica del estudiante dándole un marco de referencia, de modo que un tema no institucionalizado por el dME es visto con recelo e incertidumbre por los estudiantes.
Se confirma para el caso de los estudiantes de ingeniería que el dME al cual están inmersos, no advierte de la existencia de logaritmos de números negativos en otro campo de números (complejo).

Referencias bibliográficas

Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico: contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo*. Ciudad de México: Siglo XXI.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R. & Farfán, R. (2008). Socioepistemología de la contradicción. Un estudio sobre la noción de logaritmo de números negativos y el origen de la variable compleja. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama, A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Un Reporte Iberoamericano*, (pp. 243-284), México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.-Díaz de Santos.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de maestría no publicada. Centro de investigación y de estudios avanzados del IPN.

Gómez, B., Pardo, T y Pastor, C. (2003). *El caso de log (-1). XI Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas (XI JAEM)*. Consejería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias. Dirección General de Ordenación e Innovación Educativa, 765-771.

Kleiner, I (1988). Thinking the unthinkable: The story of complex number (with a moral). *Mathematics Teacher*, 81(7) 583–592.

Soto, M. (1988). *Una experiencia de redescubrimiento en el aula: acerca de los logaritmos de números negativos y los orígenes de la variable compleja*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

HACIA UNA PROBLEMATIZACIÓN DE LA PARÁBOLA EN SU CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA

Zuleyma Sarahí Pérez Moguel, Gisela Montiel Espinosa
Cinvestav-IPN. (México)
zuleyma.perez@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx

Resumen
Este trabajo de investigación plantea la problematización de la cónica parábola, a través del estudio de algunos procesos de construcción geométrica provenientes del corte de un cono, como envolvente de rectas tangentes y finalmente como lugar geométrico, en particular uno histórico, en la obra "Las Cónicas" de Apolonio, y algunos reportados en propuestas de innovación didáctica. La investigación se fundamenta en la teoría Socioepistemológica y hace uso de metodologías de análisis sociohistórico y documental, para el estudio de los procesos mencionados. Nuestro objetivo es caracterizar lo propio de la parábola como cónica que permita representarla y definirla como lugar geométrico, para ello identificamos los elementos y propiedades geométricas que permitan significar esta cónica

Palabras clave: parábola, construcción geométrica, cónica, elementos geométricos, propiedades geométricas

Abstract
This research work proposes a problematization of the conic curve parabola, by the study of some geometric construction processes from the cut made on a cone, as a wrap of the tangent straight lines and finally as a locus, in particular we use a historical one, from "the Conics" of Apollonius, and some of the ones reported on didactic innovation approaches. This research is based on the Socio-epistemological Theory of Mathematics Education and uses the methodologies of socio-historical analysis and document analysis for the study of the aforementioned processes. It seeks to characterize what is particular for the parabola as a conic curve that allows us to represent and define it as a locus, for that, we identify the elements and geometric properties that let us give significance to this conic curve.

Key words: parabola, geometric construction, conic, geometric elements, geometric proprieties

Introducción

Por experiencia y revisión de algunos planes y programas de estudios del Nivel Medio Superior (NMS) del Sistema Educativo Mexicano, se sabe que el estudio de las cónicas, abordadas en la asignatura de Geometría Analítica, continúa dando mayor énfasis a los dominios algebraicos sobre los geométricos, enfocando el aprendizaje de los estudiantes en la algoritmia y la memorización, donde los procesos algebraicos se sobreponen a las *construcciones geométricas* de dichos objetos matemáticos. Es común que para aprobar los cursos de Geometría Analítica baste que el estudiante maneje con dominio las expresiones algebraicas de las cónicas, acompañados con un *bosquejo* de la gráfica, sin embargo, su estatus en la actividad matemática es más ilustrativa; es decir, no constituye un contexto de interacción con la naturaleza geométrica de la cónica.

Es por ello, que hablamos de un significado limitado relativo a las cónicas, que puede provocar, por mencionar un ejemplo, que los estudiantes no evoquen su uso o encuentren al menos una relación de las cónicas con situaciones cotidianas. En ese sentido, se observa que es necesario equilibrar el trabajo algebraico con el geométrico en la interacción del estudiante con las cónicas, para permitirle no sólo relacionar ambos contextos, sino significar desde cada uno de ellos las características, propiedades y elementos que las conforman.

Esta problemática es identificada por otros investigadores y es el punto de partida para estudios de corte histórico (Contreras, Contreras y García, 2002) y cognitivo (Bartolini, 2005), o para iniciativas de innovación didáctica que integran actividades con materiales manipulables (Real, 2004) o ambientes de geometría dinámica. En estos identificamos la importancia y necesidad de estudiar la naturaleza propia de cada cónica, con el objetivo de entender a sus procesos de significación según el escenario donde se da su construcción geométrica. En particular, para nuestra investigación, hemos elegido a la parábola como la pieza de conocimiento matemático a estudiar, ya que incluso Apolonio de Perga, quien es el primero en escribir los estudios relacionados con cónicas, inicia con ésta y la toma como referencia para estudiar a las otras dos; y lo haremos desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) (Cantoral, 2013), para problematizarla y a partir de ello respondernos: ¿qué caracteriza a la parábola en términos de los usos y significados de sus elementos y/o propiedades, en un proceso de construcción geométrica?

Marco teórico

La TSME nos permite problematizar la matemática en juego y hablar de su aprendizaje en términos de conocimiento puesto en uso y desarrollo del pensamiento matemático.

De aquí que naturalmente nos cuestionemos sobre: ¿qué es la parábola?, ¿qué usos y significados de la parábola se identifican en las diversas construcciones geométricas reportadas?, ¿cómo los usos y significados en la construcción geométrica se expresan en su forma analítica?, ¿qué caracteriza al discurso matemático escolar relativo a la parábola?, ¿cómo los estudiantes interactúan con la parábola y le dan significado a sus elementos, propiedades y representaciones?, entre otras.

Para ayudarnos a respondernos esas preguntas, tomamos como base de esta investigación la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, en tanto asume que el saber se construye, reconstruye, significa y resignifica, y sitúa estos procesos en el tiempo y el espacio, los explora desde la óptica de quien aprende, de quien inventa, de quien lo usa; se posiciona a la opción constructiva en la perspectiva histórica, cultural e institucional para que, en definitiva, se lo rediseñe con fines didácticos. Esto es, el saber se problematiza: historiza y dialectiza, con intencionalidad (Cantoral, 2013, p. 97 y 98).

Cantoral asume la historización como "Dar carácter histórico [a algo]" y "tomar [algo] carácter histórico", y utiliza una idea de la historia que va más allá de lo cronológico factual, pues le interesa una historia crítica del desarrollo conceptual, es decir, una epistemología situada. Por lo que en este trabajo se retoma una traducción de la obra original "Las Cónicas" para el análisis de las primeras construcciones geométricas realizadas por Apolonio sobre la parábola, que nos permitirá historizar en el contexto en el que se encontraba el matemático griego, observar los avances que hasta ese momento de la historia existían sobre esta cónica, así como la evolución de los elementos geométricos y propiedades geométricas que permitieron su construcción.

Para complementar la problematización es necesaria la dialectización, que, a decir del autor, proviene de la Dialéctica como parte de la Filosofía y sirve, ante todo, para mostrar que [el algo] que se dialectiza reconoce la contradicción, no como mera errata o falla, sino que en su "sistema" la contradicción tiene un rol interno fundamental de confrontación (Cantoral, 2013, p. 53).

La problematización del saber se realiza desde el marco que configuran los principios de la teoría, a saber:

- la relación del sujeto al saber es una función del contexto (principio de la racionalidad contextualizada),
- la validez del conocimiento es relativo al escenario donde se construye (principio del relativismo epistemológico),
- los saberes se enriquecen cuando se ponen en funcionamiento en nuevas situaciones, se construyen nuevos significados (principio de la significación progresiva),
- en la base y organización de los procesos de construcción del conocimiento se identifican prácticas sociales, que a través de un modelo de anidación de prácticas explica empírica y teóricamente este proceso, desde el sujeto individual, el sujeto colectivo y el sujeto histórico (principio normativo de la práctica social).

Para explicitar la normativa de la práctica social, Cantoral propone un modelo (Figura 1) con el que explica la construcción de conocimiento basada en prácticas, transitando por los siguientes momentos: de la *acción* directa del sujeto ante el medio, a su organización como una *actividad humana* situada socioculturalmente, para perfilar una *práctica socialmente compartida*, que cae bajo la regulación de una o varias *prácticas de referencia* –la expresión material e ideológica de un paradigma– que a la vez son normadas por la *práctica social* (Cantoral, 2013).

Figura 1. Modelo de prácticas anidadas (Cantoral, Montiel, Reyes-Gasperini, 2015).

Sobre la base de sus principios, la TSME toma en cuenta la complejidad de la naturaleza del saber y su funcionamiento *social, epistemológico, cognitivo y didáctico*, en la vida de los seres humanos, mostrando los procesos de adaptabilidad, empíricamente comprobables, que permiten alcanzar algún grado de satisfacción en los actos del conocer (Cantoral, 2013). Si bien la teoría configura perspectivas sistémicas para analizar y explicar los fenómenos didácticos, por cuestiones de método, realiza estudios en cada una de las dimensiones, manteniendo siempre la centración en el *conocimiento puesto en uso*, a lo que reconocemos como *la naturaleza social de la matemática* o, dicho de forma sintética, *lo matemático*.

En este marco, el trabajo que aquí presentamos propone un estudio en la dimensión epistemológica, para llevar a cabo una historización, y en la dimensión didáctica, para llevar a cabo una dialectización; con el objetivo de elaborar una hipótesis epistemológica relativa a la construcción de significados geométricos de la cónica parábola y con ello ampliar la explicación a los fenómenos didácticos y explicitar las bases de comunicación del discurso Matemático Escolar. Para la historización, haremos un análisis de "*Las Cónicas"* de Apolonio, mientras que, para la dialectización, analizaremos algunas propuestas de innovación didáctica basadas en construcciones geométricas de la cónica parábola.

Consideraciones metodológicas

El estudio corresponde a una investigación cualitativa-interpretativa en el campo de la Matemática Educativa, en dos momentos: de historización y de dialectización.

Para el primer momento, se realizó un Análisis Cualitativo de Contenido, en sus fases *Contextual* y *Textual,* de la fuente secundaria *Las Cónicas*. El análisis contextual se orientó por la propuesta metodológica, para estudios socio-históricos, de Espinoza (2009); que, al reconocer una obra como *una producción con historia, un objeto de difusión y parte de una expresión intelectual global*; provee de elementos para la construcción social de la parábola desde la racionalidad contextualizada y el relativismo epistemológico.

Para el análisis textual, se estructuró una estrategia (sistema de reglas) en tres niveles: micro, meso y macro, a partir de la propuesta de Cruz-Márquez y Montiel (2017), antecedidos por un pre-análisis, como familiarización con la obra (Tabla 1).

PRE-ANÁLISIS

- Describir la obra.
- Clarificar elementos del lenguaje (verbal y matemático).
- Selección justificada de las unidades a analizar.

ANÁLISIS

Nivel Micro

- Identificar una estructura discursiva.
- Analizar desde los cuestionamientos: ¿qué hace?, ¿cómo hace?
- Identificar el objetivo de cada unidad analizada.

Nivel Meso

- Analizar cada unidad desde el cuestionamiento ¿para qué hace?, con el objetivo de reconocer la relación entre las unidades analizadas y estructurar bloques.
- Identificar el objetivo del bloque.

Nivel Macro

- Síntesis de los dos niveles anteriores.
- Articulación con el análisis contextual.

A continuación, se presenta parte del pre-análisis y parte del análisis a nivel micro de una unidad:

Tabla 1. *Sistema de reglas para el Análisis Cualitativo de Contenido, para Las Cónicas de Apolonio.*

PRE-ANÁLISIS
o Se seleccionaron los primeros tres libros del tratado de *Las Cónicas* de Apolonio, donde encontramos todas las proposiciones relacionadas con la parábola. Algunas de esas proposiciones son sobre definiciones, otras sobre propiedades geométricas y otras sobre formas de construcción. o Encontramos que parte del lenguaje utilizado por este matemático y los cuales define previamente, son conceptos como: cono, diámetro, vértice, eje del cono, sección cónica, tangentes, ordenadas, punto medio, entre otros.
ANÁLISIS
Nivel Micro

- En la proposición 11 del libro primero de *Las Cónicas* se enuncia la parábola como cónica. Para obtener ésta se parte un cono de manera que el ángulo del plano que corta al cono sea paralelo a uno de los lados del triángulo obtenido al cortar el cono por un plano que pase por el eje. Es decir, podemos mirar que el plano que corta al cono para obtener así la parábola debe ser paralelo a la generatriz de dicho cono.
- En general al realizar sus demostraciones, Apolonio parte de hipótesis en las que supone algunas situaciones como ciertas y toma elementos geométricos previamente definidos. Es decir, sus demostraciones carecen del rigor con el que actualmente las conocemos, más bien consistían en volver a la hipótesis planteada al principio para decir que la proposición era cierta.

Nivel Meso
- Estamos realizando esta parte del análisis.

Nivel Macro
- Estamos realizando esta parte del análisis.

En el nivel micro, los cuestionamientos analíticos *qué hace* y *cómo hace*, nos permiten identificar en los datos el nivel de *acción* del modelo de anidación de prácticas; mientras que, en el nivel meso, con el cuestionamiento analítico *para qué hace*, identificamos el nivel de *actividad*. En ese sentido, acciones y actividades, funcionan como código (deductivo) para el análisis de datos. Resulta relevante señalar que, en el nivel micro de análisis, incluso previo a responder los cuestionamientos analíticos, se llevan a cabo las actividades matemáticas en juego, es decir las construcciones geométricas; lo que resulta fundamental para identificar y recuperar los *usos* y *significados*, que se pierden o se transforman en los procesos de transposición didáctica del saber.

Para la dialectización, se realiza el análisis de las propuestas de innovación didáctica, para determinar las acciones y actividades, y así confrontar *usos* y *significados* con los encontrados en la historización.

Avance en el análisis de datos para la historización

La obra donde analizamos las construcciones de Apolonio, es: "Científicos Griegos", y contiene la traducción, de Francisco Vera, de los primeros siete libros de *Las Cónicas*.
Análisis Contextual

A partir de la metodología propuesta por Espinoza (2009), la fuente (Vera, 1970) vista como una traducción casi fiel de la obra "*La Cónicas*" de Apolonio, será entendida como una producción con historia ya que nuestro interés está en comprender los medios de significación utilizados en la obra por Apolonio, que permiten describir o definir a la parábola como una sección del corte de un cono por un plano con ciertas condiciones. Se observa una organización y redacción con tintes de Euclides, pues en realidad sus tiempos no distan mucho, asumiendo que Euclides vivió aproximadamente del año 330 a.C. al 275 a.C. y Apolonio del 262 a.C. al 180 a.C.

Las primeras menciones de las cónicas se remontan a Menecmo y a Aristeo el Viejo, es decir, al siglo IV a.C., de manera elemental, pues la Geometría del espacio no había llegado todavía al estatismo intelectual alcanzado ya por la plana. Si se empleaba el compás en ciertas construcciones, su movimiento no intervenía en ninguna demostración evidentemente cierta, sino solo en la curva descrita, considerada estáticamente, es decir, se apoyaban de las construcciones realizadas por el compás para visualizar la curva y a partir de lo que observaban demostrar sus hipótesis.

Apolonio fue quien le dio los respectivos nombres de “parábola”, “elipse” e “hipérbola” a cada una de las cónicas y el origen de estos nombres es de algunos verbos; el primero significa poner en paralelo y justifica su tesis por el hecho de que el eje de la parábola, es decir, la intersección del plano secante según el eje, es paralelo a un lado del triángulo; los otros dos verbos son sinónimos de exceder y faltar, y hace observar que la suma del ángulo cónico y el formado por el eje de la curva con la generatriz es en la hipérbola mayor que dos rectos y en la elipse es menor.

Por tanto, la obra *Las Cónicas* es una expresión de los trabajos del autor y de otros matemáticos que trabajaron con las cónicas, que sintetiza los pensamientos de los matemáticos y presenta una versión oficial de los resultados obtenidos además de una manera general, realizando los cortes y construcciones a partir de un cono oblicuo.

Análisis Textual

Además de realizar un análisis de las construcciones geométricas que realizó Apolonio, así como de las demostraciones de éstas, realizamos las reconstrucciones apoyados del software GeoGebra, ya que es un programa que permite abordar la geometría y otros aspectos de las matemáticas a través de la experimentación y manipulación de distintos elementos, facilitando la realización de construcciones para deducir resultados y propiedades a partir de la observación directa.
Para construir/obtener la parábola, Apolonio tuvo que enunciar primeramente ocho definiciones y diez proposiciones, a continuación, presentamos la proposición que enuncia la parábola:

> 11.Cortando un cono por un plano que pase por el eje y por otro que corte a la base según una perpendicular a la del triángulo según el eje, si el diámetro de la sección es paralelo a uno de los lados del triángulo, el cuadrado de toda recta trazada desde la sección del cono paralelamente a la intersección del plano secante y el de la base del cono hasta el diámetro de la sección, equivale al rectángulo formado por la recta que separa en el diámetro del lado del vértice de la sección y por una cierta recta cuya razón a la situada entre el ángulo cónico y el vértice de la sección es la misma que la del cuadrado de la base del triángulo según el eje al rectángulo formado por los otros dos lados del triángulo. Llamaremos parábola a tal sección.

El proceso de reconstrucción de las construcciones de Apolonio con el software GeoGebra nos permite hacer trazos exactos y con eso analizar a profundidad los elementos y propiedades que configuran la parábola, la siguiente imagen es parte de esta reconstrucción:

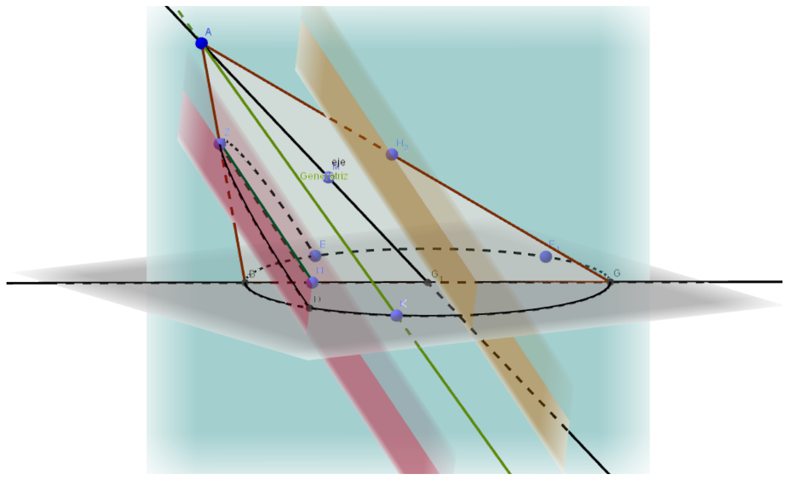


Figura 2. Reconstrucción de la parábola como corte de un cono.

Reflexiones finales

En este momento de la investigación, estamos realizando el análisis de los procesos de construcción geométrica que propone Apolonio para tener un punto de partida relativo al saber (historizar), y estamos encontrando elementos geométricos necesarios para la construcción de la parábola, tales como la semejanza de triángulos, el trazo de planos y rectas paralelas, el trazo del diámetro de las secciones generadas al cortar el cono, el trazo de rectas tangentes, entre otros. Posteriormente se analizaron las construcciones geométricas de las propuestas de innovación didáctica, es decir, dialectizamos, encontrando que algunos de los elementos geométricos que aparecieron en la historización permanecen aún en las construcciones de la parábola como lugar geométrico más actuales, por ejemplo, el diámetro que utilizó Apolonio que ahora se define como el eje de la parábola y permite observar la simetría contenida en ésta.

Consideramos que centrándonos en el aprendizaje del estudiante, iniciar con las construcciones geométricas de las cónicas podría contribuir a que adquiera realmente significados sobre éstas, para comprobar esta hipótesis, iniciamos con la cónica parábola.

Referencias bibliográficas

Bartolini, M. (2005). The meaning of conics: historical and didactical dimensions. En J. Kilpatric, C. Hoyles, O. Skovsmose y P. Valero (Eds.) *Meaning in Mathematics Education* (pp. 39-60). Italia:Springer.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepisgtemológica de la Matemática Educativa*. Barcelona: Editorial Gedisa, S.A.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática 8*, 9-28.

Contreras, A., Contreras, M., & García, M. (2002). Sobre Geometría sintética y analítica. La elipse y sus construcciones. *Relime* 5(2), 111-132.

Cruz-Marquez, G. y Montiel, G. (2017). Emergencia de las nociones trigonométricas en el Almagesto. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 30, 981-989.

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de maestría. Cinvestav. México, D.F.

Real, M. (2004). Las cónicas: método de aprendizaje constructivo. *SUMA* 46, 71-77.

Vera, F. (1970). *Científicos griegos*. Aguilar, S.A. Ediciones, Juan Bravo, 38, Madrid, España.

¿QUÉ CATEGORÍA DE MODELACIÓN REQUIERE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA?

María Esther Magali Méndez Guevara, José David Zaldívar Rojas, Francisco Cordero Osorio, Jaime Mena Lorca
Universidad Autónoma de Guerrero, Universidad Autónoma de Coahuila, Centro de Investigación y de Estudios Avanzandos del IPN, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (México, Chile)
memmendez@uagro.mx, david.zaldivar@uadec.edu.mx, fcordero@cinvestav.mx, jaime.mena@pucv.cl

Resumen
Se reportan las reflexiones generadas dentro del grupo de discusión sobre Modelación en RELME 31. Dicho grupo invita a la comunidad a reflexionar desde las experiencias de investigación, desarrollo y formación docente sobre el rol de la modelación en la matemática escolar. Desde sus inicios, el grupo de discusión ha impulsado el análisis de las distintas propuestas que se están desarrollando en nuestro continente sobre esta temática desde la Matemática Educativa. En este manuscrito se discuten dos propuestas relacionadas con la formación inicial del profesor de matemáticas y sobre el desarrollo profesional docente. En ambas propuestas se incluye una categoría de Modelación y algunos resultados de las reflexiones generadas dentro del grupo de discusión sobre dicha categoría. Se exponen los avances sobre ambas propuestas y cómo la categoría de modelación se integra.

Palabras clave: modelación, categoría, matemática educativa

Abstract
This paper reports some of the reflections generated within the discussion group on Modeling in the 31st RELME. This group encourages the community to reflect from experiences of research, development and teachers' training on the role of modeling in school mathematics. From its beginnings, the discussion group has promoted the analysis of different proposals developed in our continent on this subject from a Mathematics Education's perspective. In this paper, we discuss two proposals related to the initial training of the teacher of mathematics and the teaching professional development. Both proposals include a category of Modeling and some results of the reflections generated within the discussion group with respect to that category. We present some of the results generated in both proposals and how the category of modeling is integrated.

Key words: modeling, category, mathematics education

Introducción

La modelación en la educación matemática no es un tema nuevo ni acabado, más bien podríamos decir que es una línea de investigación que está en pleno auge. Independientemente de la perspectiva teórica que sustente a la modelación se concibe a esta parte esencial de la construcción, difusión y aceptación del conocimiento científico. Además, se reconoce que ella otorga una justificación funcional, y provoca la construcción de herramientas como elementos esenciales de la situación que atiende, para representar lo que estudia con determinados fines, de manera que pueda ser comunicado (Koponen, 2007).

En la disciplina, las posturas sobre modelación se diferencian entre sí con base a los paradigmas y marcos teóricos desde donde se desarrolla (Lingefjärd, 2011; Kaiser & Sriraman, 2006; Trigueros, 2009), evidenciando así posibilidades para investigar y analizar aspectos relacionados a la enseñanza. Por ejemplo, algunas investigaciones consideran que actividades basadas en la Modelación son un vehículo para la construcción de conceptos matemáticos, mientras que otras la consideran como la aplicación de las matemáticas, y es útil para construir modelos matemáticos. Ahora bien, estas posturas han hecho eco en nuestra comunidad Latinoamericana, por esto es pertinente reflexionar sobre la funcionalidad de éstas, las adaptaciones requeridas en cada uno de nuestros escenarios, o bien las posturas que nuestra comunidad ha formulado.

Una tendencia sobre los estudios de la modelación es sobre la formación del profesor, porque tal como mencionan Guerrero y Mena (2015) independiente de las posturas acerca de la modelación en el desarrollo de actividades en el aula, es necesaria la triada profesor-alumno-tarea, donde indiscutiblemente el profesor de matemáticas tiene un gran peso, cumpliendo el rol de modelador y participando en la confección y/o selección de las tareas).

En dicha reflexión es importante indagar sobre: ¿Cuál es el constructo de modelación que la matemática educativa debe promover en la formación del profesor de matemáticas: la modelación matemática o la modelación escolar?, ¿Cómo promoverlo? Así, se invita a la comunidad a conocer las investigaciones que se han realizado compartiendo resultados, mostrando los avances de investigaciones actuales e invitando a ser parte de las futuras investigaciones que se vislumbran.

Este escrito muestra dos ejemplos de usos y reflexión sobre la profesionalización docente de una postura de modelación basada en premisas de la Teoría Socioepistemológica. La postura de modelación a la que nos referimos profesa a las prácticas sociales como la base del conocimiento, en la medida en que son el sustento y la orientación para llevar a cabo una construcción social del conocimiento matemático (Cantoral, 2013). En esta hemos formulado categorías de modelación para incluirlas en la matemática escolar (Suárez & Cordero, 2010; Méndez, 2013), las cuales funcionan como ejes que provocan en un colectivo la organización y articulación de saberes matemáticos.

■ Ejemplos de usos de categorías de modelación en la práctica profesional del docente de Matemáticas

Esta sección mostrará grosso modo la gestación de proyectos actuales sobre la inclusión de categorías de modelación en la profesionalización del docente, las hipótesis, objetivos y potencialidades que se vislumbran.

Ejemplo 1. La Inclusión de prácticas de modelación e investigación en la formación Inicial de profesores de matemáticas

En este proyecto la hipótesis es que al vincular las prácticas de modelación e investigación se genera un ambiente que permite a los futuros profesores reconocerse miembros de una comunidad científica, matemáticos educativos, cuya función social es proveer de escenarios para la construcción y desarrollo de conocimientos (Méndez, 2016), esto promueve el desarrollo profesional del docente desde su formación inicial. Este proyecto permitirá explicitar el funcionamiento de las categorías de modelación a este nivel, además de reconocer formas de inclusión y su posible impacto en la formación inicial de profesores de matemáticas.

En particular la categoría, modelación escolar, que guía este proyecto (Méndez, 2013; Méndez & Cordero, 2014) exhibe los elementos indispensables en el proceso de modelación y sostiene que su articulación promueve la construcción y desarrollo de saberes matemáticos. Los elementos son: 1. *La experimentación* o experiencia evocada; de donde se obtienen y tienen sentido los datos a estudiar. 2. *El estudio de las variaciones locales y globales* expresadas en gráficas o tablas numéricas. 3. *La descripción, análisis y ajuste de comportamientos* que transforman los datos en modelos matemáticos para predecir a corto o largo plazo.

Con los elementos de la categoría se elaboraron diseños de situación de aprendizaje que permitieron la resignificación y articulación de usos de conocimiento matemático para el tratamiento de nociones como la integral definida (Tocto & Méndez, 2015) o la función a trozos (Zúñiga & Méndez, 2016), estos diseños son los instrumentos principales para el proceso de inclusión de prácticas, pues será su aplicación, análisis, rediseño y comunicación basado en lo vivenciado lo que permita a los futuros profesores sentirse parte de una comunidad científica.

Aunado a lo anterior se vivenciaron prácticas de investigación, con esto nos referimos al conjunto de acciones de carácter intelectual y experimental requerido para el estudio de la construcción de conocimiento matemático, por ejemplo: la búsqueda de datos previos al tema, reportes de investigación, análisis didácticos y epistemológicos sobre el tema, la organización y depuración de los datos para sustentar un diseño de aprendizaje, la comprensión y uso de una metodología que le permita explicitar el proceso de diseño.

Así el proyecto acercó las prácticas de modelación e investigación científica al futuro profesor de matemáticas, haciéndolo copartícipe en la construcción de sus conocimientos y la formulación de instrumentos para la enseñanza de las matemáticas. Se incentivó a la movilización de conocimientos sobre: la matemática, el empleo de la tecnología, métodos de enseñanza, conocimiento sobre el currículo, que de acuerdo con la literatura (Villegas, 2003; Sosa, Medrano & Carrillo, 2015) son algunos de los conocimientos a fomentar en el profesor. Se hace hincapié en que la investigación más que medio de reflexión y mejora de la docencia, es una vía para reconocerse miembro de una comunidad.

El escenario de desarrollo del proyecto conjugó tres unidades de aprendizaje: Desarrollo del Pensamiento Matemático, Matemática Escolar e Iniciación a la Investigación, cursadas por 12 estudiantes de séptimo semestre de la licenciatura en matemáticas con especialidad en Matemática Educativa. El esquema de la figura 1 muestra las etapas y actividades del proyecto, grosso modo diremos que como resultado de este proyecto hoy tenemos a jóvenes que están por finalizar trabajo de titulación y que están motivados para estudiar un posgrado, se están escribiendo reportes sobre los resultados más puntuales del proyecto para ser propuestos como artículos.

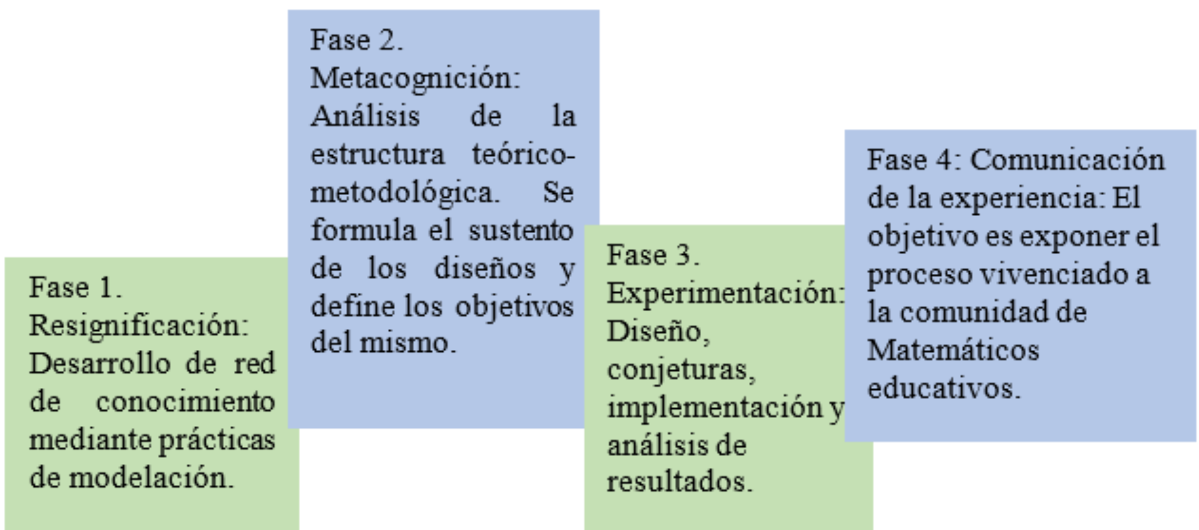


Figura 1. Fases del proyecto de inclusión de prácticas en la formación inicial del docente de matemáticas

Ejemplo 2. El Curso IDEAR: un ejemplo de propuesta de Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas

En los siguientes apartados se mostrará un ejemplo de un curso de desarrollo profesional docente centrado en el nivel Secundaria donde se incorpora la práctica de modelación a través del diseño de situaciones de aprendizaje por parte de los profesores. Durante el curso se implementaron situaciones de aprendizaje basadas en la modelación donde se discutían aspectos de transversalidad del conocimiento matemático al relacionar a las matemáticas con una situación real donde se reflexiona sobre una noción matemática en particular, pero desde su uso. La intención era hacer ver que la matemática es una herramienta que permite tomar decisiones y provocar reflexiones significativas en los estudiantes con la intención de desarrollar el pensamiento matemático.

La propuesta de curso que se describe a continuación toma como punto de partida al profesor, y se considera a éste como un profesional con necesidades y potencialidades, que los cursos deben descubrir, desarrollar, hacer evolucionar y ayudar a desarrollar. Lo anterior significa que no se parte de una idea del "déficit" para elaborar un curso para el profesorado, es decir, no se parte de lo disciplinar (transmisión de conocimientos) para organizar aquello que "no tiene" el docente y que "debería tener"; sino más bien, prestamos más atención a la *realización del profesorado,* es decir, interpretar al profesorado como un todo donde se conjuga lo cognitivo, lo afectivo y las relaciones, es en síntesis, una integración de la teoría y la práctica.

Pretendemos que el profesor de matemáticas sea el *sujeto del desarrollo profesional.* De manera que el curso aspira a convertirse en un momento crucial para el desarrollo profesional que les permita encarar su práctica desde otro punto de vista, viéndola desde una postura problemática y merecedora de reflexión e implicación personal (Da Ponte, 2012).

La intención principal del curso fue la de promover oportunidades de desarrollo profesional al profesorado de matemáticas de nivel Secundaria. Durante el curso se cuestionó la práctica profesional del profesorado de matemáticas a partir de: 1) la reflexión sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje, 2) la problematización del conocimiento matemático (confrontación del dominio de conocimiento matemático al resolver, diseñar, implementar y evaluar situaciones-problema o *Situaciones de Aprendizaje (SA),* 3) de diversas herramientas didácticas que permitan al profesorado desarrollar sus propios ambientes de aprendizaje tomando en consideración su contexto social y entorno escolar (empleo de la tecnología), 4) la observación de situaciones de práctica profesional, 5) la reflexión sobre la práctica en relación con el estudio de literatura especializada y el apoyo mutuo de una comunidad de pares.

Una Situación de Aprendizaje basada en la modelación desde el curso es el medio bajo el cual se pretende *hacer funcional el conocimiento matemático,* es decir, que el conocimiento tenga un valor de uso y que además ésta provoque argumentos sobre el mismo a partir de la observación, la medición, la recolección de datos, la identificación y el control de variables, la experimentación y el uso de representaciones matemáticas; es decir, actividades que permitan el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. Para ello se basa en la articulación intencional y en secuencia de una serie de tareas que partan en la medida de lo posible, del contexto de los estudiantes. El fin de una SA será resignificar a los objetos matemáticos en discusión a partir *del uso.*

Se postula que incluir a la práctica de Modelación en los cursos de formación continua, mediante la vivencia de situaciones problemáticas y un acompañamiento adecuado al profesor, brindará a este otros marcos de referencia donde la matemática adquiera significados, usos y sentido; además le ofrecería un espacio donde compartir sus experiencias con sus pares, posibilitando el aumento en su capacidad de reflexión crítica sobre su práctica. De esta manera el profesor se considera un agente de transformación en el rediseño del discurso Matemático Escolar (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015) y se incorpora a una dinámica de reflexión sobre su práctica a través de acciones específicas.

En este proyecto involucró al profesor en una comunidad de pares, provisto de un espacio de reflexión, diálogo y acompañamiento, bajo una metodología de tipo colaborativa que denominamos *IDEAR: inmersión-diseño-experiencia-acción-rediseño,* que constituyen las fases por las que el profesor participó a lo largo del Curso.

Se articularon tres elementos principales para el desarrollo profesional del profesorado: la *colaboración, la práctica profesional como punto de partida del desarrollo y la investigación sobre la práctica* como elemento que permite la construcción de conocimiento (Da Ponte, 2012).

El curso IDEAR consideró de entrada que la modelación es algo mucho más robusto que *aplicar la matemática* o *matematizar la realidad;* puesto que se considera una práctica que permitiría *argumentar sobre la situación en cuestión a través del uso del conocimiento* (Cordero, 2006). Esta práctica permite el desarrollo del pensamiento matemático *problematizando* los contenidos escolares y lo hace a través de diseños didácticos promueve la aparición de diversas formas de interacción en el aula, además de la diversificación de argumentación matemática y privilegia la vida de quien aprende, sus contextos y realidades, adquiriendo así un estatus *funcional* de la matemática (Cantoral, et al., 2015; Cordero, 2008).

A manera de conclusión

Es importante mencionar que los estudios acerca de *Modelación Matemática*, sus implicaciones en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y su incidencia en la formación de profesores, en nuestro parecer, van a dar elementos para generar medios de vinculación entre la escuela y su entorno, toda vez que se entiendan las relaciones entre la "realidad" y la "matemática escolar", y se harán tácitos en la instrumentos didácticos innovadores y plausibles para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Además, las investigaciones acerca del profesor, van a dar elementos para la formación matemática, y didáctica del profesor.

Es necesario mencionar las categorías de modelación aunque pudieran jugar un rol importante en las aulas de clases es muy complejo encontrar *actividades de modelación genuinas* dentro del salón de clases de matemáticas (Niss, Blum, & Galbraith, 2007), entonces, será importante caracterizar estas actividades en nuestro contexto latinoamericano.

En lo general el impacto de las investigaciones acerca de la modelación matemática en nuestras realidades académicas latinoamericanas requerirá de investigación en grupos que no necesariamente tengan la misma mirada teórica pero sí se interesen por explicitar las potencialidades de la modelación en la formación de profesores, la construcción del conocimiento matemático, el currículo escolar, y los profesores en servicio, y sobre todo la forma de cómo incluirlas en sus prácticas docentes.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: Estudios sobre construcción social de conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Cantoral, R.; Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa Socioepistemológico de Investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18*(1),5-17.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *La Matematica e la sua Didattica, 20*(1), 59-79.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama & A. Romo (Ed.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 285-309). México, D. F.: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Da Ponte, J. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En Planas, N. (Coord.), *Teoría, Crítica y Práctica de la Educación Matemática.* p. 83-98. Barcelona, España: Editorial GRAÓ.

Guerrero, C. & Mena, J. (2015). Modelación en la enseñanza de las matemáticas: Matemáticos y profesores de matemáticas, sus estrategias. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 10(1) ,1-13.

Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(3), 302–310.

Koponen, I. (2007). Models and modelling in physics education: a critical re- analysis of philosophical underpinnings and suggestions for revision. *Science & education, 16*, 751-773Méndez, M. (2016). Explorando la formación inicial. Reflexión sobre el diseño y aplicación de una situación de modelación. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 29, (pp. 1114-1121). México, CDMX: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A.C.

Lingefjärd, T. (2011). Modelling from primary to upper secondary school: finding of empirical research. In G. Kaiser, R. Borromeo, W. Blum & G. Stillman (eds.) *Trends In Teaching And Learning Of Mathematical Modelling*, (pp. 9-14). New York: Springer.

Méndez, M & Cordero, F. (2014). La modelación. Un eje para la red de desarrollo de usos. En P. Lestón, (ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 27* (pp. 1603-1610). México, D. F: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Méndez, M. (2013). *Desarrollo de red de usos del conocimiento matemático: La modelación para la matemática escolar*. (Tesis de doctorado no publicada). Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Meyer, J., Caldeira, A. & Malheiro, A. (2011). *Modelagem em educação matemática*. Brasil: Autêntica editora LTDA-coleção tendências em educação matemática.

Niss, M., Blum, W. & Galbraith, P. (2007). Part 1. Introduction. En W. Blum, P. Galbraith, H-W. Henn, M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education*. (3-32). New York: Springer.

Sosa, L., Medrano, E. & Carrillo, J. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), 173-189.

Suárez, L. & Cordero, F. (2010). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio sociepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4-II), 319-333.

Tocto, M. & Méndez, M. (2015). Modelación y la emergencia de la integral. En F. Rodríguez & R. Rodríguez (Eds.) *Memoria de la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa. La profesionalización Docente desde los Posgrados de Calidad en Matemática Educativa* (pp. 226-231). México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa, 9*(46), pp. 75-87.

Villegas, E. (2003).*Teacher professional development: an international review of literature*. International Institute for Educational Planning/UNESCO. ISBN: 92-803-1228-6.

Zúñiga, K. & Méndez, M. (2016). El uso de las gráficas por estudiantes de bachillerato. El llenado de recipientes. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 1*(1), 408-415.

LA NOCIÓN DE ACUMULACIÓN COMO RESIGNIFICACIÓN DEL CÁLCULO INTEGRAL. APRENDIZAJE DE SIGNIFICADOS Y LA MATEMÁTICA FUNCIONAL

Cristina Isabel Mota Santos, Francisco Cordero Osorio

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)

cristina.mota@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx

Resumen

Se muestran los avances de una investigación cuyo objetivo principal es el diseño de situaciones de aprendizaje para resignificar el Cálculo integral, a través de la noción de acumulación como una base epistemológica que expresa la funcionalidad del conocimiento matemático en escenarios de la escuela, de otros dominios de conocimiento y de la gente. Se revelan y valoran los usos del conocimiento matemático en una modelación matemática de una situación real de plagas en cultivos para realizar una transversalidad de saberes matemáticos en el nivel superior y en el nivel medio superior.

Palabras clave: acumulación, marco de referencia, resignificación

Abstract

This paper shows a preview of a research focused on the design of learning situations to provide a new approach to integral calculus, through the notion of accumulation as an epistemological basis that expresses the functionality of mathematical knowledge in school scenarios, through other domains of knowledge and people. The uses of mathematical knowledge are revealed and valued in a mathematical modeling of a real situation of crop plagues in order to use mathematical knowledge transversely, at the higher and high-middle levels.

Key words: accumulation, frame of reference, re-signification

Introducción

Una problemática en la educación matemática es que la matemática escolar ha perdido el eslabón con el cotidiano de las realidades. En ese sentido estamos de acuerdo con Cordero cuando afirma que:

> La educación tiene como fin que los ciudadanos se acerquen a su realidad para entenderla y transformarla, en nuestro caso, la matemática escolar debe estar vinculada con la realidad del que aprende, pero desafortunadamente esta relación no se cumple. Hablar de realidad es muy amplio por lo cual para poder tener un impacto en la educación se tendrá que restringir para poder estandarizarla, en el caso de la matemática se deberán considerar todos los niveles educativos y la diversidad de disciplinas, así como el trabajo y la ciudad. Tal vez, la realidad debería ser interpretada en lo habitual de todos estos escenarios, donde se expresan usos rutinarios del conocimiento matemático: lo

> funcional. Es decir, cotidianos del disciplinario, del trabajador y del ciudadano. (Cordero, 2016a, pp 59-88)

Revelar los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones en los distintos escenarios del cotidiano es un trabajo enmarcado en un Programa Socioepistemológico cuya tesis se basa en el sujeto olvidado, a través de dos líneas de trabajo simultáneamente: la Resignificación del Conocimiento Matemático y su Impacto Educativo (Cordero, 2016b). Estos usos y resignificaciones, en sus situaciones específicas, conformarán categorías de conocimiento las cuales serán la base de los nuevos Marcos de Referencia para la matemática escolar, considerando al conocimiento matemático como funcional y transversal en los distintos niveles educativos.

En ese sentido, se ha visto que la enseñanza del Cálculo Integral esta normado por un discurso Matemático Escolar (dME) el cual ve al conocimiento matemático como algo ya acabado y utilitario. Este conocimiento matemático suele aprenderse de manera mecánica, mediante la memorización de conceptos y algoritmos, y no permite un aprendizaje significativo, ni mucho menos funcional.

En trabajos como los de Artigue (2003) se muestra como las primeras investigaciones realizadas en niveles universitarios comienzan sobre el conocimiento de los alumnos en áreas específicas de las Matemáticas, con énfasis particular en el Análisis elemental (o Cálculo, en la cultura anglosajona), un área percibida como fuente principal del fracaso en el nivel universitario. Estas investigaciones se enfocaban al dominio que los alumnos tenían en cálculos meramente algebraicos (cálculo de derivadas y primitivas), memorización de definiciones, criterios de comprobación, razonamiento lógico y demostraciones, y uso eficiente de sus recursos matemáticos. Haciendo notar las dificultades de la enseñanza y aprendizaje del cálculo, como el dejar la responsabilidad de la reorganización del conocimiento a los alumnos, con efectos dramáticos para la mayoría de éstos, especialmente en la transición Secundaria (medio superior) - Universidad.

El dME provoca fenómenos como la opacidad, la adherencia y la exclusión, pues no considera el conocimiento de la gente (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015). Todo esto debido a que la Matemática Escolar carece de Marcos de Referencia (MR) en los cuales la fuente de sentido del conocimiento sean sus usos en situaciones específicas, reflejando así la existencia de una epistemología dominante cuya base de sentido es la justificación razonada, es decir, lo estructural y sistemático (Cordero, 2016a). Por lo general en el Cálculo, los conceptos fundamentales son señalados por la derivación e integración, explicándolos a través de las concepciones del límite y de función, y acompañados de sus representaciones geométricas: la recta tangente a una curva y el área bajo una curva, respectivamente. Profesores y estudiantes "aprenden" a decir que es la derivada e integral sin tener una explicación clara de porqué es así (Cordero, 2003).

Por tal razón, en nuestro trabajo queremos dar cuenta de la Categoría de Acumulación y de la transversalidad de conocimiento en el nivel superior y en el nivel medio superior. Para ello se está diseñando una situación escolar de socialización para resignificar el Cálculo integral a través de la noción de acumulación como una base epistemológica que expresa la funcionalidad del conocimiento matemático en escenarios de la escuela, de otros dominios de conocimiento y de la gente. Se revelan y valoran los usos del conocimiento matemático en situaciones específicas, esto nos permite descentralizar la atención en el objeto matemático y ver así lo funcional del conocimiento.

Un nuevo marco de referencia

La centralización en el objeto matemático que surge en la matemática escolar es producto de la falta de Marcos de Referencia. Por una parte, se concibe a la integral de Riemann como el núcleo de desarrollo del Cálculo integral y por otra parte la expresión $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ representa lo que hoy se conoce como teorema fundamental del Cálculo: dada una definición de "integral de una función", f debe de cumplir ciertas condiciones para que la expresión tenga sentido y resulte que "la función F sea la primitiva de f". Sin embargo, la expresión ha pasado por diferentes acepciones que han dependido de la evolución de integración (Cordero, 2003).

Se analizan las obras de "Oeuvres Complètes de Cauchy" (1882), "Oeuvres Complètes de Riemann" (1898), "Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives" de Lebesgue (1922) y las interpretaciones de los trabajos de Luzin (Pesin, 1970) y Denjoy (Lebesgue, 1966) en las cuales se reconoce que el papel que jugó la expresión $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ es el de construir una función a partir de su derivada, siendo este el problema fundamental de la teoría de integración, Cordero(2003).

Al analizar el conocimiento que se ofrece y adquiere a través de la didáctica junto con el conocimiento que se deriva de la producción científica, se reconoció a la resta, es decir,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

Como el patrón de construcción de la teoría de integración (Cordero, 2003).

Una hipótesis de nuestro trabajo es que la articulación entre lo institucional y lo funcional ayudara a romper la centración en el objeto. Las nuevas argumentaciones corresponderán a las resignificaciones de los usos del conocimiento matemático, las cuales tensarán las orientaciones clásicas de resolución de problemas en contra parte de una orientación innovadora, la modelización. La primera se ha preocupado por los procesos del conocimiento, la segunda llama la atención sobre la funcionalidad del conocimiento (Cordero, 2016b).

Para ello el marco de referencia (MR) que se propone está enfocado a lo que pudiera ser el conocimiento institucional cuya base es la manifestación de sus usos en el discurso matemático escolar U(CM), en otros dominios y en el cotidiano, donde se resignifican (Res) al debatir entre sus funcionamientos (Fu) y sus formas (Fo) al paso de la vivencia escolar, del trabajo y de la ciudad. En ese sentido lo institucional será aquello que hace que la categoría de conocimiento matemático ζ(CM) se desarrolle y permanezca, se acepte como producto material social que tenemos que enseñar y aprender (Cordero, 2016a). (Ver Figura 1).

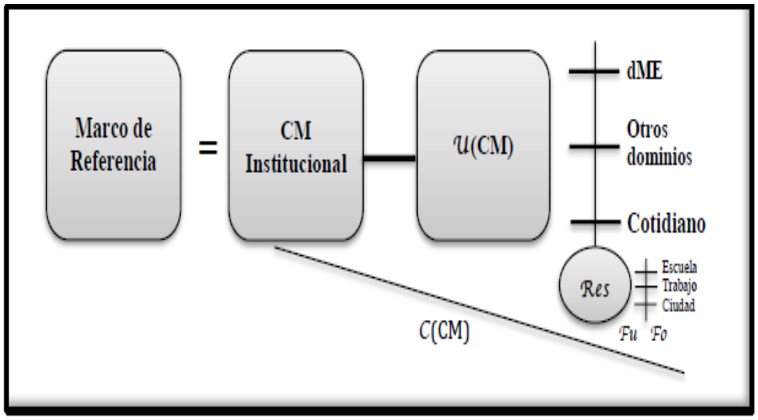


Figura 1. Procesos de socialización del conocimiento. El cotidiano y lo funcional (Cordero, 2016a)

Entonces, queremos la construcción de un Marco de Referencia que resignifique al Cálculo Integral mediante la noción de acumulación. La expresión $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ concebida como el patrón de construcción de la teoría de integración adquiere significado en el marco de las situaciones de variación y cambio, favorecida por el contexto de *cantidades que fluyen.*

La manera como decidimos concebir a los patrones de construcción en este trabajo es que el patrón, de algún modo, representa una idea que prevalece independientemente del contexto de la situación y será considerado en la construcción, cuando el grupo humano logra desarrollar el uso de su conocimiento (Cordero, 2005, p. 271).

Se logró matizar que los problemas cuya solución exige de una integración son los problemas específicos que se derivan de los fenómenos de variación o cambio, los cuales no se refieren a las *causas* del fenómeno de variación (por qué varían), sino al *cuánto varían* una vez que se reconoce *cómo varía* el fenómeno. Es decir, se plantean preguntas acerca de la ley que cuantifica (cantidad desconocida $F(t)$ que relaciona funcionalmente a las variables involucradas) al fenómeno de variación o cambio. La configuración de esta ley depende de si son dadas, o no, las condiciones iniciales del problema específico (Cordero, Muñoz y Solís, 2002).

Pero es en el marco del estado de las situaciones de cambio y variación donde Cordero (2003) encuentra que la resta $F(b) - F(a)$ otorga una significación de la integral ligado al contexto de cantidades que fluyen. Dicha resta es la representación de "la noción de acumulación en dos categorías: estática, en tanto que es "algo que se concentra" y se expresa como "$E_f - E_0 = A$" y dinámica en tanto que es "algo que se está agregando a una cantidad" y se expresa como "$E_f = E_0 + A$".

La intervención en la problemática consistirá en crear instrumentos de recuperación que pongan en diálogo horizontal la matemática escolar y la matemática del cotidiano. La primera es la institucionalización de la matemática y la segunda es la funcionalidad de la matemática. Se distinguirán los ámbitos y definirán cotidianos con adjetivo. Estos serán los instrumentos de recuperación (Cordero, 2016b).
Se atenderá a la problemática anteriormente planteada mediante la inclusión de nuevos significados asociados a la integral. La estructura del trabajo se presenta de la siguiente manera.

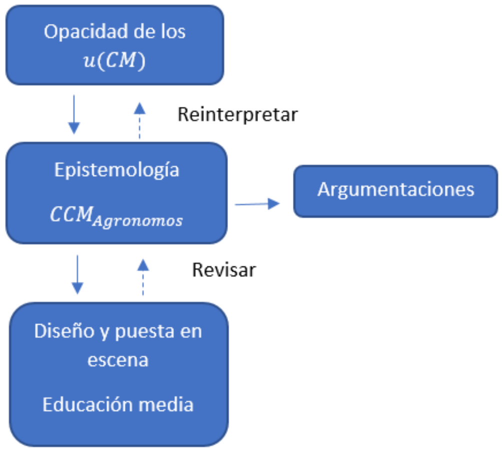


Figura 2. Esquema del proyecto de investigación

Se atenderá al fenómeno de opacidad de los usos del conocimiento matemático mediante la incorporación de una epistemología de la integral revelada en nuestro caso de una comunidad de agrónomos, la cual será la base para nuestro diseño de una situación escolar de socialización. Dicha epistemología permitirá formular nuevas argumentaciones en la cual la fuente de sentido de la integral sea la noción de acumulación.
Cordero (2016a) señala que:

> Socialmente hablando, el tipo de explicación, filosófica y epistemológica, que se acepte sobre la construcción del conocimiento repercute directamente en las maneras de organizar el sistema educativo, seleccionar modelos de enseñanza, diseñar el currículo escolar, formular episodios de aprendizaje, e inclusive, definir el "conocimiento" en el aula. De este modo, un enfoque que concibe al conocimiento construyéndose a la par de la experiencia del humano permite entender que el conocimiento se construye cuando es utilizado; cuando tiene una función específica situacional. (p.12)

Trastocar la epistemología dominante de la matemática escolar; tiene que abrirse a la pluralidad epistemológica que obliga la inclusión del "sujeto olvidado". Este sujeto usa su conocimiento matemático en formas y funciones distintas que la escuela, hasta hoy, no ha podido imaginarse. Por eso decimos que esa constitución derivará en una escuela ampliada donde el uso del conocimiento matemático dialogará horizontalmente entre el descubrimiento académico y la revelación del conocimiento nativo de la gente. Este último, en términos genéricos, es el sujeto que aprende, el que trabaja y el que vive en una ciudad; sin embargo, está fuera de la escuela (Cordero, 2016b).

Reflexión: Epistemología para el diseño de la situación escolar de socialización

Con el fin de estudiar cómo emerge la noción de acumulación en una situación de uso del conocimiento matemático, relacionada con la comunidad agrónoma, estudiamos el ciclo de vida del ácaro llamado Brevipalpus Chilensis (B. Chilensis), el cual es una plaga que representa un problema económico en vid de mesa y vinífera, kiwi y cítricos de Chile. Cuando atacan a los brotes, hojas y sarmientos de la planta, afecta seriamente la capacidad fotosintética de ella, llegando a disminuir hasta en un 40% su rendimiento (Vargas & Olivares, 2007). El crecimiento y desarrollo fenológico del B. Chilensis se mide en términos de grados – días, los cuales son una unidad combinada de tiempo y temperatura, utilizada para medir el desarrollo o progreso de un organismo desde un punto a otro en su ciclo de vida (Huincahue, 2011).

Se reconoce que el manejo sustentable de las plagas debe estar basado en el conocimiento biológico de ellas y de su interacción con el cultivo. Con base a esto, Huincahue (2011), en una actividad de modelación matemática, propuso una manera de calcular la constante térmica del B. Chilensis, entendida como el número de grados – días que han de ser acumulados para que ocurra un evento determinado (eclosión, mudas larvarias o ninfales, pupación, etc) y que permite contribuir al conocimiento biológico de este ácaro. En este cálculo, analizamos cómo emerge la noción de acumulación, en una situación de cambio y variación ligada al cálculo de la acumulación de grados – días del B. Chilensis, buscando ofrecer, a futuro, un marco de referencia para hacer del concepto de integral un conocimiento funcional, caracterizado por una categoría de acumulación.

Un aspecto muy importante para la elaboración del diseño es que la discusión de integración debe iniciar precisamente con la cantidad “desconocida” (función primitiva) que se quiere hallar, al exigir de ésta reconocer su variación (función derivada) en un contexto, para finalmente conocer su integral (cantidad desconocida) (Cordero, 2005). Este aspecto también es señalado en trabajos como los de Muñoz (2000 y 2003) en los cuales busca las condiciones que puedan propiciar la relación de lo algorítmico y conceptual pero vista como unidad dialéctica. Dicha condición es trabajar con problemas específicos que exijan o requiera de una integración para hallar la solución.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2003). ¿Qué Se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario?. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 117-134.

Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del Cálculo Integral. La noción de acumulación como una argumentación.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8(3)*, 265-286.

Cordero, F. (2016a). Modelación, funcionalidad y multidisciplinareidad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz (Eds.). *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa* (pp. 59-88). Barcelona: Gedisa.

Cordero, F. (2016b). La función social del docente de matemáticas: pluralidad, transversalidad y reciprocidad. En S. Estrella, M. Goizueta, Guerrero, A. Mena, J. Mena, E. Montoya, A. Morales, M. Parraguez, E. Ramos, P. Vásquez, y D. Zakaryan (Eds). *XX Actas Jornadas Nacionales de Educación Matemática (23-30)*, ISSN 0719-8159. Valparaíso, Chile: SOCHIEM, IMA-PUCV. Recuperado de http://ima.ucv.cl/xxjnem.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci H. y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Barcelona: Gedisa.

Cordero, F., Muñoz, G. y Solís, M. (2002). *La Integral y la Noción de Variación.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Huincahue, J. (2011). *Dinámica de Modelos de Depredación Continuos e Impulsivos y Estudio Fenológico del Brevipalpus Chilensis*. Tesis de Magíster no publicado, Pontificia Universidad Católica De Valparaíso.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3(2)*, 131-170.

Muñoz, G. (2003). Génesis didáctica del Cálculo Integral: el caso de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico. En J. Delgado Rubí (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16(2),* 415-421. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

MODELACIÓN ESCOLAR: ANÁLISIS DE LAS VARIACIONES EN GRÁFICAS

María Esther Magali Méndez Guevara, Marcela Ferrari Escolá, Manuel Trejo Martínez
UAGro. Facultad de Matemáticas. (México)
memmendez@uagro.mx, mferrari@uagro.mx, mmartinez@uagro.mx

Resumen
Reportamos elementos trabajados en dos sesiones del taller, la primera centrada en la manipulación de parámetros usando calculadoras para caracterizar funciones polinómicas; la segunda, en el estudio del signo de cada derivada en x=0 en gráficas de familias de funciones para relacionarlos con el número de raíces reales positivas. Los diseños se sustentan en la categoría de modelación escolar, constructo socioepistemológico que provee de un marco de referencia que explicita elementos esenciales como la experimentación o experiencia, el estudio de variación local y global, y el ajuste y tendencia de comportamientos de variación.

Palabras clave: modelación, tecnología, funciones polinómicas

Abstract
We report elements worked in two sessions of the workshop, the first one is focused on the manipulation of parameters using calculators to characterize polynomial functions; the second one, is focused on the study of the sign of each derivative at x = 0 in graphs of families of functions to relate them to the number of positive real roots. The designs are based on the category of school modeling; a socio-epistemological construct that provides a reference framework that explains essential elements such as experimentation or experience, the study of local and global variation, and the adjustment and tendency of variation behaviors.

Key words: modelling, technology, polynomial functions

Introducción

Nuestra disciplina, la matemática educativa, ha acogido un proceso de otra disciplina científica, la matemática aplicada, este ha estado presente en el desarrollo de la ciencia, nos referimos a la modelación matemática, las potencialidades de dicho proceso son indiscutibles pero los objetivos o razones por las cuales se adopta son variantes.

Por ejemplo, incuestionablemente desde la perspectiva de resolución de problemas el modelado matemático es uno de los caminos para lograr que el estudiante reconozca la importancia de aprender matemáticas y desarrolle la capacidad de aplicar algoritmos y reglas matemáticas ante problemas reales

(Berry, 2002). En esta misma línea se reconocen dos formas de hacer modelación; una de forma empírica en la cual el problema proporciona datos o estos se recolectan por los estudiantes para después ajustarlos a modelos ya establecidos, y la segunda es la modelación teórica la cual se propone el desarrollo del modelo enfatizando las características del mismo. Esta postura se engloba en la perspectiva realista en la cual se espera que el alumno sea capaz de comprender el mundo en el que vive y entienda cuáles son los componentes esenciales de los modelos en la medida en que resuelve problemas.

Es decir, la modelación tiene un abanico de enfoques que se pueden clasificar en; epistemológicos, cognitivos y didácticos (Kaiser & Sriraman, 2006) cada uno de ellos con su forma característica de implicación escolar, pero que convergen reconociendo la potencialidad de la modelación, podemos recabar estudios que datan desde la década de los 60, en donde se discute principalmente el rol de esta en la enseñanza de las matemáticas.
En particular las actividades que se reportan están soportadas en la percepción de la modelación desde la teoría socioepistemológica, quien la concibe en tres planos; una práctica social, medio de vinculación entre la construcción social de conocimiento y el escenario escolar llamado categoría, y eje argumentativo de situaciones de aprendizaje (Cordero, 2001; Méndez y Cordero, 2014).

Fundamentos teóricos

Desde nuestra mirada socioepistemológica, la modelación es parte esencial de la construcción, difusión y desarrollo del conocimiento científico, pues otorga una justificación funcional a este, además provoca la construcción de herramientas como elementos esenciales de la situación que se atiende, para representar lo que se estudia con determinados fines, de manera que pueda ser comunicado (Gilbert, 2004; Koponen, 2007), y al igual que D´Ambrosio (2009) la reconocemos como una herramienta por excelencia del ser humano para construir conocimiento. Y nos preguntamos, cuáles son los elementos esenciales que permiten al ser humano reproducir ese proceso de construcción de conocimiento y cómo podemos llevar esos elementos a la matemática escolar.

Concebimos a la modelación como una práctica social que promueve la construcción de conocimiento matemático, provee de categorías de modelación (Suárez & Cordero, 2010; Méndez, 2013; Méndez y Cordero, 2014; Arrieta y Díaz, 2015, entre otros) que permiten explicitar las prácticas que generan un marco de referencia para el discurso Matemático Escolar.

Particularmente se reportan propuestas basadas en una categoría de modelación escolar que pretende el desarrollo y articulación de los saberes matemáticos generando redes de estos (Méndez, 2013). Dicha categoría provee de un marco de referencia que explicita elementos esenciales para promover una matemática funcional en la matemática escolar; la experimentación o experiencia, el estudio de variación local y global, y el ajuste y tendencia de comportamientos de variación (Figura 1), en donde se resignifican los usos de las gráficas, lo numérico y lo analítico articuladas por prácticas.

Figura 1. Elementos de la categoría de modelación escolar

Para explicitar la categoría se recurre al diseño de situaciones que articulan elementos de variación, transformación y aproximación (Cordero, 2001), en específico nuestras propuestas exhiben cómo se promueve la construcción de redes de usos ante la caracterización de comportamientos de las funciones polinómicas, empleando tecnología, calculadoras graficadoras fx-CP400 de Casio, promoviendo el análisis de las variaciones numéricas y gráficas para ajustar y describir tipos de comportamientos.

En esta categoría de modelación escolar se busca promover la articulación de elementos de variación, transformación y aproximación, así como la construcción de redes de conocimiento ante la caracterización de comportamientos de las funciones polinómicas.

■ Desglose de los diseños de aprendizaje

Bajo esta perspectiva consideramos importante enriquecer el universo gráfico de los estudiantes propiciando la exploración de características y operaciones gráficas de funciones polinómicas, como las que se evidencian en el primer diseño. Lograr una mirada cuidadosa del efecto que producen pequeños cambios en los parámetros de estas funciones mismas que se robustece al cuestionar sobre la cantidad de raíces reales positivas, número de puntos máximos/inflexión que presentan según su grado. Seguido se invita a reflexionar sobre la forma de la curva, sus posibles idas y regresos respecto al eje de las abscisas, poniendo el acento en “cómo varia lo que varía”, es decir, las derivadas sucesivas que se entrelazan con la serie de Taylor y esto a su vez con la Regla de los signos de Descartes (Cantoral y Ferrari, 2009a; Cantoral y Ferrari, 2009b). A continuación se describen las dos situaciones, se buscó identificar qué usos se desarrollan en los participantes al implementar la tecnología.

Los diseños han sido explorados en escenarios escolares principalmente con jóvenes de bachillerato, estos trastocan conocimientos de la geometría analítica, el álgebra y el cálculo.

Diseño 1. Caracterizando funciones polinómicas

Este diseño se desarrolló mediante cuatro actividades cuyos objetivos pretendían provocar el análisis de gráficas para identificar comportamientos globales y locales, con ello caracterizar a las funciones polinómicas según su grado.

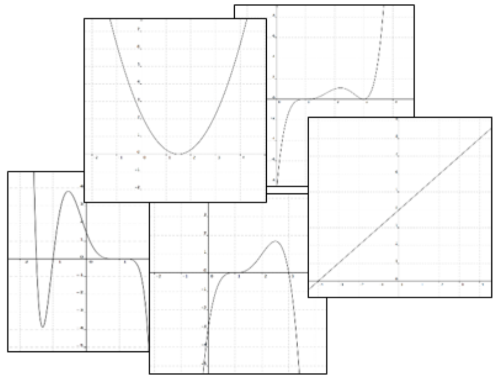


Figura 2. Algunas gráficas para clasificar

La actividad 1 permitió: Conocer qué argumentos matemáticos usan los estudiantes para clasificar las gráficas (figura 2). Suponemos que esta actividad nos dará a conocer los usos de las gráficas arraigados en el bachillerato.

Lo primero que hacen los partícipes es organizarlas por rectas o curvas. Algunos mencionan a la “recta lineal y la parábola” porque la han visto en sus clases de matemáticas, pero no hay más argumentos.

La actividad 2 pretende que el estudiante identifique los cambios globales que ocasionan la variación de parámetros de la función y el grado de la función en las gráficas (Figura 3), logrando con esto una clasificación según el grado de la función

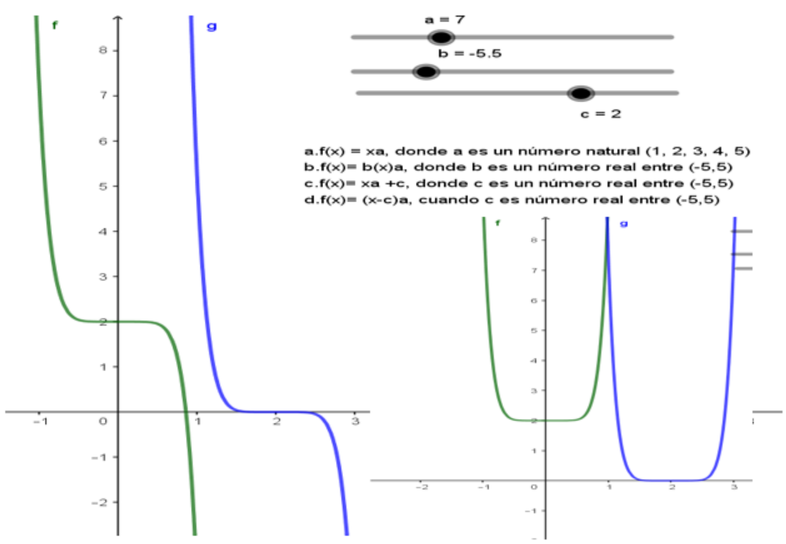


Figura 3. Forma general de las gráficas que hay que analizar para conjeturar comportamientos generales por sus variaciones globales.

En la actividad 3 provoca que el estudiante relacione los parámetros de desplazamiento a la derecha e izquierda con los cortes de la gráfica en el eje "x" (para el caso de la función $f(x) = (x - b)^a(x - c)^d$) con ello introducirlos a noción de raíces de funciones, y que determinen que el cambio global según el grado de las funciones se mantiene (figura 4). Finalmente, se le presenta una serie de gráficas que hay que analizar para obtener su expresión algebraica.

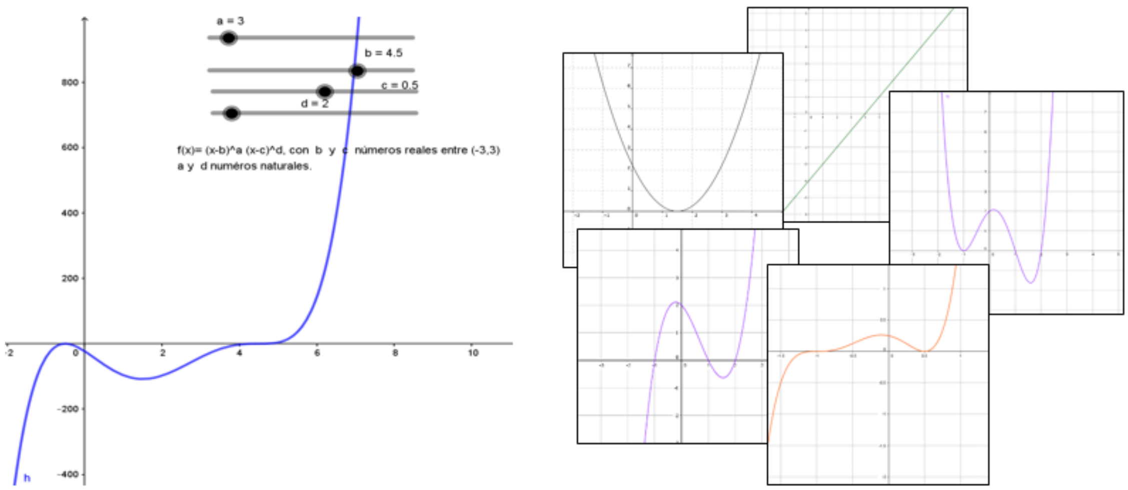


Figura 4. Ejemplo para analizar las gráficas en su variación global y local, según su grado y cortes. (Izquierda). Ejemplo de gráficas que se espera se puedan modelar (Derecha)

Con este diseño se pretendió problematizar los saberes sobre las funciones lineales y cuadráticas y desarrollarlos para caracterizar a las funciones polinómicas según sus comportamientos globales y cualidades locales en intervalos cercanos a cero y las raíces reales.

Diseño 2. Regla de signos de Descartes en las derivadas de funciones polinómicas

El objetivo de este diseño, afianzado en el análisis de la gráfica de una familia de funciones y el uso de calculadoras para comprobar las conjeturas, es que emerja un acercamiento a la regla de los signos de Descartes al vincular la cantidad de cambios de signos de las derivadas de la función alrededor del $x = 0$ y las raíces reales positivas que se perciben. Establecida esta conjetura para funciones lineales (Figura 5) y cuadráticas (Figura 6), donde el significado de la primera derivada se asocia a si la función crece o decrece; la segunda derivada a si la función es cóncava o convexa en las cercanías del punto, argumentos conocidos por los estudiantes se complejiza al aumentar el grado de la función polinómica en estudio. Contar los cambios de signo de las derivadas en 0 determinamos la cantidad de raíces reales positivas más menos un número par.

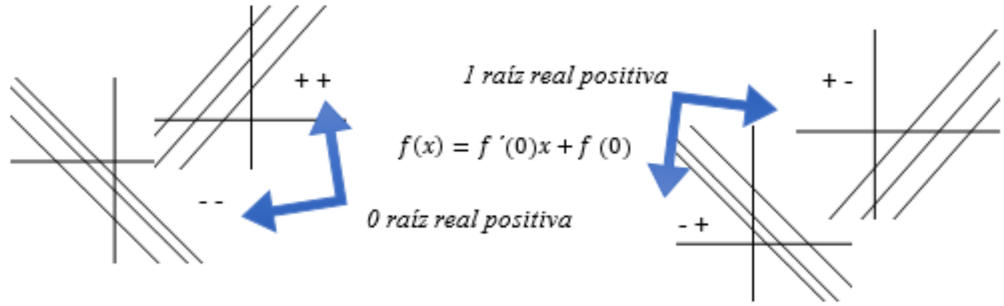


Figura 5. Función lineal

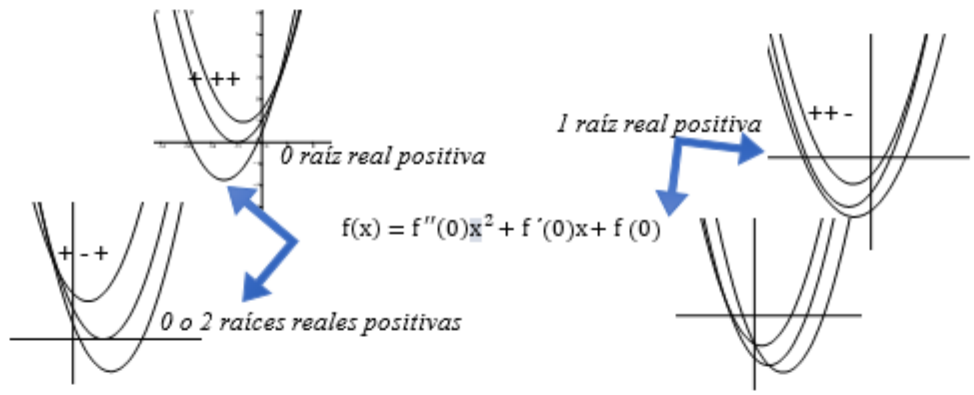
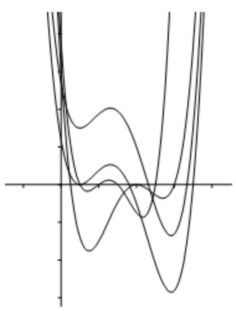


Figura 6. Función cuadrática

Si se logra estabilizar la regla de los signos de Descartes, percibida en el análisis de las familias de curvas ¿podríamos conjeturar sobre los signos que corresponden a las derivadas superiores a 2? (Figura 7).



Argumento:

Signo de f (0) = + ordenada al origen > 0
Signo de f ´(0) = - decrece en las cercanías de x=0
Signo de f ´´(0) = + cóncava hacia arriba en las cercanías de x=0
Signo de f ´´(0) = ¿cómo determinarlo? ¿qué significado construir?
Signo de $f^{IV}(0)$ = + por que las ramas de extienden hacia arriba

Figura 7. Funciones de grado superior a 2.

¿Utilizar la regla de los signos al observar que esta familia de curvas posee 0, 2 o 4 raíces reales positivas podría darnos luz sobre la tercera derivada? Cuestionamiento que nos transporta a revisar la articulación de las variaciones y robustecer la mirada hacia funciones, su forma, la variación de sus variaciones.

A manera de conclusión

En estos diseños se promueve el análisis de las variaciones numéricas y gráficas para ajustar y describir tipos de comportamientos con estudiantes y profesores de nivel medio superior y hace falta un estudio más detallado sobre el empleo de la tecnología, en particular, calculadoras graficadoras fx-CP400 de Casio, que permitan decir que argumentos se favorecen con estos instrumentos.

Lo que acontece en actividades como las descritas, en donde se incentiva la reflexión sobre la forma y funcionamiento de diferentes entes matemáticos mediante gráficas, ya sea en papel o en la pantalla del instrumento tecnológico, convoca otras expresiones como la tabular o algebraica para generar red de modelos, y en esto se evidencia fragilidad del acercamiento escolar a funciones polinomiales más allá de las cuadráticas.

La problemática anterior descrita, puede ser por dos razones: 1.- Si se trabaja en el contexto escolar, no se ha logrado significar a la función polinómica, incluso para el primer y segundo grado. 2.- Hace falta proveer a los profesores de medios que les permitan significar a estas y otras funciones para que ellos logren hacer lo propio con sus estudiantes. En este último aspecto consideramos que, pese a la gran variedad de reportes sobre el tema, sigue siendo demandante estudiar la formación inicial de profesores de matemáticas, por ejemplo para nivel medio superior, lo cual promovería el robustecimiento de la categoría de modelación escolar en la formación de futuros profesores.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. y Díaz. L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 18 (1), 19-48.

Berry, J. (2002). Developing mathematical modelling skills: The role of CAS. *ZDM,* 34 (5), 213-220.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2), pp. 103-128.

D´Ambrosio, U. (2009). Mathematical Modeling: Cognitive, Pedagogical, historical and political dimensions. *Journal of mathematical modeling and application*, 1(1), 89-98. Disponible en: http://proxy.furb.br/ojs/index.pho/modelling.

Gilbert. J. (2004). Models and modelling: Routes to more authentic science education. *International Journal of Science And Mathematics Education*, 2, 115-130.

Méndez, M. (2013). *Desarrollo de red de usos del conocimiento matemático: la modelación para la matemática escolar*. (Tesis inédita de doctorado). Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Méndez, M. y Cordero. F. (2014). La modelación. Un eje para la red de desarrollo de usos. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* Vol. 27. (Pp. 1603-1610) Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Koponen, I. (2007). Models and modelling in physics education: a critical re- analysis of philosophical underpinnings and suggestions for revision. *Science & Education*, 16, 751- 773.

Suárez, L. & Cordero, F. (2010). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio sociepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 13(4-II), 319-333.

LA NOCIÓN DE PROPORCIONALIDAD EN LA CONSTRUCCIÓN DEL TEOREMA DE BAYES. EL CASO DEL PENSAMIENTO ESTOCÁSTICO

Cristian Paredes-Cancino, Ricardo Cantoral Uriza
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)
cristian.paredes@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen
En este reporte, mostramos un análisis socioepistemológico de una proposición de la obra original "*An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances*" de Thomas Bayes (1764). Mencionado análisis forma parte de una problematización del teorema de Bayes en un escenario de corte sociohistórico. Como resultado del análisis de la proposición, identificamos como idea fundamental la noción de proporcionalidad, como una forma de medir la probabilidad.

Palabras clave: teorema de bayes, proporcionalidad, probabilidad, problematización, socioepistemología

Abstract
In this report, we present a socio-epistemological analysis of a proposition from the original work "An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances" by Thomas Bayes (1764). This analysis is part of a problematization of Bayes' theorem in a sociohistorical setting. As a result of the proposition analysis, it identifies, as the main idea, the notion of proportionality, as a way of measuring probability

Key words: bayes theorem, proportionality, probability, problematization, socioepistemology

Introducción

En el campo de lo estocástico, el teorema de Bayes, es un tópico matemático que presenta dificultades en su estudio a nivel medio superior y superior, así lo destacan diversas investigaciones del área (Díaz y De la Fuente, 2005; León, 2008). Por otra parte, el discurso matemático escolar impone argumentaciones y significados que alejan al estudiante de la construcción social de este saber matemático, como bien señala Carranza y Fuentealba (2010) se ha priorizado por una faceta de la probabilidad que atiende a su operatividad más que a su significado. En consecuencia, con la finalidad de atender esta problemática, como parte de una investigación en desarrollo se pretende mediante la problematización del saber matemático teorema de Bayes, identificar las practicas asociadas en la construcción de este saber, es decir, aquellas que permiten dar uso y significado al saber. Si bien solo daremos cuenta de una parte del análisis, en específico de una proposición de la obra matemática de Thomas Bayes de 1764, nos brinda elementos que el autor pone en juego en dicha demostración en miradas a la construcción del teorema de Bayes.

Elementos teóricos y metodológicos

Para el desarrollo de nuestra investigación el fundamento teórico es la Teoría Socioepistemológica, pues nos interesamos en entender y comprender un fenómeno específico relacionado con la construcción social del conocimiento matemático y el de su difusión institucional (Cantoral, 2013).

De acuerdo con Sierra (2008, p.6, citado en Cantoral, 2013) se postula que uno de los primeros aspectos que pone en discusión la Socioepistemología es la naturaleza de los conceptos matemáticos, debido a que desde esta perspectiva se considera que los objetos matemáticos se ponen en uso más allá del aula, es decir, los conocimientos de los estudiantes tienen sentido y significado en su vida cotidiana.

Un método fundamental y característico muy utilizado en las investigaciones de la Socioepistemología es el de la problematización del saber matemático, al cual se da pie al cuestionar la matemática en juego, es decir, poner en juicio su estatus de saber institucional como aquello que se debe de enseñar y aprender, de modo que lleve a reconocer al saber a través de sus usos en distintos contextos. Por esta razón, hablar de la naturaleza del saber matemático exige, de una problematización, ya que se busca desentrañar la naturaleza sociocultural del conocimiento, vía los mecanismos de la historización y la dialectización (Cantoral, 2013). Es decir, analizar la naturaleza del saber es entender lo que compone a este saber, lo que lo caracteriza, su origen.

Para efectos de este trabajo mostramos parte de una historización referente al teorema de Bayes. A que nos referimos con historización, en términos de Reyes-Gasperini (2016) no solo la concebimos como situarnos en la historia, es decir, como una historia cronológica, también implica el estudio de la racionalidad contextualizada con el cual fue concebido un saber matemático en su tiempo y espacio.

Dicha historización en el presente, corresponde a un análisis histórico-epistemológico, en el que se estudia, analiza y cuestiona, por ejemplo, cómo hizo en su momento un matemático para llegar a cierto teorema, proposición o conocimiento, también interesa preguntarse cómo se utilizó por primera vez, qué resultados se obtuvieron de él, que tipo de conocimiento rodeaban esta creación, entre otros. Dicho análisis será orientado por la propuesta metodológica para estudios sociohistóricos de los investigadores Espinoza y Cantoral (2010), quienes proponen estudiar la obra original por medio de tres ejes: una producción con historia, un objeto de difusión y parte de una expresión intelectual global.

En síntesis, para este reporte presentamos parte de una problematización del teorema de Bayes en un escenario de corte histórico, en específico, damos evidencia del análisis socioepistemológico llevado a cabo respecto a una proposición de la obra matemática original de Thomas Bayes (1764). La elección de la obra original de este autor, tiene fundamento en ser la primera evidencia matemática sobre el problema que le dio origen al teorema, asimismo en él se plasman las ideas base de su construcción y nos aporta elementos para nuestro planteamiento inicial.

Análisis Socioepistemológico

En lo que sigue se resumen elementos que competen al análisis socioepistemológico, cabe destacar que solo se retoman algunos aspectos de una investigación más amplia en proceso que tiene como objetivo generar una reinterpretación de la construcción del teorema de Bayes e identificar los usos de este saber.

Un panorama sobre la probabilidad en el siglo XVIII

Los trabajos más importantes en el siglo XVIII fueron el *Ars Conjectandi* de Jakob Bernoulli publicado en 1713, la *Doctrine of Chance* de Abraham de Moivre el cual fue el primer tratado ingles sobre aspectos de probabilidad, dicha obra tuvo tres ediciones en los años 1718, 1738 y 1756 y el *Miscellaneous tracts on some curious, and very interesting subjects in mechanics, physical-astronomy, and speculative mathematics* de Thomas Simpson en 1757.

La obra de Bernoulli se compone de cuatro partes, la primera se enfoca en el tratado de Huygens y el planteamiento de nuevos problemas; el segundo se estudia la teoría de permutaciones y combinaciones; en la tercera parte se dan soluciones a veinticuatros problemas sobre juegos de azar y en la última parte se aplica la teoría de la probabilidad a temas de las ciencias económicas y sociales, cabe destacar que esta sección la más importante de su obra queda inconclusa, sin embargo, se encuentra su famoso teorema que actualmente se denomina Ley de los Grandes Números, la cual establecerá en qué medida las frecuencias relativas de un suceso tienden hacia la probabilidad de éxito del mismo. Por su parte De Moivre se interesó por la teoría de permutaciones y combinaciones y además estimó el número de ensayo para estar seguros de que la frecuencia observada puede aproximarse a la probabilidad de un evento, este último resultado devino de la continuación del trabajo realizado por Bernoulli y es un caso particular de la generalización de lo que se llama Teorema Central del Límite. En el caso de Thomas Simpson él se centró en el estudio de los errores en las observaciones astronómicas, basado en esto introdujo la idea de distribución continua de probabilidad.

La obra matemática de Thomas Bayes

Thomas Bayes, reverendo ingles nació en Londres en 1702 y murió el 17 de abril de 1761 en Tunbridge Wells, Kent. Respecto de su formación, los historiadores tienen la hipótesis de que se inició en el área de las matemáticas como alumno de De Moivre, ya que en la época en la que Bayes era adolescente, De Moivre se dedicaba en Londres a ser profesor de matemáticas y justamente por esta cuestión se considera que Bayes aprendió de él sobre la teoría de las probabilidades.

Las contribuciones de Bayes a las matemáticas son las siguientes obras, en 1731 escribe *Divine Benevolence or an Attempt to prove that the Principle End of Divine Providence and Government is the Happiness of this Creatures* y en 1736 publicó *An Introduction to the Doctrine of Fluxions, and a Defence of The Analyst* bajo el pseudónimo de John Noon. De acuerdo con Gómez (1994) la segunda obra señalada, se difunde como defensa de los matemáticos aplicados, frente al ataque que recibían por el obispo Berkeley, circunstancia que se considera le permitió incorporarse a la Royal Society como miembro en 1742.

Posterior a estas publicaciones, *An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chance* donde se introduce la idea de probabilidad condicional y otra obra de 1766 referente a la divergencia del logaritmo neperiano, fueron las últimas obras de Bayes publicadas por Richard Price después de su muerte.

Respecto a la obra de Bayes de 1764 que nos interesa analizar, fue escrito por Price y comunicado mediante una carta dirigida a John Canton en 1763. En este escrito se plantea de manera explícita el problema que pretende resolver, el cual consiste en lo siguiente: *Dado el número de veces que un suceso ha ocurrido y el de veces que no ha ocurrido, se requiere calcular la probabilidad de que la probabilidad de su ocurrencia en un solo experimento esté entre cualesquiera dos valores prefijados* (Bayes, 1764). Dicho problema se conoce como el problema de las causas a través de los efectos observados.

El ensayo *An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chance* se estructura de una carta preliminar, el problema y dos secciones. Es en la segunda sección donde el autor obtiene la solución al problema antes mencionado, sin embargo, para este reporte solo nos centraremos en el análisis de los primeros dos postulados y el lema 1 correspondientes a la sección II.

Parte de la obra de Bayes (1764). La medida de la probabilidad

En este apartado solo mostraremos un extracto del documento original de 1764 de Thomas Bayes. La sección II comienza con dos postulados (Figura 1), uno en el que se introduce la distribución uniforme y otro en el que se realiza una construcción geométrica que representará un experimento de Bernoulli (Gómez, 1994).

SECTION II.

Poſtulate. 1. I Suppoſe the ſquare table or plane ABCD to be ſo made and levelled, that if either of the balls *o* or W be thrown upon it, there ſhall be the ſame probability that it reſts upon any one equal part of the plane as another, and that it muſt neceſſarily reſt ſomewhere upon it.

2. I ſuppoſe that the ball W ſhall be 1ſt thrown, and through the point where it reſts a line *os* ſhall be drawn parallel to AD, and meeting CD and AB in *s* and *o*; and that afterwards the ball O ſhall be thrown $p+q$ or n times, and that its reſting between AD and *os* after a ſingle throw be called the happening of the event M in a ſingle trial. Theſe things ſuppoſed,

Figura 1. Postulado 1 y 2 de la obra de Thomas Bayes (1764)

A partir de estos dos postulados se configura una construcción de un cuadrado que permitirá calcular las probabilidades de que al lanzar una bola esta quede en alguna sección del cuadrado ABCD (Lema 1), basado en un experimento que simula un modelo binomial.

Pasamos a ilustrar el mecanismo (Figura 2) que se propone mediante los postulados. Primeramente, se supone un cuadrado unitario ABCD, una mesa de billar, según Pearson y Fisher (citado en Landro y González, 2012) en el cual al hacer rodar una bola y observar en qué punto se detiene, la probabilidad del punto donde se detenga la bola, será la misma para cualquier región del cuadrado ABCD. Como segundo momento, en el lugar donde se detuvo la bola, se traza una recta paralela a BC, denominemos a este segmento como os, de tal modo que ABCD quedará dividido en dos regiones. Al lanzar una segunda bola *n* veces, la probabilidad de que quede a la derecha de os se considerará como la probabilidad de éxito, importará la frecuencia del evento, denotemos como M, el evento que la bola quede entre AD y os.

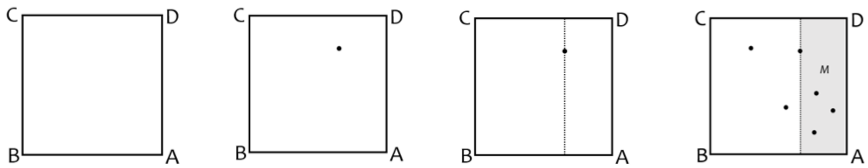


Figura 2. Simulación del experimento basado en los postulados. Diseño propio.

A partir de esta construcción geométrica se basará para demostrar el lema 1 de la sección II de su ensayo. Mostraremos el lema, luego la demostración que se hace y por último un análisis resaltando las prácticas asociadas. La imagen (Figura 3) ilustra cómo se matematiza la probabilidad usando ideas de la proporcionalidad en miras a dar solución al problema propuesto en la obra, cuyo resultado, es lo que se conoce actualmente como teorema de Bayes.

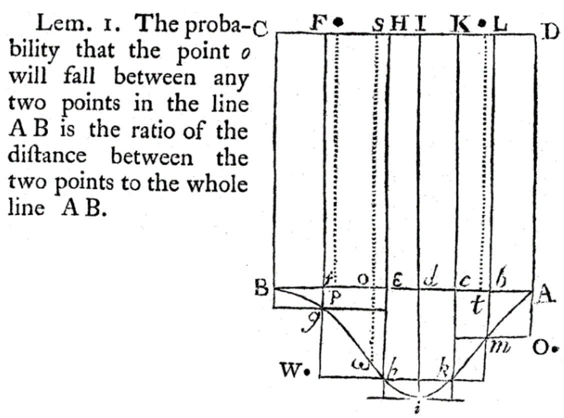


Figura 3. Lema 1, Sección II de la obra de Thomas Bayes (1764)

Lema 1. La probabilidad que un punto o caiga entre dos puntos cualesquiera de la línea AB es la razón de las distancias entre los dos puntos y la longitud de toda la línea AB.

Los argumentos geométricos de la afirmación que realiza Bayes en su obra (lema 1), se basan en la consideración por una parte de medidas conmensurables y por otra la inconmensurabilidad. A continuación, se muestran las ideas en que está fundada la prueba.
En la primera parte se considera la *conmensurabilidad*. Sean *b* y *f* dos puntos cualesquiera de la línea *AB* y a través de ellos se trazan *fF*, *bL*, paralelas a *AD* que cortan a *CD* en *F* y *L* (Figura 4, izquierda). Entonces si los rectángulos *Cf*, *Fb* y *LA son conmensurables* entre sí, pueden dividirse en partes iguales, es decir, rectángulos denotados por la letra *v* (Figura 4, derecha) y tenemos lo siguiente:

$$Cf = v * x, Fb = v * y, LA = v * z, \text{ donde } x, y, z \text{ corresponden al número de partes}$$

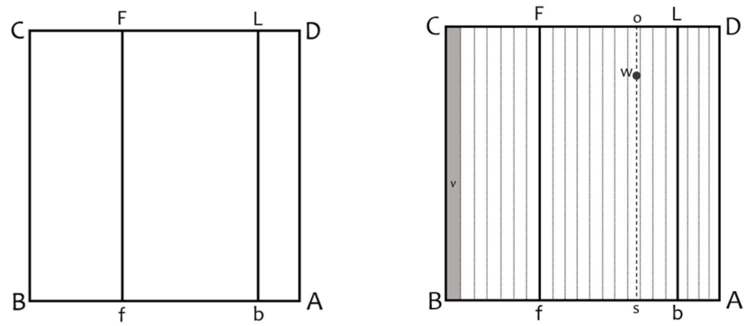


Figura 4. Conmensurabilidad de los rectángulos $Cf, Fb\ y\ LA$, Lema 1. Diseño propio.

Al lanzar la bola W, la probabilidad de que pare sobre cualquier número de estas partes iguales será la suma de las probabilidades de que pare sobre cada una de ellas, (ya que los sucesos son inconsistentes); y su suma — ya que la probabilidad de que pare sobre cualquiera de las partes iguales es la misma —, es la probabilidad de que pare sobre cualquiera de las partes iguales multiplicada por el número de partes.

En consecuencia, la probabilidad de que la bola W pare sobre el [cuadrado] *Fb* es la probabilidad de que pare sobre cualquiera de las partes iguales multiplicada por el número de partes iguales de *Fb*; y la probabilidad de que pare en algún sitio entre *Cf* o *LA*, es decir, de que no pare sobre *FB* es la probabilidad de que pare sobre una de las partes iguales multiplicada por el número de partes iguales de *Cf*, *LA* tomadas conjuntamente.

$$P(w\ en\ Fb) = v * y, \quad \text{donde } v \text{ representa la unidad de medida común}$$
$$P(w\ en\ Cf\ o\ LA) = P(w\ no\ esté\ en\ Fb) = v * (x + z)$$

Por tanto, la probabilidad de que [la bola] pare sobre *Fb* es a la probabilidad de que no pare sobre *Fb* como el número de partes iguales de *Fb* es al número de partes iguales de *Cf, LA* en conjunto, o como *Fb* es a *Cf, LA* en conjunto, o como *fb* es a *Bf, Ab* juntos.

$$\frac{P(w\ en\ Fb)}{P(w\ no\ en\ Fb)} = \frac{y}{x+z} = \frac{Fb}{Cf + LA} = \frac{fb}{Bf + Ab}$$

Basado en las propiedades actuales que el discurso escolar trata, la probabilidad de que pare sobre *Fb* es a la probabilidad de que pare sobre *Fb* sumada a la probabilidad de que no pare sobre *Fb* como *fb* es a *AB*, o como la razón *fb* y *AB* es la razón entre *AB* y *AB*.

$$\frac{P(w\ en\ Fb)}{P(w\ en\ Fb) + P(w\ no\ en\ Fb)} = \frac{Fb}{Fb + Cf + LA}$$
$$= \frac{fb}{fb + Bf + Ab} = \frac{\frac{fb}{AB}}{\frac{AB}{AB}} = \frac{fb}{AB}$$
$$\frac{P(w\ en\ Fb)}{1} = \frac{fb}{AB} \quad \Rightarrow \quad P(w\ en\ Fb) = \frac{fb}{AB}$$

En síntesis, según la bola W pare o no sobre *Fb*, el punto *o* estará o no entre *f* y *b* y, por consiguiente, la probabilidad de que el punto o esté entre *f* y *b* es el cociente entre *fb* y *AB*.
Si los rectángulos *no son conmensurables*, la última probabilidad no puede ser ni mayor ni menor que la razón de *fb* a *AB*. Para probarlo, en el escrito Bayes procede por contradicción. La idea para esta prueba (caso menor) consiste en tomar dos puntos cercanos de modo que *pt* fuese mayor que *fc* y los tres segmentos *Bp*, *pt* y *tA* fuesen conmensurables (Figura 5, izquierda). Y realizar un procedimiento empleando las ideas anteriormente detalladas. Concluyendo que la probabilidad de que el punto *o* esté comprendido entre *f* y *b* no puede ser menor que la razón entre *fb* y *AB*. Para el caso mayor lo que realiza es tomar los dos puntos cercanos de modo que *pt* fuese menor que *fc´* y los tres segmentos *Bp*, *pt* y *tA* fuesen conmensurables (Figura 5, derecha).

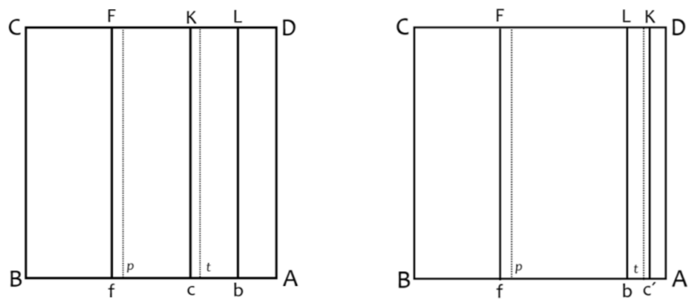


Figura 5. Conmensurabilidad de los rectángulos *Bp*, *pt* y *tA*. Diseño propio

En síntesis, ya que la probabilidad de que *o* esté comprendido entre *f* y *b*, no puede ser menor y tampoco puede ser mayor que la razón entre *fb* y *AB*, ésta debe ser igual. Es decir, la probabilidad de que *o* esté comprendido entre los puntos *f* y *b* es la razón entre *fb* y *AB*.

De acuerdo a la prueba presentada, en el análisis destacamos los siguientes elementos: para determinar la probabilidad, en específico, su medida, Bayes destaca dos casos basados en su construcción geométrica que simula un experimento. A partir de la ubicación de dos puntos (*f* y *b*) sobre la base (*AB*) del cuadrado unitario, divide el área en tres regiones y considera en ellas conmensurabilidad e inconmensurabilidad.

Cuando los rectángulos son conmensurables la primera práctica que se pone en acción es la de *comparar* la cual implica la selección de variables y el establecimiento de relaciones, para este caso las relaciones que se establecen son tres (la parte de interés en cada una de las relaciones es la región comprendida entre los puntos seleccionado, es decir, *f* y *b*):

$\frac{y}{x+z}$ la relación entre el número de partes iguales,

$\frac{Fb}{Cf+LA}$ la relación entre las áreas y

$\frac{fb}{Bf+Ab}$ la relación entre los segmentos.

En cada una de estas razones que se establecen, identificamos que de manera general se compara lo que respecta al suceso de interés ($w\ en\ Fb$) con lo que respecto al suceso complementario ($w\ no\ en\ Fb$), lo que varía es la magnitud. Otra práctica que identificamos es el establecimiento de la *igualación* entre las relaciones, lo que se caracteriza como *equivaler* y cuyo fin es mantener un invariante entre las relaciones dadas, es decir, al igualar las relaciones, si bien varían las magnitudes (número de partes, segmentos y áreas) la razón que se establece se conserva (resulta invariante), con ello se ha construido una medida que permitirá *medir* la probabilidad. En consecuencia, se ponen en juego prácticas como *comparar, medir, igualar* que permitirán construir una medida para la probabilidad, la cual se expresa mediante el establecimiento de relaciones entre magnitudes.

Además, dos tipos de relaciones que emergen ante la comparación, siendo la *unidad de referencia* distinta, son: razón entre el suceso w esté en Fb y w no esté en Fb y razón entre el suceso w esté en Fb y la unidad, es decir, el suceso w esté en Fb y el complemento w no esté en Fb

Cuando las medidas son inconmensurables, es decir, los rectángulos *Cf*, *Fb* y *LA son inconmensurables,* el autor identifica puntos cercanos a *f* y *b* de modo tal que los rectángulos sean conmensurables, dicha acción corresponde a establecer una *unidad de medida*. De manera similar al caso conmensurable establecerá una seria de comparaciones entre relaciones para determinar la medida de probabilidad. Como bien se destaca en este lema, la noción de lo proporcional emerge como una manera de establecer la relación entre dos magnitudes y darle significado a la probabilidad.

Reflexiones finales

Con el objetivo de estudiar la naturaleza del saber, es decir, localizar y analizar el uso y razón de ser del teorema de Bayes, identificamos una idea principal, la noción de proporcionalidad, como una manera de cuantificar la probabilidad y que se encuentra en la base de las primeras proposiciones que se proponen en la obra de Bayes en miras de dar solución al problema de las causas a través de los efectos observados.

La proporcionalidad se presente entonces como resultado de un escenario que demanda de la cuantificación de la incertidumbre (experimento tipo binomial basado en los dos postulados) y juega un rol importante en la construcción del teorema de Bayes. Se identificaron las prácticas de comparar, igualar y conmensurar postulados en la investigación de Reyes-Gasperini (2016) que competen al modelo de anidación de prácticas de la proporcionalidad.
Para finalizar una idea del presente análisis del lema, es entender la probabilidad en términos del establecimiento de una relación entre magnitudes, ya sea de segmentos o de áreas, más que como un cociente aritmético. El significado de la probabilidad está ligado a una relación entre áreas (razón) y es la idea que se mantiene invariante en las pruebas que emplea este autor (Bayes) a través de toda su obra matemática. En síntesis, los argumentos basados en la construcción geométrica y la proporcionalidad constituyen las primeras evidencias que el autor emplea para la construcción del teorema de Bayes.

Referencias bibliográficas

Bayes, T. (1763). An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 53, 370-418.
Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. España: Gedisa Editorial.
Carranza, P. y Fuentealba, J. (2010). Dualidad de la probabilidad y enseñanza de la estadística. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *24*, 57-68.

Díaz, C. y De la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la Estadística. *Epsilon*, *59*, 245-260.

Espinoza, L. y Cantoral, R. (2010). Una metodología para estudios socio históricos: el caso de la teoría de funciones de Lagrange. En Lestón, P. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23* (pp. 889-897). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Gómez, M. (1994). El problema de la probabilidad inversa: Bayes y Laplace. En E. Bustos, J. García-Bermejo, E. Pérez, A. Rivadulla, J. Urrutia y J. Zofío (Eds.), *Perspectivas actuales de lógica y filosofía de la ciencia* (pp. 385-396). España: Siglo XXI de España Editores.

Landro, A. y González, M. (2012). Bernoulli, De Moivre, Bayes, Price y los fundamentos de la inferencia inductiva. *Cuadernos del Cimbage*, *15*, 33-56.

León, N. A. (2008). Errores y dificultades en la resolución de problemas verbales inherentes al teorema de Bayes. *Paradigma, 29*(2), 187-219.

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la transformación y la mejora educativa*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México, México.

LA EMERGENCIA DE LA NOCIÓN DE VARIACIÓN EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO A TRAVÉS DE LA CAUSALIDAD Y LA TEMPORIZACIÓN

Mario Caballero-Pérez, Ricardo Cantoral
Cinvestav-IPN. (México)
macaballero@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen
Presentamos los avances de una investigación en curso orientada a comprender cómo se construye la noción de variación en el pensamiento humano, noción fundamental para el aprendizaje del Cálculo. Asumimos que faltan sentidos del cambio que podríamos llamar contextuales y que consisten en colocar a las variables y sus variaciones en *sistemas de referencias* adecuados que permitan entender la dinámica de la variación, esto mediante la construcción de explicaciones causales y una temporización del cambio, nociones retomadas de la psicogenética. En este escrito reportamos avances en el análisis de las repuestas de estudiantes de un bachillerato mexicano (15 a 18 años) a un cuestionario conformado por actividades de variación, enfatizando la causalidad y la temporización que emplean para resolverlas, así como el papel que desempeñan estas nociones en la emergencia de la noción de variación de estos estudiantes.

Palabras clave: variación, temporización, causalidad, predicción

Abstract
We present the advances of an ongoing investigation that is oriented to understand how the notion of variation is constructed in the human thought, considering that this is a fundamental notion to learn Calculus . We assume that there is a lack of what we could call contextual changes, which consist in putting the variables and their variations into appropriate reference systems that allow understanding the variation dynamics through the construction of causal explanations and temporization change, both notions taken from the psycho genetics. In this paper, we present the advances in the analysis of Mexican high school (15 to 18 years) students' answers to a questionnaire made up of variation activities, emphasizing the causality and temporization that they use to solve the activities, as well as the role played by these notions in the emergence of the notion of variation of these students

Key words: variation, temporization, causality, prediction

Introducción

Los estudios sobre enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral han sido tema de interés en diversas investigaciones de Matemática Educativa, ello debido, parcialmente, a que suelen presentar dificultades en el aprendizaje por parte de los estudiantes e incluso docentes, ya sea en cuanto a la construcción de significados para conceptos como pendiente o derivada (Nagle, Moore-Russo, Viglietti y Martin, 2013) o en el entendimiento de procedimientos fundamentales como límite (Jones, 2015). La presente investigación se ubica dentro de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, en particular, en la línea de investigación Pensamiento y el Lenguaje Variacional (PyLV), la cual estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social (Cantoral, 2013), lo que abarca, entre otros aspectos, la enseñanza y aprendizaje del Cálculo.

El PyLV consiste en el estudio de las formas en cómo las personas reconocen el cambio y la variación en un fenómeno, cómo usan estas nociones para resolver situaciones problemáticas, cómo comunican el cambio y la variación, así como la manera en cómo estas nociones intervienen y contribuyen en la construcción social de conocimiento matemático. Resultados enmarcados en el PyLV han caracterizado la forma en cómo las personas usan la variación en situaciones predictivas mediante el desarrollo de prácticas como comparación y seriación (Moreno-Durazo y Cantoral, 2016), así como reportado dificultades para abordar situaciones de variación (Cantoral y Farfán, 1998; Caballero, 2012).

En un trabajo previo (Caballero-Pérez y Cantoral, 2017), se mostró que la noción de variación precisa de una construcción particular debido a que no es explícita en los fenómenos sino que consiste de una abstracción de las propiedades y características de un fenómeno. Con base en lo anterior, asumimos como problema de estudio comprender cómo se construye la noción de variación, qué tipos de escenarios favorece su construcción, de qué manera las personas perciben esta noción, entre otros aspectos. En concreto, nuestra pregunta de investigación es la siguiente: *¿cuáles son los elementos o condiciones necesarias para favorecer la construcción de la noción de variación en el pensamiento humano?*

En este escrito nos enfocamos en mostrar los avances realizados en el análisis de las respuestas de estudiantes ante actividades matemáticas de variación, esto con el fin de evidenciar cómo emerge la noción de variación en sus respuestas. El marco teórico que fundamenta la investigación se conforma por la Socioepistemología, por una caracterización desde el PyLV de la noción de variación y una articulación de las nociones de causalidad y de temporización. Nuestra hipótesis sostiene que la construcción de la noción de variación precisa del desarrollo y articulación de las nociones de causalidad y de temporización para dar lugar a la conformación de sistemas de referencia. Nos limitaremos ahora a mostrar cómo la causalidad y la temporización permiten explicar la emergencia de la noción de variación en las respuestas de estudiantes ante actividades matemáticas.

Fundamentos teóricos

Una caracterización de la variación desde el pensamiento y lenguaje variacional

En el marco de nuestra investigación, entendemos por cambio toda modificación que tiene el valor de una variable, por ejemplo, una diferente posición en un objeto, la diferencia en la sensación térmica al enfriarse un líquido, etc. De manera general, el cambio se percibe por los sentidos: observamos el cambio de posición de un cuerpo y sentimos el cambio de temperatura. En contraste, asumimos que la variación es una noción que no se percibe de manera directa por los sentidos, por tanto, no está presente de manera explícita en los fenómenos. En el mismo sentido que (Cabrera, 2009), asumimos que la variación consiste de una abstracción de orden superior de las propiedades y características del cambio percibido. En consecuencia, observar el cambio o ser consiente de él no es suficiente para caracterizar la variación (Cantora, 2013), se requiere además de al menos dos aspectos esenciales: primero, la medición del cambio, que consiste en el reconocimiento cuantitativo de aquello que cambia, segundo, el estudio de la forma en cómo esa medida se modifica, es decir, determinar si los incrementos son positivos o negativos, si son constantes, si son cada vez mayores o menores, si tienden a estabilizarse, si son acotados, etc.

En el PyLV, la variación tiene lugar dentro de una clase específica de fenómenos, aquellos que involucran la noción de predicción (Cantoral, 2013). Desde nuestra postura, la predicción se apoya en el estudio sistemático y lógico del cambio y la variación que presentan las variables de esos fenómenos para determinar un estado futuro. Las investigaciones enmarcadas en el PyLV han centrado la atención en dos aspectos de la variación: los órdenes de variación superior y el carácter estable del cambio. En cuanto al primero, se considera que la variación posee diferentes órdenes dependiendo del cambio que se mida (Hernández-Zavaleta y Cantoral, 2017; Moreno-Durazo y Cantoral, 2016), siendo el primer orden de variación la medición del incremento en el valor de la variable, sea este un incremento negativo o positivo; el segundo orden de variación consiste en la medición del incremento en el incremento del primer orden de variación, y así sucesivamente con órdenes superiores. El *carácter estable del cambio* (CEC) (Cantoral y Farfán, 1998; Cantoral, 2013) es un elemento necesario para establecer predicciones, consiste en aquella regularidad asociada a la variación que determina el comportamiento de los estados ulteriores del fenómeno, esto se logra al caracterizar la dinámica que las variables y sus variaciones siguen.

Desde la Socioepistemología, asumimos que la construcción social de conocimiento matemático tiene lugar mediante el desarrollo intencional de prácticas. En el caso específico del PyLV, las prácticas específicas que permiten operar con el cambio y la variación con fines predictivos se denominan *prácticas variacionales*, que consisten en una forma particular de razonar y actuar ante una situación de variación como la *predicción*, la *comparación*, la *seriación* y la *estimación* (Caballero, 2012).

Causalidad y temporización en la conformación de sistemas de referencia

La causalidad y temporización son dos nociones que se retoman de la psicogenética, y que han sido desarrollados a la luz de los resultados dentro del PyLV en (Caballero y Cantoral, 2016; Caballero-Pérez y Cantoral, 2017). La causalidad consiste en relacionar dos o más variables en un fenómeno, de manera que ellas estén vinculadas entre sí, lo que se traduce en reconocer que la modificación de una variable resulta en la modificación de otra. Cabe aclarar que este término no se refiere a si el fenómeno es causal (característica del determinismo) sino al establecimiento de una relación por parte de la persona. La temporización consiste en identificar o construir estados intermedios en el desarrollo del fenómeno, asociando estados específicos a las variables estudiadas.

… por medio de la *causalidad* se reconoce la variación (¿qué cambia?), en tanto que las *estrategias variacionales* permiten cuantificar el cambio, por ejemplo, al comparar dos estados y observar el incremento o decremento entre ellos, pero ¿qué comparamos? y ¿con qué comparamos? Reconocer la variación no tendría lugar sin el establecimiento de un referente para percibir el cambio (¿respecto de qué cambia?) y otro para medirlo, para cuantificarlo (¿cuánto cambia?)… La importancia de considerar la *temporalización* en fenómenos de variación continua es que permite describir, caracterizar y cuantificar el comportamiento de las variables de una función (¿cómo cambia?) (Caballero y Cantoral 2017).

Ambas nociones atienden diferentes aspectos de la variación que se resumen en las interrogantes ¿qué cambia?, ¿respecto de qué cambia?, ¿cuánto cambia?, ¿cómo cambia? La manera en cómo estas cuestiones se articulan para que la noción de variación emerja es a lo que denominamos *sistema de referencia* (Caballero y Cantoral, 2017).

Aspectos metodológicos

La investigación en curso es de corte cualitativo e interpretativo, puesto que analizaremos, a partir de las respuestas de estudiantes cómo emerge la noción de variación con base en los elementos que conforman nuestro marco teórico. En cuanto al diseño de las actividades, se eligieron dos tipos de situaciones: de experimentación física, que consisten en la manipulación de un instrumento manipulable, y de "experimentación mental" que consisten en analizar la variación de un fenómeno a partir de una gráfica o tabla. Las actividades se diseñaron considerando la presencia de órdenes de variación diferentes en cada actividad, el tiempo como variable explícita e implícita, así como predicciones locales y globales.

En cuanto a la población, se eligieron estudiantes mexicanos de bachillerato del Cetis 50, con edades entre 15 y 18 años. Las actividades se implementaron a 40 estudiantes de cuarto semestre que habían cursado la asignatura de Cálculo Diferencial. Las respuestas se analizaron con base en las prácticas que ponían en juego, complementando el análisis con preguntas efectuadas durante la resolución de las actividades.

En este escrito presentamos algunas respuestas a una de las actividades de experimentación mental que consiste en bosquejar la forma de una pista de carreras de 1500 metros que recorre un vehículo. Se presenta una tabla con las velocidades que registró el vehículo.

Tabla1: Datos de la velocidad de un vehículo

Distancia m	Rapidez km/h	Distancia m	Rapidez km/h	Distancia m	Rapidez km/h	Distancia m	Rapidez km/h
50	320	450	319	850	263	1250	272
100	318	500	318	900	284	1300	282
150	314	550	309	950	305	1350	309
200	303	600	288	1000	308	1400	314
250	290	650	267	1050	311	1450	318
300	299	700	245	1100	309	1500	319
350	312	750	230	1150	286		
400	317	800	241	1200	273		

Análisis preliminar

En su respuesta, el estudiante A menciona que hay curvas donde la velocidad aumenta y otras donde disminuye, realizando el dibujo de la figura 1. Identificamos una causalidad en la respuesta del estudiante al observar que alterna curvas cóncavas hacia arriba y cóncavas hacia abajo para indicar dónde la velocidad disminuye y dónde aumenta, respectivamente. No obstante, no establece diferencias entre esos aumentos o disminuciones, de manera que compara únicamente los valores de la velocidad sin establecer criterios para determinar la forma de crecimiento o disminución. De lo anterior, reconocemos únicamente el uso del primer orden de variación para comparar los datos de la tabla, esto ocasiona que el estudiante no reconozca un CEC en la variación de la velocidad. Por otra parte, aunque reconoce varios intervalos para los valores de la velocidad, el análisis que efectúa se sustenta en comparar dos estados, el valor más pequeño y más grande en un intervalo, de manera que su temporización se limita a considerar dos estados a la vez.

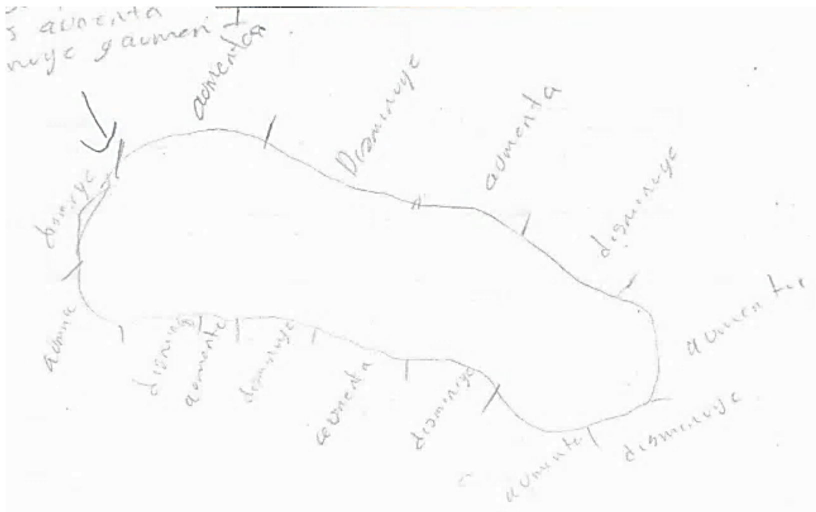


Figura 1. Dibujo de la pista del estudiante A

El estudiante B realiza el dibujo de la figura 2 con base en la idea de que los aumentos y disminuciones de la velocidad corresponden a curvas en la pista. La causalidad que establece consiste en que la velocidad aumenta o disminuye en una curva, sin importar si es cóncava hacia arriba o abajo. También observamos que realiza una diferenciación entre curvas, de manera que si el incremento o disminución de la velocidad es muy grande, la longitud de la curva también es grande, y si el aumento o disminución es pequeño la longitud también. De lo anterior, reconocemos un CEC correspondiente al análisis que efectúa del primer orden de variación. El estudiante B no considera la concavidad de la curva sino únicamente su longitud, de manera que compara los valores de la velocidad para determinar la magnitud del incremento. No obstante, aunque efectúa múltiples comparaciones no usa una seriación, ya que no relaciona entre si esas comparaciones, sino que las efectúa de manera independiente una de la otra, de manera que su temporización también es de dos estados a la vez. Esto permite al estudiante estimar la forma de la pista con base en los supuestos que toma, aunque no es del todo correcta debido que se limitó al primer orden de variación.

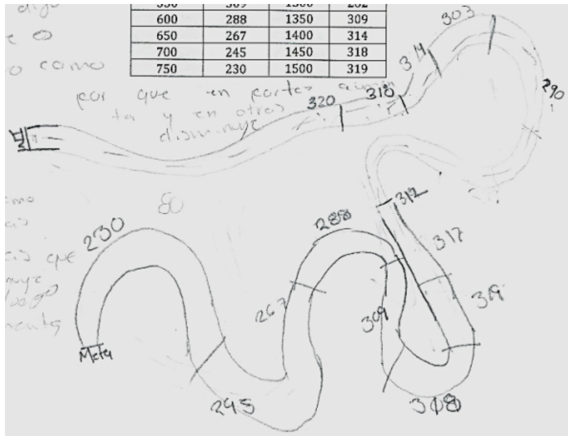


Figura 2. Dibujo de la pista del estudiante B

El estudiante C realiza la pista de la figura 3, y comenta que "*la primera curva es pequeña o no muy curveada, el piloto tuvo que desacelerar para pasarla pero no frenó mucho, la segunda es más curveada por lo que tuvo que desacelerar más y pasarla frenando, luego aceleró pero paso por una curva grande pero no cerrada, por lo que no acelera tanto, pasó la curva sin problemas y al final aceleró por ser recta*". Observamos que, a diferencia de los dos estudiantes anteriores, la causalidad del estudiante C corresponde a considerar que en una curva la velocidad disminuye y en una recta aumenta, sin limitarse únicamente a considerar curvas.

Por otra parte, aunque no provee de un análisis puntual de los valores de la velocidad, utiliza la estrategia de seriación para analizar secciones completas de la pista donde la velocidad aumenta o disminuye, de donde identificamos el segundo orden de variación. Esto lo observamos cuando compara entre si los intervalos donde la velocidad aumenta; al igual que compara entre si los intervalos donde la velocidad disminuye. Con base en esto, realiza una estimación de la pista donde identificamos que su temporización considera intervalos completos de la tabla, compuestos a su vez por varios estados intermedios que analiza en conjunto. Es decir, su temporización no se limita a considerar dos estados a la vez, sino que agrupa varios estados para conformar nuevos estados. Por último, el CEC lo identificamos en la respuesta que provee, pues deduce que entre mayor sea la disminución de la velocidad, más cerrada será la curva, aunque no provee de algún elemento para efectuar una medición precisa, quedándose al nivel de una valoración de dicha cantidad.

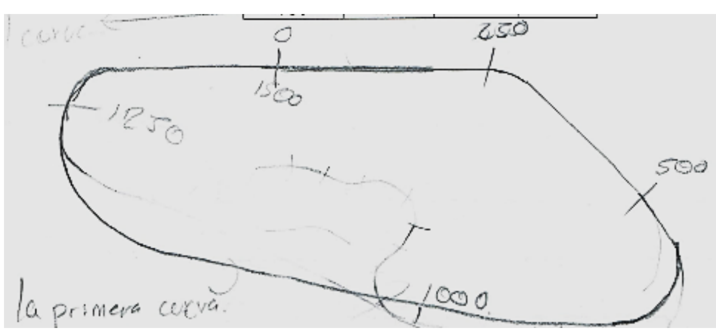


Figura 3. Dibujo de la pista del estudiante C

Discusión de resultados

A partir de las respuestas presentadas, observamos que la noción de variación emerge de manera diferente en cada estudiante debido al tipo de causalidad y de temporización que construyen. Por ejemplo, la noción de variación que usa el estudiante A se limita al de comparar si la velocidad aumenta o disminuye, pero no toma en cuenta la cantidad qué aumenta o disminuye. Al observar la causalidad que establece, vemos que relaciona disminución de la velocidad con curvas cóncavas hacia arriba, y aumentos de la velocidad con curvas cóncavas hacia abajo. Aunque la relación puede no ser la adecuada, sirvió de base para que el estudiante compare la velocidad para identificar que segmentos corresponde a cada tipo de curva. No obstante, al considerar únicamente una temporización de dos estados a la vez, esto no favoreció que estudiará la evolución de esos incrementos, razón por la cual no establece diferencias entre curvas del mismo tipo.

En el caso del estudiante B, utilizó una temporización de dos estados a la vez para establecer las cantidades que aumenta o disminuye la velocidad. Además, su causalidad es diferente al estudiante A, pues considera que sin importar el tipo de curva la velocidad aumenta o disminuye. Por tanto, bajo este razonamiento tiene sentido diferenciar qué tan larga es esa curva, lo cual el estudiante realiza con base en el CEC que identifica. Nuevamente, aunque la causalidad pueda no ser correcta desde el punto de vista del fenómeno, permite al estudiante hacer un análisis del primer orden de variación.

Respecto al estudiante C, observamos una noción de variación avanzada pues, a diferencia de los otros dos estudiantes, considera la forma en cómo aumenta o disminuye la velocidad, y no solo cuánto. Esto se logra debido a que su temporización no se limita al de dos estados, sino que considera un conjunto completo de datos de la tabla como un solo estado y analiza varios de estos nuevos estados para determinar cómo se comporta la velocidad, aspecto que a él interesa debido a que la causalidad que establece está en términos de que las disminuciones de velocidad corresponden a curvas y los aumentos a rectas.

Concluimos entonces que, de manera general, la noción de variación que emerge en las respuestas de los estudiantes está ligada al desarrollo de la causalidad y la temporización. En particular, la causalidad parece ser la justificación de analizar el cambio en el fenómeno, mientras que la temporización permite que este estudio tenga lugar al reconocer estados intermedios. Esto tiene la consecuencia de que una temporización o una causalidad no adecuadas limiten la emergencia de la noción de variación, como se ve en el caso de los estudiantes A y B.

La causalidad y la temporización se presentan como elementos necesarios para la construcción de la noción de variación, razón por la cual articulamos ambas nociones en el constructo sistema de referencia para explicar la forma en cómo las personas, en este caso estudiantes de bachillerato mexicano, construyen la noción de variación. El presente escrito corresponde a una investigación en curso, razón por la cual quedan aspectos a considerar para el análisis de resultados, como por ejemplo, analizar cómo se relaciona un tipo de causalidad o de temporización (y por tanto sistema de referencia) con el tipo de variación que favorece, el tipo de escenarios propicios para la construcción de sistemas de referencia, así como el papel que tiene el desarrollo de prácticas variacionales.

Referencias bibliográficas

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del lenguaje y pensamiento variacional en profesores de bachillerato*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. DF: México.

Caballero, M. y Cantoral, R. (2016). Un estudio desde la Socioepistemología del desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. En F. Rodríguez, R. Rodríguez y L. Sosa (Eds.). *Investigación e Innovación en Matemática Educativa* 1(1), 287 – 295. Oaxaca: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.

Caballero-Pérez, M. y Cantoral, R. (2017). Una caracterización de la noción sistema de referencia para el tratamiento del cambio y la variación. En L. A. Serna (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 30, 1057 – 1065. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cabrera, L. (2009). *El Pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de Competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato*. Tesis de maestría no publicada, Centro de investigación y estudios avanzados del IPN, México.

Cantoral, R. (2013, 2016 2ª ed.). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon* 42, 353 – 369.

Hernández-Zavaleta, J. (2017). El desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional y las acciones en las prácticas predictivas. En L. A. Serna (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 30, 1009 – 1017. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Jones, S. (2015). Calculus limits involving infinity: the role of students' informal dynamic reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 46 (1), 105 – 126.

Moreno–Durazo, G. y Cantoral, R. (2016). Pensamiento y lenguaje variacional en la práctica médica. El caso de la "lectura" del electrocardiograma. En F. Rodríguez, R. Rodríguez y L. Sosa (Eds.). *Investigación e Innovación en Matemática Educativa* 1(1), 238 – 245. Oaxaca: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.

Nagle, C., Moore-Russo, D., Viglietti, J. y Martin, K. (2013). Calculus students and instructors' conceptualizations of slope: a comparison across academic levels. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11, 1 – 25.

ANÁLISIS DE CICLOS EPISTÉMICOS DE FIGURACIÓN EN BASE A DIPOLOS MODÉLICOS

Iván Pérez Vera, Eduardo Carrasco
Universidad de las Américas, U. Metropolitana de Cs. de la educación UMCE. (Chile)
ivanestebanperez@gmail.com, ecarrasc@gmail.com

Resumen
Se presenta los primeros avances de un proyecto de investigación en ejecución. Este estudio da cuenta de los usos escolares de figuraciones en el proceso de construcción de modelos ante fenómenos de variación. Se aborda el estudio de procesos del uso de modelos gráficos y algebraicos, mostrando una situación de modelación del movimiento estudiando fenómenos de cambio a través de distintos registros. Se explicitan resultados obtenidos en términos de análisis que van desde la noción de Modelación desde la socioepistemología y su articulación con el espacio epistémico de figuración.

Palabras clave: figuración, modelación, visualización

Abstract
This paper shows the first advances of an ongoing research. The study provides information on the school uses of figurations in the process of construction of models face with variation phenomena. It focuses on the study of the processes of the use of graphic and algebraic models, by showing a situation of movement modeling to study change phenomena through different registers. The results obtained are explained in terms of analysis ranging from the notion of modeling based on socio-epistemology and its articulation with the epistemic space of figuration.

Key words: figuration, modeling, visualization

Antecedentes

Investigaciones recientes han ido relevando el rol que tienen figuras no cartesianas en la actividad matemática estudiantil de modelación gráfica (Carrasco, Díaz & Buendía, 2014; Pérez, 2015; Pérez y Díaz, 2016; Miranda, Radford & Guzmán, 2007). Figuras que emergen en la actividad estudiantil y que permiten a los y las estudiantes hacer ostensibles aspectos del fenómeno. Lo cual se observa útil para procesos de modelación.

En particular, la modelación cobra importancia en Chile, por cuanto se incorpora como uno de los cuatro ejes que articulan el currículo escolar, incorporándose además como un estándar para la formación del profesorado. Así, el estándar tres del eje sistemas numéricos y álgebra del documento “matemáticas para

la formación inicial de profesores de enseñanza media de Chile" (Felmer, Varas & Martínez, 2010), señala que todo profesor o profesora debiera estar capacitado para promover el aprendizaje de los estudiantes en la comprensión del concepto de función, propiedades de ellas y de los principales ejemplos de funciones a nivel de enseñanza media. Sin embargo, este es uno de los aspectos más disminuidos en los procesos de enseñanza en Chile, lo que se refleja en los bajos rendimientos de estudiantes en las evaluaciones nacionales e internacionales (Rivas, 2015).
En este marco, el objetivo de la investigación es avanzar en el diseño de situaciones de enseñanza que incorporan el uso estudiantil de figuraciones no cartesianas y su rol en la construcción de modelos de fenómenos de variación. En particular se muestran resultados del rol que figuraciones no cartesianas tienen en procesos de desplazamiento de curvas poligonales de un fenómeno de variación a diversos modelos.

Antecedentes Teóricos

Entendemos la modelación desde Arrieta y Díaz (2015) como una práctica de articulación de dos entes, para actuar sobre uno de ellos, llamado lo modelado, a partir del otro, llamado modelo. La intervención sobre lo modelado es diversa, por ejemplo, para la predicción, el diagnóstico y/o la evaluación. Los entes matemáticos al modelar son herramientas. Desde esta perspectiva el modelo no existe independiente de la actividad de quién modela, quien en el acto de articulación entre modelo y lo modelado constituye un dipolo modélico, por ejemplo, entre la gráfica y la covariación de dos variables, o entre la función y la gráfica.

Dipolos, que articulados en red configuran la red de modelos asociada al fenómeno y articuladas por procedimientos, la intencionalidad y los argumentos que emergen en la actividad.

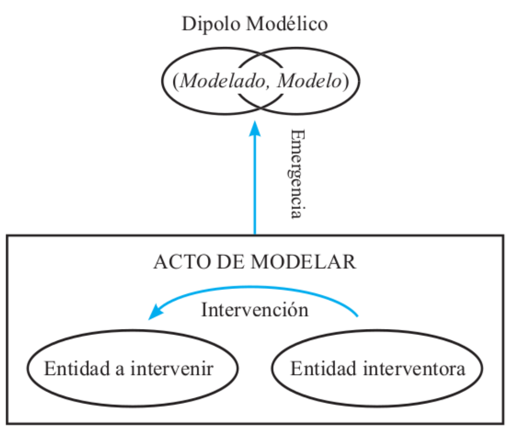


Figura 1. La modelación: El acto de modelar, el modelo, lo modelado y el dipolo modélico (Arrieta y Díaz, 2015, p.36)

Por su parte, Suárez y Cordero (2008) establecen la noción funcionamiento y de forma del uso de las gráficas en su uso como modelos de fenómenos de variación. Más precisamente, los elementos de funcionamiento son las circunstancias que hicieron posible la modelación de fenómenos de variación a través de figuras geométricas, en tanto que los elementos de forma son las clases de tareas. En Díaz y Pérez (2016) se describe el funcionamiento de las figuraciones como construcciones previas al desarrollo de la gráfica cartesiana en situaciones de movimiento, expresando la necesidad de los estudiantes de representar el contexto y el movimiento de aquello que cambia en el fenómeno, información que pareciera no ser mostrada en la gráfica cartesiana.

Por su parte Carrasco, Díaz y Buendía (2014) señalan que el conocer ocurre en la relación de la persona con el medio, con los otros y con lo otro. Luego construir o interpretar figuras de fenómenos de variación se da en la relación entre el observador, ambiente y fenómeno, y constituye un espacio epistémico de figuración que es a la vez operacional, experiencial y perceptual.

Los estudiantes constituyen un espacio epistémico de figuración que les permite significar elementos de la gráfica desde el fenómeno, a la vez que los elementos del fenómeno se evidencian y significan desde la gráfica, conformando un ir y venir entre fenómeno y figura. Concurren en sus prácticas elementos perceptivos, gráficos y propios de su experiencia con el fenómeno. Muestran la incorporación, superpuestas a la escena, de variables no ostensibles y significativas en la descripción de la variación (gravedad, tiempo, roce) (Carrasco, Díaz & Buendía, 2014)

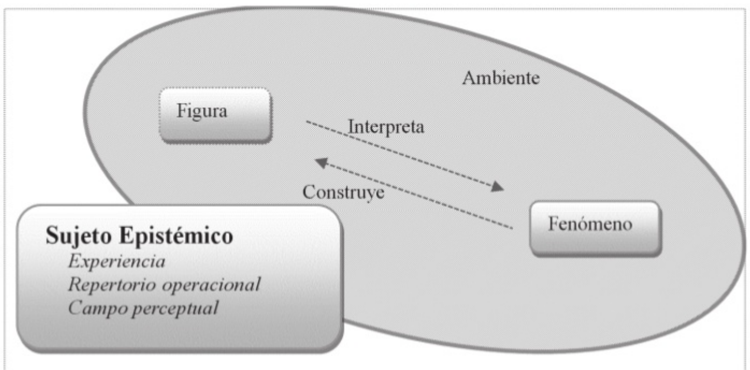


Figura 2. Espacio epistémico de figuración. (Carrasco, Díaz y Buendía, 2014, p. 368)

Antecedentes metodológicos

La implementación exploratoria, en el marco de un estudio de caso, aborda un caso de análisis, en particular se exponen los resultados de una estudiante de Pedagogía en Matemática y Estadística de la Universidad de las Américas, Chile, que cursa la asignatura de "Algoritmos y Programación". Para el análisis de la información en relación a los procesos de modelación nos situaremos bajo la mirada de la modelación de Arrieta y Díaz (2015) y para el análisis particular de las figuraciones lo haremos desde el espacio epistémico de figuración, propuesto por Carrasco, Díaz y Buendía (2014). Se aplica la situación "epifanía" (Suárez, Cordero, Daowz, Ortega, Ramírez y Torres, 2005, p. 323), que solicita a los estudiantes construir la gráfica del movimiento de "Valentina", describiendo los cambios de posición en su trayecto de ida y vuelta con respecto al tiempo.

Situación: Valentina llegó temprano a su clase de música. A punto estaba de sentarse cuando advirtió que había olvidado su cuaderno en su refugio predilecto: la siempre cómoda y acogedora biblioteca. No podía perderse el comienzo de la clase, así que fue a la biblioteca, cogió su cuaderno y regresó a su asiento, a tiempo para comenzar su, probablemente disfrutable, clase de música. Pero en el camino se encontró a su "bien amado" Juan y se detuvo a intercambiar algunas muestras de su muy auténtico cariño, lo que le llevó 4 minutos, pero de los largos, lo que la obligó a recuperar estos instantes, tan bien aprovechados, porque cuando salió del salón no previó la Epifanía. La biblioteca está en un punto diametralmente opuesto del salón de música en el patio circular, que tiene 500 metros de diámetro, de la escuela. Valentina tardó en total 9 Minutos. (Suárez et al, 2005, p. 323)

Resultados

Primer análisis. Descripción de los elementos de la figura. La estudiante construye una representación icónica del patio (Ver figura 3). Le representa con un círculo conformando el escenario donde se desarrolla fenómeno de movimiento. Con flechas indica el sentido y dirección del movimiento, mientras que es dibujado en el diámetro del círculo. Diversas textualidades describen la ubicación de los distintos elementos que completan el escenario (Sala de música y biblioteca) e indican las distancias y los tiempos correspondientes a cada recorrido. Un punto indica expresamente el punto de encuentro.

Segundo Análisis. Significaciones que emergen en los elementos de la figura respecto del movimiento. La figuración se constituye en la medida que el movimiento queda metaforizado en el conjunto, flecha, diámetro del círculo. Ambos elementos en conjunto establecen la dirección y longitud del movimiento, el cual se estructura desde tres puntos claves, partida, llegada y encuentro. Estos puntos establecen los tres movimientos descritos en el enunciado: Partida a la biblioteca, encuentro con el amado, llegada biblioteca, retorno. El tiempo de espera, no queda figurado, tomando el texto el relevo y con números y palabras establece la velocidad supuesta por la estudiante. El recorrido no plantea la velocidad, solo distancias y tiempo.

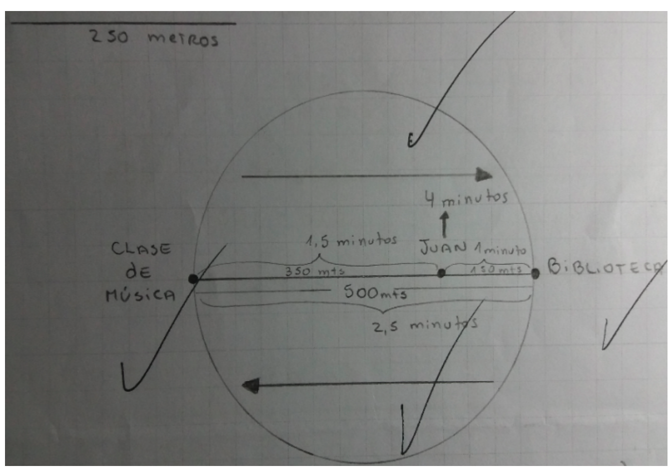


Figura 3. Producción estudiantil - Figuración no cartesiana

El gráfico cartesiano se realiza sobre la distancia recorrida (eje y) contra el tiempo (eje x), en base al análisis del fenómeno y de la figuración realiza gráfica cartesiana, identifican puntos de inflexión que se corresponden con los presentados en la figuración previa, trazan segmentos rectos manifestando una velocidad constante. Las únicas textualidades presentes son aquellas que nombran los ambos ejes, presentando graduación ambos (ver Figura 4).

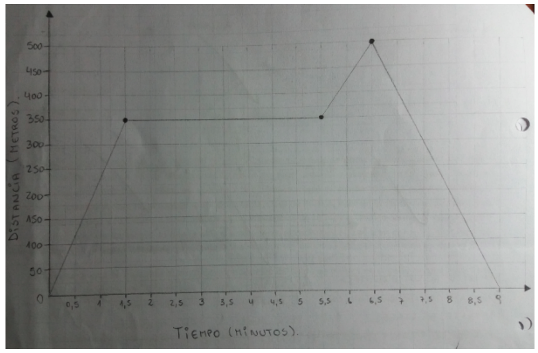


Figura 1. Producción estudiantil - Modelo gráfico.

Plantea modelo algebraico en base a funciones por ramas (segmentadas) que representan los distintos momentos en que se desarrolla el fenómeno, según la interpretación de la situación. Los tramos o segmentos coinciden con los puntos que articulan las figuraciones anteriores y con los distintos momentos expresados en la figuración no cartesiana (Ver figura 5).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{350}{1,5}x & 0 \leq x \leq 1,5 \\ 350 & 1,5 \leq x \leq 5,5 \\ 150x - 475 & 5,5 \leq x \leq 6,5 \\ -200x + 1800 & 6,5 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

Figura 2. Producción estudiantil - Modelo algebraico.

Para validar el modelo algebraico la estudiante utilizó el software Geogebra para realizar la gráfica de la función. Como resultado de este proceso se genera la gráfica que se expone en la figura 6, la que coincide con el modelo grafico (Figura 4) realizado con lápiz y papel por la estudiante, validando como consecuencia el modelo algebraico.

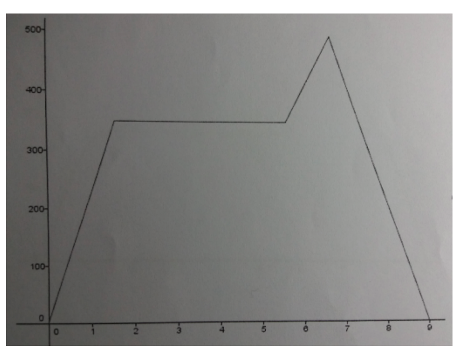


Figura 3. Producción estudiantil - Modelo grafico en Geogebra

Análisis

Observamos como en el acto de modelar surgen figuraciones no cartesianas que permiten intervenir el fenómeno (ver figura 7), un dipolo modélico en el que el agente interventor es una figuración no cartesiana. Entendemos esta intervención no tan solo como modificación o actuación sobre el fenómeno original, lo extendemos a una comprensión del fenómeno, es decir la figuración nos permite acercarnos a identificar los elementos que el sujeto que interviene considera de mayor importancia en el acto de modelar.

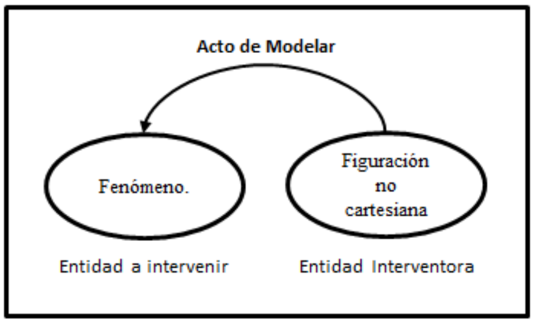


Figura 7. Figuración no cartesiana en el acto de modelar.

Avanzando en el análisis del acto de modelar, observamos la conformación de diversos dipolos modélicos que van conformando una red que, en sus elementos, tanto en interventores como intervenidos han de presentar figuraciones (ver figura 8), que en este relato van transitando desde el fenómeno hasta la construcción de diversos modelos, pasando cada elemento a cumplir distinto rol según el dipolo que se analice. La figuración ha de intervenir el fenómeno en un caso, y en otro, el modelo grafico interviene la figuración.

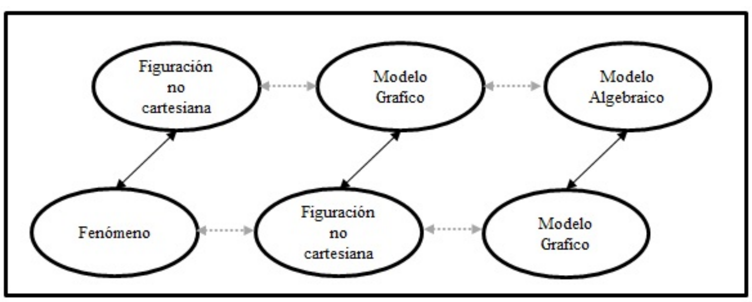


Figura 8. Red de dipolos modélicos incorporando figuraciones.

Al seguir profundizando en nuestro análisis se hace necesario reiterar hasta donde extendemos el concepto de “intervenir” propuesto en los dipolos modélicos, para cual no solo damos el sentido de modificar el fenómeno, desde la caracterización de la experiencia vivida con los estudiantes extendemos el intervenir hacia el interpretar, esto debido al rol que consideramos de las figuraciones en el proceso. Sin embargo, la interpretación no es un diálogo que ocurre entre los extremos de un dipolo, la interpretación necesariamente proviene de quien vive el acto de modelar, de cómo piensa el sujeto ante un fenómeno de variación, pasamos de una visión instrumental a una donde la episteme del sujeto (en este caso el estudiante) que modela es la que debemos observar.

El espacio epistémico de figuración se articula desde la relación existente entre la figura y el fenómeno, estableciendo este proceso como un acto del sujeto, quien interpreta el fenómeno desde la figura permitiendo también la articulación en sentido inverso. Proponemos hacer tangible en el acto de modelar, ya sea constituido en redes o no, que al emerger la figuración como elemento de un dipolo modélico lo que se evidencia es al sujeto, quien al modelar interpreta el fenómeno. Denominamos a este individuo que interpreta el fenómeno como “El sujeto epistémico”.

Esto nos sugiere articular el acto de modelar con el espacio epistémico de figuración, en particular desde la experiencia que se relata entendemos el proceso completo como un “Ciclo epistémico de figuración en base a dipolos modélicos” el que hacemos tangible en el esquema que se presenta a continuación.

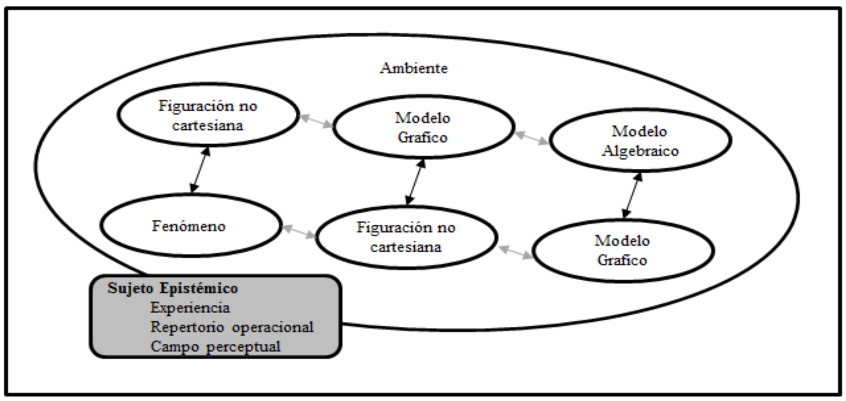


Figura 9. Ciclo epistémico de figuración en base a dipolos modélicos

Reflexiones

La presencia de las figuraciones no cartesianas en el acto de modelar, en particular al configurarse como uno de los extremos de un dipolo modélico, nos permite avanzar en el posicionamiento de las figuraciones en los procesos de modelación. Creemos, desde esta perspectiva acercarnos a la incorporación de las figuraciones no cartesianas en las discusiones sobre el discurso matemático escolar y como esta incorporación puede aportar en la construcción de un saber.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa* 18(1), 19–48.

Carrasco, E., Díaz, L. y Buendía, G. (2014). Figuración de lo que varía. Enseñanza de las ciencias. *Revista de investigación y experiencias didácticas, 32*(3), 365–384.

Díaz, V. y Pérez, I. (2016). Uso de gráficas en una situación de modelación del movimiento en matemática en la enseñanza secundaria en Chile. *Paradigma*, 37(1), 161–180.

Felmer, P., Varas, L. y Martínez, S. (2010). *Estándares de matemáticas para la formación inicial de profesores de enseñanza media* (Informe Final). Universidad de Chile.

Miranda, I., Radford, L., y Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Revista Educación Matemática*, 19(3), 1–26.

Pérez, I. (2015). Práctica de figuración en la construcción de modelos gráfico y algebraico: un caso de estudio con estudiantes de pedagogía en matemática. En *Actas XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática: XIX JNEM 2015* (207–214). Villarrica, Chile.

Rivas, A. (2015). *América Latina después de PISA: Lecciones aprendidas de la educación en siete países* (2000-2015). Fundación CIPPEC.

Suarez, L. y Cordero, F. (2008). Modelación-Graficación. Una categoría en Cálculo para resignificar la variación en una situación de modelación del movimiento. *ICME 11*.

Suárez, L., Cordero, F., Daowz, P., Ortega, P., Ramírez, A., y Torres, J. (2005). De los Paquetes Didácticos hacia un Repositorio de Objetos de Aprendizaje: Un reto educativo en matemáticas. Uso de las gráficas, un ejemplo. RIED. *Revista iberoamericana de educación a distancia*, 8(1-2).

SIGNIFICACIÓN GRÁFICA DE LA PENDIENTE: UN DOMINIO BÁSICO Y COTIDIANO

Ever Jiménez
Universidad Autónoma de Chiapas. (México)
everjimenezs@outlook.com

Resumen
La educación básica y los diseños curriculares en México son elaborados para desarrollar habilidades básicas e indispensables para la vida diaria. Desde un enfoque socioepistemológico, este trabajo de investigación abona a la discusión sobre cómo lograr el objetivo anterior y plantea que es el uso del conocimiento matemático lo que favorecería un contexto de significación para la matemática escolar. Se analizan entonces, los usos de las gráficas lineales y de la noción de pendiente al abordar un problema aparecido en un periódico en línea, con la finalidad de dar elementos hacia una matemática funcional para todos.

Palabras clave: educación básica, enfoque socioepistemológico, significación, pendiente

Abstract
Basic education and curricular designs are elaborated to develop the basic skills and those that are indispensable for daily life in Mexico. From a socio-epistemological point of view, the present research paper contributes to the discussion on how to achieve the previous objective. It states that the use of mathematical knowledge would favour a context of meaning for school mathematics. So, this paper analyzes the uses of linear graphs and the notion of slope when addressing a problem that appeared in an online newspaper in order to provide elements towards a functional mathematics for all.

Key words: basic education, socio-epistemological framework, meanings, slope

Introducción

Los conocimientos matemáticos van adquiriéndose de manera formal desde que los niños comienzan a integrarse a las aulas. En México, la educación básica es considerada hasta el tercer grado de secundaria que contempla a estudiantes de aproximadamente 15 años. Este nivel es considerado la piedra angular para la integración social de los individuos, en el cual se desarrollan habilidades básicas e indispensables para la sociedad entera, tal como es el caso del reconocimiento de los significados gráficos. Para efectos de esta investigación, se toma de manera particular el caso de la noción de pendiente y se centraliza en el análisis en cómo viven gráficamente, dicha noción en un marco de conocimientos generales que han recibido aquellos ciudadanos que han finalizado la educación básica.

El rol desempeñado por la educación básica es parte de la reflexión dentro del mismo, porque ésta, parece demostrar que la matemática escolar está enfocada a desarrollar conocimientos matemáticos que no satisface la demanda de las actividades diarias que realizan los individuos porque la noción de pendiente según el discurso matemático escolar (dME), está basado en una fórmula que posiblemente resulta poco útil porque no entra en contacto directo en las actividades diarias que realizan los ciudadanos. Además, se reconoce que la visualización forma parte del contexto cotidiano de la sociedad desde el momento que estamos expuestos a sinfín de información visual por parte de todos los medios de comunicación disponibles y de fácil acceso en la actualidad. Por ello, es necesario cuestionarnos, ante una gráfica lineal ¿Que significados reconocen y cómo respecto a la noción de pendiente?

El papel de la educación básica: la noción de pendiente y su tratamiento en los libros de texto

La Secretaría de Educación Pública (2013) afirma que la educación básica proporciona los cimientos necesarios para desarrollar armónicamente todas las facultades del ser humano y es el pilar de desarrollo nacional.

La autoridad normativa de la educación básica establece que los estándares curriculares están elaborados con el contenido indispensable para desarrollar las habilidades básicas para todos, y precisamente, la revisión de los mismos, permite observar que el eje denominado manejo de la información contempla la enseñanza de las gráficas desde tercer grado de primaria y está presente a lo largo del nivel básico.

El nivel básico está regido mediante un sistema por competencias, y respecto a ello la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura [UNESCO] (2012), afirma que la secundaria escolar es el modo eficaz de impartir las competencias que se necesitan para el trabajo y para la vida. Para el caso del reconocimiento de significados gráficos, lo que interesa es desarrollar competencias matemáticas, que según; Cattaneo, Lagreca, González y Buschiazzo (2012) argumentan que es una capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se pueden satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos, constructivos, comprometidos y reflexivos. Dicha capacidad debió ser desarrollada en todos los ciudadanos que han cursado la educación básica.

Al hablar de una relación lineal, al concluir la educación básica un ciudadano habrá tratado por lo menos con expresiones del tipo $y = kx$ o $y = mx + b$ en las que k y m representan el concepto llamado pendiente de la recta: una razón de cambio que indica cuánto cambia una variable respecto a la otra. En particular, la fórmula para la pendiente que se presenta en la matemática dentro de los libros de texto es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La competencia matemática para el caso particular de la pendiente, estará desarrollada en el momento que los ciudadanos comprenden los usos de la razón de cambio para satisfacer sus necesidades, y precisamente en ese momento quienes hayan finalizado la educación básica habrán comprendido el papel que juega la noción de pendiente en el mundo.

Acerca del cotidiano: el caso de la información visual mediante gráficas

La sociedad está expuesta a un mundo globalizado que expone diversos medios de comunicación como la televisión, revistas, periódicos, redes sociales, etc., en los cuales se pueden observar gráficas. A través de ellas, se transmite información de interés para todos y es en ese contexto donde preguntamos cómo se usa el conocimiento matemático adquirido en la escuela, en educación básica en particular, para conocer y analizar dicha información.
Se ha demostrado fehacientemente que las gráficas están presentes en todo el mundo, tal es el caso de Perú, quien en el diario "El Peruano" en su versión en línea con fecha 28 de febrero de 2017, emitió su portada (ver figura 1) con una gráfica de corte lineal que presenta el gasto de turistas extranjeros que va de 2013 a 2017, y precisamente es algo que concierne a todos los ciudadanos debido a la gran concurrencia turística que tiene el país y las gran cantidad que personas que depende del flujo del mismo.

De manera natural, no se espera que en dicho contexto se usen fórmulas; es sólo la tradición escolar la que está cargada de aspectos analíticos. En cambio, como mencionan Zaldívar y Cordero (2015), el cotidiano se aleja del discurso escolar sobre la matemática y da énfasis a aspectos que son relegados u opacos en el aula.


NORMAS LEGALES. DECRETO SUPREMO QUE APRUEBA EL TEXTO ÚNICO ORDENADO DE LA LEY DE REGULACIÓN DE HABILITACIONES URBANAS Y DE EDIFICACIONES.
HOY EN JURÍDICA.
DIARIO OFICIAL DEL BICENTENARIO
El Peruano
ÚTILES RECOMENDACIONES
CENTRAL. PADRES DE FAMILIA TAMBIÉN DEBEN PREPARARSE PARA EL INICIO DE CLASES. P. 6-9
POLÍTICA
Adolfo Castillo es el nuevo jefe de la ONPE
RENUEVA COMPROMISO DE EXPANDIR COMERCIO E INVERSIÓN
EE. UU. profundizará relación con el Perú
Presidentes Kuczynski y Trump ratifican responsabilidad compartida en la lucha contra el crimen organizado transnacional. Jefe del Estado destaca que nuestro país es reconocido por lucha emprendida contra la corrupción. P. 3
POLÍTICA
Informe estará listo en tres meses
Trabajo intenso y coordinado
POLÍTICA
Progenitores se suman a Qali Warma
ECONOMÍA
El turismo aporta al PBI
DERECHO. LOS JUZGADOS COMERCIALES EMPIEZAN REMATES ELECTRÓNICOS.

Figura 1. Portada del diario *El Peruano* (Diario *El Peruano*)

Marco teórico

La utilidad fundamental de una gráfica es comunicar información de manera visual. Arcavi (2003) señala que visualizar es ver más allá; es la habilidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre imágenes con el propósito de representar y comunicar información, reflexionando y desarrollando idea.

La gráfica de cualquier función lineal es una línea recta que muestra información valiosa para quienes hacen su lectura. Buendía (2012) explica que la noción de pendiente es una herramienta matemática, sin embargo, cuando hacemos uso de ella en situaciones diarias es cuando podemos darle un verdadero significado.

Proponemos partir de una postura epistemológica sobre la construcción del conocimiento matemático que le permita al ciudadano "encuentros" con el conocimiento matemático, problematizando el saber en juego (Zaldívar y Cordero, 2015). Entonces, buscamos aquello que los ciudadanos hacen, usan y expresan al tratar con las gráficas y esto, de acuerdo a los autores citados, son formas culturales de conocimiento matemático puestos en uso. Analógicamente, las gráficas presentes en los diversos medios de comunicación disponibles para los ciudadanos son una gran fuente de enriquecimiento de encuentros que permite el reconocimiento de significados gráficos y permite el desarrollo de aquella matemática funcional y articulada que se busca dentro de la matemática educativa.

Metodología

Se realizó la búsqueda de una gráfica de corte lineal que tratara un tema de interés general y no del algo que requiriera de algún conocimiento como en las revistas especializadas, por ello se seleccionó una gráfica publicada por el diario el PAIS con fecha 27 de febrero de 2016 en su versión en línea, la cual presentaba información de la llegada de turistas (en millones de personas) a México, el Caribe, América Central y América del Sur. Para efectos de la investigación, se propusieron seis preguntas que incentivaran a las personas a poner en juego la noción de pendiente, sin embargo, solo se analiza dos de las peguntas más representativas.

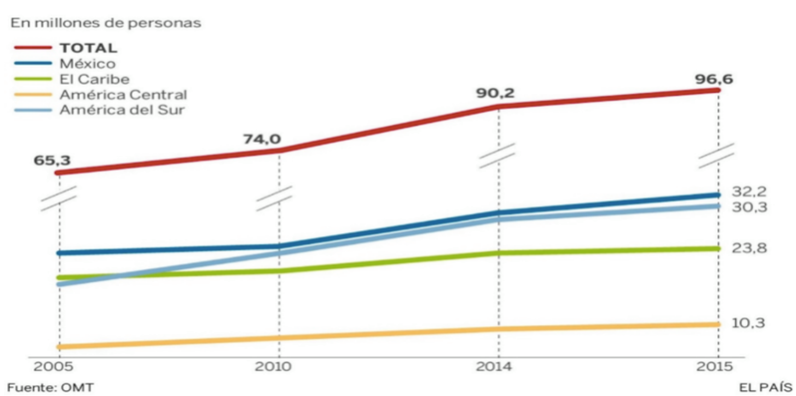


Figura 2. Llegada de turistas *(diario El País)*

Las actividades fueron aplicadas a diez personas que han cursado el nivel básico de educación, independientemente de que hayan continuado sus estudios de nivel medio superior, universitario o posgrado.

- Cecilia: comerciante que finalizó la secundaria hace 20 años
- Guadalupe: estudiante de tercer grado de secundaria
- Olga: profesora de primaria
- Carlos: Estudiante de nivel medio superior:
- Patricia: Recepcionista de hotel, egresado de nivel superior.
- José Abraham, persona de limpieza de hotel que culminó estudios de nivel medio superior.
- Narda: estudiante de nivel licenciatura de la carrera de Economía

- José Irving, estudiante de contabilidad
- Angelina, profesora de bachillerato
- Gustavo, profesor de economía.

Análisis de resultados

En este apartado se analizan dos preguntas que se consideraron más representativas para analizar la noción de pendiente y los significados gráficos.

Pregunta 1: ¿En qué año, México alcanza el mayor número de llegada de turistas? ¿Cómo lo deduce?

Todas las respuestas coincidieron: 2015. Sin embargo, la manera que usan las gráficas es distinta.

- *Respuesta de Gustavo:* Hay crecimiento de la demanda de 2015, con respecto a 2014, y se ve por la tendencia de lento crecimiento.
- *Respuesta de José Irving*: 2015.

Observamos que José Irving, fue puntual al responder, sin embargo; realizó el análisis de la recta marcado cuatro puntos en cada periodo. En cambio, Gustavo habla de intervalos más grandes, no puntuales, señalando la tendencia de la recta.

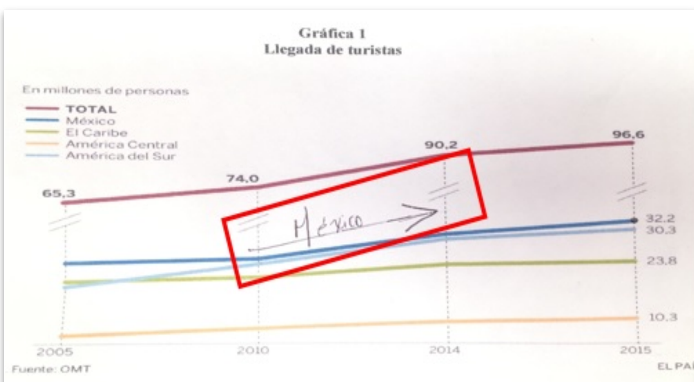


Figura 3. Respuesta de Gustavo

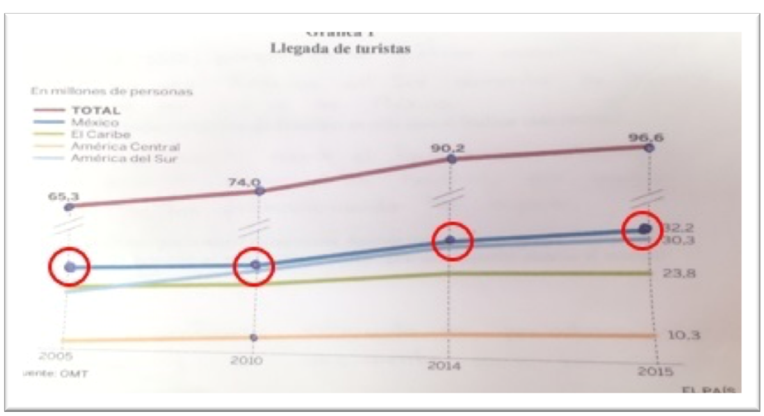


Figura 4. Respuesta de José Irving

Pregunta 6: Suponiendo que la economía mexicana, depende únicamente de la actividad turística, ¿en qué momento se encontraría estancada? en qué momento alcanzaría el máximo crecimiento?

- *Respuesta de Cecilia:* Se encontraría estancada cuando no tuviera turistas como en los años 2005-2010 y alcanzaría el máximo cuando tenga demasiados turistas como en 2014 y 2015.

- *Respuesta de Patricia:* En el periodo de 2005 a 2015, ha estado constante, no hay cambio ni positivo ni negativo, el mayor crecimiento se presenta en 2015
- *Respuesta de Gustavo:* En 2005-2010 hubo una recesión mundial y afectó la afluencia turística con un leve crecimiento. De 2010 a 2015, denota un mayor crecimiento y México está creando condiciones con infraestructura aérea portuaria y carretera, para crear una oferta satisfactoria al turismo internacional.

Partiendo de la respuesta de Cecilia, es preciso evidenciar que ella es quien trabaja en el mercado, y se demuestra que las gráficas son una gran fuente de enriquecimiento de significados permitiéndole tener información correcta a la mano, que a la vez resulta útil para su entorno debido a su grado de sensibilidad a lo que ocurra con el flujo de turistas y esto le permitirá predecir la afluencia turística futura y su desempeño en el mercado como comerciante. En el caso de Gustavo, dicha información se complementa con datos propios y cabe hacer notar que Gustavo al ser economista trae elementos no exclusivamente matemáticos para responder la pregunta, porque su cotidiano es ser profesor de economía. Patricia identifica un periodo de estancamiento entre el 2005 y el 2015; señala que el mayor crecimiento es en este último año. Siguiendo su forma de argumentar se nota que se basa en la identificación de puntos clave.

Las preguntas puestas en escena no incentivaron al desarrollo de un análisis numérico profundo, pero fue obvio que las personas que contestaron no buscaron hacer uso de la fórmula que dicta el dME. Sin embargo, personas hacen notar mediante argumentos como *constante, crecimiento inclinación, cambio y decrecimiento,* que tienen la noción de dicha herramienta matemática. Claramente, notaron la inclinación de la recta, pero haciendo referencia al cambio entre puntos.

Conclusiones

La información de las gráficas trae consigo entender que la visualización es compleja, sin embargo hay que hacer uso de ella de manera cotidiana al estar expuesto a una gran cantidad de información visual mediante gráficas; como en el caso de los periódicos que contienen información útil para todos, y en muchas ocasiones presentan gráficas de corte lineal que consigo trae la necesidad de analizar la pendiente para socavar la mayor información posible, sin embargo; dicha herramienta se contrasta en el contexto cotidiano versus el contexto escolar, pues dentro de las aulas se ha tratado de enseñar mediante una fórmula que los ciudadanos no usan en la vida diaria y ellos logran significar gráficamente a la pendiente sin hacer uso de dicha fórmula, porque como se ha evidenciado en la puesta en escena lo hacen mediante la visualización del comportamiento e inclinación.

Cabe destacar, que bajo una postura socioepistemológica lo que se buscaba no eran respuestas correctas o incorrectas sino la riqueza de información que se encuentra en la forma de responder de cada una de las personas y ver que el significado gráfico que ellas trastocan depende del cotidiano en que se desempeña diariamente.

Dadas las evidencias antes señaladas, el cotidiano es una gran fuente de enriquecimiento para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, que muchas veces no logra satisfacer las demandas de las personas fuera de los contextos escolares, y es precisamente, el uso del conocimiento matemático en el cotidiano lo que permitiría desarrollar aquella matemática funcional y articulada.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (2003). The Role of visual Representations in the learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52,* 215-241.

Buendía, G. (2012). El uso de las gráficas cartesianas. Un estudio con profesores. *Educación Matemática*, *2*, 5-31.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* México: Gedisa editorial.

Cattaneo L., Lagreca N., González N. y Buschiazzo N. (2012). *Didáctica de la Matemática. Enseñar a enseñar matemática.* Argentina: Editorial Homo Sapiens

Secretaría de Educación Pública (2013). *Programa sectorial de educación*. México.

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (2012). *Los jóvenes y las competencias: trabajar con la educación.*

Zaldívar, D. y Cordero, F. (2015). Conozca al señor Movimiento: la situación del resorte. En Cordero, F.*, La ciencia desde el Niñ@. Porque el conocimiento también se siente,* pp. 129-140. Barcelona: Gedisa.

EL PROCESO DE REFLEXIÓN DE UN PROFESOR DE SECUNDARIA SOBRE LA MATEMÁTICA ESCOLAR. UNA PERSPECTIVA SOCIOEPISTEMOLÓGICA

Mayra Báez Melendres, Rosa María Farfán Márquez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)
mbaez@cinvestav.mx, rfarfan@cinvestav.mx

Resumen
Se presentan los resultados de un proyecto de investigación doctoral que tuvo por objetivo conocer el proceso de reflexión de un profesor de matemáticas de secundaria sobre la matemática escolar. Para ello, se configuró un modelo sustancial que expresa los componentes del proceso reflexivo, teóricos y metodológicos, que se usó en el análisis de las entrevistas realizadas. Al respecto, se identificaron algunas categorías que permiten entender diversos aspectos del desarrollo del proceso reflexivo que tiene como marco a la socioepistemología, así como la complejidad del desarrollo de una Práctica Reflexiva.

Palabras claves: práctica reflexiva, matemática escolar, socioepistemología, profesionalización docente

Abstract
We present the results of a doctoral research project that aimed to know the reflection process of a high school mathematics teacher on school mathematics. For this, we designed a substantial model that expresses the theoretical and methodological components of the reflexive process, which was used in the analysis of the interviews. In this respect, we identified some categories that allow understanding diverse aspects of the development of the reflective process, based on a socio-epistemology framework, as well as the complexity of a reflective practice development.

Key words: reflective practice, school mathematics, socio-epistemology, teacher professionalization

Problemática

La problemática de esta investigación se sitúa en el terreno de la profesionalización docente, que si bien su discusión central es cuestionar la racionalidad técnica con que se ejecuta la enseñanza, hemos considerado al desarrollo de autonomía y responsabilidad como los elementos que atienden dicha racionalidad (Perrenoud, 2004), cuya herramienta es el desarrollo de una Práctica Reflexiva (PR) (Lozano, 2011; Perrenoud, 2004; Bazán, 2007). En el terreno educativo, ésta PR ha centrado los esfuerzos hacia el análisis de la práctica docente, que buscan también la sistematización de esta práctica (Minakata, 2006), consideramos que, en el caso de los profesores de matemáticas, este análisis debe incluir cuestionamientos de la matemática que enseña (Báez & Farfán, 2015), específicamente, una reflexión sobre el conocimiento matemático propio.

Desde publicaciones anteriores como Báez y Farfán (2014), Báez y Farfán (2015), Báez y Farfán (2017), se ha planteado el interés de poner atención al proceso de reflexión que vivencia un profesor de matemáticas cuando realiza actividades fundamentadas en la Teoría Socioepistemológica. La revisión literaria sobre modelos de reflexión de la práctica docente y el desarrollo del pensamiento reflexivo (Dewey, 1989), ha llevado a obtener algunos componentes que se involucran en el proceso de Reflexión: Toma de conciencia, Construcción de conocimientos y Transformación, mismos que configuran una unidad mínima de análisis. Es decir, un proceso de reflexión está asociado a tomar conciencia de la realidad actual que se vive (Freire, 1973), que puede ser expresado a través del conocimiento que se tiene; de construir hipótesis, teoría, conjeturas como producto de nuevas exploraciones o interacciones; y de la transformación, como la evaluación y valoración de los productos en la realidad y sus efectos (Sañudo, 2006). De esta forma, resulta inevitable preguntarse sobre el proceso cuando la matemática escolar es el objeto de reflexión, y es estudiada bajo una postura socioepistemológica.

Marco teórico

La Socioepistemología tiene como eje de sus estudios el saber matemático, que toma en cuenta los aspectos históricos y contextuales que dan sentido y significado a la matemática misma, en otras palabras, toma como postura ontológica y epistemológica que la matemática se construye socialmente (Cantoral, 2013). De esta forma, refiere a la Matemática Escolar como aquella matemática que vive dentro y fuera de la escuela, pero con una racionalidad que la presenta anterior al desarrollo del pensamiento humano, y que genera en las aulas un espacio de reproducción de conocimientos. Al conjunto de fenómenos que se identifican bajo dicha racionalidad se le llamado desde esta postura teórica, *discurso Matemático Escolar* (dME), que se caracteriza como un sistema un sistema razón que produce una violencia simbólica (Soto, 2014) al reconocer un solo conjunto de significados, procedimientos y argumentos de los conceptos matemáticos; y reproduce conocimientos a través de diferentes medios, como el discurso de los profesores, los libros de texto, los planes y programas de estudios. Es entonces, la propuesta del rediseño del dME (rdME), aquello donde la teoría ha centrado sus investigaciones. Una alternativa que tiene como base epistemológica a las *prácticas* (Cantoral, 2013), donde se reconoce la diversidad de las formas de construcción y argumentación del conocimiento. El camino entonces, a nivel teórico, es proponer el tránsito del dME al rdME.

Bajo estos planteamientos teóricos, desde los cuáles se configuran espacios para la interacción con profesores, ¿qué caracteriza al proceso de reflexión que se desarrolla? Se identifica en primera instancia que tomar consciencia del dME representará la parte fundamental del proceso reflexivo para posibilitar un tránsito hacia el rdME, camino permeado por otros conocimientos y experiencias del profesor, pero necesariamente iniciado por una confrontación con el conocimiento matemático propio. Dicha confrontación representa la provocación de una conciencia sobre el dME al tiempo que impulsará la reorganización del patrón referencial básico (Vargas, 2003), es decir, incitará a la transformación, que en términos teóricos representa el camino para el conocimiento y reconocimiento de las *prácticas*, el rdME.

En el tránsito del dME y rdME se busca que el conocimiento matemático se (re)construya poniendo en funcionamiento las nociones, significados y usos que las personas han asociado a su conocimiento, que teóricamente forman parte del dME. Por tanto, la construcción de nuevos argumentos, significados, procedimientos es parte constitutiva de este proceso de reflexión. Esto refiere a una resignificación de los objetos matemáticos, orientada por la problematización del saber matemático matemático en cuestión (Cantoral, 2013). Al poner en confrontación los conocimientos propios con aquellos que constituyen las *prácticas*, configuran un espacio de comparación y evaluación de la suficiencia del conocimiento adquirido al intentar responder situaciones problema intencionadas (Montiel, 2010). De esta forma, se genera la necesidad de modificar (re)construir el conocimiento, formular, articular, contextualizar. Es en la resignificación donde se reconoce un (inicio de) proceso de transformación, ya que la resignificación evidenciada involucra el reconocimiento de una forma y tratamiento del saber matemático que está siendo puesto en funcionamiento (Montiel, 2010). En otras palabras, se comienza a apreciar un fenómeno de empoderamiento (Reyes, 2016) incitado por la reflexión del conocimiento matemático. De esta forma, la confrontación y resignificación que plantea la postura socioepistemológica para el rdME, resultan orientadores del proceso de reflexión sobre la matemática escolar.

Para el rdME se requiere que la confrontación y resignificación sean permanentes, "ya que aquellas cuestiones que hoy parecieran innovadoras, el tiempo las hará hegemónicas." (Reyes, 2016, p. 36). Así, los procesos de reflexión que se generen bajo de esta perspectiva, el carácter permanente llegará a constituirlos en *praxis*: la concientización (provocada por la confrontación, toma de conciencia); la resignificación progresiva (construcción de argumentos, significados y procedimientos); la práctica orientada (representada por acciones argumentadas, transformación).

Marco metodológico

Esta investigación es un estudio de corte cualitativo que consideró un fenómeno en particular: la reflexión que sucede en escenarios guiados por la postura socioepistemológica. Para esto, el informante fue un profesor de matemáticas de nivel secundaria (estudiantes de 12 a 15 años), en la Ciudad de México, con 16 años de docencia, asistente de un proyecto de Profesionalización en 2010, con sustento Socioepistemológico.

Para la realización del estudio, se consideró a la proporcionalidad como tema de discusión no solo por su transversalidad, sino por la problematización de este saber realizada en Reyes (2016) bajo la teoría Socioepistemológica, resultado que ha servido de fundamento para la configuración de escenarios (actividades, discursos, herramientas) para la interacción con profesores. Esta problematización parte de reconocer que un *discurso proporcional escolar* insuficiente para afrontar problemas que demandan este pensamiento, en tanto que los argumentos, los significados, los procedimientos se presentan desarticulados y escasos. Esto ha generado que las prácticas docentes se restrinjan a una enseñanza con las mismas características. Por tanto, la problematización tuvo la función de recuperar las ideas germinales que dan sentido y significado a este conocimiento desde las *prácticas*, estableciendo así elementos para el rediseño del discurso escolar relativo a lo proporcional.
Con dicha base, se construyeron actividades para provocar la reflexión de la matemática escolar en el sentido expuesto previamente. Estas actividades se organizaron en tres fases con los siguientes objetivos:

- Fase 1: Confrontación. Generar en el profesor confrontaciones con su conocimiento matemático que al mismo tiempo le provocaran una conciencia sobre éste.

- Fase 2: Construcción de argumentos. Construir argumentos a partir del análisis de los modelos de razonamiento proporcional conocidos y también los no reconocidos por el profesor.
- Fase 3: Acercamiento a las prácticas. Resolver situaciones no escolares que involucraran el uso de nociones, conocimiento matemático, procesos, relaciones contextuales, experiencias reales, que condujeran al conocimiento y reconocimiento de las prácticas relacionadas a lo proporcional para la construcción de conocimiento matemático.

El instrumento para la tomad de datos fueron entrevistas en profundidad, guiadas por los planteamientos de las actividades. Dado que se trata de un solo profesor, se buscó generar el mejor espacio de interacción, donde compartir y exponer los conocimientos matemáticos no fuera un impedimento para la reflexión.

A continuación, se expone una síntesis del proceso de análisis de los datos. Para esto se utilizaron dos herramientas: a) un modelo de reflexión de tres componentes, como producto de la interacción de dos elementos: la revisión literaria sobre el desarrollo del pensamiento reflexivo y las consideraciones de la perspectiva socioepistemológica; b) la Teoría Fundamentada de Strauss y Corbin (2002) para la configuración de conjeturas del proceso reflexivo. El modelo permitió establecer el fenómeno que interesaba identificar, las confrontaciones, y arrojó categorías previas para el análisis: los argumentos, significados y las acciones. Por otro lado, la metodología de la Teoría Fundamentada se usó para refinar tales categorías y entender cómo sus dimensiones y propiedades describían y explicaban las confrontaciones.

Análisis y resultados

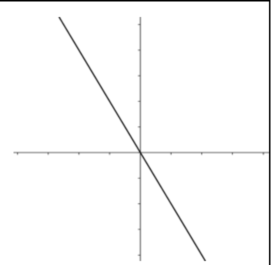
La articulación de los instrumentos de análisis se realizó como sigue: primero se identificaron los momentos de confrontación en cada fase, aquellos que desencadenaban las tensiones en el conocimiento matemático propio. Cada confrontación, a su vez, desprendía una serie de cuestionamientos sobre otros conocimientos matemáticos, didácticos, y formativos. Así, el proceso de reflexión en cada fase, se mantuvo por la búsqueda de la superación de tales confrontaciones, de esta forma, se fueron configurando las siguientes categorías y códigos:

Tabla 1: Códigos y categorías identificadas en el proceso reflexivo de la matemática escolar.

Codificación Abierta Fase 1, 2, 3 (Códigos)	Codificación Axial Fase 1, 2, 3	Codificación Selectiva Fase 1, 2, 3
1. Análisis 2. Argumentos 3. Definiciones 4. Significado 5. Cómo enseña 6. Rol profesional 7. Transversalidad disciplinar y contextual	Cómo argumenta • Análisis • argumentos • definiciones Significados Rol profesional • Cómo enseña • Rol profesional	• Fase 1: La relación con el conocimiento matemático escolar. • Fase 2: La relación con los referentes institucionales • Fase 3: La relación con las *prácticas*.

8. Expectativas 9. Estudiantes 10. Cómo actúa 11. Cómo resuelve 12. Programa 13. Libro 14. Internet 15. Compañeros	• Transversalidad d-c • Experiencias escolares Referentes institucionales • Estudiantes y Expectativas • Programa • Internet • Libros • Compañeros y ATP • Experiencias didáctico-contextuales Vivencias y conocimiento • cómo actúa • cómo resuelve	

En síntesis, la articulación de estas categorías se dio como sigue:

Fase 1	Se presentó la siguiente actividad donde se tenía que argumentar sobre el tipo de proporcionalidad de la gráfica.  El argumento fue: "los alumnos se saben, así como que de memoria, que la variación proporcional en una gráfica es aquella línea que parte del origen y que va creciendo de la misma forma una cantidad que la otra." (F1E1,21). Esto hacía concluir que la gráfica de variación inversa por la forma de la recta. La configuración de la tabla de valores de dicha gráfica permito confirmar dicho argumento, mientras que la obtención de la expresión algebraica, usando los valores de la tabla, permitió establecer una expresión de la forma Y=KX, con lo cual concluía la proporcionalidad directa. La desarticulación de los argumentos, con base en el mismo fenómeno, pero distinta representación evidenció la relación del profesor con su conocimiento matemático (categoría central de la fase 1). La confrontación provocó la necesidad de indagar en significados, definiciones y métodos relacionados a la proporcionalidad, así como el análisis de expresiones algebraicas, generar conciencia del signo negativo como representación de otra forma de variación de las magnitudes, articulación de significados, argumentos y representaciones.

<table>
<tr><td>Fase 2</td><td>
c) El lado 5 cm mida 4 cm
<table>
<tr><th>Medida del lado original cm</th><th>Medida del lado solicitado cm</th></tr>
<tr><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>4</td></tr>
<tr><td>7</td><td></td></tr>
</table>
Se presentó una actividad que proponía el llenado de tablas en función de la nueva medida de los lados de un rompecabezas. La confrontación se presenta al no tener elementos para poder argumentar sobre el llenado y realizarlo. La postura fue: “No. No importa [refiere al grado de secundaria]. De hecho, entre maestros, confunden esto, ¿eh? … Porque estamos enfocados en proporcionalidad y no le vemos ahí la proporcionalidad.… Y sin embargo no, no, no debe ser.” (F2E2, 282). Por lo que las reflexiones se tornan hacia las herramientas de debió desarrollar durante su formación inicial o profesional, como conocimientos y métodos, para poder atender la situación. Esto permite indagar en las formas de resolución ampliando las formas de razonamiento, profundizando en significados como el de proporción y razón, indagando en formas cualitativas como el significado del factor de proporcionalidad en relación a la variación que representa y la razón indeterminada. Las acciones más relevantes fueron los mecanismos de comprobación y validación del conocimiento con colegas de la institución escolar que tienen diferentes roles, lo cual indicó una relación de confiabilidad con tales referentes.
</td></tr>
<tr><td>Fase 3</td><td>Se desarrolla una actividad fuera de los problemas típicamente escolares. Se propone así un planteamiento su formación inicial o profesional, como conocimientos y métodos, para poder atender la situación. Esto permite indagar en las formas de resolución ampliando las formas de razonamiento, profundizando en significados como el de proporción y razón, indagando en formas cualitativas como el significado del factor de proporcionalidad en relación a la variación que representa y la razón indeterminada. Las acciones más relevantes fueron los mecanismos de comprobación y validación del conocimiento con colegas de la institución escolar que tienen diferentes roles, lo cual indicó una relación de confiabilidad con tales referentes.</td></tr>
</table>

En todas las fases, se expone una relación del profesor con su conocimiento matemático, pero de distinta naturaleza, primero con el conocimiento que enseña, luego con el de su formación matemática, y por último, que tiene pero no enseña. Estos aspectos en conjunto con las categorías, permiten notar cómo las argumentaciones en el ámbito escolar están permeadas por la costumbre didáctica y la desarticulación de los conocimientos curriculares. Se pudo constatar que algunas argumentaciones se desechan porque no pertenecen al grado escolar en el que se enseña, y porque existe una forma de *vigilancia* hacia el cumplimiento del programa, lo que regula un conocimiento amplio y limitado, pero no erróneo.

Por otro lado, las argumentaciones que demandan poner en juego la naturaleza del conocimiento se perciben como moldeadas por la situación y el involucramiento en la misma, una forma de construcción que articula varios saberes, aunque todavía no apta para su incorporación inmediata al ámbito escolar. Lo anterior, representa en el proceso de reflexión de tres fases, una forma de ruptura en la naturaleza de los argumentos, esto es, el modelo diseñado no guía el camino de construcción del conocimiento, eso dependerá de la problematización, y sobre todo, de la articulación que cada profesor ponga en juego según sus experiencias y otros conocimientos; el modelo guía un proceso que toma cuenta elementos para promover dicha construcción.

Por otro lado, el rol de los referentes tanto del conocimiento matemático como los institucionales son elementos que formaron parte del proceso. Esto, en términos del conocimiento, el reconocimiento de aspectos mínimos sobre las diferentes formas de representación para el análisis, influye en el tipo de argumento; de la misma forma, los recursos que se tengan en mente o a la mano, como estudiantes, compañeros profesores, programa, planes, ATP's, libros, internet, validan o comprueban el conocimiento del profesor. Así, tales confirmaciones abonan al terreno del desarrollo de autonomía sobre los conocimientos matemáticos. En estos aspectos es que se evidencian las acciones.

De esta forma, uno de los resultados de este proyecto es que sin confrontación no hay reflexión bajo la postura teórica expuesta, además, que la confrontación es situada: pueden y no ser las mismas confrontaciones para otros profesores. De esto se desprende un resultado a nivel macro: sobre los efectos de la dinámica escolar actual para el desarrollo profesional docente y la profesionalización, que influyen para la transformación de la práctica.

Discusión y conclusiones

Uno de los propósitos mayores del proceso de reflexión es generar conciencia sobre la realidad que se vive (Freire, 1982). En este caso, la conciencia sobre el discurso matemático escolar que se reproduce será de una complejidad tal por la autoridad que representa. Sin embargo, la propuesta del rediseño deja clara su necesidad y pertinencia de cambio. De esta forma, se ve afectado el sentido de responsabilidad sobre la formación matemática hacia el entendimiento de la propuesta para su incorporación a la enseñanza, en otras palabras, que tenga para el profesor un sentido y significado que le permita construir argumentos cada vez más elaborados: elemento normativo de su enseñanza.

El desarrollo de una práctica reflexiva en matemáticas, para orientar la práctica docente, se presenta en este profesor como un desarrollo complejo, ya que pone sobre la mesa una discusión de la formación matemática inicial y continua, y algunos mecanismos de sujeción al sistema, limitando así, las posibilidades de transformación del profesor y su práctica.

Los esfuerzos dirigidos al desarrollo de la autonomía sobre el conocimiento matemático a través de una práctica reflexiva, se ven aplazados o limitados a condiciones que superan los deseos de transformación.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social de conocimiento*. Mexico: Gedisa.

Báez, M. y Farfán, R. (2014). El rediseño de situaciones de aprendizaje y la reflexión docente. El P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 27, pp. 1585-1592.

Báez, M. y Farfán, R. (2015). La matemática escolar como objeto de reflexión docente. Aspectos para su desarrollo. Memorias del Vigésimo noveno de la *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Alicante, España.

Báez, M. y Farfán, R. (2017). Reflexionar sobre la matemática escolar. Una ruta socioepistemológica. El L. Serna (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *30,* pp. 1037-1045.

Bazán, D. (2007). Autonomía profesional y reflexión docente. *El oficio del pedagogo. Aportes para la construcción de una práctica reflexiva en la escuela*, Cap. IV, p. 93-117. Homo Sapiens Ediciones.

Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos. Nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo*. Barcelona: Paidós

Freire, P. (1973). *Pedagogía del oprimido*. (11ª edición). México: Siglo XXI Editores

Freire, P. (1982). *La educación como práctica de la libertad*, (29ª edición). Siglo XXI Editores.

Lozano, I. (2011). La formación de docentes reflexivos: Una lectura histórico-política en México. *Segundo Congreso Internacional de Investigación Educativa.* Universidad de Costa Rica, Costa Rica.

Minakata, A. (2006). La resignificación metodológica de la práctica docente, constitutivo de la transformación de la práctica educativa. En R. C. Perales (coord.), *La significación de la práctica educativa*, 87-97. México: Paidós.

Montiel, G. (2010). Hacia el rediseño del discurso: formación docente en línea centrada en la resignificación de la matemática escolar. *Revista de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4-I), 69-84).

Perrenoud, P. (2004). *Desarrollar la práctica Reflexiva en el oficio de enseñar*. España: Graó.

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: Una alternativa para la transformación y la mejora educativa. Tesis doctoral inédita*. Centro de Investigación y de Estudios del Instituto Politécnico Nacional. Cinvestav, México.

Sañudo, L. E. (2006). El proceso de significación de la práctica como sistema complejo. En R. C. Perales (coord.), *La significación de la práctica educativa,* 19-53. México: Paidós.

Soto, D. (2014). *La dialéctica Exclusión-Inclusión entre el discurso Matemático Escolar y la Construcción Social del Conocimiento Matemático* (Tesis doctoral no publicada). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, Distrito Federal, México.

Strauss, A. & Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Colombia: Editorial Universidad de Antioquia.

Vargas, Z. (2003). La confrontación: una oportunidad para el desarrollo personal. *Revista Educación*, *27*(2), 79-86.

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

ESTUDIO TEÓRICO SOBRE LA VARIACIÓN EN CONTEXTOS DETERMINISTAS, CAÓTICOS DETERMINISTAS Y ESTOCÁSTICOS

Enrique Hernández-Zavaleta, Angélica Moreno-Durazo, Cristian Paredes-Cancino, Rodolfo Fallas-Soto
Cinvestav. (México)
jesus.hernandezinvestav.mx, gamoreno@cinvestav.mx, cristian.paredes@cinvestav.mx, rfallassinvestav.mx

Resumen
En este escrito se presentan estudios que tienen como objetivo caracterizar el estatus de la variación en sistemas con dinámicas deterministas, erráticas o caóticas y estocásticas, enmarcadas en la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional de la socioepistemología. Los aspectos teóricos que se ponen a discusión son la transversalidad de los *niveles de constantificación* y *el cáracter estable del cambio* como elementos que conjugan la triada *variable, variación, predicción* en la construcción de argumentos que permitan realizar o aumentar la certidumbre en la predicción.

Palabras clave: variación, sucesiva, prácticas predictivas, socioepistemología

Abstract
This paper shows studies aimed to characterize the status of variation in systems with deterministic, erratic or chaotic, and stochastic dynamics within the research line of the Variational Language and Thinking of the socio-epistemology approach. We discuss the transversal process of the *levels of invariability* and *the stable nature of change* as elements that make up the triad*: variable*, *variation* and *prediction* in the construction of arguments that allow developing or increasing the prediction certainty.

Key words: successive, variation, predictive practices, socio-epistemology

Introducción

Diversas investigaciones interesadas en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo han reportado dificultades en la significación sobre los objetos de las matemáticas del cambio, relacionandolas con la ausencia de argumentos e ideas variacionales en el tratamiento escolar (Nemirovsky y Rubin, 1992; Cantoral y Farfán, 1998; Carlson et al, 2002; Dolores, 2004). Incluso actualmente se realizan investigaciones que abordan estas estas dificultades desde enfoques teóricos específicos o considerando fenómenos típicamente no escolares (Jonhson, 2015; Lingefjärd y Farahani, 2017).

Frente a esta problemática, la postura desde la socioepitemología fue que la mejora educativa requiere de acciones más allá de enlistar las deficiencias de los estudiantes o los profesores sobre el manejo de cierta noción, sino que, se interesó por explicar la naturaleza de nociones matemáticas en difentes escenarios, fijándose en cuáles son las prácticas y argumentos detrás de su uso y cómo los individuos se apropian de estas nociones; para de esta manera tener elementos para un rediseño del discurso matemático escolar.

El Pensamiento y Lenguaje Variacionla (PyLV) se consolida como una línea de investigación, cobijada bajo la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, que se interesa por el estudio y la tipificación de los *usos de la variación sucesiva en escenarios con naturaleza predictiva* diversa (Cantoral, 2013). La noción de variación sucesiva surge en las primeras investigaciones del grupo, cuando Cantoral (1990) la reconoce en la expresión $f(x+h)-f(x)$ más allá que la sola diferencia de estados, asumiéndola como una relación simbiótica entre una noción con valor de uso predictivo y su operatividad mediante la articulación de órdenes de variación $f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots$ (Ver Figura 1); a tal articulación la denominamos variación sucesiva. Donde la consideración de un orden de variación superior otorga información cada vez más específica del comportamiento del fenómeno.

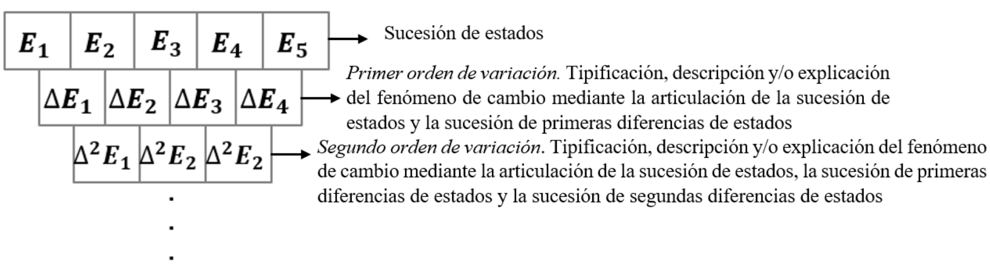


Figura 1. Órdenes de variación

Entonces, entendemos que la noción de variación se construye y reconstruye al seno de comunidades en la necesidad de cuantificar cambios durante el desarrollo de prácticas predictivas. En este sentido, nos interesa analizar en escenarios diversificados, desde el determinismo hasta el comportamiento errático en el caos determinista, pasando por lo estocástico, en los que la variación se significa para dar lugar a elementos propios en el desarrollo de prácticas predictivas.

Las investigaciones en PyLV mayormente se ha desarrollado en escenarios deterministas, en este reporte retomamos los resultados de la problematización del teorema de existencia y unicidad (Fallas y Cantoral, 2016), presentamos las investigaciones en contexto no determinista a través de los resultados de la problematización del uso de la variación en la práctica médica (Moreno–Durazo y Cantoral, 2017) y en el estudio de dinámicas erráticas (Hernández y Cantoral, 2017); además, la investigación en desarrollo de Cristian Paredes sobre lo estocástico, la problematización del Teorema de Bayes.

En este reporte mostramos el análisis que han realizado los autores sobre los elementos que conforman el siguiente esquema de la intervención de las nociones de variable, variación con fines predictivos.

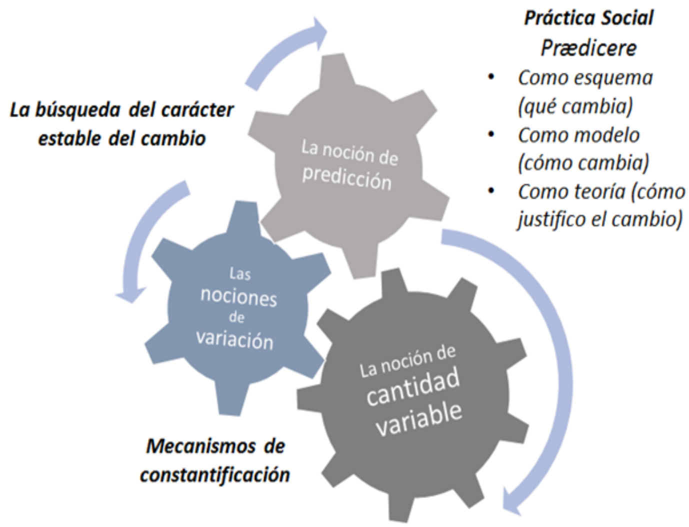


Figura 2. Intervención de las nociones elementales en el estudio de fenómenos dinámicos

La unidad mínima de análisis para el estudio de fenómenos dinámicos con fines predictivos requiere de la vinculación de las nociones de variable y variación (Figura 2). Cantoral (1990) exhibe cómo la vinculación – variable, variación y predicción – se desarrolla mediante los *niveles de constantificación*, el primero radica en la selección de las variables intervinientes en el fenómeno que lo describan de buena manera y el segundo refiere a la selección de las variaciones suficientes para llevar a cabo predicciones; entonces, es el proceso de *constantificar* lo que articula las nociones de variable y variación. Este proceso sustenta la *identificación del carácter estable del cambio*, ligado a la búsqueda de las leyes que rigen el cambio identificando lo invariante en él, lo cual conduce al establecimiento de predicciones en el fenómeno (Cantoral, 2013). Aunado a esto, se encuentra un sistema de análisis de prácticas normado por la evolución de la práctica social del *Prædicere,* que en su fase de esquema responde a la pregunta *¿qué cambia?*; en su fase de modelo se responde a *¿cómo cambia?,* y, finalmente, como teoría se refiere a la *justificación formal del cambio*.

Escenarios para el estudio de la noción de variación

La variación acotada en el Teorema de Existencia y Unicidad de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. En éste estudio se obtuvo evidencia sobre las prácticas variacionales que se ponen en juego para justificar, por un lado, la existencia y por otro, quizá más complejo, la unicidad respecto al Teorema de Existencia y Unicidad (TEU) de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (Fallas y Cantoral, 2016).

El hallazgo más importante del trabajo es que la *variación acotada* lo que permite garantizar la existencia y unicidad de la solución, lo cual se obtuvo con base en una problematización sobre las obras originales de matemáticas de Cauchy & Moigno (1844), Lipschitz (1868, 1880) y Peano (1973), lo cual determinó que estos trabajos ayudan a comprender la génesis y evolución del teorema, desde la práctica de referencia del matemático que deseaba plasmar sus descubrimientos y conocimientos en las obras con fin didáctico o divulgativo que realizaban. Dicho de otra forma, fue la búsqueda de una formalización de la demostración del teorema y la determinación de la mínima cantidad de hipótesis que garantice la existencia y la unicidad los dos hechos que dieron pie a la génesis y explicación de este problema.

Se encontró que el método de las quebradas de Euler, si bien en ocasiones ausente en los textos de Ecuaciones Diferenciales, sobrevivió en los textos de métodos numéricos, este método formó parte del argumento para la explicación e interpretación de la solución en general del TEU, puesto que se basa en analizar la *variación infinitamente pequeña* de la condición inicial y la comparación local y global (en el estudio de la unicidad).

Adicionalmente, dimos respuesta a las preguntas iniciales referidas al problema inverso de la tangente y de los diversos ejemplos que están presentes en el discurso Matemático Escolar (dME), pero esta vez con apoyo de una multiplicidad de recursos: lo variacional, lo numérico, lo analítico y lo visual, haciendo del teorema un modelo predictivo. Hemos determinado que las estrategias variacionales de *comparación, seriación, estimación y predicción* estuvieron presentes al analizar la postulación y demostración de la existencia y unicidad de la solución de las ecuaciones diferenciales.

Lo estocástico desde el PyLV

A partir de las investigaciones en PyLV se proponen directrices de análisis para el estudio de la variación, mediante los cuestionamientos: ¿qué cambia?, ¿cómo cambia? y ¿cuánto cambia? En relación con lo estocástico se observan tres aspectos, el primero relacionado con la identificación de las variables aleatorias que están en juego en la situación, el segundo es la manera en que reconocemos la forma de variación de las variables, esto puede darse mediante las distribuciones de probabilidad como se muestra en la figura 3. El desarrollo del concepto de *variación* va más allá del simple reconocimiento de su existencia y requiere de cierto tipo de comprensión del concepto de distribución, ya que la distribución se convierte en una representación de la variación de los datos (Fernández, Andrade y Sarmiento, 2009).

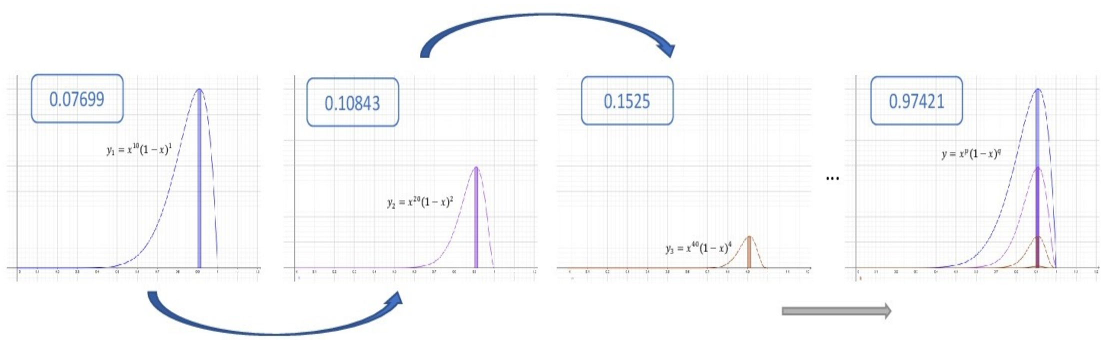


Figura 3. Distribuciones de probabilidad

El tercer aspecto considerando que las distribuciones de probabilidad nos permiten determinar *qué y cómo están cambiando las variables*, la *cuantificación de la incertidumbre* está asociado a la determinación de la probabilidad, que nos permitirá evaluar nuestra conjetura y realizar afirmaciones con cierto grado de confiabilidad sobre nuestra situación, es decir, poner en juego *la inferencia como práctica predictiva en lo estocástico* (figura 4).

Relación: Blancos y Premios	Probabilidades		
	Menos que 9 a 1	**Entre 9 a 1 y 11 a 1**	Mayor que 11 a 1
10 blancos y 1 premio	0.6589	0.07699	0.2641
20 blancos y 2 premios	0.584	0.10843	0.30757
40 blancos y 4 premios	0.527	0.1525	0.3205
100 blancos y 10 premios	0.44109	0.2506	0.3082
1000 blancos y 100 premios		0.7953 – 0.9405	
10000 blancos y 1000 premios		0.97421	

Figura 4. Inferencia como práctica predictiva

La variación en el diagnóstico y el tratamiento de enfermedades cardíacas

Nos preguntamos ¿cómo el médico identifica el padecimiento que sufre su paciente?, ¿cómo bosqueja el plan de tratamiento que permita el acercamiento al estado de salud?, en otras palabras, ¿cómo el médico trata con el cambio y la variación con fines predictivos? A la luz de esto es que se identificó del uso de las prácticas de comparación, seriación y estimación en la interpretación de electrocardiogramas, a través el estudio sistemático de la morfología de las ondas, los segmentos y los intervalos. También apreciamos que, es en el lenguaje empleado en la caracterización de las enfermedades cardíacas que observamos claramente el *uso de la variación con fines predictivos*, por ejemplo, la interpretación del electrocardiograma de la figura 5.

Las características electrocardiográficas del bloqueo aurículo-ventricular (AV) Mobitz I recurren a expresiones como *prolongación progresiva del intervalo PR*, lo que refiere a un comportamiento creciente en el tiempo que tarda en realizarse (intervalo PR) para cada ciclo cardíaco; además, especifica en el apartado b) que *este crecimiento del intervalo sufre una disminución progresiva*, es decir, el intervalo PR durante este tipo de bloqueo AV tiene un crecimiento cada vez menor (Moreno-Durazo y Cantoral, 2017)

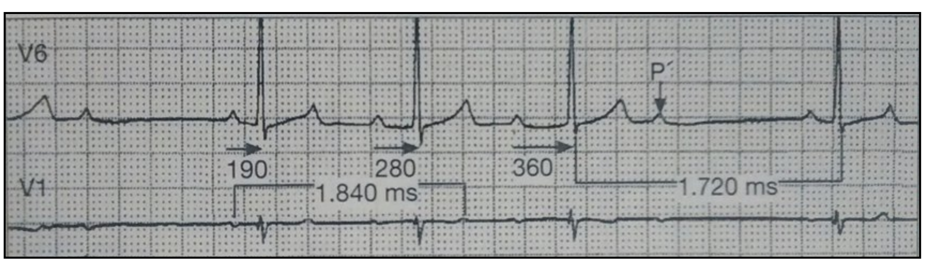


Figura 5. Electrocardiograma de un paciente con bloqueo AV Mobitz I

Vemos en el diagnóstico de enfermedades cardíacas el dinamismo de la triada *variable, variación y predicción* (Figura 2) a través de discursos y prácticas socialmente compartidas. El uso de un orden de variación superior (orden dos), cambio del cambio, para la identificación de la regularidad (*el crecimiento del intervalo PR sufre una disminución progresiva y la ausencia de la onda P*).

La variación en la ecuación logística

En los sistemas dinámicos que exhiben comportamientos caóticos conviven lo determinista y lo aleatorio como partes antagónicas que entretejen formas de razonamiento, sobre el cambio, explicativas y predictivas ante la presencia de umbrales de transición que llevan a disposiciones inesperadas. La *búsqueda del carácter estable del cambio* se articula con los *niveles de constantificación* para dar lugar a prácticas de comparación y estimación de los estados globales del mismo sistema al cambiar su naturaleza. Este cambio permite dar cuenta de estados erráticos que requieren de encontrar puntos de transición y, posteriormente, del análisis de las diferencias entre las dinámicas que se generan.

Uno de los casos más estudiados, en el ocurren el tipo de transiciones mencionadas, es el de la ecuación de crecimiento poblacional logístico en diferencias dada por $X_{t+1} = aX_t(1 - X_t)$, su iteración (la composición reiterada de ella misma) exhibe trayectorias periódicas (totalmente predecibles) para algunos valores del parámetro *a* que hace cambiar su dinámica, cuando *a=4* la cantidad de periodos que conviven hace imposible su predicción, a esto se añade la sensibilidad a las condiciones iniciales presente en este régimen. El diagrama de bifurcaciones (Figura 6), propuesto por May (1976) muestra el número de periodos dependientes del valor de *a*, esta es una producción derivada de *la búsqueda del carácter estable del cambio* que da una explicación a las configuraciones, en algún momento, no esperadas en el sistema.

En esta situación existe el cambio de la variable población y el parámetro *a* (¿qué cambia?), el cambio en la población es periódico o estable y conforme el parámetro va creciendo existe un incremento de periodos que en algún momento imposibilita la predicción (¿cómo cambia?), el incremento de formas de repetición se hace en orden creciente en potencias de base dos (¿cómo se repite?). Finalmente, *el cambio de la naturaleza del problema* mediante los parámetros; en otras palabras, al saber cómo se repite cada ciclo entonces podemos tener un panorama general y poder distinguir las franjas de valores que permiten la predicción de las que no (¿cuánto se repite cada ciclo?). La identificación de estos estados produce la emergencia de formas de razonar que se alejan del determinismo y se acercan a lo estocástico; por ejemplo, el uso de histogramas que proveen medidas invariantes para grandes cantidades de datos.

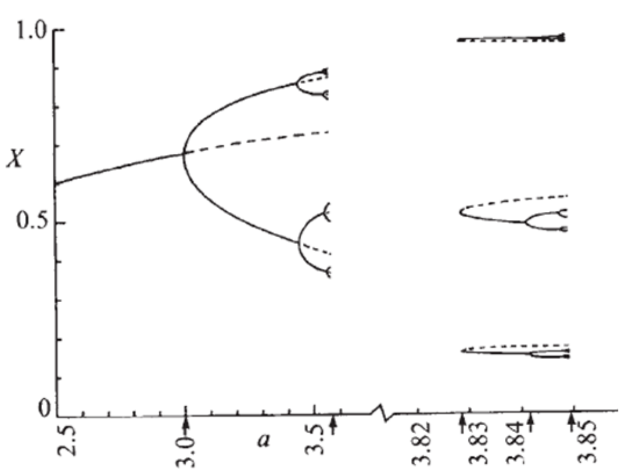


Fig. 4 This figure illustrates some of the stable (———) and unstable (— — — —) fixed points of various periods that can arise by bifurcation processes in equation (1) in general, and equation (3) in particular. To the left, the basic stable fixed point becomes unstable and gives rise by a succession of pitchfork bifurcations to stable harmonics of period 2^n; none of these cycles is stable beyond $a = 3.5700$. To the right, the two period 3 cycles appear by tangent bifurcation: one is initially unstable; the other is initially stable, but becomes unstable and gives way to stable harmonics of period 3×2^n, which have a point of accumulation at $a = 3.8495$. Note the change in scale on the *a* axis, needed to put both examples on the same figure. There are infinitely many other such windows, based on cycles of higher periods.

Figura 6. Diagrama de bifurcaciones propuesto por May (1976) para ilustrar el número de periodos que generan los puntos de equilibrio. En el valor 3.83 se muestra el triciclo que da lugar a ciclos de todos los periodos.

Reflexiones finales

Como se ha mostrado la variación juega un papel fundamental en el estudio del cambio, los ejemplos tratados muestran su papel transversal; por un lado, en investigaciones que tratan tópicos matemáticos que hoy juegan un papel fundamental en la escuela y por otro en situaciones extraescolares, que debido a este eje conductor (la variación), son ejemplos que dan indicios de formas de razonamiento necesarias para todo individuo y que ahora no son parte del ámbito escolar. Así el grupo se propone a realizar una problematización robusta de la variación y su transversalidad en escenarios intra y extraescolares.

Los aspectos teóricos que se ponen a discusión son la transversalidad de los *niveles de constantificación* y *el cáracter estable del cambio*, como elementos que conjugan la triada *variable, variación y predicción*. Hasta el momento su expresión se verifica en *prácticas predictivas*, y los elementos que se evidencian están relacionados con la noción de variable y su elección, con lo que varía y cómo lo hace para elaborar argumentos que permitan predecir o aumentar la certidumbre; de esta forma se deben mostrar más ejemplos que muestren la articulación de estos elementos para aproximarse a una forma de razonamiento propia del cambio y la variación.

Finalmente, hemos presentado un primer acercamiento sobre el objetivo que el grupo de PyLV persigue sobre un robustecimiento en la caracterización sobre la variación como una noción fundamental que permite conducirse ante prácticas predictivas diversas, bajo la postura de ampliar el tipo de escenarios en los que se estudia el PyLV.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (1990). *Categorías Relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la Teoría Elemental de las Funciones Analíticas. Simbiosis y predación entre las nociones de "el Prædiciere" y "lo Analítico"*. Tesis Doctoral. México: Cinvestav

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educati*va*. Estudios de construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon* 42, 353 – 369

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352 – 378

Cauchy, A., & Moigno. (1844). *Lecons de Calcul Différentiel et de Calcul Integral*. Paris: Libraire de École Polytechnique.

Dolores, C. (2004). Acerca el análisis de funciones a través de sus gráficas: Concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 7(3), 195-218

Fallas, R. y Cantoral, R. (2016). Estudio socioepistemológico del teorema de existencia y unicidad en las ecuaciones diferenciales ordinarias. *Revista de História da Educação Matemática* 2(3), 256-280.

Fernández, F., Andrade, L. y Sarmiento, B. (2009). La idea de variación en la educación estadística. En C. Rojas (Comp.). *Memorias VIII Encuentro Nacional de Educación Matemática y Estadística* (pp. 1-10). Colombia: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Hernández, J. y Cantoral, R. (2017). El desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional y las acciones en las prácticas predictivas. En L. A. Serna (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 30, 1009 – 1017. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Johnson, H. (2015). Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Studies in Mathematics* 88, 89 – 110.

Lipschitz, R. (1868). Disamina della possibilità d' integrare completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie. *Ann. Mat. Pura Appl.*, *2*(2), 288–302.

Lipschitz, R. (1880). *Lehrbuch der Analysis*. Bonn. Deutschland: Verlag Von Max Cohen & Sohn.

Lingefjärd, T. & Farahani, D. (2017). The elusive slope. International Journal of Science and Mathematics Education. DOI 10.1007/s10763-017-9811-9.

May, R. (1976). Simple Mathematica Models with very complicated Dynamics. Nature, 459-467.

Moreno–Durazo, A. & Cantoral, R. (2017). El uso de los órdenes superior de variación en la interpretación clínica del electrocardiograma. En L. A. Serna (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 30, 927 – 935. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Nemirovsky, R. y Rubin, A. (1992). Students´ tendency to assume resemblances between a function and its derivative. TERC communications, Cambridge.

Peano, G. (1973). Sull' integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine. Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino 21 (1885-1886): 677-685. *Hamburger Which Was Reprinted in Peano 1957-1959.*, *1*, 74–81.

CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER

Fabián W. Romero Fonseca, Rosa María Farfán Márquez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. (México)
fwromero@cinvestav.mx, rfarfan@cinvestav.mx

Resumen
Desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa se busca determinar aquellos significados asociados al cálculo de los coeficientes para representar una función dada en serie trigonométrica, con el fin de que sirva como elemento a considerar en futuros diseños de aprendizaje para la serie. Para esto se estudia el fenómeno didáctico de manera sistémica, en el caso de los coeficientes de Fourier, se pone especial atención en dos componentes: la epistemológica y la didáctica. Siempre considerando la componente social y cultural en cada una de las dimensiones. Esto permite reconocer aquellos significados gráfico-geométricos asociados al cálculo de los coeficientes y la necesidad de significar a la serie a partir de su uso culturalmente situado, previo al cálculo de los mismos.

Palabras clave: coeficientes de Fourier, socioepistemología

Abstrac
From the Socio-epistemological Theory of Mathematics Education we seek to determine those meanings associated with calculating the coefficients to represent a given function in a trigonometric series, in order to be used as an element to be considered in future learning designs for the series. For this, we study the didactic phenomenon in a systemic way, in the case of Fourier' coefficients, special attention is paid to both, epistemological and didactic components; always considering the social and cultural component in each of the dimensions. It allows recognizing those graphic-geometric meanings associated to the calculation of the coefficients and the need to approach the series from its cultural use, prior to calculating them.

Key words: Fourier coefficients, socio-epistemology

Introducción

En matemática educativa, diversas investigaciones se han preocupado por el estudio de la Serie Trigonométrica de Fourier (STF), ejemplo de ello son los trabajos de Farfán (2012) y Romero (2016), donde se sitúa a la serie como uno de los temas primordiales en el estudio del cálculo y en el desarrollo del pensamiento trigonométrico formal.

Sin embargo, en (Romero, 2016) se reporta que las investigaciones realizadas en matemática educativa alrededor de la STF han dado cuenta de diversos aspectos relacionados con la serie, pero han considerado el cálculo de los coeficientes como un algoritmo ya establecido. Cuando, en realidad, el problema de significar la STF debe considerar el cálculo de los coeficientes.

Se tiene como objetivo general significar las nociones matemáticas alrededor de la serie trigonométrica de Fourier mediante una problematización del saber matemático que dé cuenta de su construcción social; la problematización "radica en buscar las causas que conducen a los individuos a «a hacer lo que hacen» con el conocimiento en juego, es decir, hacer del saber matemático un problema «localizando y analizando su uso y su razón de ser»" (Reyes, 2011, p. 39). Por lo cual, se busca evidenciar el significado que tomaron los coeficientes de la STF en su contexto de origen, a través del estudio de la *Teoría Analítica del Calor* (1822), y que esto funcione como elemento para proponer rediseños del discurso matemático escolar vigente.

Algunos elementos teóricos

La problemática de estudio de la Matemática Educativa ha evolucionado desde sus inicios, considerando en sus principios una didáctica sin alumnos; hasta una didáctica en escenarios socioculturales (Cantoral y Farfán, 2003). Desde esta última perspectiva, una teoría que se preocupaba por la construcción social del conocimiento y su difusión institucional es la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME). Ésta sostiene que el conocimiento matemático no fue creado para la escuela, mucho menos para ser enseñado, por lo que su introducción en los sistemas de enseñanza provoca que el conocimiento cambie su estructura y su funcionalidad (Cantoral, 2013), esto provoca un distanciamiento entre el conocimiento matemático (*saber sabio*) y lo que se enseña en la escuela (*matemática escolar*).

Entonces, cuando los saberes se llevan a la escuela existe un sistema de razón que regula la organización de la matemática escolar, la TSME ha llamado a este sistema de razón como *discurso matemático escolar* (dME), del cual, es necesario conocer su funcionamiento para proponer elementos para su rediseño. Desde la TSME se propone la construcción del conocimiento matemático a través de prácticas situadas (Cantoral, 2013).

La aproximación sistémica de la TSME

La investigación en TSME problematiza el saber matemático de manera sistémica, estudia las relaciones entre epistemología, procesos cognitivos y procesos de institucionalización vía la enseñanza y la dimensión sociocultural. Para este reporte de investigación se pondrá especial atención a las dimensiones epistemológica y didáctica, es decir, las circunstancias que hicieron posible la construcción del conocimiento matemático y el cómo vive el saber en el sistema didáctico.

Para esto se desarrolló la primera fase de una Ingeniería Didáctica, en cuyo análisis preliminar se estudió la Teoría Analítica del Calor (Fourier, 1822), tomando en consideración su contexto histórico-social, para evidenciar el papel de la práctica social en la construcción de este conocimiento, en particular, para este reporte, el rol que juega en el cálculo de los coeficientes de Fourier.

El cálculo de los coeficientes de Fourier

Fourier en la Teoría Analítica del Calor dedica una sección a la expansión de una función dada en serie trigonométrica. Para lo cual sigue el siguiente esquema, de demostraciones:

1. Cualquier función impar $\varphi(x)$ se puede desarrollar como una serie de senos.
2. Cualquier función par $\psi(x)$ se puede desarrollar como una serie de cosenos.
3. Cualquier función $f(x)$ se puede escribir como suma de una función par y otra impar.

A partir de esto concluye que cualquier función se puede escribir como una serie infinita de senos y cosenos. Reinterpretando los resultados de Fourier, podemos considerar una función $f(x)$, donde $x \in (0{,}2\pi)$, se puede representar de la manera:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$$

Fourier logra deducir cómo se deben calcular los coeficientes a_n y b_n, hoy en día llamados coeficientes de Fourier, estos son:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx$$

A continuación, se expone la manera en la que Fourier realiza el cálculo de estos coeficientes y su relación con el ambiente fenomenológico de surgimiento de la STF, el problema de la propagación del calor.

Siguiendo el esquema de demostración descrito anteriormente, en primer lugar, Fourier demuestra que una función arbitraria e impar $\varphi(x)$ se puede representar como serie de senos, es decir, se pueden determinar los valores de $a, b, c, d, \ldots$ en la ecuación:

$$\varphi(x) = a \operatorname{sen} x + b \operatorname{sen} 2x + c \operatorname{sen} 3x + d \operatorname{sen} 5x + \cdots$$

Luego, reinterpretando las ideas de Fourier al lenguaje matemático actual, desarrolla la función $\varphi(x)$ en serie de potencias alrededor de $x = 0$, y sustituye las derivadas sucesivas por constantes $A, B, C, D, E, \ldots$ con lo que obtiene un sistema con infinitas ecuaciones e infinitas incógnitas (Figura 1).

$$\begin{aligned}
A &= a + 2\,b + 3\,c + 4\,d + 5\,e + \text{etc.}\\
B &= a + 2^3 b + 3^3 c + 4^3 d + 5^3 e + \text{etc.}\\
C &= a + 2^5 b + 3^5 c + 4^5 d + 5^5 e + \text{etc.}\\
D &= a + 2^7 b + 3^7 c + 4^7 d + 5^7 e + \text{etc.}\\
E &= a + 2^9 b + 3^9 c + 4^9 d + 5^9 e + \text{etc.}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Figura 1. Sistema de ecuaciones de Fourier (1822, p. 212)

Luego asegura:

> En consecuencia, consideramos sucesivamente los casos en que tendríamos que determinar una incógnita por una ecuación, dos incógnitas por dos ecuaciones, tres incógnitas por tres ecuaciones, y así sucesivamente a infinito. Supongamos que denotamos, como sigue, un sistema diferente de ecuaciones análogas a aquellas a partir de las cuales debemos derivar los valores del coeficiente. (Fourier, 1822, p. 213, la traducción es nuestra)

Así, Fourier resuelve sistemas de ecuaciones particulares y determina un patrón en las soluciones de los mismos; luego generaliza sus resultados a la solución del sistema infinito, evidenciando su gran dominio aritmético, concluye que, en general $\int_0^\pi \varphi(x) \operatorname{sen} nx\, dx$ es el coeficiente de $\operatorname{sen} nx$ en el desarrollo en serie trigonométrica de $\varphi(x)$.

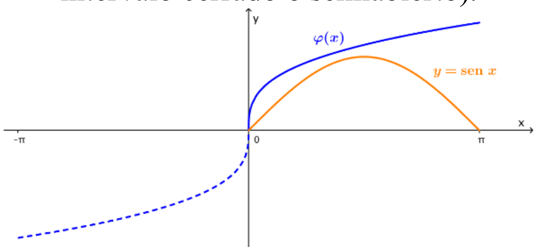
La fórmula obtenida por Fourier trae consigo un problema, pues para él la noción de integral es la de antiderivada, lo que conlleva a la pregunta ¿a qué es igual la integral de una función arbitraria? Fourier, consciente de este detalle, señala:

> …si la función $\varphi(x)$ está representada por la ordenada variable de una curva arbitraria cuya abscisa se extiende de $x = 0$ a $x = \pi$, y si construimos sobre esta misma parte del eje la curva trigonométrica conocida, cuya ordenada es $y = \operatorname{sen} x$; será fácil de representar el valor de un término integral. Para cada abscisa x, a la cual corresponde un valor de $\varphi(x)$, y un valor de $\operatorname{sen} x$, multiplicamos este último valor por el primero, y en el mismo punto del eje levantamos una ordenada proporcional al producto $\varphi(x) \operatorname{sen} x$. Será formada por esta operación continua, una tercera curva, cuyas ordenadas son las de la curva trigonométrica, reducida proporcionalmente a las ordenadas de la curva arbitraria que representa $\varphi(x)$. Hecho esto, el área de la curva reducida tomada de $x = 0$ a $x = \pi$, dará el valor exacto del coeficiente de $\operatorname{sen} x$; y cualquiera que sea la curva dada por $\varphi(x)$, sea que podamos asignar una ecuación analítica o que no depende de alguna ley regular, es evidente que siempre se utilizará para reducir en cualquier forma la curva trigonométrica; de modo que el área de la curva reducida tiene, en todos los casos posibles, un valor determinado que da el coeficiente de $\operatorname{sen} x$ en el desarrollo de la función. Es lo mismo para el coeficiente siguiente. (Fourier, 1822, p. 234, la traducción es nuestra)

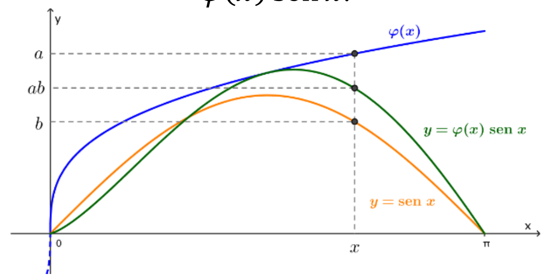
La Tabla 1 resume argumentos geométricos dados por Fourier:

Tabla 1. Reinterpretación de los argumentos de Fourier para el cálculo de los coeficientes.

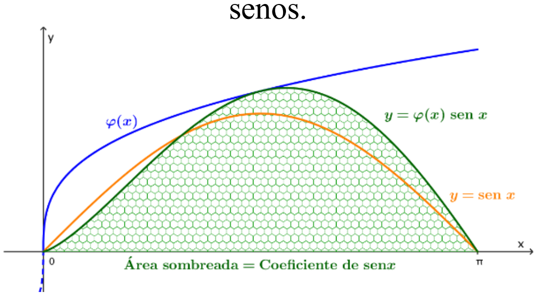
1. Se considera una función impar $\varphi(x)$ y se grafica junto con la curva $y = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $(0, \pi)$ (podría ser un intervalo cerrado o semiabierto).



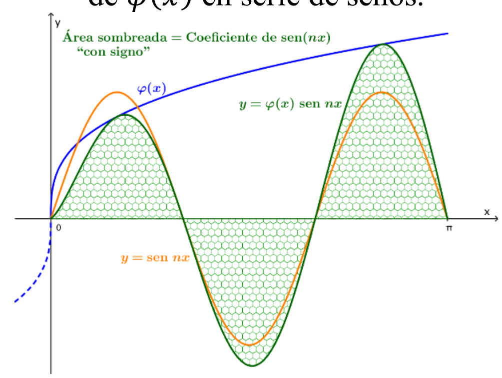
2. Para cada abscisa x, multiplíquese los valores que le corresponden en $\varphi(x)$ y sen x. Y para esa misma abscisa levante una ordenada proporcional a $\varphi(x)$ sen x.



3. En esta nueva curva, cuyas ordenadas son las de la curva trigonométrica reducidas proporcionalmente a la curva arbitraria $\varphi(x)$, el área en el intervalo $(0, \pi)$, dará el valor exacto del coeficiente de sen x en el desarrollo trigonométrico de $\varphi(x)$ en serie de senos.



4. Este proceso se generaliza para calcular el coeficiente de sen nx en el desarrollo trigonométrico de $\varphi(x)$ en serie de senos.



Fuente: Tomada de Romero (2016, p. 74).

Luego de hacer esto Fourier comenta el procedimiento que se utiliza hoy en día para demostrar el cálculo de los coeficientes de la serie trigonométrica, el cual consiste en considerar la serie:

$$\varphi(x) = b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + b_n \operatorname{sen} nx + \cdots$$

Se multiplica por sen nx, con lo que resulta:

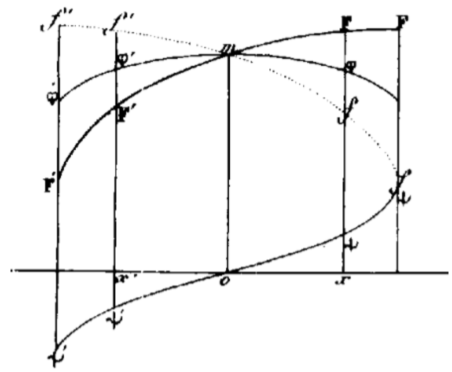
$$\varphi(x) \operatorname{sen} nx = b_1 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} nx + b_2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} nx + \cdots + b_n \operatorname{sen}^2 nx + \cdots$$

Se integra término a término desde 0 hasta π, con lo que se concluye que $b_n = \int_0^{\pi} \varphi(x) \operatorname{sen} nx$, a partir de la ortogonalidad de la función seno.

Fourier realiza un análisis análogo para representar una función par $\psi(x)$ en serie de cosenos:

$$\psi(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots$$

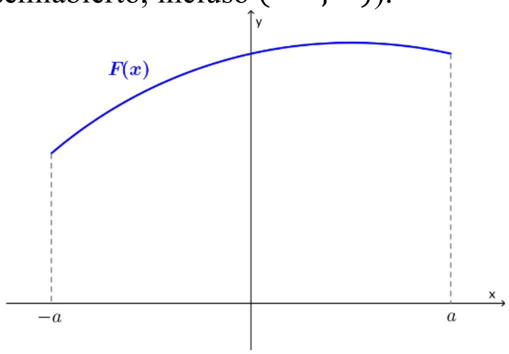
Concluye que $a_n = \int_0^{\pi} \varphi(x) \cos nx$. Ahora bien, ya demostrado que dos funciones, una impar y la otra par, se puede desarrollar en serie de senos y cosenos, respectivamente, Fourier demuestra de manera analítica, al igual como se hace hoy día en la escuela, que una función cualquiera se puede representar como suma de dos funciones, una par y la otra impar. La demostración analítica que proporciona Fourier es la que se da hoy día en la escuela, pero previo a su demostración realiza una construcción geométrica al respecto, la cual se omite en la escuela, además de no ser un recurso metodológico para demostrar un teorema actualmente, pues en el actual dME alrededor de la STF predomina el contexto algebraico (Rodríguez, 2009). La construcción geométrica presentada por Fourier es la siguiente, donde la Figura 2 es la proporcionada por él para esta construcción:

> Cualquier función $F(x)$, representada arbitrariamente en el intervalo de $-\pi$ a $+\pi$, siempre se puede dividir en dos funciones tales que $\varphi(x)$ et $\psi(x)$. De hecho, si la línea $F'F'mFF$ representa la función $F(x)$,
>
> 
>
> *Figura 2.* Gráfica proporcionada por Fourier (Fourier, 1822, p. Pl.II)
>
> y elevamos por el punto 0 la ordenada $0m$, dibujamos por el punto m a la derecha del eje $0m$ el arco mff similar al arco $mF'F'$ de la curva dada, y a la izquierda del mismo eje dibujamos el arco $mf'f'$ similar al arco mFF ; entonces pasaremos por el punto m una línea $\varphi'\varphi'm\varphi\varphi$ que dividirá en dos partes iguales la diferencia entre cada ordenada xF o $x'f'$ y la ordenada correspondiente xf o $x'F'$. También trazaremos la línea $\psi'\psi'0\psi\psi$, cuya ordenada mide la diferencia de la ordenada de $F'F'mFF$ con la de $f'f'mff$. Haciendo esto, las ordenadas de la línea $F'F'mFF$ y de la línea $f'f'mff$ designadas una por $F(x)$ y la segunda por $f(x)$, obviamente tenemos $f(x) = F(-x)$; denotando también la ordenada de $\varphi'\varphi'm\varphi\varphi$ por $\varphi(x)$, y la de $\psi'\psi'0\psi\psi$ por $\psi(x)$, tendremos
>
> $$F(x) = \varphi(x) + \psi(x) \text{ y } f(x) = \varphi(x) - \psi(x) = F(-x)$$
>
> entonces
>
> $$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}F(x) + \tfrac{1}{2}F(-x) \text{ y } \psi(x) = \tfrac{1}{2}F(x) - \tfrac{1}{2}F(-x)$$
>
> concluimos
>
> $$\varphi(x) = \varphi(-x) \text{ y } \psi(x) = -\psi(-x)$$
>
> (Fourier, 1822, p. 254, la traducción es nuestra)

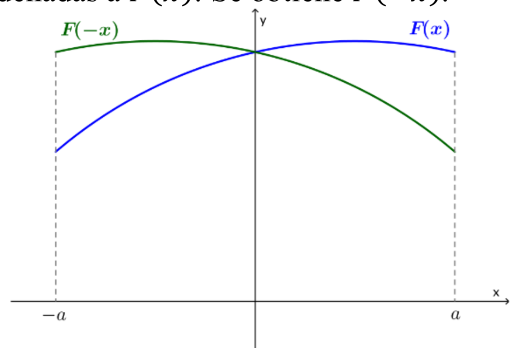
En la Tabla 2, utilizando un lenguaje actual, se puede reinterpretar la construcción geométrica de Fourier de la manera siguiente:

Tabla 2. Reinterpretación de los argumentos de Fourier para la representación de una función como suma de dos funciones, una par y la otra impar.

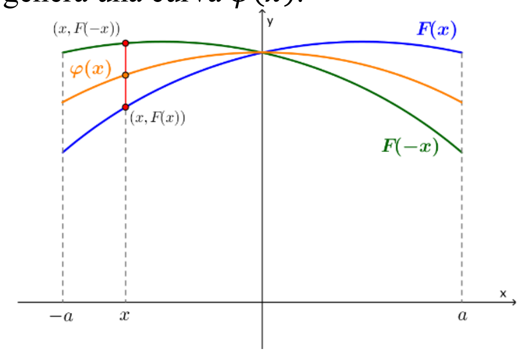
1. Considérese una función arbitraria $F(x)$ definida en un intervalo $[-a, a]$, con $a \in \mathbb{R}^+$ (podría ser un intervalo abierto o semiabierto, incluso $(-\infty, \infty)$).



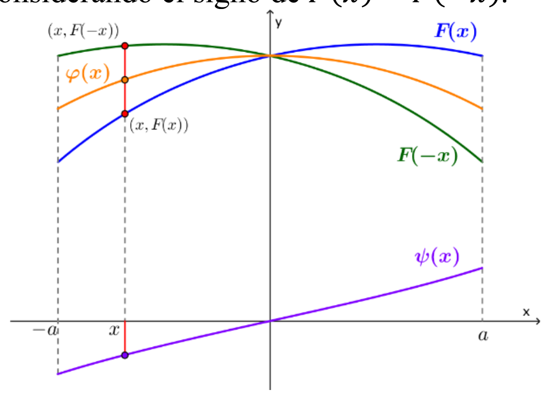
2. Realice una reflexión respecto del eje de las ordenadas a $F(x)$. Se obtiene $F(-x)$.



3. Pada cada x en $[-a, a]$, se toma el punto medio del segmento cuyos extremos son $(x, F(x))$ y $(x, F(-x))$, genera una curva $\varphi(x)$.



4. Pada cada x en $[-a, a]$, se genera la curva $\psi(x)$, con la mitad de la medida del segmento cuyos extremos son $(x, F(x))$ y $(x, F(-x))$, considerando el signo de $F(x) - F(-x)$.



Fuente: Tomada de Romero (2016, p. 76)

Para Fourier, con esta demostración logra lo que deseaba generalizar, pues dado que una función arbitraria se puede representar como suma de una función par y otra impar, y estas se pueden desarrollar en serie trigonométrica de senos y cosenos, respectivamente, entonces la función inicial se puede representar en serie trigonométrica de senos y cosenos.

Reflexiones finales

A partir de la aproximación sistémica de la TSME es posible observar aquellos significados geométricos y gráficos detrás del cálculo de los coeficientes de Fourier, él visualiza en la gráfica todos los pasos necesarios al lado de la operatoria aritmética que le permite calcular los coeficientes para la STF.
Se puede asegurar entonces que, en la forma de trabajo de Fourier, la manera de construir el conocimiento matemático relativo al cálculo de los coeficientes está ligado a la coordinación y articulación de diferentes miradas del objeto, una geométrica-gráfica y la otra algebraica-analítica, para validar la segunda en la primera.

En este sentido, el cálculo de los coeficientes de Fourier es un problema con características propias independientes del ambiente fenomenológico el que se origina la STF (la conducción de calor). Por lo que del trabajo de Fourier se evidencia que *la forma de acercarse al objeto (los coeficientes de Fourier) debe incluir movilidad en al menos dos registros de representación: el geométrico y el algebraico-analítico, en donde nociones como operación de funciones, integral definida y ortogonalidad de las funciones trigonométricas, desde una interpretación geométrica, cobran gran importancia*.

A pesar de que Fourier realiza un trabajo meramente matemático sin relación directa al contexto físico, es requerida una significación a partir del uso de la serie trigonométrica, previo al estudio del cálculo de sus coeficientes (Romero, 2016). Es decir, se requiere reconocer a la serie trigonométrica como una herramienta de predicción para fenómenos estables de variación periódico-acotada, previo a la significación del cálculo de los coeficientes.

Además, se evidencia que el dME predominante no promueve aquellos significados geométricos para el cálculo de los coeficientes, ni la significación previa de la serie trigonométrica a partir de su uso, lo cual podría ser un elemento importante para el diseño de situaciones de aprendizaje en las que se quiera significar a la STF.

Agradecimientos

Fabián W. Romero quiere agradecer al Programa Interdisciplinario para el Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas (PIDPDM) por su apoyo para la asistencia a las actividades de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa 31 en la ciudad de Lima, Perú. Además, agradece a la Universidad de Costa Rica por su apoyo para la realización de esta investigación.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa S.A.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Mathematics education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics, 53*, 255-270.

Farfán, R. M. (2012). *Socioepistemología y ciencia. El caso del estado estacionario y su matematización*. Barcelona: Gedisa S. A.

Fourier, J. (1822). *Théorie Analytique de la Chaleur*. París: Chez Firmin Didot, père et fils.

Reyes, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Rodríguez, M. (2009). *Una matemática funcional para el ingeniero. La serie trigonométrica de Fourier*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Romero, F. (2016). *Construcción social de la serie trigonométrica de Fourier. Pautas para un diseño de intervención en el aula*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

doi: 10.13140/RG.2.2.14118.63048

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

UNA PROBLEMATIZACIÓN DEL CONCEPTO TOPOLOGÍA

Gabriela Márquez-García; Gisela Montiel Espinosa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)
gabriela.marquez@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx

Resumen
En esta investigación presentamos una parte de la problematización que estamos realizando del concepto de topología, mediante un estudio sociohistórico de obras originales, para observar el papel que jugó *la relación de proximidad* en la constitución del concepto de topología como saber matemático. Nos ubicamos en el estudio de *los usos* de la estructura que define a la *relación de proximidad* entre los elementos de los espacios (L) y (V) de los que se ocupó Maurice Fréchet en su tesis doctoral en 1906. Mostramos cómo se realizó la familiarización con la obra, así como el contexto sociocultural en el que se produjo la misma.

Palabras clave: relación de proximidad, Fréchet, topología, socioepistemología

Abstract
In this research, we present part of the typology concept problematization we are carrying out through a socio-historical study of original works, in order to observe the role played by the relation of proximity in the constitution of the concept of topology as mathematical knowledge. We focus on our study of the uses of the relation of proximity between the elements of the spaces (L) and (V), the ones Maurice Fréchet dealt with in his doctoral thesis in 1906. We show how the familiarization with the work was carried out, as well as the socio-cultural context in which it took place.

Key words: relation of proximity, topology, Fréchet, socio-epistemology

Introducción

En la licenciatura en Matemáticas de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, desde mi experiencia como estudiante de esta licenciatura, generalmente las materias de matemáticas se presentan de manera aislada, como si no existiera relación alguna entre cada una de ellas, y parece no importar saber si existe relación y mucho menos entenderlas. Sin embargo, algunos profesores sí se interesan en marcar relaciones entre algunas, por ejemplo, entre el Análisis Matemático y la Topología, señalando esta última como una generalización de la primera, aunque no se profundiza en qué sentido se da dicha generalización. Particularmente, la Topología se presentaba como una rama de la Matemática 'muy abstracta', que se dedica a estudiar los espacios topológicos y sus propiedades, al menos para los estudiantes de dicha licenciatura. Es así como nos planteamos esta investigación, para tratar de entender algo más allá de la Topología que se ve en la escuela y entender su esencia.

Antecedentes

Con el objetivo de acotar nuestro estudio, hicimos una revisión de libros de Topología, típicamente utilizados en la educación universitaria. Hinrichsen y Fernández (1977) y Pérez (2015) introducen a la Topología planteando a la *continuidad* como su objeto de estudio, y definiendo a esta y a la convergencia en términos de una noción de *proximidad*, que es independiente de la métrica. De esto surge un primer cuestionamiento relativo a lo propio de la Topología, ¿cómo y cuándo hablamos de *proximidad* en matemáticas sin una métrica?

Al respecto, encontramos que en Pérez (2015) a través de la topología como concepto, se define una *relación de proximidad* y se da estructura topológica al conjunto. De ahí que se declare que la Topología de Conjuntos se ocupa del estudio de los espacios abstractos (Freixenet, 1994), es decir, conjuntos tales que la naturaleza de sus elementos es homogénea y cualquiera entre los que se ha establecido una *relación de proximidad* (Arboleda, 2012). Entonces, vislumbramos que la *relación de proximidad* permite *la generalización* de los conceptos de convergencia y continuidad a los espacios topológicos; lo cual tendríamos que validar en nuestro estudio.

De lo anterior se identifica a la *proximidad* como fundamental para dotar de significado a algunos conceptos como: topología, espacio topológico, conjuntos abiertos, continuidad y convergencia; y surgen las interrogantes que guiarán la presente investigación: ¿qué papel juega la relación de proximidad en la constitución de la topología como saber matemático?, y ¿a qué nos referimos con naturaleza topológica?;

Marco teórico

Reconocemos como *problema la falta de significado* de la matemática en la escuela, problema que particularizamos con el concepto de topología, que forma parte de la matemática escolar avanzada; y que atenderemos con un estudio bajo el enfoque de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME).

La TSME se encarga fundamentalmente del problema del significado y asume que el conocimiento matemático, aun aquel que consideramos avanzado, tiene un origen y una función social asociados a un conjunto de actividades prácticas socialmente valoradas y normadas (Cantoral, 2013). En este sentido, se puede encontrar la razón de ser y lo que le da sentido al concepto de *topología* en su origen, es decir, entender su naturaleza. Sin embargo, Espinoza (2009) afirma que, por los procesos de transposición, en conjunto con la corriente de formalización, estas cuestiones se esconden en la historia.

En este mismo orden de ideas, Espinoza (2009) y Cantoral (2013) mencionan que una pregunta fundamental de esta teoría es: ¿Existe una manera de pensar matemáticamente que pueda ser difundida socialmente? Vemos que esta pregunta relaciona el pensamiento individual con el pensamiento difundido socialmente, independientemente si un pensamiento matemático básico o avanzado.

Este cuestionamiento requiere de asumir a la matemática como parte de la cultura humana, esto es, reconocer distintas formas de pensar y usar la matemática según el contexto (*racionalidad contextualizada*); para esto debe existir una forma de validar cada forma de pensar y usar la matemática, es decir, cada racionalidad contextualizada demanda su validación (*relativismo epistemológico*). Dado que se reconoce que no hay un único significado o significado universal de cada conocimiento matemático, se asume que cada forma de pensar y usar la matemática implica cierto significado, es decir, el significado depende del uso del conocimiento matemático en cada contexto.

Entonces, como se acepta una pluralidad de contexto se afirma que, el conocimiento matemático cuando se pone en uso en cada contexto se vuelve funcional cuando el uso tiene una racionalidad, es así como el conocimiento matemático se somete a un proceso de *resignificación progresiva.* Todo esto a su vez están *normados por una práctica social*, es decir, hay algo que hace a los individuos hacer lo que hacen.

Estos principios teóricos (racionalidad contextualizada, relativismo epistemológico, significación progresiva, normatividad de la práctica social) permiten entender la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional, lo que configura el objeto de estudio de esta teoría.

Como mencionamos anteriormente, en este trabajo, queremos entender *qué es la naturaleza topológica*, y el papel de la *relación de proximidad* en la constitución de la topología como saber matemático, en otras palabras, queremos entender *los usos* de la estructura que define a la *relación de proximidad* en la matemática (en cierto periodo), antes de configurarse en la definición formal de topología.

La fijación en la *relación de proximidad* y no en el concepto de topología, es por la mirada que tiene la teoría que fundamenta este trabajo, que implica una descentración del objeto, es decir, una mirada más amplia (más allá de la matemática escolar y la matemática formal), es reconocer este concepto como una construcción social y entender su naturaleza, en este sentido es entender su naturaleza social, para ello se requiere encontrar la asociación de la *actividad humana* con *los usos* de la estructura que define a la *relación de proximidad* en determinado contexto.

Metodología

Para lograr su objeto de estudio, Cantoral (2013) propone hacer una *problematización* (historización y dialectización) del saber matemático desde una mirada amplia, es decir, descentrándose del objeto. En este caso, asumimos una descentración del concepto de topología al reconocer la *relación de proximidad* como una noción asociada a la *actividad humana* que signifique el concepto.

Historizar y dialectizar son los mecanismos que propone la TSME para entender la naturaleza social del conocimiento matemático, en este trabajo estos mecanismos los ponemos en juego estudiando un episodio específico de la historia de la topología, como concepto matemático, donde reconozcamos un momento determinante de su existencia, que evidencie su *uso*, reconociendo el motivo y el contexto sociocultural que hicieron posible su existencia (*historizar*) para entender *el* o *los usos* de la estructura que define a la *relación de proximidad* (*dialectizar*).

Para entender el contexto en el que surge la obra que vamos a analizar, Espinoza (2009) propone un esquema metodológico que se basa en mirar la obra desde tres lentes:

- *Una producción con historia***.** Esto es, estudiar al autor en los aspectos: familiar, profesional, académico, para entender la forma de pensar del autor de la obra.
- *Un objeto de difusión.* Entender el motivo de la publicación de la obra, ya sea de difusión didáctica o científica.
- *Parte de una expresión intelectual más global.* Entender la evolución de las ideas del autor en la totalidad de sus obras y su relación con otras.

Esta propuesta metodológica de Espinoza nos permite situarnos en el momento en el que se produjo la obra, es decir, hacemos un cambio de mirada de la actual a la del momento en el de producción de la obra y con esto, entendemos por qué se escribe como se escribe, se hace lo que se hace, se piensa lo que se piensa, es decir, dotar de contexto a la obra y, por lo tanto, a la actividad matemática y a los conocimientos matemáticos en ella. Esto constituye la clave para realizar la historización en el sentido que se plantea en la TSME.

Sin embargo, esta propuesta no nos dice cómo realizar el análisis específico de la obra a estudiar, por lo que requerimos de un método de análisis documental, específicamente de contenido. El método de análisis de contenido está en construcción, sin embargo, hasta el momento lo estamos configurando de la siguiente manera:

1. Hacer una familiarización con la obra, esto es, reconocer el contenido y la estructura discursiva general:
    - Se extrajeron las definiciones, teoremas, lemas, corolarios, y afirmaciones que hace el autor, respetando el orden en el que él las presenta.
    - Se extrajeron los nombres de los matemáticos que cita el autor para identificar de quiénes toma los casos particulares para generalizar.
    - Se extrajeron extractos de la obra relacionadas con el objeto de estudio de esta investigación.
2. Hacer una descripción de las partes de la obra, ya sea que estas partes las determine el autor de la obra o el investigador.
3. Hacer una descripción particular, de las definiciones, teoremas, lemas, corolarios, entre otros, que el investigador considera importantes. Esta descripción se realiza, reconociendo lo que hace el autor.
4. Identificar las relaciones de los teoremas con las definiciones, lemas, corolarios, etc. Estas relaciones nos permitirán reconocer *los usos* de la estructura que define a la *relación de proximidad.*
5. Analizar puntualmente, mediante los cuestionamientos *¿cómo hace?, ¿para qué hace?, y ¿por qué hace?*

Análisis de Sur Quelques Points Du Calcul Fonctionnel

La obra que se está analizando es la tesis doctoral del matemático Maurice Fréchet, titulada *Sur Quelques Points Du Calcul Fonctionnel*. En este extenso presentamos, a manera de avance, el contexto sociocultural de la obra, a través de una síntesis de un análisis socio-histórico.
Contexto Sociocultural

- *Una producción con historia.*

Maurice Fréchet (1878-1973), nació el 10 de septiembre de 1878 en Maligny, al sureste de París. Era el cuarto de seis hijos de la familia de Jacques y Zoé Fréchet, que eran protestantes (Taylor, 1982). Como matemático, Fréchet consagró su trabajo a la Topología Conjuntista en el periodo de 1904 a 1928 (Arboleda, 1982); su tesis doctoral está dentro de este periodo y se puede decir que es uno de los trabajos con los que comienza el programa del Análisis General.

- *Un objeto de difusión.*

La obra que estudiamos en esta investigación es la tesis doctoral de Maurice Fréchet, publicada en 1906 y dirigida por Hadamard. Es decir, se trata de una obra dirigida y validada por la comunidad matemática de la época.

- *Parte de una expresión intelectual más global.* En esta parte tratamos de entender la evolución de las ideas de Maurice Fréchet en la totalidad de sus obras y la relación de estas con otras, cabe mencionar que la única obra de la que revisaremos el original es la tesis doctoral de Fréchet. Sobre el complemento de sus trabajos relacionados con la Topología, nos basaremos en lo que dicen otras investigaciones. Aunado a ello, esta parte nos permitió familiarizarnos con la tesis doctoral, a partir de la cual configurar nuestro método particular de análisis.

A manera de ejemplo, presentamos a continuación el modo en que llevamos a cabo la familiarización de la obra, centrando nuestra atención en cómo se logrará la ‘independencia’ de la métrica y la generalización.

En su tesis, Fréchet (1906) introduce una estructura, que Arboleda (1982) reconoce como *topológica en un espacio abstracto:*

> … en sus trabajos sobre espacios tan generales como los espacios L y V cuyas topologías están definidas, respectivamente, por la convergencia de sucesiones y por una axiomática generalizada de las vecindades. (Arboleda, 1982, p. 71, 72)

A partir de esta afirmación, nos interesamos en entender tales espacios, a los cuáles Fréchet les llama *clases de elementos* (L) y (V) y las define de la siguiente manera:

Clase de elementos (L)

Dorénavant, nous nous limiterons donc à l'étude des ensembles tirés d'une classe (L) d'éléments de nature quelconque mais satisfaisant aux conditions suivantes : on sait distinguer si deux éléments de la classe (L) sont distincts ou non. De plus, on a pu donner une définition de la limite d'une suite d'éléments de la classe (L). Nous supposons donc qu'étant choisie au hasard une suite infinie d'éléments (distincts ou non) de la classe (L), on puisse dire d'une façon certaine si cette suite $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ a ou non une limite A (d'ailleurs unique). Le procédé qui permettra de donner la réponse (autrement dit la définition de la limite) est d'ailleurs absolument quelconque, assujetti seulement à satisfaire aux conditions I et II dont nous avons parlé et qui sont les suivantes :

I) Si chacun des éléments de la suite infinie $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ est identique à un même élément A, la suite a certainement une limite qui est A.

Si une suite infinie $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ a une limite A, toute suite d'éléments de la première suite pris dans le même ordre : $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_p}, \ldots.$ (les nombres entiers $n_1, n_2, \ldots, n_p$ iront donc en croissant) a une limite qui est aussi A.(Fréchet, 1906, p. 5, 6)

En ésta se definen las condiciones y características para los elementos de una clase (L), donde vemos que Fréchet la define bajo la convergencia de sucesiones. Una de las primeras condiciones que nos llama la atención es: *Se puede distinguir si dos elementos de la clase* (L) *son distintos o no*; de la que identificamos que el autor pide que los elementos se puedan distinguir, aunque no dice cómo los distingue.

Respecto de la clase de elemento (V), dice:

Considérons une classe (V) d'éléments de nature quelconque, mais tels qu'on sache discerner si deux d'entre eux sont ou non identiques et tels, de plus, qu'à deux quelconques d'entre eux A, B on puisse faire correspondre un nombre $(A, B) = (B, A) \geq 0$ qui jouit des deux propriétés suivantes : 1^0 La condition nécessaire et suffisante pour que (A, B) soit nul est que A et B soient identiques. 2^0 Il existe une fonction positive bien déterminée $f(\varepsilon)$ tendant vers zéro avec ε, telle que les inégalités $(A, B) \leq \varepsilon$, $(B, C) \leq \varepsilon$ entraînent $(A, C) \leq f(\varepsilon)$, quels que soient les éléments A, B, C. Autrement dit, il suffit que (A, B) et (B, C) soient petits pour qu'il en soit de même de (A, C). Nous appellerons *voisinage* de A et de B le nombre (A, B). (Fréchet, 1906) (p. 18)

En esta definición de la clase (V), identificamos nuevamente que Fréchet pone como condición general que se puedan *distinguir si dos de entre los elementos son o no idénticos*, aquí podemos ver que a diferencia de la clase (L), le interesa distinguir si son idénticos o no. Además, entendemos que define la *vecindad* como un número mayor que cero correspondiente a dos elementos de la clase (V), pero de alguna manera le pide a este número que sea pequeño.

De las definiciones anteriores, tanto de la clase (L) como de la clase (V) notamos que en ambas trabaja con conjuntos de elementos de naturaleza cualquiera, esta es una de las principales condiciones que le permiten generalizar y abarcar los casos particulares. Otra condición que pone es que se pueda distinguir entre dos de sus elementos distintos en la clase (L) y que se pueda distinguir entre dos de los elementos si son iguales o no en la clase (V), es en esta condición de distinción que reconocemos que está puesta en juego la noción de *relación de proximidad*, así que nos interesa entender el papel que juega la condición *distinguir entre dos de ellos si son o no idénticos*, en el proceso de generalización que realiza.

Reflexiones finales

A modo de cierre del presente documento, algunas reflexiones que hemos obtenido de la familiarización y descripción de la obra, es que *la relación de proximidad* es la que permite distinguir entre los elementos idénticos. Considerando que aquello que los distingue como idénticos es una característica de ellos, es decir, no son idénticos en su totalidad sino parcialmente. Por otro lado, la naturaleza topológica, en la obra de Fréchet la estamos reconociendo como aquello que permite trabajar con los conceptos y nociones matemáticas que es independiente de la naturaleza de los elementos considerados. No es necesario tener un conjunto de elementos particulares para poder determinar ciertas propiedades, sin embargo, estas propiedades *sí dependen de la relación de proximidad.*

Reconocemos que las condiciones de *distinguir los elementos* y que se consideren *elementos de naturaleza cualquiera* le permiten a Fréchet independizarse de la métrica euclidiana y demostrar algunos teoremas considerado otros elementos y así generalizar.

Referencias bibliográficas

Arboleda, L. C. (1982). Consideraciones metodológicas sobre el aporte de Maurice Frechet a los comienzos de la topología general. *Lecturas Matemáticas*, *3*(1), 69–70.

Arboleda, L. C. (2012). Objetos Matemáticos y Prácticas Constitutivas: La génesis de la Topología de Vecindades. *Notae Philosophicae Scientiae Formalis*, *1*(1), 32–44.

Cantoral, R. (2013). Teoría Sociepistemológica de la Matemática Educativa. *Estudios sobre construcción social del conocimiento*. España: Gedisa.

Espinoza Rámirez, L. (2009). *Una evolución de la Analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. (Tesis de maestría no publicada). Distrito Federal, México, Centro de Investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Fréchet, M. (1906). *Sur quelques points du calcul fonctionnel.* (Tesis doctoral no publicada). Paris, Francia, Facultad de Ciencias de Paris, 1-72. Recuperado de https://bit.ly/2IEdQX4

Freixenet Tarrés, J. (1994). La topología general desde sus comienzos hasta Hausdorff. *Historia de la Matemática*, 121-211. Recuperado de https://bit.ly/2wx1KKy

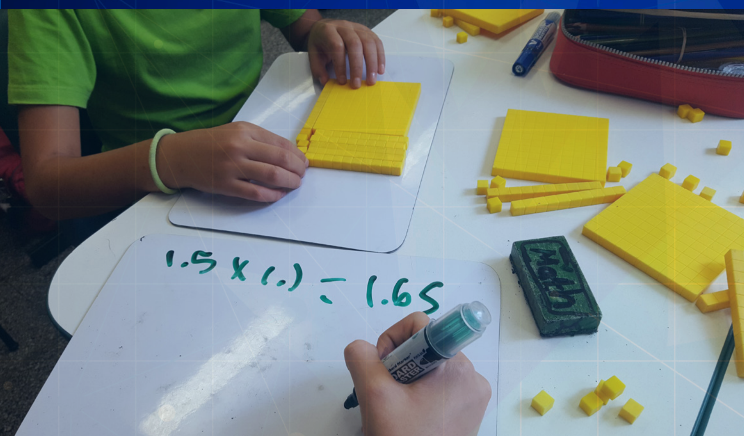
Hinrichsen, D., y Fernández, J. L. (1977). *Topología General*. España: Urmo, S. A. de ediciones.

Pérez, J. (2015). *Topología de Conjuntos, un primer curso*. México: Sociedad Matemática Mexicana.

Taylor, A. E. (1982). A study of Maurice Fréchet: I. His early work on point set theory and the theory of functionals. *Archive for History of Exact Sciences*, *27*(3), 233–295. https://doi.org/10.1007/BF00327860

SECCIÓN 4

EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL



VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

LA TRANSVERSALIDAD: UN ACERCAMIENTO A LA MATEMÁTICA DESDE LAS CIENCIAS NATURALES Y SOCIALES

Gessure Abisaí Espino Flores, Marcelino González Maitland, Josué Gutiérrez González
Universidad Autónoma de Nayarit, Centro Regional de Formación Profesional Docente de Sonora. (México)
gessure@uan.edu.mx, marcelino.gonzalez@creson.edu.mx, josue.gutierrez@creson.edu.mx

Resumen
Más allá de la rigurosa estructuración de la matemática como ciencia, en este trabajo se revela la importancia de enfocar a esta disciplina como una metodología que enriquece el estudio del mundo natural y social, recibiendo y tributando significatividad tanto al aprendizaje de las matemáticas, como al conocimiento científico-natural y socio-humanístico. La transversalidad, como relación vertical y horizontal dentro de la malla curricular del conocimiento matemático, es objeto de esta investigación, siendo su objetivo desarrollar una cultura de integración de las matemáticas con todo el contenido del programa de educación básica.

Palabras clave: investigación-acción, herramienta tecnológica, transversalidad, ACODESA.

Abstract
Beyond the rigorous structuring of mathematics as a science, this paper reveals the importance of focusing on this discipline as a methodology that enriches the study of the natural and social world, receiving and providing meaning to both, mathematics learning and to the scientific-natural and socio-humanistic knowledge. The transversal vertical and horizontal relationship within the curricular mesh of mathematical knowledge is the object of this research, being its objective to develop a culture of mathematics integration with all the content of the basic education program.

Key words: action research, technological tools, transversal relationship, ACODESA.

Introducción

En el trabajo se aborda el problema de la poca relación vertical y horizontal de las matemáticas en la malla curricular inherente a la enseñanza básica, por lo que el propósito de esta investigación es el contribuir al desarrollo de las relaciones transversales de las matemáticas con las demás materias curriculares; mediante el diseño de actividades didácticas por parte del profesor, con base en diseños concretos que permitan la exploración de contenidos y el uso de herramientas tecnológicas promoviendo la transversalidad de los contenidos.

La formación de profesores en México

Uno de los campos en los que se a puesto mayor interés por parte de la Secretaría de Educación Pública [SEP], ha sido en lenguaje y matemáticas. De acuerdo a mediciones internacionales como PISA (Flores y Díaz, 2013), el 55% de los alumnos en México no alcanza el nivel básico de habilidades matemáticas, y el 41% no alcanza el rubro de comprensión de lectura. Ante este panorama los esfuerzos por elevar los índices de calidad en educación son cada vez mayores, reflejándose en una nueva reforma educativa donde el desarrollo de competencias en los alumnos es parte fundamental para la mejora de habilidades en los estudiantes, especialmente en niveles de enseñanza básica (secundaria) y media superior (SEP, 2016).

La capacitación de los profesores de matemáticas se ha concentrado principalmente en el fortalecimiento del conocimiento disciplinar; no obstante los cambios educativos (implementación de una nueva reforma educativa) en el país, es indispensable que la actualización de los profesores se centre en el desarrollo de técnicas de aprendizaje apropiadas a los contextos escolares y extraescolares, llevando la educación a un siguiente nivel, donde no se vean los contenidos aislados del resto de las áreas del conocimiento, sino que exista articulación entre estas, y más importante aún que se centre en aquellos aprendizajes clave (SEP, 2017) que permitan una educación integral para la vida del estudiante.

La enseñanza de las ciencias

La enseñanza de las ciencias se considera compleja y alejada de la vida cotidiana, es por ello que consideramos esencial el diseñar la implementación de estrategias didácticas que contemplen la conexión entre las disciplinas de las ciencias y su relación con la vida diaria.
Uno de los desafíos a los que se enfrentan actualmente los docentes en la enseñanza de las matemáticas es la búsqueda de estrategias novedosas que permitan relacionar el conocimiento teórico con fenómenos que permitan la motivación de los estudiantes, y mejoren la comprensión de los conceptos matemáticos involucrados (López, Gil y Maroto, 2017).

El uso de la tecnología como apoyo a la matemática

El uso de la herramienta tecnológica en la actualización de profesores ha sido más de carácter profesionalizante, esto quiere decir que el profesor es capacitado principalmente como experto en el uso de la herramienta, dejando de lado la capacitación con un enfoque sobre el desarrollo y creación de actividades didácticas, donde promuevan situaciones acordes al contexto escolar o extraescolar que le rodean. La herramienta tecnológica puede ser considerada como un instrumento de procesamiento de datos (calculadora, celular, computadora, entre otros), y como una herramienta educativa en apoyo al proceso de enseñanza y aprendizaje (Pea, 1987; citado en Ben-Zvi, 2001), la cual impacte de manera cognitiva en el alumno y promueva aquellos aprendizajes clave de situaciones con contenido matemático.

La transversalidad

Uno de los problemas que subsisten en la educación matemática ha sido que las diferentes disciplinas se han enfocado en trabajar de manera aislada, dejando de lado el trabajo sobre la transversalidad de contenidos.

Es por ello que proponemos una serie de actividades didácticas desde la transversalidad de diferentes disciplinas como, química, física y arte, buscando vincular el enfoque experimental de las ciencias sociales y naturales con la acción social, simbiosis que aportará un acercamiento a aquellos problemas que circunscriben la educación matemática.

Consideramos que la transversalidad debe utilizarse como una estrategia fundamental, para lograr el conocimiento significativo, aplicado y relacionado con el entorno, favoreciendo los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ciencias escolares en el aula; permitiendo al docente llevar a cabo la conexión entre las disciplinas de una forma natural, didacta e innovadora y, que a su vez integren la transversalidad como un eje central.

Se han realizado diseños basados en experimentos (físicos y químicos), donde las representaciones espontaneas (Espino y Hugues, 2014) juegan un papel importante para el desarrollo de las actividades, y otras en las que el uso de las herramientas tecnológicas es esencial para la toma de datos por ejemplo en física con temas como la parábola.

Es por lo anterior que se hace el planteamiento de la experimentación con materiales cotidianos y promover la transversalidad de los contenidos y los aprendizajes claves de distintas asignaturas.

Metodología

Se asume un enfoque sociocrítico y cualitativo a través del método de investigación-acción (Lewin, 1946) y la teoría fundada (Glaser y Strauss, 1967). Las cuales son fundamentales para la exploración reflexiva en los sujetos con prácticas sociales y/o educativas, y teniendo como objetivo mejorar el discurso matemático (Carr y González, 1988). Otro elemento metodológico para la creación de las propuestas didácticas es la metodología ACODESA, debido a que posibilita organizar y/o guiar el trabajo de los estudiantes, y el rol del profesor. ACODESA integra al Aprendizaje colaborativo, el Debate científico y la Autorreflexión, como componentes estratégicos que se desarrollan al abordar la situación problema, e interrelacionándose entre sí; a su vez haciendo uso de los campos conceptuales (Vergnaud, 1991), debido a que el concepto adquiere sentido para el sujeto mediante la resolución situaciones problemas (Hitt y Cortés, 2009) que promuevan la reflexión en un sistema matemático. Conforme a la complejidad que conlleva el aprendizaje de las matemáticas, creemos que el uso de los campos conceptuales es indudable para el desarrollo del pensamiento matemático. Así mismo se hace uso de la interdisciplinariedad, debido a que esta favorece la formación integral de las áreas, y los participantes tienen funciones comunes permitiendo aprender sobre ellos y entre sí (Chacón, Estrada y Moreno, 2013).

La investigación se desarrolló con profesores que imparten en uno o más grados educativos (desde preescolar hasta licenciatura), se consideró a la experimentación en el aula como el andamiaje fundamental. Debido a la naturaleza de las prácticas experimentales fue necesario abordarlas desde su área con apoyo de especialistas, e incursionando por medio de preguntas de reflexión sobre la situación problema, haciendo un tratamiento y análisis de las representaciones gráficas y algebraicas de las prácticas. Los instructores fungieron como guías en el desarrollo de las prácticas, además para estas se tomaron aspectos como la transversalidad de los contenidos, donde el alumno encuentre un reconocimiento de las prácticas hacia otras áreas.

Práctica de Química

Sobre la práctica de Química (*La materia no se crea ni se destruye y algo más*), el enfoque fue sobre aquellas representaciones espontaneas de los profesores, y cómo un proceso de laboratorio permite realizar una transversalidad hacia contenidos matemáticos mediante la experimentación, permitiendo las representaciones visuales una consolidación de conceptos que se veían desvinculados a otras áreas y la importancia de estas.
El estudio, fue realizado en el Centro Regional de Formación Profesional Docente de Sonora (CRESON), con un grupo de veinte profesores de secundaria, en el diplomado: *La fase experimental: un recurso vital en las clases de ciencias naturales.*
La propuesta consiste en presentar el tema de ácido-base, y su propuesta de contenido disciplinar como se muestra en la *Figura 1*.

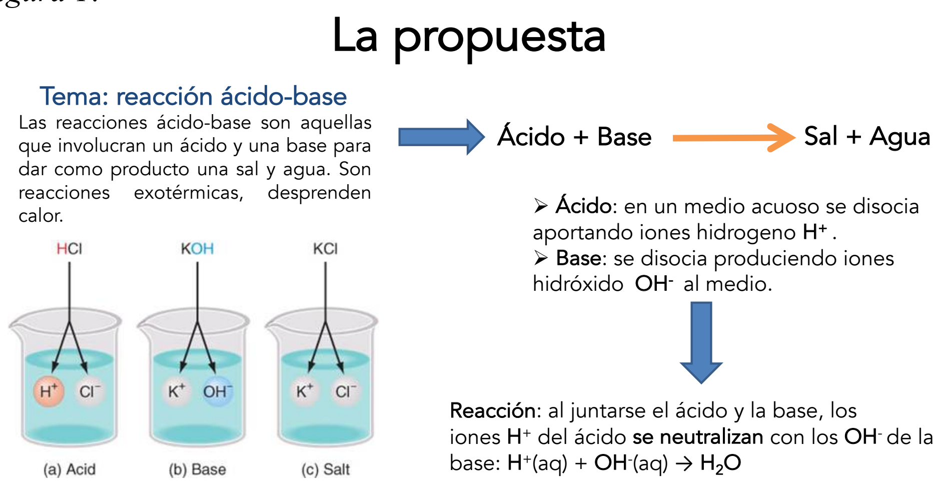


Figura 1. Explicación de la reacción ácido-base. (Elaboración propia)

Así mismo se entregó la hoja de trabajo (*Figura 2*), que dentro de su contenido se pone en juego la medición del peso del jugo y diámetro de un globo, además de la graficación de los datos en un plano de ejes coordenados (primer cuadrante).

Práctica la materia no se crea ni se destruye y algo más….

Objetivo

• Determinar la acidez del jugo de naranja natural y comercial basado en una reacción ácido-base.

• Realizar la interpretación usando un modelo matemático.

Material

1) 2 Matraz Erlenmeyer 100 ml
2) 2 Globos del número 9
3) Balanza analítica o granataria
4) 10 mL de jugo de naranja natural
5) 10 mL de jugo comercial
6) 2 g de bicarbonato de sodio
7) Cinta masking tape

Protocolo

1) Medir en una probeta 10 ml de jugo de naranja natural y 10 ml de jugo comercial y colocarlos por separado en matraces Erlenmeyer.
2) Para cada condición, pesar 1 g de bicarbonato de sodio y ponerlo dentro de en un globo.
3) Colocar el globo en la boca del matraz, evitando que el bicarbonato de sodio caiga dentro del matraz.
4) Sellar la boca del matraz y el globo con cinta masking tape.
5) Medir el diámetro del globo y anotarlo en la tabla (0 min).
6) Pesar todo el sistema. Anotar el peso en la tabla (0 min).
7) En la balanza, dejar caer el bicarbonato de sodio dentro del matraz.
8) Anotar el peso del sistema cada 2 minutos durante 10 minutos.
9) Medir y anotar el diámetro del globo cada 2 minutos durante 10 minutos.
10) Graficar los datos de peso del sistema y diámetro del globo (hoja anexa).

Graficar

Tipo de muestra						
	0 min	2 min	4 min	6 min	8 min	10 min
Peso del sistema (g)						
Diámetro del globo (cm)						

Figura 2. Hoja de la práctica de química. (Elaboración propia)

■ La fase experimental.

Durante la experimentación se trabajó en grupos pequeños de cuatro integrantes, cabe destacar que unos grupos tuvieron conformaciones de tres o cinco integrantes. Los profesores eran docentes de química, así como encargados de laboratorio (*Figura 3*), así como los resultados obtenidos en las mediciones de los distintos grupos variaron, cabe mencionar que la graficación entre los equipos e individualmente al interior del equipo resultaban distintos, debido a las escalas de los ejes que consideraron y el uso de las variables (*Figura 3*).

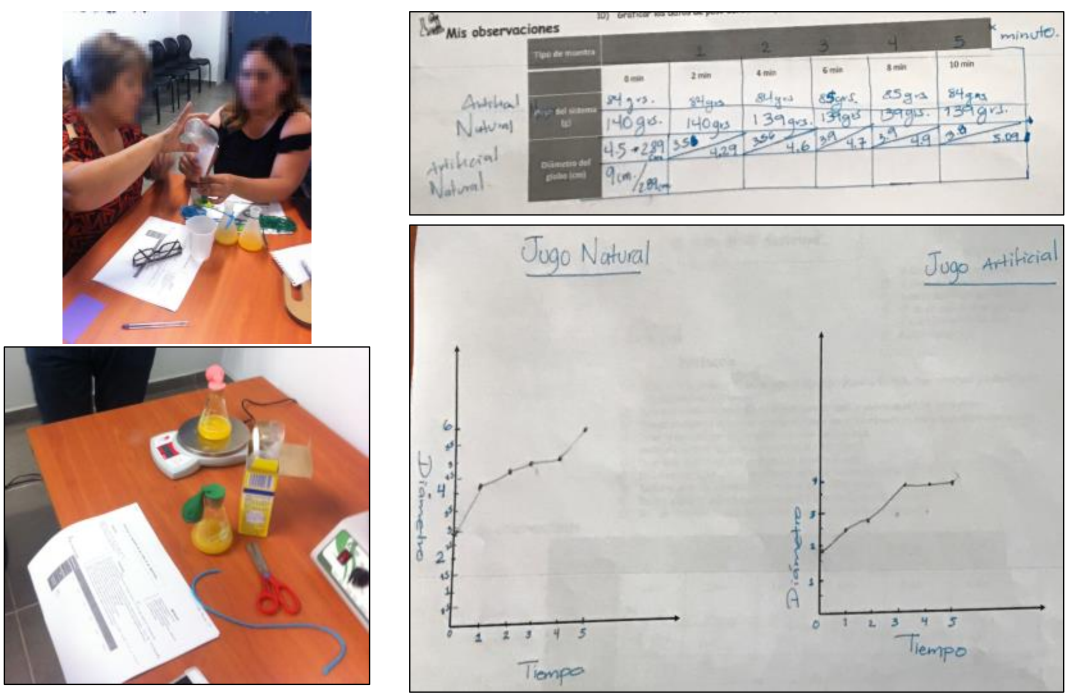


Figura 3. Trabajo colaborativo y representaciones espontaneas de la situación planteada. (Elaboración propia)

Práctica de Física

En la práctica de Física (*El lanzamiento de un cohete*), no únicamente se dio la transversalidad sobre la matemática y la física, además surgieron ideas sobre conceptos químicos, y cómo el uso del celular permite un análisis de los datos para la modelación del fenómeno mediante software especializado como son: Tracker y GeoGebra.

La práctica fue realizada en el CRESON, con un grupo de siete profesores en ejercicio, de la Especialidad en Uso Didáctico de Tecnología Digital para la Enseñanza de las Matemáticas. Seis de ellos son profesores que residen en la ciudad de Hermosillo, Sonora, México, y una profesora de Tepic, Nayarit, México quien participó en el curso en línea vía Hangouts.

La propuesta consistió en la construcción de un cohete fabricado con material de rehúso, el cual es propulsado por aire a presión, mediante una bomba manual. Para el desarrollo de esta actividad se formaron dos equipos de tres y cuatro personas, procurando que en cada equipo hubiera docentes de los distintos niveles educativos.

Las funciones básicas fueron: preparación y construcción del cohete (video en YouTube), sujetar o colocar de manera óptima el cohete, la grabación del fenómeno con el celular, y finalmente el análisis del video y los datos mediante el software "Tracker", dejando de manera libre las variables a elegir, como son: la posición de los ejes, la magnitud de la medida base y el número de cuadros por segundo a utilizar.

Los profesores ajustaron los ejes con base a la línea del muro (*Figura 4*), en la disposición gráfica optaron en un primer momento por el uso de las variables (x,y), generando una gráfica que no correspondía a sus concepciones preliminares (*Figura 4*), los cual resultó en una primera discusión del porqué la gráfica no correspondía a las que se encuentran en los libros.

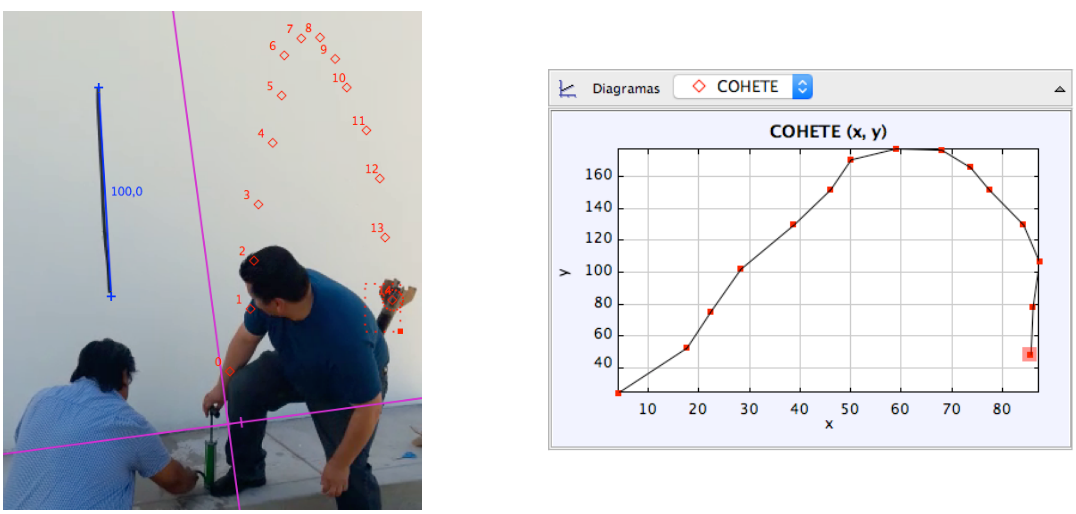
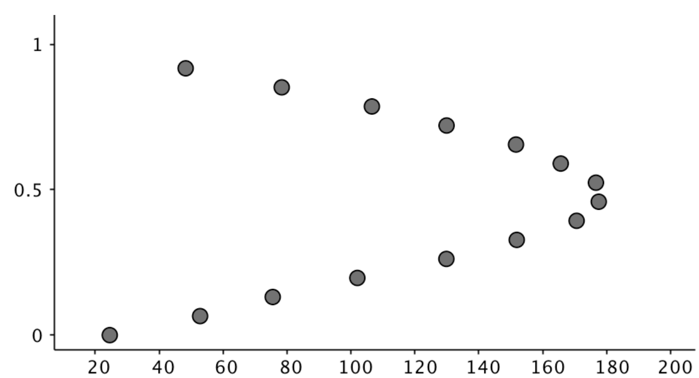


Figura 4. Lanzamiento del cohete (izquierda) y gráfico generado en Tracker de x e y (derecha). (Elaboración propia)

Después consideraron la variable tiempo (*t*), así como la distancia vertical (*altura*) alcanzada por el cohete (*y*); la problemática resultante fue el de generar un modelo algebraico al fenómeno estudiado sobre la trayectoria del cohete.

Debido a que en Tracker no encontraron la forma de modelar dichos datos, optaron por hacer uso de GeoGebra, herramienta que les era más amigable en su uso. Los datos fueron ingresados en la hoja de cálculo de GeoGebra, a partir de estos generaron una análisis de regresión de dos variables tiempo contra altura (*t,y*), se produjo un gráfico que aunque la selección de las variables fue correcta, el gráfico no correspondía aún como lo esperado (*Figura 5*), para reorganizar el gráfico a lo esperado fue necesario realizar un cambio de variables que permite el programa, resultando así la gráfica esperada; es aquí donde eligieron un modelo de regresión polinómico de grado dos (*Figura 5*), sin embargo, de manera individual y en equipo se obtuvieron distintos modelos, debido a que de manera individual los ajustes que realizaron en Tracker fueron libres, como: el tiempo de captura de video, el número de fotogramas y la disposición de los ejes, y aunado a esto el error humano al elegir en que zona o pixel se debería de realizar la captura de datos.



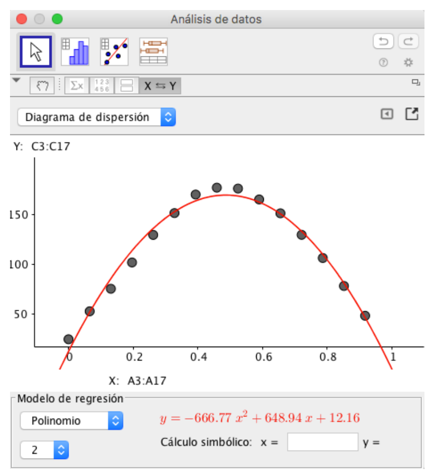


Figura 5. Primer gráfico (izquierda); modelo cuadrático (derecha). (Elaboración propia)

Conclusiones previas.

- Si bien los profesores participantes de la actividad coincidieron en que este tipo de actividades enriquece la práctica docente, también destacaron que el desarrollo de secuencias didácticas que abarquen la experimentación y la transversalidad, requieren de la participación en conjunto de otros docentes, particularmente a nivel superior.
- De igual forma puntualizaron que no todos los temas permiten la realización de este tipo de actividades.
- La Transversalidad Tecnológica posibilita un trabajo más fluido.
- Algunos profesores expresaron que no habían tenido un acercamiento a las matemáticas desde su disciplina, y sobre todo la información que un gráfico puede mostrar en distintos niveles de lectura, manifestando encontrar sentido a la representación gráfica.

- En algunos casos las variables dependiente e independiente fueron permutadas, dando como resultado un gráfico que generaba una información errónea.
- Para los profesores de áreas no matemáticas se les dificulta proponer una función que describiera el modelo bosquejado.
- El uso de escalas por parte del profesor varia, provocando representaciones gráficas que proporciona una información inexacta.

Reflexiones.

- El docente debe contar con las estrategias para el desarrollo de los contenidos de la currícula de matemáticas, haciendo uso de ejercicios y prácticas experimentales que permitan a los alumnos establecer una conexión entre el fenómeno y la teoría, dando así lugar a aquellos aprendizajes claves, enfatizando las aplicaciones o usos de las mismas en los contextos extraescolares.
- Con este conjunto de acciones, se espera produzcan en el docente un cambio en las prácticas pedagógicas empleadas en el aula, y simultáneamente los impulsen a la creación de secuencias didácticas propias que involucren la transversalidad en la enseñanza de las matemáticas.
- El uso del trabajo a papel y lápiz es necesario, así como el uso de software apropiado que permita conjeturar sobre aquellas representaciones espontaneas.

Referencias bibliográficas

Ben-Zvi, D. (2001), Technological Tools in Statistical Education. in *Jornades europees d'estadística. L'ensenyament i la difusió de l'estadística*. Ed. Conselleria d'Economia, Comerç i Indústria, (pp. 201-220). Palma de Mallorca.

Carr, W. y González, G. (1988). Teoría crítica de la enseñanza: la investigación-acción en la formación del profesorado. *Ediciones Martínez Roca*.

Chacón, D., Estrada, F. y Moreno, G. (2013). La interdisciplinariedad en los contenidos de Secundaria Básica desde las ciencias naturales. *Ciencias Holguín*, XIX (2), (pp. 1-11).

Espino, G. y Hugues, E. (2014). La herramienta tecnológica como apoyo al concepto de correlación lineal. *Contribuciones a la Enseñanza y Aprendizaje de la Probabilidad y la Estadística 2014*, (pp. 99-108). Puebla, Pue., México.

Flores, G. y Díaz, M. (2013). México en PISA 2012.México: INEE. Recuperado de http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/11149/1/images/Mexico_PISA_2012_Informe.pdf

Glaser, B. y Strauss, A. (1967). The discovery of Grounded theory: Strategies for qualitative research. *New York: Aldine Publishing*.

Hitt, F. y Cortés, J. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelación matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, Vol. 10, n°1, (pp. 1-30) Disponible en: www.cidse.itcr.ac.cr/revistamete

Lewin, K. (1946) Action Research and Minority Problems. *Journal of Social lssues*, vol. 2, no. 4, 1946, (pp. 34-46).

López, M., Gil, C. y Maroto, A. (2017). Un proyecto interdisciplinar en la formación de maestros de educación primaria. Matemáticas, ciencias y expresión artística. *Actas de VIII CIBEM* (pp. 129-136). Madrid, España.

Secretaría de Educación Pública. (2016). *El Modelo Educativo 2016. El planteamiento pedagógico de la Reforma Educativa*. Disponible en: https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/114501/Modelo_Educativo_2016.pdf.

Secretaría de Educación Pública. (2017). *Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Plan y programa de estudio para la educación básica*. Disponible en: https://www.tamaulipas.gob.mx/educacion/wp-content/uploads/sites/3/2017/07/aprendizajes_clave_para_la_educacion_integral.pdf.

Vergnaud, G. (1991). Les sciences cognitives en débat. Première école d'été du CNRS sur les sciences cognitives. Paris: *Editions du CNRS*.

FUENTES DE INFORMACIÓN EN UN ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA DE LOS PROFESORES: LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA EN PRECÁLCULO.

Jeannette Vargas Hernández, María Teresa González Astudillo y Nury Vargas Hernández
Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca y Universidad de Salamanca
Colombia. (España)
jvargash@unicolmayor.edu.co, maite@usal.es , nvargash@unicolmayor.edu.co

Resumen
En este documento se expone la estructura general de nuestra investigación y se describen las fuentes de información a las que acudimos para dar una respuesta a ¿cómo usan y justifican los profesores de Precálculo, los instrumentos de la práctica en la enseñanza de la función logarítmica? Entendiendo por instrumentos de la práctica los registros de representación, el discurso y los elementos matemáticos del concepto.

Palabras clave: precálculo, APOE, enseñanza, Atlas.ti, logaritmo.

Abstract
This paper presents the general structure of the research and describes the information reference sources available to answer the question: how do Pre-calculus teachers use and justify the practice tools to teach the logarithmic function? I understand by practice tools, the registers of representation, the discourse, and the mathematical elements of the concept.

Key words: pre-calculus, APOS theory, mechanisms, Atlas.ti, logarithmic function

Introducción

La función logarítmica se enseña en los cursos de la básica secundaria y se aborda a nivel superior, ya sea en los cursos llamados precálculo, cálculo, ecuaciones diferenciales o análisis.

Concerniente a la comprensión de este concepto, la investigación en Educación Matemática señala “vacíos” en el conocimiento de los profesores relativos a las funciones logarítmicas (Berezovsky, 2007) y dificultades tanto en su enseñanza como en el aprendizaje (Confrey & Smith, (1995); Kastberg, (2002); Berezovsky, (2004); Kenney, (2005)).

Aunado a lo expuesto en el párrafo anterior, no existen investigaciones previas que reporten resultados de análisis de las prácticas de profesores universitarios en cuanto a la enseñanza de las funciones logarítmicas. Sin embargo, existe el precedente de una investigación sobre la enseñanza de la función exponencial en la cual se analiza la práctica del docente, con el constructo modelación de la descomposición genética (Vargas, 2017; Vargas, 2014). Es de allí que centramos nuestro interés, en dar continuidad a una de las implicaciones planteadas en la indagación citada, como lo es, el análisis de la práctica de los docentes de precálculo en la enseñanza de la función logarítmica y, para ello, utilizamos planteamientos, metodología y algunos resultados que están reportados en dicho estudio.

Atendiendo al presente objetivo, se entiende la práctica del profesor de matemáticas desde una perspectiva sociocultural, lo cual, por un lado, permite destacar que un principio central de la aproximación sociocultural en el ámbito educativo es que las acciones humanas, tanto en el plano individual como en el plano social están mediadas por herramientas y signos (Goos, 2004; Lerman, 1996).

Interpretando la práctica como un sistema de actividad se señala que existen diferentes momentos y lugares donde ésta se desarrolla. En nuestro caso, en este artículo, nos centraremos en el análisis de la práctica del profesor en una de las fases de ella; la gestión en el aula.

Referentes

El análisis que se realiza, de algunos segmentos de una práctica docente, en la enseñanza de la función logarítmica, está estructurado acudiendo a que se puede describir y explicar cómo el profesor genera oportunidades de aprendizaje en el aula mediante la noción que denominan “modelación de un mecanismo de construcción de conocimiento” (García, Gavilán, & Llinares, 2012, pág. 219).

Al hacer referencia a la modelación de mecanismos de construcción, es indispensable tener en cuenta dos aspectos, por un lado dicha modelación hace mención desde la perspectiva sociocultural a la práctica del docente y además lleva explícita una postura sobre una forma en que se asume que los estudiantes construyen los conceptos matemáticos. Dicha construcción está sustentada en la Teoría APOE, la cual se centra sobre las formas de conocer de un estudiante cuando está tratando de aprender un concepto matemático (Acción, Proceso, Objeto y Esquema). Estas formas de conocer se construyen a través de la abstracción reflexiva por medio de los mecanismos de construcción que incluyen la repetición de acciones, la interiorización, la inversión, coordinación, encapsulación, desencapsulación y tematización (Dubinsky, 1991).

Atlas.ti como recurso para el análisis de datos

El programa ATLAS.ti fue desarrollado en Berlín mediante un proyecto de colaboración entre el departamento de Psicología de la Universidad Libre de Berlín y Thomas Muhr y se sigue perfeccionando en nuestros días. Se usa como medio de almacenamiento, categorización, codificación y estructuración de los datos obtenidos en una investigación a través del diseño de diagramas, mapas y redes. Permite el almacenamiento de los datos en un único lugar (*unidad hermenéutica*) a partir del que se va a hacer el análisis. Posteriormente, se segmentan, se asignan códigos a cada segmento incluyendo comentarios y

anotaciones (*memos*) y se forma así una base relacional de datos a partir de los que el programa genera redes semánticas (*networks*) para que finalmente sean interpretados por el investigador.
Los objetos o elementos que constituyen el programa son:

- *Documentos primarios*: documentos de texto, gráficos, sonoros o visuales situados en el disco duro. El programa no los modifica ni los guarda sino que almacena referencias a ellos.
- *Citas*: fragmentos de los documentos primarios seleccionados por su significación en relación con la investigación. Puede ser una cadena de texto, un gráfico, una imagen, …
- *Códigos*: indicadores de conceptos o expresiones que se van asignando a las citas seleccionadas.
- *Notas (memos)*: textos breves con ideas asociadas a algunos de los elementos.
- *Familias*: conjunto de objetos que comparten una cualidad, pueden ser familias de códigos, de documentos primarios, etc. Se suelen usar como filtros en la búsqueda de los miembros de algún objeto.
- *Redes*: están compuestas por nodos y relaciones creados a través de un editor específico. Los nodos pueden ser cualesquiera de los objetos del programa y las relaciones son los nexos establecidos entre esos nodos.

Todos los objetos llevan datos sobre la fecha y hora de su creación e incluso, si nuestro trabajo es en equipo, se pueden distinguir las aportaciones de los distintos miembros del equipo.

Método

Esta investigación es un estudio de casos, a través del cual se realiza un análisis de una práctica ordinaria, como la denominan Hersant y Perrin-Glorian (2005), y para ello se establecieron estrategias de obtención de información directa, tanto respecto a la planificación como a la gestión de las clases (grabaciones de vídeo de las sesiones, guiones de cada una de ellas y entrevistas con el profesor después del visionado de las grabaciones). Se entenderá por práctica ordinaria, clases en donde el investigador no interviene ni en la preparación ni su gestión.

En el desarrollo de la investigación se distinguen tres momentos. En el primero, tras la apropiación del marco teórico se identificaron los elementos matemáticos del concepto función logarítmica, así como los sistemas de representación (elementos imprescindibles para establecer una modelación de un mecanismo de construcción del concepto).

Como uno de los referentes, se hace uso de nuestra investigación concerniente al desarrollo histórico epistemológico de los conceptos logaritmo y función logarítmica (Vargas, 2017; González y Vargas, 2007). De igual manera se ha realizó una revisión de los estudios sobre la comprensión de la función logarítmica en el ámbito de la educación matemática.

En el segundo momento, se llevó a término la selección de profesores y el procedimiento para recoger información directa de las sesiones de aula de los docentes de Precálculo mientras enseñaban la función logarítmica e información directa sobre las intenciones de las acciones del profesor en las sesiones de clase a través de entrevistas semiestructuradas.

Los instrumentos que se utilizaron para recoger la información, de cuyo análisis obtendremos los datos y los resultados fueron: una entrevista inicial estructurada, entrevistas semiestructuradas -posteriores a las clases-, grabaciones de voz y video.

1. Se utilizó una *Entrevista estructurada* con fines biográficos y con el objetivo de tener información complementaria frente a las observaciones que posteriormente se llevarían a término respecto a las acciones del profesor el aula.
2. El profesor tenía elaborado un *documento con el plan de aula*, correspondiente a los objetivos trazados alrededor de la enseñanza de la función exponencial y, nos facilitó una copia de dicho documento en el momento de realizar la entrevista.
3. Se procedió a ingresar al aula donde se iban a *grabar las clases de los docentes con los grupos de estudiantes* con cierta antelación para que tanto el profesor, como el investigador y los estudiantes se fueran acomodando a la situación.
4. El guion de cada *entrevista semiestructurada* sobre estas sesiones se diseñó ad hoc para cada clase. Las preguntas planteadas por el investigador tenían como metas principales indagar sobre las intenciones del profesor en cada momento.

En el tercer momento, los videos junto con las grabaciones de voz, tanto de las clases como de las entrevistas, se han transcrito en su totalidad y se han incorporado a una unidad hermenéutica del programa Atlas.ti para compendiar de esta forma los datos y poder realizar su análisis organizado en una viñeta.

Desarrollo

Con el fin de mostrar algunos de los procesos de análisis, se expone parte de una viñeta con segmentos seleccionados por los investigadores, en los cuales se identifican las tareas, propuestas por el docente y se establece una ilación entre segmentos y argumentos expuestos por él, en las entrevistas; se entrelazan las declaraciones concernientes a sus intenciones con el uso de algunas representaciones, preguntas y observaciones que plantea a los estudiantes en el desarrollo de las clases en donde se enseña la función logaritmica.

La siguiente imagen es parte de la modelación identificada por los investigadores, según la cual el profesor incia el acercamiento de los estudiantes al estudio de los logaritmos a través de ecuaciones.

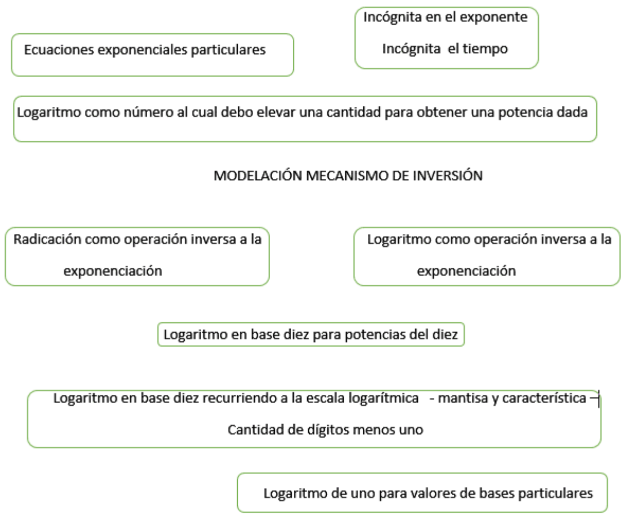


Figura 1. Modelación. Mecanismo de interiorización de acciones. (Elaboración propia).

Modelación de interiorización de acciones sobre procesos

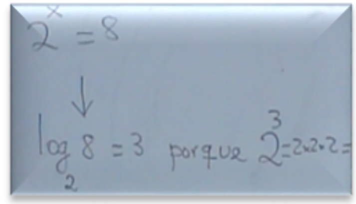
El contexto de capitales e intereses

En la clase 6, el profesor parte de la ecuación exponencial $2^x = 8$, que él identifica como "más sencilla" que la ecuación $2.300.000 = 2.000.000\left(1+\frac{0.03}{+2}\right)^{12t}$. Esta última ha sido bosquejada por los estudiantes, en el contexto de un problema de interés compuesto.
A partir de esta nueva ecuación, el profesor plantea preguntas tendientes a caracterizar la ecuación, mediante tareas relacionadas con la identificación de la posición de la incógnita, es decir, ubicada en el exponente. Además dirige la interpretación del logaritmo, como el número al que debo elevar una cantidad para obtener la potencia dada. Así, está expresando el logaritmo de un número como el valor del exponente en una potencia indicada.

Lo anterior se identifica, por los investigadores, como actividades del profesor que potencian la interiorización de acciones, buscando entre otros, la comprensión de los logaritmos, identificándolos como la medición de multiplicaciones.

A su vez, como el profesor en la entrevista, indica que quiere favorecer a través de estas tareas, que emerja para los estudiantes una noción, relativa a las acciones que realizan, cuando averiguan un exponente a partir de una base y una potencia dada. Se liga de esta forma el logaritmo de un número con el exponente de una potencia. Esto se hace con números concretos, punto a punto y a estas tareas los investigadores identificamos como la modelación de la interiorización de acciones. El profesor realiza con los estudiantes varios ejercicios sobre esta tarea:

P. Eso es la misma pregunta que está ahí arriba, escrita de otra forma. Logaritmo en base dos de ocho es tres porque dos elevado a la tres, si uno hace eso, pues da ocho. Entonces que no se nos olvide cuando nos digan logaritmo de tal cosa, es buscar el exponente.



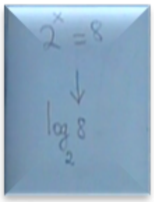


Figura 2. Registro de representación simbólico. (Elaboración propia).

Estos ejercicios buscan favorecer la interiorización de acciones relativas a obtener el exponente en diferentes expresiones potenciales y que constituyen ejercicios relativos a hallar el logaritmo de un número.

La radicación

En el siguiente diagrama examinamos que el profesor recurre a una de las operaciones inversas de la potenciación, que es la radicación (Figura 3).

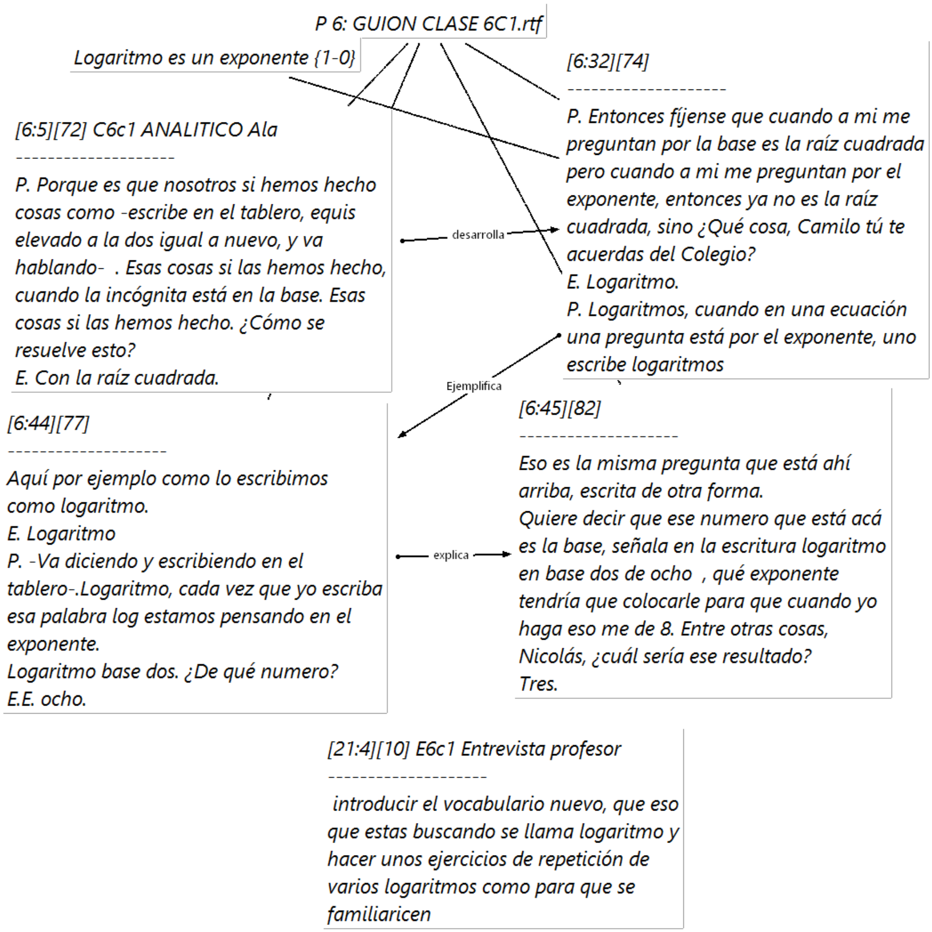


Figura 3. Guion de clase. (Elaboración propia).

Esto se hace utilizando una analogía con la solución de ecuaciones en las que la incógnita es la base con un exponente conocido y que se resuelven con un radical. Está utilizando la raíz como la inversión de una función, para por analogía, mostrar a los estudiantes el logaritmo como función de otra inversión de la exponencial. Cabe especificar que se promueve el mecanismo de inversión a través de ejemplos con algunos valores numéricos, más exactamente con números enteros; es una inversión punto a punto (no de la función).

Potencias de base diez

A continuación, el profesor ejemplifica logaritmos en diversas bases y potencias de enteros positivos y se detiene a mostrar los casos de base 10, entre ellos log 10 = 1, y luego explica los consensos, de la comunidad matemática en la escritura y notación de los logaritmos, así:

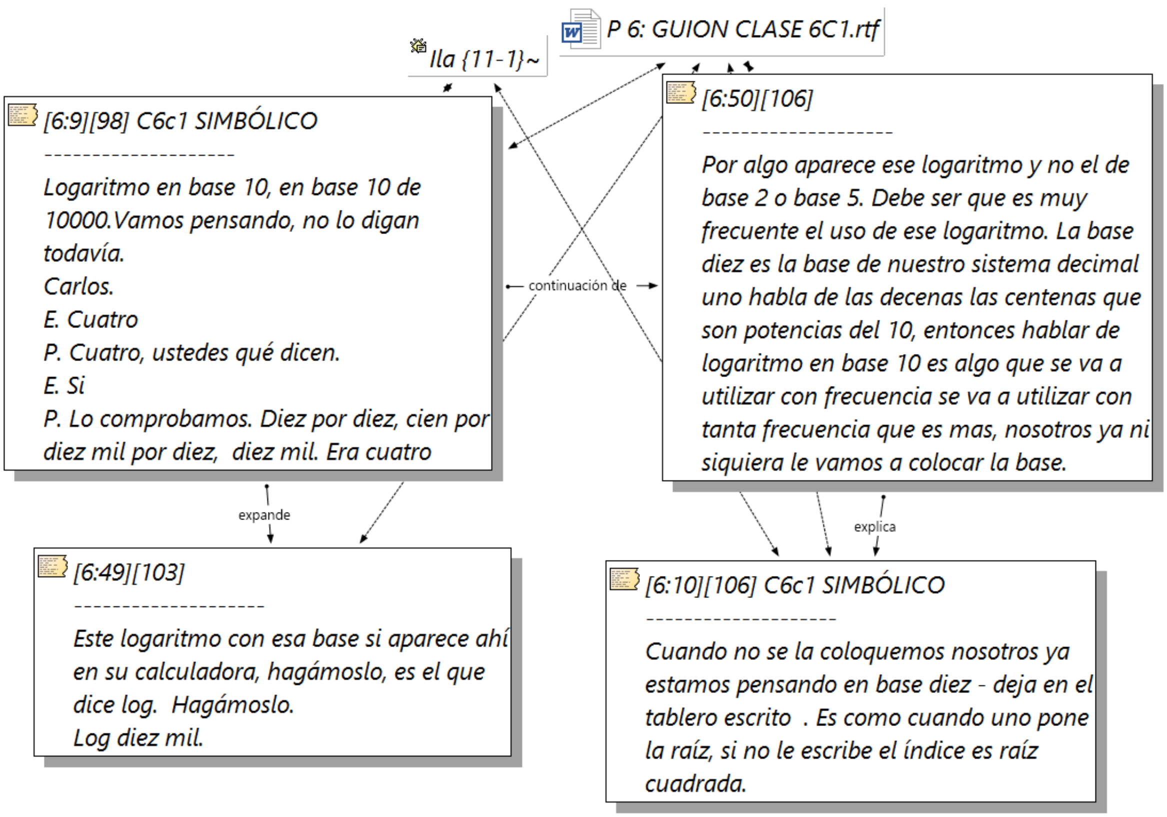
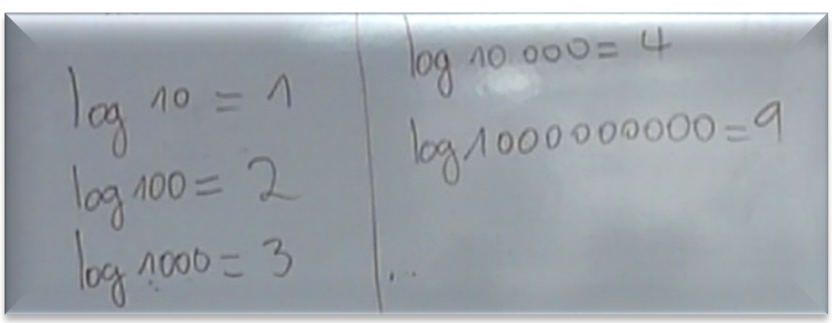


Figura 4. Diagrama de guion de clase. (Elaboración propia).

Termina los ejemplos de logaritmo en base diez de 10, 100, 1000 y potencias del diez y los usa para explicar una aproximación a los logaritmos de números que no son potencias del diez. De manera implícita está mostrando la escala logarítmica, indicando que un número como 10.000 es transformado en 4 y 100.000 en 5 y aquellos que estén entre 10.000 y 100.000 les será asignado el 4 como característica con sus correspondientes mantisas.



■ Resultados

El análisis de la práctica permite establecer que en la modelación de los mecanismos de construcción, el profesor recurre a esquemas de las ecuaciones y la radicación; teniendo como contexto transversal los problemas de interés, el conteo de dígitos y la cantidad de multiplicaciones de un mismo factor.

En la práctica analizada el mecanismo de inversión del objeto función exponencial ($y = a^x$) está acompañado de la inversión de funciones exponenciales particulares ($y=2^x$, $y=10^x$, $y=e^x$) apoyándose tanto en la representación simbólica como en la representación gráfica.

La identificación del mecanismo de inversión acompañado de tareas que involucran el potenciar la interiorización de acciones, es una característica propia de la modelación que realiza el profesor en la clase, cuando está enseñando la función logarítmica.

Referencias bibliográficas

Berezovski, T. (2004). *An inquiry into high school students' understanding of logarithms.* Thesis. Master of Science. Canada. Simon Frase University.

Berezovski, T. (2007). Towards effective teaching of logarithms: the case for pre-service teachers. In T. Lamberg & L. Wiest (Eds.), *Proceedings of the Twenty Ninth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1144-1146. Stateline (Lake Tahoe), NV: University of Nevada, Reno.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, Covariation, and Their Role in the Development of Exponential Functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(1), 66–86. http://doi.org/10.2307/749228.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (p. 95-123). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

García, M., Gavilán, J. M. y Llinares, S. (2012). Perspectiva de la práctica del profesor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. Relaciones entre la práctica y la perspectiva del profesor. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(3), 219-235.

González, M. T. y Vargas, J. (2007). Segmentos de la historia: la función logarítmica. *Matemática: Enseñanza Universitaria, 15*(2), 129-144.

Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(4), 258-291.

Hersant, M. y Perrin-Glorian, M. J. (2005). Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the Theory of Didactics Situations. *Educational Studies in Mathematics, 59*(1-3), 113-151.

Kastberg, S. E. (2002). *Understanding Mathematical Concepts: The case of the Logarithmic Function*. Thesis. Doctor of Philosophy. Athens, Georgia.

Kenney, R. (2005). "Students' Understanding of Logarithmic Function Notation" *Paper presented at the annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Hosted by Virginia Tech University Hotel Roanoke & Conference Center, Roanoke, VA*.

Lerman, S. (1996). Socio-cultural approaches to mathematics teaching and learning. *Educational Studies in Mathematics*, *31*(1-2), 1-9.

Vargas, J. (2014). La perspectiva sociocultural en el análisis de la práctica de los docentes de Precálculo. En: *Colombia Revista Científica: Centro de Investigaciones y Desarrollo Científico Universidad Distrital Francisco José De Caldas*. *20*, 25 – 32.

Vargas, J. (2017). *Análisis de la práctica del docente universitario de Precálculo. Estudio de casos en la enseñanza de las funciones exponenciales*. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

EMPODERAMIENTO DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS. UN ESTUDIO EN EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Santiago Ramiro Velázquez, Rene Santos Lozano
Secretaría de Educación Guerrero, Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
sramiro@prodigy.net.mx, santos_oasis@hotmail.com

Resumen
Reportamos saberes de un taller realizado en la XXXI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 31), soportado en una investigación en proceso sobre empoderamiento de profesores de matemáticas en educación media superior. Consideramos que este empoderamiento es un proceso en el que los profesores se adueñan de su práctica (Reyes-Gasperini y Cantoral, 2013). Documentamos la escolarización del saber que limita al estudiante en su aprendizaje y proponemos un taller para profesores de educación media superior, cuyo propósito es iniciar o continuar dicho proceso, analizando situaciones de aprendizaje. El trabajo se fundamenta en la socioepistemología y el enfoque metodológico es cualitativo.

Palabras clave: empoderamiento, práctica social, situaciones, aprendizaje.

Abstract
We report knowledge of a workshop carried out in the Thirtieth First Meeting in Latin American of Mathematics Education (31st RELME) based on an investigation about the empowerment of mathematics teachers in senior high school. We consider this empowerment as a process in which the teachers take control of their own teaching practice by themselves (Reyes-Gasperini y Cantoral, 2013). We documented the school knowledge that limits the students' learning and proposed a workshop for senior high school teachers, which is intended to make teachers start and continue this process by analyzing learning situations. The work is supported by the socio-epistemology with a qualitative methodological approach.

Key words: empowerment, social practice, situations, learning.

Introducción

En este trabajo reportamos saberes y experiencias de un taller realizado en RELME 31, enmarcado en una investigación en proceso sobre empoderamiento de profesores de matemáticas en educación media superior (EMS). Se parte de un estudio sobre un programa denominado "Empoderamiento docente: proceso de desarrollo profesional" (Cantoral y Reyes-Gasperini, 2016). En el que participan profesores de los diferentes subsistemas de EMS en México. Cuyo propósito consiste en "mejorar el logro educativo, disfrutar de las matemáticas y evitar la exclusión, mediante el empoderamiento docente". Nos apoyamos en la siguiente tesis de Reyes-Gasperini y Cantoral (2013) quienes postulan que el empoderamiento docente es un proceso en el que los profesores logran hacerse dueños de su práctica. Profesores y estudiantes se adueñan de su práctica cuando no se limitan a verificar lo que hacen sino a problematizar del por qué lo hacen así. Al explicar por qué, cómo, para qué lo hacen y cómo ellos se transforman, esto es ejercer prácticas sociales generadora de saberes (Velázquez, Slisko y Santos, 2016).

En el empoderamiento docente es fundamental que los profesores seleccionen, diseñen e implementen situaciones de aprendizaje, considerando que éstas son secuencias didácticas que se convierten en situaciones de aprendizaje cuando los alumnos las asumen como propias, es decir se involucran en las tareas que las integran y en el logro de los propósitos planteados. Las situaciones de aprendizaje en este trabajo están sustentadas en la Socioepistemología como posición teórica que explora formas de pensamiento matemático dentro y fuera de la escuela.

De estas posiciones surge un taller dirigido a profesores y futuros profesores de matemáticas de educación media superior, cuyo propósito consiste en que los participantes inicien o continúen un proceso de empoderamiento, por medio del diseño, rediseño y análisis de situaciones de aprendizaje, a fin de que al ejercer su labor aseguren que los estudiantes estén en situación de aprender.

Problema de investigación

Es pertinente trabajar en esta línea y en este nivel educativo, ya que constatamos que en la actividad docente, por lo general se escolariza el saber al imponerse criterios de los profesores y de los libros de texto, dejando a los estudiantes en desventaja para aprender. Así se evidencia en los procesos y resultados del plan nacional para la evaluación de los aprendizajes (PLANEA, 2016), en la que participaron 579 925 estudiantes de todo el país. En donde se muestra que el 49.2 % de los participantes están en el menor nivel y solo el 6.3 % en el mayor (PLANEA, 2016), -este plan maneja cuatro niveles de desempeño-. Por su parte el Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes 2015 (PISA), reporta que de los estudiantes mexicanos evaluados menos del 1 % alcanzan la competencia de excelencia en ciencias, lectura y matemáticas (PISA, 2015). Estas evidencias nos remiten a las tesis de Imaz (1987) en las que explica que enseñar y aprender matemáticas es un problema de comunicación, en donde emisores y receptores –principalmente profesores y estudiantes- logren los propósitos planteados. Cuando esto no suceda, es necesario que ambos acuerden y ejecuten cambios en su proceder hasta lograr lo esperado.

Por otra parte en los programas de estudio de matemáticas en educación secundaria se considera que “Las situaciones de aprendizaje son el medio por el cual se organiza el trabajo docente, a partir de planear y diseñar experiencias que incorporen el contexto cercano a los estudiantes y tienen como propósito problematizar eventos del entorno próximo” (SEP, 2011, p. 65). De esta idea surge una pregunta ¿Los profesores en ejercicio están preparados para diseñar y gestionar situaciones de aprendizaje con sus alumnos?

Por su parte Bckhoff, Vázquez, Baroja, Guevara, y Morán (2017), al explicar la correlación entre el Estudio Internacional sobre Enseñanza y Aprendizaje y el Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes, (TALIS-PISA por sus siglas en inglés), encuentran que de 2 022 profesores mexicanos de educación secundaria y media superior, solo el 26.56 % se ubican en niveles altos de autoeficacia y necesidad de desarrollo profesional. Sostenemos que la profesionalización es un factor relevante para lograr mejores aprendizajes y el empoderamiento docente es un proceso de esta índole, ya que uno de los aspectos fundamentales que lo conforma consiste en diseñar, rediseñar y gestionar situaciones de aprendizaje, que aseguran al profesor responsabilizarse de su práctica y al alumno estar en situación de aprender. De esta manera ambos se empoderan, así lo evidencia la afirmación de profesores participantes en un programa de empoderamiento en el sentido de estar seguros de_que la problematización de las matemáticas es un argumento sólido para empoderar al alumno, proveerle de herramientas, construir habilidades, despertar el interés en al aprendizaje, fomentar el trabajo colaborativo e impulsar el amor por la búsqueda de la verdad.

Sostenemos que existen diversas investigaciones que documentan la existencia de procesos de profesionalización docente que no consideran aspectos medulares. Como la problematización de la matemática escolar, entendida en términos de la matemática que se_enseña y aprende, es decir ¿cómo surge esta matemática?, ¿cuál es su evolución?, ¿cómo llega a la escuela?, ¿en base a qué se dispone que se aborde de determinada manera? (Reyes-Gasperini y Cantoral, 2014; Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015; Montiel, 2016; Reyes-Gasperini y Cantoral, 2016). De esta manera se postula “al empoderamiento como el proceso que atiende a la profesionalización docente desde una mirada socioepistemológica a través de la problematización del saber matemático escolar” Reyes-Gasperini y Cantoral, 2014, p. 360).

■ Fundamentación teórica

La investigación de la que se deriva el referido taller se sustenta en la Socioepistemología, posición teórica construida por la Comunidad Latinoamericana de Matemática Educativa para explicar la construcción social del conocimiento, vía la enseñanza y el aprendizaje. Esta fundamentación teórica surge en la escuela mexicana en las últimas décadas del siglo XX, con el propósito de explorar formas de pensamiento matemático dentro y fuera de la escuela (Cantoral, 2013). Con lo que a los saberes existentes hasta ese momento que consideran el denominado triángulo didáctico alumno-profesor-saber, habrá que incorporar la dimensión social-cultural, que al considerar las condiciones de surgimiento y usos sociales del conocimiento matemático, explica cómo viven o se propone que vivan las situaciones de aprendizaje en escenarios escolares y no escolares. “Esto condujo a un cambio en la centración: dejar de analizar exclusivamente a los conceptos matemáticos para empezar a analizarles con las prácticas que acompañan a su producción y que hacen posible su trascendencia de una generación a otra.” (Cantoral, 2013, p. 46).

En este trascender del conocimiento tiene presencia un discurso matemático escolar y no escolar, y precisamente las prácticas sociales conforman discursos que favorecen la comunicación en matemáticas y la generación de emociones y actitudes positivas por personas y comunidades. De esta manera se crean ambientes propicios para ir del conocimiento al saber. En este sentido concebimos que alumnos, profesores, familias, comunidades con sus creencias, identidades, cultura, compromisos y problemas conviven y evolucionan en diversas prácticas sociales. De manera que los saberes emergen de estas prácticas en donde las personas no se limitan a verificar lo que hacen sino a problematizar del por qué lo hacen así. Al explicar las condiciones del por qué, cómo, para qué lo hacen y cómo ellas se transforman al ejercer estas prácticas. Actuar en estos términos significa romper con la escolarización del saber dónde se imponen de manera casi vertical, los cánones concebidos por las instituciones, profesores y materiales de apoyo. Para formar en el mejor de los casos a personas dependientes de las circunstancias que les rodean.

Escenarios de trabajo e investigación

En los escenarios virtuales y presenciales del programa de empoderamiento docente los participantes son profesores de EMS y facilitadores, que a partir del análisis de diversos materiales como situaciones de aprendizaje y su fundamentación teórica, así como una biblioteca que aborda la profesionalización docente con enfoque socioepistemológico, resuelven tareas planteadas con una argumentación robusta, seleccionan, diseñan, rediseñan e implementan situaciones de aprendizaje con sus alumnos. Mediante un trabajo colaborativo de intensa socialización de saberes y experiencias que evidencian su construcción social. Uno de los aspectos centrales en este proceder consiste en la problematización de la matemática escolar, como ya se abordó en líneas anteriores. En donde los profesores comparan el discurso matemático escolar clásico –dme- en el que privan verdades preexistente Cantoral (2013) para ser reproducidas en la escuela, con un discurso en el que dicho conocimiento tiene todas las miradas. Es decir, cómo lo conciben los docentes, los alumnos y los autores en diversas fuentes. "…la Socioepistemología se propone modificaciones al discurso matemático escolar, al nivel de rediseño, a través de plantearse el estudio de la *construcción social del conocimiento matemático* para atender el cuestionamiento del *qué* se aprende" (Reyes-Gasperini y Cantoral, 2014, p. 362).

En estos escenarios al implementar situaciones de aprendizaje se plantea una tarea 3 en la que se expresa que una alumna se desplaza a distintas velocidades en tres trayectos, al final de cada uno se detiene durante 15 segundos y prosigue. Se propone a los alumnos que experimenten este planteamiento, visualicen, registren, realicen distintas lecturas de esta situación y la comuniquen utilizando diversos modelos. En la figura 1 se muestra la respuesta de un equipo de alumnos en un primer momento, en tanto que en la 2 está la repuesta del mismo equipo después de confrontar su trabajo con los demás equipos. En estas producciones se refleja parte de la actividad de estudiantes y profesores construyendo su propio discurso (Velázquez y Nolasco, 2009). El reporte de esta actividad es incompleto porque su desarrollo está en proceso.

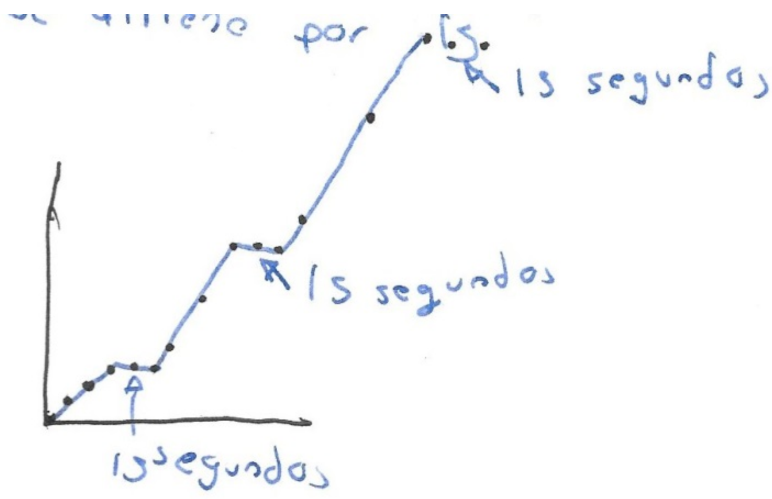


Figura 1. Producción de un equipo de alumnos en un primer momento. (Elaboración propia).

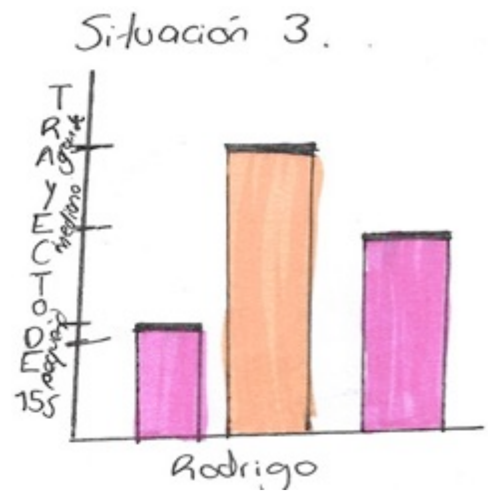


Figura 2. Producciones del mismo equipo en un segundo momento. (Elaboración propia).

Por su parte en el taller realizado en RELME 31 participaron 12 profesores de distintos países de América Latina, quienes analizaron y resolvieron una situación de aprendizaje denominada *Las mezclas*, referente al desarrollo del pensamiento proporcional, (Reyes-Gasperini, 2016). Dicha situación se refiere a la preparación de naranjada con agua y jugo, de manera que lo proporcional tiene que ver con la intensidad del sabor, pasando por distintos acontecimientos y sus lecturas y explicaciones.

Desde la preparación de la mezcla para una fiesta hasta el análisis de fenómenos que dan lugar a funciones lineales de variación proporcional y funciones afín. La situación inicia con la tarea 1 *para saber hacer*, donde se tienen pares de naranjadas con distintas concentraciones y se pide determinar y argumentar, en cada caso qué naranjada tiene mayor concentración. En tanto que en la tarea 1, momento 2, *saber analizar*, los invitados elogiaron el sabor de la naranjada, de manera que en una segunda preparación se procuró hacerla con el mismo sabor de la anterior, para ello en una jarra se puso medio litro de agua y medio litro de jugo de naranja, ¿qué consideran que sucedió cuando los invitados probaron la nueva naranjada? Como se ve, este entramado contiene tareas para saber hacer, saber analizar y saber profundizar considerando la problematización del saber, argumentaciones y reflexiones de los participantes que los conducen a trabajar en forma integral nociones, conceptos, procedimientos y emociones (Muñoz, 2010).

Durante y al final del taller los docentes manifiestan su interés por este proceso de empoderamiento de profesores y alumnos. En las figuras 3, 4, 5 y 6 se evidencian algunas de estas manifestaciones.

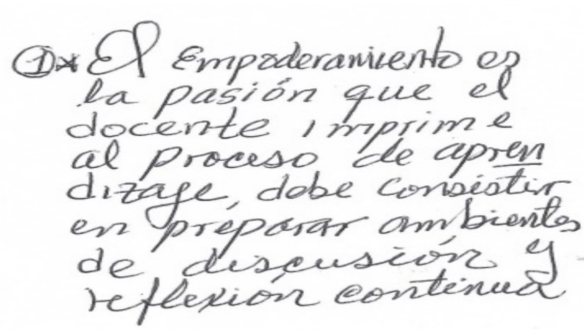


Figura 3. Concibiendo el empoderamiento. (Elaboración propia).

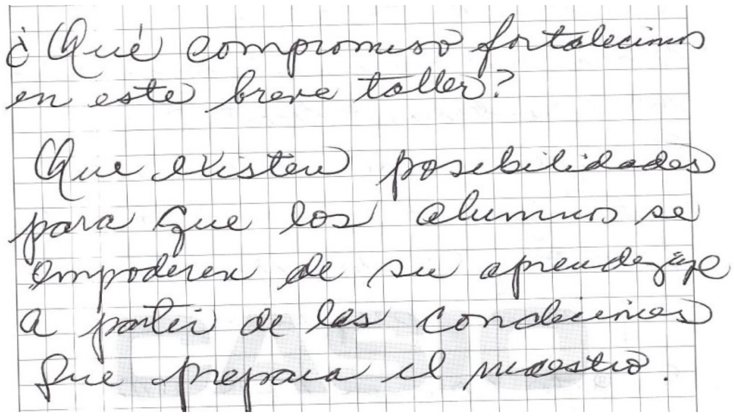

¿Qué compromiso fortalecimos
en este breve taller?
Que existen posibilidades
para que los alumnos se
empoderen de su aprendizaje
a partir de las condiciones
que prepara el maestro.

Figura 4. Expresando compromisos. (Elaboración propia).

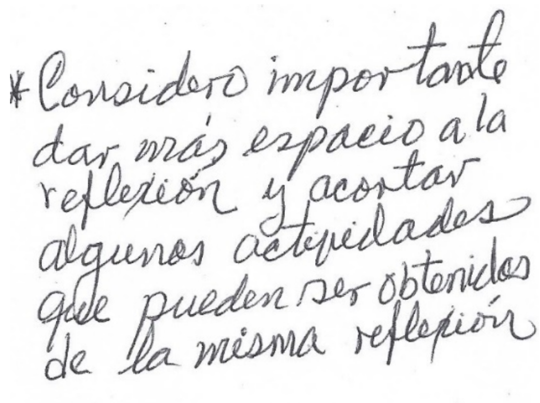

*Considero importante
dar más espacio a la
reflexión y acortar
algunas actividades
que pueden ser obtenidas
de la misma reflexión

Figura 5. En pro de la reflexión. (Elaboración propia).

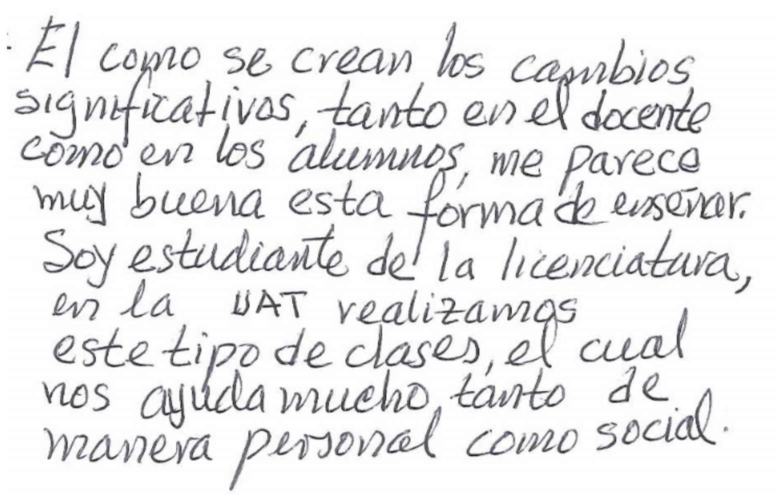

· El como se crean los cambios
significativos, tanto en el docente
como en los alumnos, me parece
muy buena esta forma de enseñar.
Soy estudiante de la licenciatura,
en la UAT realizamos
este tipo de clases, el cual
nos ayuda mucho tanto de
manera personal como social.

Figura. 6. La voz de una estudiante. (Elaboración propia).

A manera de conclusión

Consideramos que la explicación de lo realizado en dos escenarios de investigación, uno sobre un Programa de empoderamiento docente: proceso de desarrollo profesional, y otro referente a un taller de empoderamiento de profesores de EMS en RELME 31, conforma un avance en el ámbito de la profesionalización docente. Toda vez que constata uno de los principales problemas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, como es la imposición de criterios y reproducción de "verdades preexistentes". A su vez muestra la posibilidad de que alumnos y profesores construyan un discurso matemático escolar, que contenga sus propias miradas y concepciones, al problematizar la matemática que aprenden y enseñan.

Referencias bibliográficas

Bckhoff, E.,Vázquez, R., Baroja, J., Guevara, G, y Morán, Y. (2017). *México en el proyecto TALIS-PISA, cuaderno de investigación 46*. Ciudad de México: INEE.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Ciudad de México: Gedisa Editorial.

Cantoral, R.; Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso matemático escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *8*, 9 – 28.

Cantoral, R., y Resyes-Gasperini, D. (2016). *Programa empoderamiento docente: proceso de desarrollo profesional*. Departamento de Matemática Educativa-CINVESTAV-IPN, México.

Difusión de resultados PLANEA 2016. (sf). Recuperado el 10 de Marzo del 2017 de www.planea.sep.gob.mx/ms/.

Imaz, C. (1987). ¿Qué es la Matemática Educativa?. *Memorias de la Reunión Centroamericana del Cariba sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa* 1(1), 267-272.

Montiel, G. (2016). Condiciones para la innovación educativa en el posgrado. *Perfiles Educativos*, *30* (número especial), 101-115.

Muñoz, G. (2010). Hacia un campo de prácticas sociales como fundamento para rediseñar el discurso escolar del cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13 (4-II), 283-302.

Reyes, D. y Cantoral, R. (2013). *El empoderamiento docente desde la teoría socioepistemológica: caminos alternativos para un cambio educativo*. Recuperado el 10 de Febrero del 2017 de https://www.researchgate.net/publication/261950335

Reyes-Gasperini, D. y Cantoral, R. (2014,). Socioepistemología y Empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático. *Bolema*, *28*(48), 260-282.

Reyes-Gasperini, D. y Cantoral, R. (2016). Empoderamiento docente: la práctica docente más allá de la didáctica ¿Qué papel juega el saber en una transformación educativa? *Revista de la Escuela de Ciencias de la Educación*, 2(11), 155-176.

Reyes, D. (2016). *Situación de aprendizaje las mezclas*. Material de apoyo para el curso Empoderamiento docente: proceso de desarrollo profesional, Departamento de Matemática Educativa-CINVESTAV-IPN, México.

Resultados de México en la evaluación 2015 PISA. (sf). Recuperado el 10 de Marzo del 2017 de https://www.oecd.org/pisa/PISA2015-México-ESP.pdf.

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programas de estudio de matemáticas en educación secundaria*. D. F, México: Autor.

Velázquez, S. y Nolasco, H. (2009). Rediseño del discurso matemático escolar en la educación secundaria. *Sinergia* 1 (2), 26-31.

Velázquez, S., Slisko, J. y Santos, R. (2016). Modelación como práctica generadora de saberes. Lectura y construcción de gráficas en educación secundaria. En E. Mariscal (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 29, 1071-1078. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS VISTO DESDE EL USO DE EJEMPLOS. UNA PROPUESTA DE INVESTIGACIÓN

Nicolás Sánchez Acevedo; Luis Carlos Contreras; Leticia Sosa Guerrero
Universidad de Huelva, Universidad Autónoma de Zacatecas
nicolas.sanchez@alu.edu.es, lsosa@mate.reduaz.mx, lcarlos@uhu.es

Resumen

El conocimiento del profesor de Matemáticas es uno de los componentes de la enseñanza que tiene mayor preponderancia en el momento de identificar y evaluar las variables que inciden en este proceso. Este conocimiento se puede caracterizar desde diversos aspectos; uno de ellos es el uso de ejemplos en clase. Los ejemplos en Matemáticas son un referente didáctico a la hora de enseñar, pues muestran gran parte del conocimiento del profesor al ponerlos en juego. Varios modelos de conocimiento, desde el propuesto por Lee Shulman (1986), han intentado analizar y caracterizar la enseñanza de las Matemáticas en relación a la práctica del profesor. En este trabajo se presenta el modelo analítico de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés - Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) como un modelo alternativo y útil a la hora de caracterizar el conocimiento puesto en juego al hacer uso de ejemplos. Se muestran algunas características de los ejemplos en Matemáticas y su relación con el modelo MTSK. Se finaliza con algunas proyecciones que pueden derivarse de la investigación.

Palabras clave: conocimiento especializado, uso de ejemplos, MTSK

Abstract

Mathematics teachers' Knowledge is one of the teaching components that become essential at the moment of identifying and evaluating the variables that affect this process. This knowledge can be characterized from several aspects; one of them is the use of examples in classes. Examples in Mathematics constitute a didactic reference when teaching, because they show the teacher's knowledge when putting them into practice. Several models of knowledge, from the one proposed by Lee Shulman (1986) have tried to analyze and characterize mathematics teaching. In this paper, the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) analytical model is presented as a useful and alternative model for characterizing knowledge when using the examples. Some characteristics of mathematical examples and their relation with MTSK model are shown. The work concludes with some projections that can be derived from the investigation.

Key words: specialized knowledge, use of examples, MTSK

Introducción

Mucho se ha discutido sobre la importancia que tiene el conocimiento del profesor de Matemáticas al momento de enseñar. Consecuencia de ello son los grupos de investigación que se han formado especialmente en los últimos International Congress of Mathemathical Education (ICME, Alemania, 2016 y Korea, 2012), como también en los recientes Congress of European Research in Mathemamtics Education (CERME, Irlanda, 2017 y República Checa, 2015). Justamente esta preocupación es creciente, por una parte, debido a los constantes cambios a nivel social y por otra a nivel educativo. Esto hace indispensable analizar los distintos aspectos del conocimiento del profesor de Matemáticas, centrándose en analizar su naturaleza, las características del profesor cuando enseña y la profundidad del conocimiento que un profesor debe y debiese tener para llevar a la práctica su tarea docente (English, 2008). En este mismo sentido la tarea de enseñanza del profesor en el aula esta permeada por su conocimiento profesional, el cual es el soporte para diseñar, aplicar, reflexionar y actuar frente a las contingencias de los distintos fenómenos de aula y las interacciones con los estudiantes, lo que permite visualizar las respuestas de los estudiantes (Rojas, Flores y Carrillo, 2015).

Del mismo modo, el desarrollo profesional de los profesores hace necesario reconocer e identificar los conocimientos (didácticos, disciplinares) que el profesor evidencia al enseñar un tema específico. Justamente esta importancia es atribuida a los constantes cambios y demandas a los que está sometida la educación actual y por ende el profesor debiendo ajustarse a estas demandas (Reyes y Sosa, 2015)

La decisión de adoptar un aspecto para caracterizar el conocimiento puesto en juego del profesor de Matemáticas se torna complejo al asumir que la enseñanza y todo su entramado es un proceso *caótico* en términos de su complejidad, pues, por ejemplo, al momento de estar analizado la práctica del profesor desde una perspectiva curricular, afloran elementos que se relacionan con el contexto y otros aspectos. Lampert (2001) plantea que analizar la práctica de los profesores es una tarea compleja, debido a la simultaneidad, a veces diversos problemas deben ser abordados desde una sola acción; esto reviste una complicación, pues las acciones del profesor no pueden ser tomadas o analizadas de forma independiente, es decir, deben ser consideradas en todas sus interacciones.

Desde esta consideración, son varios los modelos de conocimiento que han tratado de caracterizar y describir el conocimiento que evidencia el profesor al enseñar un tópico específico (por ejemplo, Shulman, 1986 y Ball, Thames y Phelps, 2008). Como parte del grupo "Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM)", de la Universidad de Huelva, se propone el modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (*MTSK, Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013), el cual permite profundizar en el conocimiento del profesor de Matemáticas, pero a diferencia de otros modelos, que este permite integrar e interrelacionar este conocimiento desde su característica especializada como definitoria (Escudero, Flores y Carrillo, 2012).

Uno de los aspectos que permitiría evidenciar un conocimiento especializado del profesor de Matemáticas es la selección y uso de ejemplos cuando enseña y pone en juego la gama de conocimientos, tanto matemáticos como didácticos para lograr aprendizajes en los estudiantes.

Los ejemplos son uno de los elementos más utilizados por el profesor para intentar explicar y mostrar propiedades, conceptos, definiciones, etc. Según Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson y Zaslavsky

(2006) la razón de la enseñanza de las matemáticas, por medio de la presentación de ejemplos, es que los estudiantes los aprecian como algo genérico y como modelos de uso futuro para poder resolver problemas de la misma estructura. La selección y uso de ejemplos por parte del profesor de matemáticas, permite evidenciar aspectos de su conocimiento especializado cuando ejemplifica en el aula.

En este trabajo se presenta el modelo de conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (MTSK) como instrumento para caracterizar este conocimiento en relación al uso de ejemplos.

Marco teórico

En los últimos años, la investigación centrada en el conocimiento del profesor de Matemáticas se ha visto incrementada debido a la necesidad de conocer y reflexionar en torno a las prácticas de enseñanza. Uno de los primeros trabajos que pretendió analizar el conocimiento del profesor es el de Shulman (1986), quien supuso una importante contribución en relación a la comprensión de los elementos sobre el conocimiento del profesor.

El trabajo de Shulman es uno de los pioneros en esta línea de investigación, del cual muchos otros se han apoyado para construir modelos más específicos, particularmente centrados en el conocimiento didáctico del contenido.

Otro de los trabajos que han sido aporte en este ámbito es el de Ball, Thames y Phelps (2008) quienes propusieron un modelo de conocimiento del profesor de matemáticas articulado sobre la base de dos de los dominios establecidos en los trabajos seminales de Shulman (1986). El modelo de Ball et al., (2008) se diferencia del de Shulman, en que el conocimiento lo clasifica en dos grandes dominios, el conocimiento del contenido, el cual tiene por subdominios al: conocimiento común, conocimiento especializado y conocimiento en el horizonte; por su parte, el conocimiento didáctico del contenido está constituido por: conocimiento del contenido y la enseñanza, conocimiento de contenido y los estudiantes y el conocimiento del curriculum.

Tomando como base de análisis el modelo de Ball *et al.,* (2008), como las reflexiones llevadas a cabo en el Grupo de Didáctica de las Matemáticas de las Universidad de Huelva en relación a la nomenclatura del carácter especializado del conocimiento del profesor de Matemáticas llevó al grupo a proponer un modelo integrador en su especialización que afecta a todos los subdominios y no solamente a un subdominio, como lo propone el equipo de Ball et al., (Escudero, Flores y Carrillo, 2012; Flores, Escudero y Carrillo, 2013).

Nuestro foco está puesto en el *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* (MTSK). Este modelo se considera una propuesta teórica y una herramienta metodológica que nos permite analizar la práctica del profesor de matemáticas (Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar y Carrillo, 2014). El modelo se ve representado en la figura 1.

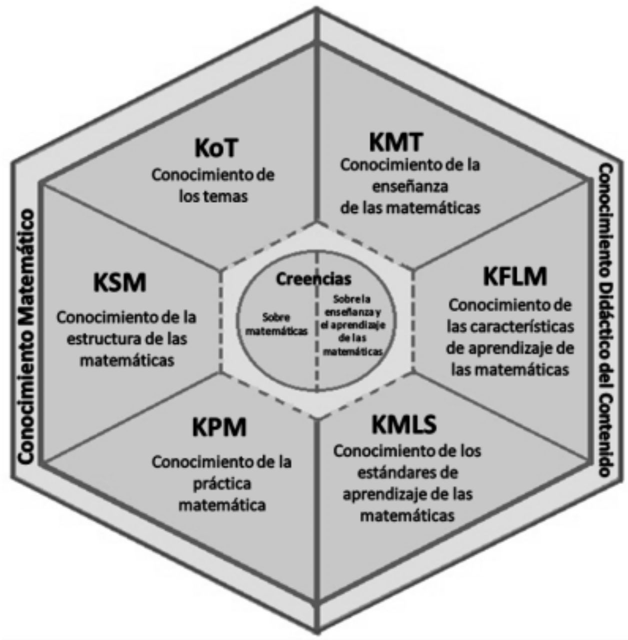


Figura 1. Modelo de Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (*MTSK)* (Carrillo, Contreras y Flores, 2013).

El modelo está conformado por dos dominios, uno de ellos referido al Conocimiento Matemático, el cual incluye tres subdominios: a) Conocimiento de los Temas Matemáticos (KoT), es el conocimiento de los conceptos, procedimientos, fenomenologías y fundamentación teórica del tema en cuestión (en el ejemplo anterior, significados de la división, de la fracción y de la división y suma de fracciones, algoritmos para realizar estas operaciones con fracciones, o la idea de fracciones equivalentes); b) Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM), en relación al contenido matemático en las conexiones, que supone ver, entre otras cosas, la matemática avanzada desde un punto de vista elemental y la matemática elemental desde un punto de vista avanzado (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013) y c) Conocimiento de la práctica de la matemática (KPM): que se relaciona con las formas de hacer y proceder en matemáticas que un profesor ha de conocer para desarrollar su clase, como son las diferentes formas de demostrar, el significado de definición, axioma o teorema como elementos constituyentes de la matemática, o el conocimiento de la sintaxis matemática. El otro dominio es el referido al Conocimiento didáctico del contenido, el cual incluye los subdominios: a) Conocimiento de las características del aprendizaje matemático (KFLM) que se refiere al conocimiento de las dificultades, errores y obstáculos en el aprendizaje de un concepto, así como el conocimiento de la forma en que los alumnos aprenden un cierto contenido, b) Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT) que incluye conocer distintas estrategias que permitan al profesor impulsar el desarrollo de las capacidades matemáticas procedimentales o conceptuales y c) Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje en Matemáticas (KMLS) el que está conformado por los referentes que indican en qué momento debe aprenderse cada contenido y a qué nivel de profundidad.

Ejemplos y ejemplificación

El uso de ejemplos en clase de Matemáticas su importancia y relevancia no son discutibles, por ejemplo Rowland (2008) plantea que para que los estudiantes aprendan de los ejemplos es necesario hacer una diferenciación entre los de tipo inductivo (para dar ejemplos de algo de tipo general) y la otra es un uso de los ejemplos en que estos son los llamados ejercicios (con carácter ilustrativo y enfocado al aspecto práctico). También los ejemplos son usados al inicio de la clase, como forma de explicación o aclaración o para justificar un procedimiento, es decir, los ejemplos son una parte intrínseca del pensamiento matemático, el aprendizaje y la enseñanza, en especial, en relación a la conceptualización, generalización, abstracción, argumentación y pensamiento analógico (Zodik y Zaslavsky, 2008).

En relación con el concepto de ejemplo, este es definido por distintos autores diferenciándolo del concepto de ejemplificación. Zaslavsky (2010, p. 107) usa el concepto de ejemplo instruccional, el que define como "un ejemplo que es ofrecido por el profesor y que presenta una relación entre el contexto y un tópico particular de aprendizaje. Watson y Mason (2002a) menciona que un ejemplo es un caso particular de un concepto más amplio (idea, concepto, técnica, etc.) para que los estudiantes puedan razonar. Para Zodik y Zaslavsky (2008) los ejemplos son vistos como casos particulares sobre los que podemos pensar y generalizar hacia una clase o forma más. La diferencia con el proceso de ejemplificación es que este es usado para describir alguna situación en la que se ofrece algo más específico, lo que permitiría representar una clase más amplia que pudiese llamar la atención de los estudiantes (Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson y Zaslavsky, 2006). Para Watson y Mason (2005), el término e*jemplificación* es usado para describir alguna situación en que algún objeto específico pueda ser presentado como representante de una clase más general, centrando de esta manera la atención en una determinada dirección.

Una tarea importante dentro de esta área es la de su clasificación. Para Figueiredo, Contreras y Blanco (2009) el interés está centrado en el objetivo que se busca, los clasifican de acuerdo: a su definición, su representación, sus características, sus aplicaciones internas y sus aplicaciones externas. Bills *et al.,* (2006) proponen una clasificación de acuerdo a la naturaleza en: ejemplos resueltos, ejercicios a resolver por los estudiantes, ejemplos genéricos (conceptos o procedimientos), contraejemplos y no ejemplos.

El MTSK de un profesor permitiría informar de varios elementos al momento de enseñar Matemáticas, en particular, cuando planifica y diseña las lecciones de clases en relación a los tipos de tareas que éste selecciona dependiendo de los objetivos que se planteen de acuerdo al nivel y temática matemática. En cierto sentido el uso de ejemplos, en el sentido de la decisión de elección, podría entregar información específica del KMLS de un profesor, pues pueden verse evidenciados elementos sobre si los ejemplos que aparecen en los libros de texto o documentos curriculares son idóneos para los estudiantes en relación a su contexto y nivel de desarrollo cognitivo, además de saber qué ejemplos son adecuados considerando sus aprendizajes previos.

Espacios de ejemplos

Los espacios de ejemplos se refieren a la representación mental de ejemplos por medio de imágenes, de expresiones matemáticas o alguna técnica para resolver una tarea en relación a algún contenido matemático. Un espacio de ejemplo es una experiencia en la que vienen a la mente una o más clases de objetos matemáticos a la vez relacionados con métodos de construcción y asociaciones, a cada espacio al que se tiene acceso se genera por diversos motivos o aspectos conocidos como variables que pueden ser accesibles y según nuevos ajustes estructurales es posible componer y recomponer (Goldenberg y Mason, 2008). Un ejemplo de espacio de ejemplo es el propuesto por Figueiredo (2010) para las funciones cuadráticas, en este caso pueden presentarse distintas imágenes como $y = 2x^2 - 10$, o de forma más general podría pensarse en $f(x) = ax^2 + bx + c$, objetos que son más característicos en estudiantes y profesores, pero otras representaciones pueden presentarse como, $f(x) = (x - a)(x - b)$ la que puede no ser tan visible al no contenerla expresión "x^2". Otros ejemplos pueden ser atribuibles a otras funciones como por ejemplo $y = \log_a x$ o de forma más particular $y = \log_2 x$ o su equivalente por su definición $a^y = x$. Esta característica podría aportar información en relación al KoT de un profesor. Se asume como base que el conocimiento de un profesor debe suponerse mayor al que tiene un estudiante, así por ejemplo un estudiante puede resolver una ecuación cuadrática incompleta por el método de la fórmula y un profesor debe poder resolver desde el método de factorización, por fórmula, por medio de una gráfica o tabla de valores; incluido este aspecto en la categoría de fenomenología. Por ejemplo las formas de representación que puede verse y entenderse una función, desde una forma gráfica, tabular, sagital, factorizada, canónica, que podría aportar información desde las formas de representación con las que cuenta un profesor para lograr aprendizajes.

Variación

La noción de variación, dentro del área de enseñanza de las Matemáticas, se asemeja a la capacidad del aprendizaje en relación a lograr hacer nuevas distinciones, es decir, tener la capacidad de discernir *algo de algo (la variación de una variable en relación a otra que se deja constante)* y poder relacionarlo con (en el sentido de un contexto) Marton y Booth (1997, citado en Figueiredo, 2010). Este tipo de aprendizaje, llamado por discernimiento, es aquél que permite discernir algo donde existe variación; si nada es variado, no será posible establecer esta distinción (Marton y Booth, 1997). Un ejemplo de variación es el que proponen Figueiredo, Contreras y Blanco (2009). Ellos analizan la noción de transparencia y variación en funciones; uno de ellos es en relación al ejemplo $f(x) = a(x - h)^2 + k$. En este ejemplo las letras a, h y k tiene relación con la posible contracción o expansión del gráfico y el sentido de la concavidad. Estas tres letras representan las tres dimensiones de variación posibles de este caso y las respectivas ampliaciones de cambios en los números reales para la letra h y la k y un IR-{0} para la letra a. En caso de tener un a=0, este sería un no ejemplo de función de segundo grado. La incorporación de aspectos de variación en tareas matemáticas por parte del profesor podría entregar evidencia de su KSM, debido a que los ejemplos son un soporte en la construcción de elementos y tópicos futuros de los estudiantes en relación a las conexiones de complejización, por ejemplo ir desde el aprendizaje de funciones lineales o cuadráticas, hasta llegar a la idea general de funciones polinomiales. Un indicio de conexiones de simplificación dentro del KSM del profesor, puede verse reflejado, de forma particular, al considerar el tema de funciones lineales como un aprendizaje previo para introducir el tema de funciones cuadráticas al momento de encontrar los ceros de la función como intercepto con el eje de las abscisas.

Transparencia

La noción de transparencia de un ejemplo está relacionada con la representación que se utiliza para un concepto cualquiera. En el trabajo de Lesh, Behr y Post (1987) se designan los sistemas representativos con el nombre de: *Opacos* o *Transparentes.* Según Figueiredo (2010) "Una representación transparente es aquella que no tiene ni más ni menos significado que la idea o estructura que representa. Una representación opaca enfatiza unos aspectos de la idea o estructura y atenúa otros". (p. 113). Los trabajos de Zazkis y Sirotic (2010) han dado cuenta de la comprensión sobre el concepto de número irracional, específicamente se han centrado en la influencia de las diferentes representaciones. Zazkis (2005) compara sobre el conocimiento que se tiene de la definición de número primo y de número irracional y cómo estos son percibidos. En ambos trabajos se alude al concepto de "opacidad" y "transparencia" de número irracional. En relación al concepto de función cuadrática, el profesor podría considerar los siguientes ejemplos:

(a) $y = (x+1)(x-3)$; (b) $y = (x+1)2 - 4$; (c) $y = x2 - 2x - 3$.

Estas tres representaciones son diferentes, pero de la misma función. Así, cada ejemplo es transparente para algunas características de la función y opaca con respecto a otros. La transparencia en el uso de ejemplos, aun cuando es un elemento característico y más evidente en clases de Matemáticas, se lleva a cabo desde una reflexión más subjetiva. Este aspecto puede entregar información relevante del KFLM de un profesor, pues la selección de ejemplos depende mayoritariamente del nivel y contexto educativo, pero principalmente del objetivo que se quiera abordar al usar ejemplos, es decir, si lo que se pretende es, por ejemplo abordar el tema de función cuadrática de la forma $f(x) = x^2 + bx + c$, para analizar los puntos de intersección con la abscisa, la selección de los ejemplos será aquella en la que estén expresados como factores, es decir $(x+\alpha)(x+\beta) = 0$ y no en su forma general; ejemplo que sería transparente a esta característica y mostraría indicios del KFLM, al considerar los dificultades que pueda tener un estudiante con otro tipo de representación. Con esto se puede identificar en cómo cree que pueden aprender los estudiantes y qué tipos de ejemplos presentarían mayores o menores dificultades al ser introducidos para apropiarse de concepto. Además, la inclusión de este elemento, podría aportar indicios del KMT de un profesor, por ejemplo en el uso de recursos y materiales adecuados para mostrar aspectos de transparencia y opacidad, el diseño de actividades didácticamente *"ricas"* para construir conocimiento desde la base de actividades apropiadas para los estudiantes.

Proyecciones

En este trabajo se pone de relieve la importancia relevancia que tiene el uso de ejemplos, en el conocimiento especializado que tiene que tener el profesor de Matemáticas al momento de planificar las lecciones y saber qué ejemplos dan sustento teórico práctico a esta(s) elecciones, los modos de usarlos y, en qué momento proponerlos en clase de Matemáticas. La información sobre este conocimiento (MTSK del profesor), sin duda aportaría evidencia significativa sobre el conocimiento especializado del profesor vista desde nuestro modelo análisis de conocimiento, MTSK. Por otra parte, pretendemos contribuir a la caracterización del conocimiento del profesor, centrados en sus dominios y subdominios, específicamente en lo que vislumbramos (a priori) en relación al del KoT, KSM, KMT, KFLM y posiblemente de su KMLS. La detección de estos subdominios a través de las categorías definidas en el modelo, permitirían caracterizar e indagar sobre las formas de enseñanza del profesor de Matemáticas, tanto desde la materia como desde la didáctica, en relación a los sustentos que permiten apoyar qué tipo de conocimiento apoya la elección y uso de esos ejemplos. Finalmente pretendemos contribuir con elementos teóricos a la investigación sobre la línea de conocimiento profesional del profesor de Matemáticas, en general; y en particular lograr extender los indicadores que actualmente están definidos para estos subdominios propuestos.

Referencias bibliográficas

Ball D. L., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., y Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in Mathematics Education, en J. Novona, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *(1)*, 126-154. Prague, Czech Republic: PME.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Middle East Technical Universitiy, Ankara, Turquía: ERME.

Escudero, D., Flores, E., y Carrillo, J. (2012). El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. En L. Sosa, E. Aparicio y F.M. Rodríguez (Eds.), *Memorias de la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 35-42.

English, L. (2008). Setting an agenda for international research in mathematics education. En L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 3-19). New York: Routledge.

Figueiredo, C. (2010). *Los ejemplos en clase de matemáticas de secundaria como referente del conocimiento profesional*. Tesis Doctoral no publicada. Extremadura, España: Universidad de Extremadura.

Figueiredo, C., Contreras. L.C., y Blanco, L. (2009). A transparência e a variação dos exemplos utilizados na aprendizagem de conceitos matemáticos. *Revista ZETETIKÉ FE/UNICAMP*, *17*(32), 29-60.

Flores, E., Escudero, D., y Carillo, J. (2013). A theoretical review of specialised content knowledge. En B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of the CERME 8* (pp. 3055-3064). Antalya, Turquía: ERME.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, Á., y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, N. Climent, L.C. Contreras, M. Montes, D. Escudero-Ávila, & E. Flores Medrano (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Goldenberg, P., y Mason, J. (2008). Shedding light on and with examples spaces. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 183-194.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. New Haven, Conn.: Yale University Press.

Lesh, R., Behr, M., y Post, M. (1987). Rational number relations and proportions. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 41–58). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Marton, F., y Booth, S. (1997). *Learning and awareness.* Hillsdale, USA: Lawrence Erlbaum.

Reyes, A., y Sosa, L. (2015). Caracterización del conocimiento matemático de los profesores en formación para enseñar el significado de razón. Actas del XIII Congreso Nacional de Investigación Educativa, (pp. 1-11). Chichuahua.

Rojas, N., Flores, P., y Carrillo, J. (2015). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de Educación Primaria al enseñar los números racionales. *Boletim de Educação Matemática*, *29*(51).

Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 149-163.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, *15*(2), 4-14.

Watson, A., y Mason, J. (2002a). Extending example spaces as a learning/teaching strategy in mathematics. En A. Cockburn & E. Nardi (Eds.). *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 377- 385). Norwich, UK: PME.

Watson, A., y Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples.* Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Zaslavsky, O. (2010). The explanatory power of examples in mathematics: Challenges for teaching. In M. K. Stein, & Kucan, L. (Eds.), *Instructional explanations in the disciplines* (pp. 107-128). New York: Springer.

Zaslavsky, O., y Lavie, O. (2005). *Teachers' use of instructional examples*. Paper presented at the 15th ICMI study conference: The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. Águas de Lindóia, Brazil.

Zazkis, R. (2005). Representing numbers: Prime and irrational. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *36*(2-3), 207-217.

Zazkis, R. y Sirotic, N. (2010). Representing and Defining Irrational Numbers: Exposing the Missing Link, *CBMS Issues in Mathematics Education*, *16*, 1-27.

Zodik, I., y Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 165-182.

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

ATUAIS LEVANTES POPULARES BRASILEIROS E AS IMPLICAÇÕES PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Karly B. Alvarenga
Universidade Federal de Sergipe (Brasil)
karlyalvarenga@gmail.com

Resumo
Este trabalho se fundamenta nas narrativas de estudantes de Licenciatura em Matemática para refletir sobre os movimentos estudantis brasileiros que se expandiram pelo país no segundo semestre de 2016. As reflexões são direcionadas pela teoria da Educação Matemática Crítica via um contexto supostamente democrático. Não se tem a intenção de classificar a história como uma abordagem filosófica cíclica, mas em algum momento são mencionadas antigas reformas educacionais. Contudo, elas não aconteceram mediante tantas mudanças políticas como as que são aqui apresentadas. Os resultados apontam para uma geração mais consciente do seu papel de educador matemático como agente de transformação educacional, social e cultural.

Palavras-chave: movimentos estudantis; matemática; formação profissional.

Abstract
This work has been based on the narratives of undergraduate students of the Bachelor's degree in Mathematics Education to reflect on the Brazilian students' movements that spread throughout the country in the second half of 2016. The reflections are directed by the theory of Critical Mathematics Education linked to a supposedly democratic context. It is not intended to classify history as a cyclical philosophical approach, but some old educational reforms are mentioned. However, it did not happen through as many political changes as the ones presented here. The results point to a generation more aware of the role of mathematics teachers as agents of educational, social and cultural transformation.

Key-words: students' movements, mathematics, professional qualification.

Introdução

A História possui dois enfoques complementares. Um indica informação, o outro o conhecimento da informação. O conhecimento de fatos humanos, ao longo da existência da humanidade, pode ser encarado como relevante sob alguns aspectos: conhecer para transformar, para evitar, para repetir, para se preparar, dentre outros. Aqui, optamos por entender que "História é o mundo histórico, a totalidade dos modos de ser e das criações humanas no mundo, ou na totalidade da 'vida espiritual' ou das culturas" (Abbagnano, 2007, p.503).

Neste trabalho, não temos o interesse em conduzir o leitor para uma reflexão sobre filosofia da História, no sentido de compreender se ela é cíclica, decadente, ordem providencial, reino do acaso ou progressista, mas o que nos propomos é registrar fatos que são considerados, por nós, como importantes para abalizar a Educação Matemática Crítica e democrática (Skovsmose, 2013). Esse autor entende democracia de maneira ampla e a relaciona a quatro aspectos basilares: 1) procedimentos formais de eleger um governo; 2) uma distribuição justa de serviços sociais e bens na sociedade; 3) igualdade de oportunidades; 4) possibilidade de participação na discussão e avaliação das condições e consequências do ato de governar.

Assim, nossa reflexão se assenta na linha de Skovsmose (2008, 2008) e ganha destaque por estar, principalmente, vinculada às manifestações estudantis de alunos do curso de Licenciatura em Matemática, de uma universidade pública brasileira, no final de 2016.

Os dados foram coletados a partir de narrativas dos estudantes. Neste trabalho, apresentamos três depoimentos de estudantes que, à época, faziam um curso de História da Educação Matemática. Os movimentos populares ocorridos naquela ocasião os impactaram fortemente e não podíamos deixar passar a oportunidade de estudarmos um conteúdo que fizesse sentido para eles, como, por exemplo: os impactos dos movimentos sociais na Educação Matemática.

Não é comum percebermos alunos e ou professores de matemática envolvidos em manifestações populares. Tem sido assim no Brasil, há vários anos, mesmo porque o ensino e a aprendizagem em nosso país se tiveram início principalmente pela via militar, em escolas de engenharias e, em geral, essa via prega distância dos movimentos populares e até apresentam um caráter de recriminação em relação à participação em eventos dessa natureza. Tudo indica que essa característica se perpetuou e ainda existe, às vezes, implicitamente nos cursos de matemática, em especial, nos bacharelados. Essas são algumas das influências do positivismo na educação brasileira, em especial na educação matemática (Silva, 1999).

Os matemáticos

Existem matemáticos importantes que influenciaram politicamente o rumo histórico e social de suas comunidades, como Newton, que trabalhou na casa da moeda e perseguiu muitas pessoas; Galois, que era um rebelde e procurado pela equipe de Napoleão; Arquimedes, que impediu por muito tempo que os romanos invadissem a Sicília e Hipátia chegou a ser assinada por causa de suas opções políticas. A história conta que Galois, desde o primeiro período da escola, por volta de 1830, devido às lutas entre republicanos e monárquicos, já apresentava uma inquietação com perseguições. Nesse período, a maioria dos estudantes planejou uma rebelião, uma dúzia de líderes foi expulsa. No dia seguinte, foi exigida uma demonstração de fidelidade a Luís XVIII. Muitos se recusaram. Mais de cem foram expulsos. Galois, muito jovem para se envolver na fracassada rebelião, ao ver seus colegas serem humilhados, aumentou suas tendências republicanas. De acordo com a Wikipédia, corroborada por alguns autores:

> [...] A polícia acreditava que a cerimônia do funeral de Galois, morreu aos 20 anos em um duelo por causa de uma mulher, seria o foco de uma manifestação política e prendeu trinta amigos dele na noite anterior. Ainda assim, dois mil republicanos se reuniram para o enterro e houve brigas inevitáveis entre seus colegas e os representantes do governo que chegaram para vigiar os acontecimentos. Eles estavam furiosos devido à crença cada vez mais forte de

> que o noivo traído era um agente do governo e Stéphanie não fora apenas uma mulher volúvel, mas uma sedutora usada para levar Galois a uma armadilha. (Evariste Galois, s.f., O duelo, par. 2).

A página *seuhistory.com* comenta que de 1689 a 1690, Newton foi membro do Parlamento, mas, aparentemente, as contribuições de Newton ao Parlamento eram limitadas – ele teria se pronunciado apenas uma vez, quando pediu a um funcionário que fechasse a janela, pois fazia frio. Entretanto, durante seu período em Londres, Newton conheceu várias pessoas influentes, do rei Guilherme III ao filósofo John Locke. Newton teve um segundo e breve mandato no Parlamento, de 1701 a 1702, e, novamente, parece ter contribuído pouco.

Hipátia foi uma mulher que se envolveu com questões políticas e, por isso, foi executada por uma multidão de cristãos depois de ser acusada de exacerbar um conflito entre duas figuras relevantes em Alexandria, o governador e o bispo. Para Felizzola (2016):

> A matemática é uma ciência na qual discussões se limitam a escolher uma ferramenta e chegar a um resultado correto. Em política, o assunto é outro, com nuances subjetivas, onde filosofia, ideologia, economia e outras ciências influenciam a ação humana. A vida em sociedade, num planeta que mostra seus limites, exige sistemas sustentáveis que atendam às necessidades de todos, cada um preocupado com o seu próprio bem-estar. (par. 1)

Em recente entrevista, o matemático *Étienne Ghys*, explica que “A matemática virou algo elitista, usado para separar as pessoas. Deveria ser o oposto” (Ghys, 2017, s.p.). Ele também afirma que:

> Ghys – Napoleão Bonaparte entendeu que a reorganização da sociedade, depois da revolução, deveria se dar a partir da matemática. Antes da revolução, matemáticos eram pessoas isoladas que faziam matemática pelo prazer, demonstrando teoremas pouco úteis. Depois da revolução, a matemática virou útil e passou a ser valorizada e incentivada para além do conhecimento abstrato. A matemática foi usada para formar engenheiros, professores universitários e o próprio sistema pedagógico francês (...) os alunos voltavam, então, para o lugar deles para disseminar o que tinham estudado. Essa ideia foi uma ferramenta muito importante para o desenvolvimento da ciência na França (...). A forma de exercer o poder político na França foi toda baseada na matemática.
>
> Epoca – Quais são os exemplos disso?
>
> Ghys – Napoleão Bonaparte gostava muito de matemática. (...). Mas o fato é que Napoleão tinha a matemática em alta conta. Entre seus amigos estavam os maiores matemáticos da história (...) Esses grandes matemáticos influenciaram diretamente a forma de organizar a nascente república francesa. Numa assembleia nacional, quantos deputados são necessários, como chegar ao número que dará representatividade justa às diferentes regiões do país? Essa definição pode variar de dez pessoas a 10 mil. Foram testados diversos modelos, com inúmeras variantes, para chegar ao formato que melhor atenderia aos interesses da maioria. A matemática foi tão importante para a organização política francesa que o filósofo e matemático marquês de Condorcet escreveu muitos livros sobre como tomar decisões políticas. (...) Esses livros foram fundamentais na democracia – não só a francesa. Até aqui no Brasil eles são usados. (Ghys, 2017, s.p.)

Em geral, a matemática, é citada como ciência absoluta e que os números não escondem a verdade, eles a indicam e a provam, como pode ser observado em várias reportagens em jornais e veículos de informações como, por exemplo, observamos no título da matéria A matemática não mente, mas há matemáticos mentirosos... publicada em http://www.gentedeopiniao.com.br. Aí o autor utiliza dos números para mostrar que as informações reais podem ser omitidas, mas a matemática aponta a verdade. Porém, histórias de matemáticos e estudantes dessa área, envolvidos diretamente em movimentos sociais, é raro encontrar. Aqui, nesse trabalho, tratamos disso: envolvimentos de matemáticos e estudantes de matemática em movimentos sociais populares. Apresentamos por meio das narrativas estudantis características peculiares aos acontecimentos recentes, final de 2016, no Brasil, em especial, em Goiânia, capital de Goiás. Esse estado está localizado no centro do país, perto da capital federal. (Fig.1)

Figura 6. América Latina com marcação aproximada da cidade de Goiânia – GO – BR
Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Am%C3%A9rica_Latina

Narrativas

Selecionamos três narrativas (sem expor nomes, resguardando a identidade dos estudantes) não pela qualidade e conteúdo, mas pela extensão do texto e, mesmo assim, fizemos algumas poucas adaptações, sem alterar o sentido. Elas refletem um pensamento crítico dos acontecimentos políticos brasileiros, em especial, dos fatos goianos, sob o ponto de vista de estudantes de Licenciatura em Matemática, que viveram momentos de opressão cidadã. À época, no mês de novembro de 2016, um estudante escreveu a seguinte reflexão:

> A partir da década de 1920 vemos surgir o movimento da Escola Nova e em 1924 é criada a associação brasileira de educação, que promoveu conferências e provocou ampla discussão sobre questões pedagógicas. Dentre as ideias do movimento Escola Nova estavam o "princípio da atividade" e o "princípio de introduzir situações da vida real". Em 1928, o Colégio Pedro II adere às ideias do movimento internacional para a modernização do ensino em matemática. Dentre as mudanças está a unificação das áreas aritmética, álgebra e geometria, no que viria a ser como disciplina única, a matemática.
>
> Logo essas ideias se difundiram às do primeiro ministro do recém-criado Ministério de Educação e Saúde Pública. Ele estabeleceu o currículo seriado, frequência obrigatória, dois ciclos e a exigência de

> habilitação nestes ciclos para o ingresso ao ensino superior. O novo programa trazia uma listagem de conceitos a ser trabalhados destacando cálculo infinitesimal no 4° e 5° ano (fim do ensino médio).
> Não é difícil imaginar que houve resistência para ser implantada, primeiramente pelos professores, que não estavam seguros de trabalhar de maneira tão diferente do habitual. Outro agravante foi a falta de material didático que contemplasse as ideias modernas.
> No atual momento em que vivemos, estamos passando por mais mudanças. Dentre elas temos as Organizações Sociais (O.S), o Notório Saber (permite que um profissional não licenciado lecione), a Medida Provisória 746 (PEC 746- Ensino Médio), a Reforma da Previdência (propõe mudanças na aposentadoria dos professores e outros trabalhadores) e a Proposta de Ementa Constitucional 55 (PEC 55 - do teto de gasto).
> Todas essas medidas têm caráter político-econômico e não estão levando em consideração o real desenvolvimento na área da educação, elas foram motivo de um levante de protesto por parte da comunidade acadêmica. Secundaristas, universitários, professores e técnicos se mobilizam nacionalmente em protesto a essas mudanças. Uma onda de ocupações escolares tomou o país. Foram mais de 1000 escolas ocupadas. Na Universidade Federal de Goiás (UFG), durante um mês, o movimento estudantil ocupou a faculdade e promoveu um amplo debate sobre estas questões, o que obrigou praticamente toda a comunidade da UFG a se posicionar e buscar argumentos para se defender. Foi assustador ver que muitos eram favoráveis às medidas consideradas golpistas.
> Um dos objetivos do movimento das ocupações foi paralisar as aulas para promover os debates citados, conscientizar e mobilizar pessoas para o ato em Brasília no dia 29 de novembro de 2017. Acredito, então, que foram efetivas as ocupações. Mesmo estando em grande número não foi suficiente para barrarmos a votação em primeiro turno. Por isso é de extrema importância um maior levante popular para o segundo turno. Por esse motivo, a luta não para. Alguns institutos da UFG: Faculdade de Ciências Sociais, Instituto de Estudos Socioambientais/ Faculdade de História, Faculdade de Artes Visuais e Faculdade de Letras, paralisaram suas aulas para continuar debatendo medidas para barrar essas propostas inconstitucionais.
> Foi levantado o acampamento dos professores na entrada da UFG que se efetivou após uma medida unilateral do presidente da Associação dos Docentes de cancelar subitamente a assembleia da categoria unicamente pela presença dos estudantes no local.
> A última chance de barrar tais ações é 13 de dezembro, se ela passar tudo indica que viveremos 20 anos de sucateamento, o que representará o fim da saúde e educação pública de qualidade. (Estudante A)

Uma estudante do curso de Licenciatura narrou os fatos e se expressou assim:

> No dia 30 de outubro de 2016, houve uma Assembleia do Instituto de Matemática e Estatística (IME) do câmpus Samambaia- Goiânia, em que a maioria dos alunos, em regime de votação, deliberou por juntar forças para ocupar o Centro de Aulas Aroeira (CA-A), onde alunos de diversos cursos tem aula. Saímos com coro “vamos ocupar o Centro de Aulas A” em direção ao local citado e, então, dezenas de pessoas de outros institutos (que já se encontravam ocupados) se juntaram e ao chegarmos ao destino, por volta das 20h 30min, fizemos uma votação em que ninguém se opôs à ocupação.
> Um fato histórico marcante havia ocorrido: alunos da matemática, que sempre foram vistos como estáticos às questões políticas, resolveram ocupar o primeiro Centro de Aulas do Campus. Houve uma grande divisão dos alunos e professores do Instituto de Matemática e Estatística e logo começaram mais divergências de opiniões.
> Quarta-feira, 15 de novembro de 2016, o aluno de licenciatura em matemática da UFG, Guilherme Silva Neto, mais conhecido como Guilherme Irish, foi assassinado pelo pai (que em seguida se suicidou) possessivo e que não aceitava os ideais do filho. Não devemos dizer que a morte foi devida ao fato do estudante participar das ocupações, mas, sim, por causa da intolerância de seu pai. Vários

> tipos de intolerâncias também foram cometidos por parte de alguns alunos do movimento de internet, denominado “desocupa”, que como o próprio nome sugere, eram contra as ocupações.
> No dia seguinte, muros do IME encontravam-se pichados em homenagem ao ex-aluno. Uma vela queimada e uma flor foram colocadas em uma das entradas. Novamente, os professores entram em conflito devido a uma nota de luto divulgada pela coordenação do curso de Licenciatura em Matemática.
> Dias após, o pedido de reintegração de posse foi entregue. Os alunos resistiram. Mascarados como forma de não serem retaliados, desocuparam os institutos, aglomerando-se no CA-A. Barricadas foram montadas. Os alunos subiram nas torres para vigiar o Campus. Noites mal dormidas, más condições de higiene. Os guerreiros não aguentaram mais. Sexta-feira, 18 de novembro, os alunos desocuparam a Universidade. Dezenas de pneus foram queimados. Os alunos passaram no IME fazendo homenagem ao ex-aluno Guilherme. Gritos expressavam a mágoa e a revolta dos alunos.
> Terça-Feira, 29 de novembro de 2016, dia do primeiro turno da votação da PEC 55 no Senado, milhares de pessoas de todo país foram à Brasília protestar contra as atrocidades propostas. Bombas e mais bombas de “efeito moral” e *sprays* de pimenta foram atirados em um protesto que até então, fora pacífico. Logo, começara a quebradeira. Desespero. Inúmeras pessoas inocentes foram espancadas pela polícia.
> Como sempre, a mídia mostrou só violência e os manifestantes foram/são chamados de vagabundos. Mas como já dizia Cazuza, “te chamam de ladrão, de bicha, maconheiro. Transformam o país inteiro num puteiro, pois assim se ganha mais dinheiro”. Mas a quem compartilha das mesmas ideologias que eu, só tenho a dizer: “Vai à luta, marca o teu ponto na justa”. Enquanto que para os contras, digo: “Piedade, Senhor, piedade ‘pra’ essa gente careta e covarde (...) Vamos pedir piedade, Senhor, piedade. Lhes dê grandeza e um pouco de coragem”. (Estudante B)

Outra estudante assim registrou:

> A educação brasileira, há muitos anos, não vem satisfazendo as necessidades de um país que é subdesenvolvido, e que precisa enxergar na educação um caminho para estancar a sangria da desigualdade, do preconceito; há muitos anos, as pessoas não se enxergam como partes do sistema que deveria inclui-los em discussões de quais os caminhos que devem ser tomados para que, juntos, possam trabalhar em prol de avanços, de igualdade, de aprendizagem para a sociedade atual e para a futura.
> A insatisfação é tanta que alguns professores, alunos e servidores da educação, se uniram e criaram movimentos contra as medidas que vem sendo impostas pelos governantes desse país, e vem mostrando a força que seus ideais tem. É claro que os caminhos enfrentados por essas inúmeras pessoas que se dispuseram a lutar pelos mais de 204 milhões de habitantes do Brasil, são de guerra acirrada com os governantes e sociedade, porque mesmo essa luta sendo de todos, existem muitos que não querem saber os motivos que os fazem encarar diariamente seus próprios medos e os desafios da luta por uma educação que forma o cidadão intelectual e o cidadão “humano”.
> As ocupações em escolas e universidades nos dizem muito sobre a luta desses estudantes que se permitiram ser representantes daqueles que acreditam nos mesmos ideais que eles, mas que têm receio de fazer parte da história se colocando contra as medidas governamentais que prejudicam toda a sociedade. Desde a explosão das OS nas escolas e agora do congelamento de gastos (PEC 55/241) na saúde e educação, esses jovens tomaram a grande responsabilidade de ocupar um espaço que é deles e mobilizarem seus colegas que não eram a favor das ocupações ou que não sabiam a necessidade de fazerem esses atos, que evidentemente ensinam mais do que semestres inteiros de aula, esses jovens tinham também o trabalho de conscientizarem seus pais e mostrar que não é uma bagunça, que não é divertimento ocupar escolas e universidades.
> Esses estudantes mostram que a luta consciente por educação e saúde de qualidade é direito nosso, mostram que não são baderneiros como a mídia mostra, mostram que são seres humanos sensíveis,

capazes de enxergar por muitos olhos as tristes consequências que essas medidas causarão no país. Esses jovens lutam pelo futuro, e fazem história hoje, a cada momento que a união de muitas vozes passa a ser uma e grita por todos e para todos pelos nossos direitos. (Estudante C)

Considerações finais

As narrativas nos indicam o quanto os licenciados, em particular, do IME, têm se formado para serem também questionadores, refletindo e, de certa forma, agindo contra atitudes antidemocráticas e que estão na contramão da melhoria da educação. Infelizmente quase todas as medidas foram aprovadas, restando ainda a aprovação da Reforma da Previdência. Assim, acreditamos que existem expectativas de uma geração de educadores matemáticos que continuarão a lutar contra políticos com interesses particulares e que não atuam em prol de um bem comum. Tudo indica que esses educadores darão exemplos para outros que virão. Nessa perspectiva, a Educação Matemática na América Latina, em especial, pode vir a ser menos perversa e mais inclusiva.

Referências bibliográficas

Abbagnano, N. (2007). *Dicionário de Filosofia*. São Paulo: Martins Fontes.
Ghys, E. (2017). *Sem Matemática não há como desenvolver um país*. Recuperado em julho de 2017, em http://epoca.globo.com/educacao/noticia/2017/07/etienne-ghys-sem-matematica-nao-ha-como-desenvolver-um-pais.html.
Evariste Galois. (s.f.). *Wikipédia*. Recuperado em julho de 2017, em https://pt.wikipedia.org/wiki/Évariste_Galois
Felizzola, R. *Política e Matemática*. Em Dia - Zero Hora. Recuperado em julho de 2016, em http://www.htmicron.com.br/site_ptbr/
Skovsmose, O. (2008). *Desafios e reflexão em educação matemática crítica*. Campinas - SP: Papirus.
Skovsmose, O. (2013). *Educação matemática crítica: a questão da democracia*. Campinas -SP: Papirus.
Silva, C. M. S. (1999). *A Matemática Positivista e sua difusão no Brasil*. Vitória: EDUFES, 1999.
9 Fatos sobre Issac Newton que surpreenderão você. (s.f.). History. Notícias. Recuperado em julho de 2016, em https://seuhistory.com/noticias/9-fatos-sobre-isaac-newton-que-surpreenderao-voce

DIÁLOGO ENTRE LOS CAMPOS DISCIPLINARES QUE CONFIGURAN LA FORMACIÓN DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN LA UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE: PARADIGMAS DOMINANTES E IDENTIDAD DISCIPLINAR

Daniela Soto Soto; Héctor Silva Crocci
Universidad de Santiago de Chile. (Chile)
daniela.soto.s@usach.cl, hector.silva.c@usach.cl

Resumen
Este artículo reporta de forma parcial el planteamiento metodológico de un proyecto de investigación que tiene como propósito generar un diálogo interdisciplinario entre académicos, que conforman el cuerpo docente del programa de Pedagogía y Licenciatura en Educación de Matemática y Computación (PLEMC), de la Universidad de Santiago de Chile. El proyecto parte sobre la hipótesis de que en la PLEMC intervienen al menos tres campos disciplinares: la Matemática, la Educación y la Matemática Educativa. Para el análisis se estudiaron discursos de académicos que imparten asignaturas en el programa, lo cuales participaron en un seminario donde se problematizaron nociones del cálculo. El estudio se desarrolló bajo una perspectiva metodológica denominada Análisis Crítico del Discurso, encontrando significados locales y globales. Con ello se ha caracterizado los paradigmas que subyacen en los campos que articulan el programa, en la pesquisa de generar lineamientos que organicen una identidad disciplinar en los futuros profesores de matemática.

Palabras clave: campos disciplinares, formación inicial, socioepistemología.

Abstract
This paper provides a partial report of the methodological approach of a research project aimed at generating an interdisciplinary dialogue between teachers, who make up the teaching staff of the program in Pedagogy and Bachelor’s degree in Mathematics and Computing Education (PBMCE) at the University of Santiago De Chile. The project is based on the hypothesis that in the PBMCE are involved at least three disciplinary fields: Mathematics, Education and Mathematical Education. For the analysis we studied the speeches of specialists that teach subjects in the program, who participated in a seminar where the notions of calculus were problematized. The study was developed under a methodological perspective called Critical Discourse Analysis, finding local and global meanings. It has allowed characterizing the underlying paradigms in the fields that articulate the program in search of generating guidelines that organize a disciplinary identity in the prospective mathematics teachers.

Key words: disciplinary fields, initial training, socio-epistemology

Introducción

Este artículo reporta de forma parcial el planteamiento metodológico de un proyecto de investigación que tiene como propósito generar un diálogo interdisciplinario entre académicos, que conforman el cuerpo docente del programa de Pedagogía y Licenciatura en Educación de Matemática y Computación (PLEMC), de la Universidad de Santiago de Chile. Es por ello que se busca caracterizar los paradigmas epistemológicos que subyacen en los campos disciplinares que conforman dicho programa, y así generar lineamientos para fortalecer la identidad disciplinar de los futuros profesores de matemática.

Se considera que formar un profesional sensible a la pluralidad epistemológica de la matemática, mejora los resultados de la enseñanza en escenarios escolares. Esta consigna se fundamenta en una postura de la Matemática Educativa que promueve la visión del conocimiento matemático desde su construcción social.

El proyecto parte sobre la hipótesis de que en la PLEMC intervienen al menos tres campos disciplinares: la Matemática, la Educación y la Matemática Educativa (Soto, 2013).

Para el levantamiento de datos se organizó un seminario donde participaron seis académicos que imparten asignaturas en el programa, los cuales experimentaron situaciones del cálculo relacionadas al cálculo. El estudio se desarrolló bajo una perspectiva metodológica denominada *Análisis Crítico del Discurso* (Van Dijk, 2003), permitiendo categorizar significados locales y globales de los discursos de los académicos. En particular, en este documento se reporta de manera parcial las etapas que componen al proyecto, así como algunos resultados parciales.

Problemática

En Chile la formación inicial del profesor de matemáticas mezcla a lo menos tres disciplinas: la Matemáticas, la Educación y la Matemática Educativa o Didáctica de la Matemática. En el programa PLEMC además se integran las Ciencias de la Computación, la cual no se considerara en el proyecto. Cada una de estas disciplinas suministra distintos énfasis en la formación del profesor de matemáticas. Se concibe a estas disciplinas como campos que lucha por la autoridad de definir "qué debe saber el profesor de matemáticas en el proceso de su formación inicial" (Soto, 2013).

Desde la *Construcción Social del Conocimiento Matemático* se asume que el paradigma que ha dominado en la Educación Matemáticas ha tenido un carácter hegemónico, utilitario, acabado y estático del conocimiento (Soto y Cantoral, 2014). A este paradigma dominante lo hemos denominado *discurso Matemático Escolar*.

El programa PLEMC ha reformado su malla curricular hace cinco años. Es en este escenario donde el proyecto pretende promover un diálogo entre los campos que intervienen en la formación inicial del profesor de matemáticas, y así pesquisar los paradigmas epistemológicos dominantes, a partir del debate entre los académicos en un seminario donde se problematizaron nociones del cálculo.

Estructura teórica

La base conceptual del proyecto se compone de dos teorías que se entrelazan entre sí: la teoría socioepistemológica (Cantoral, 1990; Cordero, 1994) y la teoría de los Campos (Bourdieu, 2008).

La Socioepistemología. Con la teoría socioepistemológica se ha reconocido un paradigma dominante en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, el cual se ha denominado como *discurso matemático escolar* (dME) Este dME tiene características epistemológicas que norman los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, esto es (Soto y Cantoral, 2014):

- La atomización en los conceptos:
- El carácter hegemónico.
- La concepción de que la Matemática es un conocimiento acabado y continúo.
- El carácter utilitario y no funcional del conocimiento.
- La falta de marcos de referencia para la resignificar la matemática escolar.

Se ha sistematizado que el discurso Matemático Escolar (dME) que se socializa en las escuelas se ha centrado en los objetos matemáticos con una enseñanza que privilegia lo hegemónico. Esto quiere decir que la atención en la enseñanza de las matemáticas se ha puesto en los conceptos, y sus definiciones, no así en sus aspectos funcionales. En este sentido, líneas de investigación de naturaleza socioepistemológica, han teorizado tres fenómenos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que problematizan el dME, estos son: la exclusión, la opacidad y la adherencia (Cordero, Gómez, Silva- Crocci y Soto, 2015).

En contraste a este paradigma dominante en el sistema escolar se ha puesto el acento en la *Construcción Social del Conocimiento Matemático* (*CSCM*). La socioepistemología no centra su atención en los conceptos o procesos matemáticos, sino en categorías transversales del saber matemático asociadas a prácticas sociales, culturales, funcionales e institucionales que permiten la construcción de ellos.

Se propone que es necesaria la confrontación de estos dos paradigmas- el *dME* y la *CSCM*- en la formación inicial del profesor de matemáticas. Esto lo conseguiremos a partir de la *problematización del saber matemático*. Esto implica reconocer los usos, la funcionalidad y las prácticas que permiten la construcción del conocimiento matemático.

En este sentido, en este proyecto se consideró la problematización de algunas nociones del cálculo, considerando investigaciones desarrolladas bajo la teoría socioepistemológica. En ella se plasma de manera organizada la resignificación de tales nociones a partir de la categoría del uso de la gráfica y de la categoría comportamiento tendencial de las funciones. En el estudio epistemológico acerca del cálculo encontramos una base de significados en el uso de la gráfica. Por ejemplo, con el estudio de la obra de Oreme (1379), investigaciones han reportado que la gráfica antecede al concepto de función (Suarez y Cordero, 2010).

La teoría de campos. Bourdieu concibe e interpreta a la sociedad a través del análisis de lo cultural y simbólico. En otras palabras nos brinda una visión que intenta comprender las relaciones que posibilitan la reproducción social, y al mismo tiempo, las relaciones de poder que se dan en la sociedad. Para ello Bourdieu (2008) propone un enfoque en términos de espacios sociales de los grupos y sus relaciones

(Ilustración 1). La sociedad está compuesta por una variedad de *campos* (religiosos, políticos, económicos, simbólicos). Cada uno de estos *campos* se encuentra en constante lucha y confrontación. Lo que significa que en una sociedad específica, encontramos un campo dominante sobre los otros. Dentro de cada campo se encuentra también una jerarquía, distribución desigual de lo que Bourdieu ha denominado "capital". Así encontramos una sociedad jerarquizada en su exterior a partir del peso que pueda tener cada campo en cada sociedad, y una sociedad jerarquizada en el interior de estos *campos* a través de la acumulación de capital (Gutiérrez-Martínez, 2005).

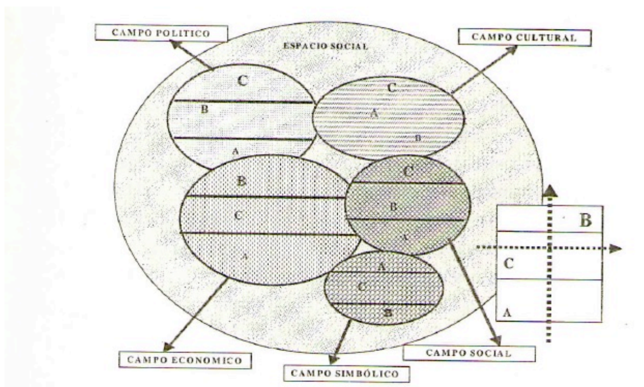


Figura 1. Teoría de Campos de Bourdieu (Gutiérrez-Martínez, 2005).

En el proyecto se entiende a las disciplinas que conforman la formación del profesor de matemáticas como campos separados. Que solo en algunos aspectos tienden a articularse.
Los diferentes paradigmas de cada campo se interceptan en la formación del docente, lo cual forma el *dME* que norma la formación inicial docente (Ilustración 2).

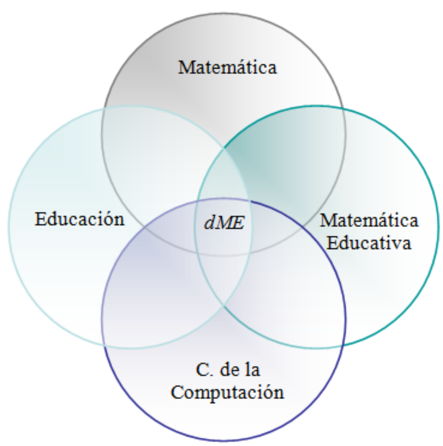


Figura 2. Campos en la formación del profesor de matemáticas

En este sentido, la investigación partió sobre la siguiente hipótesis: en el programa PLEMC debaten diferentes campos disciplinares en la enseñanza y aprendizaje del conocimiento matemático, las cuales luchan por una autoridad de definir cuáles son los aspectos relevantes en la formación inicial del profesor de matemáticas. Dicho de otra manera, en la formación inicial del profesor de matemática cohabitan y se confrontan *paradigmas epistemológicos* que generan un *dME* dominante que se reproduce socialmente.

Método

La investigación tiene una naturaleza cualitativa, interpretativa y etnográfica, ya que busca estudiar, en el contexto de un seminario, los discursos de académicos asociados a las diferentes disciplinas que intervienen en el programa PLEMC, observando cuáles son las posiciones dominantes que norman la formación inicial de los profesores de matemáticas. Para esto, se desarrolló un estudio detallado de los discursos orales a través de una herramienta metodológica denominada Análisis Crítico del Discurso (ACD) (Van Dijk, 2003), con lo cual se analizaron significados, estructuras y contexto globales y locales de los actos comunicativos en el seminario.

Etapas de la investigación

Con estos elementos metodológicos la investigación constó de tres etapas:

1. Conformación de un seminario
2. Desarrollo del seminario
3. Análisis de los discursos expuestos en el seminario

Los participantes del seminario diálogos son seis académicos que pertenecen a la planta regular del Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, entre ellos: dos académicos del campo matemático (CM), dos académicos del campo educativo (CE) y dos académicos del campo de la matemática educativa (CME). Todos ellos en la actualidad imparten clases en el programa de PLEMC.

Primera etapa: En la primera etapa se caracterizó los elementos necesarios para la toma de datos. Esto se tradujo en la planificación de un seminario denominado “Diálogo”, en el cual se invitaron académicos del programa que representen los diferentes campos disciplinares. El seminario constó de reuniones quincenales. Se definieron los temas a tratar. El foco central del diálogo fue la problematización de las argumentaciones del Cálculo. En este sentido, el seminario se presentaron tres situaciones que buscan resignificar algunos elementos del cálculo: lo parabólico, lo asintótico y la linealidad del polinomio. Cada una de estas situaciones, fue dirigida por uno de los grupos pertenecientes a los campos disciplinares. La situación de la parábola fue presentada CE, la situación de la asintoticidad por el CM y la situación de la linealidad del polinomio por el CME.

Segunda etapa: En la segunda etapa se desarrolló el seminario tomando los datos audiovisuales correspondientes y transcribiendo los acontecimientos discursivos que se expresaron in situ. Se contó con la participación de una observadora no participante, quien formuló las bitácoras del seminario.

Tercera etapa: En la tercera etapa se organizaron los datos, lo que contó con la transcripción de los diálogos. Esto permitió desarrollar los análisis críticos del discurso de los académicos participantes. En este sentido, de los diálogos generados en los seminarios se sistematizaron los significados locales y globales de los discursos.

Comentarios finales

En resumen, los diálogos en torno a una situación de aprendizaje permitieron la problematización del saber matemático desde la óptica de los tres campos disciplinares: CM, CME, CE, donde se confrontaron ideas provenientes de cada uno de ellos, sus paradigmas dominantes y las visiones personales de cada académico. Presumimos que las nociones de: lo social, las representaciones, la formalidad del lenguaje y el orden lógico del contenido fortalecen el diálogo de los diferentes campos disciplinares.

Referencias bibliográficas

Bourdieu, P. (2008). *Los usos sociales de la ciencia*. (Trad. H. Pons y A. Busch). Buenos aires, Argentina: Nueva Visión. (Original en francés, 1997)

Cantoral, R. (1990). Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propia del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analítica. Tesis de Doctorado no publicada. México: Cinvestav-IPN

Cordero, F. (1994). *Cognición de la integral y la construcción de sus significados: Un estudio del discurso Matemático escolar*. Tesis doctoral. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México

Cordero, F. Gomez, K. Silva- Crocci, H. y Soto, D. (2015). Discurso matemático escolar. Adherencia, exclusión y opacidad. Editorial: Gedisa.

Gutiérrez- Martínez, D. (2005). Del constructivismo de Bourdieu al construccionismo de Piaget: en torno a las políticas educativas aplicadas a los pueblos indígenas de México. En C. Gallego, L. Gómez, C. Imaz y Y. Paredes (Coord.). *Pierre Bourdieu. Campos de conocimiento: teoría Social, Educación y cultura* (71-106). Tuxtla Gutiérrez, México: UNAM y UNACH.

Soto, D. (2013). El campo de la formación del profesor de matemáticas y la exclusión de la construcción social del conocimiento matemático: el caso de un programa específico. En C. Dolores- Flores, M. García-González, J. Hernández y L. Sosa. *Matemática Educativa: la formación de profesores* (117-136). México, Díaz de Santos, S. A.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). El discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una visión Socioepistemológica. *Bolema- Boletim de Educação matemática*.

Suárez, L. y Cordero, F. (2010). Modelación – graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13* (4), 319- 333.

Van Dijk, T. (2003). La multidisciplinariedad del análisis crítico del discurso: un alegato en favor de la diversidad. En *Métodos de análisis crítico del discurso* (143-177). Barcelona: Gedisa.

LA PARÁBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO: UNA FORMACIÓN CONTINUA DE PROFESORES

Isabel Mercedes Lara Torres, Jesús Victoria Flores Salazar, Daysi Julissa García-Cuéllar
Universidad tecnológica del Perú, Pontificia Universidad Católica del Perú, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
c17029@utp.edu.pe, jvflores@pucp.edu.pe, ra00193072@pucsp.edu.br

Resumen
Esta investigación presenta el estudio de la parábola como lugar geométrico con profesores de formación continua de Lima-Perú. Como base teórica y metodológica utilizamos algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica y de la Ingeniería Didáctica, respectivamente. Se observó, a partir de la aplicación de una secuencia de actividades, que los profesores movilizaron la noción parábola como lugar geométrico interactuando con el ambiente de representaciones dinámicas Geogebra. Como resultados, los docentes realizaron tratamientos en los diferentes registros y lograron coordinar los registros figural, gráfico y algebraico.

Palabras clave: parábola; registros de representación semiótica, GeoGebra.

Abstract
This research presents the study of the parabola as geometric place in teachers of continuous training of a private university in Lima-Peru. As the theoretical and methodological basis we use some aspects of the Theory of Semiotic Representation and Didactic Engineering respectively. From the application of a sequence of activities, we observe that teachers mobilized the parabola notion as geometric place interacting with the environment of Geogebra dynamic representations. As a result of the research, the teachers carried out processes in the different registers and managed to coordinate the figural, graphic and algebraic representations.

Key words: parabola, registers of semiotic representation, GeoGebra

Introducción

La parábola como lugar geométrico es un concepto importante en la Educación Matemática, debido a que se presenta como parte de la curricula en el curso de Matemática a nivel secundario y en los cursos generales de Matemática a nivel universitario en Perú.

La enseñanza tradicional de este objeto matemático ha traido como consecuencia la reducción de la parábola desde el aspecto algebraico y los distintos errores que los alumnos cometen sobre la parábola como el de confundir la parábola con la función cuadrática. Lopes (2014) menciona que los estudiantes de secundaria por lo general confunden la parábola con la función cuadrática. Menciona a su vez, que si bien la función cuadrática se representa de diferentes formas a través de una expresión algebraica, gráficos cartesianos, etc., no significa de que los estudiantes conociendo la función cuadrática puedan entender las propiedades de la parábola.

Lopes (2014) sostiene también que comprender la parábola como lugar geométrico a partir de sus propiedades geométricas tiene un valor importante, frente a comprenderla desde un aspecto meramente algebraico. Dicho valor solo se alcanza enseñando desde sus aspectos geométricos y utilizando la tecnología que permita deducir sus propiedades geométricas.

Para efectos de nuestra investigación revisamos los dos libros de texto más utilizados en los colegios de secundaria en Lima – Perú.

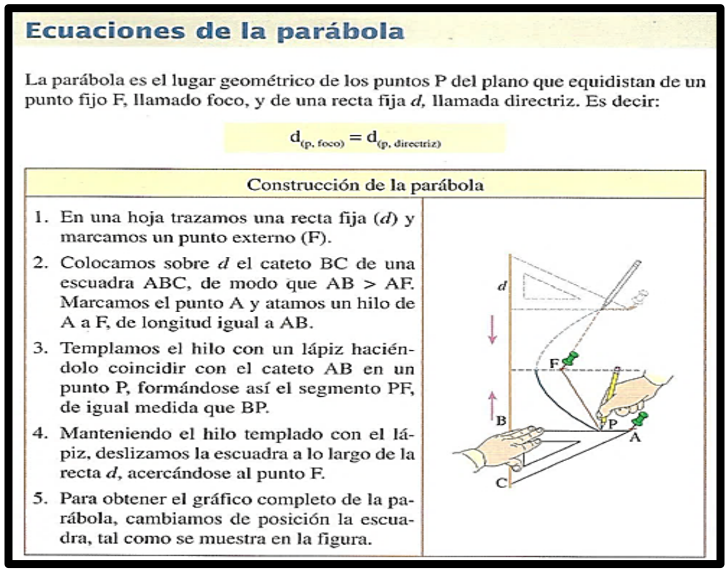
Tabla 1. Libros de texto usados en la enseñanza de la Parábola

Libro	Unidad	Páginas	Título
Libro de Matemáticas del Ministerio del Perú	Unidad 7 Geometría Analítica	220 - 224	Manual para el Docente
Libro Norma	Unidad 9 – Tema 4 Geometría Analítica	404 - 409	Manuel para el Docente

En ellos se observó que el concepto de parábola se presenta como algo ya acabado, lo cual no permite a los estudiantes deducir, analizar o descubrir sus propiedades.

El libro de Matemática del Ministerio de Educación describe los pasos para la construcción de la parábola, actividad que solo está diseñada para comprobar la definición, tampoco se generan preguntas para relacionar aspectos geométricos de la construcción con la definición de la parábola.

Se observa a su vez que si bien la actividad propuesta les permite graficar la parábola, siguiendo los pasos que se les indican, no genera en los estudiantes un cambio de registro o tratamientos de la parábola, como se puede observar en la siguiente figura.



Ecuaciones de la parábola

La parábola es el lugar geométrico de los puntos P del plano que equidistan de un punto fijo F, llamado foco, y de una recta fija *d*, llamada directriz. Es decir:

$$d_{(p,\ foco)} = d_{(p,\ directriz)}$$

Construcción de la parábola

1. En una hoja trazamos una recta fija (*d*) y marcamos un punto externo (F).
2. Colocamos sobre *d* el cateto BC de una escuadra ABC, de modo que AB > AF. Marcamos el punto A y atamos un hilo de A a F, de longitud igual a AB.
3. Templamos el hilo con un lápiz haciéndolo coincidir con el cateto AB en un punto P, formándose así el segmento PF, de igual medida que BP.
4. Manteniendo el hilo templado con el lápiz, deslizamos la escuadra a lo largo de la recta *d*, acercándose al punto F.
5. Para obtener el gráfico completo de la parábola, cambiamos de posición la escuadra, tal como se muestra en la figura.

Figura 1. La Parábola como lugar geométrico, MINEDU, (2011, Pg.221)

Asimismo, no se presentan actividades donde los estudiantes, a partir de sus conocimientos previos, puedan construir dicha noción.

Como hemos podido evidenciar, creemos que la existencia de problemas de comprensión de la parábola como lugar geométrico por parte de los estudiantes es resultado de la forma en que se enseña, pensamos que los profesores no tienen conocimientos básicos sobre esta noción o se guían de la forma como presentan la parábola los distintos libros de matemáticas. Con respecto a lo mencionado, Fernández (2011) y Moncayo, Pantoja y Fernández (2012) señalan que la orientación tradicional basada en las descripciones algebraicas de las cónicas ha hecho que su tratamiento sea artificial, porque como señalan es enseñada de manera algebraica es decir, es enseñada a partir del estudio de las ecuaciones polinómicas de segundo grado y desde el punto de vista de funciones por lo que la noción de parábola como lugar geométrico no es trabajada a profundidad.

Es por ello que, ante estas evidencias observadas y las necesidades actuales en didáctica de la matemática, pensamos que es importante realizar una investigación que involucre el objeto matemático parábola en una formación continua (taller) de profesores de matemáticas, para que movilicen sus conocimientos relacionados a la parábola como lugar geométrico con el uso de ambientes de geometría dinámica como el Geogebra.

Por lo anterior, el objetivo de nuestra investigación se centra en que los docentes de matemáticas movilicen diferentes registros de representación semiótica de la parábola como lugar geométrico cuando desarrollan una secuencia de actividades.

Para cumplir nuestro objetivo de investigación, utilizamos como marco teórico algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (Duval, 1995) y como marco metodológico, aspectos de la Ingeniería didáctica de Artigue (1995), que presentamos a continuación.

Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica

El investigador Duval (2005) afirma que las actividades cognitivas propias del aprendizaje de las matemáticas, como la conceptualización, razonamiento y resolución de problema, requieren del uso de sistemas de expresión y representación.
Por ello, los sistemas de comunicación y de representación son indispensables para los procesos de comprensión en términos de integración y estructuración de las representaciones mentales. En este sentido Duval (2005) expresa algunos aspectos claves de la teoría:

Representaciones Semióticas

El autor establece que por medio de las actividades asociadas a los sistemas de representación se puede caracterizar la comprensión que los estudiantes tienen acerca de un objeto matemático a través de representaciones semióticas, como gráficos, figuras, números, etc.

> Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje formal, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica…), no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. (Duval, 1995, p.14)

En ese sentido, Duval (2005) expresa que para que un sistema semiótico sea considerado registro este debe cumplir con las tres actividades cognitivas fundamentales: formación, tratamiento y conversión de representaciones semióticas:

Formación: Hace referencia a la expresión mental la cual implica la selección de un conjunto de caracteres, selección de las relaciones y datos que permite constituir lo que se representa.

Tratamiento: Es una transformación interna dentro del mismo sistema semiótico en relación a un mismo objeto.

Conversión: Es la transformación de representación en otro sistema semiótico distinto al inicial.

Estas actividades cognitivas se concretan en los siguientes registros de representación semiótica:

Tipos de Registros de Representación

Registro Figural: Engloba dibujos, esquemas, bosquejos, líneas, marcas, etc., que intentan representar el objeto de conocimiento sin dar cuenta de la cualidad de los elementos involucrados.

Registro de lengua Natural: En este registro se admite como representación una descripción en lenguaje natural. Si se quiere modelar un fenómeno, se debe partir de una descripción del mismo ya sea de tipo verbal o escrito.

Registro gráfico: En este registro se puede representar por medio de una curva (continua o no) en el plano cartesiano. Se pone en juego la noción de gráfica del objeto matemático.

Registro algebraico: En este registro, se puede representar por medio de expresiones algebraicas.

A continuación, la figura 2 muestra los diferentes registros de representación semiótica que los docentes deberían utilizar al desarrollar la secuencia de actividades.

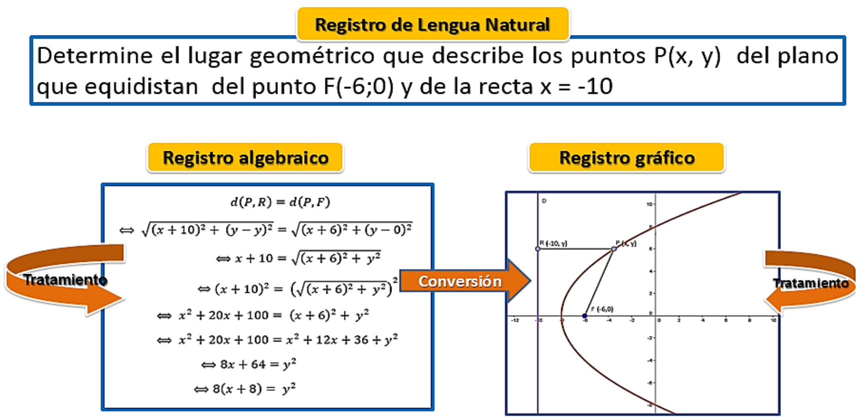


Figura 2. Registro de Lengua Natural, algebraico y gráfico de la Parábola (Elaboración propia)

La figura 2 muestra la conversión del registro de lengua natural al registro algebraico, luego se realiza el tratamiento dentro del registro algebraico; finalmente se ejecuta la conversión del registro algebraico al registro gráfico, mostrando una coordinación de sus significados.
De acuerdo con Duval (2004):

> La conversión es una transformación de la representación de un objeto en un registro P en otra representación del mismo objeto en un registro L. La característica de la conversión es conservar la referencia al mismo objeto (objeto en el sentido estricto, situación…), pero sin conservar la explicitación de las mismas propiedades de ese objeto (Duval, 2004, p.44).

El autor expresa que las transformaciones de los sistemas semióticos permiten tener una variedad de representaciones de un objeto matemático y que esta variedad favorece el aprendizaje.

Aspectos de la Ingeniería didáctica

En relación a los aspectos metodológicos, la investigación es cualitativa y se utilizaron aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995).

La Ingeniería didáctica se denominó a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero, quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Artigue, sostienen que el profesor concibe, realiza, observa y analiza secuencias de enseñanza para lograr el aprendizaje de un contenido matemático determinado por un grupo específico de estudiantes.

Así mismo la autora sostiene que la Ingeniería didáctica se ubica en el registro de los estudios de casos, cuya validación es en esencia interna, basada en las confrontaciones entre el análisis a priori y a posteriori.

Experimento y análisis

A partir de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), hemos diseñado una secuencia compuesta por cuatro actividades específicas sobre la parábola como lugar geométrico utilizando el software GeoGebra en base a algunas herramientas geométricas y otras propiedades como el arrastre del mismo software. Se aplicó a 15 profesores de la Carrera Pública Magisterial en formación continua.

Las actividades se aplicaron en dos etapas: en la primera se tomaron como base las propiedades geométricas de la Parábola y en la segunda etapa, las actividades estaban relacionadas al dominio de la geometría analítica, utilizando en cada una el Geogebra.

A continuación se presenta dos actividades, una de cada una de las etapas con una pregunta.

Actividad N° 1:

En la primera actividad propuesta se les pide a los profesores la sigueinte construcción: “Encuentre el punto P que equidista tanto de la recta d como del punto exterior F” siguiendo la secuencia de pasos.

Construya con Geogebra sin utilizar ninguna herramienta “Cónica – Parábola”:

Enunciado:
Encuentre el **punto P** que equidista tanto de la ***recta d*** como del punto exterior ***F***.

1. Utilice las herramientas del Geogebra y construya una ***recta d*** como objeto fijo.
2. Coloque un ***punto F*** que no pertenezca a la ***recta d*** como objeto fijo coloque un ***punto Q*** sobre la recta d con la opción ***punto en objeto.***
3. Trace una ***recta perpendicular n*** a la ***recta d*** y que pase por el ***punto Q.***
4. Trace el ***segmento QF.***
5. Construya la ***mediatriz m*** del ***segmento QF.***
6. Crea el ***punto de intersección P*** entre la recta ***perpendicular n*** con la ***mediatriz m.***

Nota: En esta actividad no se requiere de ejes ni de cuadrículas.
Objeto fijo: Clic derecho – propiedades – check en cuadrito de objeto fijo.

Figura 3. Imagen del archivo Actividad_1.ggb: La parábola como lugar geométrico. (Elaboración propia)

Se presenta la pregunta A de la actividad 1: Si P es un punto que equidista de la recta d como del punto F, ¿dicho punto P pertenecerá a la mediatriz del segmento QF? Justifique su respuesta.

A su vez se plantean preguntas que permiten visualizar y conjeturar sobre el comportamiento de los elementos de la parábola y propiedades con ayuda la utilización de la herramienta arrastre. Se espera que logren la coordinación del registro de lengua natural con el registro figural cuando se interactúe con la construcción de la parábola en GeoGebra.

Como se había previsto a priori, uno de los profesores, al que llamaremos Armando, logró construir la parábola como lugar Geométrico al utilizar las herramientas del GeoGebra como recta, punto, mediatriz, recta perpendicular, punto de intersección, como se muestra en la figura 4.

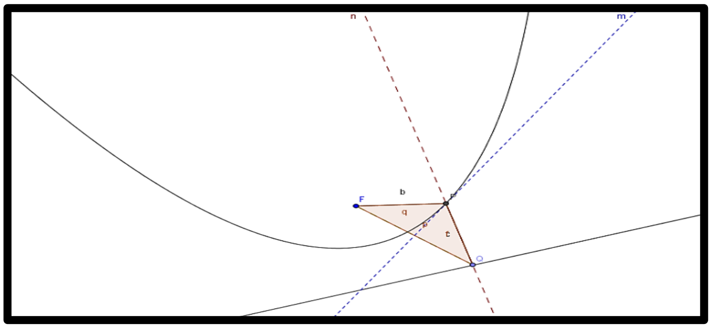


Figura 4. Actividad 1 – Construcción de la parábola como lugar geométrico. (Elaboración propia)

Como se había previsto a priori, el profesor Armando manipula el punto Q y responde a la pregunta que genera la movilización de la construcción de la parábola por medio de las herramientas arrastre, rastro y lugar geométrico como se muestra en la figura 5.

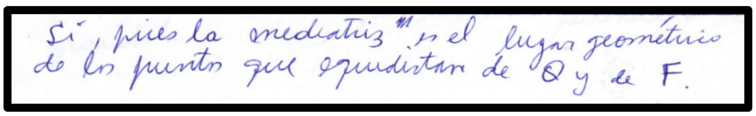


Figura 5. Actividad 1 – Ítem A – Profesor Armando. (Elaboración propia)

Actividad N° 2:

Construya con Geogebra:

Construya la representación gráfica de la parábola utilizando las propiedades en la actividad 1 y 2 con foco en el punto F (2,3) y cuya recta directriz es paralela al eje de abscisas, que pasa por el punto A (0, -2). Tome un punto P en la recta d y determine un punto Q de la parábola. No debe usar la herramienta *"Cónica - Parábola"* del Geogebra.

Figura 6. Actividad 2: La parábola como lugar geométrico. (Elaboración propia)

A priori, consideramos que los profesores utilicen la apariencia Álgebra y Gráficas del software Geogebra ya que en esta actividad se está introduciendo puntos y coordenadas del foco como los F (2,3) y el punto A (0,-2), tracen la recta d, tracen la mediatriz de un segmento FP y una recta perpendicular a la directriz en el punto P.

A priori, se espera que los profesores respondan a las preguntas generando que vuelvan a la construcción para interactuar por medio de la herramienta arrastre y realicen los tratamientos y conversiones entre registros y se logre calcular la ecuación: P: $x2 - 4x - 10y - 9 = 0$
A posteriori, el profesor Armando realizó la construcción de la parábola como lugar geométrico con el Geogebra utilizando los elementos geométricos trabajados en la actividad 1 y 2 en el dominio de la

geometría analítica movilizando las propiedades de la parábola, logrando realizar tratamientos en el registro gráfico como la coordinación entre las representaciones de la parábola en el registro de lengua natural y el registro gráfico, como se muestra en la figura 7.

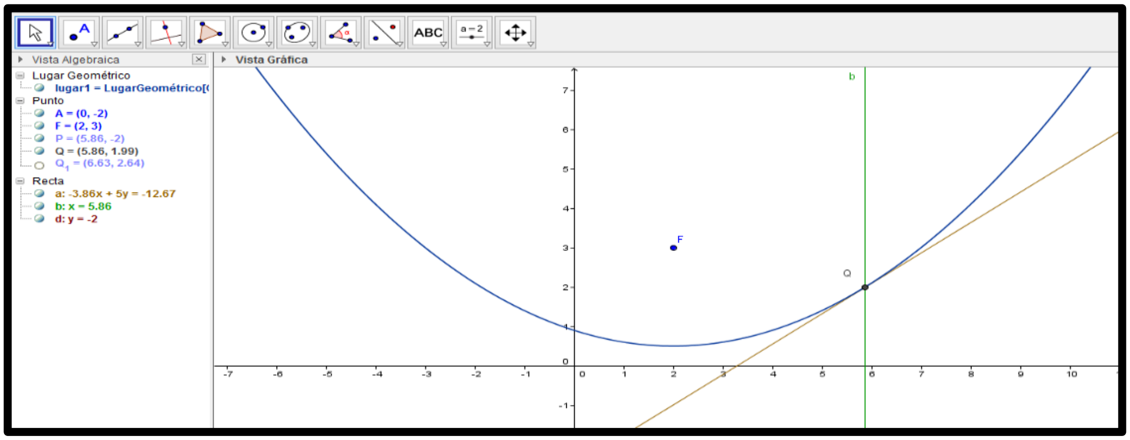


Figura 7. Construcción de la parábola de la actividad 2 del profesor Armando. (Elaboración propia)

Conclusiones

Las actividades generaron que los docentes del estudio, como en el caso del profesor Armando, coordinaran los registros de lengua natural, gráfico y algebraico en la construcción de la parábola, realizando tratamientos y conversiones, logrando la comprensión de la parábola a partir del uso de elementos geométricos relacionados a las propiedades de la parábola con el uso del GeoGebra y de las diferentes formas de obtener una parábola en el dominio de la geometría y en el dominio de la geometría analítica, favoreciendo la conversión del registro gráfico con el registro algebraico. Según Duval (2005) al trabajar con por lo menos dos registros de representación semiótica realizando tratamientos y conversiones avalamos una mayor comprensión del objeto matemático.

En el estudio, se reconoció también que las herramientas del GeoGebra facilitaron la comprensión de la parábola como lugar geométrico, cuando los docentes a través de la realización de las actividades con este software lograban conjeturar las propiedades y/o características de dicho objeto matemático.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (2004). *Les problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo*. Trad. Myrian V. Restrepo. Santiago de Cali: Merlín I. D.

Duval, R. (2005). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Colombia: Grupo editorial Merlín I.D.

Fernández, E. (2011). *Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global. Integrando Cabri Géometre II Plus.* [Tesis de Maestría en Educación Matemática]. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Santiago de Cali, Colombia. Recuperado de: http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/3901/4/CB-0450269.pdf

Lara, I. M. (2016). *La parábola como lugar geométrico: una formación continua de profesores de matemáticas basada en la Teoría de registros de Representación Semiótica.* [Tesis de Maestría en Educación Matemática]. Pontificia Universidad Católica del Perú. Recuperado de: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/7363.pdf

Lopes, S. (2014). *Una secuencia didáctica para la enseñanza de la parábola en como lugar geométrico.* [Tesis de Maestría en Educación Matemática]. Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo.

Moncayo, C.; Pantoja, J. y Fernández, E. (2012). *Enfoque didáctico para la conceptualización de la parábola como lugar geométrico integrando Cabri Geometre II Plus.* [Tesis de Licenciatura]. Universidad de Nariño. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.

SOS. LOS PROYECTOS TRANSVERSALES NO SON COMO LOS PINTAN

Martha Liliana Pedreros González, Blanca Maria Peralta Guachetá
Universidad Santo Tomás Colombia
marthapedreros@ustadistancia.edu.co; blancaperalta@ustadistancia.edu.co

Resumen
Presentamos las preguntas, dificultades y prejuicios que debimos sobrepasar para plantear la enseñanza de las matemáticas entrelazadas con los saberes ancestrales muiscas y los saberes técnicos agrícolas en nuestra experiencia de práctica pedagógica como docentes de matemáticas en formación, enmarcada en el desarrollo de la huerta comunitaria del colegio San Bernardino IED. Esperamos contribuir a la discusión sobre cómo formar docentes inter y transdisciplinares.

Palabras clave: formación docente, matemáticas, etnomatemáticas

Abstract
We show questions, difficulties and prejudices that we had to overcome to raise mathematics teaching interlinked with the Muisca ancestral knowledge and the agricultural technical knowledge in our teaching experience as mathematics teachers in training, framed in the development of the community vegetable garden of San Bernardino School. We expect to contribute to the discussion on how to train inter and trans-disciplinary teachers.

Key words: teacher training, math, ethno-mathematics

Contexto Formativo

La universidad Santo Tomas (USTA), Primer Claustro Universitario de Colombia, fue fundada por la Orden de Predicadores en 1580. Inspirada en el pensamiento humanista cristiano de Santo Tomas de Aquino, promueve la formación integral de las personas, en el campo de la educación superior, mediante acciones y procesos de enseñanza-aprendizaje, investigación y proyección social, para que respondan de manera ética, creativa y critica a las exigencias de la vida humana y, para que estén en condiciones de aportar soluciones a las problemáticas y a las necesidades de la sociedad del país.

La USTA hace presencia en cinco ciudades del país con sedes y seccionales en Bogotá, Bucaramanga, Medellín, Tunja y Villavicencio en la modalidad presencial y 23 Centros de Atención Universitaria CAU en la modalidad Abierta y a Distancia. Este modelo de educación se generó en 1975 al interior de la Vicerrectoría de Universidad Abierta y a Distancia, VUAD, quien es hoy la encargada de orientar, extender y regionalizar los programas y carreras universitarias en los principales centros urbanos y regiones del país.

Dentro de los programas que ofrece la USTA, se encuentra la Licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas, en la cual existe una práctica pedagógica llamada proyectos transversales con énfasis en ciencias naturales, que tiene como objetivo, "Proponer alternativas de solución a las problemáticas y necesidades sociales del entorno estudiantil mediante el desarrollo de proyectos educativos en los que el docente en formación integre el conocimiento disciplinar de las áreas obligatorias de la educación básica". (Universidad Santo Tomás, 2016, p2). Esta práctica exige no sólo pensar en las dificultades de aprendizaje de las matemáticas sino en el tejido que con otras áreas se puede elaborar.

¿Qué es un Proyecto Transversal?

En Colombia, los proyectos transversales son propuestos en la Ley General de Educación como una invitación a entrelazar las diferentes asignaturas vistas con contenidos transversales referentes a: la democracia, la protección del medio ambiente y la sexualidad, con el fin de crear una articulación de conceptos, saberes y prácticas, así como, incentivar el dialogo, la construcción y el fortalecimiento del razonamiento y la toma de decisiones en diferentes situaciones para dar significado a conceptos que se encuentran implícitos en el contexto del estudiante.

Para el caso particular del proyecto, nos enfocamos en el programa de educación ambiental, ya que este promueve el análisis y la comprensión de problemas y potenciales de las diferentes regiones y genera espacios de participación de la comunidad educativa, la cual puede promover soluciones acordes a los conocimientos socioculturales. Todo esto debía estar enlazado con conceptos matemáticos propuestos por el currículo nacional.

Huerta Comunitaria

En este marco de la educación ambiental, la huerta parte como una solución a una necesidad de la comunidad educativa cuya pretensión es mejorar la calidad de vida para todos los miembros de la misma; es considerado un trabajo comunitario dado que involucra tanto a los estudiantes como a los docentes, padres de familia y demás integrantes que puedan hacer parte de esta. El proyecto de huerta comunitaria surge en medio de la necesidad de entender la soberanía alimentaria, en un lugar donde las personas no tienen tierra para cultivar. Entonces la huerta es una intención de organizar otras formas de cultivo, en terrazas, llantas, botellas etc, que permitan a las personas proveerse de algunos vegetales o plantas medicinales sin la necesidad de recurrir a comprarlos. Han participado de esta huerta estudiantes, padres, y vecinos de la institución, quienes han aportado su conocimiento agrícola, pues la mayoría proviene de regiones campesinas del país. Adicionalmente en la huerta se retoman los conocimientos ancestrales Muiscas, por ser el territorio en el cual está anclado el colegio y del cual hace parte históricamente.

La huerta en el colegio

Particularmente en este colegio la huerta no solo es concebida como un proyecto de ciencias naturales, en términos del cuidado del ambiente, el reciclaje y demás temas relacionados. La huerta es un espacio de reconstrucción comunitaria de las relaciones con la madre tierra, los otros seres, como las plantas, el agua, etc y los seres humanos. Allí retoman saberes ancestrales de la comunidad indígena Muisca, de la localidad de Bosa, en Bogotá. Esta situación complejizó aún más las dudas que teníamos frente a nuestra acción docente. Iniciamos la práctica en el colegio sin tener claro cómo iba a ser la metodología. Adicionalmente a las dificultades ya enunciadas, yo había cursado algunas materias de matemáticas en otra universidad, de manera presencial, tenía un arraigo muy fuerte en la manera como se enseñan matemáticas antes descrita, pues así las había aprendido y totalmente citadina, sin experiencia alguna en cultivo. Todo era novedoso.

Durante el año 2015, nos dedicamos a aprender, junto con mi compañero Mauricio Bermúdez, también estudiante de licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas, técnico agropecuario del SENA, campesino de nacimiento, con la tierra muy en lo profundo de su ser, lo referente a cultivar, a elaborar abono, a construir estructuras para semilleros o plantularios. Tuvimos dos experiencias de sembrado con resultados poco alentadores, pues en la primera ocasión las plantas no crecieron como era de esperarse. Para la segunda vez nuestro conocimiento mejoró y aunque el sembrado fue exitoso no supimos cómo comunicar, tanto estos conocimientos como los matemáticos, a los niños y niñas que nos acompañaron. Al final del año 2015 ya tuvimos una idea más clara de cómo desarrollar todos estos procesos.

Figura 1. Siembra de hortalizas. (Elaboración propia)

Contexto de la práctica

Con este marco de fondo iniciamos una práctica en el colegio San Bernardino, ubicado en el barrio de mismo nombre, perteneciente a la localidad de Bosa, sur en Bogotá, los días sábados, es decir en horario extracurricular. Cada semana asistíamos los dos estudiantes de práctica junto con nuestra tutora Blanca Peralta y 12 niños y niñas de la institución, pertenecientes al grado octavo. En esta institución desarrollan una iniciativa de huerta comunitaria desde hace varios años a la cual pidieron que hiciéramos parte los docentes en formación. Al enfrentarnos a esta situación nos surgieron varios interrogantes ¿Tiene alguna relación la huerta comunitaria con las matemáticas?, ¿Cómo se puede enseñar conceptos matemáticos haciendo uso de la huerta comunitaria? y ¿Cuál será el resultado obtenido al hacer de las matemáticas una experiencia vivencial cercana al contexto en el que se encuentran los estudiantes del colegio?

Primera parada

Cuando iniciamos en 2015, nosotros mismos no teníamos claro cómo se relacionaban las matemáticas y la huerta, por ello nos reuníamos cada semana a discutir lo que haríamos y cómo lo haríamos y en medio de estas discusiones permanentemente aparecía la pregunta por el "conocimiento matemático". Fue realmente retador pensar en otras formas de "hacer clase". Particularmente porque era un espacio extracurricular y voluntario y lo que menos deseábamos era repetir las situaciones de clase que se vivían entre semana.

Como enuncian Bilbao y Monereo (2011), pasamos por situaciones llamadas "incidentes críticos", los cuales están definidos como "situaciones conflictivas o problemáticas concretas que más desestabilizan y preocupan a los docentes, con el fin de dotarles de herramientas verdaderamente eficaces" (p 137). Según Rice, 2002; Howard y Markauskaite, 2009; Sutherland, Scanlon y Sperring, 2005 (como se cita en Bilbao y Monereo 2011), estos IC se dan porque la formación docente de pregrado y postgrado se han organizado de manera poco eficiente, ya que ésta ha estado orientada de dos maneras; por un lado, una formación basada en conceptos, poco arraigados a las realidades de los sujetos que están en las aulas, y de otro lado "por una práctica poco supervisada en las que los docentes en formación elaboran concepciones y creencias implícitas y próximas a una forma de ―sentido común, conformado por prejuicios y teorías paracientíficas, que serán muy difíciles de neutralizar y modificar". No era claro para nosotras cómo conectar los conceptos matemáticos que habían sido "enseñados" en las disciplinas de matemáticas específicamente y tampoco era claro cómo hacer la organización grupal de esta nueva forma de abordar las ciencias.

En el primer año, 2015, cada semana conversábamos con los niños y las niñas y nos dimos cuenta de la concepción de ser maestro y aprender las matemáticas que ellos tenían. Ellos decían que las matemáticas se aprenden haciendo ejercicios en el cuaderno y que el profesor primero debe explicar cómo se hacen para luego ellos replicar estas formas. Nosotros como docentes en formación compartíamos esta manera de pensar respecto a cómo se enseña y se aprende matemáticas, por ello aparecía la crisis cada vez que pensábamos en planear las sesiones siguientes. Así que, lo que tratamos de abordar en esta práctica fue la posibilidad de cambiar esa formación centrada en conceptos y tener otras comprensiones de lo que significa aprender y enseñar matemáticas.

Con este panorama menos obscuro, conversamos más a profundidad con nuestra tutora, este grupo de trabajo fue productivo en la medida en que abordábamos la pregunta ¿qué vamos a hacer? Desde las miradas particulares y comunes. Así notamos que las matemáticas que yo veía, mi compañero no las percibía y los conceptos agropecuarios que él tenía yo no los conocía, por lo que se volvía un aprendizaje mutuo.

A diferencia de las planeaciones normales de clase, cuando trabajamos en la huerta, estamos supeditados a sus requerimientos, entonces nuestras planeaciones dependían del tiempo, el clima, las plagas y demás situaciones de la vida cotidiana de un sembrado. En las conversaciones le pedíamos a mi compañero que nos contara cuáles eran las actividades para realizar, luego yo buscaba la marera de entrelazar estos conceptos con las matemáticas inmersas en los trabajos propuestos por él. Fue en estas conversaciones que configuramos las siguientes tres etapas:

La primera fase se caracteriza por poco acercamiento y enunciación de los conceptos matemáticos; aquí nos enfocamos en la comprensión de la relación ser humano y madre tierra.

Para la segunda fase y sólo como entrada, estructuramos tareas de medición sistemática de las plántulas, y los componentes del compostaje, así como la clasificación de los residuos a reciclar y la proporción entre tierra y cascarilla de arroz para abonarla.

Figura 2. Explicación inicial de la siembra de plántulas. (Elaboración propia)

Con esta información iniciamos la tercera fase, aquí estructuramos una charla al inicio y una al final. En la charla inicial tanto mi compañero como yo, dábamos las instrucciones sobre las actividades del día, mostrando las relaciones con ciertos conceptos matemáticos y recogíamos la información recolectada por los niños y niñas; la información era organizada en tablas para analizarlas. De esta manera los niños y niñas se acercaron al concepto de proporcionalidad desde el compostaje, pues los componentes del compostaje son tierra abonada y residuo orgánico y la proporción para este proceso es una parte de tierra por dos de residuo orgánico. También realizaron las mediciones de crecimiento de las plantas, con estas medidas pudieron detectar cuales semanas fueron propicias para el crecimiento. De otro lado, al sembrar las plántulas es necesario considerar el espacio entre ellas, así, los niños y niñas realizaron mediciones de las distancias.

Qué encontramos. Aprendizajes

Podemos decir que hasta el momento esta metodología ha generado en los estudiantes y los niños y las niñas, un gran interés en el cuidado de las plantas, en la elaboración de rituales previos a la siembra, lo que nos conecta con las tradiciones de nuestra tierra y en la aplicación de conceptos matemáticos en un entorno real.

Para mí, no ha sido fácil romper todos los prejuicios que traía de la acción docente. Ya que, históricamente, las instituciones esperan que los docentes enseñen los temas propuestos en un ambiente dirigido exclusivamente por el profesor y únicamente en el salón de clase. La práctica realizada en la huerta ha sido un espacio en el que he tenido la oportunidad de aprender que las matemáticas no sólo se comprenden realizando ejercicios en el cuaderno, sino que, como afirma D´Ambrosio (2008), se aprenden en la solución de problemas de los seres humanos. Además, me ha servido para romper mis propios esquemas y ver más allá; ya que he comprendido que las matemáticas pueden ser encontradas en diferentes contextos fuera del salón de clase, y que estas experiencias son mucho más perdurables para todos, profesora de la práctica, docentes en formación y niños y niñas.

Al finalizar este primer tramo de la práctica, puedo asegurar que logramos tejer el estudio de las matemáticas con la huerta escolar de una manera armoniosa de tal manera que he comprendido no solo de las matemáticas como área de estudio sino de todos los aspectos relacionados con el cuidado de la huerta misma. Como lo narro, sólo realizamos conversaciones con los niños y niñas; desde estas conversaciones podemos decir que a través del registro continuo del crecimiento de las plantas junto con el pesaje de las cosechas hizo que la estadística y las medidas de peso tuvieran un contexto desde el cual pudieran ser interpretadas y comprendidas por los niños y niñas. Así mismo mejoraron la estimación de longitudes y áreas; la comprensión de la proporcionalidad en el contexto del compostaje y su habilidad para tomar datos estadísticos. Así fue como encontramos un niño experto en proporcionalidad desde la elaboración del compostaje, pues podía saber la medida exacta de cada uno de los elementos que los componen y cómo se relacionaban estas cantidades, también fue ventajoso que este mismo niño pudo explicarles a sus otros compañeros cómo funcionaba el compostador y en qué debían fijarse para lograr las proporciones correctas.

En palabras de Garii y Silverman (2009) lo que hicimos, en conjunto con mi compañero y nuestra tutora, fue acercar el vocabulario de las matemáticas fuera del aula de clase, al vocabulario que usualmente se usa en las aulas de matemáticas. Nuestra experiencia fue otro camino para acercar las matemáticas escolares a las matemáticas de la vida diaria, puesto que, para comprender el mundo desde los ojos de las matemáticas no es suficiente que los niños y niñas repliquen ejercicios del tablero o resuelvan problemas del libro. Esperamos que otras personas se animen a seguir este camino pues consideramos importante establecer discusiones con los docentes sobre la relación que tiene las matemáticas con todas las actividades del ser humano, con ello será posible ofrecerles a los estudiantes “ojos” para explorar el mundo en el que viven.

Hasta ahora vamos aquí, creo que tenemos mucho por descubrir, construir y tejer en el camino de identificar qué matemáticas tiene la huerta, cómo las detectamos, las aprendemos, las comunicamos y de manera más general, qué matemáticas tiene la vida fuera del aula.

Referencias bibliográficas

Bilbao, G, & Monereo, C. (2011). Identificación de incidentes críticos en maestros en ejercicio: Propuestas para la formación permanente. *REDIE: Revista Electrónica De Investigación Educativa*, *13*(1), 135-151

D’Ambrosio, Ubiratan. (2008). Etnomatemática. Eslabón entre las tradiciones y la modernidad. Mexico: Limusa, Cideccyt.

Garii, B, & Silverman, F. (2009). Beyond the Classroom Walls: Helping Teachers Recognize Mathematics Outside of the School. *RELIME. Revista Latinoamericana De Investigación En Matemática Educativa*, *12*(3), 333-354.

Universidad Santo Tomás. (2016). Syllabus Proyecto transversal en ciencias naturales y educación ambiental.

IDONEIDAD ECOLÓGICA E INTERACCIONAL DE UN PROCESO DE INSTRUCCIÓN MATEMÁTICO PARA DESARROLLAR COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN EL NIVEL UNIVERSITARIO

Rosa Eulalia Cardoso Paredes, Norma Rubio Goycochea, Maritza Luna Valenzuela
Pontificia Universidad Católica del Perú. (Perú)
rcardoso@pucp.pe, nrubio@pucp.edu.pe, luna.m@pucp.edu.pe

Resumen
En este trabajo mostramos un análisis de las idoneidades ecológica e interaccional de procesos de instrucción en un curso de matemáticas impartido a estudiantes del primer ciclo universitario de Estudios Generales que incluye carreras de Ciencias Sociales y Humanas, a partir de un experimento de enseñanza planificado, experimentado y rediseñado. El análisis se realiza considerando las facetas ecológica e interaccional de la idoneidad didáctica propuestas en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, 2011). Es decir, mostramos algunas de las condiciones que deben seguir unos contenidos matemáticos para promover el desarrollo de competencias matemáticas de los futuros profesionales no matemáticos logradas a partir de un curso de matemáticas.

Palabras clave: idoneidad ecológica, idoneidad interaccional, competencia matemática.

Abstract
In this paper we show an analysis of the ecological and interactional suitability of instructional processes in a mathematics course taught to students of the first university cycle of general studies that includes social and human sciences degrees, from a planned, experienced, and redesigned teaching experiment. The analysis is carried out considering the ecological and interactional facets of the didactic suitability proposed in the Onto-semiotic approach (OSA) (Godino, 2011). That is to say, we show some of the conditions that some mathematical contents should follow to promote the development of mathematical competences of the future non-mathematical professionals achieved from a mathematics course.

Key words: ecological suitability, interaction suitability, mathematical competence

Introducción

En Rocard, Csermely, Walwerg-Henriksson y Hemmo, (2007) se informa sobre la percepción de los europeos acerca de las ciencias (naturales y matemáticas) y su enseñanza, enfatizando en el interés decreciente de los jóvenes por estas áreas e indicando que solo el 15% de las personas están conformes con su enseñanza. Estos datos alertan no solo a los países europeos sino también a nuestros países (Estrada,

2011) pues indican el estado en el que se encuentran las ciencias por falta de profesionales que las enseñen y las consecuencias que ello puede tener en el futuro próximo.

Ante lo anterior, los datos citados permiten hacer unas hipótesis para el caso de la matemática en el Perú: La primera es, los profesionales que enseñaron matemáticas lo hicieron con la mejor voluntad para cubrir la necesidad de las instituciones, seguramente unos fueron buenos, otros malos y otros regulares; sin embargo, a pesar que se ha logrado medallas de oro olímpicas en matemáticas, en el otro grupo (el masivo) se refleja la frase "el Perú aún no supera la media en las evaluaciones internacionales de PISA". La segunda hipótesis es que los matemáticos que enseñan en las universidades, que deben promover las competencias matemáticas profesionales en las distintas áreas del conocimiento, no logran transmitir adecuadamente los contenidos matemáticos necesarios para que estos aparezcan en el momento oportuno y por ello, el rechazo a las matemáticas de las personas que las estudian. No quedando ahí el rechazo y el descontento, sino que, además, lo transmiten a sus hijos, a sus grupos culturales en los que están interactuando en su día a día o a sus compañeros de trabajo.

En Cardoso, Rubio y Luna (2017), se ubica a la didáctica de la matemática como un área o rama de la matemática aplicada, coincidiendo con D´Ámore y Fandiño-Pinilla (2017):

> "…hace tiempo sugerimos que se puede interpretar la DdM como una disciplina interna a la matemática misma, una matemática aplicada, precisando aún más, aplicada a la problemática de la enseñanza – aprendizaje de la matemática" (D´Ámore y Fandiño-Pinilla, 2017, p. 5)

porque entendemos desde nuestra práctica, que una de las tareas es de resolver problemas, en este caso, de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Tarea que, de cumplirse, permite el desarrollo de las condiciones para que cualquier profesional que sale al mercado laboral pueda desempeñarse eficientemente si hace uso de la matemática. Es decir, desde esta visión, para enseñar matemáticas debemos tener conocimientos matemáticos que permitan ese logro; además, de las herramientas pedagógicas y tecnologías necesarias (obligación social que todo profesional al impartir matemáticas debe cumplir).

Según la nueva legislación peruana (MINEDU, 2014), en todas las universidades existe un curso de Matemática 1 o Matemática Básica que, en muchos casos, es impartido para todas las especialidades y por diferentes profesionales (matemáticos y no matemáticos), Por tanto, en cualquier aula puede existir la composición de un grupo de estudiantes que se matriculan en un horario elegido, como sucede en la Unidad Académica de Estudios Generales.

Tabla 1: Número de estudiantes de un horario de clase de MAT155

Estudiantes de Estudios Generales Letras (EEGGLL) matriculados en Matemática Básica (MAT155)	
Carreras / especialidades	**N° de estudiantes**
Derecho	32
Ciencias de la Comunicación (Comunicación para el desarrollo, Publicidad, Periodismo, Comunicación audiovisual)	20

Ciencias Sociales (Arqueología, Sociología, Ciencia Política) Gestión y alta Dirección	3
Artes Escénicas (Teatro, Danza y Música)	2
Letras y Ciencias Humanas (Psicología, Geografía, Ciencias de la Información)	2

La investigación

Ya que las sumillas de los cursos son generales y con el fin de contribuir a que todos los alumnos de las profesiones que componen los EEGGLL no reciban los contenidos del curso de matemáticas en las mismas condiciones; es decir, los mismos temas, la misma metodología y evaluación, así como, sugerir que la metodología no sea la misma, es decir: un profesor de curso, responsable de las clases magistrales y un jefe de prácticas, si lo hay, que ejecute las clases del profesor a través de prácticas resueltas (sin calificación) y prácticas calificadas resueltas individualmente cuidadas por docente policía, que desde nuestra experiencia sabemos ha sucedido, observamos ciertos cambios en el desarrollo del curso MAT155. Por ello, consideramos profundizar a que se debían y en que contribuían, por lo que decidimos preguntamos: ¿Cuáles son las condiciones que permitan la emergencia de competencias matemáticas útiles en la vida profesional de estudiantes de carreras consideradas del área de Letras?

Para responder a esta pregunta nos fijamos el objetivo de analizar desde el EOS las idoneidades: ecológica e interaccional de los procesos de instrucción en el curso de MAT155 de la Unidad Académica de Estudios Generales Letras (EEGGLL) de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Esta elección se hace con el fin mostrar la comunicación y el trabajo interdisciplinar que puede darse entre las distintas profesiones que integran los grupos de trabajo para presentar el "trabajo sobre el uso de las Matemáticas (TSUM)" en equipo y se justifica con las profesiones en una sección u Horario de clase asignado a cada docente (Tabla 1).

En ese sentido, consideramos pertinente tomar en cuenta algunas herramientas teóricas que Godino (2011) y sus colaboradores proponen. Nos referimos a los criterios de idoneidad para analizar las actividades de las clases, las mismas que utilizamos para analizar la implementación y desarrollo del curso MAT155. Consideramos que estos criterios ayudarían a mejorar la práctica docente en el sentido de lograr involucrar a los estudiantes en sus aprendizajes de contenidos matemáticos, que los harán competentes en sus desempeños profesionales. La intención de ese necesario involucramiento también es que, como lo indica Freudenthal (1999), la matemática es una actividad humana, razón por la cual la hace universal y accesible a todos los humanos. Situaciones que nos permiten considerar que todos podemos hacer matemáticas (tanto matemáticos como no matemáticos) cuando relacionamos el mundo real con el mundo abstracto. Si hacemos posible que esa relación, que por muchos años ha hecho que los problemas de su aprendizaje se agudicen, hasta llegar a escuchar "yo estudio historia porque no llevaré matemáticas", cambie.

Además, desde la didáctica de la matemática, particularmente desde EOS, la competencia matemática también:

> "…es entendida como una capacidad para realizar adecuadamente tareas matemáticas específicas, debe complementarse con la comprensión matemática de las técnicas necesarias

> […] y las relaciones entre los diversos contenidos y procesos matemáticos puestos en juego…" (Godino, 2002).

Sin embargo, en complementación a esta definición y necesaria para este trabajo, desde nuestro punto de vista, la competencia matemática también es el uso de unas herramientas matemáticas para resolver problemas y dar respuesta a necesidades (cotidianas o académicas), poniendo en funcionamiento los contenidos matemáticos haciendo uso de capacidades personales cognitivas y morales (por los estudiantes o por cualquier ciudadano común). Es decir, todos podemos ser matemáticamente competentes, en el desempeño de nuestros oficios o profesiones.

Por lo anterior, en esta propuesta, la idoneidad de las actividades en los procesos de instrucción del curso MAT155 se analiza haciendo uso de los criterios o facetas de idoneidad didáctica del EOS, los mismos que para nosotros, además, serán las categorías a priori de análisis. En las clases de matemáticas, la propuesta de estas categorías es concebida como una adecuación y pertinencia general de las acciones realizadas por los agentes educativos (docentes, alumnos, sistemas educativos), de los conocimientos puestos en juego y de los recursos usados en un proceso de estudio matemático.

La metodología de análisis para el caso de un curso de Matemáticas

Si bien la estructura de los documentos de concreción de las intenciones de una institución educativa (universidad) en muchos casos pueden tener el mismo formato y los contenidos matemáticos (números y operaciones, funciones reales de variable real y estadística) son los mismos de cursos de matemáticas anteriores, los cambios pueden estar en otras partes o fases del proceso de planificación. Para realizar los cambios que se proponen en el curso MAT155, analizamos las facetas de la idoneidad propuesta por el EOS: la idoneidad ecológica y la idoneidad interaccional. A continuación resumimos este análisis en las tablas siguientes:

Tabla 2. Idoneidad ecológica. Adaptada de Godino (2011)

<table>
<tr><th colspan="2">Idoneidad ecológica</th></tr>
<tr><td colspan="2">La unidad académica de los EEGGLL diversifica contenidos que se enseñaban a los estudiantes considerando los ya existentes y necesarios e introduciendo otros, que fueran una intersección de uso en las diversas áreas. La creación de otros cursos de Matemáticas (MAT128) que hoy son Matemáticas para Economía, Matemática 1 para Gestión, Matemática Básica para CC HH y Sociales (PUCP. 2017).</td></tr>
<tr><th>Sub-Categorías</th><th>Algunos indicadores/evidencias de cambio</th></tr>
<tr><td>Adaptación del currículo</td><td>- Los contenidos matemáticos diversificados y adecuados para las carreras de Antropología, Sicología, Geografía, Derecho, Sociología, Lingüística, Historia, Artes Escénicas.
- Implementación de actividades, metodologías y evaluaciones adecuadas y que se corresponden con las directrices que, las carreras profesionales de los Estudios Generales Letras necesitan.</td></tr>
</table>

Apertura hacia la innovación didáctica	- Innovación basada en la práctica reflexiva de los docentes y la misma produce investigación y rediseño cada semestre académico. - Se integran las tecnologías de la información (TIC) (calculadoras, computadoras, celulares, tabletas, etc.) en el desarrollo de las clases, las evaluaciones individuales o colaborativas/cooperativas. Los materiales de clase se adelantan en las plataformas de la universidad.
Adaptación socio-profesional y cultural	- Los contenidos matemáticos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes de las carreras de CC. SS. y HH. y los hacen competentes al identificar problemas de sus profesiones que serán resueltos necesariamente desde la aplicación de la matemática. En la solución deben ser creativos para incluir, en lo posible, todos los contenidos matemáticos considerados en el sílabo del curso.
Educación en valores	- En las actividades diarias, evaluaciones individuales y trabajo final se proponen y se motivan al estudiante a hacerse preguntas que contemplan la formación en valores éticos, democráticos al solicitarles la interpretación, argumentación y valoración de los casos, muchos de ellos reales y otros simulados. - Se enfatiza en la ética que debe primar al resolver un caso difícil.
Conexiones intra e interdisciplinares	- Los contenidos se eligieron para atender a las diferentes carreras profesionales, lo que permite la relación directa con contenidos intra e interdisciplinares. Además, permite mostrar unas matemáticas muy cercanas a sus profesiones y en otros casos, ser base para otros cursos que les corresponda llevar, como es el curso de Estadística.

La puesta en ejecución de un curso, en cualquier sistema educativo, tiene etapas en las que se consideran: la planificación de los contenidos, la metodología de trabajo, la elección de los materiales, los tipos de evaluaciones, entre otras. En este trabajo también describiremos la planificación y ejecución (metodología) de la clase, puesto que allí es donde podremos garantizar la interacción que se debe establecer entre los docentes, medios o materiales y la forma de enfrentar esa interacción que luego se verá reflejada en la evaluación como evidencia de lo que han aprendido.

Tabla 3. Idoneidad ecológica. Adaptado de Godino (2011)

Idoneidad interaccional
Es una categoría significativa en el proceso de enseñanza-aprendizaje del curso MAT155, ya que permite planificar las configuraciones y trayectorias didácticas que hagan, por una parte, identificar conflictos semióticos y que se han detectado a priori, y por otra parte, permite resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.

Sub-categorías	Algunos indicadores/evidencias de cambio
Interacción docente del curso (presencial y virtual) y los estudiantes	- En esta subcategoría, no podemos registrar evidencias para poder realizar una observación sistemática de las acciones de los docentes; sin embargo, por el número de alumnos que no aprueban el curso (15% de 65 alumnos) la interacción se puede valorar como buena, considerando el bajo número de desaprobados. - Existen espacios de resolución de las tareas en la que los alumnos interactúan con los docentes y los asistentes del profesor del curso, preguntando sus dudas (en forma presencial). - Lo interacción no comienza en el momento presencial de la clase, sino desde el momento que el profesor hace público los contenidos en el campus virtual y los alumnos tiene la oportunidad de adelantar leyendo lo que se les enseñará. A esta etapa, la llamamos interacción virtual.
Interacción entre los alumnos del curso y otros agentes (Las TIC)	- De acuerdo a lo planificado en el curso, se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes en el momento de presentar la solución propuesta de los ejercicios o para la solución de los ejercicios propuestos, para lo que se organizan en grupos, Esta etapa es presencial. - A pesar del número de estudiantes (65), no deja de ser posible que, en los momentos de solución de ejercicios, los estudiantes muestren a sus demás compañeros la validez de sus afirmaciones y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos. Esta interacción se puede ver en el proceso de elaboración de los trabajos finales que son consultados en momentos de la clase. - La organización de los grupos para trabajar en las clases, es aleatoria. Sin embargo, no se puede evitar la exclusión entre ellos cuando se juntan los que creen saber más matemáticas, o los que creen ser más responsables.
Autonomía	- Si bien el curso tiene un diseño clásico, donde la interacción profesor- alumno pareciera frontal; desde esta propuesta, consideramos que hay espacios y actividades que fomentan la autonomía de los estudiantes. Estos espacios son, por ejemplo, el uso de los materiales en el campus virtual, así como, la elaboración de un trabajo grupal para ser desarrollado durante todo el semestre. En este trabajo se permite la conexión de los contenidos tratados en el curso y aplicados a las profesiones que ellos pretender ejercer. La organización de los grupos puede variar en ser grupos homogéneos (de la misma profesión) grupos heterogéneos (de distintas profesiones). Esta conformación ayuda a trabajar todas las competencias blandas que son tan necesarias para el siglo XXI.
Evaluación formativa	- Una de las características importantes de este curso es que la evaluación es continua; es decir, todas las clases se evalúa a través de las actividades individuales o colaborativas/cooperativas, permitiendo que

	después de cada evaluación se realice una retroalimentación en relación a los errores más frecuentes, así como, se observe cuantitativamente lo que mejor se aprendió. Lo anterior permite que, tanto los alumnos como el docente, vayan prediciendo resultados y previniendo fracasos, en las evaluaciones individuales como en los exámenes parciales. - La evaluación formativa se concreta con la presentación del trabajo final de cada grupo de estudiantes, donde dan cuenta de sus competencias matemáticas adquiridas a través de su capacidad de comunicar sus resultados de solución al problema que ellos se plantearon.

La idoneidad de un proceso educativo generalmente no es fácil de separar. Por ello, en esta parte describimos la interacción entre facetas analizadas anteriormente y las mostramos en la siguiente tabla.

Tabla 4. Interacción entre facetas. Adaptado de Godino (2011)

Interacciones entre facetas	
Las interacciones que se incluyen se operativizan en los indicadores de idoneidad relativos a las facetas de acuerdo lo que se observa en la práctica del curso de Matemática Básica (MAT115).	
Componentes	**Evidencias**
Epistémica-ecológica	- El curso propone problemas de contextos variados que incluyen situaciones de la vida cotidiana, el campo de trabajo y desde la matemática misma por tratar de atender a diferentes futuros profesionales. Los contenidos matemáticos son impartidos por matemáticos y con formación en didáctica de las matemáticas. - Los profesores con categoría de asistentes califican en el mismo sentido.
Cognitiva-afectiva-interaccional	- Las actividades promueven que las explicaciones dadas por los estudiantes incluyan argumentos matemáticos que pueden surgir a partir de las descripciones de procedimientos realizados. - Los contenidos matemáticos que se incluyen en el sílabo del curso MAT155 son escogidos con la intención de que el estudiante se involucre con estos contenidos pues muchos de ellos permiten resolver problemas del día a día, con adaptaciones apropiadas y que promueven el acceso y el logro de aprendizajes de los mismos por la mayoría de los estudiantes. El número de alumnos que NO logran calificación aprobatoria oscila entre el 15% y 20%. - La presencia de actividades evaluadas con puntajes en forma permanente hace que los alumnos asistan obligatoriamente. Perder ese puntaje puede ser decisivo en su nota final. - Se logra que aprendan a optimizar su trabajo mediante la evaluación permanente que se realiza.

Ecológica-instruccional: el docente y su formación profesional	- La primera actividad de ejecución del curso se realiza con los profesores que imparten lo imparten y es la elección del docente que coordina el curso y los docentes que comparten la tarea. Como MAT155 es un curso masivo, se ha establecido una coordinación colegiada de todos los docentes. - Los profesores que lo imparten son profesionales matemáticos, ingenieros, economistas, profesores de secundaria, entre otros. La característica común es que todos tienen una maestría en enseñanza de la matemática o en matemática pura. Esta característica garantiza la idoneidad epistémica de los contenidos del curso fijada por la unidad académica donde se desarrolla.

Algunos avances y reflexiones

- Como profesores tratamos de mostrar los contenidos de manera pertinente para motivar el uso instrumental o funcional de la matemática. Además, promovemos que los profesionales de las ciencias sociales y humanas, si bien no van a ser expertos en el uso de modelos matemáticos sofisticados, por lo menos sepan que estos están ahí para cuando los necesiten.

- La riqueza de la forma de planificación, ejecución y evaluación del curso permite a los docentes y alumnos una interacción más efectiva, así como ir modelando y prediciendo los desempeños de los estudiantes.

- Las características de los estudiantes, el tipo de planificación y el desarrollo de las actividades permiten que se considere que la idoneidad ecológica e interaccional sea elevada.

- Las actividades realizadas en el curso promueven el uso de la tecnología en las clases sobre todo en la construcción de gráficas (función lineal o cuadrática) que ayudan a comprender mejor, pues allí es donde se concreta el modelo matemático.

- La retroalimentación de los profesores a los estudiantes, hecha a la hora de clase al revisar sus actividades, ayuda a reforzar los contenidos matemáticos tratados durante el ciclo.

Algunas conclusiones

Los estudiantes logran ver una aplicación directa de los contenidos del curso a su vida profesional al desarrollar el trabajo de aplicación de las matemáticas. A pesar de traer ideas diametralmente opuestas a lo que es saber, y saber hacer matemáticas, se dan cuenta de que son erradas estas ideas y las transforman durante el desarrollo de las actividades del curso.

Hoy como antes, existen matemáticos que cuestionan los tipos de matemática, así como las formas como se hacen o imparten en las aulas. Sin embargo, pensamos que unas formas u otras son necesarias, lo que nos lleva a repensar que hay discursos que debemos reflexionarlos para cada una de las culturas. Con los juegos de lenguaje son los que siempre debemos tener cuidado.

Si bien hay cursos diseñados por objetivos, consideramos que esto no impide que la intensión del docente sea que, sus estudiantes logren competencias matemáticas a partir de su intervención y que ello puede ser a través de la clases magistrales o haciendo una mezcla de lo magistral y las metodologías activas, aprendizaje colaborativo entre pares o mediado directamente por el docente, puesto que lo importante en la vida de una persona no es llenarse de contenidos, sino que los que tiene, debe utilizarlos de la manera más óptima; es decir, saber para hacer y hacerlo bien, con ética y responsabilidad.

La competencia matemática no es un enunciado sino el significado (Rubio, 2012) que cada persona tiene de la matemática, al logro que se haya podido obtener después de una intervención pedagógica, en este caso, en la universidad y lo evidencia en cualquier situación.
El peso que debe tener las actividades que implican las idoneidades de interacción y ecología es que el peso de estas actividades debe ser el mismo que los procedimientos clásicos como es el examen parcial o final, que lo ejecutan de una manera totalmente individual, vigiladas por dos o tres personas, en algunos casos durante tres horas, sin poder ni mirar ni conversar con otros que están ahí pero que cada quien enfrenta lo suyo de una manera totalmente competitiva e individual lo que no favorece esa convivencia.

Referencias bibliográficas

Cardoso, R., Rubio, N. y Luna, M. (2017) Escenarios para promover Competencias Matemáticas en la Universidad., *Selecciones Matemáticas.* 04(02): 242-250 (2017). http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM/article/view/1631

D´Amore, B. y Fandiño-Pinilla, M. I. (2017) Reflexiones teóricas sobre las bases del enfoque ontosemiótico de la Didáctica de la Matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en: enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Estrada W., Gago, A., Rodríguez, J., Solís, J., Zela, F. (2011) *La educación Universitaria en Física en el Perú. Una aproximación al tema*. Academia Nacional de Ciencias. Perú. http://181.177.232.117/anc28.1/images/stories/informes/informefinalfisicacorregido.pdf

Freudenthal, H. (1991) *Revisiting mathematics education: China lectures.* Dordrecht; Boston: Kluwer Academic Publishers.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22, (2/3), 237–284.

Godino, J. (2011) Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática* (CIAEM-IACME), Recife (Brasil). http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf

Ministerio de Educación del Perú (2014) Nueva ley universitaria: Por una educación de calidad para nuestros jóvenes. http://www.minedu.gob.pe/reforma-universitaria/pdf/ley_universitaria.pdf

Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP. 2017). *Plan de estudios de Los Estudios Generales Letras.* http://facultad.pucp.edu.pe/generales-letras/informacion-para-estudiantes/plan-de-estudios/

Rocard, M., Csermely, P., Walwerg-Henriksson, H., & Hemmo, V. (2007). *Science Education "Now". A Renewed Pedagogy for the Future of Europe.* Directorate-General for Research Science. Economy and Society. European Commission.

Rubio (2012) *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos*. Tesis doctoral. Universidad de Barcelona.

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

CREENCIAS DE PROFESORES ACERCA DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Nancy Marquina Molina, Gustavo Martínez Sierra
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
nmarquina@uagro.mx, gmartinezsierra@gmail.com

Resumen
En las últimas décadas, el estudio de las creencias de profesores ha cobrado gran relevancia debido a que estas constituyen un elemento fundamental en la manera en que los profesores actúan profesionalmente en el aula (Handal, 2003, Cooney, Shealy, Arvold, 1998; Beswick, 2012). De ahí la importancia de estudiar las creencias matemáticas de los profesores, esto es, sus creencias acerca de la naturaleza y funcionamiento de las matemáticas así como aquellas creencias relacionadas con su enseñanza y aprendizaje. La presente investigación, de corte cualitativo y exploratorio, tiene como objetivo identificar las creencias matemáticas de once profesores, así como sus posibles relaciones entre ellas. En este reporte, presentamos los avances referentes a sus creencias acerca del aprendizaje de las matemáticas. Los datos fueron obtenidos de cuatro actividades realizadas dentro del propedéutico para su ingreso a una maestría en docencia y a través de un Análisis Temático (Braun y Clarke, 2006) y con apoyo del software ATLAS.ti se analizaron los datos.

Palabras clave: creencias matemáticas de profesores

Abstact
In the last decades, the study of teachers' beliefs has become very important because they constitute a fundamental element in the way teachers act professionally in the classroom (Handal, 2003, Cooney, Shealy, Arvold 1998; Beswick, 2012). That's why it is important to study teachers' mathematical beliefs, that is, their beliefs about the nature and functioning of mathematics as well as those beliefs related to its teaching and learning. The present qualitative and exploratory research aims to identify the mathematical beliefs of eleven teachers, as well as their possible relationships among them. In this report, we present only the research findings regarding their beliefs about mathematics learning. The data were obtained from four activities carried out within the introductory course for the admission to a master's degree in teaching and through a Thematic Analysis (Braun and Clarke, 2006). With the support of ATLAS.ti software the data were analyzed.

Key words: teachers' mathematical beliefs

Introducción

El estudio de las Creencias ha sido explorado desde hace ya algunas décadas en el ámbito educativo. Se distinguen aquellos que centran su atención en las creencias de los alumnos acerca de la matemática y su relación con su desempeño académico, hay quienes han investigado las influencias que tienen las creencias de los profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje con sus prácticas educativas (Beswick, 2012, entre otros). Es importante mencionar que a ese conjunto de creencias acerca de la naturaleza de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, le denominaremos creencias matemáticas.

El estudio de las creencias matemáticas de profesores ha cobrado gran relevancia al interior de nuestra disciplina, debido a que estas constituyen un elemento fundamental en la manera en que los profesores actúan profesionalmente en el aula (Handal, 2003, Beswick, 2012).

Sin embargo, a pesar de su importancia, son pocas las investigaciones que han puesto atención a las creencias de los profesores de matemática fuera de campo, esto es, profesores que están frente a grupo, pero que su formación no fue la de profesor de matemáticas. En México, esta característica es común en la mayoría de los profesores de nivel medio superior y superior. Es por ello que la presente investigación, de corte cualitativo y exploratorio intenta aportar elementos para conocer las creencias matemáticas de once profesores que no fueron formados para ser profesores de matemáticas. Es así que nos planteamos las siguientes preguntas de investigación: ¿cuáles son las creencias matemáticas de profesores fuera de campo?, ¿cuáles son las relaciones entre sus creencias acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje?

Marco conceptual

En la literatura no existe un acuerdo sobre la definición de una creencia, sin embargo, de acuerdo con Skott (2015) al hacer una revisión de las diversas investigaciones acerca de creencias de profesores logró identificar cuatro aspectos que constituyen el núcleo del concepto: (1) "las creencias se utilizan generalmente para describir las construcciones mentales individuales, que son subjetivamente ciertas para la persona de que se trate" (p. 18), (2) "hay aspectos cognitivos, así como afectivos en las creencias, o por lo menos las creencias y los problemas afectivos son vistos como inextricablemente ligado, aunque considerado distinto" (p. 18), (3) "las creencias se consideran en general reificaciones temporal y contextualmente estables que pueden cambiar sólo como resultado del compromiso sustancial en las prácticas sociales relevantes "(p. 18) y (4)" se espera que las creencias influyan significativamente en la forma en que los profesores interpretan y se relaciona con los problemas de la práctica "(p. 19).

En resumen, las creencias conceptuales de los de los profesores "se utilizan para designar construcciones mentales individuales relativamente estables, que son verdades subjetivamente cargados de valores y son los resultados de las experiencias sociales sustanciales y tienen un impacto significativo en las interpretaciones y contribuciones de los profesores para la práctica en el aula" (Skott, 2015, p. 19).

En este artículo, consideramos que una creencia se refiere a cualquier cosa que un individuo considere verdadera (Beswick, 2005). En términos generales, consideramos la definición de Pajares (1992, p.18), para quien una creencia es "el juicio de un individuo de la verdad o la falsedad de una proposición”.

Metodología

El estudio es de corte cualitativo y exploratorio dado que actualmente, en México se ha investigado poco respecto a las creencias matemáticas de profesores fuera de campo.

Participantes y contexto

Para la realización de esta investigación, participaron once profesores: siete mujeres y cuatro hombres, sus edades estaban entre los 24 y los 58 años; daban clases de matemáticas en el nivel medio superior y superior. Sus años de servicio como docentes variaban entre 5 y 28 años, su formación académica previa era muy variada, había ingenieros industriales, licenciados en física y matemáticas, actuarios y solo dos licenciados en la enseñanza de las matemáticas. En el momento que se tomaron los datos, ellos estaban tomando un curso propedéutico para su ingreso a una maestría en docencia, modalidad en línea. Por tal motivo, los participantes, si bien en su mayoría eran de nacionalidad mexicana, hubo 2 extranjeros.

Recolección de datos

Los datos fueron obtenidos de cuatro actividades realizadas dentro del propedéutico impartido en la misma modalidad en línea. Las actividades fueron: un cuestionario con dos secciones, una de datos generales y otra de preguntas abiertas, entre las cuales se hacían las siguientes preguntas:

- ¿Qué son las matemáticas?
- ¿Qué es aprender matemáticas?
- ¿Qué es enseñar matemáticas?
- ¿Qué es una buena clase de matemáticas?
- ¿Qué es un buen(a) alumno(a) de matemáticas?
- ¿Qué es un buen(a) profesor(a) de matemáticas?

Otra de las actividades fue un chat de a lo más tres participantes guiado por las preguntas abiertas del cuestionario, en esa actividad los participantes intercambiaban sus diferentes puntos de vista, otra de las actividades fue un foro en el cual los temas estaban guiados nuevamente por las preguntas abiertas en el cuestionario, en estos foros se solicitó a los participantes mayor detalle en sus respuestas antes expuestas y por último una entrevista a profundidad guiada por el cuestionario inicial.

Análisis de los datos

Para el análisis de los datos nos basamos en el Análisis temático teórico (Braun y Clarke, 2006, 2012). El análisis temático es un método que permite identificar, organizar, analizar en detalle y proporcionar patrones o temas a partir de una cuidadosa lectura y relectura de la información recogida y así inferir resultados que propicien la adecuada comprensión/interpretación del fenómeno en estudio (Braun y Clarke, 2006). (Braun y Clarke, 2006, p. 82.): "Un tema capta algo importante acerca de los datos en relación a la pregunta de investigación y representa un cierto nivel de respuesta con dibujos o significado dentro del conjunto de datos". Es por ello que, este método fue una forma de identificar lo que es común entre los participantes ya que en este caso nos interesa identificar las creencias matemáticas de los profesores.

También nos apoyamos con el software ATLAS.ti, este es un programa de análisis cualitativo asistido por computadora que permite asociar códigos o etiquetas, en este caso lo hicimos a partir de extractos de texto, pero también se puede utilizar audios, videos y otros formatos digitales; posteriormente el mismo programa ayuda a clasificarlos.

De esta manera, consideramos que el análisis realizado con ayuda del software facilita el análisis, dado que permite ahorrar tiempo y facilita la revisión de los procesos de análisis, ya que el mismo programa permite crear proyectos denominados "Unidades hermenéuticas" (UH) que incluyen documentos primarios que pueden ser trabajados de manera individual y a su vez en la globalidad. En este caso, cada documento primario se asoció a cada profesor y cada uno de esos documentos contiene el cuestionario, la entrevista, los contenidos de los foros y chats en los cuales participaron cada uno de los profesores. Así, la UH estuvo constituida por 11 documentos primarios.

Siguiendo las fases propuestas para el análisis temático se procedió a la realización del mismo. La figura 1 sintetiza el proceso del análisis temático.

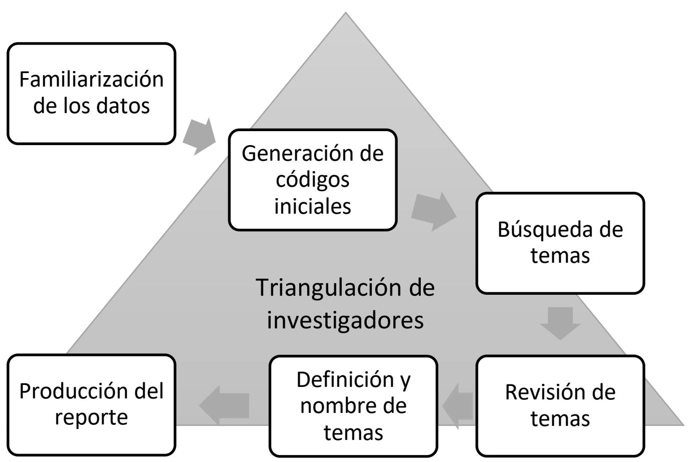
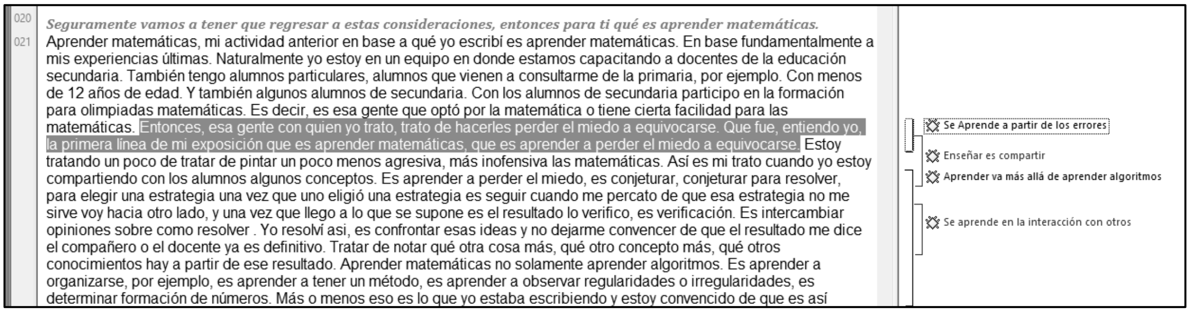


Figura 1. Proceso del análisis temático (Elaboración propia)

A continuación se describen cada una de las fases de este proceso, desde esta investigación.

• *Familiarización con los datos*. A partir de los documentos primarios, desde la UH, se realizó una lectura repetida de cada uno de ellos. Esta fase es importante dado que el investigador se familiariza con la información obtenida de cada uno de los participantes, lo cual es fundamental en la siguiente etapa. Sin embargo es necesario mencionar que la lectura repetida de los datos no solo se realiza en esta primera fase, siempre que sea necesario se regresa a ellos.

• *Generación de códigos iniciales*. Para hacer esta primera generación de códigos fue necesaria la primera fase en la cual se leyó repetidamente cada uno de los documentos primarios asociados a cada profesor. En esta fase se agruparon todas las declaraciones con significado similar y a estas declaraciones se les asignó un código asociado a lo que es común en ellos. Cabe mencionar que, al hacer la codificación, en un extracto puede haber más de un código asociado a él. La figura 2 muestra un ejemplo esta situación.



020 *Seguramente vamos a tener que regresar a estas consideraciones, entonces para ti qué es aprender matemáticas.*

021 Aprender matemáticas, mi actividad anterior en base a qué yo escribí es aprender matemáticas. En base fundamentalmente a mis experiencias últimas. Naturalmente yo estoy en un equipo en donde estamos capacitando a docentes de la educación secundaria. También tengo alumnos particulares, alumnos que vienen a consultarme de la primaria, por ejemplo. Con menos de 12 años de edad. Y también algunos alumnos de secundaria. Con los alumnos de secundaria participo en la formación para olimpiadas matemáticas. Es decir, es esa gente que optó por la matemática o tiene cierta facilidad para las matemáticas. Entonces, esa gente con quien yo trato, trato de hacerles perder el miedo a equivocarse. Que fue, entiendo yo, la primera línea de mi exposición que es aprender matemáticas, que es aprender a perder el miedo a equivocarse. Estoy tratando un poco de tratar de pintar un poco menos agresiva, más inofensiva las matemáticas. Así es mi trato cuando yo estoy compartiendo con los alumnos algunos conceptos. Es aprender a perder el miedo, es conjeturar, conjeturar para resolver, para elegir una estrategia una vez que uno eligió una estrategia es seguir cuando me percato de que esa estrategia no me sirve voy hacia otro lado, y una vez que llego a lo que se supone es el resultado lo verifico, es verificación. Es intercambiar opiniones sobre como resolver . Yo resolví asi, es confrontar esas ideas y no dejarme convencer de que el resultado me dice el compañero o el docente ya es definitivo. Tratar de notar qué otra cosa más, qué otro concepto más, qué otros conocimientos hay a partir de ese resultado. Aprender matemáticas no solamente aprender algoritmos. Es aprender a organizarse, por ejemplo, es aprender a tener un método, es aprender a observar regularidades o irregularidades, es determinar formación de números. Más o menos eso es lo que yo estaba escribiendo y estoy convencido de que es así

Figura 2. Ejemplo de diferentes códigos asociados a un solo extracto. (Elaboración propia)

Una vez generados todos los códigos iniciales, acomodamos cada uno de ellos en tres categorías: Matemáticas, Enseñar Matemáticas y Aprender Matemáticas. La siguiente tabla muestra los códigos iniciales de aprender matemáticas,

Tabla 1. *Códigos iniciales relacionados con Aprender Matemáticas*

- Aprender Matemáticas es aplicarlas en diferentes contextos
- Aprender Matemáticas es identificarlas en diferentes contextos
- Aprender va más allá de aprender algoritmos
- Aprender es desarrollar procesos del pensamiento
- Para aprender se requiere de interés y disposición
- De los errores también se aprende
- Se aprende construyendo y descubriendo
- Se aprende Compartiendo con otros
- Se aprende en la interacción con otros
- Se aprende estudiando
- Se aprende practicando, repitiendo
- Se aprende resolviendo problemas

• *Búsqueda de temas.* En esta fase se hizo una triangulación con otra de las investigadoras que forman parte de esta investigación, esto con la intención de hacer una revisión minuciosa de los códigos iniciales en un marco menos subjetivo. Después de la triangulación de investigadores y a partir de los códigos generados inicialmente, se buscaron algunas relaciones entre ellos para establecer familias de códigos que fueron considerados temas potenciales. De esta forma se nombraron los temas potenciales de tal forma que englobaran las ideas que se desprendían de cada uno de ellos.

La figura 3, muestra un ejemplo de cómo se encontraron algunas relaciones, en este caso entre dos códigos iniciales (los cuales pueden verse también en la tabla 1) y el tema potencial que surgió en ese proceso:

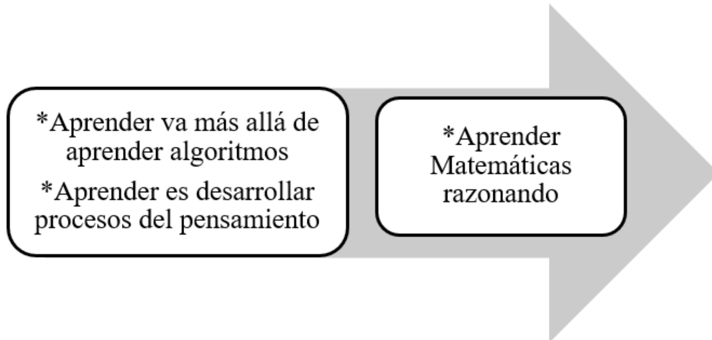


Figura 3. Ejemplo de Búsqueda de temas potenciales a partir de códigos iniciales

• *Revisión de temas.* Una vez nombrados los temas potenciales, estos se contrastaron con los extractos asociados a cada uno de ellos. Nuevamente en esta fase fue de vital importancia la triangulación entre investigadores, se discutió la correspondencia con los datos, en algunos casos se establecieron nuevamente en agrupaciones de temas iniciales y se eliminaron temas que no tenían suficiente evidencia para englobar las ideas de los profesores, generando así los nuevos temas. Cabe mencionar que en algunos casos, los temas potenciales sufrieron modificaciones en la manera de nombrarlos o en su descripción. La figura 4 muestra la modificación en su redacción de uno de los temas potenciales, el cual también es referido en la figura 3.

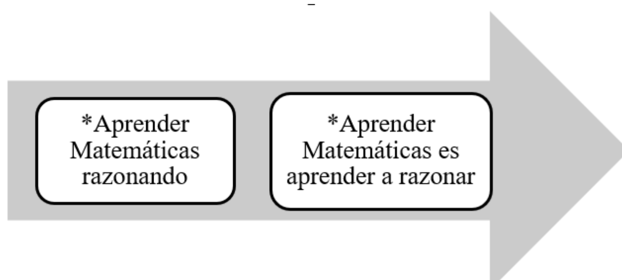


Figura 4. Ejemplo de la modificación de un tema potencial después del proceso de Revisión. (Elaboración propia)

• *Definición y nombre de temas*. Una vez establecido el conjunto de temas finales se redactó la descripción de cada tema / creencia y se nombró cada tema con una proposición que reflejara la creencia de los profesores. Agrupando así, las diferentes creencias, en este caso haremos referencia únicamente a aquellas relacionadas con aprender matemáticas.

La figura 5 ejemplifica la descripción de uno de los temas finales generados en esta fase, tomamos el tema final considerado en la figura anterior (Figura 4).

Aprender Matemáticas es aprender a razonar

Esta es una creencia compartida por 7 de 11 profesores. Ellos refieren que aprender matemáticas es desarrollar procesos del pensamiento tales como el razonamiento y la lógica.

Figura 5. Ejemplo de la descripción de un Tema. (Elaboración propia)

• *Producción del reporte*. Esta fase consiste en la redacción de un informe final y como puede observarse, aún no llegamos a esta fase. Por ello, una vez que identifiquemos todas las creencias matemáticas y encontremos las posibles relaciones entre ellas, se elaborará el reporte final.

Resultados preliminares

Hasta el momento se han identificado ocho creencias relacionadas con aprender matemáticas. La tabla 2 muestra cada una de ellas así como su frecuencia de aparición, asociada con cada profesor.

Tabla 2. Creencias acerca de Aprender Matemáticas

		Carlos	Juan	Julián	Marisa	Pilar	Rocío	Sandra	Saraí	Viviana	Xavier	Zastal
Creencias acerca de Aprender Matemáticas	Para aprender matemáticas es importante la interacción en el aula	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	Para aprender matemáticas se requiere de interés y disposición	*		*	*	*	*	*	*	*	*	*
	Aprender Matemáticas es aprender a aplicarlas o usarlas	*		*	*		*	*	*	*		*
	Aprender Matemáticas es aprender a razonar		*	*	*	*				*	*	*
	Se aprende matemáticas resolviendo problemas	*	*					*		*	*	*
	Se aprende matemáticas estudiando fuera de clases		*	*	*						*	*
	Se aprende matemáticas a partir de los errores		*		*				*		*	
	Se aprende matemáticas construyendo y descubriendo la matemática	*	*	*	*							

En la siguiente sección se describen dos de las creencias acerca de aprender matemáticas y posteriormente se anexan algunos de los extractos que hacen referencia a ellas. Es importante mencionar que en los extractos se resalta en letra cursiva aquellas frases o palabras que se relacionan con la descripción de la creencia.

Para aprender matemáticas es importante la interacción en el aula.

Esta es una creencia compartida por 11 de 11 profesores, ellos argumentan que para que haya aprendizajes, son importantes las diferentes interacciones en el aula. Mencionan que estas interacciones puede ser entre profesor- alumno, en donde el profesor puede explicar algo de la clase; otra de las interacciones es alumno-profesor, en donde los alumnos puedan expresar sus dudas o bien propuestas de solución y la interacción entre los alumno- alumnos, en donde refieren hay un intercambio de ideas entre ellos o bien cuando un alumno pueda explicarle algo de la clase a otro de sus compañeros.

> *Juan Carlos*: [Aprender Matemáticas] *Es colaborar, socializar confrontando ideas, cuestionando. Es intercambiar opiniones sobre cómo resolver*. Yo resolví así, *es confrontar esas ideas* y no dejarme convencer de que el resultado me dice el compañero o el docente ya es definitivo
> *Rocío*: [Una buena clase de matemáticas es] Interactiva, dinámica para que el alumno no sea solamente observador, *que interactúen maestro alumno y también con los demás compañeros*. […] Que el alumno también realice actividades que no sea solamente copiar.

Aprender Matemáticas es aprender a razonar.

Esta es una creencia compartida por 7 de 11 profesores. Ellos refieren que aprender matemáticas es desarrollar procesos del pensamiento tales como el razonamiento y la lógica.

> *Juan Carlos:* Yo pienso que *aprender matemáticas es aprender a razonar* […] Aprender Matemáticas *es saber preguntarse. Es pensar e imaginarse estrategias.* […] *Un buen alumno de matemáticas es aquel que va aprendiendo a ser metódico, prioriza la razón cuando va a afirmar o desmentir ciertas posiciones.* Es un alumno cuyas respuestas *tienen algún ordenamiento, tienen algún fundamento lógico.*
> *Pilar:* Para mí *aprender matemáticas es lograr el desarrollo del pensamiento lógico, crítico y metodológico* que yo le llamo para poder resolver situaciones y problemas que se nos presenten no importando que sean en la vida o en un salón de clases. Eso *mediante la búsqueda de información, análisis, discriminación y organización.*

Reflexiones finales

Los resultados aquí expuestos son apenas un avance de lo que se tiene hasta el momento, sin embargo, aún se está trabajando en la elaboración de los demás temas y con ello se espera identificar las creencias de los profesores acerca de lo que son las matemáticas y aquellas que están relacionadas con su enseñanza. Como lo hemos dicho anteriormente, también nos interesa conocer las relaciones que puede haber entre las diferentes creencias matemáticas. Además faltaría analizar qué implicaciones tiene el hecho de que los participantes en su mayoría sean profesores que no fueron formados para serlo y además que en el momento de la toma de datos estuvieran en un propedéutico para su ingreso en una maestría en docencia.

Referencias bibliográficas

Beswick, K. (2012). Teachers' beliefs about school mathematics and mathematicians' mathematics and their relationship to practice. *Educational Studies in Mathematics*, 79 (1), 127-147.

Beswick, K. (2005). The beliefs/practice connection in broadly defined contexts. *Mathematics Education Research Journal*, *17*(2), 39–68.

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, 3, 77–101. doi:10.1191/1478088706qp063oa

Cooney, T., Shealy, B., & Arvold, B. (1998). Conceptualizing belief structures of preservice secondary mathematics teachers. *Journal of Research in Mathematics Education*, 29(3), 306–333

Handal, B. (2003). Teachers' Mathematical Beliefs: A Review. *The Mathematics Educator* 13 (2), 47–57

Pajares, M. F. (1992). Teachers' Beliefs and Educational Research: Cleaning Up a Messy Construct. *Review of Educational Research*, 62(3), 307–332.

Skott, J. (2015). The promises, problems, and prospects of research on teachers' beliefs. In H. Fives & M. G. Gill (Eds.), *International Handbook of research on teachers' beliefs* (pp. 13– 30). New York, NY: Routledge.

UN ESTUDIO SOBRE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN EL CONTEXTO DE LA REFORMA INTEGRAL DE LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR EN MÉXICO

Silvia Elena Ibarra Olmos
Universidad de Sonora. (México)
sibarra@mat.uson.mx

Resumen
La reforma curricular para los niveles educativos mexicanos obligatorios (4-18 años) aplicó íntegramente desde 2011, aunque en bachillerato, (15-18 años), empezó a operar desde 2008. Este artículo expone los resultados de un estudio realizado entre 2014 y 2016, cuyo objetivo fue conocer cómo se concretó, para el caso de la educación matemática, dicha reforma. Con base en herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, se analizaron libros de texto, programas de materia y prácticas áulicas de docentes; los resultados permitieron contrastar formulaciones curriculares con lo que ha venido sucediendo en la realidad y establecer algunas conclusiones sobre el tema.

Palabras clave: mathematic curriculum, competencias matemáticas, bachillerato

Abstract
The curricular reform for Mexican compulsory educational levels (4-18 years-old) was completely applied from 2011, although, in high school (15-18 years-old) it started from 2008. This paper shows the outcomes of a study carried out between 2014 and 2016, with the aim of knowing how such reform was materialized in mathematics education. Based on theoretical tools of the Onto-semiotic Approach of Mathematical Knowledge and Instruction, mathematical textbooks, syllabuses and teachers' classroom practice were analyzed. The results allow us to contrast curricular assumptions with what has actually been happening, and also, to get to some conclusion on the topic.

Key words: mathematics curriculum, mathematical competences, high school

Introducción

La Reforma Integral de la Educación Básica (RIEB), y la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS), constituyen el nodo de los cambios curriculares impulsados por las autoridades educativas mexicanas en los últimos tiempos, pues cubren los niveles educativos cuya obligatoriedad está declarada por el estado mexicano (4-18 años). Estas reformas aplicaron de manera conjunta desde 2011, aunque para bachillerato, (15-18 años), se empezó a operar desde 2008.

En el caso de la RIEMS, una de sus características principales es que toma el desarrollo de competencias como enfoque unificador de los diferentes planes de estudio implementados por los distintos tipos de bachillerato que habían venido coexistiendo en el país (general, tecnológico, etc.); esto es, declara como uno de cuatro ejes fundamentales el establecimiento de un Marco Curricular Común (MCC), basado justamente en el desarrollo de competencias en los estudiantes.

Formalmente, el MCC

> …comprende una serie de desempeños terminales expresados como (I) competencias genéricas, II) competencias disciplinares básicas, (III) competencias disciplinares extendidas (de carácter propedéutico) y (IV) competencias profesionales (para el trabajo). Todas las modalidades y subsistemas de la EMS compartirán el MCC para la organización de sus planes y programas de estudio. Específicamente, las dos primeras competencias serán comunes a toda la oferta académica del Sistema Nacional de Bachillerato.
> Una competencia es la integración de habilidades, conocimientos y actitudes en un contexto específico. (Diario Oficial de la Federación [DOF], 2008, s/p).

Como se acaba de señalar, las competencias a desarrollar en los estudiantes son de distintas categorías: las más importantes son las genéricas (transversales a la formación del bachiller) y las específicas (relativas a cada campo disciplinar). En el caso de las matemáticas, se declaran ocho competencias por desarrollar, entre ellas: 1) Construir e interpretar modelos matemáticos vía la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales; 2) Formular y resolver problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques, (Acuerdo Secretarial 442, s/p)

La RIEMS, además de las competencias establecidas para los estudiantes, también señala una serie de competencias docentes, necesarias para que los profesores estén en condiciones de promover las competencias de sus alumnos. De las ocho competencias docentes se resaltan: a) Planificar los procesos de enseñanza y de aprendizaje atendiendo al enfoque por competencias, ubicándolos en contextos disciplinares, curriculares y sociales amplios; b) Llevar a la práctica procesos de enseñanza y de aprendizaje de manera efectiva, creativa e innovadora a su contexto institucional. (Acuerdo Secretarial 447, s/p.)

Después de cinco años de la puesta en marcha de la RIEMS, se diseñó un proyecto de investigación cuyo propósito fundamental fue conocer, para el caso de la educación matemática, los niveles de concreción de la Reforma; esto para dos elementos que se consideran básicos: los textos, planes y programas de estudio, en tanto representantes de los materiales de apoyo para la actividad docente, así como la propia actividad docente. Cabe hacer la aclaración que en abril de 2017, fue publicado un nuevo ajuste curricular en el bachillerato, denominado Nuevo Modelo Educativo, el cual entró en vigor en agosto del mismo año. En el estudio que se reporta, no se toman en consideración estas modificaciones, debido a la fecha en la cual fueron puestas en operación.

En la primera etapa de la investigación en cuestión, las preguntas versaron sobre cuáles son las prácticas institucionales promovidas en programas de materia y textos del bachillerato y cómo se relacionan dichas prácticas institucionales con la versión de competencias que se están promoviendo. En este caso se tomó como tema matemático de interés las series y sucesiones de números; para la segunda etapa se llevó a cabo una descripción de las prácticas operativas y discursivas sobre las ecuaciones cuadráticas durante su trabajo áulico sobre el tema ecuaciones cuadráticas.

Elementos teóricos y consideraciones metodológicas

Teóricamente la investigación tuvo como soporte herramientas del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007). Para el análisis documental (programas y textos), se planteó determinar la llamada trayectoria epistémica, la cual consiste en la distribución en el tiempo de la enseñanza de los componentes del significado institucional propuesto por cada institución educativa. La trayectoria epistémica descansa en las nociones de configuración epistémica, sistemas de prácticas, objetos y procesos matemáticos.

La configuración epistémica no es otra cosa que la red de objetos matemáticos que intervienen y emergen a partir de lo que dice y hace un individuo o institución (conglomerado de individuos) al enfrentar un campo de problemas. Estos discursos y acciones en su conjunto se denominan teóricamente sistemas de prácticas operativas y discursivas, constituyendo integradamente lo que se conoce como el significado de un objeto matemático.

Es conveniente perfilar que la noción de objeto se considera como una de las nociones básicas de la teoría, existiendo una tipología bien definida de ellos: elementos lingüísticos, situaciones-problemas, conceptos-definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos. En el terreno de los procesos matemáticos tenemos como ejemplo a la idealización, la representación, la significación, la particularización, la generalización, etc.

Esta sección de la investigación requirió de la selección de tres instituciones representativas de bachillerato del estado mexicano de Sonora, y en consecuencia del análisis de los programas de materia y textos que cada una de ellas empleaba en ese momento, específicamente para el tema de series y sucesiones de números.

Para poder realizar el análisis se tuvieron que construir las configuraciones epistémicas presentes en los textos, identificando previamente los objetos matemáticos primarios. A partir de las configuraciones fue posible ubicar los procesos relacionándolos con las competencias matemáticas. Es pertinente aclarar que las competencias matemáticas, tal y como están declaradas, no permitían establecer claramente las relaciones buscadas, por lo que hubo que construir una serie de atributos para cada una de ellas, es decir una especie de descriptores que volviesen operativa la identificación buscada.

En cambio, para la segunda etapa, el estudio se efectuó basándose en el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (Godino, 2009), el cual es una herramienta que permite la pormenorización del conglomerado de conocimientos puestos en juego por el sujeto de investigación durante el desarrollo de sus prácticas tanto discursivas como operativas. Para ello se deben considerar seis facetas (epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica), en cuatro niveles de análisis (prácticas didácticas y matemáticas; configuración de objetos y procesos; normas y metanormas y la idoneidad didáctica).

Metodológicamente lo que se hizo fue un estudio de casos, donde las técnicas de investigación utilizadas fueron el análisis ontosemiótico de textos, así como la observación no participante y la entrevista semiestructurada a dos profesores seleccionados bajo ciertos criterios. Recordemos que aquí el tema matemático en estudio fue el de las ecuaciones cuadráticas.

Resultados

1) La operación de la primera etapa produjo una serie de resultados, algunos preliminares que pueden encontrar en Miranda e Ibarra, 2016; otros completos, organizados y sistematizados en Miranda, 2016. En este último trabajo se exponen de manera completa y detallada, lo que ahora se mostrará de manera muy resumida.

En la institución 1, con base en el análisis realizado se advierte que se propone en los estudiantes la promoción de algunas competencias ligadas al pensamiento algebraico, pues una práctica frecuente es pasar de situaciones particulares que luego se busca generalizar mediante una expresión algebraica, contrariamente a lo que sucede en las instituciones 2 y 3, donde el énfasis es puesto en el manejo del álgebra como un lenguaje, lo cual se intenta lograr mediante la formulación de una buena cantidad de ejercicios de traducción del lenguaje verbal al algebraico y recíprocamente.

En el texto de la institución 1 el desarrollo de la actividad áulica es propuesta a partir de la resolución de situaciones en contextos intra y extra matemáticos, en momentos de trabajo individual, por equipo y grupal, en una intención de creación de ambientes de aprendizaje, de conducción de discusiones y finalmente cerrando con un proceso de institucionalización (formalización de las nociones matemáticas que emergen de las propias situaciones y de sus discusiones).

En la institución 2 se aprecia que el texto sugiere que el profesor sigue siendo teniendo un papel principal, supeditando las acciones del estudiantado a sus indicaciones, sin momentos para el trabajo independiente. Por su parte la institución 3 involucra en su texto espacios para la investigación y el trabajo extra clase, aunque el trabajo de aula sigue poniendo de manifiesto la dependencia de la actividad del alumno de la actividad del maestro.

2) Resultados parciales de la operación de la etapa 2 del estudio se pueden encontrar en Llanes, Ibarra y Hernández, 2016, así como en Llanes e Ibarra, 2017; en tanto que el reporte íntegro se encontrará en Llanes, 2016.

En este caso, la información que se generó mediante la estrategia metodológica señalada con anterioridad debió organizarse acorde a las seis facetas ya mencionadas con anterioridad: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica. Se reporta brevemente cada una de ellas. Los sujetos de estudio serán denominados A y B.

a) Faceta epistémica: Consiste en la identificación de los conocimientos matemáticos de los profesores, relativos al contexto institucional, que son puestos en juego en el aula. También incluye la distribución temporal de los contenidos relativos a las ecuaciones cuadráticas. En este aspecto, los dos profesores manifestaron coincidencias en privilegiar la construcción de las representaciones algebraicas de ecuaciones cuadráticas, a partir de enunciados verbales.

Es tan poco el tiempo que ambos dedican al tema, violentando con ello lo establecido en el programa de materia, que realmente su esfuerzo en la dirección mencionada no genera grandes resultados.

b) Faceta cognitiva: Se busca describir el conocimiento del profesor sobre cómo va progresando el proceso de aprendizaje y los conocimientos del alumno con relación al tema de interés. En este sentido ambos coinciden en los conocimientos previos con los que sus alumnos deben contar y tienen identificados los posibles conflictos que vivirán sus alumnos, pero los abordan de manera diferente. El profesor A, de mayor experiencia, los trata de prevenir mediante ejemplos que va desarrollando a lo largo de la clase, en una intención de evitar su surgimiento. En contraparte, el profesor B, de menor experiencia los asume como parte de lo que necesariamente deben experimentar, tanto alumnos como él mismo. Estos conflictos fundamentalmente se centran en dificultades en cuanto a las traducciones de expresiones verbales en expresiones algebraicas.

c) Faceta afectiva: Consiste en identificar las reacciones del profesorado con respecto a los estados afectivo-emocionales de los estudiantes enfrentados a las situaciones y/ problemas con los cuales trabajarán. A ambos aparentemente les interesa promover la participación estudiantil para identificar casos problemáticos y darles atención especial, usando el recurso de las “preguntas dirigidas”, el cual no pareció rendir grandes resultados, por lo menos en la fase de observación.

d) Faceta mediacional: Ésta descansa en la descripción de los recursos y formas de uso que emplean los profesores en su práctica docente. En este sentido los profesores manifiestan destrezas en la operación de algunas herramientas tecnológicas, pero argumentando carencia y falta de equipamiento en las aulas, no pudieron rescatarse evidencias, pues no se manejaron otros recursos más allá de la pizarra y los gises.

e) Faceta interaccional: Se busca identificar los patrones de interacción, en cualquier dirección, que los profesores promuevan en el aula. Aquí básicamente se identificó el patrón unidireccional de relación profesor-alumno, manifestándose también ausencia por ambos docentes de procesos de negociación de significados, de argumentación estudiantil. Las intervenciones de los alumnos se restringen a la formulación de preguntas muy elementales.

g) Faceta ecológica. En esta faceta se pretende determinar qué tanto conoce el profesor sobre la relación del contenido matemático puesto en juego (las ecuaciones cuadráticas), con otras esferas del conocimiento, o con el entorno social y familiar de sus alumnos. Hay fuertes evidencias de que los dos docentes conocen bien las relaciones curriculares que el tema tiene en el ámbito matemático, pues continuamente hacen referencia a “que los van a necesitar cuando estén en la universidad, o cuando estudien la caída libre en física”. Desafortunadamente esto queda a nivel discursivo y nunca se proporciona, aunque sea a nivel de ejemplo, algún caso que dote de funcionalidad extra matemática a las ecuaciones cuadráticas.

Para cerrar este apartado, se señalará que, con relación a las competencias docentes establecidas por la RIEMS, la mayor fortaleza de ambos profesores radica en su conocimiento de lo que sus instituciones educativas les proponen como programa de asignatura. En contraparte, se limitan a trabajar lo que desde su interpretación consigna este documento. Dado que éste todavía carece de la incorporación explícita de muchos de los planteamientos de la Reforma, se limita la operación de los mismos, en lugar de convertirse en un apoyo fuerte para la labor docente.

La carga epistémica del programa es alta, y el tiempo del cual se dispone no se corresponde, por lo que se llega con frecuencia a eliminar aquellos temas que desde la perspectiva de los profesores serán estudiados posteriormente, o cuya ausencia no dañará el desempeño posterior de los alumnos.

Conclusiones

El análisis de la información derivada del análisis de textos y documentos nos lleva a concluir que cada una de las tres instituciones estudiadas promueve interpretaciones disímbolas de lo que son las competencias matemáticas, concepciones diferentes del tema matemático en estudio, e impulsan, desde los libros y programas, procesos de enseñanza y aprendizaje no necesariamente convergentes entre sí, ni con lo que la Reforma establece.

Por otro lado, en el conocimiento didáctico-matemático manifestado por los profesores observados, hay gran influencia del programa oficial y de los correspondientes textos, aunque son capaces de adaptar lo establecido a las características de sus estudiantes. Un aspecto que se considera importante reportar es el hecho de sus competencias docentes están muy alejadas de la promoción de las competencias matemáticas que la RIEMS propugna, aunque es posible encontrar algunos destellos e iniciativas embrionarias en este sentido.

Es claro que un proceso de reforma curricular trae aparejada una gran cantidad de modificaciones en diferentes aspectos. También es necesario que transcurra un cierto lapso para que muchos de esos cambios se acepten y se lleven a la realidad, para efectivamente poder hacer estudios sobre la formación de los egresados y poder valorar la conveniencia o no de esos procesos de cambio curricular. Pero cuando no se encuentran evidencias contundentes de que se están llevando a cabo, se carece de elementos que permitan emitir elementos de juicio sobre sus bondades o debilidades.

En otro orden de ideas, se piensa que estudios como el presente alguna información brindan para poder hacer investigaciones a mayor escala. Además de lo anterior, aparecen elementos sobre los cuales pudieran estructurarse propuestas de desarrollo profesional docente mejor dirigidas y que realmente contribuyan al crecimiento de la actividad docente. Este hecho tendría como consecuencia la formación de egresados en mejores condiciones, tanto para incorporarse al campo laboral, como para continuar sus estudios profesionales, dicotomía declarada para el bachillerato mexicano.

Referencias bibliográficas

Diario Oficial de la Federación: 26/09/2008. *Acuerdo número 442 por el que se establece el Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad*. Consultado en: http://dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5061936&fecha=26/09/2008.

Diario Oficial de la Federación: 21/10/2008. *Acuerdo número 444 por el que se establecen las competencias que constituyen el marco curricular común del Sistema Nacional de Bachillerato*. Consultado en: http://dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5064951&fecha=21/10/2008.

Diario Oficial de la Federación: 29/10/2008. *Acuerdo número 447 por el que se establecen las competencias docentes para quienes impartan educación media superior en la modalidad escolarizada.* Consultado en http://dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5066425&fecha=29/10/2008.

Font, V., Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa*, *8*(1), 67-98.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). Un Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. *The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D. (2009). Categorías de los Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20,* 13-31.

Llanes, A. L., Ibarra, S., y Hernández, J. (2016). Análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas de bachillerato sobre ecuaciones cuadráticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Llanes,A., Ibarra, S. (2017). Caracterización del conocimiento didáctico-matemático de profesores de matemáticas de bachillerato a través de su práctica operativa. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30*, 1171-1179.

Llanes, A., (2016). *Conocimiento didáctico-matemático de profesores de bachillerato en el contexto de la Reforma Integral de la Educación Media Superior*. Tesis de maestría no publicada. Universidad de Sonora. Hermosillo, México.

Miranda, D., Ibarra, S. (2016). Álgebra y el enfoque por competencias en el bachillerato. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 29*, 115-123.

Miranda, D. (2016). *Álgebra y el enfoque por competencias en el bachillerato*. Tesis de maestría no publicada. Universidad de Sonora. Hermosillo, México.

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

ANÁLISIS DE INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE DE LAS ECUACIONES LINEALES. UN ESTUDIO DE CASOS CON PROFESORES DEL BACHILLERATO MEXICANO

Raúl Alonso Ramírez Escobar, Silvia Elena Ibarra Olmos
Universidad de Sonora. (México)
raul_itnogales@outlook.com, sibarra@mat.uson.mx

Resumen
Se realizó un estudio cuyo objetivo fue caracterizar las prácticas de evaluación del aprendizaje que manifiestan profesores del bachillerato mexicano al abordar el tema de las ecuaciones lineales. Los avances que aquí se presentan consisten en la identificación, análisis y descripción de los instrumentos de evaluación propuestos e implementados por dos profesores en sus aulas. La investigación tiene sustento en herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos, propuesto por Godino y sus colaboradores. Se concluye que a pesar de la existencia de un modelo educativo basado en competencias, sigue prevaleciendo una práctica evaluativa centrada principalmente en la aplicación de exámenes escritos.

Palabras clave: evaluación del aprendizaje, profesores, ecuaciones lineales.

Abstract
A study was carried out to characterize the learning evaluation practices shown by Mexican high school teachers when dealing with linear equations. The advances presented here consist of the identification, analysis and description of evaluation tasks proposed and implemented by two teachers in their classrooms. The research is based on theoretical tools of the Onto-Semiotic Approach (OSA) of mathematical knowledge and instruction, proposed by Godino and his collaborators. It is concluded that despite the existence of an educational model based on competencies, an evaluation practice still prevails, centered mainly on the application of written exams.

Key words: evaluation of learning, teachers, linear equations.

Introducción

Desde hace ya unos años la evaluación del aprendizaje como objeto de estudio según Casanova (1997) es concebida como uno de los procesos fundamentales en la formación no sólo de los estudiantes evaluados, sino de todos los actores involucrados, enriqueciendo su quehacer a través de la colección y análisis de información, misma que permite tomar decisiones para elevar su calidad. En el caso del bachillerato en México, nivel educativo que se rige actualmente por un modelo de Educación Basada en Competencias (EBC), se cuenta con la publicación de documentos oficiales, lineamientos y acuerdos secretariales, que establecen consideraciones e incluso, ejemplifican la manera en la que los profesores deben llevar a cabo el proceso de evaluación del aprendizaje. Sin embargo, gran parte de esta información es muy genérica, pues no se mencionan ni se especifican planteamientos para matemáticas. En ese sentido, Calderón y Deiros (2003) consideran que difícilmente se avanzará hacia una enseñanza más eficaz de la matemática si no se modifican las prácticas de evaluación.

Según Goñi (2008) a pesar de la importancia que se le concede a la evaluación, existe una opinión generalizada entre los profesores de que los criterios e instrumentos utilizados en el aula de matemáticas, han evolucionado muy poco, a pesar de los cambios desarrollados en las diferentes propuestas curriculares. Por su parte Villardón (2006) expresa que se evalúa el aprendizaje matemático estereotipadamente, con instrumentos inadecuados y sin informar al alumnado las condiciones de evaluación de su propio aprendizaje. Menciona que quizás, por ello, es uno de los aspectos que más ansiedad e inseguridad produce en estudiantes y profesores.

En ese sentido, uno de los factores que se señalan dentro del contexto del modelo de EBC, es que se recomienda que los profesores cuenten con una gama de herramientas de evaluación que les permitan conocer el nivel de desarrollo de las competencias de sus estudiantes, siendo éstas el conjunto de saberes, habilidades y actitudes de una persona que la facultan para desarrollar una tarea (Villardón, 2006); situación que hace posible la existencia de diferentes instrumentos, formas y momentos de evaluación.

Marco teórico

En esta investigación el propósito ha sido identificar cómo es que los profesores del bachillerato mexicano, en su práctica cotidiana, concretizan la evaluación del aprendizaje de las ecuaciones lineales. Por ello se planteó como pregunta de investigación *¿Qué instrumentos utilizan profesores de álgebra de bachillerato al evaluar el aprendizaje de las ecuaciones lineales?* Las herramientas teóricas que sustentan la realización de esta investigación, (significado institucional evaluado, sistemas de prácticas, objetos matemáticos primarios y procesos) han sido tomadas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (Godino & Batanero, 1994; Godino, Batanero & Font 2007).

De acuerdo con el EOS, se entiende como significado evaluado al subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes matemáticos durante el proceso de instrucción (Godino et al., 2007). En ese sentido, se tuvo como propósito identificar las prácticas puestas de manifiesto por los dos profesores en estudio al evaluar los aprendizajes de la noción de ecuación lineal en el bachillerato; colección de tareas, cuestionamientos y tipos de problemas que incluyeron en las pruebas de evaluación, pautas de observación sobre los aprendizajes de sus estudiantes, identificación y resolución de dificultades, procesos de retroalimentación, entre otros aspectos que serán descritos más adelante. Dicha caracterización se realizó tomando como base la tipología de evaluación del aprendizaje de Casanova (1997) citada en Barajas (2010, p. 5), la cual consiste en clasificar a la evaluación del aprendizaje en una tipología basada en los momentos de ejecución, los fines y los agentes involucrados en ella.

Metodología

La investigación se realizó bajo un enfoque cualitativo, mediante un estudio de casos, a través del cual se identificaron los instrumentos que institucionalmente se les proponen a dos profesores a partir del currículo y documentos oficiales complementarios a éste, para evaluar el aprendizaje del tema de las ecuaciones lineales en sus estudiantes. Después se llevó a cabo el seguimiento de los sistemas de prácticas y el análisis e identificación de los instrumentos efectivamente utilizados por los dos profesores en sus respectivas aulas.

Para el estudio se seleccionaron a profesores de tipos de bachillerato diferentes: el profesor A (bachillerato tecnológico); el profesor B (bachillerato general). La integración de dichas evidencias es lo que nos permitirá formular después, cuál fue el significado institucional evaluado de cada profesor y así, poder responder a la pregunta de investigación planteada.

A partir de la siguiente sección, se describen los análisis realizados a partir de la información generada en las fases de la investigación, con lo cual se logró caracterizar a las prácticas e instrumentos empleados por los profesores para la evaluación del aprendizaje de la noción de ecuación lineal.

Con dicha información se evidenciarán algunos indicios sobre el significado de evaluación que tienen profesores de matemáticas, así como cuáles son los significados de la noción de ecuación lineal puestos en juego en la evaluación del aprendizaje de sus estudiantes al abordar dicha noción matemática

Resultados

Dado que la evaluación del aprendizaje es considerada en la actualidad como un proceso que debe de efectuarse de manera conjunta con el proceso instruccional (Goñi, 2008), se llevó a cabo la identificación de las prácticas evaluativas de los dos profesores en estudio, a través de la observación de todo el proceso de enseñanza de las ecuaciones lineales. Asimismo, se analizaron los instrumentos utilizados durante la implementación de dichas prácticas evaluativas.

A partir de estos análisis se logró hacer una identificación sobre cuáles son los significados de la noción de ecuación lineal que fueron promovidos por parte de los profesores en la evaluación de sus estudiantes, así como el tipo de tareas y problemas que se pusieron en juego en dichas prácticas. De la misma manera, esto nos permitió ampliar nuestra visión sobre cuál es el significado del proceso de evaluación que manifiestan los profesores desde la óptica de su práctica operativa.

Instrumentos empleados y significados evaluados por el profesor A

Para este profesor las prácticas evaluativas expuestas en el programa oficial de la materia, evidenciaron que debe enfocarse en verificar la resolución correcta de las situaciones-problema, así como en el cumplimiento y participación dentro de las tareas planteadas. Los instrumentos que se sugieren para ello son: cuestionarios, listas de cotejo, pruebas escritas, guías de observación, cuadros comparativos, matriz de clasificación, registro de competencias, rúbricas y escala de valores.

No obstante, al momento de ingresar al aula y llevar a cabo la observación de tipo no participante fue posible identificar un interés en dar cumplimiento tanto a las propuestas sugeridas y pretendidas por su institución, es decir, aplicar el examen diagnóstico y la ficha de autoevaluación, ambos propuestos por el libro de texto; así como preparar a los estudiantes para el día de la aplicación del examen, resolviendo y estudiando las situaciones-problemas planteadas por el mismo texto.

Durante las sesiones, las prácticas evaluativas del profesor A, se centraron en realizar cuestionamientos a los estudiantes sobre las propuestas de procesos de resolución de una ecuación, las soluciones obtenidas y sobre los argumentos necesarios para justificar tales resultados. Otra de las prácticas que se manifestó con frecuencia, fue el cuestionar a los estudiantes sobre conceptos y procedimientos que habían estudiado con anterioridad, todo esto con el fin de verificar si habían quedado claros o habían sido 'comprendidos'.

En el transcurso de las sesiones el profesor identificó dificultades manifestadas por los estudiantes al abordar las situaciones-problema planteadas. En la mayoría de las ocasiones cuando se presentaba una situación de ese tipo, el profesor iniciaba una discusión grupal en donde se formulaban nuevos cuestionamientos para poder evidenciar los errores, y con ello aclarar las dudas que se llegaban a externar por parte de los alumnos.
Sin embargo, no siempre los resultados de las discusiones fueron favorables, lo cual ocasionaba que el profesor se desesperara y terminara resolviendo los problemas, construyendo los modelos o diciendo él mismo la solución, argumentando siempre que "no era nada complejo" y asignando tareas para promover su reproducción.

A pesar de que implementó el examen diagnóstico y llevaba un registro diario sobre las conductas de los estudiantes, el profesor tenía claro que la evaluación se realizaría al final del proceso de instrucción a través de la aplicación del examen final. Este último instrumento fue una de las maneras a las que el profesor recurrió para poder valorar los aprendizajes de sus estudiantes al término del abordaje de la noción matemática en estudio.

Considerando que el examen final fue diseñado por el profesor, tomando como base las situaciones-problema del texto, así como de las prácticas implementadas y promovidas, y que a su vez, adquirió gran importancia e impacto dentro de las prácticas de evaluación del profesor A, se procedió a llevar a cabo un análisis epistémico del examen aplicado con el fin de identificar la red de objetos matemáticos intervinientes en su estructura, de tal manera que permitiera contar con una mayor cantidad de elementos para la determinación del significado evaluado.

En ese sentido, se evidenció que la estructura del examen manifestaba un interés por parte del profesor en valorar la memorización de conceptos, la modelación de situaciones-problema en contexto extramatemático y la técnica o habilidad algorítmica para dar solución a problemas en contexto intramatemático. Fue posible identificar la ausencia de lenguajes que no fueran el numérico y el algebraico, a pesar de que en algunas sesiones se llegaron a abordar situaciones en donde se hicieron presentes los lenguajes tabular y gráfico. Así también se evidenció la ausencia de argumentos y uso de proposiciones.

La primera parte del examen consistió en realizar cuestionamientos con el fin de valorar si los estudiantes lograban identificar los elementos que componen a una ecuación y sus características, así también, si podían verbalizar cada uno de estos componentes. En la segunda parte se plantearon diferentes situaciones-problema en contexto extramatemático, muy similares a las abordadas durante las sesiones de clase, donde algunas de ellas ni siquiera eran lo suficientemente complejas como para ser resueltas a través de un modelo lineal. No obstante, la estructura del examen en esta sección era de opción múltiple, donde además de ello, a los estudiantes no se les solicitó presentar los procedimientos realizados, pues era suficiente con seleccionar una de las cuatro respuestas propuestas. La última sección del examen consistió en la resolución de tres ecuaciones lineales en contexto intra-matemático.

Con base en lo anterior, fe posible concluir que el significado evaluado por el profesor A sobre la noción de ecuación lineal se centró en las acepciones de la ecuación lineal como expresión analítica y como modelo lineal.

Instrumentos de evaluación del profesor B

El sistema de prácticas propuestas en el currículo para la evaluación del aprendizaje, se enfocan en la resolución de problemas, en validar y argumentar las soluciones obtenidas y en el manejo de diferentes lenguajes y formas de representación de una ecuación lineal.
Los instrumentos que se le sugieren al profesor para dicha labor son: listas de cotejo, escalas de clasificación, problemarios resueltos y portafolios de evidencias.

Tomando como punto de referencia lo anterior, se procedió a analizar las prácticas operativas del profesor B, a través de las cuales se identificó que las prácticas de evaluación manifestadas por él, fueron diversas y con diferentes fines. En la etapa inicial del proceso de instrucción, el profesor valoró los aprendizajes previos de los estudiantes. En dicha valoración movilizó objetos matemáticos a través de situaciones-problema en contextos intramatemáticos, calculando valores desconocidos, resolviendo problemas en contextos geométricos y ejercicios sobre ecuaciones lineales como meras expresiones analíticas.

Durante el estudio del tema, el profesor B evaluó constantemente el desempeño de los estudiantes mediante cuestionamientos dirigidos a evidenciar el nivel de argumentación de los estudiantes, así como la seguridad para verbalizar los procedimientos de resolución de los problemas planteados. A través de estas situaciones-problema, el profesor cuestionó a los estudiantes y llevó a cabo procesos de retroalimentación y discusiones grupales. Las situaciones-problemas, en su mayoría, estuvieron planteadas con los propósitos de identificar los elementos de una ecuación y promover las técnicas de resolución algebraica de una ecuación lineal, modelar enunciados verbales, situaciones de comportamiento lineal (proporcionalidad directa) o que son modelados a través de una función lineal en sus respectivas representaciones tabular y gráfica.

Así mismo, la observación constante del trabajo individual y por equipos, permitió al profesor llevar a cabo una evaluación que le otorgó la posibilidad de identificar, al final del proceso de instrucción, a los estudiantes que necesitaban asesorías extraclase para reforzar los contenidos abordados. También, complementó su evaluación a través de la autoevaluación y co-evaluación de tipo académica y actitudinal. Finalmente, la evaluación del aprendizaje se dio a través del examen escrito, el cual se estructuró con ejercicios sobre ecuaciones lineales, situaciones-problema en contextos intra y extramatemáticos relacionados con proporcionalidad y modelados por funciones lineales.

El examen escrito fue considerado por el profesor como uno de los instrumentos más importantes para llevar a cabo la evaluación del aprendizaje de sus estudiantes. El día de la aplicación, el profesor se mostraba seguro ya que externaba haber tenido buenos resultados durante el abordaje del tema, así también por el apoyo otorgado a través de las asesorías extraclase, y con la guía de estudio brindada días previos a la aplicación de la prueba.

El análisis ontosemiótico realizado al examen escrito permitió evidenciar un interés por valorar la técnica y habilidad para resolver ecuaciones lineales sin ningún tipo de contexto; situaciones-problema en contexto intramatemático donde se promueve el cálculo de variables dependientes a partir de los datos dados en un registro tabular para posteriormente ser llevada a un registro gráfico y con ello reflexionar sobre los conceptos de magnitud variable y los tipos de variables, hasta llegar a la expresión analítica; situaciones en contexto extramatemático con un comportamiento lineal (proporcionalidad directa) donde también se abordó el uso de los diferentes lenguajes, así como de los conceptos de dominio y rango; finalmente una situación en contexto intramatemático donde se retoman objetos relacionados con sucesiones numéricas y cálculos para la posición de un término.
Con base en lo anterior, es posible concluir que el significado evaluado del profesor B se enfocó prioritariamente en tres acepciones de la noción de ecuación lineal, como relación de proporcionalidad, como relación funcional y como expresión analítica.

Conclusiones

A pesar de que se promueve desde hace casi diez años en el bachillerato mexicano un modelo basado en competencias y que con ello se han presentado diferentes intentos para modificar el significado de evaluación en los profesores, en esta investigación se manifiesta la diversidad de formas en las que ésta se lleva a cabo.

Se evidenció que el profesor A recurrió a evaluación de tipo diagnóstica y sumativa, pues las acciones clasificadas con función evaluativa dentro de su trayectoria docente, evidenciaron el interés por validar que los estudiantes fueran adquiriendo las técnicas y habilidades algorítmicas necesarias para resolver un problema, así como para verbalizar y justificar las soluciones obtenidas o la memorización de algunos conceptos. En reducidas ocasiones se llevaron a cabo procesos de retroalimentación o cambios de estrategia para enfrentar una dificultad o resolver una duda. Generalmente a pesar de que se desarrollaban discusiones grupales y cuestionamientos, el profesor optaba por la institucionalización.

Por otra parte, durante el desarrollo del tema el profesor B, éste manifestó interés en llevar a cabo diferentes acciones relacionadas con la evaluación del aprendizaje y la valoración del progreso de sus estudiantes. Sin embargo, al momento de implementar la prueba escrita al final del proceso de instrucción, ésta se limitó a asuntos conceptuales y procedimentales, haciendo alusión a cierto tipo de significados y problemáticas en contextos puramente matemáticos. Así también, durante el proceso de instrucción, además de desarrollar plenarias y discusiones grupales, así como trabajo individual y en equipo, complementó la evaluación a través de una autoevaluación y co-evaluación de tipo académica y actitudinal. Sin embargo, su trayectoria docente permitió evidenciar que hubo sesiones en las cuales no se desarrolló ninguna acción con fines evaluativos. No obstante, dada la carencia de instrumentos de evaluación propuestos por el currículo de su bachillerato, el profesor recurrió a otros instrumentos no declarados, por lo que el uso de ellos fue más abundante.

Haciendo una recapitulación y tomando como base la situación manifestada por los dos profesores en estudio, es posible concluir mencionando que aunque actualmente se dispone de diferentes instrumentos de evaluación, el examen escrito prevalece como protagonista. En él se identificó el problema de que además de ser aplicado al final del proceso de instrucción, es utilizado para emitir juicios sobre el aprendizaje matemático a partir de la reproducción de procedimientos y conceptos.

Referencias bibliográficas

Barajas, Y. (2010) *Evaluación del Aprendizaje*: Guía práctica para profesores. México.

Calderón, R. M y Deiros, B. (2003). Evaluación del Aprendizaje de las Matemáticas. En: J. Delgado Rubí (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, pp. 18.

Casanova, Ma. A. (1997*). Manual de evaluación educativa*. Madrid: Morata, pp.132-167.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques 14*, (3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). Un Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. *The International Journal on Mathematics Education*, 127-135.

Goñi, J.M. (2008). La evaluación de las competencias determinará el currículo de matemáticas. En Goñi (Ed.), 32-2 ideas clave. *El desarrollo de la competencia matemática*,. 167-185.

Villardón, L. (2006). Evaluación del aprendizaje para promover el desarrollo de competencias. *Educación Siglo XXI, 24* (1), 57-76.

APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA, CASO: SOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS POR EL MÉTODO DE APLICACIÓN DE ÁREAS, MEDIADO POR CABRI GEOMETRE II PLUS

Martha Cecilia Mosquera Urrutia; Vivian Libeth Uzuriaga López;
Universidad Surcolombiana, Universidad Tecnológica de Pereira. (Colombia)
martha.mosquera@usco.edu.co, vuzuriaga@utp.edu.co

Resumen
Se presentan resultados de investigación que evidencian problemas presentados por un grupo de docentes en formación inicial, en la planeación de clase para la enseñanza de la ecuación cuadrática fundamentada en el aprendizaje basado en problemas y mediada por Cabri Geometre II Plus. Los problemas encontrados se relacionan con: dominio matemático y didáctico de la ecuación cuadrática, sus representaciones, el manejo del software, creencias y concepciones de enseñanza. Los resultados son pertinentes para los profesionales que trabajan en la formación de profesores, los didactas e investigadores en educación matemática.

Palabras clave: ecuación cuadrática, manejo de software, aprendizaje basado en problemas

Abstract
This report focuses on research outcomes which show the problems that a group of initial training teachers have presented when planning their lesson for the teaching of the quadratic equation supported by problem-based learning and mediated by CabriGeometre II Plus. Such problems are related to their mathematical and didactic knowledge of the quadratic equation, its representations, the software management, teaching beliefs and conceptions. The results are relevant for the professionals who work in teacher training courses, the specialists in educational methodology and the researchers in mathematical education as well.

Key words: quadratic equation, software management, problem-based learning

Introducción

Se presentan resultados de un estudio de caso múltiple, enmarcado en un proceso de investigación formativa que se adelanta desde el año 2012 entre los programas de formación de profesores de matemáticas de dos universidades colombianas, con el objetivo de consolidar una propuesta de articulación de los cursos: Metodología de la Investigación, Seminario de Investigación, Didáctica de la Matemática I y II, Diseño de Software y Práctica Profesional Docente. La propuesta de articulación busca aportar a los profesores en formación, elementos teórico-prácticos que les permitan proponer, aplicar y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el marco de los Estándares de Competencias Básicas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional, e interactuar con los docentes en ejercicio, en la resolución de problemas propios de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares.

Sobre el ciclo del Aprendizaje Basado en Problemas

Entendemos el Aprendizaje Basado en Problemas ABP, como un método didáctico que permite al estudiante que se desempeñará como profesor, desarrollar capacidades, conocimientos y habilidades, para identificar, analizar y proponer alternativas de solución a los problemas de enseñanza y/o aprendizaje de la matemática, de manera eficaz, eficiente y humana, utilizando principalmente la investigación como estrategia pedagógica IEP (Uzuriaga, V. y Mosquera, M. 2012, p. 232).

Esta etapa de la experiencia se realizó con los estudiantes de los cursos de Didáctica de la Matemática I y II. La tarea consistió en "planificar una clase" para el grado noveno con el objetivo de "estudiar el conjunto solución de una ecuación cuadrática en una variable". Con el fin de planificar la clase, los profesores en formación se organizan en pequeños grupos, diseñan y discuten los planes de clase y luego se realiza una plenaria de socialización.

Identificar la situación problemática: las secuencias didácticas preparadas por ellos, contenían en general cuatro bloques:

- La definición de ecuación de segundo grado con una incógnita y de las raíces
- Métodos de resolución
- deducción de la formula general
- Situaciones en el lenguaje verbal que pueden resolverse al traducir la información que da el enunciado de dichos problemas a través de una ecuación cuadrática.

En Colombia, el estudio de las ecuaciones de segundo grado se realiza en el grado noveno y comprende generalmente esos cuatro aspectos.

En relación con el concepto de ecuación cuadrática se acordó asumir que *es toda ecuación en la cual una vez se simplifica, el mayor exponente de la incógnita es 2; que las* soluciones (también llamadas raíces) *son los valores de la incógnita que satisfacen la ecuación* y que resolver la ecuación es *hallar las raíces de la ecuación*; estos conceptos son elaboraciones, a través de las cuales se trata de recoger lo que expresan la generalidad de los libros de texto.
En relación con los objetivos de enseñanza, las secuencias se concentraban en lograr que los estudiantes identificaran las ecuaciones de segundo grado, aprendieran algunos métodos de resolución, entre los cuales se encuentra la fórmula general para resolver la ecuación de segundo grado y finalmente resolvieran algunos problemas tipo.

En cuanto a las propuestas para el desarrollo del pensamiento, en las secuencias didácticas encontramos entre otras, las siguientes: (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2003, p. 81)

- Utilizo las técnicas de aproximación en procesos numéricos infinitos (pensar con las variaciones y el álgebra)
- Observo las propiedades y analizo las relaciones entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones (pensar con las variaciones y el álgebra)
- Puedo hacer una demostración práctica como un rompecabezas, utilizando relaciones entre áreas (pensar con la geometría)
- Con las herramientas que ya tengo, descubro fórmulas y procedimientos para encontrar áreas (pensar con las medidas)

Sin embargo, al revisar las tareas propuestas, no es claro como a partir de ellas, se logra que los estudiantes desarrollen estos procesos de pensamiento.

Definir el problema: nos preguntamos entonces si *¿es adecuado introducir a los estudiantes en el estudio de las ecuaciones cuadráticas por medio del caso particular* $ax^2 + bx + c = 0$?

Cuando cuestionamos la elección de esta alternativa didáctica, esperamos que el futuro profesor reflexione en torno a, si el concepto que se construye, favorece posteriormente la comprensión de ecuaciones cuadráticas de otro tipo, un sistema de ecuaciones cuadráticas con mayor número de incógnitas o por el contrario obstaculiza visiones más generales y abstractas, como las que se proponen por ejemplo a partir de los Estándares (Ochoviet, 2009).

Es importante destacar que, en ocasiones, esta discusión se vió opacada por la culpa, frente a la determinación de problemáticas en relación con la enseñanza y el aprendizaje de la ecuación cuadrática, su solución y los procesos para el desarrollo del pensamiento, algunos profesores y estudiantes encuentran causas asociadas a la metodología de enseñanza, a la práctica, al sistema de evaluación, a las condiciones sociales y personales de los estudiantes… pero resulta algo complicado lograr que los futuros profesores, atribuyan las dificultades de comprensión a la complejidad intrínseca de los objetos matemáticos, a su naturaleza y los modos característicos del pensamiento y concentren sus energías en buscar elementos en las matemáticas que les permitan mejorar su conocimiento.

Explorar el problema: se hizo una lluvia de ideas con el fin de determinar el origen de los problemas, y de conocer otras formas de definir y de representar tanto la ecuación de segundo grado, como el conjunto solución.

Tras identificar los problemas, hubo necesidad de profundizar con los asociados a la ecuación de segundo grado y su solución. Se recurrió al marco de Los Modos de Pensamiento (Sierpinska, 2000); según ella, el álgebra lineal se puede ver como el resultado de superar dos obstáculos epistemológicos, uno que rechaza los números dentro de la geometría y el otro que rechaza la intuición geométrica en el dominio de la aritmética.

Al estudiar algunos aspectos del razonamiento de los estudiantes en álgebra lineal, encontró que ellos piensan en una forma más práctica que teórica y que esto se convierte en un obstáculo para el razonamiento teórico propio del álgebra. Distingue entonces tres modos de pensamiento: sintético-geométrico SG, analítico-aritmético AA y analítico-estructural AE. Estos modos de pensamiento aparecen en la historia de forma secuencial, pero ninguno de ellos elimina a los otros dos.

En el modo de pensamiento sintético-geométrico (SG) los objetos son pensados en su forma más intuitiva, como figuras geométricas, en este modo se podrian pensar las ecuaciones cuadráticas como rectángulos o cuadrados.

En el modo de pensamiento analítico-aritmético (AA) los objetos matemáticos son pensados a través de fórmulas que permiten calcularlos, por ejemplo $ax^2 + bx + c = 0$, $ax^2 + bx = 0$, los números poligonales.

En el modo analítico–estructural (AE) los objetos son pensados a través de sus propiedades o de los axiomas que permiten explicarlos. Por ejemplo cuando nos referimos a un lugar geométrico, con las condiciones de centros, vértices, ejes de simetría y distancias, o en el caso del las soluciones con el grupo de Galois.

El uso del marco se considera pertinente, porque los profesores deben propiciar a los estudiantes escenarios que les permitan abordar la ecuación cuadrática y sus soluciones desde lo geométrico, lo numérico y lo analítico, y generar conciencia sobre ello; porque en algunos casos, reportan errores qe se generan cuando ellos presentan los conceptos en un modo y pretenden que los estudiantes respondan evaluaciones o hagan interpretaciones en otro modo.

Plantear la o las soluciones: A partir de algunas discusiones que habían sostenido en los cursos de Epistemología e Historia de la Matemática, los futuros profesores, reunidos en equipos de trabajo realizaron pequeñas investigaciones, con el fin de reconocer diferentes métodos solución y aspectos referentes al tratamiento histórico epistemológico de la ecuación de segundo grado.

Entre los métodos aportados por ellos se destacan:

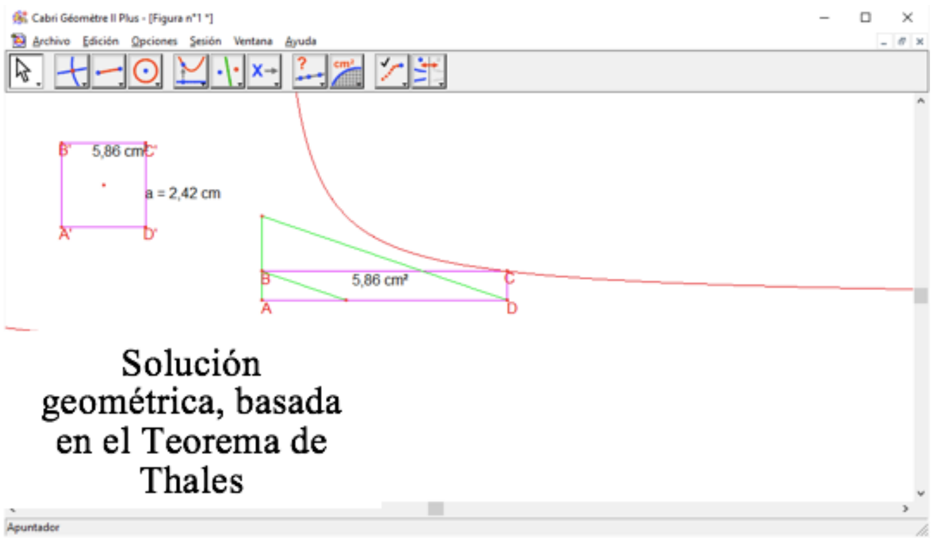
- Solución de ecuaciones cuadráticas en Babilonia: los problemas son de tipo geométrico y aluden generalmente al perímetro $2(x+y)$ y al área xy de un rectángulo.
- Las ecuaciones diofánticas cuadráticas con dos o más variables, ternas pitagóricas y Teorema de Pitágoras. Numérico, geométrico.
- Métodos griegos, cuadraturas, demostraciones, exhaución. Geométrico, analítico.
- Métodos árabes. Algebráicos, aritméticos, gométricos.
- Las cónicas, funciones, gráficas, y visualización de sus raíces.
- Otras soluciones geométricas y gráficas.
- Manipulables.

Estudiados cada uno de estos métodos, se decidió estudiar el método de aplicación de áreas porque posibilita el tránsito de lo geométrico a lo analítico.

Llevar a cabo el plan: entre las secuencias didácticas propuestas por los estudiantes se escogió una para ser estudiada y realizar el estudio de clases.

La situación problema:

"Dado un cuadrado de lado a, construir un rectángulo que tenga la misma área"



Se estudiaron varias maneras de solucionar la ecuación desde lo numérico, lo geométrico y lo analítico. Algunas dificultades radican en que los estudiantes tienen vacíos en geometría, lo que ha obligado a realizar un rediseño de la secuencia.
Los logros se concentran en que las unidades propuestas por los profesores muestran el tránsito de un modo de pensar a otro, o dicho en el lenguaje de Colombia, muestran un uso coherente de los estándares curriculares.

Evaluar el proceso: Como resultado se obtuvieron unidades didácticas para enseñar el concepto de conjunto solución de una ecuación cuadrática, no limitado únicamente al ámbito algebraico. Los futuros docentes diseñaron tareas, que involucran ecuaciones cuadráticas, identificando algunos fenómenos y contextos que dan sentido a las ecuaciones de segundo grado como, por ejemplo: el movimiento parabólico y además decidieron estudiar la función cuadrática y las ecuaciones de segundo grado en una o dos variables, como resultado de identificar los conceptos y procedimientos que caracterizan el tema y las relaciones entre ellos (estructura conceptual).

También acogieron la recomendación de presentar el conjunto solución de una ecuación de segundo grado en diferentes modos de pensamiento como los presentados por Sierpinska (2000): el sintético-geométrico, el analítico-aritmético y el analítico estructural y por Pinto y Parraguez (2015): el geométrico-gráfico-convergente y el analítico operacional; con la convicción de que diferentes maneras de pensar un objeto matemático, le permitirán a los estudiantes lograr una comprensión más profunda de ellos, esto de manera incipiente fue asociado a los diferentes sistemas de representación. Allí cobran sentido: por un lado, el uso del método de Aplicación de las Áreas (técnica de Álgebra Geométrica que utilizaron los griegos para la resolución de ecuaciones) y el uso del software Cabri Geometre II Plus

Referencias bibliográficas

Acevedo, M. & Falk, M. (1997). *Recorriendo el álgebra: de la solución de ecuaciones al algebra abstracta.* Colombia: Colciencias.

Díaz Barriga. E. (2006). *Geometría dinámica con Cabri-geomètre*. (3a ed) México D.F.: Editorial Kali.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA, 7*(3), 251-293. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/375/

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/444/

Gonzalez, P. (2003). *Los orígenes de la Geometría Analítica*. Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia. Tenerife.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Autor.

Pinto, I. y Parraguez, M. (2015). El concepto de derivada desde la teoría de los modos de pensamiento, sustentada en la epistemología de Cauchy. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28*, 337-344.

Sierpinska, A. (2000). On some Aspects of Student´s thinking in Linear Algebra. En J. L. Dorier, *On The Teaching of Linear Algebra* (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

ANÁLISIS DIDÁCTICO DE CLASES DE MATEMÁTICAS EN NIVEL SUPERIOR

Nury Yolanda Suárez
Universidad Santo Tomas seccional Tunja. (Colombia)
nury.suarez@usantoto.edu.co

Resumen
El artículo presenta resultados parciales de una investigación, la cual tuvo como objetivo analizar las prácticas pedagógicas de los profesores del área de matemáticas de Educación Superior, a través del análisis didáctico. Como base conceptual se tuvo en cuenta la teoría del enfoque ontosemiótico y los criterios de idoneidad didáctica. La investigación sigue un enfoque cualitativo con método etnográfico adoptando la técnica estudio de caso. Las fuentes de datos son cuestionarios de pregunta cerrada, grabación de video y audio. En el análisis se presenta los resultados y sugerencias obtenidos de la observación de varias clases de un profesor de matemáticas.

Palabras clave: enfoque ontosemiótico, análisis didáctico, profesores, matemáticas, procesos de enseñanza y aprendizaje.

Abstract
This paper presents partial results of an investigation which is intended to analyze the pedagogical practices of higher education mathematics teachers through a didactic perspective. As a conceptual basis, we considered the theory of the onto-semiotic approach and the criteria of didactic suitability. The research follows a qualitative approach with ethnographic method adopting the case study technique. The data were collected by using closed-question questionnaires, as well as audio and video recording. The analysis shows the results and suggestions obtained from the observation of several lessons of a mathematics teacher.

Key words: onto-semiotic approach, didactic analysis, teachers, mathematics, teaching and learning processes.

Introducción

El objetivo de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje está en indagar sobre la idoneidad de la instrucción matemática, no se trata de clasificar las prácticas como buena o malas, ni de dar una receta de cómo debería orientarse. En este sentido, la investigación analizó cómo a través del análisis didáctico se puede valorar la idoneidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Es bien conocido que la forma tradicional del trabajo en la clase de matemáticas no es la más apropiada para el desarrollo de procesos matemáticos por la estructura que tiene, ya que esta metodología genera

> problemas como desconexión entre la matemática y el mundo real, muchas veces manejo excesivo de lenguaje abstracto formal, desmotivación del estudiante, y en últimas rechazo hacia las matemáticas (Jiménez, 2010, p.9)

La enseñanza de los contenidos de las asignaturas del área de matemáticas que se imparten en las carreras que ofrece la Universidad no es ajena a la problemática descrita anteriormente, ya que los estudiantes en los resultados de las pruebas Saber Pro muestran un bajo desempeño, por lo tanto, se hace necesario hacer una reflexión sobre las prácticas pedagógicas, con el fin de mejorar los procesos de instrucción matemática; Jiménez, Suarez y Galindo (2010, p.176) afirman que "en los centros escolares se dedica mayor tiempo a las actividades donde se privilegia la repetición y ejecución sistemática de los contenidos curriculares y se deja de lado aquellas que estimulan el razonamiento matemático".

A las dificultades mencionadas anteriormente se suma la falta de interés por parte del docente en el momento de seleccionar estrategias novedosas y de recursos que ayuden a mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Según Godino, Batanero y Font (2007, p.6) "el fin específico de la didáctica de la matemática, como campo de investigación, es el estudio de los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo de programas de mejora de dichos procesos".

Teniendo en cuenta lo anterior se planteó la pregunta ¿Cuáles son los aspectos que pueden incidir en la mejora de los procesos de instrucción matemática en los docentes de Educación Superior de la Universidad Santo Tomas?, frente a la complejidad de esta problemática se planteó como objetivo general analizar las prácticas pedagógicas de los profesores del área de matemáticas de Educación Superior de la Universidad Santo Tomas a través del análisis didáctico desde el Enfoque Ontosemiótico.

Referentes teóricos

El enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) se tomó como el principal referente teórico de esta investigación. Godino (2011) y sus colaboradores, en diferentes trabajos, han desarrollado un conjunto de nociones teóricas que configuran el enfoque ontológico y semiótico del conocimiento e instrucción matemática, en el cual proponen cuatro niveles de análisis, los cuales dan herramientas para una didáctica descriptiva-explicativa, es decir, sirven para comprender y responder que está ocurriendo en la práctica y por qué; es decir, los primeros cuatro niveles se limitan a describir y analizar. Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006, p.20) "proponen un quinto nivel de análisis a los procesos de estudio matemático centrado en la valoración de su idoneidad didáctica". Por tanto, son necesarios criterios de "idoneidad" o adecuación que permitan valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y "guiar "su mejora (Godino *et al*, 2007).

La idoneidad didáctica supone la articulación coherente y armónica de las siguientes idoneidades parciales; epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, interaccional y ecológica, las cuales están representadas mediante un hexágono regular, cuando éste preserva su estructura regular el profesor se encuentra en un alto grado de idoneidad. Cuando el hexágono interno es irregular corresponde a un grado de idoneidad media o baja (Godino *et al*, 2006). Para la valoración de estas seis componentes se tuvo en cuenta los objetos matemáticos como entidades que surgen de los sistemas de prácticas hechas en un campo de problemas. Los objetos matemáticos personales son emergentes del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas (Godino y Batanero, 1994). Los objetos institucionales y los significados institucionales son entes que constantemente, emergen de sistemas de prácticas socialmente compartidas en una institución, que se relacionan en cuanto a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos (Godino *et al*, 2007). Los significados personales de los profesores se consideran como objetos matemáticos y didácticos a la vez; Ramos y Font (2008, p. 239) afirman que

> De acuerdo con Ramos (2006), la caracterización que hace el EOS de los objetos matemáticos y didácticos como emergentes de los sistemas de prácticas, al igual que la de sus significados, en términos de prácticas, puede sustituir sin muchos problemas a los términos creencia, concepción y conocimiento si estos tres constructos se entienden básicamente como una disposición para la acción".

Para la valoración de los procesos de instrucción se tiene en cuenta los indicadores de la idoneidad didáctica. Para Godino *et al* (2006, p. 8)

> La noción de idoneidad didáctica se puede aplicar al análisis de un proceso de estudio puntual implementado en una sesión de clase, a la planificación o el desarrollo de una unidad didáctica, o de manera más global, al desarrollo de un curso o una propuesta curricular. También puede ser útil para analizar aspectos parciales de un proceso de estudio, como un material didáctico, un manual escolar, respuestas de estudiantes a tareas específicas, o incidentes didácticos" puntuales. […] El logro de una alta idoneidad didáctica de un proceso de estudio, como también su valoración, es un proceso sumamente complejo puesto que, como hemos visto, involucra diversas dimensiones, que a su vez están estructuradas en distintas componentes. Además, tanto las dimensiones como los componentes no son observables directamente y, por lo tanto, es necesario inferirlos a partir de indicadores empírico.

Metodología

Para el desarrollo de la investigación se adoptó el enfoque de tipo cualitativo ya que busca explicar el por qué y el cómo se tomó una decisión, basándose en la toma de muestras pequeñas a partir de la observación de grupos de población reducidos, como salas de clase, etc. Se desarrolló bajo el método etnográfico adoptando la técnica estudio de caso; según Martínez (2006), es una estrategia de investigación dirigida a comprender las dinámicas presentes en un contexto singular, la cual podría tratarse del estudio de un único caso o de varios casos, combinando distintos métodos para la recolección de información cualitativa, con el fin de describir, verificar o generar teoría. La población objeto de estudio son los profesores de pregrado que orientan asignaturas del área de matemáticas en las Facultades de Ingeniería Civil e Ingeniería Ambiental. La investigación se desarrolló a través de las siguientes etapas: Etapa exploratoria y de diagnóstico, análisis didáctico y transcripción de las clases, análisis y valoración a través de los criterios de idoneidad. Para recolección de la información se tuvieron en cuenta cuestionarios de preguntas cerradas para profesores y estudiantes, entrevistas abiertas y observación directa.

Valoración y análisis

A continuación se presenta el resultado de los indicadores de idoneidad didáctica los cuales permiten determinar las idoneidades; epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, interaccional y ecológica, de uno de los profesores (P_1) analizados.

Como resultado de los indicadores de idoneidad didáctica se presenta un hexágono irregular, donde se evidencia que el profesor tiene un grado de idoneidad bajo en las componentes interaccional y mediacional, las cuales juegan un papel muy importante en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ya que las estrategias mediacionales permiten que tanto el profesor como el estudiante sean partícipes en la construcción de cada uno de los significados, y por ende permiten establecer interacciones entre profesor-estudiante, estudiante- estudiante y llegar a negociar significados entre todos los integrantes del grupo.

Por otro lado se observa que el docente presenta un grado de idoneidad media en las componentes epistémica, ecológica, cognitiva y afectiva. No es novedad afirmar que la motivación hacia el aprendizaje de las matemáticas es indispensable, aunque el profesor intenta proponer ejercicios que despierten la curiosidad de los estudiantes, éstos no van más allá de pedir una respuesta corta, lo cual hace que la clase continúe siendo monótona y lejana al contexto y a su entorno. Evaluar los aprendizajes de los estudiantes va más allá de realizar evaluaciones escritas, se deben proponer diferentes formas de evaluación cómo el trabajo en grupo, trabajo colaborativo, problemas que susciten a investigar y proponer diferentes formas de llegar a la solución con el fin de despertar en el estudiante el interés por llegar al resultado, el cual tenga sentido y una interpretación del mismo.

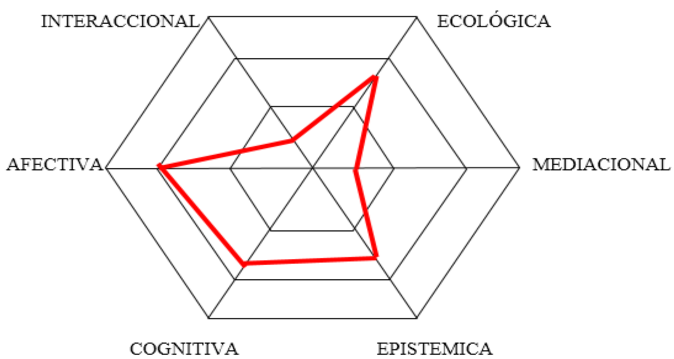


Figura 1. Resultado de los indicadores de idoneidad didáctica (P_1) (Elaboración propia)

■ Valoración de la idoneidad didáctica del profesor (P_1)

Para la valoración se tuvieron en cuenta los criterios de idoneidad didáctica planteados por Godino *et al* (2007) y el análisis de una clase a través de las siguientes seis dimensiones (Godino, Contreras y Font, 2006)

Idoneidad epistémica: en este criterio de idoneidad se tienen en cuenta las situaciones- problemas, contextualizar los conocimientos pretendidos, ejercitarlos y aplicarlos a las situaciones relacionadas. Desde el punto de vista de los procesos, una idoneidad alta estará asociada a la presencia de momentos de "generación del problema" (problematización) de modo que los propios alumnos tengan ocasión de formular o reformular los problemas y plantear cuestiones relacionadas.

En cuanto a esta componente se evidencia que el profesor implementa diferentes formas de presentar los conceptos; de forma verbal, gráfica, simbólica, etc. Utiliza un lenguaje claro y cotidiano al nivel de los estudiantes, propone problemas los cuales requieren de dar una respuesta, lo cual permite que la interacción que hay entre los estudiantes se limita simplemente a comparar resultados.

Teniendo en cuenta el resultado de la encuesta de pregunta cerrada, el profesor generalmente tiene la misma estructura para todas las clases, da las definiciones, genera algunas preguntas las cuales requieren de respuestas cortas, y después da una serie de ejercicios.

En este componente el profesor se encuentra en una idoneidad media, debe proponer situaciones problemas las cuales generen discusiones e interacciones que permitan a los estudiantes proponer diferentes alternativas de solución, para que todos se involucren en la construcción de definiciones y puedan llegar a consensos, por otro lado debe proponer situaciones contextualizadas con su perfil.

> Un punto central para el logro de una alta idoneidad epistémica será, por tanto, la selección y adaptación de situaciones - problemas o tareas ricas. Sin embargo, aunque las situaciones problemas constituyen un elemento central, el logro de una idoneidad epistémica alta requiere también atención, como propone el EOS, a las diversas representaciones o medios de expresión, las definiciones, procedimientos, proposiciones, así como las justificaciones de las mismas. Tales tareas deben proporcionar a los estudiantes diversas maneras de abordarlas, implicar diversas representaciones, y requerir que los estudiantes conjeturen, interpreten y justifiquen las soluciones (Godino, 2011, p.9)

Idoneidad Cognitiva: En el EOS introducen la noción de significado personal para denotar los conocimientos de los estudiantes. Los conceptos son concebidos, al igual que los significados institucionales, como los “sistemas de prácticas operativas y discursivas”. Los significados personales se van construyendo progresivamente a lo largo del proceso de instrucción, partiendo de unos significados iniciales alcanzando unos determinados significados finales (logrados o aprendidos).

El profesor desarrolla los contenidos pretendidos en las horas establecidas, incluye talleres y ejercicios extra clase como refuerzo, propone evaluación de tipo oral y escrita. Al finalizar el semestre deben presentar un proyecto el cual muestra la aplicabilidad de los conceptos adquiridos. Como resultado del cuestionario los estudiantes manifiestan que el profesor tiene diferentes estrategias evaluativas las cuales permiten diversas formas de evidenciar el aprendizaje. En conclusión, en este componente el profesor se encuentra en una idoneidad media, se le recomienda emplear las competencias comunicativas, argumentativa, situacional y meta cognitiva. El principio de aprendizaje requiere que los estudiantes deben aprender las matemáticas entendiéndolas, construyendo activamente el nuevo conocimiento a partir de sus experiencias y conocimientos previos. Así mismo, el principio de evaluación afirma que, la evaluación debe apoyar el aprendizaje de matemáticas relevantes y proveer de información útil tanto a profesores como estudiantes (Godino, 2011)

Idoneidad Interaccional: Un proceso de estudio tiene una idoneidad interaccional alta potencial (a priori), efectiva (durante el proceso de instrucción) y residual (a posteriori). El profesor tiene en cuenta los conceptos previos de los estudiantes, les presenta diferentes libros como referentes teóricos para el desarrollo de las actividades extra clase, involucra el trabajo en grupo y tiene en cuenta la participación de cada uno de los integrantes y hace uso de ellas. Como resultado del cuestionario los estudiantes manifiestan que al profesor le falta proponer actividades que los haga pensar y que tengan relación con su entorno. En conclusión, en este componente se evidencia que el profesor se encuentra por debajo de una idoneidad baja, en el cual debe privilegiar y proponer situaciones problemas en las que los estudiantes en lugar de ser receptores de una matemática ya elaborada pasen a ser partícipes en la construcción de sus propios significados. Brousseau (citado en Godino, Batanero y Font, 2007, p. 15) afirma que "tiene potencialmente mayor idoneidad semiótica que un proceso magistral que no tenga en cuenta las dificultades de los estudiantes".

Idoneidad mediacional: Se deben tener en cuenta los recursos materiales los cuales pueden ser manipulables, programas de modelación, libros de texto, entre otros. La idoneidad del proceso de estudio se verá afectada positivamente si el profesor y los estudiantes tienen a su alcance los medios materiales mejor adaptados a los significados pretendidos.

Se evidencia que el profesor desarrolla los contenidos en el tiempo establecido, no implementa programas matemáticos. En el resultado de la encuesta los estudiantes manifiestan que el profesor pocas veces utiliza programas para simular diversas situaciones, y por otro lado el salón en algunas ocasiones es un auditorio, lo cual no permite un desarrollo normal de la asignatura. En este componente el profesor se encuentra en un grado de idoneidad baja. La utilización de programas como Cabri II , Cabri III, GeoGebra, entre otros, "(…) para el proceso de estudio ayuda a que haya una mayor potencialidad de mayor idoneidad que otro tradicionalmente basado exclusivamente en la pizarra, lápiz y papel, pero por otro lado afirma que a sí mismo un aprendizaje con alto grado de idoneidad didáctica mediacional con relación a los medios temporales sería una clase magistral, donde el profesor reproduce de manera íntegra y sin interacción de los estudiantes el significado pretendido (*Ídem*)

Idoneidad emocional: la ambientación y motivación junto con la selección de las situaciones-problemas juegan un papel muy importante, ya que la iniciación o contextualización que pertenezcan al campo de interés de los alumnos será un factor a tener en cuenta.

El profesor coloca actividades que motivan a los estudiantes a participar de la clase, utiliza un lenguaje cotidiano manteniendo la estructura de las matemáticas, pero no propone actividades que involucren a los estudiantes en la búsqueda de nuevas soluciones, se limita a pedir trabajos en los cuales deben desarrollar los algoritmos enseñados al inicio de la clase.

En la encuesta los estudiantes manifiestan que el profesor muestra pasividad, es respetuoso, genera un ambiente que brinda oportunidad de socializar las respuestas con los compañeros, pero éstas se limitan a comparar las respuestas, indican que les gustaría que se colocaran problemas que requieran de análisis y de proponer alternativas de solución. En conclusión, en este componente el profesor muestra un grado de idoneidad medio, se sugiere que implemente actividades ricas en las que los estudiantes puedan explorar varias de sus competencias alrededor de problemas afines con su perfil. Desde el punto de vista educativo el logro de unos estados afectivos que interaccionen positivamente con el dominio cognitivo tienen que ser objeto de consideración por parte de las instituciones educativas, y, en particular, por el profesor. El dominio afectivo conlleva, por tanto, una faceta institucional y se concreta en normas de índole afectivo que condicionan el trabajo del profesor (*Ídem*).

Idoneidad ecológica: se deben tener en cuenta dos criterios, el primero (de tipo ecológico) útil para la selección de objetivos y contenidos, que tiene en cuenta los intereses de estudiantes como de la sociedad en su conjunto, es la contextualización sociocultural de la práctica profesional. Un segundo criterio es que los objetivos matemáticos estudiados por estos profesionales sean, a ser posible, los nucleares en la disciplina.

En este componente se evidencia que el profesor se rige por los contenidos institucionales, cumple las formas de evaluación expuestas en el plan de clase, en el desarrollo de la asignatura no involucra el contexto del estudiante. Los estudiantes manifestaron en la encuesta que el profesor es apático a la implementación de nuevas tecnologías, enfatizan diciendo que él dice que las deben utilizar los que son de mentes pequeñas. Dentro de los objetivos a desarrollar los profesores deben contemplar en el diseño y evaluación de actividades didácticas que favorezcan la reflexión, análisis y (re)significación de las prácticas cotidianas en el aprendizaje de la matemática. En conclusión, en este componente el profesor muestra un grado de idoneidad medio, es evidente que algunas reglas que ya están establecidas institucionalmente el docente no las puede cambiar, como el sitio donde le toca orientar la clase.

Conclusiones

Teniendo en cuenta los resultados del profesor (P_1), es importante destacar la importancia del análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ya que a través de los resultados, el profesor puede analizar, reflexionar y resignificar su práctica, y de esta forma pueda implementar un plan de mejora en el cual potencie las carencias encontradas para mejorar la idoneidad de dicho proceso.

De esta misma forma, se analiza el papel que juegan los procesos de comunicación en los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que de éstos depende que el estudiante tenga una buena apropiación de los significados institucionales, involucrando problemas que motiven al estudiante a su solución y que privilegien la negociación de significados, en lugar de darles a los estudiantes una matemática ya acaba, es decir, sin sentido para el estudiante, hay que darles pautas para que ellos las reinventen y le encuentren algún sentido; esto se evidencia en el momento en que el profesor (P_1) les presenta ejercicios en la clase, los cuales están totalmente desligados del contexto del estudiante. Teniendo en cuenta lo anterior, el EOS brinda herramientas que ayudan a guiar la forma como se lograría una mayor idoneidad en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Godino, J. D. (2011). *Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf

Godino, J. D., Batanero. (2004). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *13*(3), 237-284.

Godino, J. D.; Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en D dactiques des Mathematiques, 26* (1), 39-88.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.* Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V., & Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, *27* (2), 221-252.

Jiménez E., A. (2010). *La naturaleza de la matemática, las concepciones y su influencia en el salón de clase*. Tunja:

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Jiménez E., A.; Suarez, N., & Galindo, S (2010). La comunicación: eje en la clase de Matemáticas. Tunja. *Praxis y Saber*, 1(2), 173-202.

Martínez. C, P. (2006). El método de estudio de caso. *Pensamiento & Gestión*, 20. Universidad del Norte, 165-193.

Ramos, A. B & Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), 233-265.

MOTIVOS PARA LA ELECCIÓN DE LA CARRERA EN MATEMÁTICAS

Maribel Vicario-Mejía, Magdalena Rivera-Abrajan, Gustavo Martínez-Sierra
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
mvicario_maribel@hotmail.com, mrivera@uagro.mx, gmartinezsierra@gmail.com

Resumen

La presente investigación cualitativa en proceso centra su interés en identificar los motivos que 34 aspirantes manifiestan como razón para estudiar la carrera de Matemáticas, específicamente en la Facultad de Matemáticas (Campus Chilpancingo) de la Universidad Autónoma de Guerrero, México. A través de entrevistas semiestructuradas y bajo el enfoque metodológico del análisis temático de Braun y Clarke, se identificaron 21 motivos que fueron señaladas por los aspirantes como razones principales para elegir la carrera de Matemáticas, entre ellos: 1) *les gusta las matemáticas, 2) esperan terminar una carrera, 3) esperan superarse social y económicamente 4) esperan ser profesores de Matemáticas.*

Palabras clave: motivos, análisis temático, elección de carrera.

Abstract

The present ongoing qualitative research focuses on identifying the causes that thirty-four applicants have expressed for doing a degree in Mathematics, specifically at the Faculty of Mathematics (Chilpancingo Campus) of the Autonomous University of Guerrero, in Mexico. Through semi-structure interviews and under the methodological approach of Braun and Clarke's thematic analysis, we identified 21 causes that were pointed out by the applicants as the main reasons for choosing a degree in mathematics, among which they mentioned: 1) they like math, 2) they expect to finish a degree course, 3) they expect to do better socially and economically 4) they expect to be mathematics teachers.

Key words: causes, thematic analysis, choosing a degree in mathematics.

Introducción

Investigaciones acerca de los motivos o razones del porque estudiar una carrera de ciencias o carreras relacionadas con matemáticas, en México y en el mundo aún son muy escasas, sin embargo, existen investigaciones enfocadas en al sector femenino sobre los factores que determinan su elección para el estudio de una carrera en ciencias.

Las investigaciones en el campo internacional muestran que el *interés*, el *autoconcepto*, la *importancia*, *los resultados matemáticos* y la *percepción de la madre*, son los factores que determinan la elección de carrera en Matemáticas, física, química y biología para mujeres (Watt, Hyde, Petersen, Morris, Rozek y Harackiewicz, 2016). Mientras que investigaciones mexicanas, realizadas en la Universidad Veracruzana y en la Universidad Autónoma de Guerrero, sobre los factores que determinan para que mujeres mexicanas decidan estudiar la carrera de matemáticas son: *sentirse buena en matemáticas, el gusto por las matemáticas, la influencia de sus profesores* y *los concursos de matemáticas* (Carrasco y Sánchez, 2016; Manzano y Sánchez, 2017).

Es por ello que en la presente investigación, nos centramos en identificar los motivos que tienen los estudiantes para decidir estudiar una carrera de matemáticas, especificamente en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero.

Marco conceptual y metodología

Marco conceptual

Desde el campo de dominio afectivo, por la naturaleza de la investigación, se utilizará la definición de motivo como *lo que mueve o tiene eficacia o virtud para mover, razón que mueve algo*.

Metodología

La presente investigación cualitativa basada en datos empíricos, utiliza el método del análisis temático de Braun y Clarke (2006) que consiste en identificar, analizar y reportar patrones(temas) con los datos. Este consiste en 6 fases:

Fase 1 Familiarización con los datos: Esta fase implica que el autor se sumerja en los datos obtenidos (transcripciones de entrevistas, respuestas a encuestas cualitativas) a través de la lectura y relectura de las transcripciones, o de escuchar las grabaciones de audio o ver los videos de los datos.

Fase 2 Generando códigos iniciales: Consiste en el reconocimiento de los extractos que serán codificados con uno o más códigos siempre que estos sean relevantes para responder a la pregunta de investigación. Los códigos pueden proporcionar un resumen conciso de una porción de datos o describir el contenido de los datos.

Fase 3 Buscando temas: Consiste en la revisión de los datos codificados para identificar áreas de similitud y superposición entre códigos o la agrupación de códigos que comparten una característica unificadora, de modo que reflejen y describan un patrón coherente y significativo en los datos. Esta agrupación determinará los temas, que permitirán contar una historia general sobre los datos.

Fase 4 Revisando temas potenciales: Esta fase consiste en un proceso recursivo mediante el cual los temas en desarrollo se revisan en relación con los datos codificados y el conjunto completo de datos. Por tanto, se verifican los temas con los extractos de datos intercalados y se explora si el tema funciona en relación con los datos. Es posible descartar algunos códigos o ubicarlos en otro tema o se puede volver a dibujar los límites del tema, de modo que capture de forma más significativa los datos relevantes.

Fase 5 Definiendo los temas: Al definir los temas, se debe ser capaz de establecer claramente lo que es único y específico de cada tema: se resume la esencia de cada tema en unas pocas frases. Por lo que se busca no intentar hacer demasiado, ya que los temas idealmente deberían tener un enfoque singular; deben estar relacionados, pero no superponerse; y que los temas se dirijan directamente su pregunta de investigación.

Fase 6 Produciendo el reporte: Es la fase final del análisis, es la producción de un informe, como un artículo de revista o una disertación.

Contexto y participantes

La investigación se desarrolló con 34 aspirantes del Programa de Licenciatura en Matemáticas, ofertado la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, México., ubicada en la Ciudad de Chilpancingo de los Bravo, Guerrero. El programa (plan 2009) oferta cuatro especialidades; Matemáticas básicas, Ciencias de la computación, Estadísticas y Matemática Educativa y se cursan en ocho semestres.

De los 34 aspirantes que participaron, 14 eran mujeres y 20 hombres de entre 17–22 años de edad, provenientes de cinco de las siete regiones del estado de Guerrero. Al momento de la toma de datos, los estudiantes se encontraban en el curso de inducción a la Licenciatura en Matemáticas.

Recolección de datos

La recolección de datos se llevó a cabo a través de entrevistas semiestructuradas basadas en un protocolo previamente diseñado. Estas fueron audiograbadas para su posterior transcripción por el primer autor y tres estudiantes de Doctorado.

Protocolo de la entrevista

Para la recolección de datos se utilizó un protocolo que contenía las secciones de, biografía narrativa (Tabla 1), motivos y carrera (Tabla 2), motivación, emociones, metas y objetivos, y obligaciones y deberes. Para el presente reporte sólo nos enfocaremos en la sección de *Motivos y carrera*.

Tabla 1. Preguntas referentes a su biografía

Biografía narrativa • ¿Me podrías contar un poco sobre tu familia? ¿A que se dedican? ¿Qué han estudiado? • ¿Me podrías decir a que te has dedicado a lo largo de tu vida? • ¿Me podrías contar sobre tu formación académica? ¿Dónde has estudiado? ¿Qué estudiabas ahí? ¿Qué te motivo a estudiar en esos lugares? ¿Qué te gusto y qué te disgusto de haber estudiado en esos lugares?

- Cuéntame sobre tu trayectoria escolar ¿Qué materias te han gustado? ¿Por qué? / ¿Qué materias has reprobado? ¿A qué atribuyes haber reprobado? / ¿Qué cosas te han gustado de la prepa? ¿Por qué? / ¿Qué cosas te han disgusta de la prepa? ¿Por qué?
- Cuéntame la historia de su vida en relación con las matemáticas
- Tomando en cuenta toda su vida cuéntame algunas experiencias positivas con las matemáticas ¿por qué experimentaste todo eso?
- Tomando en cuenta toda su vida cuéntame algunas experiencias negativas con las matemáticas ¿por qué experimentaste todo eso?
- ¿Alguna otra experiencia positiva o negativa que quieras contarme?

Tabla 2. Preguntas acerca de los motivos para la elección de la carrera de Matemáticas

Motivos para la elección de carrera de Matemáticas

- ¿Podrías decirme tus razones y motivos que tienes para estudiar la carrera de matemáticas aquí en la Unidad Académica de Matemáticas de a UAGro?
- ¿Alguna otra razón o motivo que tuviste para estudiar la carrera aquí?
- ¿Cuáles consideras son tus principales metas u objetivos de estudiar la carrera de matemáticas?
- ¿Qué expectativas tienes de trabajo y empleo al estudiar la carrera de matemáticas?
- ¿Después de la carrera de matemáticas quieres seguir estudiando? ¿Por qué si o por qué no?.. ¿Por qué quieres estudiar eso?

Análisis de datos

Para el análisis de datos se empleo el análisis temático propuesto por Braun y Clarke (2006), que consiste en seis fases: (1) familiarización con los datos, (2) generando códigos iniciales, (3) buscando los temas, (4) revisando temas potenciales, (5) definiendo y nombrando temas, y (6) produciendo el reporte.

Fase 1: Familiarización con los datos
Las entrevistas fueron transcritas en su totalidad por el primer y segundo autor de la investigación, lo que permitió el primer acercamiento a la familiarización de los datos. El segundo acercamiento se realizó con la lectura repetida de las transcripciones y la discusión sobre los aspectos del contexto de los participantes.

Fase 2: Generando códigos iniciales
Se analizaron y codificaron por separado cada entrevista, identificando aquellos extractos en donde los participantes declaraban los motivos que tuvieron para elegir estudiar la carrera de matemáticas. Al triangular los extractos se identificaron 177 razones, mismos que quedaron agrupados en 93 códigos (Tabla 3. Ejemplo de codificación de extractos).

Tabla 3. Ejemplo de codificación de extractos

Extracto	Código acordado
Estudiante 2; ... si estoy aquí echándole ganas puedo salir, de aquí si dios quiere y ahora si llevando las matemáticas en mi y regresar a mi pueblo y dar clases es lo que mas me motiva, regresar a mi municipio de donde soy y decir si puede y si se puede	• Tener/terminar una carrera • Ser profesor • Regresar a su pueblo • Reconocimiento de los demás
Estudiante 6; ...quiero estudiar matemáticas porque me ayudaría a tener un buen trabajo y aparte me estarían pagando por lo que me gusta hacer, hacer matemáticas, enseñar matemáticas y eso	• Tener/terminar una carrera • Ser profesor • Ganar dinero • Estudiar matemáticas • Hacer matemáticas • Tener trabajo

Fase 3: Buscando temas
A partir de los 93 códigos, los autores buscaron los temas potenciales agrupando los códigos que compartían algunos rasgos para describir un patrón coherente de significado en los datos, como se ejemplifica en la Tabla 4.

Tabla 4. Ejemplo de conformación de temas

Tema	Código
Me gustan las Matemáticas (19)	• Gusto por la matemática • Pasión por las matemáticas
terminar una carrera (17)	• tener/terminar una carrera • Obtener una profesión • Ser licenciada en matemáticas
Superarme social y económicamente (15)	• Superarse • No quiere ser discriminada por no tener estudios • Reconocimiento de los demás como estudiante de matemáticas • Participar en proyectos de ciencia • Ser reconocido al relacionarse con otras ciencas • Ganar dinero • Superarse • Obtener recursos economicos • Trabajo muy bien remunerado • Reconocimiento de los demás

Fases 4 y 5: Revisando temas potenciales y definiendo los temas
A través de la triangulación entre todos los autores, los temas fueron revisados y validados, quedando un total de 21 temas que expresamos como motivos para elegir la carrera de Matemáticas

Tabla 6. Ejemplo de reestructuración de temas y grupo de motivos

Motivos de elección de carrera
1. Me gustan las matemáticas
2. Terminar una carrera
3. Superarme social y económicamente
4. Ser profesor
5. Tener un trabajo
6. Estudiar un posgrado
7. Corresponder al soporte económico y afectivo de mi familia
8. Ayudar a mi familia
9. Ayudar a las personas de mi pueblo
10. La institución tiene un plan de estudios que me gustó
11. La institución se encuentra cerca de mi lugar de origen
12. La institución ofrece soporte académico y recursos económicos a los estudiantes
13. La institución tiene profesores con posgrado
14. La institución tiene prestigio
15. Saber más matemáticas
16. Ingresar a otra carrera
17. Soy bueno para las matemáticas
18. Es un reto personal que asumo
19. Otros dicen que soy bueno para las matemáticas
20. Recomendación de uno de mis profesores de matemáticas
21. Recomendación de algunos de mis familiares y amigos

Fase 6: Produciendo el reporte
En esta fase se presenta un ejemplo del tema: *Aprender matemáticas.*
Los aspirantes que expresaron como motivo “aprender matemáticas” para elegir estudiar la carrera de matemáticas:

- *Estudiante 31*: "Poder saber más, el conocimiento es lo que me motiva".
- *Estudiante 17*: "una razón sería porque me gusta y me gustaría conocer un poco más de las matemáticas".
- *Estudiante 5*: "otro de mis motivos aparte de estudiar la carrera fuera de eso, yo quiero aprender más de matemáticas"
- *Estudiante 21*: "Vengo a aprender más sobre matemáticas y a aprender a ser, cómo ser maestro y esos son mis motivos".

Resultados

Los resultados se sistematizan en la figura 1. La primera columna hace referencia al grupo de motivos que permitió una mejor agrupación de los temas identificados como motivos para la elección de carrera. Para una mejor lectura se insertó la segunda columna. Lo que permite leerse, por ejemplo; *Elegí estudiar la carrera porque espero terminar una carrera*.

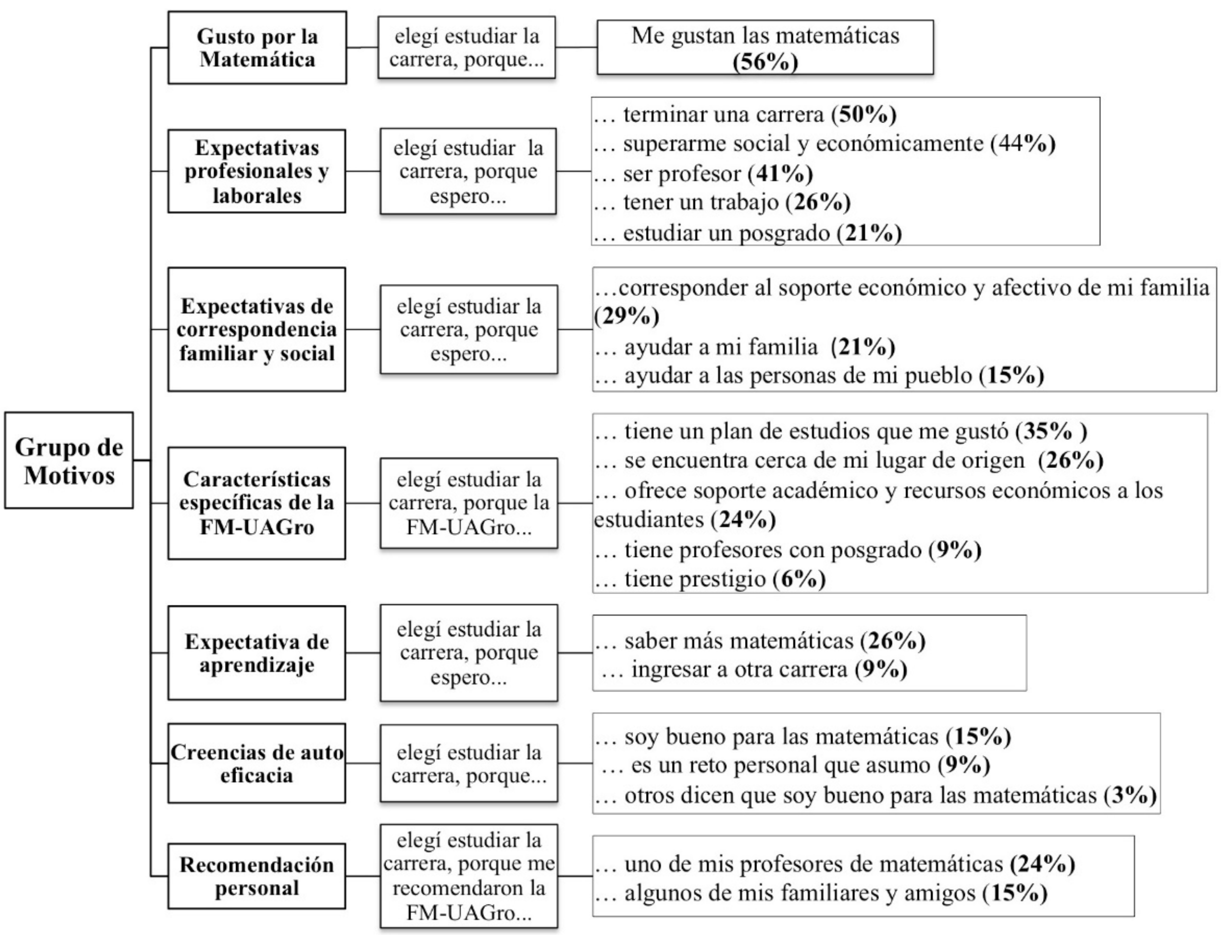


Figura 1. Motivos para la elección de la carrera de Matemáticas. (Elaboración propia)

Conclusiones

En su mayoría, los aspirantes a la licenciatura en Matemáticas que participaron en la investigación, manifestaron que eligieron estudiar la carrera porque sienten *gusto por las matemáticas*, *desean terminar una carrera*, *superarse social y económicamente* y *ser profesor de matemáticas*, estos no difieren del todo de los encontrados por Carrasco y Sánchez (2016) y Manzano y Sánchez, (2017).

Referencias bibliográficas

Braun V., y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology 3(2),* 77-101. DOI: 10.1191/1478088706qp063oa

Carrasco, L., y Sánchez. M. (2016). Factores que favorecen la elección de las matemáticas como profesión entre mujeres estudiantes de la Universidad Veracruzana. *Perfiles Educativos 37(151)*, 123-138.

Hannula, M. S. (2006). Motivation in mathematics: Goals reflected in emotions. *Educational studies in mathematics*, 63(2), 165-178.

Manzano, R. I., y Sánchez, M. (2017). Qué motiva a las mujeres a estudiar matemáticas: un estudio de caso. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática 49*(49), 163-180.

Universidad Autónoma de Guerrero. (2009). *Plan de estudios de la Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero*. México: Autor.

Watt, H. M., Hyde, J. S., Petersen, J., Morris, Z. A., Rozek, C. S., & Harackiewicz, J. M. (2016). Mathematics—a Critical Filter for STEM-Related Career Choices? A Longitudinal Examination among Australian and US Adolescents. *Sex Roles*, 1-18.

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

SECCIÓN 4 / EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

LA IDENTIDAD DISCIPLINAR: UN INSTRUMENTO DE RECUPERACIÓN DE LAS ARGUMENTACIONES AUTÓNOMAS DEL DOCENTE EN FORMACIÓN

Claudio Enrique Opazo Arellano, Francisco Cordero Osorio y Héctor Alejandro Silva-Crocci
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Universidad de Santiago de Chile. (México, Chile)
copazo@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx, hector.silva.c@usach.cl

Resumen
En este escrito reportamos las reflexiones que emergieron en la comunicación breve presentada en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa Número 31. Discutimos el papel de la identidad disciplinar en la formación inicial del docente de matemáticas en una comunidad de conocimiento específica de Chile. País que se ha propuesto mejorar la calidad de la educación a partir de orientar los esfuerzos y recursos -principalmente- a la formación inicial. Así pues, abordamos nuestro proyecto de doctorado a la luz de un programa de investigación socioepistemológico, el cual tiene por objetivo revelar los usos y resignificaciones del conocimiento matemático. Planteamos -entonces- la necesidad de conformar un nuevo marco de referencia desde los usos del conocimiento matemático de la gente; en este caso, de los docentes en formación de matemáticas de la Universidad de Santiago de Chile.

Palabras clave: Matemática escolar, Usos del conocimiento matemático, Resistencia.

Abstract
In this paper we deal with the reflections that emerged in the brief report presented in the 31st RELME. We discuss the role of the disciplinary identity in the initial training of the mathematics teacher in a community of knowledge in Chile. This country intends to improve the quality of education by addressing their efforts and resources, mainly, to initial training. Thus, we approach our doctoral project in the light of a socio-epistemological research program, which aims to reveal the uses and re-significations of mathematical knowledge. Then, we propose the need to make up a new reference framework from the uses of people's mathematical knowledge; in this case, of the mathematics teachers in training at the University of Santiago of Chile.

Key words: school mathematics, uses of mathematical knowledge, resistance

Introducción

En este escrito reportamos los avances del proyecto de doctorado que versa sobre el papel de la identidad disciplinar en la formación inicial del docente de matemáticas, tomando como estudio de caso a un programa específico de Chile.

Se plantea, en este sentido, la siguiente premisa: la matemática escolar ha olvidado los usos y resignificaciones del conocimiento matemático de la gente. Por lo cual, es indispensable recuperarlos y promover su reciprocidad con la matemática escolar. Para atender la premisa señalada será primordial especificar la función del docente de matemáticas, a saber: mantener los entornos de reciprocidad entre la matemática escolar y la realidad del que aprende (Cordero, 2016b).

En este escenario emerge el constructo teórico de identidad disciplinar, el cual tendrá una función de naturaleza dual: por un lado, será el instrumento que recupere los usos del conocimiento matemático y, por el otro, defina la función del docente de matemáticas. En efecto, se espera configurar un nuevo marco de referencia que responda a la funcionalidad del conocimiento matemático. Es decir, considerar la matemática de la gente, los usos del conocimiento matemático del otro y las argumentaciones autónomas del que aprende. Aspectos que explicaremos a continuación.

Problemática

Líneas de investigación bajo la Teoría Socioepistemológica (Cantoral, 2013; Cordero, 2001; Opazo-Arellano, 2014; Pérez, 2012; Parra, 2015; Méndez, 2015; Yerbes, 2016; Zaldívar, 2014), han reportado que los usos del conocimiento matemático de la gente no están presentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar. Esto implica que la funcionalidad del conocimiento matemático que emerge desde la realidad de la gente queda excluida.

Bajo este contexto, el conocimiento matemático que es propio de la gente: en la escuela, en el trabajo u oficio, o en sus realidades, lo contextualizaremos con la noción de sujeto olvidado (Cordero, 2016b). La tensión, en este sentido, es inevitable; ya que, por un parte, las nuevas propuestas del Ministerio de Educación de Chile impulsan la articulación entre la matemática escolar y el cotidiano de la gente. En términos llanos, la idea es importante y una tarea a considerar dentro de los cambios educativos. Empero, por la otra, los docentes de matemáticas viven la indefinición disciplinar. De ahí que surgen las siguientes preguntas: ¿Cuál es el Marco de Referencia que el docente de matemáticas tiene para articular la matemática escolar con la realidad del que aprende?, ¿Cómo la formación inicial del docente de matemáticas vincula y motiva la reciprocidad entre la matemática escolar y la realidad del que aprende? Por último ¿Conocemos el cotidiano del que aprende? En este documento haremos algunos señalamientos al respecto.

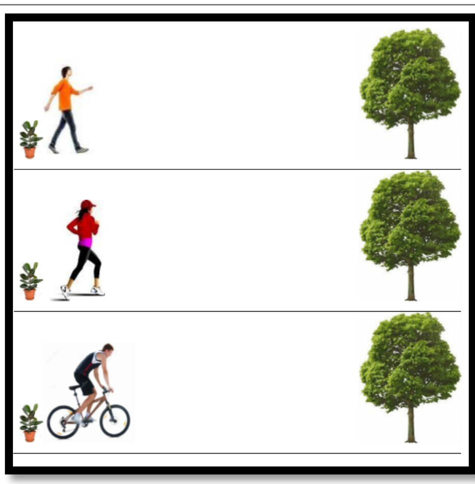
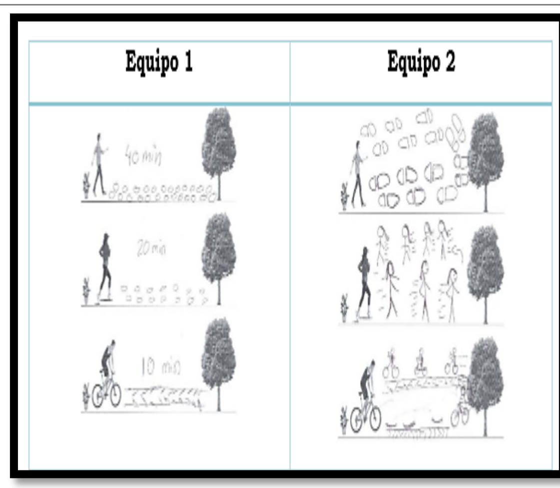
Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto (2015), dan cuenta del discurso Matemático Escolar (dME) y los fenómenos que éste provoca: adherencia, exclusión y opacidad. El dME norma la enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar. De ahí que impone ciertos significados, procedimientos y argumentaciones (Soto y Cantoral, 2014). La naturaleza del dME es de carácter hegemónica, utilitaria y con una centración al objeto matemático.

Por la naturaleza del dME, los usos del conocimiento matemático de la gente son excluido de la construcción social del conocimiento matemático. Esto quiere decir que las argumentaciones autónomas de la gente están ausentes en la matemática escolar. Éstas, surgen de la reciprocidad entre matemática funcional y la realidad del que aprende.

Un ejemplo de estas argumentaciones autónomas es el trabajo de Méndez (2015). La investigación buscó conocer los usos del conocimiento matemático de una comunidad de sordos. Para tal fin, Méndez (2015) formuló una situación de traslado; vale decir, se busca que el estudiante bosqueje cómo sería ir de un punto A a un punto B. Particularmente, en la situación escolar de socialización que se formuló se dispone de tres escenarios: primero, cuando una persona camina de un macetero a un árbol; segundo, cuando una persona trota del macetero a un árbol; o, cuando la persona va sobre una bicicleta desde un macetero a un árbol. Para cada uno de estos escenarios, se contempla que la persona regrese del árbol a su posición inicial (ver tabla 1).

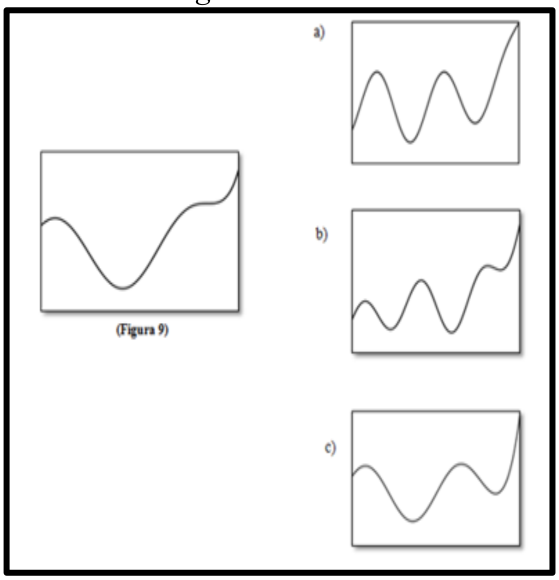
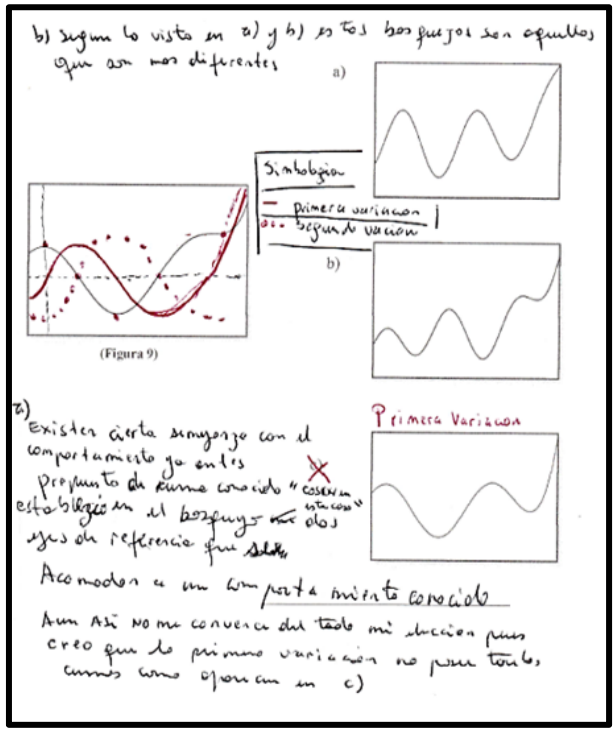
En los significados de cada una de las argumentaciones autónomas -señaladas en la tabla 1- es posible evidenciar los usos del conocimiento matemáticos de la comunidad sorda. Ya que se reconocen elementos de construcción que en la enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar no se consideran. En este caso, por ejemplo, la cantidad de pasos, la profundidad del mismo y la relación del tiempo son factores que se articulan con la persona que realiza la tarea. Es decir: importa quien camina, quien trota y quien está sobre la bicicleta. Importa el otro y su construcción del conocimiento matemático.

Tabla 1. *Usos del conocimiento matemático de la comunidad sorda* (Méndez, 2015).

Situación de traslado	**Argumentaciones autónomas de la comunidad sorda**
	

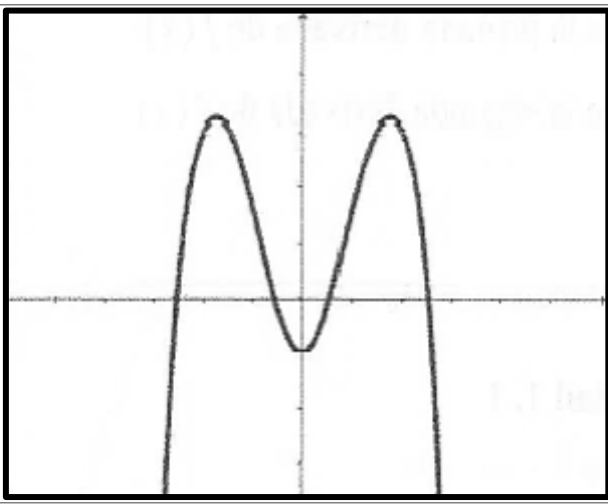
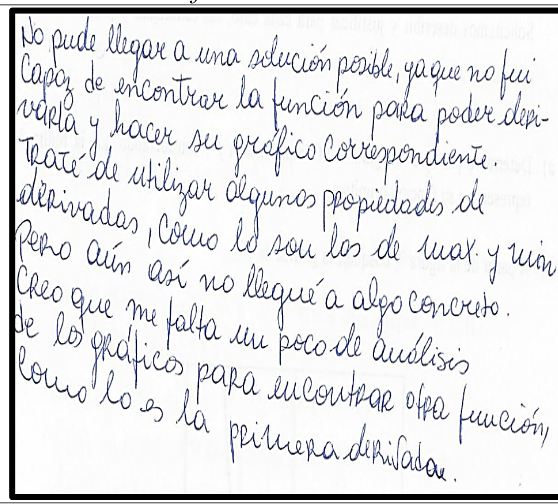
Otro ejemplo, son los usos del conocimiento matemático de los docentes en formación de matemáticas de Chile. Comunidad de conocimiento matemático que construyó el comportamiento tendencial de una función a partir de un patrón deseable (ver tabla 2).

Tabla 2. *Actividad del uso de la curva* (Opazo-Arellano, 2014)

<table>
<tr><th>Curva de la derivada</th><th>Argumentaciones autónomas del docente en formación de matemáticas de Chile</th></tr>
<tr><td>La Figura 9 es una curva cualquiera. Determine cuál(es) de la(s) figura(s) -a,b,c- representa(n) de mejor forma la primera variación de la Figura 9. Además, determine la segunda variación.

</td><td>
</td></tr>
</table>

Para tal fin, el docente en formación de matemáticas enfrentó una situación escolar de socialización que buscó identificar un patrón gráfico y a partir de él construir una tendencia gráfica. Lo anterior, fue posible ya que la situación escolar de socialización se conformó desde la funcionalidad del conocimiento matemático del que aprende. Sin embargo, la construcción de un sistema de referencia y con ello la construcción de la gráfica a partir de un análisis local; expresa -desde nuestra perspectiva- la argumentación autónoma que está opacada en la enseñanza y aprendizaje de la derivada. Ya que prevalecen otras, por ejemplo: el desarrollo de la derivación -cálculo de la derivada de una función específica (ver tabla 3)- por sobre el Comportamiento Tendencial de las Funciones (Cordero, 2001).

Tabla 3. El síntoma del uso de la gráfica en la derivada (Opazo-Arellano, 2014).

El síntoma del uso de la gráfica de la derivada	*Centración al objeto matemático en el docente en formación de matemáticas*
	 No pude llegar a una solución posible, ya que no fui Capaz de encontrar la función para poder derivarla y hacer su gráfico Correspondiente. Traté de utilizar algunos propiedades de derivadas, como lo son los de max. y min Pero aún así no llegué a algo concreto. Creo que me falta un poco de análisis de los gráficos para encontrar otra función, como lo es la primera derivada.

En consecuencia, hemos evidenciado -por una parte- el papel del dME y -por otra- las argumentaciones autónomas que surgen de las comunidades de conocimiento matemático a partir de una situación específica.

Fundamentos teóricos

Con este sentir, nos hemos dado la tarea de estudiar una comunidad específica con el objetivo de conocer cómo usan su conocimiento matemático. En Opazo-Arellano (2014) se abordó el estudio de la comunidad de docentes en formación de dos instituciones de educación superior de Chile, caracterizando el papel del dME en la formación inicial de los nuevos docentes de matemáticas. En este sentido se expresa un proceso que no permite al docente en formación cuestionar la matemática escolar, por ende, tampoco trastocar ni transformar el dME. Por lo anterior, se planteó la adherencia al dME que afecta al docente en formación de matemáticas. Esto es, una epistemología dominante que norma la formación del docente de matemáticas y que provoca una exclusión a la construcción social del conocimiento matemático al no ser visible sus usos del conocimiento matemático (Cordero et al., 2015).

El docente en formación queda inmerso en lo que llamamos una centración al objeto matemático. En consecuencia, se genera una desventaja disciplinar ya que sus usos del conocimiento matemático que responden a una funcionalidad son opacados, por lo cual la realidad del que aprende se puede entender como un sujeto olvidado en la enseñanza de la matemática escolar.

Con este panorama es indispensable recuperar y revelar los usos del conocimiento matemático de esta comunidad. La identidad disciplinar es el instrumento de recuperación de los usos del conocimiento matemático de los docentes en formación inmersos en un proceso de formación inicial en Chile.

Así pues, se espera desarrollar un proceso que permita una descentración de los objetos matemático a partir de la recuperación de cómo y para qué usan el conocimiento matemático; es decir, donde viven ciertos significados, procedimientos y argumentaciones asociadas a una comunidad específica. Además, se busca favorecer una resistencia al dME; en función de incluir los usos y resignificaciones del conocimiento matemático de la gente.

La función del docente -entonces- es definida simultáneamente por la identidad disciplinar, ya que se encargará de mantener entornos de reciprocidad entre la matemática escolar y la realidad del que aprende a partir del diseño de situaciones escolares de socialización (Cordero, 2016b). Las situaciones escolares de socialización tienen como propósito generar la reciprocidad entre dos epistemologías de distinta naturaleza, por consiguiente, será fundamental conformar una epistemología robusta orientada por los usos del conocimiento matemático de la gente y por aquellos elementos que permanecen en el tiempo en la enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar.

Destacamos que la función del docente se va a ampliar por las investigaciones que se desarrollen en torno a la Matemática Educativa y por las inmersiones que se tengan en torno a la formación del docente de matemáticas. Así, la función del docente será un constructo teórico y una orientación sobre el papel del docente de matemáticas desde la construcción social del conocimiento matemático (ver figura 1).

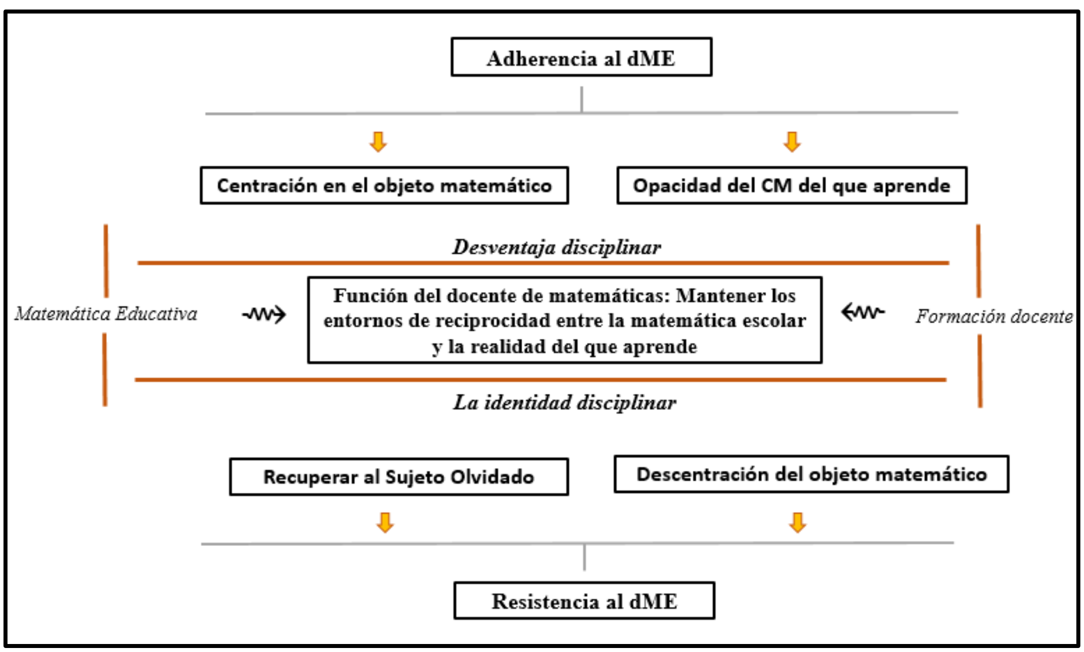


***Figura 1*: Esquema general del Proyecto. Un programa permanente.**

Aspectos Metodológicos

Dado el planteamiento realizado y el objetivo propuesto en el Programa Socioepistemológico: Sujeto Olvidado y la Transversalidad de Saberes (Cordero, 2016a; Cordero, 2016b); proponemos como herramienta metodológica para revelar y dimensionar los usos del conocimiento matemático de los docentes en formación de matemáticas de la Universidad de Santiago de Chile, el Modelo de Comunidad de Conocimiento Matemático (Cordero, 2016a). Éste, nos permitirá codificar cómo usan el conocimiento matemático los docentes en formación a partir de una situación específica. Para ello se conformó una traída, a saber: reciprocidad, intimidad y localidad. Y, dos ejes, la institucionalización e identidad (ver figura 2).

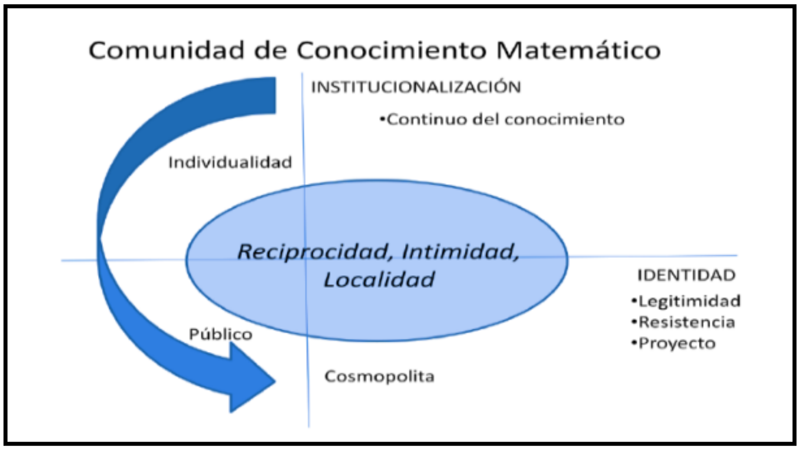


***Figura 2*: Modelo de Comunidad de Conocimiento Matemático (Cordero, 2016a).**

Será por medio de la situación escolar de socialización, esto quiere decir, donde se crean permanentemente entornos de reciprocidad y horizontalidad entre la matemática escolar y la realidad del que aprende (Cordero, 2016b); que vamos a evidenciar cómo usan el conocimiento matemático los nuevos docentes de matemáticas.

Para revelar cómo usan el conocimiento matemático los docentes en formación, se debe en primera instancia recuperar el conocimiento del que aprende. Para tal fin, la identidad disciplinar, en el contexto de la formación inicial del docente de matemáticas, será el instrumento que permita la recuperación. Asimismo, la encargada de definir la función del docente de matemáticas. Así pues, el Modelo de Comunidad de Conocimiento Matemático nos permitirá entender la naturaleza de los usos del conocimiento del que aprende. Esto implica, conocer su realidad.

Conclusiones

En resumen, la ausencia de los usos del conocimiento matemático del que aprende permite evidenciar el papel del discurso Matemático Escolar en la enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar. Ante esto, proponemos a la identidad disciplinar como un instrumento de recuperación de los usos del conocimiento matemático de los docentes en formación de matemáticas y a la vez quien define la función del docente de matemáticas.

De esta forma, se pretende conformar un nuevo Marco de Referencia de la formación del docente de matemáticas a partir de la funcionalidad del conocimiento matemático que emerge desde su realidad, su cotidiano y sus propias argumentaciones autónomas.

Destacamos que el constructo función del docente está en construcción, sin embargo, hemos precisado su rol en nuestra discusión; esto es: mantener los entornos de reciprocidad entre la matemática escolar y la realidad del que aprende.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(2), 103-128.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H., y Soto, D. (2015). *El Discurso Matemático Escolar: la Adherencia, la Exclusión y la Opacidad*. Barcelona: Gedisa.

Cordero, F. (2016a). Modelación, funcionalidad y multidisciplinaridad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz (Eds.), *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa*. Barcelona: Gedisa.

Cordero, F. (2016b). La función social del docente de matemáticas: pluralidad, transversalidad y reciprocidad. En S. Estrella, M. Goizueta, C. Guerrero, A. Mena, E. Montoya, A. Morales, M. Parraguez, E. Ramos, P. Vásquez y D. Zakaryan (Eds). *XX actas Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 23-30), ISSN 0719-8159. Valparaíso: SOCHIEM, IMA-PUCV. Recuperado de http://ima.ucv.cl/xxjnem.

Méndez, C. (2015). *Comunidad de conocimiento matemático de sordos*. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Opazo-Arellano, C. (2014). *El uso de las gráficas y el fenómeno de opacidad. El caso del concepto de derivada en los estudiantes de pedagogía en matemáticas en Chile*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Parra, T. (2015). *Los usos de la cantidad de una comunidad de conocimiento matemático Hñähñu. Del trueque y la curación al comercio de papel amate.* Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. D., F. México

Pérez, R. (2012). *Usos de la oralidad numérica Ñuu savi*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. D., F. México.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). El discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una visión Socioepistemológica. *Bolema- Boletim de Educação matemática, 28* (50), 1525-1544.

Yerbes, J. (2016). *El rol de los constructos Cotidiano y Matemática Funcional en la Matemática Educativa: sus diversidades ontológicas y epistemológicas*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Zaldívar, D. (2014). *Un estudio de la resignificación del conocimiento matemático del ciudadano en un escenario no escolar*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

SIGNIFICADO REFERENCIAL VERSUS SIGNIFICADO PRETENDIDO: UN CONTRASTE ENTRE LO ESTABLECIDO Y LO PLANIFICADO PARA EL TEMA DE LAS ECUACIONES LINEALES EN EL BACHILLERATO MEXICANO

Raúl Alonso Ramírez Escobar, Silvia Elena Ibarra Olmos
Universidad de Sonora. (México)
raul_itnogales@outlook.com, sibarra@mat.uson.mx

Resumen
Se muestran los resultados de un estudio realizado con el objetivo de analizar la correspondencia entre los significados institucionales de referencia establecidos por el currículum algebraico mexicano y los significados institucionalmente pretendidos, expuestos en libros de texto y planeaciones didácticas de profesores de bachillerato, con respecto al tema de las ecuaciones lineales. Esta investigación tiene sustento en herramientas teóricas del Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos propuesto por Godino y sus colaboradores. Los análisis realizados muestran la importancia y el alto impacto que tiene el currículo en las planeaciones docentes, evidenciando con ello el cuidado que debe ponerse en su elaboración. Además, se resaltan las diferencias identificadas, las cuales se relacionan con la formación del profesorado y las circunstancias institucionales, mismas que juegan un papel importante para que existan diferencias entre lo pretendido por el currículo y lo pretendido por los profesores.

Palabras clave: significados referencial y pretendido, ecuaciones lineales.

Abstract
This research work shows the results of a study that seeks to analyze the correspondence between the reference institutional meanings established by the Mexican algebraic curriculum and the institutionally expected meanings, set out in the textbooks and in the didactic planning of the high school teachers with respect to the subject of linear equations. This research is based on theoretical tools of the Onto-Semiotic Approach (OSA) of Knowledge and Mathematical Instruction proposed by Godino and his collaborators. The analyses carried out demonstrate the importance and great impact of the curriculum on teaching planning, thus showing how careful its elaboration should be. Besides, we highlight the differences identified which are related to teacher training and institutional circumstances, the ones that play an important role in the existence of differences between what the curriculum claims and what teachers intend to do.

Key words: referential and intended meanings, linear equations.

Introducción

La enseñanza de las ecuaciones lineales posee gran importancia dentro de la trayectoria curricular mexicana, debido a que el tema tiene presencia desde la educación básica hasta la educación superior. Filloy, E., Rojano, T., & Puig, L. (2008) señalan la relación de este tema con situaciones asociadas a las vivencias y a la cotidianidad de los estudiantes. Asimismo, investigadores como Panizza M., Sadovsky P., & Sessa C. (1996) declaran que esta noción matemática es un tema representativo del álgebra por sus antecedentes en la matemática escolar, así como por el alto impacto que tiene en la formación de los estudiantes para niveles superiores.

En el caso del bachillerato (13-15 años) en México, nivel educativo que se rige desde el año 2008 por un modelo de educación basado en competencias, un ejemplo típico de los documentos oficiales que establecen la manera en la que los profesores deben llevar a cabo el proceso de enseñanza de las matemáticas, son los programas de materia o currículos. Éstos constituyen la primera referencia del profesor a la hora de planificar el proceso de instrucción, pues en él se declara cómo abordar cada noción matemática durante el curso.

A partir de esta información de referencia, el profesor como representante de la institución es quien debe planificar cuáles serán los sistemas de prácticas que promoverá en el aula.

En ese sentido, una de las principales alternativas para los profesores es llevar a cabo planificaciones didácticas en las que se organiza la información sobre los qué, cómo, en cuánto tiempo, para qué, por qué, e incluso, sus estrategias, criterios e instrumentos para llevar a cabo la evaluación del aprendizaje matemático, así como la bibliografía sugerida para el curso. Además de los planes de clase, habitualmente el libro de texto es un recurso material utilizado frecuentemente por los docentes para desarrollar esta labor.

El estudio realizado tuvo, como propósito principal, identificar cuáles son los sistemas de prácticas que se promueven de manera oficial a través del currículo para el tema de ecuaciones lineales (significado institucional de referencia) y cuáles son los sistemas de prácticas que se planifican a partir de lo establecido (significado institucional pretendido), así como sus respectivas similitudes y diferencias.

En el siguiente apartado se presentarán las nociones teóricas que fueron seleccionadas para sustentar la realización del estudio y los análisis correspondientes. Posteriormente se presenta la metodología que se siguió en cada una de las etapas de esta investigación. Después se presentan los resultados obtenidos sobre los diferentes significados, es decir, sobre los significados pretendidos por el currículo de dos diferentes subsistemas del bachillerato mexicano, así como los significados pretendidos por los profesores, pertenecientes a esos subsistemas. Finalmente se expone una reflexión sobre la representatividad del significado global de referencia de la ecuación lineal en los significados pretendidos por el currículo y los profesores.

Marco teórico

La teoría empleada en el estudio fue el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (Godino & Batanero, 1994; Godino, Batanero & Font 2007). En las líneas que siguen se hace un recorrido por las herramientas teóricas utilizadas.

En el EOS el significado de un objeto matemático se define como el "sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona (o una institución) realiza para resolver una cierta clase de situaciones–problemas en las que dicho objeto interviene" (Pino-Fan, 2014, p. 45). Así, el significado de un objeto matemático puede ser visto desde dos perspectivas, institucional y personal, lo cual da origen a la tipología de los significados institucionales y significados personales respectivamente. Sin embargo, los significados considerados para la realización del estudio, forman parte de los significados institucionales.

En ese sentido, considerando que el interés se centró en la noción de ecuación lineal, y tomando en cuenta que se llevaría a cabo un estudio sobre los significados pretendidos por el currículo, así como de los significados pretendidos por los profesores respecto a esta noción matemática, fue necesario plantear un objetivo que diera la pauta para identificar y establecer (al menos de manera general) cuáles son los significados que la mencionada noción ha ido adquiriendo, así como los usos o formas de ver a la ecuación lineal con el paso del tiempo. Dicho estudio, en términos del EOS, se asemeja a una propuesta de lo que sería el significado holístico o global de referencia de la noción, la cual se describirá más adelante.

Metodología

La investigación se realizó bajo un enfoque cualitativo, en tres etapas. En la primera se llevó a cabo una revisión sobre la historia y evolución de las ecuaciones lineales durante el paso del tiempo; como segunda etapa se realizó un análisis ontosemiótico de los programas oficiales de la materia de álgebra, libros de texto y planeaciones didácticas del curso; en la tercera etapa mediante un estudio de casos, se realizó el seguimiento de los sistemas de prácticas puestas de manifiesto por dos profesores en el proceso de planificación del tema.

Para efectos de esta investigación se decidió llevar a cabo una selección de profesores que formaran parte de diferentes subsistemas de bachillerato mexicanos. Esta selección se realizó a partir de un proceso de indagación basado en la aplicación de cuestionarios, dirigidos a un conjunto de profesores del estado de Sonora, México, que se encontraban en activo impartiendo el curso de álgebra, con el fin de conocer sus principales características respecto a su formación didáctico-disciplinar, su experiencia, y otros aspectos relacionados con sus prácticas. Así, finalmente se eligieron a dos profesores que pertenecen a los dos subsistemas de bachillerato con mayor cobertura en México (bachillerato general y tecnológico), según la Subsecretaría de Educación Media Superior (SEMS, 2016). Para efectos de esta investigación se designarán a los dos profesores como "profesor A" (asociado al bachillerato tecnológico), y "profesor B" (asociado al bachillerato general).

A partir de la siguiente sección, se desarrolla el análisis de la información generada en cada una de las fases de la investigación, con lo cual se logró caracterizar a los significados institucionales (pretendido y referencial) de la noción de ecuación lineal. En la siguiente sección aparece, por motivos de espacio, una síntesis de la reconstrucción del significado holístico de referencia de la noción de ecuación lineal, y posteriormente se determina cuál es el significado pretendido por el currículo (programas de estudio) así como el significado pretendido por los profesores en estudio para dicha noción matemática. Para ambos significados la base para su descripción y análisis son las nociones teóricas del EOS ya expuestas.

Resultados

Considerando el interés en determinar cuáles son los significados pretendidos por el currículo mexicano y por los profesores, respecto de la ecuación lineal, fue necesario identificar y establecer (al menos de manera general) cuáles son los significados que ha ido adquiriendo dicha noción a lo largo de la historia; es decir, sus usos y las diversas formas de ver y de entender a la ecuación lineal con el paso del tiempo. Dichos significados pudieran considerarse como una propuesta de acercamiento al significado global de referencia de dicho objeto matemático.

> El significado global de referencia se define a partir de dos nociones: significado global (también denominado significado holístico u holosignificado, comprende los diferentes significados parciales de un objeto matemático) y significado de referencia (entendido como los sistemas de prácticas que se usan como referencia para elaborar los significados que se pretenden incluir en un proceso de estudio. Para una institución de enseñanza concreta, el significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto). (Pino-Fan, Godino & Font, 2011, p.147).

Estos autores señalan que los significados parciales están asociados a las configuraciones epistémicas que se movilizaron al resolver situaciones problemas, en determinados períodos históricos, que dieron paso al surgimiento, evolución, formalización y generalización de determinado objeto matemático, en nuestro caso, la ecuación lineal.

La revisión de trabajos de carácter histórico-epistemológicos de álgebra, y en particular sobre la noción de ecuación lineal, permitió corroborar cómo dicha noción fue adquiriendo diversos significados a lo largo del tiempo; a través del uso en la resolución de situaciones-problemas relacionadas con aritmética, geometría y el álgebra misma, además de las diversas representaciones gráficas y simbólicas empleadas en ello.

En ese sentido, fue posible determinar siete significados parciales como propuesta del significado global de referencia para esta noción matemática, los cuales serán utilizados para poder llevar a cabo los contrastes pertinentes en los análisis que se mostrarán más adelante. Dichos significados parciales se enlistan a continuación, aunque por cuestiones de espacio no será definido cada uno de ellos. Sin embargo, en la descripción del análisis de los resultados se pondrán en evidencia los objetos y prácticas matemáticas movilizadas, haciendo referencia a los significados que aquí se describen.

1. La ecuación lineal como medio para la deducción de valores desconocidos.
2. La ecuación lineal como representación de la relación entre magnitudes.
3. La ecuación lineal como relación de proporcionalidad.
4. La ecuación lineal como modelo lineal.
5. La ecuación lineal como la recta en su representación gráfica.
6. La ecuación lineal como relación funcional.
7. La ecuación lineal como expresión analítica.

Es importante aclarar que los significados que aquí se proponen pudieran ser profundizados en algún otro trabajo, ya que en éste, por motivos de espacio, se presentan de forma sucinta con la intención de poder hacer contrastes entre los significados pretendidos por el currículo (significado referencial), y el significado pretendido por los profesores en estudio, y así poder establecer algunas conclusiones al respecto.

Una vez expuesta la propuesta de los significados parciales de la noción matemática, se pasará a la exposición de los resultados obtenidos a partir de los análisis realizados a la información obtenida.

El significado referencial versus el significado pretendido del profesor A

En términos generales, el sistema de prácticas promovido desde el programa de la materia, está basado en un significado para las ecuaciones lineales centrado en la algoritmia; es decir, se enfoca en llevar a cabo prácticas orientadas a la realización de procedimientos que permitan identificar el concepto de ecuación lineal, cómo se pueden resolver y en qué tipos de situaciones-problema en contexto extramatemático se podrían llegar a utilizar. El lenguaje predominante a lo largo del bloque es el algebraico. Así mismo, a pesar de que se menciona el uso de algunas propiedades, no se hace explícita la promoción de argumentos asociados a las ecuaciones lineales, pues pareciera que el objetivo principal de aprendizaje es la ejercitación, memorización y habilidad para desarrollar técnicas procedimentales para la obtención de la solución de una ecuación de tipo lineal.

Se concluye entonces que a partir de lo planteado en el currículo del bachillerato tecnológico, los significados de ecuación lineal propuestos se centran en las acepciones de ecuación lineal como expresión analítica, como modelo lineal y como representación gráfica.

Por otra parte, a partir del análisis ontosemiótico realizado a su planificación, se identificó un interés prioritario en promover el significado de ecuación lineal como expresión analítica, pues a través de esta acepción se promueven los elementos que componen a la ecuación lineal, así como las técnicas de resolución dentro del mismo lenguaje algebraico. Otro de los significados que se hace presente en las pretensiones del profesor A es el de la ecuación como modelo lineal, pues a pesar de que la mayoría de los problemas propuestos en el texto ya incorporan el modelo algebraico con el cual es obtenida su solución, se incluyen algunos casos en los cuales si se promueve la modelación, sin embargo, la mayoría de problemas en los que esto se promueve son en contextos intramatemáticos.

El profesor también señala que, hacia la parte final tiene planificado llevar a cabo el planteamiento de problemas en los cuales se promueva la construcción de gráficas, partiendo de expresiones analíticas, en este caso, ecuaciones lineales de dos variables donde se recurra a la graficación a través de una serie de puntos previamente calculados y colocados en un registro tabular. Esta situación evidencia, sin embargo, que las acepciones de la ecuación lineal como representación gráfica y como relación funcional, se abordan de una manera muy incipiente. Así mismo se evidencia que tiene planificado que después de promover los aspectos gráficos relacionados con la ecuación lineal de dos variables, se retomen nuevamente las situaciones-problema en contexto intramatemático para reafirmar las técnicas de resolución de las ecuaciones lineales en su expresión analítica.

A partir de los argumentos anteriores, se concluye que los significados de la ecuación lineal pretendidos por el profesor A son los de ecuación como modelo lineal y como expresión analítica.

El significado referencial versus el significado pretendido del profesor B

Según lo establecido en el currículo, se evidenció un interés por promover un sistema de prácticas en el que el profesor de a conocer características y propiedades de las ecuaciones lineales, así como los conceptos y definiciones asociadas a esta noción. Posteriormente se sugiere continuar con la presentación de las técnicas y/o procedimientos necesarios para el proceso de resolución de las ecuaciones lineales planteadas. Aunado a esto, se promueven métodos en los que se hace una distinción entre las incógnitas según su tipo, es decir, cuando la incógnita es entera o fraccionaria. Se promueven aquellas propiedades de la igualdad que se encuentran relacionadas; además se declara que el profesor podrá llevar a cabo acciones que permitan describir e identificar cuál es el comportamiento que tienen las variables y las soluciones obtenidas al resolver problemas sobre ecuaciones y/o funciones lineales en situaciones-problema con contexto intramatemático. El lenguaje predominante es el algebraico, tanto para los procedimientos de resolución, como para la comprobación y validación de éstas. Sin embargo, también se sugiere el uso de los lenguajes numérico, tabular y gráfico para la representación de funciones lineales.

Es posible concluir entonces que los significados de la ecuación lineal pretendidos por el currículo del bachillerato general (profesor B) son cinco, a saber: como representación de la relación entre magnitudes, como modelo lineal, como la recta en su representación gráfica, como una relación funcional y como expresión analítica.

Una vez realizado el análisis ontosemiótico, se identificó que respecto a las prácticas pretendidas en la planeación del profesor B, las cuales varían en mayor medida de las curriculares, se encuentra el planteamiento de situaciones-problema sin contexto en las que se espera que se propongan y argumenten procedimientos para su resolución. Después se formaliza el concepto de ecuación lineal y se hace énfasis en la modelación matemática como estrategia para resolver problemas en contexto. Así mismo, a través de problemas relacionados con proporcionalidad directa, se articula el tema de ecuación y función lineal, así como sus formas de representación: algebraica, tabular y gráfica.

En ese sentido, se identificó la promoción del significado de ecuación lineal como expresión analítica, debido al interés mostrado por la exploración de técnicas para su solución y la formalización de su definición. Posteriormente se evidenció la acepción de ecuación lineal como modelo lineal, pues a través de ella se planificó el planteamiento de situaciones-problema que pueden ser modeladas y resueltas a través de una ecuación lineal, independientemente del tipo de coeficientes. Además, se logró identificar la presencia de situaciones-problema, en contextos extramatemáticos, a través de los cuales se promueve el significado de ecuación lineal como relación de proporcionalidad, pues dichas situaciones se han planificado con el fin de incentivar en los estudiantes la relación existente entre la ecuación y función lineal.

Conclusiones

El haber llevado a cabo un estudio de esta naturaleza permitió recolectar evidencias sobre la manera en la cual se concibe y implementa la evaluación del aprendizaje en matemáticas, en nuestro caso, para la ecuación lineal, así como la identificación de aquellos factores que juegan un papel determinante para la planeación de tales prácticas y, por ende, para la movilización de determinados significados parciales para dicha noción.

Primero que nada la reconstrucción del significado holístico de referencia, basado en investigaciones sobre estudios de tipo histórico-epistemológicos, permitió contar con un referente epistémico sobre la noción de ecuación lineal. Este significado fue utilizado para llevar a cabo los contrastes respecto al significado curricular y los significados pretendidos por los profesores en estudio.

Como se pudo observar, en el caso del profesor A, tanto el significado curricular como su propio significado pretendido, fueron muy similares, situación que ocasionó que la promoción de los diversos significados de la noción fuera igual de limitada respecto al significado holístico de referencia. Dicha situación jugó un papel fundamental sobre sus prácticas, debido a que el profesor argumentó la necesidad de tener que acatar lo que el programa y el texto le señalan, de tal manera que pudiera cumplir normativas institucionales, relacionadas con el calendario escolar (tiempos previamente establecidos) y con la preparación necesaria para que los estudiantes se encontraran en mejores condiciones antes de la aplicación del examen final del tema matemático en estudio durante el curso y así, poder emitir un juicio sobre su aprendizaje, mismo que se ve reflejado a través de una calificación. Así, durante el desarrollo de sus clases, se observaron prácticas forzadas e interesadas en estudiar únicamente lo que se tenía estipulado por el currículo y el texto.

En el caso del profesor B, él activó una mayor riqueza de significados, principalmente fue interesante haber identificado en su planificación la inclusión de significados (pretendidos) que no se encontraban declarados en los significados pretendidos por el currículo. Del mismo modo, fue posible concluir que, si bien su significado pretendido evidentemente se corresponde con el significado curricular, la experiencia y conocimientos del profesor le permitieron incluir significados, tales como el de ecuación lineal como relación de proporcionalidad, en el proceso de estudio de la noción matemática.

A partir del análisis realizado se concluye que los significados pretendidos se corresponden con el significado de referencia propuesto en los programas. Sin embargo, fue posible identificar algunas diferencias, sobre todo en el caso del profesor B, quien desarrolló una planeación en la cual incorporó algunos temas para enriquecer el significado promovido, mientras que la planificación del profesor A, basada en el texto oficial, no presentó diferencias. Entre los factores que se identificaron como determinantes en las prácticas de los profesores y los significados promovidos, se encuentran: el significado pretendido por el currículo nacional; las normativas institucionales; su experiencia y significados personales sobre la noción matemática. Dicho aspectos podrían ser estudiados con mayor profundidad en investigaciones posteriores.

Referencias bibliográficas

Filloy, E., Rojano, T., & Puig, L. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de la Ciencias*, *26*(3).

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). Un Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. *The International Journal on Mathematics Education*, *39,* 127-135.

Panizza M., Sadovsky P., & Sessa C. (1996). Los primeros aprendizajes de las herramientas algebraicas. *Cuando las letras entran en clase de Matemáticas*. Comunicación realizada a la sección REM de la reunión anual de la Unión Matemática Argentina, Córdoba. 16-45.

Pino-Fan, L., Godino, J.D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático sobre la derivada [The epistemic facet of mathematical and didactic knowledge about the derivative]. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 141-178.

Pino-Fan, L. (2014). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada*. Granada: Universidad de Granada, (1), 45.

Subsecretaría de Educación Media Superior (2016). Estadísticas e indicadores del Sistema Educativo Nacional Mexicano. *Dirección General de Planeación, Programación y Estadística Educativa* (1) SEP, SEMS México: Autor.

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DEL PROFESOR DE BACHILLERATO SOBRE ECUACIONES LINEALES

Guadalupe Morales Ramírez, Agustín Grijalva Monteverde, María Antonieta Rodríguez Ibarra
Universidad de Sonora. (México)
lupismr11@gmail.com, guty@mat.uson.mx, mariaa.rodriguezt@gmail.com

Resumen
En este reporte de investigación se describen los conocimientos didáctico–matemáticos de dos profesores de Bachillerato sobre el tema de ecuaciones lineales. Se aplican herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico, en particular, las categorías de conocimientos del profesor de matemáticas (facetas epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica). Los datos se han obtenido mediante un guión de entrevista y un protocolo de observación de las clases impartidas por los profesores. Se concluye que el conocimiento didáctico-matemático de ambos profesores es limitado por el énfasis puesto en los procesos algorítmicos, con prácticas docentes centradas en lo procedimental, poco uso de representaciones matemáticas, de recursos mediacionales, de los aspectos afectivos y la relación del tema con la vida cotidiana y otras asignaturas.

Palabras clave: profesores, conocimiento didáctico matemático

Abstract
This research report describes the mathematical and didactic knowledge of two high school teachers on the subject of linear equations. The theoretical tools of the Onto-semiotic Approach are applied, in particular, the categories of knowledge of the mathematics teacher (epistemic, cognitive, affective, interactional, mediational and ecological facets). The data were obtained through an interview script and a protocol of observation of the classes given by the teachers. It is concluded that the mathematical and didactic knowledge of both teachers is limited by the emphasis placed on algorithmic processes, with practice teaching focused on the procedure, little use of mathematical representations, mediation resources, affective aspects and the relation of the topic with everyday life and with other subjects.

Keywords: teachers, mathematical and didactic knowledge

Introducción

La formación de profesores ha estado en el centro de interés de la Matemática Educativa desde sus orígenes, reconociendo el papel de primera importancia de las prácticas docentes para promover que sus alumnos desarrollen las competencias requeridas socialmente (integración de conocimientos construidos, habilidades y actitudes).

Este papel de los docentes es ampliamente aceptado (en ocasiones sobrevalorado), y autores como Sosa y Ribeiro (2014; p.4) señalan que "el profesor es un elemento clave en la enseñanza y en el aprendizaje de la matemática y por ende es fundamental conocer, comprender y caracterizar el conocimiento del profesor". Coincidiendo con esta afirmación, es necesario especificar que la caracterización del profesor debe hacerse tanto en lo referente a su conocimiento matemático como al didáctico, toda vez que de su combinación en la actividad docente es lo que puede facilitar o dificultar la labor de los estudiantes.

La problemática de la enseñanza de las matemáticas no es exclusiva de algún nivel educativo en particular y, aunque aquí nos referimos al nivel medio superior, lo que se dice en otros niveles educativos puede tener validez en nuestro caso, como es el caso de lo señalado para el nivel superior por Moreno, M. y Azcárate, C. (2003) para quienes "El hecho de que la realidad de las aulas de matemáticas en la mayoría de las universidades se incline por una enseñanza de carácter normativo, en la que el profesor considera que el estudiante aprende por imitación, que es asimismo un receptor pasivo del discurso del docente, y que en ningún momento el propio profesor pueda ni siquiera plantearse que en una misma clase puede haber estudiantes con diferentes estilos de aprendizaje, susceptibles de ser motivados si la enseñanza se orientara a sus cualidades específicas de aprendizaje, nos obliga a pensar en la necesidad de que el profesor de matemáticas universitario cambie su papel y reflexione, tanto en el ámbito personal como en el departamental e institucional, acerca de la problemática actual de la docencia universitaria."

Con esta visión, es necesario que los profesores reflexionen sobre sus prácticas docentes, partiendo de la necesidad de conjugar tanto sus conocimientos matemáticos como las estrategias de enseñanza que desarrollan. Godino (2009, p.2) resalta que: "el conocimiento disciplinar no es suficiente para asegurar competencia profesional, siendo necesarios otros conocimientos de índole psicológica (cómo aprenden los estudiantes, conocer los afectos, dificultades y errores característicos). Los profesores deberían ser capaces también de organizar la enseñanza, diseñar tareas de aprendizaje, usar los recursos adecuados, y comprender los factores que condicionan la enseñanza y el aprendizaje".

Para tener elementos de caracterización de las prácticas docentes de los profesores y estar en condiciones de diseñar programas de intervención educativa, nos planteamos desarrollar una investigación cuyo objetivo general es: Analizar los conocimientos didácticos matemáticos del profesor del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora (COBACH) con relación a las ecuaciones lineales, para lograr una caracterización de los mismos.

Este trabajo utiliza como base las herramientas del "enfoque ontosemiótico" (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font 2007), tanto para el diseño de instrumentos de recolección de datos, como para el análisis de los mismos.

Elementos teóricos y metodología

Como señalamos anteriormente, en este trabajo se emplea el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos y, más específicamente, el modelo teórico propuesto por Godino (2009) y desarrollado en Pino-Fan y Godino (2015) sobre categorías de conocimientos del profesor de matemáticas, el cual está basado en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS), el cual se identifica con el nombre de Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor (CDM). De esta manera el objetivo general se desglosa en los siguientes objetivos específicos:

1. Describir los conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional del bachillerato y la distribución de tiempo que se destina a los diversos componentes del contenido, identificando problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades y argumentos.

2. Observar y describir las acciones por parte del profesor con relación a los estudiantes, con la intención de valorar las acciones realizadas con respecto a la construcción de significados de sus estudiantes y la progresión de sus aprendizajes.

3. Identificar y describir acciones del profesor ante las actitudes, emociones, creencias y valores de los alumnos con relación a los objetos matemáticos e identificando acciones y normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio.

4. Describir los recursos mediacionales utilizados en el proceso de estudio, así como la asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos por parte del profesor.

5. Conocer los patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes para la negociación de significados durante las prácticas matemáticas propuestas.

6. Describir las relaciones con el entorno político, social, económico que condicionan y soportan el proceso de estudio.

Para lograr los objetivos formulados elaboramos los instrumentos para recolectar información, que específicamente fueron dos: un guion de entrevista tipo semiestructurada y un protocolo de observación en aula. El propósito de la entrevista consistió en recabar información sobre la práctica discursiva de dos profesores de bachillerato. Para llevar a cabo el proceso, nos centramos en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones lineales, identificando algunas creencias y concepciones del profesor que nos permitieran contrastar con lo observable en el aula de clases.

Asimismo, hicimos observación no participante en el aula de clases de los dos profesores, para lo cual se diseñó un protocolo de observación con el fin de obtener datos acerca de las prácticas operativas de los profesores cuando trabajan con el tema de las ecuaciones lineales. La primera parte del protocolo, enfocada a la identificación de los objetos primarios situaciones-problema, lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos que aparecen durante el proceso de estudio del cual se pretende hacer un análisis de esa información.

Como una segunda parte se identifican acciones que ponen en juego los profesores en el aula de clases, cada una de éstas se relaciona con los elementos que componen las facetas del modelo del conocimiento didáctico matemático del profesor: epistémica, cognitiva, mediacional, interaccional, afectiva y ecológica, así como la interacción de las mismas. Se identificaron el tipo de situaciones planteadas, las estrategias promovidas con sus alumnos, el tipo de representaciones sobre los objetos matemáticos (verbal, gráfico, tabular, algebraico…), la participación que promueven en el aula de clases, entre otras cosas, que ayudaran a dar una caracterización sobre sus conocimientos.

Resultados

Con los datos obtenidos se hizo un estudio con relación a los cuatro niveles de análisis que declara el modelo CDM del profesor: Análisis de las prácticas matemáticas y didácticas, configuraciones epistémicas de las clases observadas para cada uno de nuestro caso de estudio, idoneidad didáctica, normas y metanormas. Se pudieron contrastar y complementar los datos obtenidos en la entrevista y las observaciones de clase por parte de cada profesor.

Rasgos característicos del CDM del profesor A

Dadas las limitaciones de espacio, mostramos algunos de los resultados para el caso de uno de los dos profesores.

En lo epistémico, las prácticas matemáticas del profesor se centran fundamentalmente en los aspectos procedimentales del tema, atendiendo al uso del lenguaje propio del álgebra y el establecimiento de reglas de validez para cada acción que se realiza en la resolución de ecuaciones. Sin embargo, existen también muestras de interés en establecer relaciones entre situaciones extramatemáticas en el caso de la función lineal.

En cuanto a la aplicación de los criterios de idoneidad al proceso de estudio implementado y observado, el profesor no presenta una muestra representativa de situaciones problema extramatemáticas sobre el tema, pero procura hacerlo en la variedad de tipos de ecuaciones lineales, representadas en los pasos algorítmicos que revisa, incluyendo paréntesis, fracciones y otros. En general, en el caso de las funciones lineales y el inicio de las ecuaciones lineales, las configuraciones didácticas implementadas son de carácter conceptual.

Esta situación se observa también en la revisión de los aspectos normativos, en los cuales el énfasis se pone en su presentación y la expectativa de que los estudiantes asuman los procedimientos algorítmicos como válidos, con poca discusión del uso de diferentes representaciones matemáticas y de análisis de interpretación de situaciones.

En las facetas cognitiva y afectiva, de acuerdo a las prácticas realizadas por el profesor, tanto discursivas como operativas, se asume que los estudiantes tienen una serie de deficiencias y procura involucrarlos en la discusión de las situaciones planteadas, siempre bajo su conducción y exposición, privilegiando la atención a los estudiantes más participativos.

En cuanto a la idoneidad cognitiva del proceso implementado, las situaciones planteadas están en la zona de desarrollo próximo de los estudiantes., pero en puntos conflictivos, como las argumentaciones para justificar los algoritmos de resolución, el profesor presenta las propiedades de las igualdades y, acepta que los estudiantes las obvien u omitan y sólo apliquen mecánicamente acciones como “pasar sumando si está restando” y otras similares.

Si se atienden a las normas cognitivas y afectivas, la dinámica general consiste en que los estudiantes sigan paso a paso las instrucciones del profesor, con claros intentos para involucrarlos por sí mismos en la solución de los problemas, como en las discusiones por equipo con manipulables y la última sesión con la actividad lúdica de resolución de ecuaciones.

En las facetas interaccional y mediacional existen momentos de trabajo individual, en equipo y discusiones grupales, promoviendo la participación de los alumnos. Una limitación es que las discusiones sólo se realizan en términos de los planteamientos del profesor, y en casos conflictivos no se ocupa suficientemente por la progresión de los aprendizajes.

En cuanto a las idoneidades interaccional y mediacional el profesor da muestras de un conocimiento didáctico matemático con puntos favorables, como promover la participación de los estudiantes en discusiones por equipo y grupales, pero lo hace en pocas ocasiones.

En cuanto a las normas, la dinámica seguida es siempre la que el profesor señala, indicando si una situación debe realizarse individualmente, en equipo o en discusión grupal. A pesar de promover la participación colectiva, se sigue el patrón de que el profesor es quien expone las ideas centrales y presenta las formas de proceder.

En cuanto a la faceta ecológica se resaltan los siguientes aspectos: Las prácticas centrales del profesor son procedimentales y la única alusión a la importancia del tema es de carácter genérico, señalando que el tema es importante para estudios de matemáticas posteriores. En cuanto a la idoneidad ecológica la situación es similar pues el tema de las ecuaciones lineales se plantea desligado de otros cursos y saberes, sin promoción para el desarrollo de habilidades y actitudes para enfrentar problemas matemáticos o de otra índole, sin relación con problemáticas sociales o naturales.

En lo normativo, las únicas formas de relación son las referentes a los aspectos más generales, como la puntualidad, el uso del uniforme y otros similares, pero sin discusión significativa sobre el papel de las funciones y ecuaciones lineales en la vida cotidiana y otras asignaturas.

Síntesis de conocimientos de los dos profesores observados

Con este tipo de análisis fue posible hacer una caracterización del CDM de ambos profesores (A que identificaremos como profesor A y profesor B) y a continuación se muestran algunos elementos que dan respuesta a los objetivos específicos formulados en la investigación.

Con relación al primer objetivo específico, sobre cuestiones epistémicas, básicamente los datos obtenidos provienen de la observación en clase. Aunque las trayectorias epistémicas de los dos profesores son distintas, ambos desarrollan prácticas tradicionales, es decir, parten de definiciones y propiedades formales de acuerdo a la estructura matemática, resuelven ejercicios tipo y esperan la reproducción de algoritmos, sin integrar los diferentes tipos de lenguajes, argumentaciones y situaciones interdisciplinares. Ambos docentes ubican sólo dos tipos de objetos matemáticos: los conceptos y los algoritmos, poniendo énfasis en que los alumnos aprendan a aplicar los algoritmos en los ejercicios propuestos, sin mayor relación con situaciones de la vida cotidiana o de otras disciplinas de estudio del bachillerato.

Por otra parte, la faceta epistémica, de acuerdo al modelo CDM se centra en tres tipos de conocimientos, refiriéndose al común en donde solo se centran en resolver tareas sencillas, el conocimiento especializado se enfoca en la integración y configuración de objetos primarios y el conocimiento ampliado, relacionado con la conexión de posibles generalizaciones de la tarea y conexiones con otros temas más avanzados.

Podemos decir que para nuestros casos sólo cumplen con el conocimiento común, mientras que en el conocimiento especializado y ampliado se muestran muchas limitaciones.

En cuanto al segundo objetivo, referida a los conocimientos personales de los alumnos y la progresión de sus aprendizajes, ninguno considera los conocimientos previos de los alumnos, aunque ambos señalaron en la entrevista que existen deficiencias (a priori) y, por tanto, no se preocupan de que las situaciones planteadas se encuentren en su zona de desarrollo próximo.

En el tercer objetivo, ligado a la faceta afectiva, aunque ambos profesores señalan que el aprendizaje de las matemáticas se genera con la resolución de problemas y la inclusión de contextos extra-matemáticos, sus acciones evidencian que su experiencia docente y sus concepciones sobre la enseñanza no se corresponden con lo declarado en la entrevista.

En el cuarto objetivo, con interés en la faceta mediacional, los recursos o medios usados en las prácticas de ambos profesores fueron limitados, aunque al inicio del tema el profesor A hizo un intento por crear un ambiente dinámico usando material manipulable y calculadora. En el caso del profesor B no se evidenciaron aspectos relacionados con recursos o medios que ayudaran a contextualizar las situaciones presentadas y se restringió a presentar definiciones, centrándose después en la resolución de ejercicios, aplicando procesos algorítmicos y mecanizados.

En la faceta interaccional, contemplada en el quinto objetivo, un patrón de interacción que se pudo observar en ambos casos fue que los profesores actuaron como expositores, mientras que los alumnos estuvieron en el papel de receptores de información, limitándose únicamente a los estudiantes que avanzaban en el desarrollo del tema.

Por último, en el caso del sexto objetivo y la faceta ecológica, observamos que los profesores se limitan a presentar conceptos matemáticos y algoritmos de solución de las ecuaciones lineales. No obstante, en la entrevista señalaron estar conscientes de que el aprendizaje de las matemáticas debe ser a través de la resolución de problemas, con una fuerte dosis de atención a contextos extra-matemáticos, cercanos a las experiencias reales de los estudiantes y su relación con otras asignaturas.

Reflexiones finales

Aunque este estudio no se permite generalizar los resultados, brinda elementos sobre las prácticas matemáticas, tanto discursivas como operativas, de los profesores estudiados, para que su caracterización pueda tomarse en cuenta al tomar decisiones, tanto de investigación como en acciones curriculares formativas y didácticas en general.

A partir de este trabajo concluimos que las prácticas docentes carecen de programas que ayuden a los profesores a realizar modificaciones sustanciales y es necesario multiplicar las acciones de capacitación y actualización de profesores, poniendo atención en partes específicas de su formación docente.

Como parte de las conclusiones generales se desprende que la existencia de textos escolares (como los que los profesores tuvieron), acordes a los programas oficiales, no garantiza que el docente realice cambios sustanciales en sus prácticas, pues lo que primordialmente entra en juego son los conocimientos y estrategias que implementa el profesor para lograr que los alumnos construyan su conocimiento y doten de significado a los objetos matemáticos que emergen de la actividad realizada. Durante la investigación se observaron efectos negativos tanto de parte del profesor como de los estudiantes, ya que se identificaron elementos de apatía por parte de estos últimos y poca comunicación con los profesores, mientras que por otro lado los profesores tienen muy arraigadas sus concepciones y creencias, desatendiendo lo que sucede con sus alumnos.

Referencias bibliográficas

Aravena, M., Kimelman, E., Micheli, B., Torrealba, R., y Zúñiga, J. (2006). *Investigación educativa I*. Santiago: Universidad ARCIS.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22* (2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión. Revista Iberoamericana de la educación matemática*, *20*, 13-31.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Moreno, M. y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias*, *21*(2), 265-280.

Pino-Fan, L., y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87-109.

Secretaría de Educación Pública (2010). Programa de Estudio de Matemáticas I de Bachillerato. Consultado el 25 de noviembre de 2012 en: http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion_academica/programasdeestudio/cfb_1ersem/MATEMATICAS_I.pdf

Sosa, L. y Ribeiro, C. M. (2014). La formación del profesorado de matemáticas de nivel medio superior en México: una necesidad para la profesionalización docente. *Revista Iberoamericana de la Producción Académica y Gestión Educativa*, 01. Disponible en, http://pag.org.mx/index.php/PAG/article/view/48/85

Vargas, R., Rodríguez, M., Del Castillo,A., Villalva,M., Ibarra, S., Grijalva, A., Armenta, M., Ávila, R., Urrea, M., Soto, J., Bravo, J. (2014). *Matemáticas 1. Módulo de Aprendizaje. Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora*. México: Grupo de Servicios Gráficos del Centro, S.A. de C.V.

FORMACIÓN DE PROFESORES EN ANÁLISIS DEL APRENDIZAJE SOBRE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE VARIACIÓN

Jaime Fonseca González
Universidad Distrital Francisco José de Caldas. (Colombia)
jaimejaimef@hotmail.com

Resumen
Se diseñó, implementó y evaluó un entorno de aprendizaje basado en tareas profesionales de enseñanza de las matemáticas, como el análisis del pensamiento matemático de los estudiantes, desarrollado en Linares (2007). El entorno de aprendizaje se desarrolla en las fases de construcción espontánea, validación social y construcción fundamentada con la tarea de analizar el propio aprendizaje en resolución de problemas. El conocimiento construido por los estudiantes en cada una de estas fases se analizó con el modelo de conocimiento matemático para la enseñanza de Ball, Thames y Phelps (2008). La articulación de estos referentes teóricos sugiere un modelo de formación en didáctica para profesores de matemáticas basado en resolución de problemas y construcción de conocimiento didáctico simultáneamente con la construcción de conocimiento matemático.

Palabras clave: formación, profesores, didáctica, variación.

Abstract
A learning environment was implemented and assessed, being based on teaching professional tasks as well as on students' mathematical thinking analysis, (developed by Linares, 2007). The learning environment phases are: spontaneous construction, social validation, and construction, supported by the own learning analysis about solving problems. The knowledge built by students along each phase was analyzed by means of Ball's model of mathematical knowledge for teaching. The connections of these theoretical reference frameworks suggest a model of didactic training for mathematics teachers. This model is based on problem solving, and didactic knowledge construction simultaneously with mathematical knowledge construction.

Key Words: teacher training, mathematical knowledge for teaching, didactic training of the variation.

Planteamiento del problema

La Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (LEBEM), es un programa de formación inicial de profesores de matemáticas, desarrollado en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, en Bogotá-Colombia. En ella se concibe al profesor como "un profesional que investiga su práctica y que reflexiona sobre ella" (LEBEM, 2010, p.17) y coherente con ello, en la misión se ha propuesto construir un modelo de formación de profesores fundamentado en la resolución de problemas, la reflexión y la investigación sobre las prácticas. De este modo, LEBEM plantea un programa de investigación en el que los profesores formadores aportan en la construcción del modelo mencionado. La LEBEM organiza su currículo en cuatro núcleos problemático/temáticos: matemáticas escolares, pensamiento matemático avanzado, práctica en el aula de clase y contextos profesionales; particularmente, los dos primeros núcleos vinculan cada uno, asignaturas de matemáticas y didáctica de las matemáticas, proponiéndose responder a preguntas sobre ¿cómo ha sido, cómo es y cómo pueden ser las matemáticas escolares y el pensamiento matemático avanzado, como objeto de enseñanza, de aprendizaje y como objeto matemático? La asignatura didáctica de la variación se ubica en el núcleo de pensamiento matemático avanzado y tiene entre sus objetivos, construir conocimiento sobre la resolución de problemas de variación como contextos para el aprendizaje de los procesos de cambio y variación, a partir de situaciones problema; de este modo, la noción objeto de estudio se relaciona con objetos matemáticos como el cambio, la medición de cambio en modelos matemáticos representados por curvas, la factibilidad de respuestas y la modelación como pretensión de las matemáticas, que por su transversalidad en el currículo de matemáticas de la escuela resulta pertinente incluirse en la formación inicial de los profesores. Otra característica de la asignatura es que está propuesta para realizarse en quinto semestre, simultáneamente con la asignatura de matemáticas del movimiento I, en la que se estudian los conceptos de función, variación y cambio desde la modelación matemática. De este modo, se concibe que el conocimiento didáctico puede construirse simultáneamente con el conocimiento matemático.

En este contexto, el profesor de las asignaturas de didáctica de las matemáticas en general, y didáctica de la variación en particular, se enfrenta a la tarea de enseñar el conocimiento didáctico desde la resolución de problemas, sin que para ello haya mayores modelos para orientar la formación didáctica de profesores de matemáticas con las características mencionadas. Frente al anterior problema, se propuso un modelo de formación en didáctica bajo la tarea de analizar el propio aprendizaje del conocimiento matemático en el estudiante para profesor. Siguiendo la propuesta de Llinares (2007), se diseñó un entorno de aprendizaje en el que la resolución de problemas es un medio para construir conocimiento didáctico, vincularlo a la teoría y para ganar habilidades para el análisis de procesos de aprendizaje en sus futuras prácticas profesionales. En este sentido, el objetivo del trabajo es proponer y validar un modelo de formación didáctica para profesores de matemáticas fundamentado en la resolución de problemas. Este modelo se desarrolla con el diseño y validación de entornos de aprendizaje y el conocimiento construido por los estudiantes se analiza siguiendo el modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza de Ball Thames, Phelps, (2008).

Marco Conceptual

Llinares (2007), al respecto de la formación inicial y permanente de profesores de matemáticas, expone la necesidad diseñar “oportunidades” (entornos de aprendizaje) para que ellos puedan desarrollar conocimiento y destrezas que les permitan aprender de la enseñanza de las matemáticas. El diseño de estos entornos de aprendizaje supone la generación y uso de instrumentos técnicos y conceptuales para la realización de tareas profesionales asociadas a la enseñanza de las matemáticas, que se concretan en el desarrollo de “métodos de análisis e interpretación que permitan argumentar iniciativas pedagógicas con fundamentos (razonamiento pedagógico), y - adoptar posiciones críticas sobre la relación entre sus creencias y conocimiento y la perspectivas de acción y práctica generadas” (p.4)

En esta dirección, las tareas propuestas a los estudiantes para profesor constituyen los instrumentos de la práctica que debe ser comprendida y aprendida. En este sentido, las características de las tareas propuestas y las de su implementada son objetos de investigación. En esta perspectiva, Valls, Callejo & Llinares (2008), proponen dos desafíos importantes sobre la formación de profesores de matemáticas:

> (i) crear materiales para ayudar a los futuros maestros y profesores de matemáticas a dotar de sentido y gestionar las ideas de Didáctica de la Matemática que son pertinentes en la conceptualización de la enseñanza de las matemáticas, y (ii) desarrollar entornos de aprendizaje entendidos como oportunidades para que los estudiantes para maestro y profesores puedan desarrollar destrezas que les permitan seguir aprendiendo a lo largo de la vida profesional. (p.89)

Según Linares (2011) algunos de los contextos–problemas de la enseñanza de las matemáticas, son: seleccionar y diseñar tareas matemáticas adecuadas; interpretar y analizar el pensamiento matemático de los estudiantes; iniciar y guiar el discurso matemático y gestionar las interacciones matemáticas en el aula. Estos constituyen un sistema de actividad en la enseñanza de las matemáticas como una actividad y definen un sistema de contextos-problema vinculados a la enseñanza las matemáticas, como: analizar las producciones de los estudiantes, organizar el contenido matemático para su enseñanza y gestionar la comunicación matemática en el aula

Diseño del entorno de aprendizaje

Se diseñó e implementación de un entorno de aprendizaje para que los estudiantes para profesor conceptualicen la práctica de enseñar la variación como parte del sistema de actividad denominada “Interpretar y analizar el pensamiento variacional de los estudiantes” y se analizó el conocimiento didáctico construido por los estudiantes para profesor. Se partió de la hipótesis de que los estudiantes para profesor, al centrar su atención en su propio aprendizaje, construyen conocimiento necesario para enseñar matemáticas y desarrollar destrezas para generar conocimiento desde la propia enseñanza. Este entorno se describe en cuatro componentes: la tarea propuesta, las fases de implementación, las fuentes de información y las herramientas de colaboración e interacción.

La Tarea propuesta a los estudiantes sobre el aprendizaje de la variación

A los estudiantes para profesor se les propuso la tarea de analizar su aprendizaje de la variación y el cambio en la resolución de un problema matemático. Siguiendo los problemas propuestos en Villa-Ochoa (2011), a los estudiantes se les entregó un archivo de Geogebra con la construcción de un rectángulo WXYZ inscrito en un cuadrado ABCD de lado 5cm, de modo que uno de los vértices del rectángulo (en este caso X) se encuentra animado y se desplaza por uno de los lados del cuadrado. La situación problémica propuesta fue: *En el cuadrado ABCD de 5cm de lado, se encuentra inscrito el rectángulo XYZW. Describir la manera en que varía el área de rectángulo XYZW*.

En general, la tarea propuesta para este modelo es analizar el propio aprendizaje sobre un objeto matemático en la resolución de un problema matemático. Los estudiantes inician la resolución y en los encuentros presenciales con el profesor este asume un rol de orientador en el cual escucha las estrategias de los estudiantes y resuelve los interrogantes surgidos, evitando que ello sesgara el proceso logrado por los estudiantes. Al finalizar la tarea, los estudiantes entregaron un documento escrito que reportaba elementos comunes como las estrategias desarrolladas, la solución alcanzada y las reflexiones sobre su aprendizaje. Estos mismos son socializados ante los demás estudiantes del curso.

Fases de implementación de entorno de aprendizaje

El entorno de aprendizaje se planeó e implementó en tres fases secuenciales denominadas: construcción espontanea, validación social y construcción fundamentada las cuales son descritas a continuación:

- Fase 1. Construcción espontánea. Análisis del estudiante en torno a su propio aprendizaje desde las categorías o componentes del proceso que considera relevantes y con los conocimientos previos que dispone. Se destinan tiempos intermitente o en paralelo para resolver el problema didáctico y el problema matemático.
- Fase 2. Validación Social. Momento en el que los pequeños grupos socializan en plenaria los resultados de la resolución de problemas y las reflexiones sobre su propio aprendizaje. En esta fase se busca recopilar el conocimiento construido en cada grupo y discutir resultados encontrados en cada grupo con las experiencias de otros.
- Fase 3. Construcción Fundamentada. Para esta fase, al estudiante se le proponen documentos que caractericen procesos, conceptos o habilidades relacionados con el aprendizaje o la enseñanza de los objetos matemáticos vinculados con la tarea propuesta. Luego, revisan su proceso de aprendizaje a la luz de los fundamentos presentados y obtienen nuevos resultados. Finalizado este procedimiento, se realiza nuevamente la fase 2 y se complementan los resultados alcanzados en las fases 1 y 2.

Las fuentes de información
Las fuentes de información para la fase 3 son artículos científicos en revistas especializadas, capítulos de libro, o memorias de investigadores reconocidos en el área. Para este entorno de aprendizaje se propuso la lectura de Posada y Villa-Ochoa (2006) en el que aborda el concepto de función desde una perspectiva variacional e involucra los registros de representación de la derivada, el incremento y la tasa promedio de cambio.

Herramientas de colaboración e interacción
La resolución del problema matemático y el análisis de propio aprendizaje se realizan en pequeños grupos, aunque hay periodos de discusión y socialización en el grupo entero. Inicialmente los estudiantes centran su atención en la resolución de problema matemático y dedican periodos a la reflexión sobre su aprendizaje. Con la finalización del periodo de resolución, se realizan socializaciones ante el grupo entero, con la oportunidad de discutir sobre los conceptos matemáticos y el aprendizaje. Hay periodos de discusión sobre el contenido de la lectura propuesta y de los resultados del análisis del aprendizaje de cada grupo.

Resultados

Para analizar el conocimiento construido por los estudiantes frente a la implementación del entorno de aprendizaje, se empleó el modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza de Ball, Thames, & Phelps (2008), el cual divide el conocimiento en dos grandes categorías:

1. Conocimiento del contenido, relativo al conocimiento matemático, el cual se subdivide en: conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento en el horizonte matemático.
2. Conocimiento pedagógico del contenido, relativo al conocimiento para la enseñanza del conocimiento matemático, de igual forma se subdivide en: conocimiento del contenido y de los estudiantes, conocimiento del contenido y la enseñanza y conocimiento del currículo.

Este modelo se emplea para el análisis del conocimiento construido en cada una de las fases de implementación de entorno de aprendizaje y es de esta manera como a continuación se presentan los resultados.

Fase de construcción espontánea

Conocimiento común del contenido. Es el conocimiento matemático que posibilita al profesor resolver correctamente los problemas o tareas matemáticas; no son exclusivos de la enseñanza, sino que son utilizados en una amplia variedad de contextos. Respecto a este conocimiento los estudiantes construyen nociones de incremento y tasa promedio de cambio. Identifican que la tasa promedio de cambio se modifica al variar el tamaño del intervalo, pero que converge a un número. Vinculan la variación con el límite de la razón de cambio, pero no la logran matematizarla. Encuentran o usan técnicas matemáticas para la construcción de representaciones algebraicas de una función.

Conocimiento especializado del contenido. Se concibe como un conglomerado de “conocimientos y habilidades matemáticas exclusivas para la enseñanza” (Ball, Thames, Phelps, 2008, p. 400). Al respecto, los estudiantes relacionan matemáticamente la variación con la razón entre dos magnitudes y el cambio con la diferencia entre dos cantidades de una magnitud. Vinculan el contexto de la variación geométrica con otras situaciones de variación como de la temperatura durante el día o la estatura de una persona a lo largo de su vida. Ofrecen explicaciones basadas en analogías para describir el movimiento. Tratamiento de situaciones de variación en ausencia del registro algebraico. Se aceptan descripciones cualitativas y mixtas del movimiento.

El conocimiento en el horizonte matemático. Se concibe como una toma de conciencia del panorama matemático en el que se sitúan la experiencia y la instrucción presentes. Respecto a este conocimiento, los estudiantes conciben el estudio del movimiento como una situación potencial para la enseñanza de las matemáticas y en el que los conceptos del cálculo toman significado. Comprenden que la solución de un problema matemático puede ser un conjunto articulado de objetos y resultados, más que un número u objeto matemático específico. Notan que, en libros de texto consultados, la enseñanza del cálculo está centrada en lo algoritmo y dividida en secciones no articuladas, lo que constituye una dificultad para el resolutor de problemas.
Conocimiento del contenido y de los estudiantes. Es el conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento sobre cómo los estudiantes piensan, conocen o aprenden este contenido particular. Los estudiantes identifican en su actividad matemática, estrategias de resolución de problemas, fases del proceso, errores y dificultades, soluciones parciales al problema, tanto por el nivel de complejidad, como por concentrarse en puntos o intervalos del movimiento y no en el movimiento completo.

Conocimiento del contenido y la enseñanza. Este tipo de conocimiento combina el conocimiento sobre la enseñanza y conocimiento sobre las matemáticas. Al respecto, los estudiantes para profesor identifican potencialidades del software Geogebra en la resolución del problema, pero también obstáculos en la generalización de procedimientos. Además, identifican variaciones del problema propuesto para poder ser aplicado en diferentes niveles de la educación. Esta incluye acotar la descripción del movimiento en un intervalo o alrededor de un punto y aceptar descripciones cualitativas. Consideran prudente considerar movimientos periódicos en la enseñanza de la trigonometría.

Fase de Validación Social

Conocimiento común de contenido. Aparecen dos significados atribuidos por los estudiantes a la derivada 1) de la ecuación de la curva a la que convergen las sucesivas curvas asociadas a las tablas que expresan el cambio entre dos magnitudes cuando las particiones en que se divide el intervalo de variación de la variable independiente se hacen infinitamente pequeñas. 2) la razón de cambio entre dos magnitudes cuando una de las cantidades de la variable independiente se acerca infinitamente a la otra.

Conocimiento especializado del contenido. Los estudiantes realizan cálculos algebraicos con límites y sucesiones para calcular la derivada en un intervalo y en un punto. Además, concretan definiciones matemáticas de objetos matemáticos:

- Dada una función $f\colon \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, continua en (a, b), se define:
- El incremento de y a z. Dados $y, z \in (a, b)$, denotado Δx, como la diferencia de y a z, es decir Δx = z – y
- El incremento de y_0 a y_1. Dados $y_0,\ y_1 \in Rang_f$, denotado Δy, como la diferencia de y_0 a y_1, es decir Δx = $y_1 - y_0$
- La tasa promedio de cambio. Dados $x_0,\ x_1 \in [a, b]$, denotado y su imagen por *f*, $f(x_0),\ f(x_1)$, se define como razón entre los incrementos Δx y Δy, es decir $\Delta y\colon \Delta x :: (y_0 - y_1)\colon (x_0 - x_1)$
- La tasa instantánea de cambio es la tasa promedio de cambio entre dos particiones consecutivas cuando la diferencia entre las dos abscisas es infinitamente ($n\Delta x$ y $n\Delta x - \Delta x$). Así, se obtiene $\underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{A(n\Delta x) - A(n\Delta x - \Delta x)}{\Delta x}$

Conocimiento del contenido y los estudiantes. Respecto a este conocimiento, los estudiantes para profesor listan errores cometidos: simplificar las unidades en la razón entre las magnitudes área y longitud ($cm^2\colon cm = cm$), usar aproximaciones numéricas en lugar de pensar en los cálculos exactos impide generalizar o algebrizar los cálculos. Identifican que un obstáculo es discretización de la situación, y amplían el uso de la razón a un instante y no en un intervalo.

Conocimiento del contenido y la enseñanza. Respecto a este tipo de conocimiento, los estudiantes analizan las características del problema matemático propuesto y notan que, para el caso de la variación, la descripción de un movimiento es una situación más amplia, abarcadora y retadora para la enseñanza de la variación. Comprueban que Geogebra permite simular situaciones de variación y tomar datos, pero estos no deben tomarse ciegamente, pues deben identificarse los procesos de cálculo para alcanzar su generalización. Amplían la noción mirada sobre las soluciones de problemas matemáticos al aceptar que la descripción de la variación puede matematizarse desde distintos niveles. Reconocen la necesidad de dar la libertad para acercarse a la solución y evitar sesgarla.

El conocimiento en el horizonte matemático. Los estudiantes reconocen que la resolución de problemas de variación amplios, les permite a los estudiantes experimentar situaciones cuya solución no es un número, función o un solo objeto matemático; una respuesta. Mostrando que las matemáticas más que "ciencia de los números y las formas" es el estudio de situaciones empleando objetos matemáticos. Destacan que saber matemáticas y aprender matemáticas no es solo saber de objetos y teoremas, sino poder aplicarlos en la matematización del mundo.

Fase de construcción documentada

Conocimiento del Contenido y los estudiantes. Al respecto, los estudiantes proponen la existencia de un nuevo registro de representación de la función y de la variación: el registro de representación gestual, que se caracteriza por el uso del lenguaje corporal y los movimientos de las manos o gestos faciales, con los que se denota el cambio o la variación en la resolución de problemas de variación; reconocen que el lenguaje gestual es una forma de expresar de alguna manera, aquellas ideas de las que no se tienen palabras para enunciar. El registro de representación prealgebraica, caracterizada por el uso de conjuntos de pasos de un procedimiento, en el que las operaciones son específicas y se mantienen invariantes; este registro se encuentra entre el registro del lenguaje natural y el algebraico.

Conocimiento del contenido y la enseñanza. Los registros de representación de la función y de la derivada son aplicables a la organización de la enseñanza de la variación en los diferentes niveles de la educación básica, media y superior. Reconocen relaciones entre distintos registros de representación, la existencia de reglas para el tratamiento de cada registro de representación, y la coordinación entre registros para solución el problema.

Conclusiones

Se propuso un modelo de formación en didáctica para profesores de matemáticas fundamentado en la resolución de problemas basados en la realización de tareas del profesor. La planeación de la formación se realiza con entornos de aprendizaje según las orientaciones y desarrollos sobre tareas del profesor desarrollados por Llinares (2011), que incluyen competencias del profesor. Bajo la tarea de analizar el propio aprendizaje en la resolución de problemas matemáticos, los entornos de aprendizaje se desarrollan en tres fases: construcción espontánea, validación social y construcción fundamentada. Los aprendizajes de los estudiantes sobre conocimiento didáctico y matemático, se puede analizar mediante el modelo de conocimiento matemático para la enseñanza de Ball Thames y Phelps (2008). En el caso particular de la tarea de analizar del propio aprendizaje de las matemáticas, favorecen espacios de reflexión sobre la propia práctica matemática del estudiante y pensar en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Este conocimiento construido resulta significativo para el profesor, pues es la modelación de su propia experiencia y la de otros en la realización de una tarea de profesor.

Referencias bibliográficas

Ball, D.L., Thames, M.H., Phelps, G.C. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education 59(5)*, 389-407.

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (2010). *Documento de re-acreditación con fines de renovación de la acreditación de alta calidad. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá*. Colombia: Documento no publicado.

Llinares, S. (2007). *Formación de profesores de matemáticas. Desarrollando entornos de aprendizaje para relacionar la formación inicial y el desarrollo profesional*. Memorias de la XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas. Granada: Universidad de Alicante. Recuperado el 05 de mayo 2017 de https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/853/1/llinares-jaem-granada07.pdf.

Llinares, S. (2011). Tareas matemáticas en la formación de maestros. Caracterizando perspectivas. *Revista de Didáctica de las Matemáticas 78*, 5-16.

Posada, F.A., Villa-Ochoa, J.A. (2006). El razonamiento algebraico y la modelación matemática. En F.A. Posada, G. Obando, (Eds.), *Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico* (pp.127-163). Medellín, Colombia: Gobernación de Antioquia.

Vall, J., Cellejo, M.L., Llinares S. (2008) Dialécticas en el diseño de materiales curriculares y entornos de aprendizaje para estudiantes para maestro en el área de Didáctica de la Matemática. *Publicaciones - Facultad de Educación y Humanidades Campus de Melilla, Universidad de Granada 38*, 89-103.

Villa-ochoa, J.A. (2011) *La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

COMPONENTES E INDICADORES DE IDONEIDADE DIDÁTICA DE UM CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA: UM LEVANTAMENTO RELACIONADO AOS ASPECTOS ECOLÓGICOS

José Fernandes da Silva
Instituto Federal de Minas Gerais – Campus São João Evangelista. (Brasil)
jose.fernandes@ifmg.edu.br

Resumo
O propósito desta investigação foi levantar evidências sobre a idoneidade ecológica de um curso de Licenciatura em Matemática. O estudo qualitativo foi realizado com quatro futuros professores de uma instituição pública. Realizou-se entrevistas semiestruturadas e análise do Projeto Pedagógico do Curso. Os resultados encontrados apontam a importância do uso dos critérios de idoneidade didática para avaliar curso de formação de professores. A realidade investigada apresenta elementos que valorizam os aspectos ecológicos, pois traçam diretrizes que apontam para a relevância do diálogo com o contexto, promoção da interdisciplinaridade e inovação curricular.

Palavra-chave: formação inicial de professores de matemática, conhecimento didático matemático, idoneidade ecológica.

Abstract
This research work seeks to provide evidence on the ecological suitability of an initial teacher training course in Mathematics. A qualitative study was carried out with four prospective teachers from a Public Institution. Semi-structured interviews were conducted as well as an analysis of the Pedagogical Project of the Course. The results show the importance of the use of didactic suitability criteria to evaluate the teacher training course. The investigation presents elements that value the ecological aspects, since they outline guidelines that address the relevance of the dialogue with the context, the encouragement of interdisciplinary relationship and curricular innovation.

Key words: initial teacher training in Mathematics - mathematical didactic knowledge - ecological suitability

Introdução

Na atualidade, os currículos dos cursos de formação de professores estão passando por diferentes transformações. As inovações tecnológicas e as mudanças da sociedade têm sido fatores importantes para que as instituições formadoras repensem os projetos pedagógicos dos cursos.

Sabe-se que, internacionalmente, muitas críticas têm sido direcionadas aos modelos de formação de professores. No contexto brasileiro, historicamente, tem-se o debate relacionado ao equilíbrio entre a formação matemática e a formação didático-pedagógica. No início dos anos 2000, foram publicadas leis no sentido de equilibrar e oportunizar aos futuros professores tempos e espaços, delimitados, para a prática pedagógica e estágio na Educação Básica. Contudo, as instituições formadoras, em sua maioria, investiram em projetos poucos inovadores, prevalecendo os cursos de licenciatura divorciados da realidade.

A investigação, aqui apresentada, foi realizada no âmbito do Instituto Federal de Minas Gerais – Campus São Evangelista. Trata-se de uma instituição formadora de professores de Matemática, desde o ano de 2010.

Para este trabalho, levou-se em consideração as seguintes questões norteadoras: que experiências, relacionadas à idoneidade ecológica, se fazem presentes na formação dos futuros professores de Matemática?

O objetivo principal consistiu em realizar um levantamento, com futuros professores e Projeto Pedagógico de Curso - PPC, sobre as formas como o curso se organiza em termos de currículo, inovação didática na formação de professores, conexões interdisciplinares, políticas públicas e diálogo com o entorno sociocultural.

Marco teórico

O marco teórico adotado para realizar esta investigação está composto por uma breve abordagem sobre os conhecimentos dos professores e sobre os componentes e indicadores de idoneidade didática em programas de formação de professores.

Até a década de 80 poucos estudos buscavam investigar a formação de professores. Shulman (1986) destacou que o conhecimento do conteúdo, o conhecimento pedagógico do conteúdo e o conhecimento do currículo seriam necessários para ao professor desenvolver sua profissão. Em 1987, Shulman, no seu artigo *Conhecimento e ensino: fundamentos para uma nova reforma* ampliou os conhecimentos necessários ao professor.

Ball, Thames e Phelps (2008), propuseram as seguintes categorias de conhecimento: I) Conhecimento comum do conteúdo - referindo-se a um conhecimento que não é característico apenas do professor, mas comum às profissões que se valem dos conhecimentos matemáticos para desenvolver suas funções; II) Conhecimento especializado do conteúdo - podendo ser definido como o conhecimento do conteúdo para a condução do trabalho docente. Esse é o tipo de conhecimento usado unicamente pelos professores; III) Conhecimento horizontal do conteúdo – descreve como os temas matemáticos estão relacionados entre si, seja dentro da disciplina matemática ou não. Para tanto, o professor deve conhecer as possíveis conexões e articulações dos conteúdos matemáticos; IV) Conhecimento de conteúdo e de alunos - o professor deve possuir habilidades para lidar com o saber dos alunos e o saber da Matemática; V) Conhecimento de conteúdo e de ensino – evidencia o diálogo entre o saber matemático e o saber sobre o ensino.

Estudos, no âmbito do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática – EOS, têm discutido o conhecimento didático matemático do professor. Os trabalhos de Godino (2009; 2013), Pino-

Fan, Font, e Godino, (2014) e Pino-Fan, Godino, (2015), Breda (2016), Carvalho (2017), Carvalho (2016) e Silva (2017), dentre outros, trazem contribuições importantes.

Para Godino (2009), não existe um consenso na literatura disponível para apontar os conhecimentos que os professores mobilizam durante o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

Seria útil dispor de modelos que permitam uma análise mais detalhada de cada um dos tipos de conhecimentos que se põem em jogo num ensino efetivo (proficiente, eficaz, idôneo) da Matemática. Ele permitiria orientar o desenho de ações formativas e a elaboração de instrumentos de avaliação dos conhecimentos do professor. (Godino, 2009, p. 19)

A multiplicidade de abordagens relacionadas aos conhecimentos que os professores deveriam ter, impactam, diretamente, na construção dos currículos dos programas de formação de professores. Neste sentido, é notória, a ausência, ou a complexidade de parâmetros para as avaliações dos cursos de formação. Os parâmetros usados, pelas agências governamentais, para realizar avaliações de cursos de formação de professores, são dúbios e, por vezes, generalistas.

Para Godino *et al* (2013), é possível e importante usar as facetas do conhecimento didático matemático para avaliar programas de formação de professores de Matemática. No artigo intitulado "*Componentes e indicadores de idoneidade de programas de formação de professores em educação matemática*", os autores propõem que os cursos de formação devem garantir aos futuros professores a construção de conhecimentos didático-matemáticos necessários para o desenvolvimento da carreira.

De acordo com Breda, Font e Lima (2015), por critério de idoneidade deve-se entender como uma regra de correção que estabelece o como deveria ser realizado um processo de instrução. Contudo, estes critérios devem ser entendidos como regras de correção emanadas do discurso argumentativo da comunidade científica, quando este está orientado a conseguir um consenso sobre "o que se pode considerar como melhor".

Godino et al (2013) elaboraram um guia para avaliação de cursos de formação de professores de Matemática, conforme quadro 1:

Quadro 1
Guia para a avaliação de idoneidade didática nos processos de formação de professores

FACETA EPISTÊMICA (Conteúdo Didático-Matemático, entendido do ponto de vista institucional) *Conteúdo matemático:* Problemas, linguagens, conceitos, procedimentos, proposições, argumentos, conexões *Conteúdo cognitivo:* Conhecimentos prévios, adaptações curriculares, aprendizagem do conteúdo matemático por parte dos alunos *Conteúdo afetivo:* Interesses, atitudes, emoções frente a aprendizagem do conteúdo matemático dos alunos *Conteúdo interacional:* Modos de interação do discurso no processo de ensino e aprendizagem da matemática *Conteúdo mediacional:* Uso de recursos tecnológicos no processo de ensino e aprendizagem da matemática *Conteúdo ecológico*: Currículo, inovação didática, adaptação sócio profissional, conexões interdisciplinares
OUTRAS FACETAS IMPLICADAS NA FORMAÇÃO DIDÁTICA E MATEMÁTICA Faceta cognitiva: Aprendizagem do conteúdo didático-matemático pelos professores Faceta afetiva: Crenças, valores, interesses, atitudes, emoções dos professores diante da aprendizagem do conteúdo didático-matemático Faceta interacional: Modos de interação e discurso no processo de formação de professores Faceta *mediacional*: Uso de recursos tecnológicos no processo de formação de professores Faceta ecológica: Currículo, inovação didática na formação de professores, conexões interdisciplinares.

Fonte: Godino *et al*, 2013, p. 54.

A proposta de Godino *et al* (2013) é importante, visto que existe uma demanda por parâmetros relacionados à avaliação de programas de formação de professores de Matemática. Ainda é pertinente destacar que o guia proposto aglutina os aspectos da formação matemática e da formação didática.

Metodologia

A pesquisa realizada é de cunho qualitativo, tendo sido realizadas entrevistas semiestruturadas e leituras do Projeto Pedagógico de Curso – PPC.

Participaram da investigação três futuros professores do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais – Campus São João Evangelista, Brasil.

O primeiro passo foi realizar uma leitura do PPC do curso com o objetivo de conhecer o contexto e as diretrizes para a formação dos futuros professores de Matemática. Em seguida, realizou-se as entrevistas com os futuros professores, sendo estas gravadas em áudio e, posteriormente, transcritas.

Resultados e discussões

De acordo com PPC o Curso de Licenciatura em Matemática deve propiciar aos futuros professores as vivências de diálogo entre as diferentes disciplinas que compõem o currículo:

> A interdisciplinaridade é elemento fundamental no âmbito da Licenciatura em Matemática. O diálogo entre as diferentes disciplinas se constitui em experiências enriquecedoras e motivadoras no processo de ensino aprendizagem. Neste sentido, as disciplinas do campo teórico específico precisam dialogar com as de natureza instrumentais e pedagógicas e vice e versa. As abordagens da Prática Pedagógica buscam subsídios em todas as outras disciplinas para se constituir num elemento fundamental e articulador da formação profissional. Este diálogo se efetiva na perspectiva de Paulo Freire, onde a relação entre teoria e prática através de temas geradores é essencial para a consolidação das aprendizagens significativas. (p.91)

Um outro aspecto sobre o contexto do programa de formação, que é importante destacar, é o conjunto de políticas públicas que compõe o percurso formativo dos futuros professores de matemática, no que concerne à extensão e à pesquisa. Tais políticas públicas, pelo PPC, têm possibilitado um diálogo entre a formação dos professores e o contexto que circunda a instituição formadora.

Os futuros professores, em suas falas, apresentam conhecimentos sobre o currículo oficial de Matemática para a Educação Básica e conhecem as diretrizes curriculares do Estado de Minas Gerais, o Currículo Básico Comum – CBC.

O destaque maior dos futuros professores foi a possibilidade de, através das atividades promovidas pelo curso, terem contato e troca de experiências com professores que atuam na Educação Básica. Além disso, destacaram que o incentivo à investigação em Educação Matemática possibilitou que fossem às escolas investigar diferentes contextos. Sobre isso, a futura professora A, enfatiza:

> As ações do curso [Licenciatura em Matemática] propiciaram um contato com a Educação Básica. Com o incentivo à pesquisa pude ter contato com alunos da Educação Básica realizando trabalho de campo e [...] produzir relato de experiência sobre alguma atividade desenvolvida. (Futuro professor A).

Questionados sobre como o curso promove o acesso dos futuros professores à Educação Básica, todos relataram que as práticas de extensão foram fundamentais para que se aproximassem do futuro campo de trabalho. Destacaram que os momentos de encontros com os professores da Educação Básica foram incentivadores para troca de experiências.

> Os minicursos têm possibilitado minha aproximação com a Educação Básica [...]. Assim, cursos que a gente já fez [...] Libras, Braile. [...]. Ministrei um, que foi sobre origami. Na verdade, os licenciandos, no Curso de Matemática, preparam e ministram minicursos, oficinas e palestras para os professores de Educação Básica. [...] É um trabalho que a gente, os estudantes do curso, fazemos sob orientação dos professores. Cada estudante que elabora um curso ou um minicurso tem orientação do professor determinado. (Futuro professor B).

Ao investigar o contexto ecológico ficaram evidentes elementos que se fizeram presentes no processo formativo dos futuros professores. O contexto das ações do curso permitiu que os futuros professores fossem além das salas de aulas. Em outras palavras, o curso permitiu que seu currículo agregasse participações, com o entorno, como ação de formação. Desta forma, os futuros professores puderam ter acesso a um enriquecimento curricular. Esta perspectiva está de acordo com Godino *et al* (2013), quando relatam que os programas de formação de professores devem promover:

> a) Conhecimento das orientações curriculares e sua fundamentação; b) Atitude favorável, mas reflexiva, sobre a inovação baseada na investigação; c) Competência na busca, seleção e adaptação de boas práticas que impliquem no uso do contexto real e na interdisciplinaridade; d) Conhecimento dos condicionantes e restrições do entorno social no ensino e aprendizagem da matemática (fatores econômicos, políticos, culturais). (Godino *et al*, 2013, p. 58)

Em acordo com a citação, a futura professora C destaca sobre a importância do conhecimento de novas perspectivas curriculares para o desenvolvimento de boas práticas profissionais. Assim, ela relata:

> Através da participação em eventos, foi possível conhecer e interagir com professores de diversas modalidades, entre eles, professores da Educação Básica. Cito um exemplo do Encontro Mineiro de Educação Matemática que ouvi a experiência de professores da Educação Básica [em uma mesa redonda] que trabalharam com seus alunos com modelagem matemática e através de seus relatos pude perceber que é uma linha de pesquisa muito rica pelo fato de trabalhar a Matemática dentro da realidade do estudante. Essa interação é muito importante porque, a partir do conhecimento de boas práticas de ensino relatadas por esses professores, nós, futuros educadores, podemos espelhar e termos suporte para planejar nossas aulas. (Futura professora C).

Os futuros professores, colaboradores desta investigação, explicitaram que a Licenciatura em Matemática, fomentou o enriquecimento curricular, pois se valeu da aproximação com o contexto externo, através de eventos acadêmicos, como palestras, minicursos e oficinas. Desta forma, estes resultados estão de acordo com Godino *et al* (2013), quando relatam que a idoneidade ecológica de um programa de formação de professores se apresenta na medida em que o processo formativo se ajusta ao projeto educativo da instituição e da sociedade e ao entorno em que se desenvolve.

Os futuros professores destacaram que algumas disciplinas, do curso, não fomentam atividades que dialoguem com a realidade da Educação Básica e/ou temáticas da contemporaneidade.

Considerações finais

Os resultados encontrados permitem realizar algumas reflexões importantes. Em primeiro lugar, que os parâmetros propostos por Godino et al (2013), são ferramentas úteis para evidenciar indicadores de qualidade de um curso de formação de professores. Em segundo lugar, que a realidade investigada, embora tenha seus desafios para formar professores, desenvolve um projeto com elementos que valorizam os aspectos ecológicos, pois traçam diretrizes que apontam para a relevância do diálogo com o contexto, promoção da interdisciplinaridade e inovação curricular.

No que concerne às entrevistas com os futuros professores, ficou evidente que estes reflexionam sobre as práticas vivenciadas, sinalizando que o Curso de Licenciatura em Matemática promove ações de inovação curricular e promoção de diálogo com o futuro campo de atuação profissional. Um dos aspectos preocupantes é o apontamento, destes professores, relacionado às disciplinas que não promovem a faceta ecológica do conhecimento didático matemático. Em outras palavras, algumas disciplinas não buscam o diálogo com as necessidades da formação dos futuros professores.

A idoneidade ecológica do curso investigado não pode ser delimitada apenas por esta investigação, pois sabe-se que um curso de formação de professores é composto por muitas práticas explícitas e implícitas. O objetivo foi buscar evidências. Novas investigações, no âmbito das práticas pedagógicas e estágios supervisionados, podem evidenciar outros aspectos que podem constituindo um conjunto de análises relacionadas a tal critério de idoneidade.

Referências bibliográficas

Ball, D. L.; Thames, M. H., Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59, 389-407.

Breda, A. (2016). *Melhorias no ensino de matemática na concepção de professores que realizam o mestrado Profmat no Rio Grande do Sul: uma análise dos trabalhos de conclusão de curso*. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Brasil.

Breda, A.; FONT, V.; LIMA, V. M. R. (2015) A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, *8*, (2) ,1-41.

Carvalho, J. Ivanildo F. (2017). *Um estudo sobre os conhecimentos didáticos-matemáticos de probabilidade com professores de matemática dos anos finais do ensino fundamental*. Tese Doutorado, Universidade Anhanguera de São Paulo. Brasil.

Carvalho, M. P. (2016). *Um estudo da inserção de estudantes da Licenciatura em Matemática no contexto da escola pública: contribuições do PIBID*. (Apendices). Tese de Doutorado, Universidade Anhanguera de São Paulo. Brasil.

Godino, J. D, Batanero, C., Rivas, H. y Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *Revista Eletrônica de Educação Matemática. REVEMAT*, *8*, (1), 46-74.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31.

Pino-Fan, L., Font, V.; Godino, J. D. (2014). El conocimiento didáctico-matemático de los profesores: pautas y criterios para su evaluación y desarrollo. En C. Dolores, M. García, J. Hernández, y L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 137 – 151). México, D. F.: Ediciones D. D. S. y Universidad Autónoma de Guerrero.

Pino-Fan, L.; Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA, 36*(1), 87-109.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57* (1), p. 1-22

Shulman, Lee Shulman. (1986). those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*, 4-14.

Silva, J. F. (2017). *Um estudo do Programa de Consolidação das Licenciaturas no contexto da formação inicial de professores de matemática*. (Apendices). Tese de Doutorado, Universidade Anhanguera de São Paulo. Brasil.

ANSIENDAD MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES PARA MAESTROS DE PRIMARIA

Fabián Hernández Vargas, Johan Espinoza González.
Universidad Nacional de Costa Rica, Sede Regional Brunca. (Costa Rica)
fhernandezv07@hotmail.com, jespinoza@una.cr

Resumen
En Costa Rica es común percibir sentimientos de rechazo o miedo hacia la matemática en distintas áreas y etapas de la educación, por lo cual se plantea en presente estudio estadístico en relación a la ansiedad matemática en una muestra de maestros de primaria en formación, en la región de Pérez Zeledón y su relación con variables: rendimiento académico, edad, colegio y zona de procedencia, año que cursa en la carrera. Entre los principales resultados es posible resaltar que la mayoría de los estudiantes de la muestra poseen un nivel de ansiedad matemática medio o alto. Además, los estudiantes que poseen menor rendimiento académico, tienen entre 32 y 37 años, provienen de zonas urbanas y que proceden del sistema de educación abierta muestran un nivel de ansiedad matemática mayor.

Palabras claves: ansiedad matemática, estudiantes para maestros.

Abstract
In Costa Rica, it is common to perceive feelings of rejection or fear towards mathematics in different areas and stages of education. That’s why, we present a statistical study focused on mathematical anxiety in a sample of primary school teachers in training, of Pérez Zeledón region, as well as its relationship with variables such as: academic performance, age, school and area of origin, and year of the degree course. Among the main findings, we can stress that the majority of students in the sample have a medium or high level of mathematical anxiety. Besides, students with lower academic performance, aged between 32 and 37, who come from urban areas and from the open education system show a higher level of mathematical anxiety.

Key words: mathematical anxiety, teacher-training students.

Introducción

La educación costarricense en muchas ocasiones se ve afectada por distintos factores incluyendo aquellos de índole afectivo, lo que llegan a propiciar en los estudiantes de los distintos niveles de formación sentimiento de rechazo y ansiedad hacia ciertas áreas del conocimiento, siendo la matemática una de ellas. Esta situación es manifestada por Pérez-Tyteca et al. (2009), al afirmar que “la ansiedad es un factor afectivo presente en los estudiantes, sobretodo en situaciones evaluativas o al enfrentarse a asignaturas especialmente difíciles para ellos, como pueden ser las matemáticas” (p.24).

Esta situación provoca que en el momento de considerar el contexto en el cual esta ansiedad comienza a desarrollarse, se tome en cuenta la influencia que tienen los docentes de primaria, lo cual a su vez obliga mirar más atrás y analizar los niveles de ansiedad matemática que pueden tener desde su formación. Se debe tener presente que esta idea se apoya en el hecho de que la ansiedad hacia la matemática es una actitud presente en el profesorado en formación y que ésta se mantiene presente aun cuando ejercen la profesión, convirtiéndose en una de las posibles causas que provocan el fracaso escolar de los estudiantes y la presencia de ansiedad matemática en éstos (Ureña, 2015).

Para analizar con detalle esta influencia y a su vez realizar un primer acercamiento al estudio de la ansiedad matemática y la ansiedad hacia la enseñanza de la matemática en estudiantes para maestros en la zona sur de Costa Rica, se realizó un estudio que pretende determinar el nivel de ansiedad matemática que poseen los estudiantes para maestro de primaria de la Universidad San Isidro Labrador de la región de Pérez Zeledón, Costa Rica, y su relación con el rendimiento académico y algunas variables sociodemográficas.

Los objetivos del estudio

Objetivo general
Para este estudio nos planteamos como objetivo general: Estudiar la ansiedad matemática en una muestra de estudiantes para maestros de educación primara en la región de Pérez Zeledón, Costa Rica.

Objetivos específicos
Los objetivos específicos planteados fueron los siguiente:

1) Determinar el nivel de ansiedad matemática de una muestra de estudiantes para maestros de educación primaria.
2) Determinar la relación entre la ansiedad matemática de una muestra de estudiantes para maestros y las variables edad, lugar y colegio de procedencia, rendimiento académico y nivel de carrera que cursa.

Marco teórico

El presente estudio tiene como punto de partida el concepto de ansiedad matemática y la relación con las distintas situaciones, sentimientos y posiciones que toman las personas cuando tienen que resolver tareas matemáticas. El concepto de ansiedad matemática ha sido definido por distintos autores, entre los cuales cabe mencionar la definición dada por Wood (1988), quien menciona que consiste en “la ausencia de confort que alguien podría experimentar cuando se le exige rendir en matemáticas” (p.11). Richardson y Suinn (1972), también hacen referencia a este concepto y la definen como “el sentimiento de tensión y ansiedad que interfieren en la manipulación de números y en la resolución de problemas matemáticos en una amplia variedad de situaciones tanto cotidianas como académicas” (p.551); mientras que Tobias y Weissbrod (1980) afirman que “la ansiedad matemática describe el pánico, indefensión, parálisis, y desorganización mental que surge cuando a un sujeto se le exige resolver un problema matemático” (p.65). De igual manera, Fennema y Sherman (1976), consideran que la ansiedad matemática es “una serie de sentimientos de ansiedad, terror, nerviosismo y síntomas físicos asociados que surgen al hacer matemáticas” (p.4).

Para el desarrollo del presente trabajo se toma como referencia la siguiente concepción de ansiedad matemática:

> Estado afectivo caracterizado por la ausencia de confort que puede experimentar un individuo en situaciones relacionadas con las matemáticas tanto de su vida cotidiana como académica, y que se manifiesta mediante un sistema de respuestas que engloban una serie de síntomas, como son: tensión, nervios, preocupación, inquietud, irritabilidad, impaciencia, confusión, miedo y bloqueo mental. (Pérez-Tyteca y Castro, 2011, p.472).

Todas estas definiciones muestran las situaciones que frecuentemente se perciben en las aulas y en términos generales cuando se habla de la Matemática. En este sentido, Meza, Agüero, Suárez y Schmidt (2014) mencionan a varios autores que afirman que la ansiedad matemática repercute negativamente en los procesos de resolución de problemas matemáticos, el rendimiento adecuado en las pruebas, escoger cursos o incluso carreras relacionadas con la disciplina, disfrutar actividades que involucran conocimientos u operaciones matemáticas, y en general en la actitud hacia la disciplina.

■ Metodología

Este estudio es de enfoque cuantitativo descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2010), ya que su propósito es evidenciar y describir la relación entre el nivel de ansiedad matemática y las variables: rendimiento académico, edad, colegio y zona de procedencia y año que cursa en la carrera.

Para la realización de la misma se tomó una muestra no probabilística por conveniencia conformada por 61 estudiantes de la carrera de educación en I y II ciclo en la Universidad San Isidro Labrador, Sede Pérez Zeledón, durante el primer cuatrimestre del 2017. Se escogió dicha institución porque corresponde a una de las universidades en la región de Pérez Zeledón que desde hace varios años y de forma constante imparte dicha carrera.

El cuestionario empleado corresponde a una adecuación de la “Escala de Ansiedad Matemática” elaborada por Fennema y Sherman (Fennema y Sherman, 1976), que corresponde a un instrumento utilizado en reiteradas ocasiones por diversos autores para el análisis de información concerniente al tema de estudio. Además, al instrumento se le agregaron algunas preguntas generales relacionadas con la modalidad educativa en donde obtuvo el título de bachiller en educación media, la zona de procedencia, el nivel de la carrera que se encuentra cursando, la edad y el rendimiento obtenido en pruebas de matemática, en donde se toma como referencia el examen de bachillerato de dicha asignatura.

La elección de estas variables radica en el hecho que algunos estudios previos sobre el tema las identifican como factores que inciden en el nivel de ansiedad matemática en el momento de enfrentarse a la disciplina como tal (Delgado, Espinoza y Fonseca, 2017; Pérez-Tyteca, et al., 2009).

Se debe considerar que el análisis de dichas variables no es una posición subjetiva, si no que más bien se puede establecer tomando como base el análisis y la utilización de una escala previamente establecida que permite medir el nivel de ansiedad de los participantes del estudio. Esta escala es mencionada por Pérez-Tyteca (2012), en donde se establecen dichos niveles de la siguiente forma: ansiedad matemática muy baja (puntuación media menor a 1.5), ansiedad matemática baja (puntuación media entre 1.5 y 2.49), ansiedad matemática media (puntuación media entre 2.5 y 3.49), ansiedad matemática alta (puntuación media entre 3.5 y 4.49), ansiedad matemática muy alta (puntuación media mayor o igual a 4.5).

Las preguntas utilizadas fueron evaluadas mediante una escala tipo Likert, en donde sus opciones de respuesta van de 1 a 5; situación que permite establecer un promedio de los puntajes de las preguntas, lo cual corresponderá al nivel de ansiedad matemática.

Análisis y discusión de resultados

En relación con el nivel de ansiedad matemática presente en los sujetos de la muestra se encontró que el puntaje promedio de ansiedad matemática fue de 2.78, que corresponde a un nivel medio de ansiedad matemática de acuerdo con la escala empleada en este estudio. En la siguiente tabla se muestra la frecuencia y porcentaje de estudiantes distribuidos en cada nivel de ansiedad matemática.

Tabla 1. Frecuencia y porcentaje de estudiantes en cada nivel de ansiedad matemática

Nivel de ansiedad matemática	Frecuencia	Porcentaje
Ansiedad matemática muy baja	3	4,92
Ansiedad matemática baja	17	27,87
Ansiedad matemática media	32	52,46
Ansiedad matemática alta	9	14,75
Ansiedad matemática muy alta	0	0,00

Fuente: Elaboración propia

De acuerdo con la tabla anterior, el 67,21% de los sujetos entrevistados presentan un nivel medio o alto de ansiedad matemática; mientras que solo el 4,92% muestran un nivel muy bajo de ansiedad hacia esta disciplina.

En relación con la edad, resultó que los estudiantes de 32 a 37 años son los que presentan un mayor nivel de ansiedad matemática; mientras que sus compañeros más jóvenes presentan menor nivel de ansiedad matemática. Los resultados obtenidos en relación con la edad y el nivel de ansiedad matemática de los sujetos de estudio se presentan en la siguiente tabla.

Tabla 2. Estadísticos descriptivos de la ansiedad matemática según edad

Edad	Media	N	Desviación típica	Máximo	Mínimo
De 17 A 22 años	2,60	18	0,53	3,57	1,36
De 22 A 27 años	2,83	19	0,67	4,14	1,79
De 27 A 32 años	2,53	13	0,78	4,36	1,29
De 32 A 37 años	3,06	6	0,53	3,86	2,29
Más de 37 años	2,46	5	1,16	4,21	1,00

Fuente: Elaboración propia

Con respecto a la zona de residencia de los estudiantes de la muestra, la tabla 3 muestra que los provenientes de zonas urbanas presentan un nivel de ansiedad matemática mayor (2,89) que sus compañeros de la zona rural (2,63). Sería interesante realizar un estudio más profundo que valide este resultado, pues se esperaba que los estudiantes de la zona rural presentaran un mayor nivel de ansiedad matemática debido a las diferencias educativas que estas zonas presentan. La tabla 3 muestra los resultados con respecto a esta variable.

Tabla 3. Estadísticos descriptivos de la ansiedad matemática según zona de residencia

Zona	Media	N	Desviación típica	Máximo	Mínimo
Rural	2,63	27	0,72	4,21	1,00
Urbana	2,89	34	0,65	4,36	1,79

Fuente: Elaboración propia

Otra variable tomada en cuenta en el estudio es la modalidad donde los estudiantes para maestros de la muestra obtuvieron su título de bachillerato en educación media. La tabla 4 muestras estos resultados.

Tabla 4. Estadísticos descriptivos de la ansiedad matemática según modalidad donde obtuvo el título de bachillerato

Modalidad	Media	N	Desviación típica	Máximo	Mínimo
Colegio nocturno	2,79	18	0,68	3,71	1,00
Colegio diurno	2,74	27	0,68	4,36	1,29
Colegio técnico	2,30	6	0,45	2,86	1,79
Educación abierta	3,13	10	0,72	4,21	2,29

Fuente: Elaboración propia

De acuerdo con la información de la tabla anterior, los sujetos de estudio que provienen del sistema de educación abierta son los que presentan un nivel de ansiedad matemática mayor; mientras que los que provienen del sistema de colegios técnicos son los que poseen menor nivel de ansiedad matemática. Además se puede observar que las diferencias en cuanto a los que concluyeron sus estudios de secundaria en algún colegio nocturno o diurno es muy pequeña.

Para estudiar la ansiedad matemática de acuerdo con el rendimiento académico, se le pidió a los estudiantes que indicaran su rendimiento en las pruebas estandarizadas nacionales para aprobar los estudios secundarios, llamadas pruebas de bachillerato. Al respecto, la tabla 5 muestra que los estudiantes que obtuvieron un rendimiento muy malo en dichas pruebas tienen el nivel alto de ansiedad matemática; mientras que los que indicaron que su rendimiento fue muy bueno presentan un nivel bajo de ansiedad matemática. Este resultado podría indicar una correlación negativa entre esta variable y el nivel de ansiedad matemática; sin embargo, es necesario profundizar al respecto y realizar un análisis estadístico de correlación para afirmar dicho resultado.

Tabla 5. Estadísticos descriptivos de la ansiedad matemática según rendimiento en la prueba de bachillerato en Matemática

Modalidad	Media	N	Desviación típica	Máximo	Mínimo
Muy malo	3,05	3	0,35	3,29	2,64
Malo	2,56	11	0,88	4,14	1,00
Regular	2,96	28	0,62	4,36	2,07
Bueno	2,63	18	0,65	3,86	1,29
Muy bueno	1,79	1	0	1,79	1,79

Fuente: Elaboración propia

Por último, se estudió la ansiedad matemática de acuerdo con el año que cursa en la carrera. Al respecto resultó que existen muy pocas diferencias en cuanto al nivel de ansiedad matemática y el año que cursa el estudiante en la carrera. En la siguiente tabla se muestran los resultados en relación con esta variable.

Tabla 6. Estadísticos descriptivos de la ansiedad matemática según nivel en el que se encuentra en la carrera

Modalidad	Media	N	Desviación típica	Máximo	Mínimo
Primer año	2,76	21	0,63	3,71	1,36
Segundo año	2,89	22	0,65	4,36	1,79
Tercer año	2,65	18	0,80	4,21	1,00

Fuente: Elaboración propia

Conclusiones

De acuerdo con los resultados obtenidos del análisis estadístico, se concluye que los estudiantes encuestados muestran un nivel medio de ansiedad matemática. Este resultado evidencia una problemática con respecto al temor que sienten los estudiantes para maestros hacia la matemática y que podrían transmitir al enseñar esta disciplina, lo cual se refleja en algunos estudios realizados en nuestro país (Delgado, Espinoza & Fonseca, 2017, Meza et al., 2014; Castillo & Picado, 2014; Corrales, 2014) que afirman que los estudiantes de educación secundaria y universitaria presentan un nivel importante de ansiedad matemática.
También se concluye que los estudiantes más adultos (32-37 años) son los que presentan mayores niveles de ansiedad matemática; contrario a los más jóvenes que son los que presentan menor nivel de ansiedad matemática.

En relación con zona de procedencia de los sujetos de estudio, se concluye que los que proceden de zonas urbanas son los que presentan mayor nivel de ansiedad matemática.

Este resultado llama la atención porque algunas investigaciones y estadísticas a nivel nacional afirman que los estudiantes de estas zonas presentan mejor rendimiento académico que los provenientes de zonas rurales y por tanto deberían presentan un menor nivel de ansiedad hacia esta disciplina. De hecho, este estudio también concluye una relación negativa entre el nivel de ansiedad matemática y el rendimiento académico, de manera que entre mejor sea el rendimiento académico de los estudiantes menor será su nivel de ansiedad matemática.

De esta forma, es necesario estudiar más a fondo las razones por las que los estudiantes para maestros que provienen de zonas urbanas presentan mayor nivel de ansiedad que sus compañeros de zonas rurales.

Con respecto a la modalidad de educación en la que culminaron sus estudios de educación media, se concluye que los que proceden del sistema de educación abierta son los que presentan mayor nivel de ansiedad matemática. Esto puede deberse a que algunos de estos estudiantes generalmente matriculan en este sistema educativo porque han reprobado la materia de Matemática. Este resultado es importante porque identifica un conjunto de estudiantes para maestros a los que se debe intervenir para evitar que transmitan la ansiedad matemática a sus futuros estudiantes.

Por último, se concluye que este estudio podría ser parte de un primer acercamiento al estudio de la ansiedad matemática en futuros maestros de primaria que sirva como insumo para una intervención que permita disminuir y controlar el nivel de ansiedad matemática que estos presentan, con el fin de que no lo transmitan a sus estudiantes cuando ejerzan su profesión como maestro de educación primaria. Además, sería interesante realizar un estudio estadístico correlaciona que permita establecer diferencias significativas entre las variables tomadas en cuenta y el nivel de ansiedad matemática.

Referencias bibliográficas

Alegre, A. (2013). *Ansiedad ante exámenes y estrategias de aprendizaje en estudiantes de secundaria de Lima Metropolitana*. Propósitos y Representaciones, 1(1), 107- 130. Doi: http://dx.doi.org/10.20511/pyr2013.v1n1.9

Carneiro, R. & Lupiáñez, L. (2016). Creencias y concepciones de los futuros maestros de primaria sobre las matemáticas. *Revista Eletrônica de Educação*, 10(1), 11-25. Doi: 10.14244/198271991583

Castillo, H. & Picado, A. (2014). *Estudio de la Ansiedad Matemática en estudiantes de colegios técnicos de la educación media costarricense* (Tesis de Licenciatura): Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Corrales, J. (2014). *Estudio del nivel de "ansiedad matemática" en estudiantes de tres colegios académicos nocturnos costarricenses* (Tesis de Licenciatura): Instituto Tecnológico de Costa Rica

Delgado, I., Espinoza, J. & Fonseca J. (2017). *Ansiedad matemática en estudiantes universitarios de Costa Rica y su relación con el rendimiento académico y variables sociodemográficas*. Propósitos y Representaciones, 5(1), 275-300 Doi: http://dx.doi.org/10.20511/pyr2017.v5n1.148

Fennema, E. & Sherman, J. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitudes scales: Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by females and males. *Journal for research in Mathematics Education,* 7(5), 324-326. Doi: doi.org/10.2307/748467

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación.* México D. F.: McGraw-Hill.

Meza, L.; Agüero, E.; Suarez, Z. & Schmidt, S. (2014). *ESAM: Estudio de la ansiedad matemática en la educación media.* Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Pérez-Tyteca, P. (2012). *La ansiedad matemática como centro de un modelo causal predictivo de elección de carreras* (Tesis Doctoral) Granada: Universidad de Granada, España.

Pérez-Tyteca, P. & Castro, E. (2011). La ansiedad matemática y su red de influencias en la elección de carrera universitaria. *Investigación en Educación*, 471-480.

Pérez-Tyteca, P., Castro, E., Segovia, I., Castro, E., Fernández, F. & Cano, F. (2009). El Papel de la ansiedad matemática en el paso de la educación secundaria a la educación universitaria. *PNA*, *4*(1), 23-35,

Wood, E. F. (1988). Math anxiety and elementary teachers: What does research tell us? *For the Learning of Mathematics, 8*(1), 8-13.

Richardson, F. C. & Suinn, R. M. (1972). The mathematics anxiety rating scale: Psychometric data. *Journal of Counselling Psychology*, *19*(6), 551-554.

Ureña, M.P (2015). *Ansiedad hacia las matemáticas*. Tesis de maestría: Jaen, Universidad de Jaen, España

Tobias, S. & Weissbrod, C. (1980). Anxiety and mathematics: An update. *Harvard Educational Review, 50*(1), 63-70.

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

EL ROL DEL ALUMNO DE PROFESORADO EN MATEMÁTICA, FUTURO DOCENTE, EN LAS MATERIAS DISCIPLINARES DEL CAMPO ORIENTADO

Cintia Vernazza, Daniela Emmanuele
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA), Universidad Nacional de Rosario. (Argentina)
cinvernazza@gmail.com; emman@fceia.unr.edu.ar

Resumen
En trabajos anteriores, establecimos algunos elementos que componen el proceso de deconstrucción del saber matemático y ciertas características específicas. Nuestra pregunta de investigación se formula respecto a qué tenemos que hacer los docentes para lograr que los alumnos, futuros docentes, cuestionen el conocimiento que pretendemos que construyan durante su formación. Entonces, indagamos cuáles son las interacciones que favorecen dicha deconstrucción y estimulan la apropiación de los conocimientos de los alumnos. Exploramos el rol del alumno de profesorado mediante el análisis de la vinculación entre la formación pedagógico-didáctica y la formación disciplinar como vehículo generador de una mirada de futuros enseñantes.

Palabras claves: rol, futuro docente, materias disciplinares

Abstract
In previous works, we established some elements that make up the process of deconstruction of mathematical knowledge and certain specific characteristics. The research question is posed as to what teachers have to do to ensure that the students, prospective teachers, question the knowledge we expect them to construct during their training. Then, we investigate the interactions that favor this deconstruction and stimulate the appropriation of students' knowledge. We explored the role of the teacher-training student by analyzing the link between pedagogic-didactic training and disciplinary training as a vehicle for generating a view of prospective teachers.

Key words: role, prospective teacher, discipline subjects

Introducción

El presente trabajo se enmarca en el Proyecto de Investigación ING 548, radicado en el Departamento de Matemática de la Escuela de Cs Exactas y Naturales de la FCEIA, UNR. En trabajos anteriores hemos venido investigando el proceso de deconstrucción en la etapa de formación docente con el fin de poder caracterizarlo en las etapas formativas finales de estudiantes avanzados del profesorado (futuros docentes de 3° y 4° año del Profesorado en Matemática). En dichos trabajos ya hemos delineado ciertas características específicas del proceso de deconstrucción, pero consideramos útil seguir investigando acerca del mismo para indagar cuáles son las interacciones, intervenciones o relaciones que favorecen dicha deconstrucción y estimulan la apropiación de los conocimientos por parte de los alumnos. Por eso nos preguntamos: ¿Qué tenemos que hacer los docentes formadores para lograr que los alumnos, futuros docentes, cuestionen el conocimiento que pretendemos que construyan? Esto nos lleva a cuestionarnos: ¿Qué modificaciones podemos plantear dentro del profesorado para que los futuros profesores se cuestionen el conocimiento que pretendemos que construyan, *durante su formación*? Hay otros autores que realizan un cuestionamiento similar (Reyes, 2011), pero enfocan su mirada en cómo revertir dicha situación en los docentes que ya están en ejercicio profesional.

Los resultados conseguidos mediante la investigación anterior nos derivan entonces a explorar la vinculación entre la formación pedagógico-didáctica y la formación disciplinar. Esto es, nos preguntamos por cómo es que se vinculan los aprendizajes de los elementos que hacen al ejercicio de la docencia (que es necesario que sean adquiridos para efectivizar la deconstrucción de los saberes matemáticos, es decir, para que la deconstrucción sea posible) y los conocimientos matemáticos adquiridos en las asignaturas disciplinares de la formación orientada.

En los planes de estudio de las carreras de Profesorado en Matemática (tanto la que se ofrece en la UNR, como la que ofrecen los Institutos Superiores del Profesorado (ISP) dependientes del Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe) se plantea que debe existir una estrecha vinculación entre los distintos campos, el de formación orientada, el de formación pedagógica general y el de formación específica. Pero en las planificaciones de cada una de las materias correspondientes a dichos campos, y más aún, en la práctica, observamos que, en general y salvo los esfuerzos que realizan algunos (muy pocos) docentes formadores en dicho sentido, no sucede así. Creemos que dicha vinculación posibilitaría que el alumno, futuro docente, pueda asumirse tempranamente en su rol de enseñante, abandonando el estado pasivo que usualmente asumen los estudiantes de la carrera. De este modo, quedaría habilitado para cuestionar el conocimiento matemático en forma genuina, o sea, para criticar y/o cuestionar el saber matemático que ha de transmitir cuando sea un profesor y no sólo cuestionarlo *desde la mirada de un alumno*. Esto favorecería un acceso temprano al proceso de deconstrucción necesario para el empoderamiento docente.

Consideramos muy importante, que al menos, en el último año del profesorado el alumno esté posicionado de otra forma, es decir, que asuma su rol de futuro docente y que la posición subjetiva de sujeto que aprende no opaque la posición subjetiva del sujeto que aprende para enseñar. ¿Mediante qué estrategias se prepara a los alumnos de profesorado para estimular un posicionamiento subjetivo en tanto futuro docente durante el cursado de las materias disciplinares específicas?

Marco teórico

Nuestro marco teórico de referencia se asienta fundamentalmente en dos corrientes teóricas que articulamos permanentemente: 1) La socioepistemología, que nos brinda los conceptos de problematización del conocimiento, discurso matemático escolar (dME), deconstrucción del conocimiento y empoderamiento docente (Reyes-Gasperini; Cantoral, 2014); 2) La teoría foucaultiana acerca de la producción del discurso, que se soporta en la trama saber-verdad-sujeto-poder y nos brinda conceptos como la episteme (Foucault, 1992).

Metodología

Para analizar los interrogantes planteados decidimos utilizar la siguiente metodología:

a) Observaciones de clases en materias disciplinares del último año del Profesorado en Matemática de distintas instituciones (FCEIA, IES N° 28, ISP 3, ISP 21), para analizar la actitud de los alumnos como futuros profesores, así como también la postura del docente, quien debería ser el que propicie la deconstrucción y favorezca la problematización del conocimiento, por otra parte.

b) Análisis de documentos: planes de estudio de las carreras y planificaciones de los Trayectos de Práctica de 1° a 4° año (también las Práctica de la Enseñanza I, II y III, correspondientes a 1°, 2° y 4° año respectivamente) como así materias disciplinares de distintas áreas (Tópicos de Geometría, Geometría II y III, Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones de la Matemática, correspondientes a 3° y 4° año respectivamente); para poder analizar si en ellas se proponen actividades que propicien una verdadera conexión entre las materias disciplinares y las del campo pedagógico-didáctico.

c) Entrevistas a docentes cuyas clases fueron observadas.

Resultados

Observaciones

Se observó en las siguientes materias: Ecuaciones Diferenciales de 4° año del profesorado de la FCEIA y en Tópicos de Geometría de 3° año de los profesorados de los institutos ISP N°21 y ISP N°3. Se diseñó una ficha donde se dejaron asentados los criterios para registrar las observaciones. Dichos criterios fueron pensados atendiendo al propósito de identificar el posicionamiento discursivo del alumno en la clase. Las observaciones se realizaron a lo largo del desarrollo de una unidad didáctica.

De estas observaciones de clases pudimos apreciar que la mayoría de los alumnos se encuentran en un rol cuasi-pasivo, prácticamente no se observa que en alguna clase se cuestionen el contenido, relacionándolo con la docencia y no con su aspecto técnico. El único tipo de intervención frecuente es preguntar por cuestiones que hacen a los procedimientos matemáticos, no a su *uso y/o enseñanza* – al menos no, en forma espontánea. Esto surge, sólo en ocasiones, si el docente lo propicia – lo que no es frecuente que ocurra en todas las materias de las áreas disciplinares específicas (Análisis, Geometría, Álgebra, Estadística y Probabilidad). Sólo se observan preguntas del campo disciplinar, como por ejemplo: "¿Cómo llegó a ese resultado?", "¿Podría volver a explicar ese paso?".

Los docentes observados no proponen marco histórico-epistemológico, ni referentes bibliográficos, y muy pocas – o casi ninguna - aplicaciones concretas. De esta forma tampoco se propicia en el alumno, la participación desde otro lugar.

Análisis de documentos

En el caso particular del Profesorado en Matemática dependiente de la UNR (en el plan anterior el título era *Profesor de Enseñanza Media y Superior en Matemática*), el plan vigente (que actualmente está en revisión y posiblemente haya un nuevo plan de estudios de la carrera en 2018) está estructurado en tres campos como sigue:

1) Área de formación general pedagógica
2) Área de formación especializada
3) Área de formación orientada y un Eje Integrador.

El Eje integrador, comprende tres asignaturas: Práctica de la Enseñanza I, II y III. En dicho plan se plantea:

> El Eje integrador tiene como objetivo insertar la problemática de la práctica de la enseñanza desde el primer año de la carrera, a través de la articulación teórico-práctica de los contenidos que constituyen los tres campos de formación integrándolos en actividades que estimulen los procesos de generación de prácticas educativas originales y la reflexión crítica, en torno al ejercicio de la docencia en general y a la enseñanza de la matemática en particular.”. (Universidad Nacional de Rosario, 2002a, pp. 2)

Nos preguntamos de qué manera desde el Eje Integrador, se cumple con el propósito establecido de integrar los tres campos de formación. Específicamente, ¿mediante qué actividades se estimulan los procesos de generación de prácticas educativas originales y la reflexión crítica? Debido a dicho interrogante, es que analizamos la planificación de cada materia que compone dicho eje.

Al analizar la planificación de la materia *Práctica de la Enseñanza I* (de cursada anual correspondiente al primer año de la carrera) notamos que:

En la unidad 1 llamada “Conocimientos y actitudes necesarios para el ejercicio de la docencia”, se trabaja sobre la biografía escolar del alumno.

En la unidad 2, se plantea trabajar acerca de la enseñanza de la geometría en el ciclo básico de la escolaridad secundaria. En todas las actividades planteadas no se observa ninguna vinculación con la materia *Geometría I* (de cursada anual correspondiente al primer año de la carrera) que se cursa simultáneamente.

En la unidad 3, se trabaja con los marcos normativos de la actividad docente.

En la unidad 4, se habla del análisis de textos escolares. En ningún momento se menciona analizar los libros con los que se están cursando las materias específicas. Tampoco se analizan las TIC que están aprendiendo al cursar las materias.

En la unidad 5, sólo se realizan lecturas y discusión sobre teorías de enseñanza y de los aprendizajes.

En la unidad 6, se trabaja acerca de la planificación e implementación de actividades de enseñanza en el ciclo básico de la escolaridad secundaria. No está propuesto analizar una planificación de alguna asignatura que estén cursando (o que hayan cursado previamente).

Algo similar surge al analizar la planificación de la materia *Práctica de la Enseñanza II* (de cursada cuatrimestral, correspondiente al primer cuatrimestre del tercer año de la carrera):
En la unidad 1, se trabaja el marco normativo del Álgebra, la Geometría y el Precálculo en la provincia de Santa Fe.

En la unidad 2, llamada "La complejidad de la práctica docente", se indica que se trabajará con las características de un buen docente y con los objetivos de la enseñanza de la matemática en la educación secundaria, la resolución de problemas y conjeturas matemáticas.
En particular la unidad 2.5, se detalla lo siguiente:

> 2.5. La clase en el aula de Matemática, Planificación, objetivos, contenidos, metodología y recursos. Los libros de texto. Elaboración de guías de prácticas. Planificación y desarrollo de actividades de enseñanza. Pautas didácticas generales. (Universidad Nacional de Rosario, 2002a)

No se indica que tendrán vinculación con ninguna materia del campo disciplinar, quizás en esta unidad, sería interesante vincularlas.
En la unidad 3, relacionada a las funciones y su enseñanza, en ningun momento se menciona alguna vinculación con la materia Cálculo I que ya fue cursada.

En *Práctica de la Enseñanza III* (de cursada cuatrimestral, correspondiente al segundo cuatrimestre del tercer año de la carrera), podemos apreciar lo siguiente:

En la unidad 1, se trabaja con el marco normativo de la enseñanza de la combinatoria, la probabilidad y la estadística.

La unidad 2, sobre el razonamiento combinatorio y su enseñanza.

En la unidad 3, sobre el razonamiento estadístico y su enseñanza.

En ningún momento se detalla alguna vinculación con la materia *Probabilidad y Estadística* que se cursa en el mismo primer cuatrimestre del tercer año de dicha carrera.

En la materia *Residencia* (de cursada anual, correspondiente al cuarto y último año de la carrera), encontramos que:

En la unidad 1, se vuelve a trabajar la influencia de la biografía escolar para la práctica docente.

En la unidad 2, se realizan las prácticas docentes.

A su vez en la planificación de las materias del campo orientado, únicamente se ven actividades vinculadas a la disciplina. Sólo en una materia disciplinar (*Geometría III*, de cursada cuatrimestral, correspondiente al cuarto año de la carrera) encontramos actividades referidas a la docencia.

Un análisis similar hicimos en el caso del Profesorado en Educación Secundaria en Matemática dependiente del Ministerio de la Provincia de Santa Fe, donde el plan vigente 2090/15 (que comenzó a implementarse recién en el año 2016 y por ello, no hay egresados de dicho plan en la actualidad) está estructurado año por año según tres campos:

1) Campo de la formación general
2) Campo de la formación específica
3) Campo de la formación en la práctica profesional

El Trayecto de Práctica Docente está constituido por cinco espacios curriculares: cuatro talleres, uno por cada año de la carrera, y un Seminario de Integración y Síntesis en cuarto año.

En el programa de la materia *Didáctica Específica* (del plan anterior 696/01), se establece como objetivo "Establecer conexiones entre los distintos campos de formación general pedagógica, especializada y orientada necesarios para desempeñarse con idoneidad en instituciones, contextos específicos y con diversidad de grupos de alumnos." (2015, p. 2) Y se detallan los procedimientos para el desarrollo de los núcleos:

- Confrontación permanente de la teoría con la realidad, induciendo el análisis, reflexión y potenciales trabajos de investigación sobre aspectos conflictivos en dicha confrontación.
- Lectura crítica, profunda y con toma de posición respecto al futuro rol de educadores.
- Construcción de redes conceptuales.
- Ensayo de diferentes técnicas grupales con el objeto de evaluar sus posibles usos en la enseñanza.
- Temas de discusión grupal: calidad, eficiencia, eficacia y equidad en el sistema educativo actual. Aspectos didácticos de la problemática del fracaso escolar. Desafíos para el aprendizaje autónomo. (Planificación de cátedra de Didáctica Específica, 2015, pp.7)

A pesar de figurar entre los objetivos, no detectamos actividades explícitas para la vinculación de los distintos campos.

Dentro del programa de la materia *Teoría del Curriculum y Didáctica* (del plan anterior 696/01), hay un apartado llamado "Articulaciones con el Plan general de la carrera", que propone lo siguiente:

> Esta cátedra se articula en forma horizontal con todos los espacios de la Fundamentación Pedagógica que construyen el marco epistemológico y didáctico para sustentar la práctica docente desde una perspectiva clara respecto de los grandes paradigmas de la simplicidad y de la complejidad. Los espacios de la Formación Orientada así como los espacios disciplinares constituyen además una fuente de consulta con la cual se dialogará permanentemente para dimensionar los contenidos de este espacio, teniendo en cuenta la estrecha relación existente entre teorías psicológicas, teorías del aprendizaje y paradigmas de la enseñanza, y la necesidad de reconocer esta relación para el análisis de la Tríada didáctica desde diferentes perspectivas modélicas. (2015, pp.11).

No se especifica cómo dialogarán estos campos o cómo se llevará a cabo esta propuesta, es por esto que quizás a veces no se realizan realmente.
A modo de síntesis, podemos concluir que, en ambos planes se establece que es importante y que se deben vincular los distintos campos de la formación. Pero al analizar las planificaciones de las materias de los

campos de formación pedagógica-didáctica, no se ven actividades que promuevan una real vinculación/articulación con el campo de formación disciplinar, sólo algunas ideas pero muy generales. En ningún lugar se menciona alguna materia de las específicas que estén cursando o que hayan cursado.
Las clases disciplinares son espacios que no se aprovechan para la docencia, donde sólo interesa la disciplina por sí misma, pero no la importancia de su aprendizaje desde el que la mira como aquello que va a enseñar.

Entrevistas
Las entrevistas fueron realizadas luego de terminar las observaciones. Respecto a la pregunta: *¿Considera que en sus clases los alumnos cuestionan el contenido enseñado?,* una de las docentes entrevistadas respondió: "Los alumnos no cuestionan lo que uno les da, cuando las clases son conductistas. Cuando tienen que trabajar entre ellos, no existe esa posibilidad. A veces hacen preguntas muy interesantes que disparan la clase para otro lugar. Muy pocas veces sucede eso. Un grupo de alumnos se sienten felices y otros, incómodos y vacíos, porque no tienen a la docente ahí enfrente diciéndoles lo que tienen que hacer".
Otra docente nos dijo: "Depende del grupo, pero siempre son preguntas más del aspecto técnico".
A pesar de esto, dos de las docentes encuestadas, manifiestan la intención de crear en sus clases un espacio para que el alumno tome un rol más activo. Cuando les es posible utilizan la historia de la matemática como recurso didáctico o las TIC, o les piden a sus alumnos que realicen clases especiales.
Respecto a las preguntas *¿Cómo desarrolla los temas a dar? ¿Los expone o los presenta constructivamente a través de actividades? ¿Les da lugar a la participación de los alumnos en sus clases? ¿De qué forma? ¿Les plantea dudas para que los alumnos cuestionen el conocimiento y su forma de enseñarlo?*, los docentes entrevistados reconocen la participación del alumno posicionado como docente, cuando se les pide que pase al pizarrón o que realicen alguna actividad relacionada a la búsqueda de material. En ningún momento se hace referencia a que el propio alumno cuestione acerca de la enseñanza del contenido.

■ Reflexiones:

A modo de reflexión, por un lado, hay poca vinculación entre las materias que se cursan simultáneamente. Las clases disciplinares son espacios que no se aprovechan para la docencia; sólo interesa la disciplina por sí misma, pero no se enfatiza la importancia de su aprendizaje desde el que la mira como aquello que va a enseñar.
Por otro lado, en las clases de las materias relativas al campo pedagógico-didáctico, no se hace uso de los contenidos disciplinares que integran los núcleos temáticos, para que a partir de ellos se desarrollen propuestas didácticas concretas. Y de esta forma lograr un estudiante, al menos en los últimos años, posicionado como docente.
Consideramos que es importante que el alumno ya se posicione como docente al cursar las materias del campo disciplinar orientado, al menos en los últimos años, cuestionando el por qué, el cómo, el mediante qué estrategia está enseñando su docente. Creemos que la formación para el ejercicio de la docencia, comienza cuando el alumno, futuro docente, analiza la planificación de la materia que está cursando, analiza los recursos y estrategias que está utilizando su docente, analiza la bibliografía que le están brindando, analiza si lo que está aprendiendo luego le servirá para explicar qué cosas, cómo, mediante qué tipo de presentaciones, etc. Es decir, consideramos que un estudiante de los últimos años del profesorado, a diferencia de un estudiante de otras carreras técnicas, debería tener un rol alumno/docente.
Pretendemos aportar pequeños señalamientos que contribuyan a que los docentes formadores podamos efectivamente fomentar en nuestros alumnos una *mirada de enseñantes* respecto de aquello que se está aprendiendo. Creemos que, en este sentido, una férrea articulación entre las materias del trayecto de

práctica y las materias disciplinares fortalecería notablemente los aprendizajes para la adquisición de habilidades para la docencia.

Referencias bibliográficas

Foucault, M. (1992). *El orden del discurso*. Barcelona: Tusquets.

Instituto Superior de Profesorado No 3. (2015). Plan del Profesorado en Matemática 696/01. Planificación de cátedra de la materia Teoría del Curriculum y Didáctica. Villa constitución: Autor.

Instituto Superior de Profesorado No 3. (2015). Plan del Profesorado en Matemática. Planificación de cátedra de la materia Didáctica específica. Villa Constitución: Autor.

Reyes Gasperini, D.; Cantoral, R. (2014) Socioepistemología y Empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático. *Bolema, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48,* p. 360-382.

Reyes, D. (2011) *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas*. Tesis de Maestría en Ciencias no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Universidad Nacional de Rosario. (2002a). *Plan del Profesorado en Matemática. Programa de las materias Práctica de Enseñanza I, II y III*. Rosario: Autor.

Universidad Nacional de Rosario. (2002b). *Plan del Profesorado en Matemática. Programa de la materia Residencia.* Rosario: Autor.

Universidad Nacional de Rosario. (2002c). *Plan del Profesorado en Matemática. Programa de las materias Geometría I, II y III.* Rosario: Autor

Universidad Nacional de Rosario. (2002d). *Plan del Profesorado en Matemática. Programa de las materias Cálculo I, II y III*. Rosario: Autor.

Universidad Nacional de Rosario. (2002e). *Plan del Profesorado en Matemática. Programa de la materia Probabilidad y Estadística*. Rosario: Autor.

INTEGRACIÓN DE RESULTADOS DE INVESTIGACIÓN EN LA PLANEACIÓN Y DISEÑO DE TAREAS

Melvin Cruz-Amaya, Gisela Montiel Espinosa
Cinvestav-IPN. (México)
melvin.cruz@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx

Resumen

Aún con la gran cantidad de resultados de investigación en Matemática Educativa, se reconoce que muchas de las problemáticas investigadas se mantienen en contextos escolares; esto causa incertidumbre sobre el acceso y uso de resultados de investigación. Expondremos aquí un análisis inicial de las *reacciones* que tiene un grupo de profesores al interactuar con resultados recientes de investigación y su *integración* en la planeación y diseño de tareas, en el marco de un seminario cuyo objetivo es la integración de tecnología digital a su práctica; experiencia que pretende lograr la planeación y diseño de tareas, usando ambientes de geometría dinámica, basados en resultados de investigación y la propia experiencia docente.

Palabras clave: diseño de tareas, triángulo de negociación, geometría

Abstract

Even with the great amount of research results in Mathematics Education, it is recognized that many of the investigated problems remain in school settings, which causes uncertainty about the access and use of research outcomes. In this paper we show an initial analysis of the *reactions* of a group of teachers when interacting with recent research findings and their *integration* in the planning and design of teaching tasks, within the framework of a seminar focuses on the integration of digital technology into teacher´s practice; experience that aims to achieve the planning and design of teaching tasks, using dynamic geometry environments, based on research results and the teaching experience itself.

Key words: design of tasks, negotiation triangle, geometry

Introducción

Dada la complejidad de los procesos educativos, específicamente en la educación matemática, son múltiples los profesionales inmersos en entender los procesos de enseñanza y de aprendizaje involucrados. Los matemáticos educativos se insertan en contextos escolares, históricos, sociales y culturales con el fin último de explicar las problemáticas planteadas en el entorno educativo; así como aportar para reducirlas o anularlas, buscando siempre un desarrollo educativo pertinente a las demandas sociales. A raíz de la cantidad de investigaciones que actualmente se declaran en el área, nos es evidente que se está acrecentando la indagación, pero de igual manera es incuestionable que muchas de las problemáticas ya investigadas aún se mantienen en el contexto escolar, lo cual provoca cuestionamientos sobre el acceso y uso de los resultados de investigación.

A propósito de esta última cuestión reportamos, de esta experiencia con docentes, la integración de los resultados de investigación en Matemática Educativa, en la planeación y diseño de tareas, lo cual se desarrolla en un seminario cuyo objetivo es la integración de tecnología digital a su práctica; particularmente, notificamos un análisis inicial de las *reacciones* de un grupo de profesores al interactuar con estos resultados de investigación. Entre las reacciones identificadas se caracterizó y ejemplificó la reflexión, la crítica y la toma de decisiones. Para la integración de los resultados de investigación se examinó un triángulo de negociación donde el docente, durante el proceso de construcción de los diseños, se sintió confrontado; ya que buscaba cumplir con la institucionalización, hacer uso de su experiencia docente e integrar los resultados de investigación sobre la noción matemática tratada, dicha integración se identificó con cuatro categorías en los diseños: la estructura del diseño, consideraciones didácticas, estrategias de enseñanza y estrategias de aprendizaje.

Escenario de trabajo

El Seminario de Integración Digital a la Práctica del Profesorado de Matemática reúne a una investigadora en Matemática Educativa, tres investigadores en formación (dirigidos por la investigadora) y cuatro docentes mexicanos del nivel básico, con el propósito de diseñar tareas en un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD), basadas en resultados recientes de investigación y en el conocimiento y la experiencia de los docentes. Los docentes participantes seleccionaron un contenido curricular de geometría para planear y elaborar su diseño; uno de los investigadores en formación realizó la búsqueda y selección de artículos de investigación y, junto al equipo de trabajo, se reestructuraron sus aportes en exposiciones de comunicación, con el objetivo de detonar la discusión y reflexión con los docentes, así como su integración a diseños en AGD. Para el proceso de búsqueda y selección de resultados de investigación se definieron: lugares de búsqueda (revistas con el enfoque adecuado), criterios de búsqueda (investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de los contenidos elegidos por los docentes), periodo de publicación (de 2010 a la fecha) y criterios de selección (que describan procesos de aprendizaje –comprensión, entendimiento, dificultades- y, de preferencia, que hagan uso de herramientas tecnológicas).

Una vez seleccionados los artículos, la orientación de la comunicación de los resultados se constituyó redefiniendo la estructura del artículo por preguntas o nociones contextuales para el profesor: *lo que se identifica en la escuela* (problemática, en la investigación); *lo que se sabe al respecto* (antecedentes); *nuevas preguntas* (planteamiento); *¿cómo responder esas nuevas preguntas?* (fundamentación teórica); *¿qué estudiamos y como lo hacemos?* (método); y *¿qué sabemos ahora?* (resultados y conclusiones). Se presentó un artículo por contenido elegido, atendiendo resultados de investigación propuestos en (Yanik, 2014; Kospentaris, Spyrou y Lappas, 2011; Neel-Romine, Paul y Shafer, 2012), y, de forma trasversal, conocer y atender aportaciones relacionadas con el uso de la tecnología en los proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática; se hizo un análisis y discusión con los docentes, logrando que, basados en su experiencia, expusieran sus puntos de vista e hicieran explícita una relación con su práctica. Todas las sesiones fueron grabadas en video y las consideradas para este análisis comprenden 36 horas de trabajo en el seminario.

■ Descripción e interpretación de la experiencia

Para caracterizar y discernir nuestra información de interés, nos centramos en identificar y caracterizar las primeras reacciones de los docentes al conocer e interactuar con los resultados de investigación y su integración en la planeación y el diseño de tareas. Se identificaron y caracterizaron las primeras reacciones como: reflexión, crítica y toma de decisiones; poniendo atención en los resultados de investigación por contenido propuesto por cada docente, el proceso de redacción de los objetivos de cada diseño y el diseño de las tareas. Para identificar la integración de los resultados de investigación, se tomaron en consideración los diseños y la presentación de los mismos por cada docente, donde se reconoce cómo el docente busca cumplir con lo institucional, usa su experiencia y cómo integra los resultados de investigación, relacionando todo esto con el saber matemático en juego.

■ Reacciones ante los resultados de investigación

Al conocer los resultados de investigación, la primera reacción que manifestaron los docentes respecto a la planeación e implementación de diseños, a los procesos de enseñanza y aprendizaje y a las herramientas utilizadas en dichos procesos, fue *la reflexión*, identificada cuando los docentes examinan detenidamente los resultados de investigación y los relacionan con los contextos e instrumentos de recolección de datos utilizados. La reflexión se manifiesta cuando analizan y cuestionan a la población investigada, el contexto sociocultural donde se desarrolla la investigación y el instrumento de investigación, seguidamente lo relacionan con su práctica y su realidad educativa; ultiman sobre las posibles reacciones de sus estudiantes ante el instrumento de investigación; exponen formas de enseñanza que ellos realizan para atender ciertos resultados; identifican diferentes concepciones de los estudiantes y reconocen que surgen por diversos aspectos, incluyendo la forma en cómo se desarrollan los contenidos; construyen secuencias de enseñanza de algunas nociones matemáticas; exponen la importancia del uso del conocimiento empírico del estudiante y de la innovación de estrategias de enseñanza; relacionan los resultados de investigación con el conocimiento matemático en juego y buscan justificar dichos resultados a través de su realidad educativa. Por ejemplo, el comentario por el profesor P. Al:

- *En el libro de texto, al enseñar el gráfico circular hace referencia a los 360 grados (una cualidad del círculo y la circunferencia) como un círculo.*

Se observa como el profesor busca justificar un resultado propuesto por Neel-Romine, Paul y Shafer (2012) donde sugieren que hablar de círculo, comúnmente, es hacer referencia a "360 grados" o el comentario de la profesora P.D:

- *Algunas respuestas surgen por la forma en como los maestros enseñamos algunos temas.*

En estas intervenciones, los profesores reconocen las diferentes concepciones que pueden tener los estudiantes sobre algunas nociones matemáticas, esto los lleva a tratar de justificar dichas concepciones y cuestionar las herramientas utilizadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje, la realidad escolar, la forma de enseñanza utilizadas y de manera general el sistema educativo.

Después de reflexionar sobre los resultados de investigación, usan criterios analíticos y objetivos de estimación y juicio sobre los resultados de investigación relacionándolos con las herramientas de enseñanza utilizadas, y los procesos de enseñanza y aprendizaje que han desarrollado hasta el momento con el propósito de discernir la verdad, entendida de esta forma *la crítica*. Emiten algunas apreciaciones relacionadas con: las funciones de los libros del estudiante, como recurso de aprendizaje o como instrumento de validación de conocimiento; las indicaciones o instrucciones de los libros de texto, las cuales no consideran el objetivo de la actividad ni la noción matemática en juego; la estructura del instrumento de investigación no genera un resultado objetivo o verdadero, y muchas concepciones matemáticas que presentan los resultados de investigación se ven evidenciadas en los libros de texto. Los docentes analizan, interpretan y cuestionan las herramientas que tienen y utilizan para sus prácticas, por ejemplo, el comentario de la profesora P.S:

- *El instrumento escrito de esa investigación tiene la misma estructura del libro de trabajo de mis estudiantes, lo cual indica que el libro no es una herramienta de enseñanza sino una herramienta de validación de conocimiento.*

Yanik (2014) en su investigación atendiendo la imagen conceptual de la noción de traslación geométrica, presenta un instrumento de validación de conocimientos basado en investigaciones que tiene la misma estructura que el libro de trabajo utilizado por los estudiantes de la profesora P. S, lo que le permite a la docente relacionarlos y emitir dicha valoración. También se cuestiona la presentación de las indicaciones o algunas nociones matemáticas en los libros de texto, por ejemplo, el comentario de la profesora P.D:

- *Las nociones de ángulo presentadas como circulo o semicírculo se da en los libros de texto.*

Dichos juicios emitidos generan también una reflexión sobre las características propias de las nociones matemáticas tratadas, y si los textos las caracterizaban considerando otras nociones matemáticas, entonces, los profesores se preguntaron sobre la esencia de cada noción matemática en juego. Otras estimaciones fueron sobre las estrategias de las investigaciones para conocer el conocimiento del estudiante, como lo muestra el comentario de la profesora P.S:

- *Si presentamos actividades como esas, entonces van a contestar al azar. Debemos evitar las opciones múltiples en las actividades.*

Donde, basada en su experiencia, considera que al aplicar los ejercicios propuestos en las investigaciones con sus estudiantes se requiere algunas modificaciones, podemos observar la relación cercana entre los resultados de investigación y la experiencia docente.

Estos procesos de reflexión y crítica redundan en *la toma de decisiones*, entendida como el proceso mediante el cual relaciona la reflexión con la crítica y elige opciones para resolver diferentes situaciones, a través de sus diseños de clases, esto fue evidente durante la elaboración de los objetivos y actividades del diseño. Entre algunas dediciones tomadas están: no limitarse a los libros de texto, esto permitirá que los estudiantes adquieran habilidades de explicación de procedimientos; trabajar la clase en las mismas condiciones que las evaluaciones, ya que en las investigaciones los estudiantes trabajan la traslación y rotación en hojas cuadriculadas (y esto parece favorecer la traslación horizontal y vertical), y normalmente lo enseñan de esa forma, pero en las evaluaciones trabajan las trasformaciones geométricas en hojas blancas; usar algunos ejercicios de los instrumentos de investigación como apoyos; utilizar la exploración guiada, una de las estrategias presentadas por los docentes a raíz de su experiencia e investigación; ordenar y estructurar las actividades según los resultados de investigación; y buscar una relación entre los resultados de investigación y las respuestas de sus estudiantes. Por ejemplo, la profesora P. A mencionó:

- *El objetivo y orden de las actividades, está, según los resultados de investigación, fortaleciendo primero la noción de área, luego la medición y por último calcular su área, e incluir casos particulares propuestos en la investigación como calcular el área de un triángulo que tiene la altura fuera del triángulo.*

Donde muestra que la estructura de su diseño atiende un resultado propuesto por Kospentaris, Spyrou y Lappas (2011), quienes indican lo fundamental de la interrelación del concepto de área, la medición de área y las fórmulas de área, al enseñar el área de figuras planas y la conservación de área.

La primera de las reacciones identificadas es la reflexión, esta reacción permitía a los docentes una valoración de algunas ideas nuevas que la investigación estaba arrojando; al pasar de una estimación a tener un criterio sobre dichos resultados, el docente relacionaba esas ideas con lo que le pide la institución, su contexto educativo y sus conocimientos matemáticos, didácticos y de su experiencia, lo que le permitió analizar su realidad; y por último vincula la reflexión con la crítica y selecciona ideas matemáticas, estrategias de enseñanza, estrategias de aprendizaje y técnicas de enseñanza, para lograr con sus diseño las confrontaciones cognitivas pertinentes que generen una significación de la noción matemática trabajada en sus diseños.

Integración de los resultados de investigación

Al planificar y diseñar tareas de enseñanza, los docentes sienten la necesidad de cumplir con los requerimientos institucionales, tales como el uso de los libros de texto, el tiempo, el contexto de aula, un objetivo curricular entre otros; y para ello hacen uso de sus conocimientos y experiencia. Cuando el docente conoce y discute los resultados de investigación se genera un triángulo de negociación entre lo institucional, la experiencia docente y la investigación, con relación a la noción matemática en juego (ver figura 1). El triángulo de negociación se evidenció durante el proceso de planificación de las tareas, a través de la descripción e interpretación de los diseños, y del análisis de la presentación de los diseños; dichas presentaciones y las discusiones generadas por los docentes, permitió la integración de todas las opiniones, poniendo en juego las experiencias de todos los docentes, y con la experimentación, se verificaron algunas de las hipótesis que se tenían en los diseños.

Se caracterizaron cada uno de los vértices del triángulo desde cuatro categorías identificadas donde se muestra la integración de los resultados de investigación, dichas categorías son: estructura del diseño, consideraciones didácticas, estrategias de enseñanza y estrategias de aprendizaje.

Figura 1: Triángulo de negociación en el proceso de integración de resultados de investigación al diseño de tareas. (Elaboración propia)

Las *estructuras de los diseños* fueron cambiando a raíz de la presentación y discusión sobre los resultados de investigación y las aportaciones de los AGD, como primicia se exponían estructuras basadas totalmente en el objetivo curricular, donde el docente buscaba cumplir con la institucionalización; con los resultados de investigación, algunos de los diseños cambiaban su estructura a una basada en la noción matemática tratada; y con la discusión, poniendo en juego su experiencia, pasaron a relacionar ambas según el contexto de cada maestro, por ello asumimos que las estructuras finales de sus diseños muestran la aportación de cada uno de los vértices del triángulo de negociación. A raíz de las aportaciones conocidas y discutidas durante la comunicación de los resultados de investigación sobre el uso de la tecnología, se consideró el uso de ambientes de trabajó híbridos, trabajando experiencias con material concreto y utilizando algunas herramientas como las hojas de trabajo, los libros de trabajo y el arrastre en GeoGebra, los cuales potenciaban significar las nociones trabajadas.

Las *consideraciones didácticas*, dependieron de la noción matemática tratada, desde lo institucional, por ejemplo, en los libros de texto se sugiere utilizar el tangram al atender la noción de área y la conservación de área, la resolución de problemas como metodología de enseñanza y la construcción de mosaicos para trabajar las transformaciones geométricas; desde la investigación, para la enseñanza de las trasformaciones geométricas, se consideró el uso de figuras no circulares y el pizarrón blanco, ya que Yanik (2014) en su investigación indica que los estudiantes tienden a no aceptar que las figuras circulares pueden ser trasladadas, porque primero trasladan los vértices de una figura y luego los unen con un segmento; y desde la experiencia docente, buscaron potenciar los conocimientos previos y utilizar un lenguaje apropiado para el estudiante, como usar el término *figuras iguales*, refiriéndose a *figuras congruentes*.

En *las estrategias de enseñanza*, desde lo institucional, se presenta la resolución de problemas como forma de enseñanza de las nociones matemáticas; desde la investigación, se mostró la importancia y uso de las nociones previas de los estudiantes sobre el objeto matemático y a raíz de la discusión surgió desde la experiencia docente la exploración guiada, donde los docentes comentan sobre adecuar el contexto de aula para la aplicación del diseño, por lo tanto en sus diseños hacen preguntas las cuales será contestadas usando el contexto antes creado por los docentes.

En *las estrategias de aprendizaje*, desde lo institucional, el contenido curricular presenta la atención de la relación perímetro-área para el tema de área de figuras planas y la división de una figura en partes y reordenarla como una estrategia de aprendizaje de la conservación de área; desde la investigación, la manipulación, construcción, exploración y caracterización, como el proceso de significación de una noción matemática, se agregó en el tema de área la relación congruencia-perímetro, se estimularon estrategias de estimación visual en los estudiantes y confrontar la idea de equilibrar los lados de una figura para buscar su congruencia; y desde la experiencia docente, la atención de la traslación como movimiento y el uso del tangram lo cual permitirá atender la relación perímetro-área.

El docente, a través de sus diseños, muestra el cumplimiento a lo institucional, el uso de su experiencia docente y la integración de los resultados de investigación, relacionándolos con una noción matemática en específico y lo hace considerando en todo momento al estudiante, al valorar: las estrategias de aprendizaje, buscando cierta confrontación de sus conocimientos previos con las ideas matemáticas nuevas; las estrategias de enseñanza, atendiendo las diferentes -posibles y ya mencionadas en los resultados de investigación- concepciones de los estudiante; consideraciones didácticas y estructura de diseño, atendiendo lo esencial de las nociones matemáticas y la diversidad de formas de significación de una noción matemática. La experiencia docente que subyace en cada uno de los diseños generados no hace alusión a la experiencia del docente que lo diseñó, ya que, durante la comunicación y debate de los resultados de investigación y la presentación de los diseños, se dio una discusión donde se consideró los aportes de todos los docentes para cada uno de los diseños.

Reflexiones finales

La experiencia permitió ver la manifestación del saber y la trasformación de tareas en la planificación del diseño alrededor del saber, pensado desde el estudiante. Cuando la P.D habla de las cuestiones de un estudiante sobre el significado de la fórmula del área de un triángulo y cómo estructura las actividades en su diseño, de tal forma que atiende esas posibles concepciones de los estudiantes, considerando la negociación entre lo que sabe de su experiencia, lo nuevo que conoció de los resultados de investigación y lo que le pide la institución; es evidente la negociación sobre el cumplimiento de lo institucional, el uso de su experiencia docente y la integración de los resultados de investigación, dicha negociación es referente al saber matemático en juego. La discusión sobre la integración del diámetro como elemento importante en la construcción de la circunferencia, se dio cuando el P. Al, decía que no era necesario y la P.A argumentaba su importancia debido a su inclusión en los libros de texto. Vemos como los docentes arman las herramientas para responder a la institucionalización, usando su experiencia y los resultados de investigación.

En el proceso de redacción de los objetivos de cada diseño, es evidente el rol de los resultados de investigación y la discusión de grupo, ya que los docentes presentaron el objetivo curricular, un primer objetivo después de conocer los resultados de investigación y un objetivo final después de una discusión, vemos que el objetivo curricular es básicamente el contenido curricular y el primer objetivo está basado en el objetivo curricular, pero el objetivo final, está redactado de tal forma que integra los resultados de investigación más relevantes sobre la noción matemática en juego.

Como epílogo acentuamos que los maestros estuvieron de acuerdo en que conocer estos resultados generaba en ellos un panorama más amplio sobre las formas de pensar de sus estudiantes y las diferentes justificaciones para dichos pensamientos, demostraron interés en conocer y relacionar los resultados de investigación con su práctica, y tomaron en consideración la modificación de actividades para evitar dificultades generadas en las investigaciones. A través del análisis de los resultados de investigación, el maestro puede conocer y justificar las concepciones de sus estudiantes y esto provoca mayor control del docente en todo el proceso de enseñanza, por lo que estimamos que la integración de estos resultados es favorable en la construcción de sus diseños.

Referencias bibliográficas

Kospentaris, G., Spyrou, P., y Lappas, D. (2011). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics, 77*(1), 105-127. doi:10.1007/s10649-011-9303-8

Neel-Romine, L., Paul, S., y Shafer, K. (2012). Get to Know a Circle. *Mathematics Teaching in the Middle School, 18*(4), 222-227. doi:10.5951/mathteacmiddscho.18.4.0222

Yanik, H. (2014). Middle-school students' concept images of geometric translations. *The Journal of Mathematical Behavior, 36*, 33-50. doi:10.1016/j.jmathb.2014.08.001

COMPRENSIÓN DE PROFESORES DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Yanet Karina González Arellano, Ana María Ojeda Salazar, Juan Luis Palacios Soto
Cinvestav, Universidad Autónoma Metropolitana. (México)
ygonzalez@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx, palacios.s.j.l@gmail.com

Resumen
Dos exploraciones sobre la comprensión de la distribución normal por un grupo de 26 estudiantes de bachillerato y de 11 de nivel superior (González y Ojeda, 2017) condujeron a entrevistar, en formato semiestructurado, a los dos profesores de estos estudiantes. Se les planteó un problema análogo al presentado a sus estudiantes, pero no lograron explicar la estandarización. Sus respuestas revelaron que las deficiencias de sus estudiantes en el tema procedían de una enseñanza centrada en la operatividad. Los resultados sugieren *que el estudiante repite lo enseñado y lo acepta* porque el profesor lo dice, y que el profesor también requiere, además del dominio operativo, del funcional y del analógico del concepto implicado.

Palabras clave: distribución, normal, profesores, estandarización.

Abstract
Two investigations on the understanding of the normal distribution by a group of 26 high school students and 11 university students (González and Ojeda, 2017) led to interview, in a semi-structured format, the two teachers of these students. They were posed a problem similar to that presented to their students, but they failed to explain standardization. Their answers revealed that the deficiencies their students had in the subject came from a teaching focused on the operativeness. The outcomes suggest that the student repeats what is taught, and they accept it because it is said by the teacher. So, the teacher also requires, in addition to the operational domain, the functional and analogical domain of the concept that is involved.

Key words: distribution, normal, teachers, standardization.

Introducción

Algunas investigaciones recientes acerca de la comprensión de estudiantes de la distribución normal han señalado la importancia de su enseñanza en probabilidad y estadística, así como dificultades en la transición del análisis de datos a la inferencia estadística y la escasa capacidad de análisis y síntesis al interpretar ciertos gráficos y resúmenes estadísticos (por ejemplo, Batanero, Tauber y Sánchez; 2001, 2004). Alvarado y Batanero (2007) muestran que existe una complejidad en la comprensión de una aproximación normal a la distribución binomial y sugieren reforzar la comprensión de corrección de continuidad y dedicar más tiempo al tema.

Esta investigación, cualitativa (Borovcnik, 2014), partió de los resultados de otras dos relacionadas con la comprensión de la distribución normal por estudiantes de bachillerato y de licenciatura (González y Ojeda, 2017). Los resultados de González y Ojeda (2017) exhiben deficiencias en el desempeño de los estudiantes de bachillerato, tanto en otros conceptos matemáticos necesarios para introducirlos al tema de la normal, como en los de estocásticos propios de la distribución normal. Sorprendentemente, de los estudiantes de licenciatura se obtuvieron casi los mismos resultados. Por ello investigamos la comprensión de los dos profesores respectivos para determinar si las respuestas de sus estudiantes apuntaban a errores propios o a interpretaciones deficientes derivadas de su enseñanza.

Elementos teóricos

De las diez ideas de estocásticos como guía continua de un currículum en espiral, propuestas por Heitele (1975) con un enfoque epistemológico, seis están implicadas en la distribución normal: medida de probabilidad, espacio muestra, adición de probabilidades, equiprobabilidad y simetría, variable estocástica y muestra. Para la idea de variable estocástica, el autor señaló su importancia respecto a tres puntos: *la distribución de una variable, su esperanza y la composición de variables estocásticas para obtener otras nuevas*. En particular, la estandarización consiste en un cambio de la variable X a Z donde Z está en función de X, por lo que la probabilidad de X se calcula a través de Z.

Steinbring (1991) propone un triángulo epistemológico para explicar la constitución de un concepto matemático, como las interrelaciones entre éste, el objeto (contexto de referencia) y su signo. Así indica que objeto, signo y concepto, no pueden ser tratados de forma independiente en la deducción del significado del conocimiento matemático.

Pollatsek, Lima y Well (1981) señalan que para considerar la comprensión de un concepto matemático se tomen en cuenta los tres tipos de conocimiento: *de cálculo* (corresponde a lo operativo), *conocimiento funcional* (hace referencia a la forma en que se aplica el concepto en una situación particular) y *conocimiento analógico* (a manera de uso de metáforas, puede incluir imágenes visuales que contribuyan a evitar que el estudiante cometa errores).

Gigerenzer y Hoffrage (1995) indican cómo, en general, la estimación de probabilidades privilegia el formato de frecuencia sobre el de probabilidad, lo que puede ocasionar una desatención a la tasa base.

Hogarth (2001) sugiere fomentar la interacción entre el sistema deliberado (exige esfuerzo y atención) y el tácito (sin atención consciente o esfuerzo) en la enseñanza de un concepto. Para él, la intuición es el resultado de las experiencias a las que nos sometemos; su esencia de la intuición o de las respuestas intuitivas radica en que se alcanzan con poco esfuerzo y sin una conciencia deliberada, por lo cual recomienda educar la intuición para evitar intuiciones incorrectas y ser más eficiente en la toma de decisiones.

Método e instrumentos

Entrevistamos individualmente con un guión semiestructurado (Zazkis y Hazzan, 1999) a los dos profesores que enseñaron el tema de distribución normal a los estudiantes de los grupos investigados de bachillerato (González y Ojeda, 2017) y de licenciatura. El profesor D_b, de 36 años, había enseñado Probabilidad y Estadística a nivel bachillerato, era Licenciado en Matemáticas Aplicadas y Computación, y ya había impartido la materia dos veces. El profesor D_S, de 46 años, había impartido materias de Estadística y Probabilidad a nivel superior desde hacía tres años en distintas áreas de ciencias básicas (física, computación), ciencias sociales y humanidades, así como ciencias biológicas; era Licenciado y Maestro en Matemáticas y estaba por concluir un Doctorado en Matemáticas. A los dos se les plantearon preguntas similares a las propuestas a sus estudiantes. El objetivo fue identificar posibles rasgos de sus enseñanzas del tema, en particular qué tipos de conocimiento (Pollatsek et al., 1981) habrían favorecido en ellas; también se les preguntó acerca de su forma de enseñar el tema de la distribución normal, una descripción general de lo que enseñaban en sus cursos acerca del tema y los libros de los que lo documentaban. Además, nos interesó si el profesor *también repetía* el discurso del libro de su referencia. En las entrevistas, videograbadas y transcritas para su análisis, se les planteó este problema en formato digital, de la obra de Gutiérrez y Vladimirovna (2014, pp. 210):

Ciertos tipos de baterías para automóvil tienen un tiempo de vida normalmente distribuido con media 1200 días y desviación estándar igual a 100 días.
a) ¿Cuántas de las siguientes 3000 baterías que se venderán durarán más de1300 días?
b) ¿Por cuánto tiempo se deben garantizar las baterías si el fabricante quiere reemplazar sólo 10 por ciento de las baterías vendidas?

Se les leyó el enunciado y después se les permitió leerlo el tiempo que requirieran para describir cómo lo resolverían; en caso de hacer anotaciones disponían de pintarrón y plumones. La Tabla 1 resume la aplicación al problema de los criterios de análisis de la célula (Ojeda, 2006).

Tabla 1. *Criterios de análisis al problema planteado en entrevista.*

Criterio	Problema
Ideas fundamentales de estocásticos	
1) Medida de probabilidad	$P(X \in [a,b]) = \int_a^b \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dx$. Por ejemplo $P(X > 1300) = 0.1587$.
2) Espacio muestra	$[0,\infty)$.
3) Adición de probabilidades.	Dados dos subconjuntos $A, B \subset [0,\infty)$, tal que $A \cap B = \emptyset$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. En particular se cumple esta propiedad si tomamos a $A = [0,x)$ con $x < \mu$ y $B = (1300,\infty)$, debido a que $\mu < 1300$.

4) Equiprobabilidad y simetría	La función es simétrica respecto a $\mathrm{x} = \mu = 1200$, por lo que respecto a este valor podemos encontrar eventos equiprobables.
5) Variable aleatoria X	Tiempo de vida de las baterías.
6) Muestra	3000 baterías.
Otros conceptos matemáticos	Orden en los reales, proporcionalidad, operaciones aritméticas, porcentaje, integrales, cambio de variable.
Recursos semióticos	Lengua natural escrita, simbología matemática, tablas de Z, gráfica normal.
Términos para referirse a estocásticos	Tiempo de vida, normalmente distribuido, media, desviación estándar, cuántas de 3000, más de 1300 días, cuánto tiempo, 10 por ciento.
Referente	¿Cuántas de las 3000 baterías durarán más de 1300 días?

Una dificultad que podría tener el profesor al presentarle el problema sería la interpretación del enunciado. Si X es la variable aleatoria *tiempo de vida de las baterías*, para una muestra de 3000 baterías, se requiere determinar cuántas durarán más de 1300 días.

Encontrar $P(X > 1300)$ resultaría sólo en la probabilidad de que las baterías tuvieran un tiempo de vida mayor a 1300, no en el número de baterías requerido. Pero se puede poner en correspondencia esta probabilidad con el número de baterías y establecer una biyección entre el intervalo $[0,1]$ y $[0, 3000]$ mediante una función, por ejemplo $G(p) = 3000p$, $p \in [0,1]$. Al estandarizar tenemos que $P(X > 1300) = 0.1587$, por tanto, 15.87 % de las 3000 baterías durará más de 1300 horas (aproximadamente 476 baterías).

Otra forma de plantear la pregunta del inciso b) sería: ¿para qué valor $x < \mu, P(X < x) = 0.1$? Como la función de densidad es simétrica, los profesores podrían considerar el caso $P(X > x_1) = 0.1$ o, más aún, dos valores x_2 y x_3 tales que $P(x_2 < X < x_3) = 0.1$. Pero el profesor debía percatarse de que en el enunciado del problema estas dos últimas expresiones no tienen sentido. Por ejemplo, el caso $P(X > x_1) = 0.1$ garantizaría un tiempo de vida mayor a la media.

Para normalizar la variable X se consideró que el profesor no tendría dificultad en aplicar las propiedades de las desigualdades a $P(X < x) = 0.1$, como sucedió con estudiantes del profesor D_b; aunque sí podría faltar reflexión en el procedimiento de estandarización, como se reveló en las entrevistas a estudiantes de los dos profesores. Por ello, parte de las preguntas de la entrevista a los docentes correspondió a la estandarización para determinar si no habían favorecido su comprensión por falta de tiempo o de reflexión.

$$P(X < x) = P(X - 1200 < x - 1200) = P\left(\frac{X - 1200}{100} < \frac{x - 1200}{100}\right) = P(Z < z) = 0.1,$$

con Z la variable normal estándar, $Z = \frac{X-1200}{100}$, y z un valor particular de Z que corresponde a $z = \frac{x-1200}{100}$. Al continuar con la solución se previó una dificultad para recuperar de Z la variable original X, para finalmente determinar el valor de x que satisface $P(X < x) = 0.1$; también se previó una posible dificultad en la lectura de las tablas, aunque en ninguno de los dos casos de entrevista se llegó al uso de las mismas.

De las tablas para Z acumulada, con $z = -1.28$, resulta $P(Z < -1.28) \approx 0.1$; por lo que de la ecuación $-1.28 = \frac{x-1200}{100}$, se tiene $x = 1072$. Esto significa que el fabricante debe garantizar las baterías al menos por 1072 días para que, en caso de que duren menos de ese tiempo, reemplace aproximadamente sólo el 10 % de las baterías vendidas.

Resultados del análisis

Las Tablas 2 y 3 caracterizan la comprensión de la distribución normal de D_b y D_S, respectivamente.

Caso D_b. El profesor de bachillerato afirmó haber resuelto problemas de ese tipo en clase, como el del diámetro del tallo de girasoles. No tuvo dificultades para describir el procedimiento de solución del problema planteado, no así en la parte conceptual:
I_1: ¿Quién sería el espacio muestra de este ejercicio?

D_b: Este… el tiempo de vida de las baterías ¿no? O… ¿cómo? ¿Cómo le hacemos? No, no sé.

A la pregunta de a qué correspondía el eje de las ordenadas en la gráfica de la distribución normal para el tiempo de vida de las baterías, contestó que a los valores de la probabilidad.

Tabla 2. *Comprensión de D_b de la distribución normal*

Ideas fundamentales de estocásticos	Otros conceptos matemáticos	Recursos semióticos empleados
No logró proporcionar los posibles valores de la función de probabilidad. No recordó lo que es un espacio muestra, ni lo describió para el problema planteado. Se mostró dudoso de relacionar la variable aleatoria con el tiempo de vida de la batería. Reconoció no haberse percatado del proceso subyacente a la estandarización.	Reconoció no haber reflexionado en la relación entre puntos de inflexión y la desviación estándar. Y al igual que sus estudiantes, no podría dar el valor de la desviación a partir de la gráfica y de los puntos de inflexión.	Trazo de la curva normal en el plano cartesiano. Simbología matemática. Lengua natural escrita.

Fuentes de referencia. La obra de Mendenhall, Beaver y Beaver (2010), citada por D_b como obra de consulta, presenta en la página 235 un ejemplo similar al proporcionado por D_b, acerca del diámetro de un girasol como una aplicación de la distribución normal. Además, el libro sí presenta ejemplos similares al inciso a) (pág. 231) y al inciso b) (pág. 232) del problema planteado al profesor en la entrevista.

El libro de Johnson y Kuby (2012) presenta ejemplos (pág. 281), operativos, con conversiones de porcentaje a decimal. Además, el libro presenta la igualdad 10 % = 0.1000 (pág 281), de lo que resalta la insistencia de D_b en que sus estudiantes asignaran una probabilidad como un porcentaje:

I_1: ¿Es correcto dar una probabilidad como un porcentaje?
D_b: Pues yo digo que sí. Bueno, así yo he concluido… en porcentajes, sí… Pero sí les digo "lo mejor es escribir la conclusión en porcentajes".

Observación de sus estudiantes. D_b no se refirió a dificultades de sus estudiantes relativas a las ideas de estocásticos, pero sí señaló algunas concernientes a otros conceptos matemáticos requeridos, como la conversión de porcentajes a su expresión decimal y a los signos de orden. Anticipó dos posibles dificultades más si les planteara el problema del tiempo de vida de las baterías: porcentaje y notación científica. D_b reconoció que algunos estudiantes se inscribían a *Probabilidad y Estadística* por considerar las materias más fáciles que las de *Cálculo Diferencial e Integral*, es decir, por huir de las matemáticas.

Forma de enseñanza. Del análisis de la entrevista se evidencia que prevalece un conocimiento de cálculo, favorece el uso de procedimientos y señaló que por la limitación del tiempo no va más allá de esto. Señaló que hasta éste, su segundo curso que impartía, no había sensibilizado a sus estudiantes sobre los posibles valores que toma la función de probabilidad, además de haber limitado su enseñanza de la estandarización al uso de la fórmula de Z. Reconoció que en este segundo curso impartido había favorecido, a raíz de una pregunta en entrevista, hecha a sus dos estudiantes del curso anterior (González y Ojeda, 2017), contrastar el sombreado del área bajo la curva normal y el valor de la probabilidad obtenido.

Caso D_S. Aunque el profesor del nivel universitario se refirió a cómo se distribuyen los datos por ejemplo de las estaturas y pesos de personas y que planteó el caso particular de una persona para determinar la probabilidad de un evento de interés, al presentarle el inciso b) del problema de las baterías contestó que no sabía cómo hacerlo.

I_1: ¿Podrías sombrear la región? ¿Gráficamente qué es lo que pide el inciso b)?
D_S: … No recuerdo cómo. No me acuerdo cómo.

Tabla 3. Comprensión de D_S de la distribución normal

Ideas fundamentales de estocásticos	Otros conceptos matemáticos	Recursos semióticos empleados
Definió correctamente a una variable aleatoria y al espacio muestra. Proporcionó de forma correcta los valores de la función de probabilidad. Describió estandarización como: cuando divides entre la desviación	No se percató antes que X se trataba de una variable aleatoria continua, por lo que los extremos de integración eran los mismos. Indicó calificaba mal al estudiante si	Trazo de histogramas y curva normal y normal estándar. Simbología matemática. Lengua natural. Al preguntársele si podría relacionar la desviación estándar con la gráfica respondió que no

estándar. En el momento [en] que haces una división entre la desviación estándar de la variable aleatoria, en ese momento estandarizas. Se dice que estás estandarizando. Al pedirle que ampliara su respuesta, respondió que no podría.	escribía $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq 1300)$ en vez de $\mathrm{P}(\mathrm{X} > 1300)$.	se acordaba. La pregunta original apuntaba a si podía obtener información a partir de la gráfica.

I_2: ¿Qué es estandarizar? ¿Qué es lo que estás haciendo?
D_S: Bueno aquí podríamos ver que como le estoy restando a la variable, le estoy restando la media, estoy sacando una dispersión que hay entre la media y la variable aleatoria ¿no? Entonces ese numerito lo estoy dividiendo entre la desviación estándar de la variable. Entonces mmm ¿cómo podría yo explicar eso? Déjame ver… No se me ocurre.

Fuentes de referencia. De las obras consultadas por D_s para la distribución normal, señalamos lo siguiente: 1) la de Levin, Rubin, Balderas, del Valle y Gómez (1987) proveen de un buen número de ejemplos; no dan mayores detalles técnicos del proceso de estandarización. La definen sólo con su expresión simbólica, i.e. $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ (pág. 213). Para relacionar toda distribución normal con los parámetros μ y σ argumentan que todas tienen la misma área bajo la curva de $-\lambda\sigma$ a $\lambda\sigma$ desviaciones estándar; proporcionan ejemplos para λ = 1, 2 y 3, pero no sustentan teóricamente su afirmación. 2) La de Freund, Miller y Miller (2000) presenta en la sección 6.5 la técnica de cambio de variable (Teorema 6.7, p. 220) y despliegan la herramienta necesaria para la estandarización (Teorema de cambio de variable). 3) Anderson, Sweeney y Williams (2008) utilizan el término *estandarización* de manera somera, no se refieren al cambio de variable y sólo señalan: “Para la distribución normal estándar ya se encuentran calculadas las áreas bajo la curva normal y se cuenta con tablas que dan estas áreas y que se usan para calcular las probabilidades” (p. 234).

Observación de sus estudiantes. D_S indicó que había cierto rechazo por un grupo de estudiantes hacia la Probabilidad y la Estadística por no considerarlas matemáticas “serias” [teóricas] y que esto obstaculizaba su enseñanza, sumado al poco tiempo del curso y a sus deficiencias en otros conceptos matemáticos, como dificultades con los signos de orden.

Forma de enseñanza. D_S señaló la importancia de la aplicación de problemas para que el estudiante entendiera el concepto de distribución normal. También que recurría al trazo de las gráficas normal y normal estándar, una encima de la otra, para que el estudiante visualizara de forma gráfica el problema en las variables X y Z. Aunque todo esto supondría la preferencia por un conocimiento al menos funcional, el docente subrayó que realizaba los cálculos minuciosamente para que los estudiantes los entendieran, por lo que también para él concluimos que prevalece en su enseñanza un conocimiento de cálculo.

Comentarios

Triángulo epistemológico. El referente del problema planteado, aunque análogo pero distinto del de los resueltos por D_S en clase, impidió que éste lo resolviera. Ninguno de los dos profesores advirtió la interrelación entre *objeto* (distribución del tiempo de vida de baterías), *signo* $(Z = (X - \mu)/\sigma)$ y *concepto* $(N(\mu, \sigma^2))$ (Steinbring, 1991).

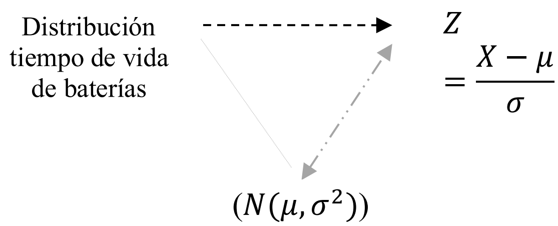


Figura 1. Aplicación a la distribución normal al triángulo epistemológico

D_b no dio evidencia de comprender las ideas fundamentales de medida de probabilidad, espacio muestra, ni variable aleatoria (Heitele, 1975). El referente del problema planteado, aunque análogo a los presentados en los libros que D_S señaló como referencias para apoyarse en los cursos, pero distinto del de los resueltos en clase, impidió que éste lo resolviera. Ni D_b ni Ds relacionaron los puntos de inflexión con los valores $\mu \pm \sigma$. D_b no distinguió entre un enfoque probabilístico y frecuencial (Gigerenzer y Hoffrage, 1995) y reconoció haber enseñado a sus estudiantes que debían concluir una probabilidad como un porcentaje. En general, las deficiencias que los profesores mostraron fueron similares a las de sus estudiantes, lo que indica que, en acuerdo con Hogarth (2001), el estudiante sólo repite lo que su profesor le enseña, sea correcto o incorrecto, pues en general el primero no se documenta más allá de lo que se imparte en el aula. Además, se evidenció que el profesor D_b repetía lo que presentaban sus libros de consulta, lo que reveló que no sólo el estudiante repetía el discurso del profesor, sino que el profesor repetía el discurso del libro en el que se basaba. En ambas entrevistas se reveló que sus enseñanzas habían fomentado el uso correcto de tablas y de cálculos, en vez de la reflexión, incluso de su propia reflexión. Por lo cual, en acuerdo con Pollatsek y sus colaboradores (1981), subrayamos la necesidad de favorecer en la enseñanza además los conocimientos funcional y analógico de los conceptos, no sólo el de cálculo. Más aún, es necesario romper con la consideración de que la Probabilidad y la Estadística consisten simplemente en efectuar cálculos y comenzar a poner en juego los dos tipos de pensamiento que señala Hogarth (2001).

Referencias bibliográficas

Anderson, D., Sweeney, D. y Williams, T. (2008). *Estadística para administración y economía*, 10ª. ed. México: Cengage Learning Editores.

Borovcnik, M. (2014). Empirical research on understanding probability and related concepts – A review of vital issues. In K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), *Sustainability in Statistics Education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS9, July, 2014), Flagstaff, Arizona, USA.

Freund, J y Miller, I. (2000). *Estadística matemática con aplicaciones*, 6ª ed. México: Pearson Educación.

Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to improve bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review*, 102, 684-704.
González, Y. y Ojeda, A. M. (2017). Comprensión de la distribución normal en bachillerato. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.
Gutiérrez, E. y Vladimirovna, O. (2014). *Probabilidad y Estadística. Aplicaciones a la Ingeniería y Ciencias*. México: Grupo Editorial Patria.
Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6 (2), 187-205.
Hogarth, R. (2001). *Educar la intuición*. Barcelona: Paidós.
Johnson, R. y Kuby, P. (2012). *Estadística elemental*, 11ª edición. México: Cengage Learning Editores.
Levin, R. y Rubin, D. (2004). *Estadística para administración y economía*, 7ª ed. México: Pearson Educación.
Mendenhall, W., Beaver, R. y Beaver, B. (2010). *Introducción a la probabilidad y estadística*, 13ª ed. México: Cengage Learning Editores.
Pollatsek, A., Lima, S. & Well, A. (1981). Concept or Computation: Students' Understanding of the Mean. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 191-204.
Steinbring, H. (1991). The Concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 503-522.
Zazkis, R. & Hazzan, O. (1999). Interviewing in Mathematics Education Research: Choosing the Questions. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(4), 429-439.

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

SECCIÓN 4 / EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

CONCEPCIONES DE LOS DOCENTES RESPECTO A LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN PROBABILIDAD

Valeria Bizet Leyton, Daniela Araya Tapia, Jocelyn Díaz Pallauta, Elisabeth Ramos Rodriguez.
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
valeriabizet@gmail.com, danielanataliaaraya@gmail.com, jocelyndiazpallauta16@gmail.com, elisabeth.ramos@pucv.cl

Resumen

El presente trabajo tiene por objetivo indagar el hecho didáctico que el docente no logra diferenciar entre la representación gráfico estadístico y gráfico cartesiano de la función probabilidad es un buen candidato a fenómeno didáctico. Bajo el paradigma cualitativo, con un enfoque descriptivo-interpretativo, se lleva a cabo un estudio exploratorio, para el cual se diseña como instrumento de recogida de datos, un cuestionario que aborda una situación extraída del texto de matemática de tercero medio (alumnos de 16-17 años) distribuido por el Ministerio de Educación de Chile. Las categorías de análisis emergen de elementos teóricos como función y gráfico de una relación, gráfico estadístico, función probabilidad, y comprensión gráfica. Los resultados evidencian una falta de claridad de los profesores sobre la función probabilidad, lo que nos indica la necesidad de reforzar en la formación de profesores, inicial y continua, la representación y diferenciación entre gráfico estadístico y cartesiano de la función probabilidad.

Palabras clave: docentes de matemática, función de probabilidad, representación gráfica, fenómeno didáctico.

Abstract

The main objective of this research is to enquire into the didactic fact that teachers do not differentiate between statistical graphic and Cartesian graphic of probability function, which would be a great candidate as a didactic phenomenon. An exploratory investigation is carried out, from the qualitative paradigm, with a descriptive-interpretative approach, designing a questionnaire, as a collecting data instrument which tackles a situation extracted from the mathematical textbook established by The Ministry of Education in Chile for high school third- grade (16-17 year-old) students. The categories under analysis emerge from theoretical elements such as function and graphic of a relation, statistical graphic, probability function and graphic understanding. The outcomes show a lack of teachers' understanding on probability function what suggests that we need to reinforce the initial and continuous prospective teachers' training with respect to the representation and differentiation between statistical and Cartesian graphic of probability function.

Key words: mathematics teachers, probability function, graphic representation, didactic phenomenon.

Introducción y problemática

En los últimos años en Chile, se han realizado reformas al currículo de matemática, particularmente el eje *Datos y Azar* está teniendo mayor preponderancia (Ministerio de Educación [MINEDUC], 2009; MINEDUC, 2015). El éxito de estas modificaciones, en términos de desarrollar el pensamiento probabilístico en los estudiantes, depende gran parte de los profesores, de su comprensión sobre la probabilidad y mayor conocimiento en el uso de representaciones y las concepciones erróneas de los estudiantes (Stohl, 2005). Así resulta relevante indagar en la comprensión de los profesores de matemática de Chile, acerca de la función probabilidad, específicamente, su representación gráfica, estadística y cartesiana.

En la matemática educativa, algunas investigaciones han tratado estas temáticas, entre ellas Arteaga (2011) ha evidenciado que futuros docentes presentan dificultad en la construcción, lectura e interpretación de gráficos estadísticos elementales, asociando la falta de comprensión de objetos estadísticos y sus relaciones que subyacen en el gráfico. Aún más, la preparación de los docentes para enseñar gráficos estadísticos es un tema fundamental que ha sido olvidado desde la investigación y en la formación de maestros (Arteaga, Batanero y Cardeñoso, 2011).

Pinto y González (2008) examinaron el conocimiento de contenido pedagógico (PCK) de un profesor novel sobre el tema de la representación gráfica estadística y concluyen que las representaciones gráficas, se centran en su construcción y la realización de cálculos estadísticos, y no tratan la interpretación y análisis de los gráficos. Mientras que García (2005) manifiesta que titulados de carreras afines a las ciencias, presentan dificultad en la comprensión de gráficos cartesianos de un nivel elemental, no logrando una manipulación e interpretación elaborada de ellos.

Las diversas problemáticas detectadas en la literatura sobre los gráficos en estadística y probabilidad nos lleva a plantearnos como objetivo indagar si el hecho que el docente no logra diferenciar entre la representación gráfico estadístico y gráfico cartesiano de la función probabilidad, es un buen candidato a fenómeno didáctico.

Fundamentos teóricos

Los elementos teóricos del presente estudio, lo constituye la noción de hecho y fenómeno didáctico, además de las representaciones gráficas (estadísticas y cartesianas) de la función probabilidad y el constructo comprensión gráfica. Elementos que detallamos a continuación.

Un hecho didáctico, es un suceso o acontecimiento que ocurre en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en un lugar específico, en un tiempo determinado y con unos sujetos dados. Cuando el hecho trasciende de estos tres factores, es un buen candidato a fenómeno (Wilhelmi, Font y Godino, 2005).

Para analizar la manera en que los docentes comprenden el objeto función probabilidad y dos de sus diferentes representaciones gráficas, particularmente, gráfico estadístico y gráfico cartesiano funcional, consideramos el significado de conceptos matemáticos como función y gráfico de una relación (Mena, 2011). Estos permitieron establecer que la definición de gráfico cartesiano funcional es $\mathcal{G}_f =$

$\{(x, f(x)) \in A \times B : x \in Dom\ (f)\}$, donde $Dom\ (f) = A$ y $Rec\ (f) = B$ es decir, es el conjunto de pares ordenados $(\mathrm{x}, \mathrm{f(x)})$ de la función, donde existe una correspondencia entre los elementos del dominio y recorrido de ésta.

Adoptamos el concepto de gráfico estadístico bajo la noción de función semiótica definido como:

> Una función semiótica, donde el antecedente es el propio gráfico y lo representado es la distribución estadística de los datos, siendo la correspondencia el conjunto de convenios establecidos en estadística para el gráfico particular, que permite a la persona que lee el gráfico interpretarlo o bien a la persona que tiene los datos construirlo (Arteaga, 2011, p. 54).

Del mismo modo, incluimos el significado de conceptos probabilísticos, entre ellos función probabilidad (Suárez, 2002) y sus distintos registros de representaciones, que organizamos en un esquema (figura1).

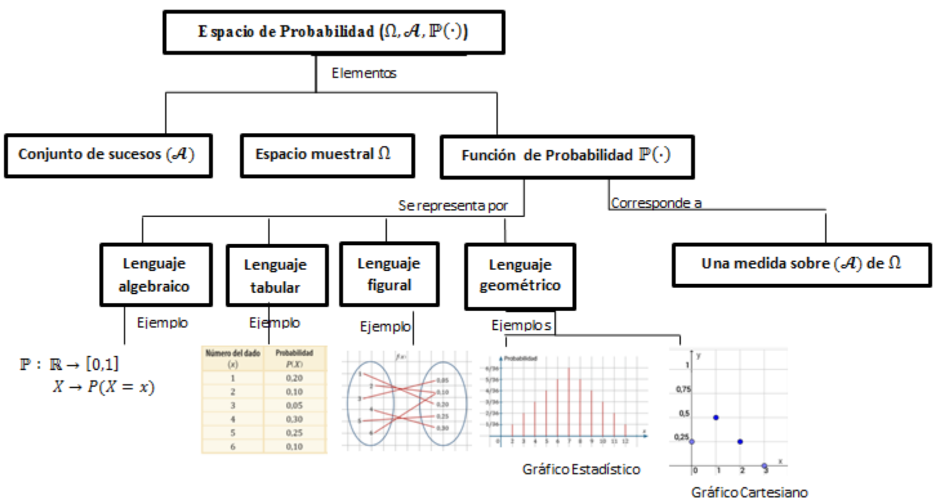


Figura 1. Estructura conceptual de la función probabilidad (elaboración propia)

Por último, consideramos el concepto de comprensión gráfica definida por Friel, Curcio y Bright (2001) como las habilidades que las personas que han de leer un gráfico tienen que poner en juego para entender el significado del mismo, la cual está influenciada por cuatro factores: fines para los que se utilizan los gráficos, características de la tarea, disciplina y las características del lector.

Metodología

Este estudio se desarrolla bajo un enfoque metodológico cualitativo, de tipo descriptivo e interpretativo (Hernández, Fernández y Baptista, 2006), dado que son analizados contenidos estadísticos de docentes, referidos a evidenciar si logran diferenciar entre un gráfico estadístico de uno cartesiano funcional. Los sujetos informantes fueron 12 docentes de matemática de enseñanza secundaria, con distinto nivel de perfeccionamiento, pertenecientes a diferentes regiones de Chile. Se diseñó como instrumento de recogida de datos, un cuestionario que aborda un ejercicio presentado en el texto escolar de matemática de secundaria (para alumnos de 16-17 años) distribuido por el Ministerio de Educación de Chile (Saiz y Blumenthal, 2016), el cual fue sometido a pilotaje y juicio de expertos, antes de su aplicación (figura 2).

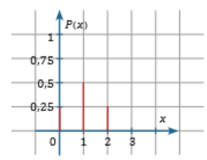
En el texto escolar de tercero medio se presenta el siguiente ejemplo

Si se define la variable aleatoria "el número de hijos hombres que una pareja puede tener si tienen dos hijos", ¿cuál sería la función de probabilidad?

El espacio muestral correspondiente a esta situación es: $EM = \{HH, HM, MH, MM\}$, **donde H corresponde a un niño y M corresponde a una niña.**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{con 0 o 2 hijos hombres} \\ \frac{1}{2} & \text{con 1 hijo hombre} \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Además podemos graficarla también de la siguiente manera:



(Saiz y Blumenthal, 2016, p. 33)

Si un estudiante le realiza la pregunta ¿Por qué el gráfico de la función tiene líneas verticales, si sabemos que estas no representan una función? ¿Qué le plantearía usted como respuesta?

Figura 2. Instrumento de recogida de datos (Elaboración propia)

Para el análisis de los datos se empleó el análisis de contenido (Flick, 2004) y las categorías que emergieron de los elementos teórico-matemático, en específico son:

- Representación de la función probabilidad por medio de gráficos estadísticos.
- Representación de la función probabilidad por medio de un gráfico cartesiano funcional.
- Diferenciación entre gráfico estadístico y gráfico cartesiano funcional.
- Relación entre la función probabilidad y el gráfico estadístico correspondiente.

Análisis de datos

Con respecto a los resultados del estudio, a continuación se exponen algunas categorías de análisis cada una de ellas con una respectiva evidencia de profesores.

Categoría 1. Representación de la función probabilidad por medio de gráficos estadísticos.

Las respuestas de los docentes se centran en que la función probabilidad se representa a través de un gráfico estadístico. La mayoría de ellos (7 de 12) lo relaciona con el histograma o gráfico de barra, como se muestra en la figura 3, salvo un profesor que no considera que referirse a una gráfica implica aludir a una función. Se evidencia que 7 de los docentes reconocen que la función probabilidad es posible de representar a través de distintos gráficos estadísticos.

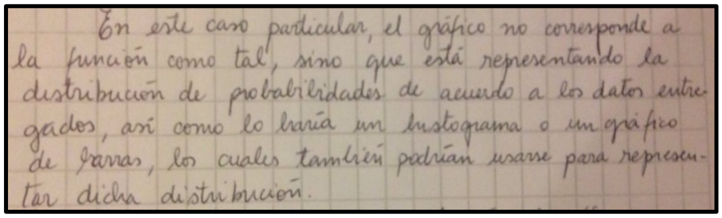


Figura 3. Respuesta del sujeto n°6. (Elaboración propia)

Categoría 2. Representación de la función probabilidad por medio de un gráfico cartesiano funcional.

Las respuestas muestran que la mayoría de los docentes reconocen que las líneas verticales, no representan a una función real en el contexto de plano cartesiano. Se evidencia que 6 de los docentes identifican que el grafico cartesiano de la función probabilidad está representado por puntos, dado que la variable independiente, en este caso cantidad de hijos es discreta, tres de ellos para fundamentar cómo aclararían la inquietud al estudiante, refuerzan su respuesta mostrando dicho gráfico. Sin embargo, los profesores no sitúan que el contexto en que es presentada la gráfica de la función es estadística, por medio de un gráfico estadístico, excepto un docente, quien afirma que no habría problema al representar la función como lo hace el texto.

De esta manera, un alto número de profesores (10 de 12) comprenden el concepto de función, dado que descartan que el gráfico de líneas verticales represente una función, en el contexto de plano cartesiano. Así también, se evidencia que reconocen que la variable independiente de la función probabilidad es discreta, por lo tanto, su representación es a través de puntos aislados, como se ilustra en la figura 4, es decir el docente realiza un tránsito de la expresión algebraica de la función probabilidad a su representación gráfica en el plano cartesiano.

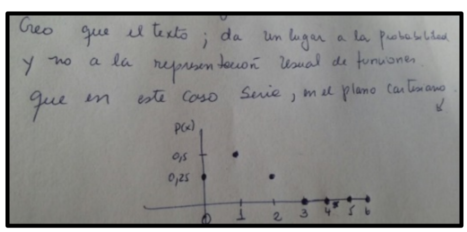


Figura 4. Respuesta del sujeto n°4. (Elaboración propia)

Categoría 3. Diferenciar entre gráfico estadístico y gráfico cartesiano funcional

Las respuestas clasificadas en esta categoría muestran que los profesores distinguen, que en el gráfico estadístico, el eje Y entrega información sobre la medida de las magnitudes representadas en el eje X, es decir la probabilidad de sucesos que componen el espacio muestral del experimento, mientras que el gráfico cartesiano funcional corresponde a un conjuntos puntos (x, y) del plano cartesiano, donde cada pre imagen x debe tener una única imagen y.

Es así que se evidencia que la mitad de los docentes (6 de los 12) identifica que las líneas verticales representan la probabilidad asociada a cada valor de la variable aleatoria X, como se muestra en la figura 5. Aunque en las argumentaciones es posible observar diferencias, uno de los sujetos erróneamente nombra al gráfico dado, gráfico de barra, mientras que de manera correcta dos profesores, son más explícitos en sus argumentos, uno de ellos hace referencia a los valores de los elementos del espacio muestral, y el otro, es más preciso aún, asocia dichas líneas a la magnitud del valor de la probabilidad. También los participantes reconocen que el gráfico presentado, es decir líneas verticales, no corresponde a un gráfico cartesiano funcional, pero solo dos de estos justifican su respuesta aludiendo a la idea de conjuntos de puntos del plano cartesiano, donde la componente "y" (imagen) debe ser diferente en cada uno de ellos.

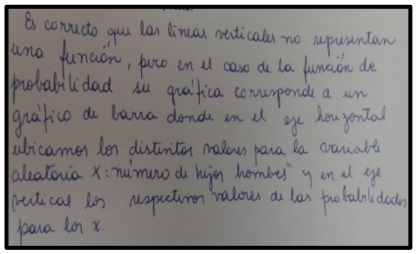

Es correcto que las líneas verticales no representan una función, pero en el caso de la función de probabilidad su gráfica corresponde a un gráfico de barra donde en el eje horizontal ubicamos los distintos valores para la variable aleatoria X: número de hijos hombres" y en el eje vertical los respectivos valores de las probabilidades para los x.

Figura 5. Respuesta del sujeto n°8.

Categoría 4. Relación entre la función probabilidad y el gráfico estadístico correspondiente

Son los profesores que identifican el dominio de la función como los casos posibles de la variable aleatoria y lo representan en el eje x del gráfico estadístico como una magnitud (0, 1 ó 2), mientras que el recorrido lo relacionan a la probabilidad de ocurrencia de los casos posibles de la variable aleatoria y lo representa en el eje y de dicho gráfico como su medida (0, 25 o 0,5). Al respecto 17 de los 12 profesores logran relacionar la función probabilidad con su gráfico estadístico, pero lo expresan de distinta manera, sí identifican que el eje Y del gráfico estadístico representa la probabilidad, un profesor hace referencia a la probabilidad de los posibles valores de x, a diferencia de otro docente que la relaciona con la magnitud de sus valores (figura 6). Esto sugiere que existe comprensión del objeto matemático función probabilidad y de su representación en lenguaje gráfico (estadístico).

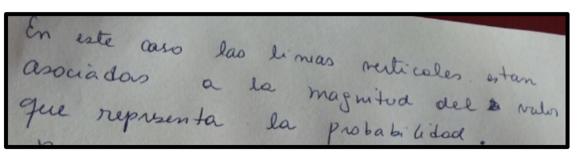

En este caso las líneas verticales están asociadas a la magnitud del valor que representa la probabilidad.

Figura 6. Respuesta del sujeto n°4.

Conclusiones

Pese a lo fundamental de los gráficos estadísticos, investigaciones (Batanero, Arteaga y Ruiz, 2010; Espinel, 2007) evidencian que no se logran las competencias relacionadas al lenguaje gráfico en la formación de profesores en educación primaria, lo que concuerda con nuestros resultados, ya que sobre el análisis de las respuestas producidas por los docentes de matemática destacamos, que estos presentan dificultad en representar la función probabilidad a través de gráficos estadísticos.

Este estudio constata que algunos docentes no logran una profundización del concepto de función en el plano cartesiano, manifestando dificultad en la comprensión de gráficos cartesianos a un nivel elemental (García, 2005).

Además los profesores muestran dificultad para leer el grafico estadístico y relacionarlo con su función probabilidad. En relación a la lectura de gráficos estadísticos, Monteiro y Ainley (2007) estudiaron la competencia de futuros profesores, encontraron que muchos no manifestaban conocimientos matemáticos suficientes para llevar a cabo dicha lectura, gran parte de ellos señaló que no tuvo formación específica en la lectura de gráficos estadísticos en su formación universitaria y reconoció su necesidad de estudios al respecto.

En esta línea, en nuestro estudio, es posible evidenciar que los docentes comprenden el concepto de función en el contexto de plano cartesiano, sin embargo no logran profundizar en el concepto y diferenciar entre gráfico estadístico y gráfico cartesiano funcional.

El hecho didáctico expuesto, pareciera indicar la necesidad de reforzar los conceptos básicos de estadística en los docentes, esto al mostrar que existen indicios de la presencia de concepciones erróneas y dificultades en los conceptos disciplinarios.

Al término del estudio podemos concluir que el hecho didáctico presentado, es un buen candidato a fenómeno didáctico, es decir, trasciende del contexto, tiempo y espacio, por lo que este abre nuevas líneas, enfocadas a profundizar en el conocimiento del contenido y conocimiento didáctico del contenido del profesor (Shulman, 1986) en el ámbito de la estadística, para robustecer y contribuir con elementos teóricos de la didáctica a la enseñanza de la matemática.

Cabe destacar la necesidad en la formación inicial y continua de docentes de Chile de la enseñanza de la estadística y la probabilidad, ya que el programa de estudio de matemática de nuestro país ha sufrido una serie de ajustes, agregando conceptos estadísticos y probabilísticos que en años anteriores no estaban incluidos. Esto genera en los docentes la carencia de una formación didáctica que robustezca sus conocimientos en esta área de la matemática, para el dominio de los nuevos conceptos propuestos en el programa de estudio, y además fortalezca componentes básicos como: la reflexión epistemológica de conceptos estocásticos, análisis de las transformaciones del conocimiento para enseñarlos en diferentes niveles educativos, estudio de las limitaciones de aprendizaje (dificultades, errores y obstáculos) de los estudiantes y las estrategias de resolución de problemas y el análisis del currículo, situaciones didácticas y recursos didácticos para la temática de interés (Batanero, Godino y Roa, 2004). La consideración y aplicación de estos aspectos favorecerá la mejora de las prácticas docentes y con ello enriquecer el proceso de enseñanza aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores.* Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Granada. Granada, España.

Arteaga, P., Batanero, C. y Cañadas, (2011). Gráficos estadísticos en la formación de profesores. En J. Ortiz (Ed). *Investigación en educación estadística y formación de profesores* (pp.73-87). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática-Universidad de Granada.

Batanero, C., Godino, J., & Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education, 12* (1). Recuperado de http://ww2.amstat.org/publications/jse/v12n1/batanero.html

Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias*, *28*(1), 141-154.

Espinel, C. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. *Investigación en Educación Matemática, 11*, 99-119.

Flick, U. (2004). *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid: Ediciones Morata

Friel, S., Curcio, F., & Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32(2*), 124-158.

García, J. (2005). *La comprensión de las representaciones gráficas cartesianas presentes en los libros de texto de ciencias experimentales, sus características y el uso que se hace de ellas en el aula.* Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Granada. Granada, España.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación.* Cd. de México: McGraw-Hill.

Ministerio de Educación (2009). *Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la educación básica y media.* Santiago: autor.

Ministerio de Educación (2015). *Bases curriculares 7° básico a 2°medio*. Santiago: autor.

Mena, A. (2011). *Estudio Epistemológico del Teorema del Isomorfismo de Grupo*. Tesis de doctorado no publicada, Instituto Politécnico Nacional. Distrito Federal, México.

Monteiro, C., & Ainley, J. (2007). Investigating the Interpretation of Media Graphs Among Student Teachers. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 2(3)*, 188-207.

Pinto, J., & González, M. (2008). *Pedagogical Content Knowledge of a Novel Teacher: a Case from the Teaching of Graphical Representation.* Presentado en el *11th International Congress on Mathematics Education*, Monterrey, México.

Saiz. O. y Blumenthal. V. (2016). *Texto del Estudiante Matemática 3° Medio*. Santiago: Ediciones Cal y Canto.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher 15(1),* 4–14.

Suárez, L. (2002). *Introducción a la Teoría de Probabilidad*. Manizales: Universidad Nacional de Colombia.

Stohl, H. (2005). Probability and Teacher Education and Development. In G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for the teaching and learning* (345-366). Nueva York, EEUU: Springer Verlag.

Wilhelmi, M., Font, V. y Godino, J. (2005). *Bases empíricas de modelos teóricos en didáctica de las matemáticas: Reflexiones sobre la Teoría de Situaciones Didácticas y el Enfoque Ontológico y Semiótico*. Granada: Universidad de Granada.

HISTORIA E HISTORICIDAD DE LA MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES: ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS

José Carlos Cifuentes
Universidade Federal do Paraná. (Brasil)
jccifa@gmail.com

Resumen
Este artículo expone una forma de abordar los “contenidos matemáticos” en la formación de profesores de matemática enfatizando su “sentido pedagógico”. Uno de los ingredientes para alcanzar este propósito es el estímulo y el desarrollo de la sensibilidad sobre formas del pensamiento matemático que no se reducen a técnicas y algoritmos ni a la lógica del proceso matemático, pero que son importantes para una adecuada formación matemática de un profesor. Formación que, como veremos, involucra una visión diferente de la historia de la matemática, su “historicidad”, la que con su carácter epistemológico pone en evidencia la dinamicidad del conocimiento matemático.

Palabras clave: formación matemática del profesor, contenidos matemáticos, sentido pedagógico de los contenidos, historicidad de la matemática, dinamicidad del conocimiento matemático.

Abstract
The aim of this paper is to show a way of approaching “mathematical contents” in mathematical teachers’ training, emphasizing their “pedagogical sense”. One of the elements to achieve this purpose is the stimulation and development of the sensibility on forms of mathematical thinking that are not reduced to techniques and algorithms nor to the logic of mathematical process, but that are important for an adequate teacher’s mathematical training, which, as we shall see, involves a different view of mathematics history, its “historicity”, that with its epistemological character highlights the dynamism of mathematical knowledge.

Key words: teacher’s mathematical training, mathematical contents, pedagogical sense of contents, mathematical boom, historicity of mathematics.

Introducción

Este artículo podría también titularse “La historicidad de la matemática, una alternativa a la enseñanza de la historia de la matemática en la formación de profesores”, pues resalta “la historicidad” de los conceptos matemáticos como un enfoque alternativo a la enseñanza de la matemática a través de su historia epistemológica, una historia interna al pensamiento matemático que deberá poner en evidencia su dinamicidad y la posibilidad de recurrir a formas de pensamiento no lógico-formales que también dan acceso al conocimiento matemático.

La propia naturaleza del problema nos induce a un doble tratamiento:

1) un tratamiento matemático en que serán discutidas “nuevas” concepciones o concepciones ampliadas de matemática, y

2) un tratamiento pedagógico en que se discuta la relevancia de lo anterior para la formación de un profesor de matemática, más aún, diríamos, para la adecuada “formación matemática” de un profesor de matemática, una formación que deberá ser no tradicional en el sentido de que cuestiona las concepciones usuales de enseñanza de la matemática a nivel de pregrado, concepciones que muchas veces enfatizan el carácter lógico-deductivo de las teorías matemáticas que son enseñadas, descuidando los aspectos no-formales que les dieron origen.

Un primer abordaje del problema de la historicidad de la matemática para delimitar su alcance y posibilidades fue propuesto por mí como tesis de maestría en Educación Matemática en la Universidad Federal de Paraná - Curitiba/Brasil, a inicios de 2012 y desarrollado, como tal, bajo mi supervisión, por Chyczy (2014). En 2016, durante mi estadía de posdoctorado en la Universidad Estatal de Maringá - Brasil, ofrecí una conferencia con el título “Un paseo por la floresta matemática a través de su historicidad” a partir de la cual organicé y publiqué el artículo (Cifuentes, 2016) en un número especial de la revista *REVEMAT* cuyo tema central fue *Filosofía de la Educación Matemática*. El presente artículo, entonces, es un avance en la dirección ya trazada por esas investigaciones preliminares. Él va dirigido para los profesores de matemática en formación y para los profesores formadores de profesores a fin de motivarlos a una reflexión pedagógica sobre su propia práctica en clase.

Una de las ideas centrales propuesta en este artículo, veremos, es que la historicidad, a diferencia de la historia, exige un cambio en las concepciones usuales de matemática: de una matemática ya sistematizada como un cuerpo organizado de conocimientos a una matemática pensada como actividad, cuya dinamicidad pone en evidencia formas de pensamiento matemático que incluyen otros tipos de razonamiento que escapan de lo puramente lógico-formal y, por tanto, con una fuerte dimensión epistemológica en la interpretación y discurso históricos, discurso que podríamos llamar “historia epistemológica de la matemática”.

Nuestra motivación principal, que constituyó el eje conductor de este trabajo y que muestra la importancia de la historia y filosofía de la matemática para su enseñanza, fue la siguiente citación de Albert Einstein:

> Concuerdo plenamente en cuanto a la importancia y al valor educativo de la metodología y también de la historia y filosofía de la ciencia. Hoy, muchas personas – y también científicos profesionales – me parecen alguien que vio miles de árboles pero nunca una floresta [un bosque]. Un conocimiento de las bases históricas y filosóficas proporciona aquel tipo de independencia de los preconceptos de su generación que afectan muchos científicos. Esta independencia creada por el conocimiento filosófico es – en mi opinión – la marca de distinción entre un mero artesano o especialista y un verdadero investigador de la verdad. (Howard, 2006, p. 3)

En la siguiente sección describiremos brevemente lo que entendemos por “floresta” en el campo de la matemática. Preferimos “floresta” en lugar de “bosque” porque trae una connotación de “paisaje” con una carga interpretativa que la diferencia de un “mero” fragmento de la naturaleza.

La floresta matemática

Parafraseando la citación anterior de Einstein podríamos decir: *Una formación puramente técnica y algorítmica en matemática nos capacitaría, sin duda, para identificar miles de árboles de un bosque matemático en sus especificidades, sin embargo, no nos educaría para "percibir" la floresta matemática.*

"Ver" o "percibir" la floresta matemática exige colocarnos en un nivel superior de reflexión, observar no solamente las ideas sino

- el movimiento de las ideas,
- la dinámica del conocimiento.

Nos exige procurar no solo la consistencia lógica de los "contenidos matemáticos" que es lo que los encapsula a través de su exigencia de rigor y exactitud, sino también, y principalmente,

- la claridad de los métodos y
- la fluidez del pensamiento en el campo de la matemática.

Comparando con la apreciación en arte, podemos expresar que pensar que la matemática se reduce a fórmulas, técnicas, algoritmos y demostraciones es como ir a un museo de arte y apreciar solamente las molduras o marcos de los cuadros y no los mismos cuadros. Ellos traen el paisaje no lógico de la floresta matemática cuya percepción requiere de facultades como la intuición y la imaginación, importantes también para la creatividad en matemática.
Ahí reside, creemos, la diferencia entre ser un conocedor de la matemática y ser un usuario de la matemática. Y esa diferencia debe guiar el aprendizaje de nuestros alumnos y nuestra enseñanza como profesores.

Los "contenidos matemáticos" y la historicidad de la matemática: un problema pedagógico

La enseñanza técnica de la matemática se basa usualmente en la presentación del conocimiento en forma de "contenidos" encajonados o encapsulados en didácticas y metodologías, base del curriculum escolar. A los "contenidos" se les atribuye el papel principal de informar (una vez que pueden ser colocados en libros llamados "didácticos"), y no el de formar, ellos son cristalizados, sistematizados, formalizados para ser colocados en disciplinas, en áreas.

Entonces, ¿cuál es el sentido pedagógico de los contenidos matemáticos? La palabra "pedagógico" en esa expresión apunta para un movimiento de "conducción dinámica" del conocimiento, a través de los contenidos, para una formación matemática más amplia y no para un mero entrenamiento en técnicas de matemática, y es inspirado en la función originaria del así llamado "pedagogo" de la época de los griegos. El pedagogo era el guía que conducía al niño o al joven en la dirección del conocimiento.

Lo que llamamos el "sentido pedagógico" de los contenidos matemáticos se consigue a través de dos caminos:

1) poniendo en evidencia el origen conceptual de esos contenidos y el camino de su construcción teórica (su génesis, sus mutaciones, su evolución), lo que llamaremos su "historicidad", que solamente se revela en la dinámica del conocimiento. Ella exige incorporar, como veremos, aspectos de la historia y epistemología de la matemática, o mejor conjugadamente, de la historia epistemológica de la matemática;

2) mejorando la sensibilidad y perspicacia sobre formas del pensamiento matemático, las cuales no se reducen a la aplicación de técnicas y algoritmos, no se limitan a la lógica del proceso matemático, pero son importantes para una adecuada formación matemática de un profesor en el camino de la creatividad, con el concurso firme de la intuición y la imaginación.

Como sugerirán los dos ejemplos que veremos a continuación, ejemplos que fueron implementados en cursos específicos de Historia y Filosofía de la Matemática en nuestra universidad, podremos considerar la historicidad de la matemática como un capítulo de la propia matemática y no como un asunto sobre la matemática. La historicidad se constituye como un ver interno de la matemática y no un ver externo. El ver interno no es historia, pero revelará el lado orgánico de la matemática que usualmente queda vedado.

Una versión diferente, aunque próxima, de nuestra noción de "historicidad", puede ser encontrada en Paty (2005). Para Paty (2005) la historicidad torna el objeto de estudio más inteligible en la medida en que permite entender las ampliaciones de racionalidad que posibilitan el progreso del conocimiento.

La historicidad de la matemática traerá un perfil metafísico de la matemática pues envuelve la búsqueda sobre el origen, la génesis, lo que podríamos llamar el *ADN* de los conceptos, la mutación, la evolución, nociones orgánicas que pueden ser asociadas también a una cosmogonía.

La palabra "cosmogonía" proviene de dos términos griegos: *kosmos* (buen orden) y *gonos* (nacimiento). También, "génesis" debe ser entendida como una acción que significa la venida al mundo (al mundo matemático).

En ese contexto caben también, discusiones sobre lo que sería la "fecundidad" de la matemática, que usualmente es entendida de un punto de vista estético.

De los conceptos euclídeos a los conceptos cartesianos en geometría, un primer ejemplo

En esta sección discutiremos las concepciones euclídeas de "punto" y "recta" y cómo ellas evolucionaron hacia las definiciones cartesianas correspondientes.

Primero debemos observar que la geometría euclídea, en su forma axiomática material, es considerada como el estudio del espacio natural, el espacio de concretización o materialización de los objetos geométricos. Para teorizar sobre ese espacio los geómetras griegos, especialmente Euclides (2009), definieron los conceptos de "punto" y de "recta" de la siguiente manera:

a) Punto es aquello de que nada es parte.
b) Recta es una línea sin anchura dispuesta "uniformemente" en todos sus puntos.

Más que en la forma de definir debemos reparar en el ímpetu natural de dar concretitud o sustancia al objeto definido, el "objeto-cosa".

La geometría analítica (plana) iniciada por Descartes y Fermat en el siglo XVII crea un espacio artificial para la geometría euclídea: el plano cartesiano. Él se constituye en el nuevo espacio de concretización-visualización de las verdades geométricas transformando intuiciones geométricas en intuiciones numéricas sobre los números reales, aunque el concepto de "número real", como apuntado por Cifuentes (2015), aún no estaba debidamente comprendido y delimitado en esa época, lo que solo se dará en el siglo XIX. Para la geometría cartesiana:

a) Punto es un par ordenado (x , y) de números reales.
b) Recta es el lugar geométrico de los puntos (x , y) que satisfacen una ecuación lineal de la forma $y - b = m(x - a)$, donde (a , b) es un punto dado de la recta.

Esa definición, así consolidada, de "recta" se basa en el concepto de "pendiente" o "inclinación" de la recta que es dada numéricamente por el coeficiente m.

¿Cuál es, entonces, la historicidad del concepto de "recta cartesiana"? Esa historicidad debe explicitar de qué manera se llegó del concepto euclídeo de recta al de recta cartesiana. La historia de ese concepto está presente en algunos libros didácticos situando cronológicamente su surgimiento y trayendo ya una definición acabada de recta cartesiana colocada en determinado momento histórico. Sin embargo, la historicidad nos debe revelar cuál fue su génesis teórica, cómo ella se desenvolvió.

Si volvemos a la definición griega, mencionada anteriormente: "recta es una línea dispuesta uniformemente en todos sus puntos", veremos que la dificultad en su comprensión reside en el trecho "uniformemente en todos sus puntos". A pesar de eso, ahí está (creemos, como un ejercicio de interpretación) la raíz de su conceptualización por Descartes. Él entendió "uniforme" como teniendo la misma inclinación en todo su trayecto, lo que tradujo matemáticamente a través del concepto de "pendiente" que geométricamente significa la tangente del ángulo de inclinación de la recta a respecto del eje x: la pendiente del segmento formado por los puntos (x , y) y (a , b) es el valor del cociente $(y - b)/(x - a)$. Si ese valor es una constante m para todos los puntos (x , y) de una línea, manteniendo el punto (a , b) fijo, entonces, esa línea es una recta. De ahí resulta la ecuación lineal de la recta dada anteriormente.

En este caso la definición dada por Euclides podría ser considerada una parte del "*ADN* conceptual" de la idea cartesiana de recta, o sea, un inicio, un origen que puede contener el todo necesario para su desarrollo teórico.

Así, pues, la concepción cartesiana de recta tiene su razón histórica y epistemológica en la concepción euclídea de recta. Ese movimiento de ideas es que llamamos "historicidad".

La teoría de grupos como base epistemológica para la constitución de la geometría moderna y sus raíces euclídeas, un segundo ejemplo

La geometría es importante en la formación (matemática) de los profesores por diversas razones, destacándose, primero, el hecho de ser ejemplo del poder de sistematización de una teoría por el método axiomático, también por introducir formas de pensamiento matemático que van desde lo empírico a lo lógico-formal, por su carácter epistemológico y, en el campo de la "experiencia matemática", por su capacidad de visualización, importante también en la enseñanza de la matemática (Cifuentes, 2010).

La geometría de Euclides admite, en su forma axiomática, ciertos procedimientos no formales de naturaleza intuitivo-experimental como, notoriamente, el de "superposición de figuras" para establecer su "igualdad" o congruencia. El uso de ese procedimiento es regido por uno de sus axiomas llamados comunes que dice: "dos cosas que se ajustan una a la otra (es decir, que coinciden cuando son superpuestas) son iguales entre sí". Desde el punto de vista intuitivo, el procedimiento de superposición puede ser entendido como la realización, en el espacio natural, de un movimiento (no necesariamente físico, y hasta podría ser instantáneo) de figuras para establecer su coincidencia.

Una consecuencia importante de la posibilidad de esos "movimientos" es que, para Euclides, la geometría plana no es independiente de la geometría espacial, ya que uno de los movimientos admisibles es la reflexión a respecto de una recta.

A partir del siglo XIX, y como consecuencia del advenimiento de la geometría cartesiana, la geometría (euclídea o no) puede ser estudiada por los efectos que diversos "movimientos", traducidos ahora a través de transformaciones geométricas, producen sobre las figuras geométricas: por ejemplo, los movimientos rígidos que dejan invariantes las distancias entre puntos se llaman isometrías y fundamentan la llamada "geometría euclídea métrica" (Lima, 1992). Estas son las traslaciones, las rotaciones, las reflexiones y sus combinaciones. Todas ellas son formuladas usando el concepto de función introducido en la geometría solo en el siglo XIX y usado extensivamente, como observado por Miorim (1998), por Felix Klein (1849-1925) y David Hilbert (1862-1943), entre otros.

Así como las isometrías permiten el estudio formal de la congruencia de figuras, dando significado matemático al procedimiento intuitivo de superposición, las llamadas "transformaciones de semejanza", como por ejemplo las homotecias, permiten el estudio de las propiedades de semejanza de figuras, fuertemente matematizada por relaciones de proporcionalidad (Lima, 1992).

Los grupos de transformaciones geométricas y sus raíces euclídeas

En ese nuevo contexto de la geometría, desarrollada en el siglo XIX y con el auxilio de técnicas provenientes de la geometría cartesiana, es que aparece el concepto "natural" de grupo, especialmente el de "grupo de transformaciones geométricas". Creemos que los grupos deben ser introducidos, en la formación de profesores, como grupos de transformaciones geométricas o grupos de movimientos, para así desarrollar la geometría con ese enfoque, inclusive las geometrías no-euclídeas.

El mismo concepto de "simetría de una figura" adopta un nuevo significado en la teoría de grupos de transformaciones, a saber: una simetría de una figura es un "movimiento" (transformación) que deja invariante la figura (Arnstrong, 1988).

Lo que es más sorprendente es que la teoría de grupos de transformaciones, bajo una cierta interpretación, ya aparece en la obra de Euclides(!) De hecho, los axiomas llamados comunes con que se inicia la geometría de Euclides pueden ser considerados precursores de los axiomas de la teoría de grupos cuando son "interpretados" como propiedades de la congruencia de figuras: el grupo de las isometrías.

Veamos. El axioma que dice "dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí", puede ser traducido, cuando la igualdad es interpretada como el resultado de aplicar una isometría, de la siguiente manera: "la composición de dos isometrías es una isometría". También, el axioma (implícito) que dice "si una cosa es igual a otra, la segunda es igual a la primera", se traduce como "cada isometría tiene una inversa que es también una isometría". Análogamente "cada cosa es igual a sí misma" significa, en esa interpretación, que "existe la isometría trivial". Otro de los axiomas dice "si son adicionadas cosas iguales a cosas iguales, los resultados son iguales", lo que puede ser traducido por "las isometrías preservan la adición de figuras", y así en adelante.

Se observa, entonces, que en el siglo XIX se pasa de una geometría de las formas estáticas a una geometría de las formas en movimiento. Se pasa de lo sensible y experimental (basado en el procedimiento euclídeo de superposición) a lo formal y racional (basado en la noción de "transformación").

Poincaré (1948) atribuía extrema importancia a los "grupos de movimientos". Para Kant, a fines del siglo XVIII, las nociones de espacio y tiempo son capacidades innatas del ser humano. Para Poincaré, la capacidad más primitiva del ser humano es la que se refiere a la noción de grupo, es a partir de ella que el espacio y el tiempo adquieren significado. Posteriormente Piaget recupera las ideas de Poincaré para explicar el desarrollo sicológico del niño sobre su "percepción" del espacio y del tiempo (Piaget y Beth, 1980).

Conclusión

Este artículo ilustra, en primer lugar, que es posible "hacer matemática", en una concepción ampliada: más como una forma de pensar que como una forma de saber, por el camino de su historicidad. Para mí, más importante que saber matemática, en el sentido de tener un conocimiento organizado y sistematizado, es saber pensar matemáticamente movilizando el conocimiento en la floresta matemática rumbo a la creación o recreación de diversos conceptos matemáticos.

De hecho, diversos aspectos de la floresta matemática relacionados con la historia, filosofía y metodología de la matemática (no de la enseñanza de matemática) atraviesan los contenidos en forma transversal tejiendo conexiones inesperadas entre esos contenidos matemáticos. El dinamismo del conocimiento matemático reside en las diversas formas de pensamiento y razonamiento matemáticos involucrados y sus interconexiones, como el pensamiento avanzado y el elemental, el pensamiento visual, el raciocinio por analogía, etc.

Esas diversas formas de pensamiento, debidamente desarrolladas, nos dan acceso a la "experiencia matemática", es decir, a aspectos de la matemática que no dependen solo de la razón y de la lógica, sino también de la sensibilidad, de la intuición y de la imaginación, formas de acceso a la floresta matemática y fuentes para la creatividad.

Referencias

Arnstrong, M. A. (1988). *Groups and Symmetry*. New York: Springer-Verlag.

Chyczy, L. (2014). *A Historicidade da Matemática: subsídios para a (re)construção de um conceito e suas implicações nos anos iniciais do Ensino Fundamental*. Tesis de Maestria no publicada, Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e em Matemática, Universidade Federal do Paraná – UFPR, Brasil.

Cifuentes, J. C. (2010). Do Conhecimento Matemático à Educação Matemática: uma "odisséia espiritual". Em S. M. Clareto, A. R. Detoni y R. M. Paulo (Eds.), *Filosofia, Matemática e Educação Matemática: compreensões dialogadas* (pp. 13-31). Juiz de Fora, Brasil: Editora UFJF.

Cifuentes, J. C. (2015). O Mito da Análise Real na Formação conceitual do Professor de Matemática sobre os Números Reais e a Análise Matemática. En M. A. Kalinke y L. F. Mocrosky (Eds.), *Educação Matemática: pesquisas e possibilidades* (pp. 95-115), Curitiba, Brasil: Ed. UTFPR.

Cifuentes, J. C. (2016). Dos conteúdos de ensino à dinâmica do conhecimento: uma aventura pedagógica na "Floresta Matemática". *REVEMAT. Revista Eletrônica de Educação Matemática 11(Edición especial)*, 46-65.

Euclides. (2009). *Os Elementos*. Trad. Irineu Bicudo. São Paulo: Ed. UNESP.

Howard, D. (2006). *Albert Einstein como filósofo da ciência*. Recuperado el 01 de julio de 2015 de http://criticanarede.com/cie_einstein.html.

Lima, E. (1992). Transformações geométricas. En E. L. Lima, *Coordenadas no Plano*. 2ª edição (pp. 135-216), Rio de Janeiro: SBM.

Miorim, M. (1998). *Introdução à História da Educação Matemática*. Belo Horizonte, Brasil: Ed. Atual.

Paty, M. (2005). Inteligibilidade racional e historicidade. *Estudos Avançados*, São Paulo, 19(54), 369-390.

Piaget, J. y Beth, E. (1980). *Epistemología, Matemática y Psicología. Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real*. Trad. Victor Sánchez de Zavala. Barcelona: Ed. Crítica.

Poincaré, H. (1948). Los fundamentos de la geometría. En J. Rey Pastor (Ed.), *H. Poincaré – A. Einstein, Fundamentos de la Geometría* (pp. 15-100), Buenos Aires: Ed. Ibero-Americana.

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

TRANSICIÓN ÁLGEBRA - CÁLCULO: ALGUNOS ELEMENTOS DE REFLEXIÓN

Gloria Inés Neira Sanabria
Universidad Distrital Francisco José de Caldas. (Colombia)
nicolauval@yahoo.es

Resumen
Al iniciar los cursos de cálculo, entre otros cambios, se debe concebir la función como un objeto, como una entidad sujeta a las operaciones que otros procedimientos efectúen sobre ella, cuando lo que se concebía en cursos de álgebra, por ejemplo, era una noción de función presentada como un procedimiento aplicado a ciertos objetos llamados números; ahora ese mismo concepto, deviene en objeto al ser operado bajo otros procesos como el límite, la continuidad, la diferenciación…, es decir, se convierte en el objeto sobre el cual se predica; no en vano se considera concepto fundamental de la llamada matemática moderna. Cuando el pensamiento numérico estático se combina con el pensamiento variacional, los términos aún reflejan los procesos de cálculo aritmético y no se han objetivado como transformaciones de un sistema analítico. Abordaremos en este escrito si el álgebra de octavo y noveno grados es solo aritmética genérica o generalizada sin pretensiones adicionales, o si las tiene, qué es lo que pretende, y otros elementos que configuran la transición enunciada.

Palabras clave: transición, álgebra, cálculo

Abstract
At the beginning of calculus courses, among other changes, the function must be conceived as an object, as an entity that is subject to the operations that other procedures perform on it, when what was conceived in algebra courses, for example, was a notion of function presented as a procedure applied to certain objects called numbers. Now the same concept, becomes the object, being operated under other processes like the limit, the continuity, the differentiation…, that is to say, it becomes the object about which it is talked to; not in vain it is considered a fundamental concept of the so-called modern mathematics. When static numerical thinking is combined with variational thinking, the terms still reflect the processes of arithmetic calculation and have not been objectified as transformations of an analytical system. We will consider in this paper if the eighth-and-ninth-grade algebra is only generic or generalized arithmetic without additional intentions, or if it has them, what it is intended to, and other aspects that make up this transition as well.

Key words: transition, algebra, calculus

Introducción

En la transición del álgebra al cálculo, hay múltiples tensiones entre el análisis real, el cálculo escolar, la geometría escolar, la geometría analítica escolar, el álgebra abstracta, el álgebra de bachillerato, la aritmética de los reales, la aritmética de los racionales, la aritmética de los enteros, la aritmética de los naturales, entre lo discreto y lo continuo (y en la mitad, lo denso), entre lo finito y el infinito actual (y en la mitad, el infinito potencial). Hay aspectos en los que la notación del cálculo parece la misma del álgebra escolar, pero no lo es, como se ve ante todo por la ausencia de la composición, por el entendimiento del exponente (-1) como recíproco, no como inverso de la función, por el uso del apóstrofe para la derivada, por la manera de entender las igualdades que empiezan por “y =…” como funciones, por la yuxtaposición de letras sin indicar multiplicación en los nombres de las funciones (como “ln*x*”).

El análisis del comportamiento de las funciones es uno de los rasgos que caracterizan al pensamiento variacional. Para que los alumnos logren un acercamiento a esta forma de pensamiento es necesario que enriquezcan la idea algebraica de función como correspondencia entre dos valores, y que comiencen a visualizar una situación dinámica. Según Cantoral y Farfán (2000), sabiendo que el significado y el sentido acerca de la variación se establecen a partir de situaciones problemáticas cuyos escenarios son los referidos a fenómenos de variación y cambio, se propicia el desarrollo de acercamientos didácticos que favorezcan la construcción de significados, tanto de los conceptos como de los procesos, basados siempre en ideas variacionales.

La propuesta básica que plantean es, para el nivel que corresponda, el desarrollo de los contenidos del currículo relacionados con las variables, las funciones y el cálculo desde un enfoque variacional, considerando el estudio de la variación como una especie de eje rector del que se desprenda el contenido temático. A través de experiencias con profesores en servicio en la educación media y superior y con sus estudiantes, Cantoral, Farfán y sus co-investigadores han constatado que, en caso de que se logren incorporar elementos visuales como parte de su actividad matemática al enfrentar problemas, los estudiantes suele manejar la función no sólo como objeto, lo que ya es un gran logro, sino que además pueden transitar entre los contextos algebraico, geométrico, numérico, icónico y verbal con cierta versatilidad; en otras palabras, en caso de tener un dominio del contexto geométrico/visual tanto en la algoritmia, la intuición, así como en la argumentación, se hará más posible entonces el tránsito entre las diversas representaciones

Desarrollo

Se consideran el álgebra y el cálculo como dos sistemas conceptuales diferentes, con registros semióticos para diferentes sistemas: diferente semántica, sintaxis casi igual. una diferencia en la sintaxis del cálculo (pero no del álgebra) es el uso del redondelito de la función compuesta. Una diferencia en la semántica es la interpretación de la x como función idéntica, que ciertamente no es del álgebra, dominio simbólico escolar que sirve para representar regularidades que se repiten en patrones y que se asocia con el pensamiento variacional, categorizado para sistemas algebraicos y analíticos. En el cálculo los tópicos más importantes que se suelen estudiar son el de razón o tasa de cambio, los límites, las derivadas, la continuidad, las integrales, nociones que giran alrededor del concepto de límite.

Desde nuestro punto de vista, el caso del área y del perímetro del círculo en los primeros grados de básica secundaria son ya casos del límite como proceso, aunque no estén aún axiomatizados o formalizados a la manera de Weierstrass. El obstáculo es la formalización.

Desde este marco conceptual, así como la longitud de la circunferencia, el área del círculo y otros problemas de cuadratura involucran ya el concepto de límite en el sentido que se quisiera lo manejara el estudiante de cálculo, lo mismo puede decirse respecto a los decimales infinitos: ¿será que 0,9 periódico es igual a 1 o diferente de 1? Ahí está presente el concepto de límite, como también en expresiones como: "*La tangente es el límite de la secante (o de las secantes)*", se dice en el tratamiento tradicional. Hay que plantear el límite de la secante como la tangente, pues eso se hace en los cursos: se traslada el problema al terreno geométrico, pero ese es otro tipo de límite, que no tiene ε ni δ; es bueno para mostrar que el profesor está usando una noción de límite que no es la que se define con ε ni δ, y también para llamar la atención sobre otro punto poco explicitado: el profesor utiliza la palabra *tangente* en dos sentidos: uno, con el significado del final de décimo grado, cuando se habla de las funciones trigonométricas, y otro, en el sentido de la primera parte del décimo grado, cuando se habla de la tangente a las gráficas; luego, ahí el que está poniendo un obstáculo didáctico es el profesor. Está tendiendo una trampa que distingue dos usos que el enunciador sabe que son diferentes, pero el estudiante no. El profesor debería decir: *"la tangente del ángulo que forma la recta tangente con el eje horizontal"*. El concepto de pendiente como inclinación puede medirse por el ángulo, por el seno del ángulo o por la tangente del ángulo, y esto es más coherente que tratar de definirla como razón de dos variaciones $\Delta y/\Delta x$. ¿Dónde está la tangente?

En las expresiones simbólicas que involucran el símbolo de infinito, como: $\lim_{x \to \infty} x = \infty$ suele haber una inconsciencia en los estudiantes, pero también en el profesor, quien usa igual sintaxis y vocabulario cuando dice que *"la x que tiende a infinito es una variable y la otra x es una función"*. Precisamente ahí hay un ejemplo de ese paso del álgebra al cálculo: en el álgebra, la *x* representa variables en el sentido de incógnitas para averiguar o de números genéricos, pero en el cálculo representa la función idéntica.

Para los profesores de educación media y de universidad, "cálculo" es lo que aparece en los textos sobre cálculo. La conceptualización básica involucra el estudio de los límites, las derivadas, las integrales… y el caso del límite lo conforman todas aquellas situaciones que requieren aproximaciones y vecindades; el mismo profesor en su lenguaje utiliza expresiones como *"acercarse más y más"*, *"acercarse tanto como se quiera"*, *"tender hacia"*, *"infinitamente cercanas"*, que involucran entidades como lo infinito y lo infinitesimal. Esquematizando, tenemos:

Tabla 1. El álgebra escolar, el cálculo diferencial y el caso del límite.

Álgebra	Cálculo	Geometría Analítica	Análisis
Como tratamientos en un registro simbólico para la aritmética generalizada	Como tratamientos en un registro simbólico para el análisis	Como conversiones entre dos registros simbólicos de ecuaciones y gráficas	Como sistema conceptual cuyos elementos son las funciones reales de valor real

Fuente: Neira (2012)

Hay tres operadores sobre funciones que son los que caracterizan el trabajo analítico que se suele hacer en el cálculo: el límite (L), la derivada (D) y la integral (∫).

El siguiente cuadro muestra en la primera columna cada operador analítico por sí solo y el mismo aplicado a su argumento, (que es una función reificada como objeto, como aparece en la segunda columna); en la tercera columna, el valor de esa función cuando se aplica a su propio argumento genérico (que es un número real); luego el argumento aparte (que es un número real todavía no determinado) y un caso particular de un número real. (Neira, 2012, p. 37)

Tabla 2. Operadores y sus argumentos

Operador		Argumento del op.	Valor	Argumento	Caso particular
L	L(f)	f	$f(x)$	x	1
D	D(g)	g	$g(y)$	y	$2/7$
∫	∫(h)	h	$h(z)$	z	π

Fuente: Neira (2012)

Tall y Vinner (1981, citados por Vasco, 2009) y Fischbein (Fischbein, Tirosh y Hess, 1979, citados por Vasco, 2009) propusieron dos tipos de nociones intermedias entre las nociones vagas y los conceptos científicos (en inglés los llamaron *"concept image"* y *"procept"*).

"*Concept image" ("imagen conceptual"*) la usan para comparar el concepto con la imagen conceptual, Vasco (2009) propone pensar como ejemplo en el concepto de curva en geometría diferencial; el concepto matemático de curva difícilmente puede separarse de la imagen conceptual de una línea curva, aunque dicho concepto se refiere a una función que proyecta un intervalo de R en un espacio de dos o más dimensiones, no a la imagen del intervalo bajo la función, que es la que mantenemos indisociablemente ligada a la curva. La imagen conceptual es un conglomerado de todas las estructuras, imágenes, procedimientos y relaciones asociadas con el concepto, y muchas de sus regiones pueden estar muy alejadas y aun contradecir la definición formal del concepto ya institucionalizada. (Neira, 2012, p. 38).

La palabra inglesa *"procept*" se podría traducir directamente por "procepto", en el sentido de concepto procedimental, pues se relaciona más con los procesos, procedimientos o algoritmos que con los objetos o las relaciones, pero oscila de uno a otro. Por ejemplo, el estudiante de primaria y secundaria suele rechazar la distinción entre *adición* y *suma*, pues no conceptualiza propiamente la operación binaria de adición, sino que la confunde con la manera como hace las sumas, sin distinguir la operación del resultado, ni éstos del algoritmo que aprendió (por ejemplo, el algoritmo usual para sumar varios numerales decimales dispuestos en columna). En símbolos, $a + b$ puede significar sumar *a* con *b*, o el resultado de ese proceso. (Neira, 2012, p. 38).

Otro ejemplo de esta transición es el del concepto de igualdad. Un estudiante normal, aún "exitoso", puede pasarse todo el bachillerato sin configurar el concepto de igualdad como relación de equivalencia entre expresiones simbólicas que se refieren al mismo objeto y que permite la sustitución de la una por la otra. Le basta el procepto de igualdad, que condensa el proceso de obtener un resultado y la relación estática de igualdad. Este procepto le permite leer el símbolo "=" como "da", aunque se pierda la propiedad simétrica. Va a creer, por ejemplo, que la ecuación "$0 = x^2 - 1$" está "mal escrita". Pero la idea de Tall es que esa oscilación o confusión entre proceso y concepto no es rechazable, más aún, es una ambigüedad muy conveniente en el pensamiento de orden superior y los expertos también la utilizan sin darse cuenta de que a veces se refieren al proceso y a veces al producto conceptual de ese proceso. (Neira, 2012, p. 38).

Las palabras *reificación o cosificación*, según Vasco (2009), son dos traducciones del inglés *reification*, que se extendió en la educación matemática con los primeros trabajos de Anna Sfard. En latín, *"res"* significa "cosa", y "hacer de algo –que no es cosa– una cosa", se puede decir *cosificación* o *reificación*.

La noción inicial de cosificación o reificación es la de formar mentalmente un objeto de lo que era un proceso, una acción, una operación o una relación. Por eso se encuentra a veces la palabra *objetivación*. Como toda palabra terminada en "-*ción*", *cosificación*, *reificación* u *objetivación* a veces se refiere a la operación mental y a veces al resultado de esa operación.

Vasco enumera algunas pistas sobre la ocurrencia de la reificación de un nuevo producto mental: Separarlo de y contrastarlo con otras cosas, objetos, elementos o componentes. Operar sobre el nuevo producto, Nombrarlo con un sintagma nominal, Atribuirle predicados unarios o monádicos, Relacionarlo con otros y atribuirles predicados binarios, ternarios, etc.

La propuesta inicial de Anna Sfard, afirma Vasco (2009), era que el progreso en la conceptualización matemática con frecuencia consistía en cambiar de una manera de concebir un proceso o procedimiento como algo activo, que ocurre en el tiempo, a una consolidación y detención del mismo como un nuevo objeto o cosa sobre la cual se empieza a actuar. Para el caso del análisis, se podría pensar en que el estudiante toma las expresiones del álgebra de bachillerato solo como instrucciones para calcular un resultado; por ejemplo, entendería el término "$x^2 - 1$" como *"eleve el número al cuadrado y quítele uno"*. Es una comprensión limitada, porque no permite pasar a la función respectiva, pero es correcta. Por eso puede tener éxito en aprobar dos años de álgebra sin construir el concepto de función, pues ese concepto requiere una reificación del procedimiento de calcular el resultado. Si no se reifican las funciones como objetos, no puede construirse un sistema analítico en el que los elementos u objetos sean las funciones reales de valor real. Aquí podría estar la diferencia entre el álgebra de bachillerato y el análisis real. (Neira, 2012, p. 39).

En este caso Vasco (2009) plantea que la reificación es muy cercana al paso del procepto de Tall, Vinner y Fischbein al concepto respectivo. Así lo ha utilizado Ed Dubinsky en experimentos de enseñanza de la teoría de grupos. Pero no es el único caso. Por ejemplo, las relaciones simbolizadas por los signos "<" y ">", que los estudiantes leen *menor* y *mayor*, suelen quedarse en una comparación entre dos números y no pasan a configurar un sistema de relaciones con sus propiedades, su composición, su inversión, etc., pues esas relaciones no han sido reificadas, cosificadas u objetivadas. No se puede trabajar con un sistema cuyos elementos sean las relaciones si los estudiantes no las reifican, es decir, si no las vuelven cosas u objetos mentales. (Neira, 2012, p. 39).

Aquí también puede haber una barrera para el paso al análisis desde el álgebra de bachillerato y el estudio de pre-cálculo y cálculo con funciones como instrucciones o como relaciones, sin reificarlas. Mientras no se logre la reificación, el estudiante no puede pasar a los sistemas analíticos, cuyos elementos son las funciones como operaciones unarias reificadas. Tanto los estudiantes como muchos de sus profesores siguen pensando que el sistema simbólico que aprendieron en el álgebra de bachillerato representa lo mismo cuando se usa en el cálculo, pues en ambas asignaturas basta saber operar con algunas reglas que se refieren solo a los símbolos, sin tener que pensar en los conceptos. (Neira, 2012, pp. 39-40).

En cuanto a las múltiples tensiones disciplinares y de aprehensión cognitiva, la principal operación binaria analítica es la composición de funciones, operación que no figura en el álgebra de bachillerato. Los elementos u objetos del análisis no son los números racionales y reales, sino las funciones reales de valor real. Respecto a la relación continuo-discreto (al interior de la aritmética, del álgebra y del cálculo), en la mitad hay una zona gris: lo denso, o la densidad. En lo discreto están los conjuntos finitos, los números naturales y los enteros; luego se llega a los racionales positivos Q+, que son densos, y de allí se llega a los racionales Q. Luego se trata de capturar el continuo (línea, región) a través de lo discreto y lo denso.

Generalmente se viene trabajando en el álgebra de bachillerato con ciertas funciones muy limitadas: la función cuadrado, la función cubo, las funciones lineales y las funciones afines o de gráfica lineal (que se confunden frecuentemente con las lineales). No se consideran las funciones constantes como funciones, sino como constantes. La función idéntica no se utiliza como función, tal vez “porque no hace nada”. La x se considera como incógnita, como variable o como indeterminada, pero no como función (representa la función idéntica en los reales).

No es conveniente confundir la función, tomada como operación o transformación, que es un objeto activo, con su grafo, que es un objeto pasivo propio de la teoría de conjuntos. Se perdería el aspecto activo de la función y no se podría hablar de la diferencia entre el conjunto de salida y el dominio, ni de la diferencia entre el conjunto de llegada y el recorrido, rango o codominio. No habría diferencia entre función parcial y función totalmente definida, ni entre función en (“into”) y función sobre o sobreyectiva (“onto”). Menos conveniente todavía es confundir la función con su gráfica cartesiana. La una es un elemento u objeto analítico, y la otra es un elemento u objeto geométrico.

Para entrar en el mundo del cálculo es necesario enriquecer la visión de los estudiantes sobre la noción de igualdad y desarrollar nuevos métodos para probar igualdades. En este punto, es interesante notar que una reconstrucción similar de la noción de igualdad fue puesta en evidencia por la investigación didáctica, en la transición del pensamiento numérico al pensamiento algebraico. Tal como se ve en Neira (2000), en el álgebra, para demostrar que dos expresiones son iguales, se razona por equivalencia: se transforma la escritura $a(x) = b(x)$ en una sucesión de escrituras $ai(x)=bi(x)$ hasta obtener dos expresiones idénticas. Lo mismo se hace en el tratamiento de las ecuaciones y de las inecuaciones. Mientras que en el cálculo, se hace un encaje con la proposición $\forall\ \varepsilon > 0,\ la\text{-}b\ /< \varepsilon$, Lo cual ha de llevar a comprender que para demostrar que en la vecindad de un punto *a*, $f(x) < g(x)$, no hay que resolver la inecuación, sino encontrar un intervalo de centro a donde tal desigualdad se pueda garantizar, mediante aproximaciones y estimaciones. *Se pasa de razonamientos por equivalencias sucesivas a razonamientos por condiciones suficientes.*

La entrada en el mundo del cálculo obliga también a los estudiantes a reconstruir objetos matemáticos ya familiares, pero en otros mundos: la noción de tangente nos proporciona un caso prototípico de tal reconstrucción. En la enseñanza bachillerato, los alumnos encuentran primero esta noción en el contexto del círculo. La tangente es un objeto geométrico que posee propiedades específicas: • no corta al círculo, • Lo toca en solo un punto, • en el punto de contacto es perpendicular al radio.

Todas estas propiedades son globales y no tienen nada que ver con la idea de dirección común. Además, para ayudar a los alumnos a darse cuenta del carácter abstracto de los objetos geométricos, los profesores subrayan que incluso si perceptivamente el círculo y la tangente parecen coincidir localmente, en realidad tienen solo un punto común. Esta concepción geométrica se puede generalizar aplicándose a otras curvas, por ejemplo, parábolas, y conduce a la concepción algebraica de la noción de tangente como recta que tiene una intersección doble con la curva, que resulta operativa con las curvas algebraicas.

Claramente, no hay una filiación directa entre esta tangente y la definida en cálculo, caracterizada por una propiedad local: la recta con que la curva tiende a confundirse localmente (aproximación afín al orden uno) y cuya pendiente está dada por el valor de la derivada de la función asociada.

Conclusiones

A través de estas consideraciones se pretende aportar herramientas teóricas y metodológicas para la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial escolar en estudiantes universitarios, que han de servir también, por supuesto, para todo aquel que esté transitando del álgebra escolar al cálculo diferencial escolar, y dotar de elementos de profundización, sustentación y fundamentación epistemológica y metodológica a la investigación sobre la enseñanza y la comprensión del cálculo diferencial escolar.

Así mismo, se esperan impactos a partir del uso de los resultados de investigación en lo institucional, en relación con la investigación en didáctica de las matemáticas y en la formación de profesores de matemáticas, con las comunidades de investigadores y con las políticas educativas. Se espera plantear propuestas didácticas que conduzcan a una transición más continua del conocimiento superando las rupturas y los obstáculos; una mayor sustentación teórica y metodológica en el área de matemáticas para la evaluación de las prácticas docentes de los profesores de matemáticas y una ampliación de la base teórica y metodológica de los investigadores, grupos de investigación, formadores de profesores, profesores en ejercicio en la línea de investigación concerniente a la formación de profesores de matemáticas que tengan en cuenta estas consideraciones.

Los acercamientos descritos anteriormente han de permitir obtener algunos resultados prometedores para la formación y profesionalización de la práctica, pues cada concepto del cálculo que se desea enseñar suele apoyarse en nociones más elementales y se resiste al aprendizaje si no se antecede por un sólido entendimiento y articulación de las nociones y los conceptos previos, lo cual es necesario pero no suficiente: lo evidenciamos todos los días en las aulas de clase, y en los “errores” persistentes en los exámenes y evaluaciones.

Referencias bibliográficas:

Cantoral, R. y Farfán, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En: *El futuro del Cálculo Infinitesimal*, ICME-8; Sevilla. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1992). *Gráficas y ecuaciones. Antología de la Educación Matemática* (Trad. Parra, M., del original en francés: Graphiques et equations. L'Articulation de deux registres, 1988. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, p.p. 125-139). México: Cinvestav-IPN.

Neira, G. (2000). El paso del álgebra al cálculo: punto fundamental para lograr una comprensión significativa en matemáticas. *Revista Ingeniería* (Universidad Distrital Francisco José de Caldas), n. 1, 87-92.

Neira, G. (2012). *Del álgebra al cálculo, ¿transición o ruptura? Notas para una reflexión epistemológica y didáctica.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof. En: Grouws, D. (Ed.), *Handbook or research on Mathematics teaching and learning* (p.p. 495-510). New York: MacMillan.

Vasco, C. E. (1995). History of mathematics as a tool for teaching mathematics for understanding. En: Perkins, D.; Schwartz, J.; Maxwell, M. y Stone, M. (Eds.). Software goes to school. *Teaching for understanding with new technologies* (p.p. 54-69). New York/Oxford: Oxford University Press.

Vasco, C. E. (2009). Acerca de "concept-image, procept, reification". En: *Seminario de investigación del DIE-UD*. Bogotá: DIE-Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

ANÁLISIS CRÍTICO DE UN DISPOSITIVO DIDÁCTICO PARA EL PROCESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL LENGUAJE MATEMÁTICO

Rodolfo Eliseo D´Andrea, Mónica Real, Patricia Sastre Vázquez
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Facultad de Agronomía, Pontificia Universidad Católica Argentina. Facultad de Química e Ingeniería, Instituto de Educación Superior N°2. Instituto de formación técnica superior N°19. Ciudad Autónoma de Buenos Aires. (Argentina)
pasava2001@yahoo.com.ar, monireal@gmail.com, rodolfoedandrea@gmail.com

Resumen
El lenguaje matemático puede manifestarse de varias formas. El estudiante debe hacer un esfuerzo para interpretar estas variedades propias de los modos de comunicación en Matemática. Interesa el análisis de las prácticas docentes para optimizar secuenciaciones de contenidos para que los estudiantes puedan alcanzar y comunicar adecuadamente sus argumentaciones con lenguaje específico. Se mostrarán diferentes dispositivos didácticos utilizados en cursos universitarios de Matemática, que se analizarán durante el taller y se abrirá un debate entre los asistentes para ver las posibles adecuaciones y modos de implementación.

Palabras claves: lenguaje matemático; formación del profesorado

Abstract
Mathematical language can be expressed in several ways. The student should make an effort to interpret these varieties that characterize mathematical modes of communication. The analysis of teaching practices is of our concern in order to optimize content sequencing so that students could reach and communicate their arguments with specific language adequately. Different teaching devices used in university courses in Mathematics will be shown, which will be analyzed during the workshop and a debate will be opened among the attendees to see the possible adaptations and ways of implementation.

Key words: mathematical language; teacher training

Introducción

Cuando se discute acerca del conocimiento que deben poseer los estudiantes sobre lenguaje matemático, la cuestión no se reduce a un simple tratamiento de símbolos y notaciones. Una adecuada apropiación de este lenguaje requiere que además del conocimiento de los símbolos como un código, se conozca su ‘funcionamiento’. Una inadecuada apropiación puede conducir al síndrome del conocimiento frágil (Perkins, 1995), síndrome que describe al problema que el estudiante presenta en el abordaje y apropiación del conocimiento bajo diversos aspectos.

El objetivo de este taller es el análisis de las prácticas docentes que permiten optimizar secuencias de contenidos para que los estudiantes puedan comunicar adecuadamente en Matemática sus argumentaciones con lenguaje específico.

Se presentó este taller a un grupo de docentes de nivel medio y superior que en su praxis se hace necesario el uso de las argumentaciones y validaciones por parte de los estudiantes con adecuado y específico vocabulario y lenguaje matemático, las cuestiones que el equipo de trabajo notó como relevantes para socializar y poner en acto dentro de secuencias didácticas. Aquí surge una discusión extrapolable sobre los conocimientos que debe poseer el profesor de Matemática, y se enlaza directamente con la formación del profesorado, específicamente en lo referente al lenguaje y la epistemología de Matemática, que forma parte del currículum de estudios desde los primeros años de escolaridad y que se instala con una cadena de símbolos que van penetrando todos los espacios del lenguaje. De esta forma, el sujeto de aprendizaje va accediendo a fórmulas, leyes y algoritmos que determinan conductas matemáticas muy definidas para hallar soluciones y que van desde acciones tales como enumerar, contar, ordenar, clasificar y hasta inferir. El lenguaje formal, constituido por símbolos más que por palabras, es lo que realmente hace que el sujeto que aprende haga verdaderos esfuerzos para comprender el lenguaje matemático, debido a su complejidad. Esto es consecuencia de que el estudiante no logra establecer una clara y adecuada extrapolación entre el lenguaje natural o cotidiano y el formal.

El lenguaje matemático puede manifestarse de varias formas. Puede ser de forma coloquial, a través del lenguaje cotidiano; puede ser de forma gráfica o visual, a través de esquemas, representaciones gráficas o simples esquemas a mano alzada y también puede ser de forma simbólica, a través del lenguaje código que le es propio a Matemática. El estudiante debe hacer un especial esfuerzo para interpretar estas variedades propias de los modos de comunicación en Matemática. Pero el profesor también debe realizar un esmerado trabajo para optimizar el proceso de enseñanza y aprendizaje que permita al estudiante poder realizar estos registros comunicacionales y sus respectivos pasajes.

En este taller se analizaron dispositivos didácticos; estos son guías de ejercitación teórico-prácticas construidas con el fin de facilitar la apropiación de vocabulario, lenguaje y contenido necesario para la argumentación y validación en Matemática. Se mostraron diferentes dispositivos didácticos utilizados en cursos de nivel medio y superior de Matemática durante el taller y lo que consecuentemente permitió abrir un debate entre los asistentes de manera que queden expuestas las posibles adecuaciones y modos de implementación.

Marco Teórico

El lenguaje simbólico formal de la Matemática ostenta representaciones lingüísticas que expresan operaciones o transformaciones que hacen referencia a diferentes razonamientos y argumentaciones que son motivadas por estructuras conceptuales específicas. Si se considera a la Matemática como una manifestación semiótica (Radford, 2003) entonces sus elementos generan significados sintácticos y semánticos en un lenguaje simbólico, el cual podría considerarse equivalente al lenguaje natural de un individuo. El lenguaje matemático está dotado de una simbología y una estructura que le son propias. Es fundamental conocer el significado de sus símbolos para que el estudiante sea capaz de interpretar lo que se quiere decir con ellos. Precisamente la falta de comprensión de los conceptos matemáticos expresados en el lenguaje que le es propio a esta Ciencia, no permite ver como éstos se relacionan y como son utilizados para la resolución de problemas y procesos de validación referentes a su epistemología consistente en la demostración de proposiciones y la búsqueda de ejemplos y contraejemplos, entre otras acciones.

En general, estos conocimientos o son inexistentes o no tienen la suficiente solidez en los docentes tanto a nivel medio como universitario, lo que debilita la formación del profesorado, y es que precisamente, como señala Adúriz-Bravo (2002), el profesor de Ciencias, en general, debe saber no solo de la Ciencia sino que también debe saber sobre la Ciencia, que es lo esencialmente esperado para una profesionalización docente.

Niss (2003) encuadra a la utilización de los símbolos matemáticos, lo que implícitamente se refiere al conocimiento del lenguaje matemático, dentro de las competencias matemáticas que un estudiante debe tener. Su propuesta para definir la competencia matemática queda configurada como la habilidad para entender, juzgar, hacer y usar las Matemáticas en una variedad de contextos y situaciones intra y extramatemáticas en las que estas juegan o podrían jugar su papel, identificando a tales competencias del modo siguiente: Pensar matemáticamente; Plantear y resolver problemas matemáticos; Modelar matemáticamente; Argumentar matemáticamente; Representar entidades matemáticas (situaciones y objetos); Utilizar los símbolos matemáticos; Comunicarse con las Matemáticas y comunicar sobre Matemáticas; Utilizar ayudas y herramientas (incluyendo las nuevas tecnologías).

El lenguaje formal, constituido por símbolos más que por palabras, es lo que realmente hace que el sujeto de aprendizaje haga verdaderos esfuerzos para comprender Matemática, debido a su complejidad. Como consecuencia, el estudiante no traslada automáticamente el lenguaje natural que utiliza habitualmente al lenguaje matemático.

Pimm (1999) afirma que el uso generalizado que hacen los docentes en el aula del lenguaje formal, tiene consecuencias trascendentes, ya que, en lugar de modelar los usos matemáticos desde su lenguaje informal, enfatiza en el lenguaje formal de forma ostensiva y recurrente, lo que termina por confundir, atribular y disgustar al sujeto de aprendizaje. En relación a esto, es de destacar que D´Andrea, Curia & Lavalle (2012) propusieron una ingeniería didáctica para la comprensión y desarrollo de la argumentación de teoremas matemáticos en estudiantes universitarios postulando como paso inicial la comprensión por parte del estudiante, de la proposición que se quiere probar, desde el lenguaje natural. Por su lado, Fennell (citado por Ruiz, 2003, p.34.) señala que “en la comunicación matemática los símbolos estandarizados y las definiciones de la terminología son necesarios, pero la enseñanza de la matemática en lenguaje muy formalizado, algunas veces, causa una especie de bloqueo en la comprensión”

Este tipo de situaciones deben ser manipuladas diligentemente por el docente, que puede considerar que el estudiante comprende los conceptos matemáticos aunque, en el momento de evaluar, se evidencian debilidades en la adquisición y comprensión de estos. Debe destacarse que la transmisión y comprensión del lenguaje matemático, en la medida de lo posible, debe ser un conocimiento introductorio. Es decir, que tanto a nivel universitario como a nivel medio debería formar parte del currículum del primer curso de Matemática de la carrera escogida o el primer año de estudios del estudiante secundario. Si esto no fuese posible, es fundamental que el profesor luego de un test diagnóstico que determine los conocimientos existentes acerca del lenguaje matemático en el grupo de estudiantes, instruya a estos de acuerdo a los resultados obtenidos. Sastre Vázquez y D´Andrea (2011) observaron que una de las dificultades que enfrentan los estudiantes, es precisamente desconocimiento del lenguaje matemático. Este desconocimiento es causante de la producción de numerosos errores de construcción y de interpretación, lo que dificulta inexorablemente el acceso a la incorporación de nuevas estructuras conceptuales. Consecuentemente, los estudiantes no son capaces de asociar los conceptos con sus definiciones y menos aún son capaces de ejemplificar. Es decir, que no pueden utilizar el lenguaje matemático de una forma ‘concreta’ ni tampoco de una forma ‘abstracta’, los conceptos serían para ellos palabras carentes de significación matemática en sentido estricto.

Este tipo de situaciones deben ser manipuladas diligentemente por el docente, que puede considerar que el estudiante comprende los conceptos matemáticos pero sin embargo, a la hora de evaluar, se evidencian debilidades en la adquisición y comprensión de estos. González (1998), señala las consecuencias negativas del enfoque tradicional de la enseñanza de la matemática en donde no se hace énfasis en la transferencia y comprensión del lenguaje formal, por lo que los procesos comunicacionales son unilaterales, prevaleciendo la transmisión de la información, que es adquirida por el estudiante de forma mecánica y ritual.

Actividades sustentadas en el marco teórico

Los resultados obtenidos de las investigaciones llevadas a cabo por Sastre Vázquez y D´Andrea (2011) generaron la necesidad de considerar acciones que permitieran interactuar con otros niveles del sistema educativo, empleando la extensión como estrategia. Con esas acciones se pretendió realizar un aporte para la divulgación del conocimiento científico en un marco de integración. Las mismas estuvieron dirigidas a Profesores de Matemática del ciclo medio y estudiantes del último año del Profesorado de Matemática. Ellas pretendieron aportar una mejora a la formación del profesorado, extrapolando didácticamente los resultados obtenidos de diferentes trabajos de investigación, surgiendo de ahí, un espacio que posibilitara la reflexión sobre la importancia y las estrategias didácticas para la inclusión del lenguaje matemático, la argumentación y la demostración entre los contenidos de la enseñanza media y terciaria. Estos espacios devinieron en talleres sobre el lenguaje matemático y talleres sobre la demostración matemática. De este modo se intentó construir un puente de articulación entre Escuela Media, Profesorado y Universidad. Consecuentemente surgió la posibilidad de analizar el desempeño y evolución de estudiantes universitarios durante el proceso de enseñanza y aprendizaje del lenguaje matemático. Para el logro de estos objetivos, durante los años 2009 a 2012 y en un curso anual de Álgebra y Geometría para Carreras de Ingeniería se introdujo a los estudiantes en el conocimiento del lenguaje matemático de la forma siguiente.

Durante los dos primeros años de este estudio: 2009/10, se instruyó a los estudiantes en el conocimiento del lenguaje matemático bajo un paradigma tradicional, utilizando estrictamente contenidos de Lógica tradicional o aristotélica y Lógica simbólica. Se le mostraron los contenidos aproximadamente del modo siguiente. Primero se los instruyó en el conocimiento formal de las estructuras esenciales de la lógica tradicional: concepto, juicio y razonamiento. Luego se los introdujo en el concepto de proposición y luego los diferentes conectivos proposicionales tales como la conjunción; negación; disyunción inclusiva y exclusiva; implicación y doble implicación. La presentación de estos conectivos se hizo desde las clásicas tablas de verdad. Posteriormente se los encuadró en el conocimiento de las estructuras conceptuales de función proposicional y su proceso de cuantificación; los métodos de demostración y otras cuestiones epistemológicas asociadas. En los dos años siguientes del estudio, el diseño instruccional sobre lenguaje matemático se enfocó desde un paradigma basado en la construcción de los contenidos a partir de ejemplos extraídos de la Matemática y orientados específicamente a cuestiones de notación y epistemología que hacen al lenguaje y método de esta Ciencia, evitando por completo en el discurso, terminología específica de la Lógica tradicional y simbólica. El desempeño y la evolución se evaluaron por medio del rendimiento académico reflejado en las calificaciones obtenidas en exámenes parciales y finales. Los resultados obtenidos mostraron que los estudiantes que recibieron una instrucción en el lenguaje matemático desde un paradigma basado en la construcción, tuvieron una mejor predisposición y desempeño en el manejo del lenguaje matemático. Además, para estos grupos se observó un mayor rendimiento en la capacidad de producir una transposición desde el lenguaje natural hacia el lenguaje simbólico.

Mientras que los estudiantes instruidos en el lenguaje matemático desde un paradigma tradicional sostenido por contenidos más formales de lógica mostraron poseer dificultades para la comprensión de nuevas estructuras conceptuales. Se especula que esto podría explicarse por el enfoque didáctico adoptado. Se observó también, en base a esta especulación, que los estudiantes instruidos en un discurso más constructivo pudieron abordar procesos de validación desde una mirada significativa y comprensiva.

Reflexiones que salieron a la luz en el marco del taller

La epistemología de la Ciencia Matemática tiene como pilares fundamentales el razonamiento y la abstracción. El diseño de un curso cabal de Matemática no puede soslayar su epistemología y para poder ponerla en acción, se requiere conocer su lenguaje. Un paradigma tradicional de aprendizaje de tipo normativo, es decir, centrado en los contenidos de aprendizaje que esté direccionado al proceso de enseñanza y aprendizaje del lenguaje matemático, puede inducir a una forzada e inadecuada apropiación.

Los avances tecnológicos en los alrededores de fines del Siglo XX y principio del Siglo XXI junto con las nuevas corrientes didácticas ponen en juicio las actividades que se sustentaban en el paradigma tradicional. Atento a esto es que D’Andrea y Sastre Vázquez (2013) proponen un cambio radical en la educación del lenguaje matemático con secuencias didácticas renovadas que hacen mas amable la aspereza del aprendizaje del lenguaje formal de la Matemática, naturalizando su uso.

Los participantes del taller reconocieron que un proceso de enseñanza y aprendizaje del lenguaje matemático sustentado un paradigma constructivo desde una perspectiva intuicionista, permite un aprendizaje mucho más ágil y dinámico en los estudiantes de las estructuras proposicionales, muy alejado de las tradicionales tablas de verdad. A través de ejemplos simples pero matemáticos, los estudiantes pueden llegar a ver que una conjunción de un número finito de proposiciones es verdadera cuando es verdadera cada una de las proposiciones que constituyen a esa conjunción. Mientras que una conjunción de un número finito de proposiciones es falsa cuando por lo menos es falsa alguna de las proposiciones componentes. Asismismo, con la disyunción inclusiva introduciendo ejemplos similares a los utilizados en la conjunción, pero considerando primero un ejemplo coloquial que permita que el estudiante vea que se trata de una opción inclusiva. Un ejemplo adecuado para el logro de este objetivo puede ser el siguiente: *'El coche arranca si hay uno que lo maneja. María o Pedro o Susana o Juan. ¿Cuántos tienen que subir al coche para que arranque?'*

De esta forma, los estudiantes guiados por el docente pueden construir el valor de verdad de una disyunción inclusiva a través de una discusión conjunta. Luego, de forma similar se introduce a la disyunción exclusiva empleando un ejemplo del tipo: *'A las diez de la noche, voy al cine o al teatro'*. Con este ejemplo u otro de estructura similar, se pretende que el estudiante pueda caracterizar el valor de verdad de una disyunción exclusiva que a diferencia de los conectores anteriores es binario. Si bien, la disyunción inclusiva es de un uso común en Matemática, y la exclusiva ni se menciona, se la introduce a los efectos de que el estudiante pueda comprender totalmente el carácter inclusivo de la disyunción que lleva este nombre por comparación con el comportamiento extremo que reviste la disyunción exclusiva. La implicación o condicional, sin duda es el momento clave de este proceso, ya que es un conector que no es simple de comprender para el estudiante y es el específico de Matemática ya que por lo general todas las proposiciones matemáticas poseen la estructura de una implicación o doble implicación. El único caso que el estudiante puede entender rápidamente es el más elemental y es el caso de antecedente y consecuente verdadero. La introducción del ejemplo: *'Si apruebo el examen, entonces te presto el apunte'* (Rojo, 1994) y su análisis caso por caso, lleva de acuerdo a la discusión generada con el estudiante a repensar nuevos ejemplos, de forma de llegar a concluir la caracterización del valor de verdad de este conector.

Conclusiones

El enfoque tradicional de la educación matemática, con procesos de comunicación unilaterales y donde no se hace énfasis en la transmisión y comprensión del lenguaje formalizado, trae aparejadas consecuencias negativas. El lenguaje matemático tiene su propia sintaxis la que, en general, no coincide con la del lenguaje común o natural, y es importante tener en cuenta que no existen razones valederas para admitir que el estudiante descubrirá tal sintaxis por sí mismo y sin ningún tipo de apoyo al respecto. La adquisición del dominio de este lenguaje no se logra de forma espontánea, sino que se requiere del ejercicio de acciones mentales que deberían ser desarrolladas en actividades propuestas al estudiante por el docente. Los docentes deberán reflexionar y ser conscientes de la importancia de este lenguaje. El estudiante tiene fuertes creencias sobre una Ciencia Matemática que consiste según su propio lenguaje 'en hacer ejercicios' en el peor de los casos; y en el mejor, que permite resolver problemas que tienen que ver con la cotidianeidad, pero sea como sea, su epistemología es algo muy lejano y hasta inexistente.

La formación del Profesorado es trascendente para el logro de aprendizajes definidos en la comprensión y aplicación del lenguaje matemático ya que no basta con que el profesor de Ciencias en general y de Matemática en particular conozca muchísimos contenidos sobre la ciencia sino que conozca más allá de tales contenidos y comprenda a estos desde la filosofía, la historia y la didáctica específica de la matemática, pudiendo entonces realizar una verdadera extrapolación áulica desde "*un saber sabio a un saber enseñado*" (Chevallard, 1998). En el siglo IV A.C., Aristóteles, manifestaba que la naturaleza estaba escrita en lenguaje matemático, además de afirmar que el lenguaje cotidiano estaba saturado de ambigüedades, por lo que el lenguaje de la ciencia había que diferenciarlo del cotidiano. Precisamente, gran parte de la importancia que posee la simbología matemática es la carencia de ambigüedades, por lo que las ideas que comunica son de una precisión rigurosa.

El estudiante tiene una idea muy ingenua de la Ciencia Matemática, una idea que actualmente parece anclada en las primeras ideas del niño que adquiere en el ciclo primario, como si el paso por el ciclo medio no existiese. Esta conciencia de la realidad cognitiva de los estudiantes del ciclo medio y de los ingresantes universitarios es la que llevó a una larga y profunda reflexión que desembocó en el proceso de investigación que resultó el marco teórico de este taller.

Referencias bibliográficas

Adúriz – Bravo, A. (2002). Un Modelo para Introducir la Naturaleza de la Ciencia en la Formación de los Profesores de Ciencias. *Pensamiento Educativo*, *30*, 315 – 330

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica*. Buenos Aires: AIQUE.

D´Andrea, R.E.; Sastre Vázquez, P. (2013). Desempeño de estudiantes universitarios en el uso del lenguaje Matemático. En M.E. Ascheri; R.A. Pizarro; N. Ferreyra. (Ed.). *Actas del III Congreso Internacional de Educación en Ciencia y Tecnología/5° Congreso de Educación en Ciencia y Tecnología.* (pp.132 – 133). Catamarca: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Catamarca.

D´Andrea, R.E., Curia, L., Lavalle, A. (2012). *Razonamiento deductivo y validación en estudiantes universitarios*. Alemania: Editorial Académica Española.

González, F. (1998). *La Investigación en Educación Matemática*. Jornadas de Reflexión sobre la Enseñanza de la Matemática. Valencia, Venezuela.

Niss, M. (2003). The Danish KOM Project and possible consequences for teacher education. En R. Strässer, G. Brandell y B. Grevholm (eds.). *Educating for the future. Proceding of an international symposium on matematics teacher education*, (pp.179 – 192). Göteborg: Royal Swedish Academy of Sciences.

Perkins, D. (1995). *La escuela inteligente.* Barcelona: Gedisa.

Pimm, D. (1999). *El Lenguaje Matemático en el Aula*. Madrid: Morata

Radford, L. (2003). On the epistemological limits of language. Mathematical knowledge and social practice during the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics* 52(2), 123–150.

Rojo, A. (1994). *Álgebra I*. Buenos Aires: El Ateneo.

Ruiz, D (2003). *El Lenguaje en Clases de Matemática*. Mérida: Universidad de Los Andes.

Sastre Vázquez, P.; D´Andrea, R.E. (2011). *Análisis del lenguaje matemático en estudiantes ingresantes a Carreras de Ingeniería.* En Santos, N.; Acosta, G.; Aguado, J.L. (Ed.). *Actas del XVI EMCI Nacional y VIII Internacional*. Olavarría: Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

UNA EXPERIENCIA DE FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN EJERCICIO CENTRADA EN LA REFLEXIÓN SOBRE LA PRÁCTICA

Alejandro Angulo Escamilla, John Alba Vásquez
Universidad de La Sabana. (Colombia)
henry.angulo@unisabana.edu.co, john.alba@unisabana.edu.co

Resumen
Se presenta una experiencia en la que nos hemos centrado en la práctica del profesor de matemáticas en ejercicio (de educación inicial, primaria y secundaria), y en el análisis que realiza para planificar y gestionar su acción en el aula, con el fin de buscar la transformación de su propia práctica. Nos hemos propuesto construir un modelo de desarrollo o mejora de competencias profesionales de profesores en ejercicio, que tenga como eje la reflexión sobre la práctica pedagógica profesional.

Palabras clave: formación de profesores en ejercicio, reflexión del profesor, práctica pedagógica, desarrollo profesional del profesor.

Abstract
In this paper, we present an experience in which we have focused on the practice of in-service mathematics teachers (at initial, primary and secondary levels), and on the analysis they make to plan and manage their action in the classroom, in order to transform their own pedagogical practice. We have set out to construct a model for the development or improvement of in-service teachers' professional competences, being the reflection on professional pedagogical practice the main point of the model.

Key words: in-service teachers' training, teacher's reflection, pedagogical practice, teacher's professional development

Introducción

La formación de profesores de matemáticas, en etapa inicial, posgradual o en ejercicio, requiere de una seria reflexión sobre una cuestión central: ¿Qué conocimientos necesita un profesor para enseñar matemáticas? La agenda investigativa orientada por cuestiones acerca del conocimiento del profesor de matemáticas como la anterior, ha sido ampliamente desarrollada en las últimas décadas. Los trabajos seminales de Lee Shulman han decantado en diferentes aproximaciones teóricas (Ball, Thames y Phelps, 2008; Rubio, 2012) que se han interesado en determinar cuál es el conocimiento (matemático-didáctico) que necesita el profesor para enseñar matemáticas, y aunque tales aproximaciones coinciden en que una de las competencias profesionales que debe tener un profesor aquella que le permite describir, explicar, valorar y mejorar procesos de enseñanza y aprendizaje, difieren en cuáles son las herramientas que necesitan los profesores para realizar ese tipo de análisis didáctico (Rubio, 2012).

En nuestras aproximaciones iniciales (Alba, 2015), reconocimos que la formación del profesor de matemáticas en ejercicio debe apuntar a un proceso de profesionalización paulatino, buscando primeramente que el profesor en ejercicio se reconozca como un docente de matemáticas que requiere el desarrollo de competencias matemático-didácticas que le permitan problematizar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y actuar de manera idónea en la gestión de procesos de estudio en el aula. Al respecto de este “actuar idóneo” hemos encontrado herramientas útiles al considerar los niveles de análisis y algunas herramientas propuestas por Pino-Fan y Godino (2015).

La experiencia de tres años en el Énfasis en Docencia para el Desarrollo del Pensamiento Matemático (EDDPMat) de la Maestría en Pedagogía de la Universidad de La Sabana, se constituye alrededor de variadas acciones que buscan, de manera general, provocar que los estudiantes de la Maestría (profesores en ejercicio) desarrollen sus capacidades analíticas y críticas, y sus habilidades de interacción con otros; y que reflexionen sobre su práctica profesional para aprender a partir de la misma, a través de su análisis con base en constructos teóricos de la didáctica de las matemáticas.

Propuesta conceptual y metodológica

El EDDPMat se fundamenta en el trabajo individual y de grupo, e incorpora la actividad investigativa y e interpretativa de lecturas; la cual es confrontada luego con los pares en grupos de discusión, en sesiones colectivas o a través de herramientas virtuales. Los aspectos objeto de análisis y reflexión individuales conciernen a conceptos, teorías o problemas prácticos asociados a la labor docente en matemáticas y pretenden aportar al desarrollo de habilidades de interpretación, razonamiento crítico, comunicación interpersonal, habilidad propositiva, y conocimiento del sistema didáctico.

Nuestra propuesta no busca la realización inmediata de proyectos de investigación asociados a la práctica profesional; busca la formación de profesores indagadores, que estudien, conozcan, ejerciten y reflexionen sobre los métodos para obtener soluciones a las problemáticas que se pueden plantear sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; se busca la profesionalización de los profesores a través de innovaciones didácticas en sus aulas, y reflexiones que provoquen el mejoramiento de sus propias prácticas profesionales.

De manera consistente con los planteamientos realizados, privilegiamos dos estrategias pedagógicas: el *Taller de Homología didáctica* y el *Seminario de Discusión*; caracterizadas por procesos de estudio independiente, diálogo y controversia, análisis de opiniones divergentes, síntesis o formulación de conclusiones, entre otros. Hemos evidenciado que de esta manera los profesores en ejercicio tienen oportunidades para apreciar la complejidad implicada en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Tanto el seminario como el taller se enriquecen con perspectivas metodológicas del marco de Enseñanza para la Comprensión (Blythe, 1999), y se articulan con estrategias tales como los *protocolos de discusión* (Blythe, Allen, Schieffelin, León y Barrera, 2012) y las *rutinas de pensamiento* (Ritchhart, Church y Morrison, 2014).

El Taller de Homología didáctica

En el ámbito educativo, la palabra *taller* ha tenido diferentes acepciones, por ejemplo, se ha concebido como un espacio de trabajo en grupo en el que se realizan procesos de enseñanza-aprendizaje, caracterizados por una enseñanza de carácter tutorial enmarcada en la idea de "aprender haciendo". Un taller consiste en la reunión de un grupo de personas que desarrollan funciones o papeles comunes o similares, para estudiar y analizar problemas y producir soluciones en conjunto. El análisis de las diversas conceptualizaciones de "taller" presentadas por Maya (2007) ha permitido al equipo de trabajo decantar una acepción propia de *taller*, que en el marco del EDDPMat, se entiende como una estrategia pedagógica constituida por un conjunto de actividades que integran y aplican elementos teóricos y el análisis de situaciones, reales o prácticas, de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, con el fin de diseñar alternativas de solución a una serie de situaciones o tareas que se planteen.

El taller se concibe como una estrategia alternativa a las clases magistrales tradicionales, orientada específicamente a resolver interrogantes, dificultades o problemas teóricos, a explicar un constructo teórico de la Didáctica de la Matemática en relación con sus supuestos básicos o posibles aplicaciones con base en información conceptual conocida por los participantes, y cuyo análisis y discusión se realiza con la orientación del equipo de profesores que dirigen el EDDPMat.

Se espera que los talleres se desarrollen de tal manera que en algún momento los participantes comprendan la imposibilidad, ineficiencia y falta de validez de un "recetario", así como la necesidad de conocer y contrastar diferentes teorías que estudien problemas particulares del aprendizaje de las diferentes áreas de las matemáticas escolares, es precisamente en ese momento cuando el taller se constituye como espacio real de reflexión, de fundamentación teórica y de desarrollo de actividades prácticas que contribuye y aporta a la formación profesional de los profesores-estudiantes.

De cada taller resultan productos específicos (no necesariamente materiales), que recogen la capacidad analítica-creadora de los participantes y la relación clara y precisa entre los hechos problemáticos y la teoría, es decir que visibilizan el pensamiento de los participantes; estos productos se organizan o sintetizan ya sea en una plataforma virtual (http://virtual.unisabana.edu.co/) o en el mismo taller, a través de rutinas de pensamiento u otras herramientas para hacer visible el pensamiento (Ritchhart *et al.*,2014).

Roles en el taller de homología

Parece importante resaltar que los profesores coordinadores del taller asumen un rol centrado en el "enseñar a aprender" por medio de las actividades planeadas, articuladas y sistematizadas, y los participantes asumen roles fundamentados en el "aprender a aprender" interactuando con otros en medio de un trabajo cooperativo. Los problemas propuestos en talleres en su mayoría requieren que los profesores-estudiantes asuman el rol de estudiantes de matemáticas, por ello los talleres se denominan de *homología didáctica.*

Al respecto, de acuerdo con Kuzniak (1994), se entiende que las estrategias basadas en la homología se inspiran en que los profesores-estudiantes experimenten como estudiantes de educación inicial, primaria o secundaria, y que los profesores del curso dirijan el taller de acuerdo con sus concepciones sobre lo que debería ser la enseñanza de las matemáticas en tales niveles. De esta manera, se cree que los profesores-estudiantes y los profesores del curso pueden entender mejor los múltiples fenómenos y componentes del aprendizaje de las matemáticas, y tienen oportunidades para apreciar la complejidad implicada y analizar condiciones de enseñanza. Más fundamentalmente, nuestra experiencia señala que las estrategias basadas en la homología parecen ser las que se integran, en primera instancia, a las prácticas de los docentes.

En síntesis, el taller de homología didáctica se basa principalmente en la actividad constructiva del participante, en el "aprender haciendo"; así, el papel que desempeña el docente coordinador del taller consiste en orientar el proceso, asesorar, facilitar información y proveer recursos. En coherencia, se han concebido cuatro fases para la realización de un taller de homología didáctica que se sintetizan en la Tabla 1.

Tabla 1. Caracterización del taller de homología didáctica

Planificación	Esta fase no cubre solamente el planteamiento del tema del taller y de los objetivos del mismo, sino también todas las actividades que los participantes desarrollan fuera de la sesión de clase. La planificación se realiza de manera conjunta a través de reuniones que sostienen los profesores miembros del equipo del EDDPMat.
Implementación	Contempla por lo general dos etapas que constituyen el momento central del taller. *Etapa de grupos:* Los profesores-estudiantes se distribuyen en grupos de trabajo y proceden a resolver un problema, responder una pregunta, discutir una afirmación, definir un objeto matemático, formular una conjetura, justificar una proposición, usar o producir un algoritmo, comunicar una idea, representar una situación, entre otras tareas que son propuestas por los profesores coordinadores del taller. Se basa en la interacción para la construcción de una solución o postura del grupo frente a la problemática planteada.
	Fase plenaria: Posteriormente a la etapa de grupos se desarrolla una discusión grupal general o plenaria, en la cual se presentan las conclusiones, propuestas, críticas o acciones sugeridas por cada grupo de trabajo. Finalmente, se ponen en común las diferentes posiciones individuales y de grupo acerca del tema de estudio, buscando en lo posible identificar posiciones comunes y divergentes, con el propósito de generar una posición del grupo general frente al tema, la cual será el resultado de la comparación y evaluación de las diferentes conclusiones, propuestas y formulaciones teóricas o prácticas a que llegaron los grupos. Esta postura grupal es considerada como conclusión fundamental, y forma parte del saber institucionalizado.
Evaluación:	Con esta etapa se cierra el taller desde la perspectiva de los profesores-estudiantes. En esta etapa se recogen las conclusiones, los diferentes aportes al conocimiento del tema de trabajo. El equipo de profesores coordinadores del taller formulan también sus propias conclusiones y comentarios, ampliando o enfatizando algún tópico particular en caso de ser necesario.

Reflexión	El grupo de profesores genera un espacio para reflexionar sobre lo acontecido en las etapas de realización y evaluación, de manera que se pueda evaluar el cumplimiento de los objetivos de la implementación del taller, y analizar eventuales fallas o aciertos en la orientación del mismo por parte del equipo. Es pertinente evaluar permanentemente el compromiso de los participantes y su actitud frente a la metodología del taller, así como los aportes que ésta les brinda en orden a su formación profesional.

El seminario de discusión

En el EDDPMat se considera el seminario como una estrategia pedagógica caracterizada por procesos de enseñanza y aprendizaje centrados en el estudio independiente, el análisis de opiniones divergentes y formulación de conclusiones, entre otras; lo cual conlleva una construcción o ampliación de conocimiento, y el desarrollo de habilidades, capacidades, competencias o destrezas para abordar un tema teórico de la Didáctica de las Matemáticas o un tema empírico asociado a una problemática de aula. El Seminario se constituye en la posibilidad de practicar los métodos científicos e investigativos de la Didáctica de la Matemática a favor de la formación profesional de los participantes.

La organización de roles en el Seminario es tal que se constituye en una alternativa -casi irremplazable- a la clase magistral, en la cual la actitud del estudiante es muy pasiva, limitada a recibir información elaborada por otro; en contraste, el Seminario se organiza a través de un grupo activo de estudiantes que buscan e indagan por sus propios medios y comparten en un clima que favorezca la interacción, la colaboración, la controversia y la síntesis. Es precisamente esta organización la que familiariza al profesor-estudiante con métodos de investigación y reflexión, ya que tiene una oportunidad invaluable para presentar sus propias elaboraciones, discutir sobre ellas, sustentarlas o defenderlas, escribir para otros o desempeñar diferentes roles, es así como puede desarrollar o fortalecer destrezas, habilidades y competencias tan especializadas como las requiere el profesor de matemáticas. La gestión del Seminario se sintetiza en la Tabla 2.

Tabla 2. Caracterización del seminario de discusión

1. Lectura e interpretación de textos
Los directores o coordinadores del Seminario recomiendan bibliografía pertinente a la temática que se trata en una sesión, la lectura e interpretación es una actividad que desarrollan todos los participantes previamente como parte de su preparación para la sesión y como fundamentación de la planificación de las experiencias didácticas diseñadas.
2. Planificación, implementación y evaluación de experiencias didácticas.
Los profesores-estudiantes diseñan y aplican *experiencias didácticas* que reflejen la interpretación realizada de los textos leídos, ya sean los sugeridos u otros que se consideren pertinentes. El diseño de la experiencia y los resultados de su implementación se presentan en un documento escrito que es el resultado de la reflexión propia, de la investigación, del análisis de información o datos recabados, de la confrontación con otras fuentes, y del cuestionamiento permanente.

3. Presentación y discusión de ideas
Los participantes preparan presentaciones de ideas o situaciones asociadas a la práctica pedagógica, para realizarlas ante el grupo del Seminario. Los coordinadores asignan roles a algunos participantes, se realizan las presentaciones a que haya lugar, se genera discusión, y para finalizar se extraen conclusiones para obtener una síntesis.

Fuente: Elaboración propia

Reflexiones y consideraciones finales

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas son procesos complejos e interdependientes caracterizados por las relaciones que se establecen entre profesor, estudiante y conocimiento matemático, en un contexto particular de actuación, y con unos claros propósitos educativos. Por ello, la gestión de experiencias de enseñanza-aprendizaje (experiencias didácticas), requiere de un cuidadoso análisis, organización y gestión de actividades o tareas en el aula de clase, de manera que se puedan comprender y mejorar tanto la enseñanza como el aprendizaje. El estudio preliminar que realice el profesor en la fase previa a la implementación en aula (*fase de Planificación*), es fundamental para orientar las acciones y decisiones que se tomen en la gestión de la experiencia diseñada.

En la fase de planificación, el profesor hace un análisis preliminar sobre aspectos didácticos de los contenidos matemáticos implicados en la experiencia didáctica que pretende diseñar y gestionar: analiza las preconcepciones, actitudes, creencias, emociones y valores de los estudiantes, las condiciones contextuales, las decisiones sobre elementos del entorno que se deben controlar, los recursos disponibles, los objetos, procesos, procedimientos, definiciones, algoritmos, lenguajes, argumentos o propiedades asociados a los contenidos implicados en las experiencias de enseñanza-aprendizaje, las situaciones problema que generará o propondrá, los ejemplos, representaciones y explicaciones que favorecerá, los medios o recursos que usará, los patrones de interacción y normas reguladoras de los mismos, entre otros. En términos generales, en el análisis preliminar se trata de delimitar, definir y explicitar las comprensiones que se espera desarrollen los estudiantes, las estrategias didácticas que se prevé pueden favorecer el desarrollo de tales comprensiones y los criterios con los cuales se puede valorar su alcance.

En coherencia, entendemos la planificación como un proceso complejo, sistémico y flexible en el cual se analizan, organizan y anticipan las posibles "trayectorias" de enseñanza-aprendizaje, con el propósito de orientar la práctica pedagógica en función del alcance de unas metas de comprensión bien determinadas. Para guiar el análisis preliminar en la planificación de una experiencia didáctica hemos propuesto algunas *preguntas esenciales* y *orientadoras (Tabla 3)* y una *matriz de análisis*, que busca asumir diversidad de "dimensiones didácticas" y niveles de análisis preliminar. La convergencia en tal análisis de los diferentes dominios del conocimiento del profesor y la profundidad con la que se realice pueden ser determinantes no solo en la *implementación* de la misma, sino en la *evaluación* de su "grado" de adecuación, idoneidad y éxito; y proveerán un punto de contraste para *reflexionar* de forma retrospectiva sobre las mejoras que deberían realizarse para favorecer una comprensión cada vez más profunda por parte de los estudiantes.

Tabla 3. Preguntas esenciales y orientadoras

I. Pregunta esencial: ¿Qué quiere realmente que sus estudiantes comprendan?
Preguntas Orientadoras a. ¿Qué vale la pena que sus estudiantes comprendan? b. ¿Qué espera que los estudiantes comprendan específicamente?, ¿Cuáles contenidos espera que exploren y aprendan?, ¿Cómo se pueden clasificar u organizar tales contenidos? c. ¿Qué justifica la enseñanza-aprendizaje del contenido: lenguajes, argumentos, definiciones, habilidades, propiedades, procesos, procedimientos o conceptos implicados? d. ¿Cuáles son las prácticas matemáticas y la red de objetos y procesos activados en dichas prácticas, necesarios para resolver los problemas?
II. Pregunta esencial: ¿Cómo puede desarrollar esas comprensiones?
Preguntas Orientadoras a. ¿Cómo enseñará para que sus estudiantes comprendan? b. ¿Qué acciones concretas orientarán el estudio del contenido, ¿cómo puede reorganizarlas si se presentan dificultades? c. ¿Qué tipos de interacciones didácticas (entre las personas y los recursos), formas de trabajo o patrones de interacción debería implementar para promover las comprensiones esperadas? d. ¿Qué normas condicionan la gestión de la experiencia didáctica?, ¿cómo se establecen y pueden cambiarse para alcanzar comprensiones profundas?
III. Pregunta esencial: ¿Cómo saben usted (profesor) y los estudiantes que efectivamente comprenden?
Preguntas Orientadoras a. ¿Qué comprenden sus estudiantes?, ¿cómo pueden desarrollar una comprensión más profunda? ¿Qué conocimientos previos deben manejar necesariamente los estudiantes?, ¿qué acciones puede realizar para evidenciar que efectivamente los manejan? b. ¿Qué tipo de respuestas espera por parte de los estudiantes?, ¿Qué tipo de errores podrían cometer los estudiantes? c. ¿Cuáles son las principales dificultades que podrían tener los estudiantes?, ¿qué acciones puede emprender para solucionarlas? d. ¿Qué acciones realizará para determinar el "grado de avance" y manifestaciones de comprensión por parte de los estudiantes?

Fuente: Las preguntas esenciales son adaptadas de Blythe (1999) y las orientadoras son elaboración propia.

La investigación didáctica, en particular en didáctica de la matemática, ofrece al profesor dispositivos, técnicas y herramientas teóricas para aproximar respuestas a estos cuestionamientos, y fundamentar sus acciones y decisiones durante las fases del ciclo PIER (*Planificación, Implementación, Evaluación, Reflexión)*, en conocimientos teóricos consistentes sobre el aprendizaje y la enseñanza de la matemática.

Finalmente, consideramos que asumir las acciones del profesor en términos cíclicos, en el marco del ciclo

PIER someramente descrito, permite al profesor ir perfeccionando sus habilidades y ampliando su conocimiento profesional. Será justamente en momentos posteriores a la *fase de implementación* (en las *fases de evaluación* y *reflexión*), cuando el profesor podrá contrastar y comparar lo diseñado con lo ejecutado para mejorar en nuevas intervenciones, y generar conocimiento profesional y mayor competencia didáctica. En ese sentido, reconocemos que el profesor en ejercicio es un sujeto reflexivo, racional, que toma decisiones, emite juicios, tiene creencias y genera rutinas propias de su desarrollo profesional (Schön, 1987), y que por ello debe tener las bases necesarias para reflexionar sobre su propia práctica (Pino-Fan y Godino, 2015), ya que la reflexión se convierte en detonante de aprendizaje permanente en el proceso de profesionalización del profesor de matemáticas (Alba, 2015). Así pues, en nuestra experiencia asumimos la postura de Schoenfeld y Kilpatrick (2008) frente a que "*Una vez hecha habitual la reflexión, puede llegar a ser el principal mecanismo para mejorar la propia práctica*" (p. 348)

Referencias bibliográficas

Alba, J. (2015). Desarrollo de competencias profesionales de profesores de matemáticas en ejercicio: una propuesta de formación desde la reflexión sobre la práctica. En: D'Amore B y Fandiño, M. (Eds.) *Didáctica de la Matemática. Una mirada internacional empírica y teórica* (pp. 29-47) Bogotá: Universidad de la Sabana.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education,* 59(5), 389-407.

Blythe, T. (1999). *La enseñanza para la comprensión: guía para el docente*. Buenos Aires: Paidós.

Blythe, T., Allen, D., Schieffelin, B., León, P. y Barrera, X. (2012). *Observar juntos el trabajo de los estudiantes: una guía para mejorar la enseñanza y el aprendizaje.* Bogotá: Universidad del Rosario.

Kuzniak, A. (1994). *Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré.* Tesis doctoral no publicada. Université Paris VII.

Pino-Fan, L., y Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87-109.

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos.* Tesis doctoral no publicada. Universitat de Barcelona

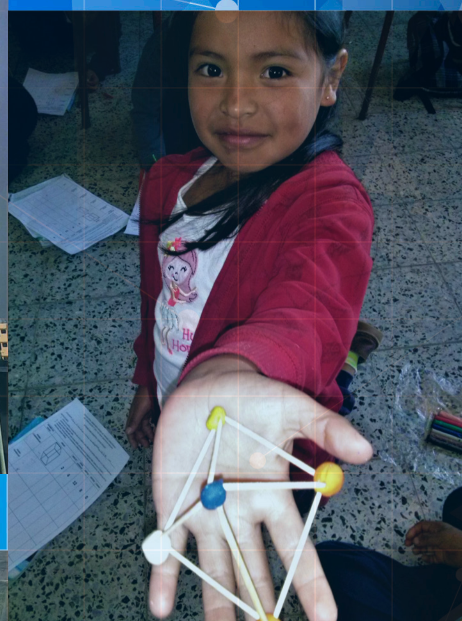
Ritchhart, R., Church, M. y Morrison, K. (2014). *Hacer visible el pensamiento. Cómo promover el compromiso, la comprensión y la autonomía de los estudiantes.* Buenos Aires: Paidós.

Schoenfeld, A., y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of profiency in teaching mathematics. En D. Tirosh, y T. L. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354) Rotterdam: Sense Publishers

Schön, D. (1987). *Educating the reflective practitioner. Toward a new desing for teaching and learning in the professions.* San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

SECCIÓN 5

USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS



FORMAÇÃO CONTINUADA A DISTÂNCIA DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA E O USO DE OBJETOS DE APRENDIZAGEM

Fábio Henrique Patriarca, Nielce Meneguelo Lobo da Costa
Universidade Anhanguera de São Paulo, UNIAN. (Brasil)
patriark@uol.com.br, nielce.lobo@gmail.coJ

Resumo
Este artigo refere-se à uma pesquisa documental desenvolvida em um Programa de formação continuada a distância para professores de Matemática do Ensino Médio de São Paulo, Brasil. Um dos objetivos foi o de identificar as possibilidades de integração de tecnologia ao ensino de trigonometria viabilizadas pela formação continuada. O suporte teórico, quanto à tecnologia educacional, veio de estudos de Almeida e Valente, quanto à formação continuada, foi dada pelas pesquisas de Imbernón. A metodologia qualitativa foi análise documental, na perspectiva de Gil, a partir de categorias emergentes. No artigo analisa-se a abordagem feita, no processo formativo, para o uso em sala de aula de um objeto de aprendizagem denominado “A Dança do Sol” e explicita-se suas possibilidades para ensinar trigonometria. Em conclusão, o estudo desse objeto de aprendizagem auxiliou os cursistas a estabelecerem relações entre o ensino de trigonometria e a tecnologia evidenciando, por meio de *videoaulas* e atividades, formas de utilizá-la ao desenvolverem o Currículo Oficial do Estado de São Paulo.

Palavras chave: Objeto de Aprendizagem. Trigonometria. Ensino de Matemática

Abstract
This paper refers to a documentary research developed in a Continuous Distance Learning Program for the High School Mathematics Teachers of São Paulo, Brazil. One of the aims was to identify the possibilities of technology integration in the teaching of trigonometry enabled by the Continuous Education Course. Studies of Almeida and Valente about educational technology and Imbernón’s researches related to the continuous education had supported this research. The documentary analysis constituted the qualitative methodology, from Gil's perspective, using emerging categories. The paper analyzes the approach applied in the continuous education process in the classroom by using a learning object called "The Dance of the Sun"; and explains its possibilities in order to teach trigonometry. To sum up, the study of this object helped the participating teachers to establish relationships between trigonometry teaching and technology, showing through videos and activities, ways of using it when developing the Official Curriculum of the State of São Paulo.

Keywords: learning object, trigonometry, Mathematics teaching

Introdução

Neste artigo discutimos uma pesquisa desenvolvida em um Programa de formação continuada a distância para professores de Matemática que atuam em escolas estaduais de São Paulo, Brasil, denominado

M@tmídias. Esse Programa da Escola de Formação e Aperfeiçoamento de Professores do Estado de São Paulo, Brasil – EFAP/SP teve a finalidade de oferecer formação continuada a distância aos docentes de Matemática do Ensino Médio, segmento final da Educação Básica, o qual envolve alunos na faixa etária dos 15 aos 17 anos. O Programa M@tmídias, com a finalidade de integrar a tecnologia ao ensino, abordou o uso de objetos de aprendizagem na aula de Matemática. Objetos, tais como, vídeo, áudios, softwares e experimentos, foram aliados às Situações de Aprendizagem encontradas nos Cadernos do Aluno e nos Cadernos do Professor, que são materiais didáticos referentes ao Currículo Oficial do Estado de São Paulo. O Caderno do Aluno é material impresso distribuído aos estudantes, no qual estão propostas várias Situações de Aprendizagem a serem estudadas. O Caderno do Professor, por sua vez, é material impresso que contém indicações para a abordagem pedagógica das Situações de Aprendizagem recomendadas para auxiliar o aluno a construir as competências e habilidades indicadas no referido Currículo (Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, 2014).

O Programa M@tmídias foi uma formação continuada oferecida pela EFAP/SP com a intenção de auxiliar o professor do Ensino Médio a integrar a tecnologia ao desenvolver o Currículo Oficial do Estado de São Paulo, publicado em 2011. Três cursos a distância contemplando todos os conteúdos de Matemática do Ensino Médio foram oferecidos neste Programa.

A estrutura dos cursos se compunha de cinco módulos. Em cada um dos quatro primeiros módulos eram estudados três objetos de aprendizagem e, a cada objeto de aprendizagem, foi atrelada uma atividade avaliativa que poderia ser: ou um fórum de discussão ou uma questão dissertativa ou uma questão objetiva. O módulo cinco propôs uma atividade de vivência, na qual os cursistas deveriam aplicar com seus alunos um dos objetos de aprendizagem, associado sempre a uma situação de aprendizagem dos materiais curriculares – Caderno do Professor e do Aluno, documentar a aplicação e produzir um relatório a ser anexado no Ambiente Virtual de Aprendizagem AVA – EFAP, dos cursos.

O foco deste artigo está no curso M@tmídias 2, segunda edição, ocorrida em 2014, mais precisamente no módulo I, que abordou o conteúdo de Trigonometria no qual são estudados três objetos de aprendizagem. Participaram dessa edição do curso, 600 professores que preferencialmente lecionavam na segunda série do Ensino Médio, divididos em 15 turmas, com um professor tutor responsável por turma.

Uma síntese dos conteúdos abordados no Programa M@tmídias está na figura 1.

	M@tmídias 1	***M@tmídias 2***	***M@tmídias 3***
Módulo 1	***Números e Sequências***	***Trigonometria***	***Geometria Analítica***
Módulo 2	***Funções***	***Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares***	***Equações Algébricas e Números Complexos***
Módulo 3	***Funções Exponenciais e Logarítmica***	***Análise Combinatória e Probabilidade***	***Funções***
Módulo 4	***Geometria Plana***	***Geometria Métrica Espacial***	***Estatística***
Módulo 5	***Atividade de Vivência***	***Atividade de Vivência***	***Atividade de Vivência***

Figura 1: Conteúdos Estudados no Programa M@tmídias
Fonte: Patriarca. F.H.(2016) p. 99

Vale ressaltar que hoje temos acesso a diversos recursos, tais como, vídeos, software, experimentos, áudios que denominamos de objetos de aprendizagem, que encontramos em vários repositórios, com todo esse material disponível, trabalhado nas aulas, podemos ter o aluno como protagonista de seu aprendizado, construindo conhecimento com a tecnologia nas aulas.

Afinal, o que são objetos de aprendizagens? Apesar de se tratar de um termo relativamente comum no meio escolar e cujo entendimento beira o senso comum, a definição do termo "objeto de aprendizagem" varia muito entre autores e instituições. Buscando uma resposta para esse questionamento, nos deparamos com várias definições educacionais, computacionais, pois ainda não existe um consenso universal aceito.

A definição de objeto de aprendizagem dada pelo repositório Rived é a utilizada no curso M@timídas 2, qual seja, "Um objeto de aprendizagem é qualquer recurso que possa ser reutilizado para dar suporte ao aprendizado. Sua principal ideia é 'quebrar' o conteúdo educacional disciplinar em pequenos trechos que podem ser reutilizados em vários ambientes de aprendizagem" (http://rived.mec.gov.br/site_objeto_lis.php).

De todo modo, "seja qual for a definição", podemos afirmar que os objetos de aprendizagem são importantes materiais nos processos de ensino e de aprendizagem, por possibilitar a simulação de fenômenos, viabilizar experimentações e, enfim, serem utilizados com várias abordagens nos ambientes virtuais de aprendizagem.

Referencial Teórico

A fundamentação teórica quanto à integração de tecnologia foi subsidiada pelas ideias de Almeida e Valente; em relação à formação continuada, o apoio veio de Imbernón.

Segundo (Almeida & Valente, 2011), para que ocorra a integração de tecnologia ao currículo escolar "... é preciso implantar mudanças em políticas, concepções, valores, crenças, processos e procedimentos, que são centenários e que certamente vão necessitar de um grande esforço dos educadores e da sociedade como um todo" (p.75). Para tanto, segundo os autores, há necessidade de se investir na formação permanente e contextualizada dos educadores, pois "... o currículo que está sendo trabalhado hoje foi desenvolvido para a era do lápis e do papel. As Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação - TDIC - jamais serão integradas às atividades curriculares se elas continuarem explorando somente o lápis e o papel para representar e explicitar os conhecimentos dos alunos." (p.76). Assim, entendemos que é fundamental criar condições para que os professores possam refletir e (re)construir a própria prática com o uso das TDIC, visto que as mudanças pedagógicas e curriculares devem ser de total responsabilidade dos profissionais. Outro entrave para a implementação das mudanças nos procedimentos educacionais é a pouca compreensão por parte dos educadores sobre o que significa aprender. Em relação às mudanças da sociedade como um todo: A parceria entre o setor público e o privado, empresas, deve ser inevitável, uma vez que a educação está se tornando um importante componente no desenvolvimento do país e certamente é função de todos. "Cabe saber o que será feito e quando!" (Almeida & Valente, 2011).

Corroboramos com as ideias de Almeida e Valente, pois para conseguirmos integrar tecnologia é necessária uma formação continuada dos educadores, um aperfeiçoamento no currículo, um espaço para que o professor possa refletir e preparar suas aulas, de modo a construir com a tecnologia suas sequências de atividades e também um espaço físico para que possa trabalhar com seus alunos e que todos possam participar.

Para (Imbernón F. , 2009), a formação continuada, deve "fomentar o desenvolvimento pessoal, profissional e institucional do professorado, potencializando um trabalho colaborativo para mudar a prática" (p.49). Para esse autor, são necessárias duas condições principais para que verdadeiramente na formação continuada aconteça: a reflexão sobre a prática em sala de aula e uma maior autonomia na formação, com direta intervenção dos Professores. Com essas condições, uma formação continuada deve:

ser organizada de modo a perpassar por uma compreensão do currículo, das grandes mudanças no contexto social, da rápida implantação de novas tecnologias da informação, da integração escolar de crianças diferentes, da forma de organização das instituições escolares, do respeito ao próximo e do fenômeno intercultural. (Imbernón, 2000, p.48)

As ideias de (Imbernón F. , 2009)só corroboram com a necessidade cada vez mais evidente hoje de que a formação continuada tenha começo meio e fim e possa realmente, em seu contexto, suprir as demandas de cada grupo a ser formado.
Para (Imbernón F. , 2009) uma formação continuada deve centrar-se em cinco princípios:

1. A reflexão prático-teórica sobre a própria prática, mediante uma análise da realidade educacional e social de seu país, sua compreensão, interpretação e intervenção sobre a mesma realidade. A capacidade dos professores de gerar conhecimento pedagógico por meio da análise da prática educativa.

2. A troca de experiências, escolares, de vida, etc. e a reflexão entre indivíduos iguais para possibilitar a atualização em todos os campos de intervenção educacional e aumentar a comunicação entre os professores.
3. A união da formação a um projeto de trabalho, e não ao contrário (primeiro realizar a formação e depois um projeto).
4. A formação como arma crítica contra práticas laborais como a hierarquia, o sexismo, a proletarização, o individualismo e etc., e contra práticas sociais, como a exclusão e a intolerância.
5. O desenvolvimento profissional da instituição educacional mediante o trabalho colaborativo, reconhecendo que a escola está constituída por todos e coincidimos na intenção de transformar essa prática. Possibilitar a passagem da experiência de inovação isolada e celular para a inovação institucional.

Com isso, na profissão docente, o Professor necessita mobilizar vários conhecimentos a fim de planejar, desenvolver e avaliar suas ações pedagógicas trata-se de um contexto de atuação.

No tocante da Formação *Online* do professor, (Almeida & Valente, 2011) enfatiza que os desafios atuais, as inovações e demanda de formação inicial e continuada ao longo da vida, somados à necessidade de preparar profissionais flexíveis, dinâmicos, com disponibilidade para trabalhar em equipe e autonomia para buscar informações e resolver problemas, associados à disseminação do acesso às TIC, reabriram as discussões sobre as possibilidades viabilizadas pela aprendizagem a distância.

As ideias de (Almeida & Valente, 2011) vêm ao encontro da necessidade do mercado de trabalho hoje, pois a cada dia que passa maior é a necessidade de formar professores mais reflexivos e dinâmicos para atender à realidade de nossos alunos que estão o tempo todo com a mão na tecnologia. Assim sendo, como insiste (Imbernón F. , 2009)é fundamental preparar o professor no processo de mudança social no qual nos encontramos e para o processo de mudança educacional.

Metodologia

A metodologia da pesquisa foi a documental na perspectiva de (Gil, 2008) e os procedimentos metodológicos foram: 1) Coleta dos dados históricos do Programa M@tmídias, tais como, o projeto básico e o histórico da Escola de Formação e Aperfeiçoamento de Professores do Estado de São Paulo – EFAP, propositora do Programa. 2) Seleção e Organização dos materiais estocados no ambiente virtual de aprendizagem AVA– EFAP do Programa, relativos à segunda edição do Curso, M@tmídias 2 – Objetos de Aprendizagem multimídia para o ensino de Matemática, quanto ao conteúdo de Trigonometria 3) Tratamento e análise interpretativa dos dados por categorização pelo método de análise de conteúdo e análise documental segundo (Bardin, 2011). As categorias emergiram dos dados pesquisados, depois de elaboradas tabelas em Excel, leitura dos fóruns e atividades de vivência, sendo consideradas as seguintes como categorias de análise:

- Possibilidade de integração de tecnologia ao currículo, referido pela sigla (PIC);
- Possibilidade de integração de tecnologia ao ensino de Trigonometria, referido pela sigla (PIE);

Neste artigo analisamos um dos objetos de aprendizagem estudado no módulo de Trigonometria, particularmente quanto à forma de abordagem e o subsídio que oferece ao professor para a integração de tecnologia ao ensino de conteúdos do currículo. O objeto analisado é o vídeo “A Dança do Sol”.

Objeto de Aprendizagem A Dança do Sol

O Curso M@tmídias 2 apresenta como primeiro objeto de aprendizagem o vídeo “A Dança do Sol” e ressalta seu potencial para a integração da tecnologia à prática do ensino de Trigonometria. Esse vídeo aborda periodicidade e gráficos cartesianos de funções periódicas e está em consonância com a Situação de Aprendizagem 1 (SA 1) do Caderno do Professor e do Aluno (Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, 2014) . O objetivo desse vídeo é observar a movimentação que o Sol faz no céu, a sua “dança” entendendo assim o fenômeno Analema, como mostra a figura 2.

Figura 2: Ilustração do Movimento do Sol, Analema
Fonte: Vídeo a Dança do Sol, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1080 04/01/2016

Na figura 1 observamos uma explanação no vídeo feita sobre o movimento do Sol no céu, o qual se assemelha a uma "dança" chamada de Analema. No caso, esse movimento tem explicações na cinemática pela dinâmica do movimento da Terra em relação ao Sol e às estrelas. Há um Guia do Professor (disponível em: m3.ime.unicamp.br) que descreve características do objeto e possibilidades para explorações didáticas.

No curso M@tmídias 2 os professores-participantes foram orientados, por uma videoaula quanto à condução da aula e as possíveis discussões e abordagens ligadas a esse objeto de aprendizagem. A videoaula se propôs a estabelecer uma conexão entre o Objeto Dança do Sol (vídeo) e a Situação de Aprendizagem 1 do Caderno do Professor da 2.ª série (volume I). Tal Situação se dedica ao estudo de fenômenos periódicos e de gráficos cartesianos de funções periódicas e utiliza para isso o movimento aparente do Sol e sua relação com o comprimento de sombras. Apesar de não ser frequente tal estudo nas aulas de Matemática, para entender a periodicidade do Sol durante o ano é necessário que se observe o céu para vivenciar como ele se posiciona no céu ao longo de um dia e de um ano. Essa Situação de Aprendizagem do Caderno do Professor foi conectada com o estudo do vídeo a Dança do Sol na videoaula. Foi sugerido ao professor a observação do tamanho da sombra de uma haste ao longo de um dia todo, como exposto na figura seguinte (ver figura 3).

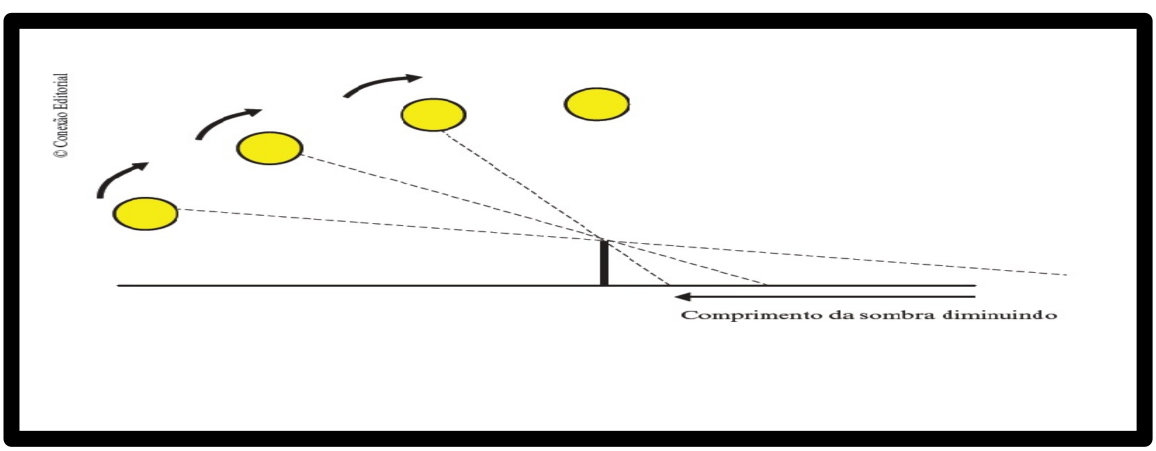


Figura 3: Movimento do Sol em um mesmo dia
Fonte: Caderno do Professor Volume 1 2ª Série EM. p. 15

A atividade propõe observar a sombra, que muda com o movimento do Sol, primeiro gerando sombras mais longas, depois mais curtas e depois mais longas novamente. Com isso um movimento periódico pode ser observado.

Nessa proposta da videoaula de conectar esse Objeto de Aprendizagem ao ensino de Trigonometria, em nosso entender, está sugerida uma atividade para que o professor desenvolva com seus alunos de modo a integrar a tecnologia, saindo do abstrato e mostrando o concreto para que o conceito de periodicidade seja construído.

A videoaula finaliza com a apresentação de outras atividades que ficam como sugestão para, a critério do professor, ser utilizada com seus alunos.

Entendemos que no curso a discussão sobre a SA 1, pode ter auxiliado o professor na construção de conhecimento específico do conteúdo, principalmente quanto à compreensão da temática da periodicidade. Para que o professor aplicar esse objeto de aprendizagem com seus alunos é necessário que tenha tal conhecimento para que possa compreender o que vai ensinar e estabelecer relações entre os tópicos, uma vez que as três primeiras Situações de Aprendizagem do Caderno do Professor abordam a temática de periodicidade e também o conhecimento do currículo, que é o necessário para fazer articulações com outras disciplinas. Aqui, nesse caso, o professor cursista teve a oportunidade de observar uma maneira de integrar a tecnologia ao currículo e, além disso, articular o conteúdo de Trigonometria com as disciplinas de Física e de Geografia, no caso, abordando a questão do movimento do sol no céu e suas causas e discutindo o que é o solstício de inverno e solstício de verão.

Vale considerar que, em relação ao aluno, articular os conteúdos dentro da Matemática e com outras disciplinas, torna mais significativo o aprendizado.

Conclusão

Concluímos a partir da análise do objeto de aprendizagem “A Dança do Sol”, que este apresenta potencial para auxiliar a integrar tecnologia às aulas de Trigonometria, uma vez que, a utilização desse vídeo, leva o aluno a ver na prática uma aplicação real da importância do movimento do Sol no céu. O professor pode levar o aluno a vivenciar o vídeo e a construir sua sequência didática. O seu uso em sala de aula está diretamente ligado ao que (Almeida & Valente, 2011) considera pertinente para integrar tecnologia nas escolas, os autores relatam que é necessário que o professor passe por uma formação sequencial, e tenha espaço para que possa refletir sobre a sua pratica. Trabalhar com os objetos de aprendizagem, não é apenas apresentar aos alunos, simplesmente mostrar uma única vez; é necessário explorar, relacionar, construir e analisar para que os alunos consigam compreender e dar significado aos conteúdos neles abordados.

Sobre a Formação Continuada, podemos observar que o primeiro princípio de Imbernón, qual seja, A reflexão prático-teórica sobre a própria prática, mediante uma análise da realidade educacional e social de seu país, sua compreensão, interpretação e intervenção sobre a mesma realidade. A capacidade dos professores de gerar conhecimento pedagógico por meio da análise da prática educativa, é bem presente, pois apresentando e discutindo esse vídeo aos alunos, é possível relacionar a teoria com a prática no conteúdo de Trigonometria.

Entendemos também que foi possível ao cursista se apropriar do objeto de aprendizagem "A Dança do Sol" e experimentá-lo com seus alunos, o que auxiliou cada professor cursista a diversificar sua aula, a deixar real no sentido prático. O estudo desse objeto de aprendizagem evidenciou ao cursista formas de utilizar a tecnologia relacionada ao Currículo Oficial do Estado de São Paulo e, as videoaulas e atividades auxiliaram a estabelecer relações entre ensino e tecnologia.

Referências bibliográficas

Almeida, M. E., & Valente, J. A. (2011). *Tecnologias e currículo: trajetórias convergentes ou divergentes?* São Paulo: Paulus.

Bardin, L. (2011). *Análise de Conteúdo* (1 ed.). (L. A. Reto, & A. Pinheiro, Trads.) São Paulo: Edições 70.

Gil, A. C. (2008). *Como elaborar projetos de pesquisa.* São Paulo: Atlas.

Imbernón, F. (2000). *Formação docente e profissional: formar-se para a mudança e a incerteza.* São Paulo: Cortez.

Imbernón, F. (2009). *Formação permanente do professorado – novas tendências.* São Paulo: Cortez.

Patriarca, F. H. (2016). *Contribuições do Programa M@tmídias para a Integração de Tecnologia às Aulas de Trigonometria no Ensino Médio.* São Paulo: Universidade Anhanguera de São Paulo.

Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. (2014). *Caderno do Professor e Caderno do Aluno.* São Paulo: FDE.

ESTUDIO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN A TRAVÉS DE LA MODELACIÓN-GRAFICACIÓN EN SITUACIONES DE MOVIMIENTO

Fredy De La Cruz Urbina, Hipólito Hernández Pérez
Telebachillerato en Chiapas, Universidad Autónoma de Chiapas. (México)
frecu@hotmail.com, polito_hernandez@hotmail.com

Resumen
El concepto de función es un elemento clave en el bachillerato, sin embargo, su inclusión en el sistema didáctico lo ha desprovisto de elementos que le dieron origen (el estudio de la variación, la identificación de parámetros, el establecimiento de reglas) y esto dificulta su aprendizaje (Arrieta, 2003; Suárez, 2008; De la Cruz, 2015). Esta propuesta, en el marco de la Teoría Socioepistemológica, problematiza este constructo y articula la participación del humano con Situaciones de Modelación-Graficación del movimiento, para generar argumentos y significados de este objeto matemático desde la experiencia que viven los participantes inmersos en la situación. Se pretende que los profesores vivan esta propuesta y se debata su pertinencia como estrategia de enseñanza-aprendizaje en el aula.

Palabras clave: función, graficación, movimiento, tecnología

Abstract
The concept of the function is a key on high school level, however, its inclusion in the didactic system has deprived to it the elements that gave origin to it and that difficult its learning. The present proposal on the framework of the Socioepistemology Theory problematizes this construct and joint the human´s participation with Situations of Modelling-Graphing of the movement, for generate arguments and meanings about this mathematical object from experience of the participants immersed in the situation. The intention is the teachers live this proposal and discuss its relevance as a teaching-learning strategy in the classroom.

Key words: function, graphing, movement, technology

Antecedentes

Este artículo tiene como antecedente la investigación que documentamos en De la Cruz (2015), donde se abordó el planteamiento de modelos matemáticos que representan una situación o fenómeno y específicamente el caso de la función cuadrática. Como resultado de esta investigación se ha observado que la Modelación-Graficación (MG) en situaciones de movimiento favorece el estudio del concepto de función a través de los siguientes elementos: identificación de variables, relación funcional, variación, razón de cambio y el tránsito entre sus formas de representación. Con base en esa experiencia se implementó un taller en la pasada Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 31), con la finalidad de compartir con colegas una propuesta de intervención para resignificar el concepto de función, dentro de los fines también se buscaba favorecer un espacio de discusión y reflexión para debatir los alcances y limitaciones de esta propuesta y retomar ideas que ayuden a mejorarla.

La propuesta analizada en el taller parte de los planes de estudio que rigen el nivel medio superior en México (Secretaría de Educación Pública, 2013), donde puede observarse que el concepto de función es un elemento clave en la matemática escolar. Es importante señalar que también en los planes de estudio se propone la modelación, el uso de las gráficas y herramientas tecnológicas como estrategia de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, existe poca o nula vinculación con la participación del alumno y su entorno, es decir, las gráficas que se estudian en la escuela no son de una situación o fenómeno de *lo cotidiano*: “En la escuela se siguen construyendo lugares artificiales donde suceden cosas que en la vida cotidiana no suceden o no tienen razón de ser” (Arrieta y Díaz, 2015, p. 24). Se considera a *lo cotidiano* como el conocimiento que proviene de la cultura, de la experiencia o de lo vivido o, en otras palabras, de acciones, argumentaciones, actividades y prácticas que participan de otros ámbitos de la actividad humana (Cantoral, 2013; Cordero, Gómez, Silva-Crocci & Soto, 2015). En general, son estos aspectos los que se buscan favorecer para construir conocimiento matemático.

Aspectos teórico-metodológicos

La propuesta que se discutió en el taller busca articular los objetos matemáticos con situaciones de movimiento y la participación del humano para favorecer el desarrollo del Conocimiento Matemático (CM) desde su uso, es decir, se pretende construir argumentos y significados de los conceptos matemáticos que sirvan para intervenir en la situación, o bien como dice Arrieta (2003), que sean usados con intención. Para lograr esto, la teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) ha contribuido en la construcción de marcos de referencia en los cuales la matemática escolar se resignifique, para ello considera a las *prácticas sociales* como las generadoras del CM (Morales y Cordero, 2014).

Por otra parte, Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto (2015) señalan que se considera la experiencia que posee el individuo en la construcción de su conocimiento en una situación específica, lo cual el discurso matemático escolar ignora. Parafraseando a los autores, existe una ruptura o desvinculación entre la matemática escolar y el conocimiento del ser humano, el discurso matemático escolar soslaya la participación del alumno y la situación o fenómeno, y desde el marco socioepistemológico estos son elementos fundamentales para la reconstrucción del CM.

Es así que para intervenir en el sistema didáctico y favorecer la *resignificación* del concepto de función se ha propuesto una secuencia de MG con sensores de movimiento, que tiene como fundamento la TSME (Cantoral, 2013) y específicamente retoma aspectos de la investigación de Suárez (2008) como sustento metodológico. Desde esta propuesta se favorece a través de la MG como práctica social (PS), el uso de la representación gráfica de fenómenos de movimiento en su aspecto funcional, es decir, sirven como herramientas de argumentación para intervenir en el fenómeno. Desde nuestra perspectiva la PS es entendida como aquella estructura que da soporte a las actividades y tareas que involucran la participación del humano y el uso de dispositivos didácticos (calculadoras graficadoras, emulador y sensores de movimiento) en una situación específica, en este caso: el movimiento.

Es importante mencionar que desde el enfoque socioepistemológico, no se trata solo de diseñar una situación para ver cómo se aprende un tema, sino para ver qué contenido matemático se pone en juego en la situación. Es decir, se trastoca la matemática a partir de la situación de MG (en nuestro caso), de donde emergen los objetos matemáticos y sus posibles conexiones. Se busca en otras palabras, crear un diálogo entre la matemática escolar y el conocimiento matemático del cotidiano, de acuerdo con lo que dicen otros autores (Morales y Cordero, 2014; Cordero, et al., 2015).

En ese sentido, en la figura 1 se muestra el esquema de la situación (SDM) que consiste en una serie de actividades para desarrollar gráficas a partir de la modelación del movimiento y el uso de dispositivos tecnológicos (DT); lo importante aquí son las argumentaciones que los participantes van construyendo a lo largo del proceso con la generación de las gráficas, que se constituyen en el modelo o herramienta para intervenir en el fenómeno (Mo). La propuesta es adaptada del trabajo de Suárez (2008), en el cual se ponen en funcionamiento los elementos epistemológicos: *realizaciones múltiples, identificación de patrones, ajustes y desarrollo del razonamiento.* Desde nuestra perspectiva la modelación-graficación (MG) parte del fenómeno e involucra al humano, los dispositivos tecnológicos (calculadoras, emulador, sensor de movimiento, proyector y computadora) y los objetos matemáticos (OM), para generar argumentos y significados que expresarán el uso del conocimiento matemático (Suárez, 2008; Cordero, Cen y Suárez, 2010; Buendía, 2011; Cen, 2015).

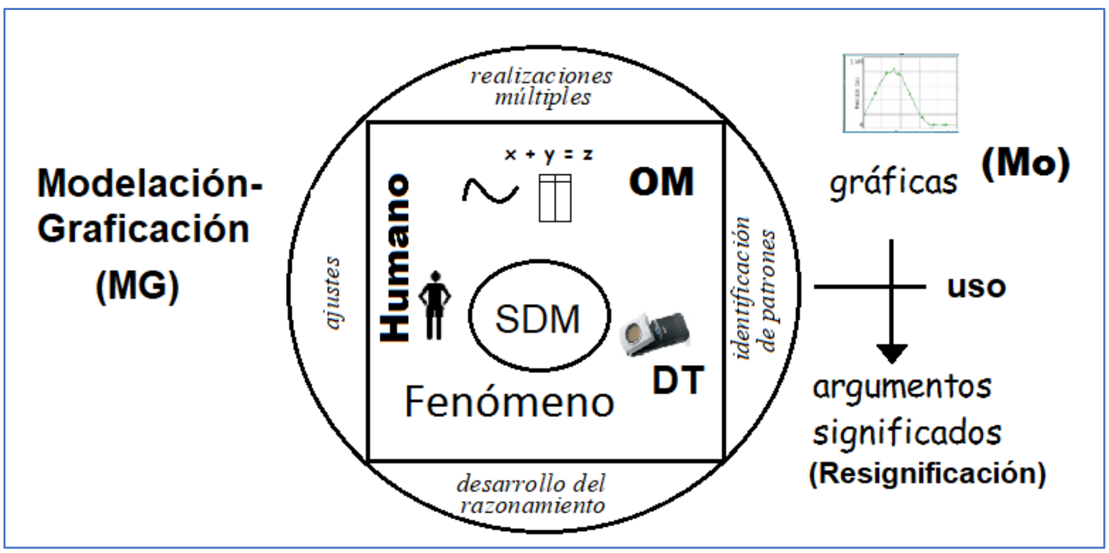


Figura 1. Esquema de la situación de modelación del movimiento. (Elaboración propia)

Aspectos del diseño

La propuesta consta de tres fases de implementación. La primera fase la hemos llamado de inducción, en ella los participantes por medio de actividades de visualización y el análisis numérico identifican patrones, establecen reglas, construyen elementos de las gráficas y aspectos de variación para introducirse en el estudio del fenómeno. En la segunda fase, se proponen actividades de familiarización para que los participantes conozcan los dispositivos tecnológicos y su uso, se plantean situaciones de modelación del movimiento de una persona, se espera que los participantes reconozcan los elementos trabajados en la etapa anterior y los vinculen con la SDM: identifiquen variables, establezcan relaciones y reconozcan patrones. Por último, en la tercera fase de MG, los participantes con el uso de la tecnología generan modelos específicos y los interpretan, intervienen en el fenómeno a través de las formas de representación como herramientas y predicen aspectos del fenómeno, se trabajan aspectos del uso de la gráfica y el análisis numérico para establecer relaciones funcionales.

Es importante mencionar que, desde la TSME, las argumentaciones de los participantes juegan un rol importante porque es a través del conocimiento que se pone en uso donde se generan los significados de los objetos matemáticos, en ningún momento se declaran, sino que, se construyen desde la situación y en colectivo. Es decir, desde la experiencia que viven los participantes inmersos en la situación y las discusiones que se dan entorno a lo vivido. Conviene destacar el rol que representa el profesor quién guía y acompaña en el proceso, su intervención en ese sentido se basa en el planteamiento de preguntas que trastocan el entendimiento y conocimiento de los participantes, es decir, problematiza el conocimiento matemático que se quiere favorecer a través de su uso, o en otras palabras provoca acciones intencionadas sobre el aspecto funcional de los objetos matemáticos.

Algunos resultados

A continuación, se comentan algunos resultados sobre la experiencia del taller en RELME 31. En este taller se contó con la participación de diez profesores: tres de nivel básico, cuatro de nivel medio, dos de nivel superior y un estudiante de maestría; donde se discutió principalmente el rol del profesor en la SDM, en el cual se destacó la importancia de propiciar la participación de los alumnos estableciendo preguntas motivadoras en momentos específicos de la SDM. La intención de las preguntas debe ser guiar al alumno a descubrir por sí mismo el *uso* del conocimiento matemático.

En ese sentido, algunas propuestas que sugieren los profesores son las siguientes: identificar en los diferentes momentos de la SDM, qué cambia, cómo cambia y cuánto cambia. Hacer que el alumno piense y haga un bosquejo previo de cómo es la gráfica de una situación específica, o bien partir de las gráficas para que el alumno argumente qué situación modela la gráfica. En otras palabras, cómo debe ser el movimiento para producir una gráfica como las mostradas en la figura 2. Respecto de los elementos concretos de la gráfica, se puede plantear en lo lineal: ¿qué significado tiene la pendiente?, ¿qué significado tiene el sentido de una recta? y ¿qué cambia cuando hacemos *variar* una variable?

Por otro lado, se pueden comparar diferentes gráficas para discutir ¿qué se interpreta o se entiende de una intersección entre gráficas? ¿dónde es más rápido o lento el movimiento de acuerdo con las gráficas? Respecto de lo cuadrático, también se puede cuestionar qué significado tienen los elementos de la gráfica: concavidad, vértice, pendiente, lado recto, etcétera, de qué depende que la gráfica sea más abierta o cerrada, dónde hay un máximo o mínimo y qué pasa en esos puntos. Es importante mencionar que los profesores consideraron el nivel educativo en el cual se desenvuelven y consideran que la SDM que se vivió y discutió involucra varios conceptos matemáticos que son vistos desde el nivel básico hasta el superior, por lo cual, se puede adaptar y explorar la SDM de acuerdo al contexto escolar.

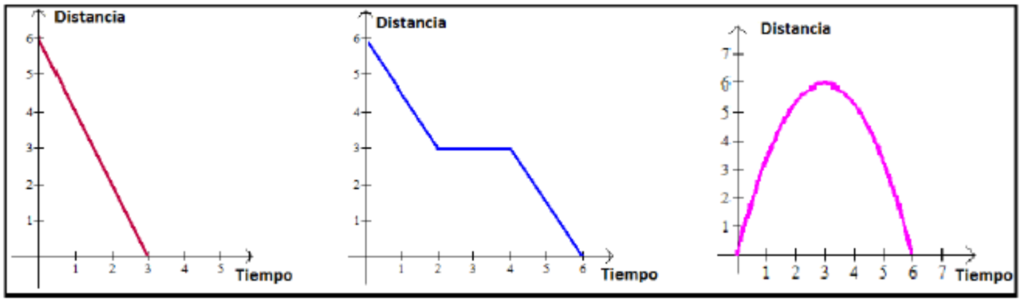


Figura 2. Problematización del saber ¿Cómo debe ser el movimiento para producir estas gráficas? (Elaboración propia)

Conclusiones

Entre los elementos que construyeron los profesores con la SDM se puede mencionar la importancia de contar con referentes para dar sentido a la argumentación, es decir, reconocer qué elementos son necesarios para dar sentido a la gráfica. Además, se apreció que la MG juega un papel muy importante como medio para contrastar las propuestas de los participantes con la situación de movimiento, a partir de las realizaciones múltiples se construyen modelos que se resignifican cada vez que se ponen en escena (realizan ajustes y desarrollan el razonamiento) permitiendo la construcción de un patrón o modelo deseado. Los argumentos que construyen los participantes permiten interpretar la gráfica en términos del movimiento, relacionan sus elementos con la situación desarrollando un uso de la gráfica y de la tabla numérica, reconocen patrones y establecen reglas que asociados con los "modelos" permiten tomar decisiones, realizar ajustes e intervenir en el fenómeno. Estas evidencias muestran la *funcionalidad de la gráfica*, que través de su uso se puede resignificar el concepto de función. La resignificación se refiere a la construcción de significados de los objetos matemáticos cuando son usados con intención en situaciones específicas.

Sobre las actividades que realizaron los profesores comentaron que es una propuesta novedosa y potente puesto que, si permite construir conocimiento matemático a partir de la participación de los alumnos y la situación con el uso de los dispositivos tecnológicos, el ambiente que se produce es bastante lúdico e interesante para que los alumnos se conecten con la situación. Argumentaron que otras propuestas que han trabajado en otros talleres, también son lúdicas y muy motivadoras, pero que no están fuertemente ligadas a los objetos matemáticos. Consideran que una desventaja de esta propuesta pudiera ser los costos del equipo que se requiere para su implementación y la familiarización con los dispositivos tecnológicos, en este caso la calculadora-graficadora y el software.

Finalmente, los aspectos que se retoman para mejorar la intervención son los siguientes: trabajar más los aspectos numéricos y algebraicos para conectarlos con lo gráfico, buscar alternativas para "eliminar o reducir" las interferencias del sensor en el levantamiento de los datos, explorar otros tipos de movimientos o situaciones para trabajar otros tipos de funciones y considerar más tiempo en familiarizar a los participantes con la tecnología utilizada, sobre todo dejar que ellos manipulen directamente los dispositivos.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. L. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis doctoral no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Arrieta, J. y Diaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 19-48. doi: 10.12802/relime.13.1811

Buendía, G. (2011). El uso de las gráficas para resignificar elementos de las funciones diferenciales lineales. En R. Rodríguez, E. Aparicio, M. Jarero, L. Sosa, B. Ruíz, F. Rodríguez, J. Lezama y M. Solís (Eds.), *Memoria de la Escuela de Invierno en Matemática Educativa* 13, 100-106. México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, estudios sobre construcción social del conocimiento*. México: Gedisa.

Cen, C. (2015). *Una caracterización del uso de las gráficas con profesores de bachillerato.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios avanzados del IPN. México.

Cordero, F., Cen, C. y Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, (13)2, 187-214.*

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H., & Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Barcelona: Gedisa.

De la Cruz, F. (2015). *Resignificación de la función cuadrática a partir de la modelación - graficación de fenómenos de movimiento*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Chiapas, México.

Morales, A., & Cordero, F. (2014). La Graficación-Modelación y la serie de Taylor. Una Socioepistemología del cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17 (3), 319-345.

Secretaría de Educación Pública. (2013). *MATEMÁTICAS I, SERIE PROGRAMAS DE ESTUDIO*. Recuperado el 11 de noviembre de 2014 de http://www.dgb.sep.gob.mx/02- m1/03-iacademica/01-programasdeestudio/1er_SEMESTRE/Matematicas_I_biblio2014.pdf

Suárez, L. (2008). *Moldeación-Graficación, una categoría para la Matemática escolar. Resultados de un Estudio Socioepistemológico*.Tesis doctoral no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN HACIENDO USO DE LA VISTA GRÁFICA 3D DEL GEOGEBRA

José Carlos León Ríos, Lutzgardo Saavedra Sánchez Dávila, Ronald Quesada Córdova
Universidad de Lima. Instituto de GeoGebra (IGUL). (Perú)
jleonr@ulima.edu.pe, lsaavsan@ulima.edu.pe, rquesada@ulima.edu.pe

Resumen
Las habilidades básicas que inciden en el conocimiento matemático relativo al espacio y forma, como la construcción, manipulación e interpretación de vistas tridimensionales desde diferentes perspectivas, es un objetivo incluido en los programas curriculares por sus aplicaciones en la creación de imágenes mentales. En este documento mostramos diversos procesos de construcción de un sólido de revolución, específicamente aquellos sólidos que se construyen a partir de la rotación de regiones planas en torno a un eje, con el objetivo de facilitar la interpretación de las perspectivas de objetos tridimensionales y conjeturar algunas propiedades, haciendo uso de la vista gráfica 3D del programa GeoGebra**.** El uso de un programa en geometría dinámica nos permitió interpretar las perspectivas de los objetos tridimensionales haciendo uso del comando rotación y secuencias. De esta forma, logramos comparar los objetos en múltiples perspectivas, reconocer sus propiedades invariantes, y propiciar el razonamiento específico matemático.

Palabras clave: visualización, sólido de revolución, GeoGebra

Abstract
The basic skills that influence mathematical knowledge regarding space and form, such as the construction, manipulation, and interpretation of three-dimensional views from different perspectives are included within the objective of the curricular syllabi, due to their application in the creation of mental images. In this workshop we show different processes for the construction of solids of revolution, specifically those solids that are constructed from the rotation of plane regions around an axis, in order to facilitate the interpretation of three-dimensional object perspectives and to speculate on some properties, by using the 3D graphic view of the GeoGebra program. Using a program in dynamic geometry allowed us to interpret the perspectives of three-dimensional objects through the rotation and sequences command. Thereby, we can compare objects in multiple perspectives, recognize their invariant properties, and encourage specific mathematical reasoning.

Key words: visualization, solids of revolution, GeoGebra

Introducción

La visualización de los sólidos geométricos es una de las habilidades, como muestran los reportes de investigación en didáctica, que engloban una serie de relaciones y transformaciones de sus elementos. En ese sentido estamos de acuerdo con Gonzalo, Fernández y Díaz (2011) cuando señalan que "visualizar y orientar un objeto, sujeto o espacios no solamente incluye la habilidad de verlos, sino también la de reflexionar sobre ellos y sus posibles representaciones, sobre las relaciones entre sus partes y de examinar sus posibles transformaciones de rotación, sección y desarrollo” (p.100). Estos autores proponen una clasificación de tareas y describen una serie de ejemplos para la adquisición de habilidades de visualización y orientación espacial.

Basándonos en dicha clasificación, describimos las acciones y respuestas que deben elaborar un grupo de estudiantes para adquirir ciertas habilidades de visualización, que incluye reconocer las propiedades de un objeto en un sistema bidimensional y tridimensional, rotar dicho objeto, propiciar rotaciones mentales e interpretar sus propiedades intrínsecas desde diversas perspectivas.

Marco teórico

Nuestro trabajo está enfocado en algunos aspectos de del desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial que proponen Gonzalo et al. (2011). Los autores proponen tres actividades para propiciar la visualización y la orientación espacial:

- Orientación estática del sujeto y de los objetos.
- Interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales.
- Finalmente, la orientación del sujeto en espacios reales.

Nos enfocamos en la segunda de las tres actividades, la cual incluye acciones como la de reconocer y cambiar puntos de vista, interpretar representaciones planas de objetos tridimensionales, interpretar perspectivas de objetos, rotar mentalmente dichos objetos.

De acuerdo con este marco teórico, para lograr la visualización espacial y la intuición geométrica, hemos identificado las principales tareas como mostramos en la tabla 1: el estímulo inicial, las principales acciones que se elaboran para cumplir con el objetivo y la respuesta que demande las tareas.

Tabla 1. Acciones y respuestas de la tarea.

Esímulo inicial	Acción (ejecutar/imaginar)	Respuesta
Presencia del objeto físico: Polígono en el plano XOY	Cambiar de representación un mismo objeto, del sistema bidimensional al tridimensional.	Construcción y cambio de perspectiva con apoyo de las Vistas 2d y 3d
	Rotar el polígono alrededor de un eje de rotación con diversos ángulos	Cambio de perspectivas. Uso de deslizadores
	Convertir una representación plana en representación tridimensional	Construcción con apoyo del comando Secuencias
	Relacionar espacialmente algunas propiedades invariantes de los objetos.	Interpretación haciendo uso de las Vistas del Programa

Por ese motivo, hemos dividido la construcción de un sólido de revolución a partir de una región plana en dos grupos: el primero, que es el proceso de construcción o dibujo, y la segunda la tarea que corresponde a la identificación o interpretación de las propiedades de dicho sólido.

Las principales acciones que propiciamos involucran:

- Cambiar la presentación, es decir llevar un objeto de una representación en el sistema bidimensional a una en el sistema tridimensional (perspectiva isométrica). Para ello hacemos uso del comando rotar del GeoGebra y a la Vista Gráfica en 3dimensiones que ofrece el programa.
- Rotar un polígono considerando un eje y un ángulo de rotación. Se consideran múltiples ángulos de rotación, gracias al deslizador del programa. La información visual contribuye al pensamiento geométrico, imágenes mentales, gestos y movimientos corporales por los cambios de perspectivas.
- Convertir una representación plana en una tridimensional. Por ejemplo, a partir de un cuadrilátero que rotal alrededor de un eje, y con el uso del comando Secuencias del programa GeoGebra, se podrá obtener un sólido de rotación. Este comando nos facilita la obtención de uno o más elementos de rotación, para formar el sólido, o viceversa, a partir del sólido obtener una de sus partes.
- Relacionar espacialmente algunas propiedades invariantes de los objetos.

Las respuestas que demandamos involucran:

- El proceso de construcción en el sistema tridimensional, lo que involucra el conocimiento del programa de geometría dinámica GeoGebra.
- La representación del sólido en diferentes vistas: vista frontal plano XZ, plano YZ, plano YX, los cuales podrán realizarse haciendo uso de la Dirección de la Vista del programa.
- Interpretación, para explicar las tareas propuestas, que se consigue articulando expresiones propias de la estructura específica matemática.

Metodología

Nuestra investigación es cualitativa, de orden descriptivo y las actividades están dirigidas a estudiantes de secundaria y pregrado. Está basado en la observación de actitudes y comportamientos, interpretación de significados. El taller está programado para dos sesiones de hora y media cada uno.

La actividad se inicia con la presencia de un objeto físico, en este caso el de un polígono cuyas coordenadas sobre el plano XOY están controladas por deslizadores, lo que las convierte en coordenadas cuyas componentes podemos ir variando, y como consecuencia también la forma del polígono.

En las actividades que realizamos en el taller, mostramos que, gracias a las coordenadas variables del polígono, se obtiene la transformación de dicho polígono en rectángulos, trapecios, y su respectiva traslación sobre el eje de abscisas, propiciando las rotaciones mentales con el uso de imágenes mentales, dibujos, gestos y movimientos corporales. Para el cálculo y las mediciones, se identificaron algunos elementos geométricos, como la altura, área de las bases circulares y se interpretaron formas elípticas a circulares, desde la perspectiva tridimensional.

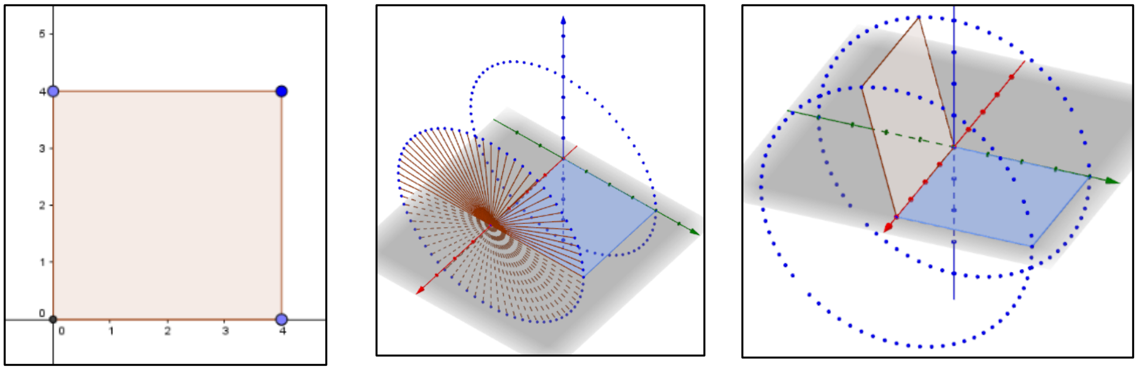


Figura 1. Rotación de un polígono y las trazas correspondientes. (Elaboración propia)

La figura 1 que mostramos en la parte superior, presenta la rotación del polígono y sus rastros correspondientes incluyen la puesta en práctica de un comando con múltiples ángulos de giro y que permite la presencia secuencial de otros polígonos, en la formación de otros sólidos de revolución, y las interpretaciones de perspectivas de objetos tridimensionales.

A partir de dicho polígono y con ciertas herramientas del GeoGebra, se obtiene el sólido de revolución al que le agregamos un rastro.

Desarrollo de la actividad

Dividimos al taller en dos episodios. El primero considerando la rotación de un objeto en dos dimensiones y el segundo, considerando la rotación en tres dimensiones. En este artículo, hemos seleccionado tres ejemplos del segundo episodio, porque el objetivo de este documento es mostrar los diversos procesos de construcción de un sólido de revolución
Hemos tomado como referencia a Larson, Hostetler y Edwards (1999), para definir un sólido de revolución "Si una región plana se hace girar en torno a una recta, el sólido resultante es un sólido de revolución y esa recta se llama eje de revolución o eje de giro" (p.472).

Ejemplo 1

Rotemos el polígono1 formado por $A = (0;0), B = (4;0), C = (4;4)\ y\ D = (0;4)$

- En torno al eje X con un ángulo de $\frac{\pi}{2}$.
- Rota [polígono1, π /2, Eje X]

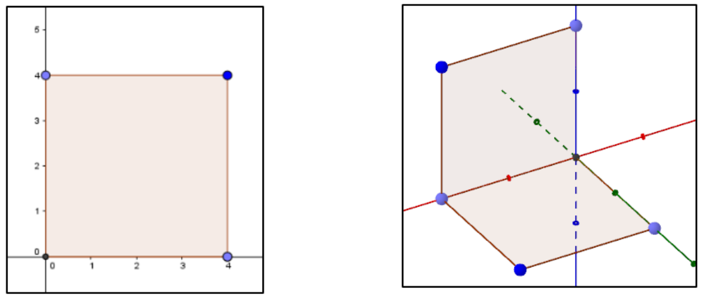


Figura 2. Representación inicial y rotación final. (Elaboración propia)

De acuerdo con la figura 2, observamos que existe de por medio el estímulo inicial, en este caso un polígono, que los participantes logran representar muy fácilmente. Se observan dos acciones: la primera el cambio de presentación, del sistema de dos a tres dimensiones y la segunda la rotación de dicho polígono. Sobre la primera acción, observe en ambas figuras como el cambio de perspectiva genera una serie de respuestas en torno a las propiedades invariantes del polígono. El uso del comando Rota [polígono1, π /2, Eje X] permite verificar algunas de las conjeturas de las imágenes mentales que podemos solicitar como respuesta.

Ejemplo 2

Rotemos el polígono 1 con múltiples ángulos de giro. Deslizador ángulos.

- Insertamos un deslizador para el ángulo: $0 \leq \alpha \leq 2\pi$
- Rota [polígono1, α, EjeX]

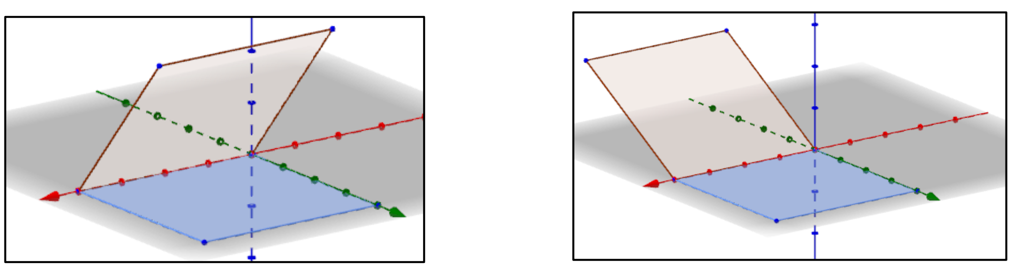


Figura 3. Uso del deslizador, múltiples ángulos de giros. (Elaboración

- Use el comando ***Rastro*** en los vértices y en los lados del cuadrado rotado

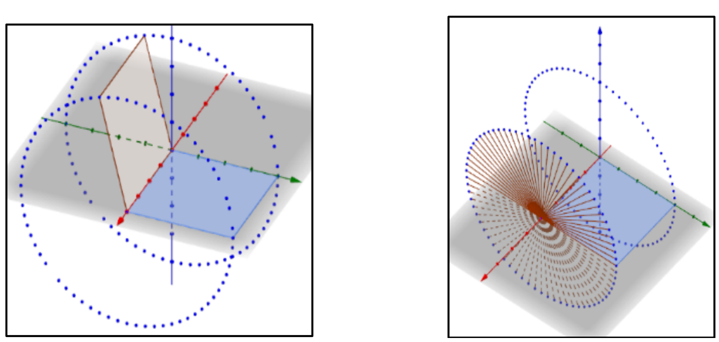


Figura 4. Uso de la traza. Imágenes mentales. (Elaboración propia)

De acuerdo con la figura 3 y 4, observamos la rotación de un polígono considerando un eje y un ángulo de rotación. Se consideran múltiples ángulos de rotación, gracias al deslizador del programa que ofrece el GeoGebra. Para ello consideramos un deslizador cuyo ángulo varía de acuerdo con la inecuación $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Esta situación, conduce a llevar información visual al pensamiento matemático. Se observan dos acciones: la rotación y el proceso de conversión de una representación plana a una representación espacial. Se puede indagar por la imagen mental que arrojan estas rotaciones y que conduce finalmente a la de un cilindro.

Ejemplo 3

Rotemos el polígono1 $A = (0,0,0), B = (4,0,0), C = (4,4,0)\ y\ D = (0,4,0)$
lista1 = Secuencia [Rota [polígono1, 2π ($\frac{i}{n}$), EjeX], i, 1, n]
Este ejemplo está basado en el de Carrazedo S., y Vieira C. (2017), que toman un ángulo de rotación similar al que mostramos.

- ¿Qué valores toma el ángulo $2\pi(\frac{i}{n})$
-

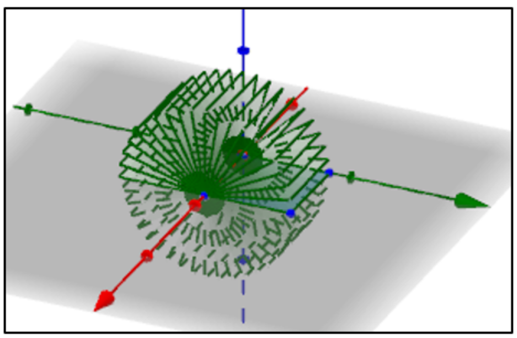


Figura 5. El sólido como secuencia de polígonos. (Elaboración propia)

- Si n = 1, se crea una lista de 1 polígono rotado 360°.
- Si n = 2, se crea una lista de 2 polígonos rotados 180° y 360°.
- Si n = 3, se crea una lista de 3 polígonos rotados 120°, 240° y 360°.
- Si n = 4, se crea una lista de 4 polígonos rotados 90°, 180°, 270° y 360°.
- Si n = 5, se crea una lista de 5 polígonos rotados 72°, 144°, 216°, 288° y 360°; y así sucesivamente.

De acuerdo con la figura 5, observamos la construcción del sólido de rotación haciendo uso del comando secuencias. El estudiante puede observar la secuencia de polígonos que se forman para la construcción del sólido. La identificación de algunas relaciones espaciales como longitudes de aristas, radios, volúmenes pueden ser identificadas cuando existe cambio de perspectiva.

Si resumimos las acciones del estudiante, detallaremos que inicialmente cambió de representación un mismo objeto ya que el polígono fue representado del plano XOY al plano XOZ. Esta acción favoreció la relación de las propiedades invariantes del polígono y entender su representación desde otra perspectiva. Luego, se rotó el polígono haciendo uso de los deslizadores, esta acción favoreció la habilidad para visualizar el proceso de representación de un objeto en tres dimensiones. Finalmente, los polígonos creados gracias al comando Secuencia nos permitió concretar la construcción del sólido de rotación.

Reflexiones finales

La visualización en diversas perspectivas de los sólidos de revolución juega a favor de las dificultades que los alumnos muestran cuando representan un paralelepípedo en un plano. El estudiante, a partir de una representación plana construye el sólido y haciendo uso del GeoGebra logra girar el sistema de coordenadas desde diversas perspectivas, lo que le permite crear imágenes mentales, conjeturar algunas propiedades invariantes de sus elementos que no se observa con profundidad en las representaciones en el plano, vincular las representaciones planas con las espaciales, es decir identificar las propiedades del sólido geométrico obtenido a partir de una construcción secuencial que ofrecen las tarea propuestas.

Referencias bibliográficas

Gonzalo M., Fernández T., Díaz J. (2016). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números*, (77), 99-117. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/77/Articulos_05.pdf

Larson E., Hostetler P., EdwardsH. (1999). Cálculo y la Geometría Analítica. (Lorenzo Abellanas, trad.). (6.a ed.). México DF.: Compañía Editorial Ultra

Carrazedo S., y Vieira C.(2017). Formas de revolução e cálculo de volumen. *Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas,* (1),142-155. Recuperado de https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/view/24428

VISUALIZACIÓN DE TRANSFORMACIONES LINEALES CON APOYO DE GEOGEBRA

Larissa Sbitneva, Nehemías Moreno Martínez, Lucinda Serna Herrera, Rogelio Valdez Delgado
Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Universidad Autónoma de San Luís Potosí. (México)
larissa@uaem.mx, nehemiasmoreno@live.com, lucindaserna@gmail.com, valdez@uaem.mx

Resumen
Se describe la experiencia de instrucción de un grupo de estudiantes universitarios que cursaban la asignatura de Álgebra Lineal. Tomando en cuenta algunos elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico, se diseñó e implementó un conjunto de secuencias didácticas para guiar el aprendizaje de las transformaciones lineales. Mediante las actividades propuestas, apoyadas en el software GeoGebra, los estudiantes lograron visualizar y comprender las nociones teóricas de linealidad y proporcionalidad participando en prácticas operacionales y discursivas relacionadas con la construcción de formas geométricas que se corresponden con las matrices de transformaciones lineales y que fueron interpretadas a través de las nociones de calibración, corte y homotecia.

Palabras clave: proporcionalidad, transformaciones geométricas, linealidad, visualización

Abstract
We describe the experience of teaching Linear Algebra to a group of university students. Taking into account some theoretical elements of the Onto-semiotic Approach, we designed and implemented a set of didactic sequences to guide the learning process of linear transformations. By means of GeoGebra software-assisted activities, the students could visualize and understand the theoretical notions of linearity and proportionality having participated in practices of calculations and discussions related to the constructions of geometric figures which are in correspondence with the matrices of linear transformations, and were interpreted through the notions of calibration, shear and homothety.

Key words: proportionality, geometric transformations, linearity, visualization

Introducción

El problema de la comprensión e interpretación del concepto de linealidad y su representación analítica es de gran importancia en las matemáticas. Se inician acercamientos a esta noción desde el nivel educativo Secundaria a través de los temas de proporcionalidad, de construcciones geométricas de segmentos proporcionales con aplicación del teorema de Tales, de las leyes de dependencia directamente proporcional, entre otros. Sin embargo, un estudio de los conocimientos previos por medio de una evaluación diagnóstica con las prácticas discursivas posteriores reveló un desempeño inadecuado en la resolución de problemas relacionados con el concepto de linealidad.

A nivel licenciatura, en la mayoría de los libros de texto que sirven de apoyo a los docentes que imparten cursos del Álgebra Lineal, la noción de linealidad es abordada mediante una definición formal presentada en términos y símbolos de espacios vectoriales, en cuyos discursos no se toman en cuenta las interpretaciones inadecuadas que pudiesen emerger del tratamiento indistinto del signo $+$ ("más") para las operaciones llamadas la "suma" (como composición de dos elementos) en cada espacio vectorial, el cual representa la operación de la suma usual de los números. Se realizó una revisión bibliográfica de los libros de texto recomendados tradicionalmente. Todos los libros de texto emplean el mismo símbolo para la operación de suma, excepto los libros de B. Kolman (Kolman y Hill, 2006) y de Rincón Mejilla (Rincón Mejilla, 2015), donde se distinguen los contextos de los espacios vectoriales correspondientes a matrices, polinomios y vectores geométricos con los signos de "suma" como $+$ encerrado en un círculo o en un cuadrado (lo mismo se aplica a la operación de multiplicación por escalar). No obstante, en la definición de aplicación lineal todos autores no enfatizan las operaciones en los espacios vectoriales correspondientes, que es lo más indispensables para evitar conflictos semióticos y lograr la comprensión de la linealidad.

Sin embargo, nuestra experiencia en la enseñanza de estos temas en el aula demuestra que es de suma importancia resaltar las diferencias entre la naturaleza de los elementos y cómo se establece la ley de operación con el empleo de los símbolos correspondientes (o subíndices indicando el espacio bajo consideración, $+_V$) para cada caso.

Marco teórico y metodología

En el diseño de las secuencias didácticas apoyadas en el uso del software GeoGebra se tomó en cuenta los fundamentos teóricos del Enfoque Ontosemiótico (EOS), (Godino, 2002). La visualización, en el sentido del EOS (Godino, Gonzato, Cajaraville y Fernández, 2012), considera la realización de prácticas visuales y prácticas no visuales, las cuales ponen en juego objetos lingüísticos y artefactos relacionados con la percepción visual, de las cuales las representaciones simbólicas son consideradas no visuales. En las secuencias didácticas llevadas a cabo con el empleo del software GeoGebra, el proceso de resolución de las tareas propuestas ha sido analizado tomando en cuenta la organización de los objetos visuales (lenguaje, conceptos, propiedades y argumentos en los cuales ocurre la visualización) y la realización de los procesos de visualización y de significación. En relación con este último proceso, los objetos visuales también son considerados como antecedentes o consecuentes de funciones semióticas, es decir, algunas veces cumplen el rol de significante y otras de significado.

Las secuencias didácticas fueron aplicadas a 8 alumnos de licenciatura y consistieron en la realización de actividades relacionadas con la transformación visual de figuras regulares (como hexágono o pentágono) correspondiente a algunas transformaciones geométricas conocidas (construcciones con lápiz y papel). Para rotaciones y homotecias se pidió encontrar las representaciones analíticas (las matrices que expresan esas transformaciones respecto a unos sistemas de referencia).

Para el problema inverso (traducción de la información visual a la forma analítica): se demostraban a los estudiantes las imágenes de figuras dibujadas mediante GeoGebra, que estuviesen bajo las transformaciones lineales específicas (calibración y transvección), pidiendo reconocer la transformación aplicada y su representación analítica.

También se les propuso tareas sobre construcciones de homotecias para obtener un teorema reconocido de geometría moderna de circunferencia de los nueve puntos y de la recta de Euler. Este famoso teorema involucra muchas propiedades interesantes e importantes relacionando puntos y líneas notables de un triángulo. Su prueba con métodos de geometría euclidiana elemental se presenta en la obra de Shively (1984) que sirve como un libro de texto para los cursos designados como Geometría Avanzada o Moderna cuyo objetivo es la preparación de profesores en la matemática avanzada.

Descripción de secuencias didácticas implementadas en el proceso de instrucción guiada del tema de Transformaciones Lineales

Actividad 1: Ejercicios relacionados con la visualización de transformaciones lineales de figuras regulares (como hexágono o pentágono)

El problema de construir las imágenes de una figura bajo dadas transformaciones lineales expresadas en términos geométricos (rotación, homotecia, entre otras transformaciones geométricas conocidas) no presentaba dificultades.

Sin embargo el problema inverso, a saber, dadas figuras y sus imágenes construir la matriz de la transformación lineal dada, sí ha sido difícil (se trata de traducción de la información visual a la forma analítica para lo cual se requiere analizar ciertos elementos que se conservan y también detectar algunos patrones de cambios en las imágenes).

Por ejemplo, para encontrar la matriz de la transformación aplicada a un pentágono presentada en la Fig. 2 y 3, los alumnos realizaron prácticas guiadas para detectar elementos claves que caracterizan la transformación correspondiente.

Ejercicio 1. (Exploración empírica) Realizar dibujos de transformación de contracción (dilatación) con coeficientes dados.

Se pretende lograr entendimiento que las transformaciones lineales se expresan con una matriz 2×2 y se pueden descomponerse en tres transformaciones básicas:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}.$$

El estudio de casos particulares de las transformaciones lineales como contracción/dilatación revela que tales transformaciones son expresadas por medio de las matrices diagonales siguientes:

a) $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$, o su composición c) $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$, lo que se descubre de la representación de las imágenes correspondientes en forma matricial a partir de la expresión de las coordenadas de los punto de las imágenes como

a) $\begin{pmatrix} kx \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} x \\ my \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$,

$c)\ \begin{pmatrix} kx \\ my \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

El caso de cambio proporcional k=m, $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, se denomina homotecia (similitud) y se considera en Actividad 3.

Ejercicio 2. (Prácticas computacionales y de construcción, dibujo con lápiz y papel).

Dada una matriz de transformación lineal encontrar las imágenes de unas figuras planas:
$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

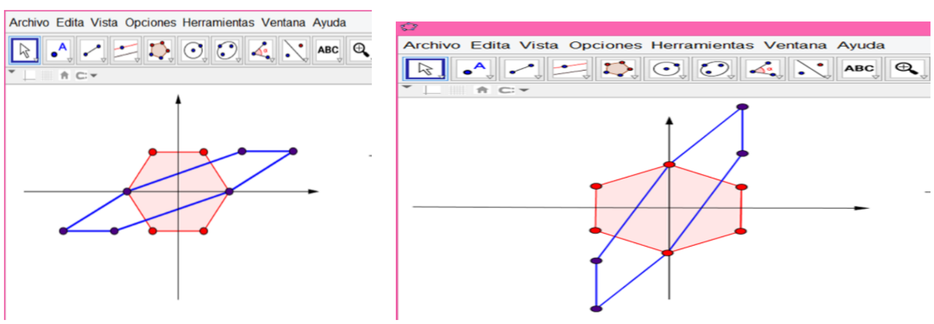


Figura 1 Transformaciones de hexágonos con matrices triangulares. (Elaboración propia)

En este ejercicio detectamos un conflicto semiótico relacionado con el modo de representación de los vectores de coordenadas: como filas o como columnas.

En las prácticas computacionales, para buscar coordenadas de puntos específicos de las imágenes, algunos estudiantes multiplicaron la fila de coordenadas por la matriz dada por la derecha, mientras que otros estudiantes, el vector-columna por la matriz del lado izquierdo (depende de cómo los enseñaron en los cursos previos) y los resultados fueron distintos (lo que se puede observar en la Fig. 1). Esto da evidencia de una comprensión inadecuada del concepto de matriz de una transformación lineal respecto a una base. Fue posible negociar con los estudiantes el significado de la matriz de transformación a través del proceso de construcción de las imágenes de manera visual porque unos alumnos obtuvieron la dilatación a lo largo del eje OX y a los demás a lo largo del eje OY (Fig. 1).

Se observó en la realización de prácticas discursivas emergentes que fue necesario cuestionar los datos iniciales, su significado teórico (la definición de la matriz de transformación) y legitimidad de los procedimientos empleados de manera automática.

Ejercicio 3 derivado de prácticas discursivas

Encontrar que las columnas de coordenadas y las filas de coordenadas se transforman por las leyes significativamente distintas con cambio de la base inicial.

Para los estudiantes avanzados se diseñaron ejercicios sobre formas lineales, de tal modo que el análisis de las leyes de cambio de las coordenadas de los vectores fila y los vectores columna (correspondientes a un cambio de la base en el espacio inicial) los llevó a descubrir que estas leyes son esencialmente diferentes (una matriz es la inversa de la transpuesta de la otra).

Además, las coordenadas organizadas en filas representan un objeto matemático llamado forma lineal, cuya representación geométrica es la línea recta y no un vector de posición (este hecho tiene realización clara en física, representando uno la partícula y el otro la onda). Por eso el espacio de filas forma el llamado espacio dual al espacio vectorial inicial.

Ejercicio 4. Encontrar la matriz de la transformación lineal a partir de dibujos (problema inverso: traducción de la información visual a la forma analítica).

Se demostraban a los estudiantes las imágenes dibujadas con el empleo de software dinámico GeoGebra, que estuviesen bajo una transformación específica.

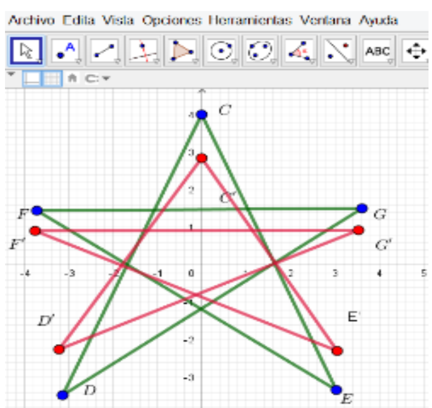


Fig. 2. Contracción del Pentágono. (Elaboración propia)

La exploración de la Fig. 2 del pentágono deformado (prácticas guiadas) revela que las abscisas de los puntos homólogos (inicial M y su imagen M') se conservan, $x = x'$, pero las ordenadas sufren disminución en este caso particular, $y' = my$.

Si organizamos esta información en columnas podemos escribir $\binom{x}{y} \to \binom{x}{my}$, o representándolo en la forma matricial, tenemos $\binom{x}{my} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\binom{x}{y}$.
Las matrices diagonales de este tipo expresan la contracción hacía el eje Ox, si $m < 1$ (o cambio de unidad de medida a lo largo del eje Oy).

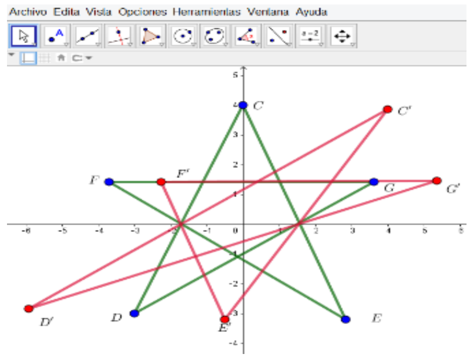


Fig. 3. Transvección del Pentágono. (Elaboración propia)

En el análisis del dibujo en la Fig. 3, detectamos que en este caso las ordenadas se conservan, $y' = y$, mientras que las abscisas se cambian de un modo específico, aumentando cada vez en un valor diferente (empleando geometría euclidiana podemos detectar el patrón): $x' = x + sy$, y siguiendo la representación en columnas y luego en su forma matricial, resulta la ley de transformación $\begin{pmatrix} x + sy \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con una matriz triangular con el determinante 1 (se denomina matriz triangular únimodular). Tal transformación tiene nombre de transvección, corte o inclinación.

Actividad 2: Para los alumnos con deficiencias en los conocimientos previos

Se diseñaron los ejercicios guiados con una secuencia de preguntas respecto al concepto de linealidad--proporcionalidad directa.

Ejercicio 1a.

Establecer la relación funcional y gráfica de temperaturas de Centígrados y de Fahrenheit, poniendo énfasis en la concordancia de unidades de escalas sobre los ejes de acuerdo con las proporcionalidades de medidas de temperaturas (con el objetivo de contraponer la función con la gráfica de línea recta y noción de linealidad).

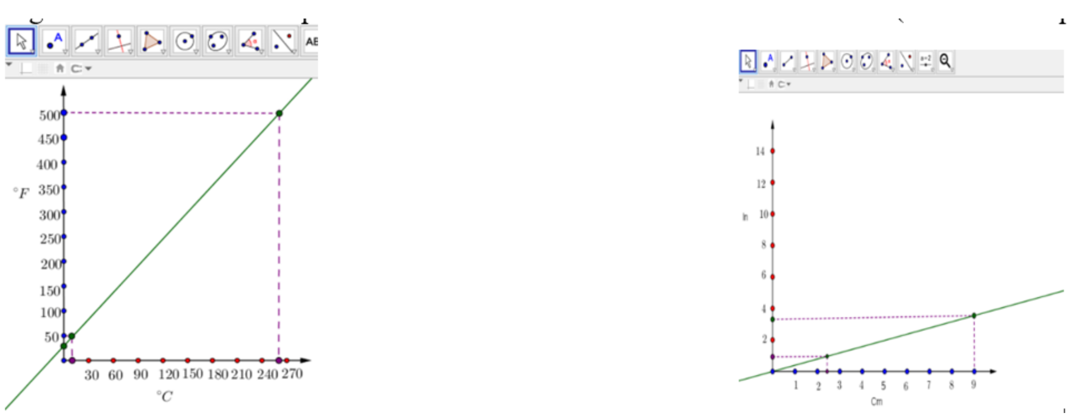


Figura 4. Relación de temperaturas no es lineal mientras de medidas es lineal (directamente proporcional) (Elaboración propia)

Ejercicio 1b

Realizar la calibración de los ejes correspondientes a la relación entre sentimenteros y pulgadas (usando el teorema de Tales).

Ejercicio 2

Establecer la aplicación biunívoca entre dos segmentos geométricos en una posición arbitraria. Esta práctica exploratoria les permitió descubrir la diferencia crucial entre las transformaciones conocidas, a saber, que la conservación de la proporcionalidad (por ejemplo, punto medio) se logra solamente en unas posiciones específicas. En los dibujos que representaban sus acercamientos para lograr correspondencia biunívoca se visualizan violaciones de proporcionalidad, debido a que los segmentos se encontraban relacionados bajo una proyección cónica, es decir, una transformación que aunque transforma puntos colineales en los puntos colineales, no es una transformación lineal en el sentido de linealidad de transformaciones de espacios vectoriales (no son euclidianas ni afínes, sino que proyectivas).

Actividad 3: Homotecia en el contexto de la geometría euclidiana

Ejercicio

Construir la Recta de Euler y la circunferencia de 9 puntos.

En cualquier triángulo ABC, los tres puntos: H, punto de intersección de alturas (ortocentro), punto G de intersección de medianas (centro de gravedad) y el circuncentro O se encuentran en una recta (llamada recta de Euler). Además el punto G se encuentra entre los punto H y O y divide el segmento OH en la razón $1:2$, es decir, $OG:GH = 1:2$.
Demostración:

Por las propiedades de medianas podemos considerar la homotecia γ con el centro en el punto G y coeficiente $k = -\frac{1}{2}$. Entonces cualquier vértice V se transforma en el punto medio M_V del lado opuesto a este vértice. Por eso la imagen de la cualquier altura (recta (VH)) se transformará a la recta $(M_V\, O)$—mediatriz (debido a que estas rectas son paralelas, siendo ambas perpendiculares al mismo lado, y como $\gamma(V) = M_V, \gamma(VH) = M_V O$.) Entonces $\gamma(H) = O$, y tomando en cuenta la razón absoluto de la homotecia γ, tenemos $|GO|:|GH| = 1:2$, lo que significa que el punto G se encuentra entre los puntos H y O. Con esto obtenemos la recta de Euler que contiene puntos H, O, y G .

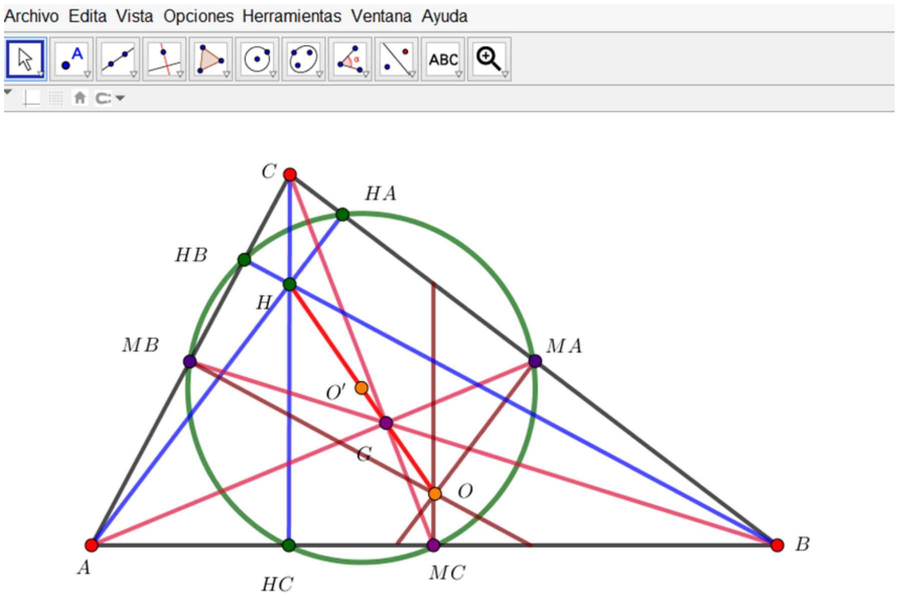


Figura 4. Circunferencia de nueve puntos y la recta de Euler. (Elaboración propia)

Ahora buscamos la imagen del circuncentro $O,\ \gamma(O) = O'$: por la definición de la razón de homotecia tenemos $\frac{GO\prime}{GO} = -\frac{1}{2}$, lo que significa que $\gamma(O) = O'$ y la circunferencia S con el centro O, se transforma en la circunferencia s con el centro O', que es el punto medio del segmento HO. Entonces para cualquier vértice $V, \gamma(OV) = O'M_V$, lo que implica que los puntos medios de los lados del triángulo se encuentran sobre la circunferencia s con el centro O' y del radio r que es la mitad del radio del circuncírculo.

En el dibujo realizado con el apoyo de GeoGebra observamos que la circunferencia s con el centro O' pasa por los pies de las alturas H_V: fácil probar que el centro O' se proyecta en el punto medio del segmento que une punto medio M_V con el H_V, y entonces es equidistante de dichos puntos, lo que significa que el pie de la altura H_V pertenece a la circunferencia s. Con esto tenemos 6 puntos notables sobre la circunferencia s.

Más aún, detectamos, analizando el dibujo, que la circunferencia pasa por los puntos medios K de los segmentos HV. Para averiguarlo, consideremos otra homotecia ω con el centro en el órtocentro H y el coeficiente $k = \frac{1}{2}$. Como $\omega\ (S) = s$, tenemos que $\omega\ (OV) = O'K$, siendo K el punto medio del segmento HV. Dada la relación entre los radios, el punto K se encuentra en la circunferencia s, la cual tiene nombre de la circunferencia de 9 puntos.

Conclusiones

El empleo de GeoGebra, por parte de profesor para demostrar los diagramas correspondientes a las secuencias didácticas, facilitó a los alumnos visualizar los efectos de variación de los valores de las entradas de cada una de las tres matrices de transformaciones en la descomposición de una transformación lineal arbitraria en el plano. GeoGebra permitió resaltar la transformación de las figuras bajo una transformación de transvección (corte, sesgo o inclinación) la cual simplemente expresa el paso de los ejes perpendiculares a los oblicuos, es decir, pasar a un sistema de coordenadas afines (marco de referencia afín). También mediante GeoGebra fue posible visualizar la linealidad: aunque las figuras se deformaron drásticamente (pues, no se conservaban las medidas como en transformaciones rígidas o de isometrías, ni los ángulos como en transformaciones de similitud), sin embargo nuestra percepción visual permite reconocer la figura inicial debido a un invariante afín de conservación de proporciones entre los puntos colineales en las imágenes bajo transformaciones lineales y el paralelismo.

Otro aspecto importante del empleo del software en la secuencia didáctica fue el que permitió mostrar que las relaciones lineales se conservan, en el sentido de conservación de combinaciones lineales, que corresponde a la conservación de proporciones (e.g., el punto medio de un segmento se transforma a el punto medio de su imagen, el centro de gravedad se transforma en el centro de gravedad de la imagen, esta es precisamente la razón por la cual somos capaces de reconocer las figuras que han sido transformadas linealmente).

Otro beneficio es relacionado con la explicación de las representaciones analíticas de las transformaciones: para contracciones la matriz tiene una forma diagonal, lo que se debe a la existencia de dos vectores propios que se observan en los dibujos, mientras en el caso de transvección, la matriz es triangular y no puede ser reducida a una forma diagonal, pues no existen dos vectores propios como se manifiesta la imagen de la figura transformada. Así se logra visualización del objetivo principal del curso relacionado con “diagonalización”.

Referencias bibliográficas

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques 22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D., Gonzato, M., Cajaraville, J. A. y Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 30*(2), 109-130.

Kolman, B. y Hill, D. R. (2006). *Álgebra lineal*. México: Pearson Educación.

Rincón Mejilla, H. A. (2015). *Álgebra Lineal.* México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Shively, L. S. (1984). *Introducción a la geometría moderna.*México: CIA Editorial Continental S.A. de C.V.

Circunferencia de los nueve puntos. (sf) Recuperado el 22 de mayo de 2017 de https://es.wikipedia.org/wiki/Circunferencia_de_los_nueve_puntos

MODELO TECNO-PEDAGÓGICO EN EL AULA DE TRIGONOMETRÍA

John Jairo García Mora, Sonia Jaquelliny Moreno Jiménez
Instituto Tecnológico Metropolitano. (Colombia)
jhongarcia54@gmail.com, jaquemj24@gmail.com

Resumen
La experiencia de aula que aquí se comparte describe cómo los estudiantes de un curso de Cálculo Diferencial lograron la comprensión y el análisis de las funciones trigonométricas con el apoyo de un OIA con simulaciones de GeoGebra (software matemático interactivo libre que permite el trazado dinámico de construcciones geométricas y la representación gráfica de las mismas). Dicha experiencia se facilitó mediante la aplicación del modelo Tecno-Pedagógico TPACK que orienta el trabajo en las aulas con actividades apoyadas en tecnología para que el estudiante considere, practique, interprete, produzca, aplique, evalué y cree nuevas formas para demostrar su apropiación del conocimiento y, el docente se adapte a las nuevas tendencias en pedagogía.

Palabras clave: TIC, ecosistema educativo, TPACK.

Abstract
The classroom experience, that we share here, describes how the students of a Differential Calculus course achieved the understanding and analysis of trigonometric functions with the support of an IOL with simulations by GeoGebra (a free interactive mathematical software that allows the dynamic tracing of geometric constructions and their graphic representation). This experience was facilitated by the application of the TPACK Techno-Pedagogical model which guides classroom work with technology-assissted activities for the students to consider, practice, interpret, produce, apply, evaluate and create new ways to demonstrate their acquisition of knowledge; thereof for the teacher to adapt to the new trends in pedagogy.

Key words: ICTs, educational ecosystem, TPACK.

Planteamiento del problema

Para crear un aula innovadora donde se logren las competencias del currículo en trigonometría tienen que coexistir en mayor o menor grado un buen docente, una excelente perspectiva pedagógica del saber impartido, la preocupación por el aprendizaje de este y, una relación entre los nativos digitales y los inmigrantes digitales. Esos conjuntos de características no las garantizan las Tecnologías de la Información y la Comunicación por sí mismas, según la UNESCO:

> En el futuro, las competencias fundamentales comprenderán la capacidad tanto para desarrollar métodos innovadores de utilización de TIC en el mejoramiento del entorno de aprendizaje, como para estimular la adquisición de nociones básicas en TIC, profundizar el conocimiento y generarlo (UNESCO, 2008, p.7).

El diccionario de la Real Academia de la lengua Española define “Ecosistema” como una comunidad de seres vivos que se desarrollan en función de los factores físicos de un mismo ambiente, esta descripción es el fundamento de la teoría “Ecológica” propuesta por Urie Bronfenbrenner en su libro “La ecología del desarrollo humano”, teoría que permite entender la influencia de las TIC en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje y al mismo tiempo como el ser humano transforma esas tecnologías. Expresado de otra forma, en este ecosistema educativo, el ser humano y los recursos digitales del proceso de enseñanza y aprendizaje como actores, se alternan el rol de objeto y de sujeto en el campo educativo (Bronfenbrenner,1979, p. 26).

Ese cambio de rol facilita la entrada en escena del docente del tercer entorno, definido por Echavarría (2000, p18) como aquél docente que actúa en “un nuevo ámbito social para las interrelaciones humanas… para ser activo en el nuevo espacio social se requieren nuevos conocimientos y destrezas que habrán de ser aprendidos en los procesos educativos”, es aquí donde cobra importancia la labor docente.

El ecosistema educativo donde habita ese docente del tercer entorno lo obliga a participar de diferentes formas, en el ámbito universitario al docente le implica que debe intervenir en una o en varias de las características que le permiten ser un elemento activo del ecosistema educativo modelo siglo XXI. Ese docente participa en diferentes roles generados por las TIC: integrador de contenidos, desarrollador de esos contenidos, elaborar diseños instruccionales, realizar tutorías, brindar soporte a los programas de la dirección, trabajar en la preproducción y producción de contenidos curriculares y de los diseños multimediales.

Con estos nuevos roles en mente y tomando como referencia los resultados acerca de la enseñanza de las Funciones Circulares en cursos anteriores, surge del cuestionamiento: ¿podemos lograr que los estudiantes de nuestro curso comprendan y analicen este tipo de funciones con la simulación que se puede realizar con GeoGebra inmerso en un OIA?

Aquí asumimos el rol de Diseñadores Multimediales para lograr el objetivo de nuestra experiencia de aula: facilitar el aprendizaje de las Funciones Trigonométricas por los estudiantes desde la óptica de las funciones circulares.

Indagación bibliográfica

Acerca del estudio de las funciones trigonométricas Ugalde (2013, p23) expresa que una situación de interés son los fenómenos periódicos como:

Las mareas, las fases de la luna, la traslación de la tierra alrededor del sol, las estaciones del año, los días en el calendario, las épocas para siembra, los horarios del autobús, los diferentes tipos de vibraciones; son todos situaciones que presentan comportamientos de tipo periódico, o muy próximos a serlo. Una excelente oportunidad de aprendizaje es combinar actividades de medición, y estudio de estos fenómenos, con el estudio de las funciones trigonométricas.

En este trabajo de nombre “Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje” Ugalde concluye que “el verdadero reto al enseñar el concepto de función radica en como diseñar actividades para que los estudiantes descubran el concepto de función por sí mismos", es aquí donde las TIC juegan un papel importante.

Una de las áreas en las que estas tecnologías han estado presentes con mayor fuerza son las ciencias, especialmente las matemáticas pues en este campo se encuentran aplicaciones libres que han impulsado la creación de objetos de aprendizaje que permiten una mejor comprensión de los conceptos matemáticos y, además, como apoyo al desarrollo de la clase en el aula motivan al estudiante para que se apropie de nuevo conocimiento o al refuerzo de las competencias ya adquiridas (Chiape, 2009).

Gutiérrez, Buitrago & Ariza. (2017), apoyan la inserción de las tecnologías de la información y la comunicación TIC en la educación como una posibilidad de aprendizaje que provoca cambios en los procesos de apropiación del conocimiento, en su trabajo "Diseño de una OVA como mediador pedagógico para la enseñanza de la derivada"; inician el trabajo investigativo centrándose en la identificación y caracterización de dificultades en el aprendizaje de la derivada, en la etapa siguiente proponen el diseño de un OVA como mediador pedagógico, y en la tercera etapa realizan la implementación del mismo junto con el análisis del impacto en los estudiantes y en su proceso de aprendizaje. Considerado por los estudiantes el tema de derivadas como un obstáculo para su aprendizaje, a partir de la implementación del OVA, afirmaron tener buenas bases; es necesario antes de la aplicación de este recurso, evaluar las necesidades reales de los estudiantes en la temática específica y de los procesos de aprendizaje, para apoyar los mismos con actividades y recursos que suplan la necesidad. A pesar de que las TIC ha apoyado los procesos en todos los campos de la educación, el proyecto resalta la necesidad de capacitación docente continua en cuanto a su uso, tanto en el diseño como en el uso de recursos digitales.

Al momento de diseñar los OVA es necesario partir de las características de los estilos de aprendizaje, que se definen como las distintas formas en que una persona puede aprender y están descritas como las condiciones bajo las que un estudiante se encuentra en la mejor disposición para aprender, o qué estructura necesita para mejorar el proceso de aprendizaje.

Para los ámbitos Psicológico y educativo, un estilo de aprendizaje permite identificar el comportamiento de una persona a estímulos afectivos, fisiológicos y cognitivos ante la información que se le proporciona para resolver problemas en un entorno de aprendizaje.

Existen 12 estilos (Corbin, 2016) de aprendizaje y uno de ellos es el visual caracterizado porque a él pertenecen los estudiantes que no son buenos leyendo textos, pero, en cambio, asimilan muy bien las imágenes, diagramas, gráficos y vídeos. Suele ser práctico para esos estudiantes el empleo de símbolos o crear una taquigrafía visual al tomar apuntes, es aquí donde cobra importancia el diseño multimedial que caracteriza el ecosistema educativo actual.

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) como recursos de aprendizaje permiten pasar de un uso informativo y colaborativo a un uso didáctico para lograr unos resultados de aprendizaje que influyen sobre el ecosistema educativo y es aquí donde los modelos de incorporación de las TIC en nuestras clases de Trigonometría apoyan nuestro quehacer docente.

Con los avances de la cibercultura creada por las Tecnologías de la Información y la Comunicación-TIC, surgieron los términos de nativo digital y el de inmigrante digital acuñados por Marc Prensky en el año 2001, para él, los nativos digitales son personas jóvenes o niños que van desarrollándose al ritmo de los videojuegos, usan con facilidad la computadora, el E-mail, las redes sociales y los teléfonos celulares, ello requiere conocer la forma de introducir recursos TIC en el aula bajo un modelo.

El modelo EAAP es el acrónimo de Estilos de Aprendizaje y Actividades Polifásicas presentado por Cacheiro (2011) y fundamentado en los estilos de aprendizaje Activo (A), el estilo Pragmático (P), el estilo Teórico (T) y el estilo Reflexivo (R). Es de resaltar que la zona donde convergen los cuatro estilos de aprendizaje requiere que el docente tenga los suficientes conocimientos para crear páginas web con contenidos multimedia, videos interactivos, Objetos Virtuales de Aprendizaje y quizá lo más importante: saber diseñar la evaluación de este tipo de recursos digitales.

Producto de esa búsqueda bibliográfica surge el modelo propuesto por *Rubén Puentedura*, que establece cuatro niveles de inserción de la tecnología en el aula: Sustitución, Ampliación, Modificación y Redefinición, de sus siglas en inglés surge el acrónimo del modelo SMAR: *Substitution, Augmentation, Modification, Redefinition* y se refiere al proceso de integración de TIC en el diseño de actividades y se justifica desde la necesidad de mejorar la calidad de la enseñanza y garantizar un sistema de promoción social que garantice la equidad y su implementación en el aula se realiza en dos etapas: una denominada perfeccionamiento y otra llamada transformación y cada una de ellas involucra dos procesos:

En la etapa de perfeccionamiento entra en escena el proceso de sustitución donde la tecnología permite el cambio de la tiza y el tablero a pizarras a base de bits y por otro lado el proceso denominado ampliación donde se realizan algunas mejoras al proceso anterior, la tecnología es un sustituto que permite ver más allá de una pizarra, pero los conceptos teóricos son los mismos que se trabajase sin esa tecnología.

La etapa de transformación del modelo de *Puentedura* se inicia con un proceso de modificación caracterizado porque la tecnología es utilizada para crear asignaciones en las que el uso de las tecnologías es determinante para poder llevarlas a cabo y, por último, el proceso de redefinición donde las tareas asignadas solo pueden lograrse a través del uso de la tecnología.

Un tercer modelo de inserción denominado TPACK es el acrónimo de la expresión “*Technological Pedagogical Content Knowledge*” (Conocimiento Técnico Pedagógico del Contenido) y que fue desarrollado entre el 2006 y 2009 por los profesores Punya Mishra y Mattew J. Koehler , de la Universidad Estatal de Michigan, se describe como un modelo que identifica los tipos de conocimiento que un docente necesita dominar para integrar las TIC de una forma eficaz en la enseñanza que imparte (Koehler, 2012).

El modelo TPACK se centra en la importancia del Conocimiento (*K-Knowledge*) sobre el Contenido(*C-Content*), la Pedagogía (*P-Pedagogy*) y la Tecnología (*T-Technology*), así como los conocimientos sobre las posibles interrelaciones entre ellos.

Metodología

Debido a las dificultades observadas en el aprendizaje de las funciones de variable real (la conceptualización previa a las funciones circulares) de los treinta y cinco estudiantes del curso presencial de la asignatura Cálculo Diferencial de un programa de ingeniería, se les consultó acerca del uso de la tecnología para su trabajo independiente empleando los denominados Objetos Virtuales de Aprendizaje-

OVA, los vídeos lección y los Objetos Interactivos de Aprendizaje-OIA. El resultado de esa indagación mostró que esos recursos cuando son empleados pueden llegar a superar la dificultad abstraer los conceptos matemáticos, por ello, se optó por aplicar un OIA en ese tema específico: las funciones circulares con el objetivo de los estudiantes se apropiasen del ese conocimiento. Luego de analizar los modelos de inserción de la tecnología en el aula antes descritos: EAAP, SMAR y TPACK optamos por este último por las siguientes razones:

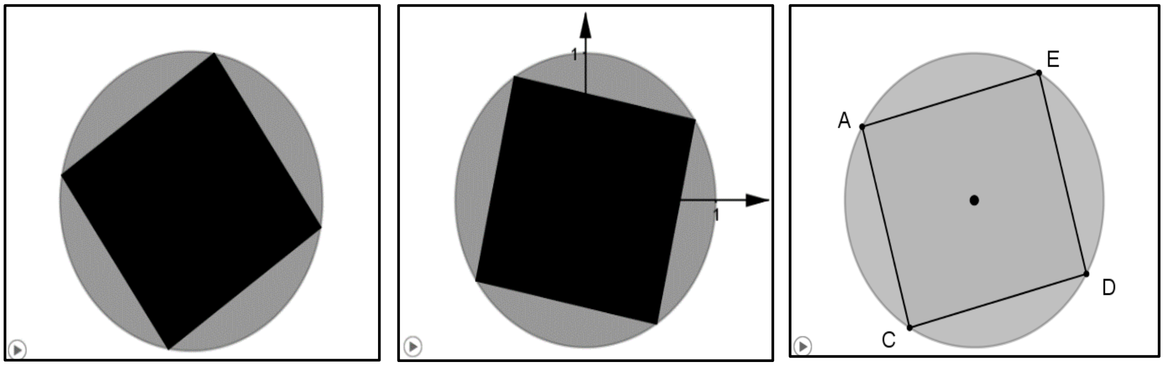
- Admite diseñar actividades sin requerimientos tecnológicos sofisticados.
- Permite aplicar los diseños instruccionales desde diferentes ópticas: con o sin recursos digitales.
- Facilita el fomento de actividades para modelos de trabajo digital o no digital.
- Es ideal para procesos de enseñanza y aprendizaje con modelos Híbridos.
- Orienta simulaciones que ofrecen entornos para la observación, exploración y la experimentación.
- Es útil para evaluar permanentemente la práctica profesional y reflexionar sobre ella para llevar a cabo labores de innovación y mejora continuas o permanentes.

En la aplicación de un OIA con el apoyo del modelo TPACK en la enseñanza de las funciones circulares tomamos como punto de partida de que esas funciones fueron creadas con el fin de extender las definiciones de las razones trigonométricas del triángulo rectángulo a todos los números reales y, que bajo este modelo aparecen sus posibles intercepciones: el conocimiento y la pedagogía, la instrucción y la tecnología, el conocimiento y la tecnología y el conocimiento con la pedagogía y la tecnología como observaremos en la aplicación que compartimos.

La pedagogía de las razones trigonométricas del triángulo rectángulo, través de la historia de la trigonometría pasó del estudio de los ángulos de un triángulo rectángulo a una abstracción de gran utilidad con el estudio de las razones entre los lados de este tipo de triángulo, luego fueron extendiéndose luego a otro tipo de triángulos, de allí conocemos las razones denominadas seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. Son estas razones del triángulo rectángulo la base de las funciones circulares.

Esa pedagogía tradicionalmente implica el dibujo de un triángulo con un ángulo recto y la aplicación de la nomenclatura para ángulos agudos, catetos e hipotenusa, implica, además, la habilidad de analizar o desglosar las partes que permitan encontrar patrones. Una clase de trigonometría magistral o virtual permitirá: a) Reconocer las Razones Trigonométricas (seno, coseno, tangente) con ángulos y pendientes, b) Manifestar coherencia al realizar cambios de registro en forma oral y escrita de las razones trigonométricas y c) Realizar conjeturas y formular relaciones entre ángulos y la pendiente en un triángulo rectángulo.

Uno de nuestros diseños aprovecha la simulación del cuadrado giratorio y se invita a los estudiantes a plantear conjeturas para ese movimiento (figura 1a), simulacro realizado con tecnología.



(a) *(b)* *(c)*

Figura 1. *Secuencia para demostrar la conjetura acerca del giro del cuadrado*
Fuente: Creación propia realizada con GeoGebra 5

Luego de escuchar las conjeturas

A continuación, se detiene la simulación y el observador puede distinguir el eje de las abscisas y el eje de las ordenadas cuya intercepción coincide con el centro de un círculo unitario, lo que presenta pistas para demostrar la conjetura planteada.

Resultados o avances

Con el resultado positivo (evidenciado en las notas evaluativas del concepto) obtenido con el recurso diseñado y el voto favorable de los estudiantes a través de una encuesta, pensamos que es necesario crear una nueva realidad que se adapte a las necesidades de aprendizaje tan diversas en la era de los nativos digitales y responder al cuestionamiento de si es o no es conveniente crear pedagogías emergentes para potenciar el "Aprender a aprender", por ello proponemos la estrategia que aparece en la tabla 1 fundamentada en la propuesta de Grandgenett, Harris & Hofer (2011) acerca de los elementos de aula para considerar una demostración, para practicar, interpretar, producir, aplicar, evaluar y crear actividades de aprendizaje.

Tabla 1. Propuesta de actividades para el aula

Actividad estudiantil	Criterios guía al estudiante	Recursos
Género: Considerar **Presenciar una demostración**	Se adquieren conceptos cuyo origen puede ser una presentación, un video, una animación o una interactividad	Video Escena interactiva creada con Descartes JS o con GeoGebra
Género: Considerar **Leer texto**	Extraer información acerca de los conocimientos previos, del saber teórico u otros materiales recomendados en el OIA diseñado.	Documentos en formato *.pdf Documentos en formato *.doc Video interactivo

Género: Considerar **Investigar un concepto**	Explorar o investigar un concepto usando Internet u otras fuentes de investigación.	Guía Enlaces desde el OIA diseñado Buscadores como Google, Firefox, Opera y Microsoft Edge entre otros
Género: practicar **Realizar cálculos**	Emplear estrategias digitales basadas en computadora usando procesamiento numérico o simbólico.	Evaluación interactiva del OIA Recursos de GeoGebra.org Recursos de Descartes JS.org Ejercicios propuestos
Género: interpretar **Plantear una conjetura**	Desde la interactividad con OIA se plantea una conjetura que permita establecer relaciones	Evaluación interactiva del OIA Recursos de GeoGebra.org Recursos de Descartes JS.org
Género: producir **Describe matemáticamente un concepto**	Asistido por la tecnología en el proceso de descripción o documentación, se produce una explicación matemática de su objeto o concepto.	Guía Enlaces desde el OIA diseñado Buscadores como Google, Firefox, Opera y Microsoft Edge entre otros
Género: aplicar **Elije una estrategia de solución**	Revisa o selecciona una estrategia relacionada con el tema del Cálculo Diferencial aplicado a un contexto particular o aplicación, con base en ejercicios resueltos.	Recursos de GeoGebra.org Recursos de Descartes JS.org Guía Enlaces desde el OIA diseñado Buscadores como Google, Firefox, Opera y Microsoft Edge entre otros
Género: evaluar **Comprobar conjetura**	Del planteamiento de una conjetura específica y examina la retroalimentación de resultados interactivos para refinar la conjetura.	Recursos de GeoGebra.org Recursos de Descartes JS.org
Género: evaluar **Evaluar una aplicación**	Evaluar un trabajo matemático a través de la retroalimentación de pares o asistida por computadora.	Guía Enlaces desde el OIA diseñado Como GeoGebra, Derive o Mathematica entre otros
Género: crear **Expone su trabajo**	Prepara y expone los resultados de su estudio acerca de un concepto matemático, estrategia o problema particular.	Redes sociales E-mail Aula física Foros de discusión

Fuente: creación propia fundamentada en la propuesta de Grandgenett, N., Harris, J., & Hofer

Como resultado de apropiación del concepto de las funciones circulares mediante el OIA diseñado, los estudiantes del curso crearon en GeoGebra versión 5.0 una interactividad que les permitió visualizar las transformaciones de una función como son su alargamiento, sus desplazamientos horizontales y verticales y, las reflexiones de una gráfica de una función circular.

Reflexiones

Las estrategias cognitivas en el proceso de aprendizaje permiten relacionar la nueva información con la ya existente, organizan esa nueva información y, además, logran procesar la información nueva y la existente, son clasificadas por Rodríguez, Piñeiro & Regueiro (2017) en cuatro grupos: memorizar, selección, organización y elaboración. Para nuestra experiencia de aula se realizaron:

- Estrategias para memorizar conceptualización, a través de sopas de letras y crucigramas.
- Estrategias de selección de esa información, motivadas por la generación de la participación en clase.
- Estrategias para organización a través de la observación de demostraciones.
- Estrategias de elaboración como la creación de mapas conceptuales como técnica de estudio.

La metacognición es considerada como la teoría de la mente y se centra en el aprendiz mismo y en las operaciones que le permiten conocerse y regular sus procesos de aprendizaje, quizá la destreza más importante desde esta teoría es fortalecer el aprender a aprender. De las estrategias metacognitivas que se impulsaron en el aprendizaje de las funciones circulares podemos citar:

- Variables personales como la motivación y el cambio de actitud frente a las matemáticas generando curiosidad con videos motivadores.
- Variables que determinan los alcances de la tarea a realizar en al interior del aula y fuera de ella y proporcionadas por enlaces a conocimientos complementarios.
- Selección de estrategias de estudio promocionando la selección del trabajo cooperativo, el trabajo colaborativo y o el aprendizaje combinado como la ideal para su estilo de aprendizaje.

Consideramos que fue una experiencia enriquecedora resumida en la expresión de uno de los estudiantes: “Al fin pude entender como relacionar las relaciones trigonométricas del triángulo rectángulo con el circulo unitario y de donde salen los valores de seno y coseno que me da la calculadora”.

Referencias bibliográficas

Bronfenbrenner, U. (1979). *La ecología del desarrollo humano.* Barcelona, España: Paidós.

Cacheiro, M. (2011). Recursos educativos TIC de información, colaboración y aprendizaje. Pixel-Bit Revista de Medios y Educación (39), 69-81.

Corbin, J. (2016). *Psicología educativa y desarrollo: 12 estilos de aprendizaje ¿en qué se basa cada uno?* Recuperado de https://psicologiaymente.net/desarrollo/estilos-de-aprendizaje

Chiape, A. (2009). *Objetos de Aprendizaje 2.0: una vía alternativa para la re-producción colaborativa de contenido educativo abierto*. Cali: Pontificia Universidad Javeriana.

Echavarría, J. (2000). Educación y tecnologías telemáticas. *Revista Ibero Americana de Educación*, *24*, 17-36. Recuperado de http://rieoei.org/rie24f.htm

Grandgenett, N., Harris, J., & Hofer, M. (2011). *Mathematics learning activity types*. Recuperado de http://activitytypes.wmwikis.net/file/view/MathLearningATs-Feb2011.pdf.

Gutiérrez M. L., Buitrago A. M. & Ariza, N. L. (2017). Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica. *Revista Científica General José María Córdova*, *15* (20)

Koehler, M. (2012). *What is TPACK?*.Recuperado de http://www.tpack.org

Rodríguez, S., Piñeiro, I., Regueiro, B., Estevez, I., & Val, C. (2017). Estrategias cognitivas, etapa educativa y rendimiento académico. *Revista de Psicología y Educación*, *12*(1), 19-34.

Ugalde, W. J. (2013). Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, *14*(1).

UNESCO. (2008). *Estándares en competencias TIC para docentes*. Recuperado de http://eduteka.icesi.edu.co/pdfdir/UNESCOEstandaresDocentes.pdf

ECUACIONES DIFERENCIALES: TECNOLOGÍA DIGITAL Y FENÓMENOS FÍSICOS CON PERSPECTIVA DE GÉNERO

Brenda Carranza-Rogerio, Rosa María Farfán Márquez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)
brenda.carranza@cinvestav.mx, rfarfan@cinvestav.mx

Resumen

La relevancia de las ecuaciones diferenciales en el currículo de las carreras STEM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas, por sus siglas en inglés) destaca por su amplio campo de uso. La investigación propuesta tiene por objetivo abordar un problema afín a este contexto, modelando fenómenos físicos mediante ecuaciones diferenciales, en donde las nociones de variación involucradas sean analizadas empleando tecnologías digitales para simular cada fenómeno, pues se reconoce la importancia de la contextualización para la significación en matemáticas. En concordancia con ello, se asume al entorno sociocultural como transversal en la construcción de conocimiento matemático. Las características de este entorno influyen en el sentimiento de pertenencia de hombres y, particularmente, de mujeres (como minoría) en las carreras STEM. Por lo tanto, se trabajará con perspectiva de género a lo largo del estudio y, asimismo, se plantea la búsqueda de caminos posibles para un enfoque integrador STEM en entornos donde las disciplinas son vistas de manera aislada.

Palabras clave: género, modelación, STEM, ecuaciones diferenciales

Abstract

The relevance of differential equations in the curriculum of Science, Technology, Engineering and Mathematics (STEM) degree courses is highlighted by its wide range of use. This research is aimed at addressing a problem related to this context, modelling physical phenomena through differential equations, in which the notions of variation involved should be analyzed using digital technologies to simulate each phenomenon, as we recognize the importance of contextualization for mathematical meaning. Accordingly, we assume the sociocultural environment as a transversal factor in the construction of mathematical knowledge. The qualities of this environment affect the sense of engagement of men and, particularly, of women (as minority) in STEM degree courses. Therefore, gender perspective will be considered throughout the study and, also, we plan to explore the possible paths for an integrative STEM approach in environments where disciplines are viewed in an isolated way.

Key words: gender, physics, technology, differential equations

La importancia del contexto

Una robusta literatura en Matemática Educativa ha destacado la importancia de la contextualización al abordar diversos conceptos matemáticos en el aula, así como la no siempre evidente relación que estos contextos tienen con el entorno sociocultural (Cantoral y Farfán, 2003; Steinthorsdottir y Herzig, 2014). En este avance de investigación, se describe un acercamiento para el estudio de situaciones en contexto (particularmente fenómenos físicos) cuya componente sociocultural es mediada por una perspectiva de género transversal que permite enlazar matemáticas y física (a través de la modelación con tecnología) con base en una concepción *funcional* del aprendizaje (Simón, 2015). De este modo, el estudio pretende ser en sí un referente acerca de la incorporación de la perspectiva de género en matemática educativa de manera *transversal* (sin ser el objeto principal de estudio) retomando resultados de la literatura en materia de género para favorecer un entorno de aprendizaje inclusivo.

Conforme se avanza entre los niveles educativos, el rigor y la profundidad que demandan los temas en el área de matemáticas provocan que estos sean abordados de forma aislada y carente de referentes reales. Sin embargo, en las disciplinas propias de su área de especialización (en carreras cuyo enfoque no son las matemáticas puras), se demanda en ciertos casos que los alumnos utilicen los recursos de la clase de matemáticas para la resolución de problemas de aplicación.

Así, las disciplinas se imparten en forma de asignaturas aisladas, con enlaces mínimos o nulos entre ellas que, no obstante, en un principio durante su desarrollo histórico fueron indispensables pues dieron origen y sentido al conocimiento construido. Este fenómeno se observa de manera crítica en el área de matemáticas; como reportan Mendoza y Cordero (2012), “se busca explicar a la matemática desde la matemática misma, soslayando otros campos científicos que le permitieron su desarrollo” (p. 1023).

Retomar las relaciones con otras áreas de conocimiento no implica reconstruir todo el conjunto de situaciones que conllevaron al desarrollo de estas disciplinas, pues ello sería en sí mismo una dificultad adicional al aprendizaje del concepto matemático abordado (Farfán, 2012). Lo que se busca es rescatar aquellos lazos con la realidad que permitan dar significado a las *herramientas* matemáticas.

En este sentido, enfatizamos el término de herramienta pues los resultados de esta disciplina suelen relegarse a un plano utilitario e instrumental. Ello se evidencia en la estructura de los programas de estudio tradicionales para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en el Nivel Superior, pues las *aplicaciones* suelen estudiarse sin un sentido del uso, con mayor énfasis en las técnicas de resolución de las ecuaciones, tal como señala Fallas-Soto (2015) en el caso de la enseñanza del teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

Un enfoque interdisciplinario: educación integradora STEM

En la actualidad y, en especial, en los países altamente desarrollados, el impulso a las carreras *interdisciplinarias*, e inclusive a la formación académica desde niveles básicos en la cual se integren diversas disciplinas, ha sido remarcado como una necesidad propia del mundo moderno. Marciuc y Miron (2014) afirman que formar competencias transversales es un objetivo clave en la reconstrucción del currículo que requieren los cambios estructurales de la sociedad del siglo XXI (p. 280).

En México, algunas instituciones han comenzado a incorporarlo en sus planes de estudio pues se han mostrado los beneficios que trae consigo; tal es el caso de lo que reporta Rodríguez (2016) en la utilización de diversos recursos tecnológicos para el desarrollo de actividades a través de la modelación matemática en un curso de Ecuaciones Diferenciales (ED). No obstante, este logro resulta viable principalmente para las instituciones privadas. Pero surge la interrogante acerca de la forma de hacerlo en las instituciones públicas de nivel superior que no pueden incorporar este tipo de propuestas de inmediato debido a los largos procesos requeridos para la renovación de los programas de estudio y la inversión que ello implicaría.

Por lo anterior, esta investigación busca abordar tal problemática partiendo del supuesto de que, aún en estas carreras donde incluso plantear proyectos *multidisciplinarios* (distintas disciplinas no necesariamente articuladas) resulta una ardua tarea de coordinación académica, existen temas en el programa inicial de matemáticas que implican por sí solos una *interdisciplinariedad*. Este es el caso de las ED, ya que por sus características es posible integrarlo con fenómenos de otras disciplinas, ya sea partiendo de su análisis para generar un modelo matemático basado en ED, o bien, empleando las ED para deducir los efectos de dicho fenómeno.

Esta materia (ED) es común en la mayoría de los cursos iniciales en carreras del área STEM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas, por sus siglas en inglés) pues es transversal a varias de las asignaturas esenciales durante la trayectoria escolar. De acuerdo con Sanders (2008), todas las asignaturas propias de la especialidad podrían ser consideradas como parte de la *educación STEM*, pues determina que esta se refiere a la enseñanza en alguna de las áreas que engloba STEM, incluso de manera aislada.

Para fines de la investigación se retoma la definición anterior y, por ende, se asume que este es el tipo de educación del que se parte (enseñanza tradicional), pero el objetivo consistirá en explorar la implementación de alternativas para una *educación integradora STEM* que, de acuerdo con el mismo autor, implica ya una interrelación entre dos o más disciplinas de esta área (Sanders, 2008, p. 21).

En la educación STEM de la mayoría de las instituciones del nivel superior en México, los programas de estudio dan evidencia de una clara tendencia a la algoritmización, a la presentación de teoremas y métodos completamente terminados en donde, si acaso, se deducen soluciones desde el propio desarrollo matemático, aplicando al final las *fórmulas* y procedimientos aprendidos sin hacer mayor énfasis en la interpretación de los resultados y, menos aún, entre las diferentes representaciones de las ecuaciones y sus soluciones (Hernández, 1995).

Entendemos que el generar algoritmos es un paso necesario como síntesis del proceso de aprendizaje, pero igualmente reconocemos que previo a ello debe haber un conjunto de situaciones que le signifiquen y provean de una perspectiva en contexto. De este modo, la indagación que se ha hecho hasta el momento como parte del proyecto de investigación se ha basado en el criterio de contextualizar desde la asignatura, en particular (ED), para dar pie a que sea más fácilmente incorporable en las demás asignaturas de cada carrera.

■ Uso de tecnologías digitales: modelación y simulación

Los contextos de uso dependerán de cada carrera, pero se distingue la física como asignatura frecuente en un gran porcentaje de ingenierías de este nivel. Más aún, de manera histórica, la física se ha desarrollado en estrecha relación con las matemáticas, por lo tanto, abordar problemas basados en fenómenos físicos resulta una alternativa natural y sin embargo no ocurre con frecuencia. Una de las razones por la cual este origen ha sido invisibilizado en los programas de estudio tradicionales reside en la incapacidad de abordar los problemas al no contar con el *material de laboratorio*.

En respuesta a ello, en la actualidad, existe una constante y creciente incorporación de la tecnología como recurso para acceder a contextos que de manera directa sería virtualmente imposible, ya sea por limitaciones económicas, o bien, por la dificultad en la generación de sistemas físicos controlados para la experimentación. Es decir, esto último aplicaría también para aquellos cursos con acceso al material de laboratorio usual.

Se plantea que tales contextos físicos sean explorados mediante el uso de software libre de matemática dinámica, como GeoGebra, que permite la animación de los objetos físicos y matemáticos representados, de tal manera que podemos obtener una *simulación* del fenómeno físico junto con la posibilidad de variar sus parámetros de forma interactiva. En este tipo de programas, nociones de variación como la derivada, velocidad y aceleración pueden ser representados de forma visual, dinámica e interactivamente (Marciuc y Miron, 2014).

Para definir estos parámetros es necesario analizar el problema en cuestión asociándolo con la ecuación diferencial que lo describe. En este sentido empleamos el término *modelación*, pues, si bien la comprensión del significado de modelo matemático no es homogénea en la literatura internacional, puede considerarse como una representación simplificada de una realidad observada, producida para fines específicos a los que se aplican las abstracciones de la teoría (Villa-Ochoa, 2016, p. 112).

De manera más particular, en la revisión realizada sobre modelación (en algunos casos también denominada *modelización*) se distinguieron cuatro enfoques: como herramienta matemática, como interpretación o representación (*matematización*) del mundo real, como un aspecto social y en su relación con la graficación y la simulación.

En el primero entran algunas concepciones como la de Sánchez (2011), quien relaciona la modelación con sistemas de representaciones al afirmar que integra símbolos, signos, figuras, gráficas y construcciones geométricas. Siller (2008) es un poco más específico y determina que la construcción de funciones es una idea central en el tema del modelado.

En este sentido, si la ecuación diferencial es apreciada como la igualdad entre funciones, entre magnitudes que varían con respecto a una variable independiente (que en física se trata usualmente el tiempo), la modelación estaría centrada en el establecimiento de estas funciones y las variables que las determinan. Sin embargo, creemos que la modelación va más allá de una herramienta, pues se encuentra en estrecha relación con la interpretación que hacemos del mundo real.

Esto último corresponde al segundo enfoque, que comparten Pabón, Nieto y Gómez (2015) al ver el modelo matemático como una descripción de un fenómeno del mundo real, cuya finalidad es comprenderlo y, en la medida de lo posible, hacer predicciones del mismo. Así, la modelación se distingue de la simulación en que implica la construcción de una representación, mientras la segunda es un intento por imitar o aproximarse a algo (Sánchez, 2011).

Ambos términos pueden ser enlazados en el sentido de Rubio, Prieto y Ortiz (2016), pues comentan que integrar las tecnologías digitales permite vincular hechos e ideas asociadas a un fenómeno físico entre sí y con los marcos teóricos que los sustentan; por lo cual, ven la simulación como el elemento que permite fusionar la modelación con las tecnologías digitales para la generación de entornos de aprendizaje que promuevan el desarrollo de conocimiento y habilidades de pensamiento científico en los estudiantes.

Lo anterior provee de una distinción entre los términos, pero a ello puede agregarse la caracterización de Sánchez (2011) quien describe que la diferencia semántica entre modelo y simulación reside en que un modelo es una representación de estructuras, mientras que una simulación, infiere un proceso o interacción entre las estructuras del modelo para crear un patrón de comportamiento.

Finalmente, en cuanto al aspecto social de la modelación, Mendoza y Cordero (2012) comentan que más allá de ser la aplicación del conocimiento matemático, se trata de una práctica social que construye conocimiento y que expresa una funcionalidad del conocimiento, de tal forma que articule la construcción de conocimientos matemáticos para programas como los de ingeniería.

De tal modo que la propuesta no consiste en ver el software de simulación como un recurso que limite el trabajo individual en cuanto que *automatice* los procesos de cálculo, sino como un medio para recrear fenómenos reales en donde las matemáticas subyazcan en todo el proceso.

Por lo tanto, se propone el retomar fenómenos físicos a través de animaciones (simuladas e interactivas) que permitan al estudiante ver más allá de meras aplicaciones en la generación de las ED que los modelan y en el modelo generado a partir de ellas mismas. En dicho proceso de modelación, aspectos como la variación, lo *dinámico* y las argumentaciones físicas (sustentadas en el contexto) serán analizados como parte de los objetivos de la investigación.

Género como perspectiva transversal

La consideración que hasta ahora se ha planteado acerca del entorno de trabajo en matemáticas y física como construcciones de conocimiento en estrecha relación con el contexto sociocultural trae consigo un aspecto asociado a las concepciones estereotipadas de estas áreas. Ello es que las carreras del área STEM suelen asumirse como *masculinas* (Francis, Archer, Moote, DeWitt, MacLeod, y Yeomans, 2017; Good, Aronson y Harder, 2008).

En este sentido, se plantea abordar la problemática considerando a lo largo de todo el estudio una perspectiva de género, pues creemos que cada individuo debe tener las oportunidades que requiera de acuerdo con su situación específica para alcanzar los objetivos que se proponga, es decir, que se desenvuelva en un ambiente equitativo.

La literatura al respecto es amplia, pero incluso en ambientes no académicos esto es percibido. En primer lugar, cabe aclarar que *sexo* se refiere a una categoría con base en diferencias biológicas, mientras que *género* alude a diferencias de orden social. La manera en la cual se establecen los roles entre los sexos es aún diferenciada y remarcada por los medios de comunicación, a la vez que es reproducida en la familia y en la sociedad en general tanto por hombres como por mujeres.

Si bien en la educación y el trabajo (particularmente, del área STEM) la presencia de mujeres ha ido incrementándose conforme al paso del tiempo, la brecha de género persiste de manera crítica en cuanto al ingreso, la permanencia y la especialización o los ascensos (Zubieta y Herzig, 2016).

Por el momento, la indagación realizada contempla de manera general estrategias que se pueden seguir para favorecer estos ambientes equitativos que se buscan. Un concepto clave en materia de género y sus efectos en el aprendizaje de las matemáticas es la *amenaza del estereotipo* (Steele, 1997). Ella consiste en que las mujeres estudiantes, al sentirse en el foco de un juicio negativo sobre sí y su grupo (en correspondencia con una creencia popularizada de que quienes pertenecen al sexo femenino son menos capaces para las matemáticas y las ciencias) ven mermado su desempeño. Good, Aronson y Harder (2008) hallaron, por ejemplo, que hay efectos incluso en aquellas mujeres altamente capacitadas en matemáticas del nivel superior; mostrando además que tal impacto puede ser atenuado y que ello deviene en un mejor aprovechamiento.

Por tanto, además de tener estos resultados en cuenta durante la planeación de la investigación y el planteamiento de la problemática, se ha decidido incorporar esta perspectiva a lo largo de todo el estudio, de tal forma que en las decisiones metodológicas que lo permitan se considere la producción científica en materia de género para incorporarlo en el proyecto.

La investigación abordará esta perspectiva en los tres ejes principales que contempla: la variación en las ecuaciones diferenciales, el uso en fenómenos físicos y la integración de la tecnología en la modelación y simulación. En cada uno de ellos (de manera general: matemáticas, física y tecnología), la literatura reporta una falta de representatividad de las mujeres que, de acuerdo con algunas investigaciones, se puede atribuir a una dificultad por parte de ellas. Sin embargo, otros enfoques sugieren que es en realidad la propia constitución del currículo lo que no permite su inclusión.

En esta línea se encuentra un importante resultado que permite enlazar al género con los tres ejes mencionados, particularmente, a través de la *funcionalidad*: Simón (2015) halló que, en mujeres estudiantes que destacaban en la matemática escolar, sus capacidades no habían sido ni desarrolladas ni expresadas a través de algoritmos o en la aplicación explícita o repetitiva de conceptos, sino a través de *experiencias* con el conocimiento matemático funcional mediante el cual ellas se han relacionado con la matemática a lo largo de su vida. Por lo tanto, los objetivos de la investigación en torno a los ejes mencionados compaginan con este enfoque que provee la perspectiva de género, puesto que se apoyaría el desempeño de las mujeres, en tanto considera *experiencias* (fenómenos físicos) y, de ello, también el aprendizaje de los hombres se puede beneficiar.

Reflexiones finales

La investigación realizada hasta el momento da luz sobre cómo podría potenciarse el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en hombres y mujeres a partir de la modelación de fenómenos físicos a través de la simulación en software de matemática dinámica en carreras STEM que no cuenten con programas interdisciplinarios. Lo relativo al género se irá delimitando más a lo largo de la investigación; en especial, durante el desarrollo se espera hallar situaciones más específicas para el contexto ingenieril y, especialmente, de los cursos de ecuaciones diferenciales.

Por otro lado, dado que el estudio por ahora es pensado con un enfoque en el inicio de un curso usual de ED, se distinguen algunas etapas para el desarrollo en lo sucesivo de la investigación. Algunos temas como la concepción de la variación, lo dinámico, el establecimiento de relaciones entre *eventos* variables, el paso de la pendiente a la derivada, la interpretación (argumentación física) de lo que significa solucionar una ecuación diferencial en cuanto a los métodos y sus significados e implicaciones habrán de ser profundizados.

Si bien en un principio el proyecto está dirigido al análisis de problemas asociados a fenómenos físicos, no se descarta la posibilidad de extenderlo a otras disciplinas, con el fin de fortalecer el enfoque de educación *integradora* STEM que se persigue. Así, el término *integración* aplica en este estudio tanto en este sentido, como en el de favorecer un entorno *inclusivo* para las mujeres.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *6*(1), 27-40.

Fallas-Soto, R. (2015). *Existencia y unicidad: estudio socioepistemológico de la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México. doi: 10.13140/RG.2.1.1265.6485

Farfán, R. (2012). *Socioepistemología y ciencia: el caso del estado estacionario y su matematización*. Barcelona, España: Gedisa.

Francis, B., Archer, L., Moote, J., DeWitt, J., MacLeod, E. y Yeomans, L. (2017). The Construction of Physics as a Quintessentially Masculine Subject: Young People's Perceptions of Gender Issues in Access to Physics. *Sex Roles*, *76*, 156–174. doi: 10.1007/s11199-016-0669-z

Good, C., Aronson, J. y Harder, J. A. (2008). Problems in the pipeline: Stereotype threat and women's achievement in high-level math courses. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *29*, 17–28. doi: 10.1016/j.appdev.2007.10.004

Hernández, A. (1995). *Obstáculos en la articulación de los marcos numérico, gráfico y algebraico en relación con las ecuaciones diferenciales ordinaras*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Marciuc, D. y Miron, C. (2014). Technology integration of GeoGebra software in interdisciplinary teaching. En I. Roceanu (Ed.), *Proceedings of the 10th International Scientific Conference "eLearning and Software for Education" Volume 3* (pp. 280–287). Editura Universitatii Nationale de Aparare "Carol I." doi: 10.12753/2066-026X-14-184

Mendoza, J. y Cordero, F. (2012). El uso de las ecuaciones diferenciales y la ingeniería como comunidad. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *25*, 1023–1030.

Pabón, J., Nieto, Z. y Gómez, C. (2015). Modelación matemática y GeoGebra en el desarrollo de competencias en jóvenes investigadores. *Revista Logos Ciencia Y Tecnología*, *7*(1), 97–102.

Rodríguez, R. y Quiroz Rivera, S. (2016). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *19*(1), 99–124. doi: 10.12802/relime.13.1914

Rubio, L., Prieto, J. L. y Ortiz, J. (2016). La matemática en la simulación con GeoGebra. Una experiencia con el movimiento en caída libre. *International Journal of Educational Research and Innovation*, *2*, 90–111.

Sánchez, C. (2011). *Propuesta didáctica para lograr aprendizaje significativo del concepto de función mediante la modelación y la simulación*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín, Colombia.

Sanders, M. (2008). STEM, STEM Education, STEMmania, *The Technology Teacher*, *64*(4), 20–26.

Siller, H. (2008). The central idea of modeling - optimization in real-life-situations. *Revista de La Escuela de Ciencias de La Educación*, *4*(3), 277-288.

Simón, M. (2015). *El talento en matemáticas de mujeres adolescentes: una caracterización desde el enfoque socioepistemológico y la perspectiva de género.* Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y de

Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Steele, C. M. (1997). A threat in the air: How stereotypes shape intellectual identity and performance. *American Psychologist*, *52*(6), 613-629. doi: 10.1.1.318.9608

Steinthorsdottir, O. y Herzig, A. (2014). Cultural influences in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 129-132). Dordrecht, Holanda: Springer Science+Business Media. doi: 10.1007/978-94-007-4978-8

Villa-Ochoa, J. A. (2016). Aspectos de la modelación matemática en el aula de clase: el análisis de modelos como ejemplo. En L. Díaz y J. Arrieta (Eds.), *Investigaciones latinoamericanas en modelación: matemática educativa* (pp. 109–137). Ciudad de México: Gedisa.

Zubieta, J. y Herzig, M. (2016). *Participación de las mujeres y niñas en la educación y el sistema nacional de ciencia, tecnología e innovación de México: Evaluación nacional con base en el marco de indicadores de equidad de género en la sociedad del conocimiento.* Mexico: WISAT-CONACyT.

OBJETO INTERACTIVO DE APRENDIZAJE PARA EL LABORATORIO DE MEDICIÓN

Sonia Jaquelliny Moreno Jiménez; John Jairo García Mora
Instituto Tecnológico Metropolitano. (Colombia)
Jaquemj24@gmail.com, jhongarcia54@gmail.com

Resumen
Las TIC que nuestros estudiantes utilizan no se emplean generalmente como herramientas proporcionadoras de entornos para tratar información organizada, para calcularla y expresarla gráficamente. La educación debe generar nuevos espacios y procesos de enseñanza-aprendizaje, que ayuden a los estudiantes a apropiarse del conocimiento con las herramientas tecnológicas actuales especialmente en algunos entornos como el educativo. La medición mirada como el proceso matemático de evaluación de la proporción entre la dimensión de un objeto y una unidad de medida especifica puede ser realizada en laboratorios virtuales en el ecosistema educativo influenciado por las Tecnologías de la Información y la comunicación (TIC). En una experiencia de aula utilizando como recurso de laboratorio virtual de medidas un Objeto Interactivo de Aprendizaje (OIA) se han evaluado dos aspectos: el impacto como estrategia de enseñanza y evaluación de los conceptos matemáticos y, las prácticas virtuales de los procesos que se realizan en las instalaciones del laboratorio de medición.

Palabras clave: medición, objeto interactivo de aprendizaje (OIA), estrategias de enseñanza

Abstract
The Information and Communication Technologies (ICTs) available to our students are not generally used as environment-providing tools to treat organized information in order to calculate it and express it graphically. Education must generate new spaces and teaching-learning processes, which help students to acquire knowledge with current technological tools especially in some environments such as the educational ones. Measurement thought as the mathematical process of evaluating the proportion between the size of an object and a specific measuring unit, can be performed in virtual laboratories in the educational ecosystem influenced by ICTs. In a classroom experience, using a virtual laboratory of measures an Interactive Object of Learning (IOL) we have evaluated two aspects: the impact of mathematical concepts as a teaching and evaluation strategy, and the virtual practices of the processes that are performed in the measuring laboratory.

Key words: measuring, interactive object learning (IOL), teaching strategies

Introducción

En el New Media Consortium Horizon Report 2017 se analizan las tendencias a corto, mediano y largo plazo de la Educación Superior, a corto plazo una de ellas es el aprendizaje mixto, el ambiente educativo enmarcado en esta modalidad didáctica implica que, bajo la guía y supervisión del docente de un curso formal (la medición en nuestro caso) el estudiante aprenda de manera combinada, por una parte, a través de la entrega de contenidos e instrucción en línea y por otra parte mediante un formato presencial en el aula, esa instrucción en línea se realiza con un Objeto Interactivo de Aprendizaje (OIA) como recurso. En el portal de Colombia Aprende, la red del conocimiento del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (M.E.N.) se expresa que este tipo de recurso educativo virtual es un mediador pedagógico que se diseña intencionalmente para un propósito de aprendizaje, desde esta óptica y como elemento didáctico estructurado se ha diseñado OIA para lograr un aprendizaje más significativo en el laboratorio de medición. Cuando creamos un OIA para el laboratorio de medición surge el cuestionamiento: ¿Logrará el diseño y aplicación de un OIA que reúna las operaciones matemáticas y el proceso de medir como tal, impactar en el aprendizaje de los estudiantes del laboratorio de medición? A este propósito:

Las TIC generan nuevas capacidades de acción y relación para cuyo desarrollo se requieren nuevas habilidades y destrezas. Este es el punto central en lo que se refiere a la educación, e incluso a la formación. En el tercer entorno se refiera a capacidades de acción y no solo en relación profesor-alumno, sino también en las relaciones con los colegas y compañeros.(Echeverría, 2012, p. 174)

El docente del tercer entorno tiene una labor significativa en la formación de conocimientos de los estudiantes por este motivo debe de capacitarse y actualizarse en el uso de las TIC y toda su didáctica, que le ayude a conocer, dominar y emplear herramientas tecnológicas y nuevos elementos pedagógicos en su práctica docente, para integrar en su rol estrategias que contribuyan a un mejor desempeño de los estudiantes. Los principales referentes son:

a. La filosofía de los OIA

El estudio del OIA busca apoyar mejorando la calidad de la pedagogía e innovar la forma en que los objetivos de la asignatura pueden ser apoyados atreves de esta herramienta que facilita y promueve la interacción con el programa, El docente es la persona que desempeña el papel más importante en la tarea de ayudar a los estudiantes a adquirir esas capacidades. Además, es el responsable de diseñar tanto oportunidades de aprendizaje como el entorno propicio en el aula que facilite el uso de las TIC por parte de los estudiantes para aprender y comunicar. Por esto, es fundamental que todos los docentes estén preparados para ofrecer esas oportunidades a sus estudiantes. Dicho objeto debe diseñarse a partir de ciertos criterios ilustrados en la tabla 1.

Tabla 2 *Criterios de construcción del OIA*

Atemporalidad	Para que no pierda vigencia en el tiempo y en los contextos utilizados.
Didáctica	El objeto tácitamente responde a qué, para qué, con qué y quién aprende.
Usabilidad	Que facilite el uso intuitivo del usuario interesado.
Interacción	Que motive al usuario a promulgar inquietudes y retornar respuestas o experiencias sustantivas de aprendizaje.
Accesibilidad	Garantizada para el usuario interesado según los intereses que le asisten.

Fuente: (Nelson Darío Roldán & Francisco Luis Ángel, 2014). Elaboración propia

b. Las TIC como apoyo pedagógico

Las TIC en la enseñanza- aprendizaje facilitan la evaluación y control de los temas planteados dentro del OIA, permite definiciones y conceptos de las unidades de medición, interacción del objeto, materiales didácticos online que resultan muy útiles para realizar actividades complementarias de recuperación en las que los estudiantes pueden auto controlar, evaluar sus resultados y proporcionar informes de seguimiento y control. A este propósito:

La integración de OA al proceso de enseñanza-aprendizaje, permite ofrecer contenidos educativos que respondan a competencias específicas y permite al estudiante ser responsable de su aprendizaje, del mismo modo permite al docente estar capacitado en el uso de nuevas tecnologías.(Sophia & Ballesteros-ricaurte, 2017, p. 2)

Es en este sentido que la pedagogía apoyada en los Objetos virtuales de Aprendizaje (OVA) donde se desprenden los OIA

c. La sociedad de la información y conocimiento

La Sociedad de la Información ha llegado con la exigencia de generar nuevos cambios necesarios para acceder a la enseñanza mediante la utilización de la tecnología, una de las alternativas para mejorar la metodología de aprendizaje y enseñanza en los laboratorios de medición con OIA, con herramientas virtuales como apoyo pedagógico, teniendo en cuenta que la tecnología va avanzando y dando nuevos parámetros TIC para el apoyo para la educación y fortalecimiento de nuevas y creativas ideas de enseñanzas para ello se hace necesario

Estas transformaciones que ocurren en nuestro entorno les plantean a los educadores múltiples desafíos: ¿Cómo comportarnos frente a un mundo multidimensional, que pretende ser "inteligente" suplantando, por lo menos parcialmente, algunas de las funcionalidades tradicionalmente humanas? ¿Cómo comportarnos frente a un entorno que nos plantea el desafío del protagonismo y de la participación? ¿De qué manera impactarán estos cambios que se producen en el entorno tecnológico en el crecimiento de nuestros jóvenes? (Dorfsman, 2012, p. 6).

d. Los videos como mediadores del proceso de aprendizaje
e. Los videos educativos tienen una tipología de acuerdo a su intencionalidad, su lenguaje, su duración y sus imágenes entre otras cualidades como se ilustran en la tabla 2 y 3 su documentación y ventajas de uso.

Tabla 3 Tipología de los videos educativos

TIPOLOGÍAS DE LOS VIDEOS EDUCATIVOS	
DOCUMENTALES	Muestran de manera ordenada información sobre un tema concreto
NARRATIVOS	Tienen una trama narrativa a través de la cual se van presentando las informaciones relevantes para los estudiantes

LECCIÓN MONO CONCEPTUAL	Son vídeos de muy corta duración que se centran en presentar un concepto (por ejemplo un vídeo sobre el concepto de integral definida)
LECCIÓN TEMÁTICA	Son los clásicos vídeos didácticos que van presentando de manera sistemática y con una profundidad adecuada a los destinatarios los distintos apartados de un tema concreto
VIDEOS MOTIVADORES	Pretenden ante todo impactar, motivar, interesar a los espectadores, aunque para ello tengan que sacrificar la presentación sistemática de los contenidos y un cierto grado de rigor científico

Fuente: (Pere Marquès Graells, 2012). Elaboración propia

Tabla 4 Funciones y ventajas del video

FUNCIONES DEL VIDEO	
INFORMATIVA	Estructura la realidad
INSTRUCTIVA	Orienta, condiciona el aprendizaje, desarrollo cognitivo
MOTIVADORA	Atrae, interesa, sensibiliza.
EVALUADORA	Autoobservación, análisis…
INVESTIGADORA	A partir de grabaciones
METALINGÜÍSTICA	Del lenguaje audiovisual
EXPRESIVA	Grabación, edición…
LÚDICA, TESTIMONIAL, INNOVADORA…	

VENTAJAS DEL VIDEO	
VERSATILIDAD	Muchas funciones y formas de uso
CULTURA DE LA IMAGEN	Desarrolla actitud critica
MEJOR ACCESO A LOS SIGNIFICADOS	Palabra, imagen, sonido
MAS INFORMACIÓN	Fenómenos de difícil observación
REPETICIÓN SIN ESFUERZOS	Idiomas
DESARROLLA LA MAQUINACIÓN, LA INTUICIÓN…	
INCONVENIENTE: no presenta exactamente la realidad, pueden adoctrinar (implica a los sujetos)	

Fuente: (Pere Marquès Graells, 2012). Elaboración propia

f. Participación pedagógica

La razón de Innovar en las prácticas docentes, es aprovechar las nuevas posibilidades didácticas que ofrecen las TIC para lograr que los estudiantes exploren nuevas técnicas de aprendizajes de una manera amigable, despertando el interés, la motivación, las practicas colaborativas. El ámbito educativo está orientado a potenciar el aprendizaje autónomo, el colaborativo y el desarrollo o afianzamiento de habilidades tecnológicas, de esta manera el estudiante se ve obligado a enfrentar diferentes herramientas que sirven para mediar el aprendizaje.

Objetivo de la experiencia de aula

Diseñar un Objeto Interactivo de Aprendizaje (OIA) que lograse con su diseño y aplicación impactar el aprendizaje de los estudiantes que permita operaciones de cálculo y conversión de medidas en el área de laboratorio de medición y que complemente el trabajo presencial incorporando prácticas colaborativas.

- Desarrollar escenas con la herramienta applet Descartes con gran interactividad y dinamismo para las mediciones virtuales longitudinales con flexómetros, pie de rey, micrómetro.
- Crear presentaciones y videos caseros que facilitan y motivan el aprendizaje.
- Analizar cómo influye el aprendizaje de los estudiantes en el laboratorio de medición de una manera combinada, una parte a través de la entrega de contenidos e instrucción en línea y por otra parte mediante el formato presencial en el aula.
- Diseñar la Wed en formato HTML5
- Conceptualizar el manual del usuario tanto para el docente como para el estudiante orientando sobre el uso de los Objetos Virtuales de Aprendizaje (OVA) interactuado con la herramienta.

Metodología

En este trabajo se explora el aprovechamiento de los estudiantes con una aplicación de un OIA como componente del E-Learning que sirviese de apoyo a la formación académica de los estudiantes del laboratorio de medición y consta de 5 fases para desarrollar el OIA.

En la fase uno se crearon unidades dinámicas (escenas dinámicas) con el núcleo interactivo para programas educativos (nippe) Descartes (Juan Guillermo Rivera Berrio, 2015, p. 3) creado en leguaje Java, herramienta de autor que permite configurar para presentar interacciones educativas digitales con números, funciones y gráficas que son necesarias para los procesos de medición como se observa en la figura 1y 2, las escenas de simulación de los instrumentos fueran tomadas del profesor (Eduardo J: Stefanelli, 2016) . Estas unidades interactivas se guardan en archivos de formato HTML5, cada escena se trabaja como un archivo independiente.

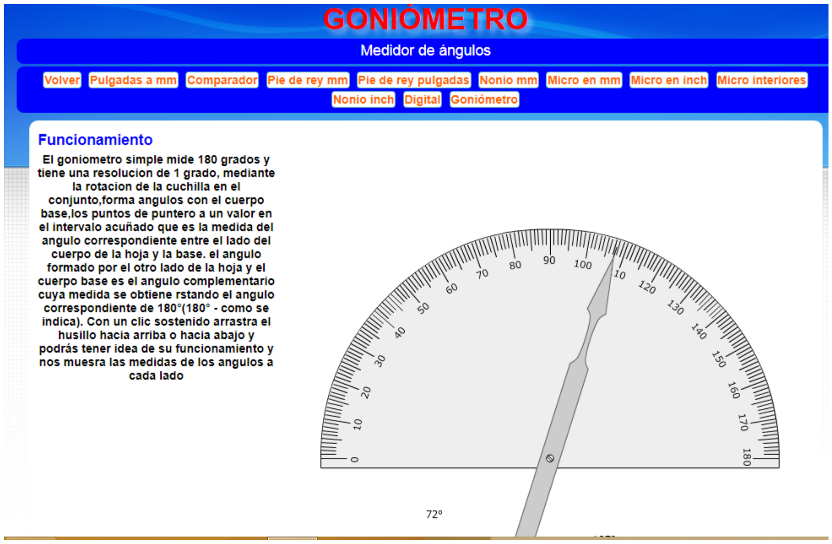


Figura 1. Interactividad Pie de Rey. (Eduardo J: Stefanelli, 2016)

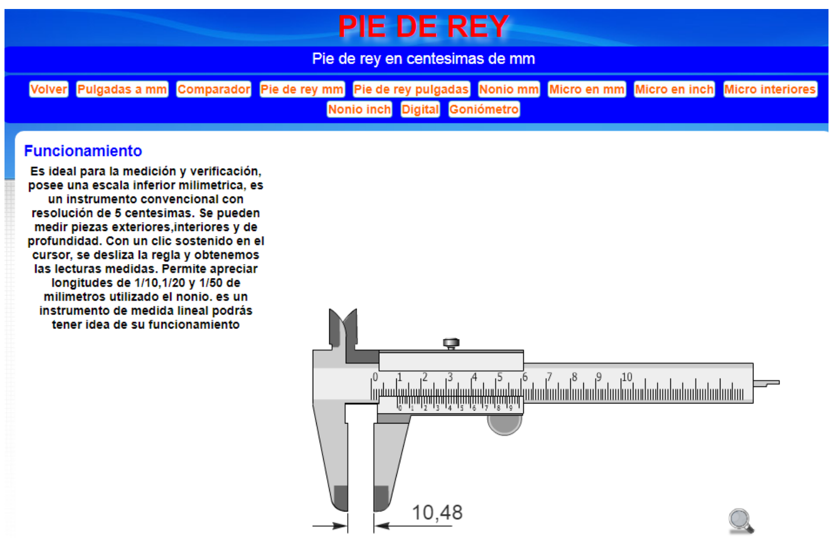


Figura 2. Interactividad del Goniómetro. (Eduardo J: Stefanelli, 2016)

Figura 3. Video Comparador de carátula. (Elaboración propia)

En la fase dos se parte de que los videos se hacen necesarios en las aplicaciones interactivas, para ello se realizan videos caseros que capturan mediciones reales en el laboratorio. Esos videos se modifican con Windows Movie Maker, una herramienta de edición de video gratuita para Windows, que según la documentación del mismo los usuarios pueden crear películas caseras mediante un simple arrastrar y soltar. Crea videos ya sean de tipo motivador o de tipo video lección se le añadió efectos de video como lo ilustra la figura 3, transiciones de video, títulos/créditos, pistas de audio, narración de la línea de tiempo, y Auto Película. Estos videos han de complementar las escenas interactivas realizadas.

En la fase tres se definió el proyecto formativo estableciendo los fundamentos teóricos del OIA. Ello implica analizar las competencias que requieren desarrollar los usuarios para establecer las estrategias de aprendizaje que facilitan el tratamiento de los contenidos. En este diseño formativo busca establecer los parámetros que permitan integrar los contenidos de la medición, la pedagogía necesaria para comunicar ese conocimiento y la tecnología, los requerimientos funcionales y no funcionales de la propuesta como lo ilustra la figura 4, estableciendo las practicas virtuales como parte de la formación estudiante en la duración del semestre.

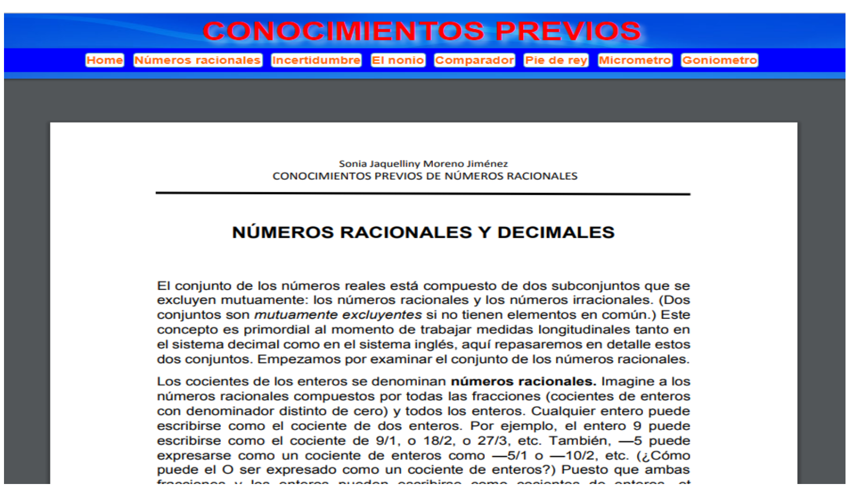


Figura 4 Conocimientos previos (Elaboración Propia tomada del OIA)

Luego del diseño de las Unidades Interactivas se entra a la fase cuatro donde se diseña una web completa que debe contener los Applets en formato HTML5 (HyperText Markup Language, versión 5) con diseño sensible, lo que equivale a decir que puedan ser visualizadas en pc de escritorio, Smarphones y tablets como lo ilustra la interface de la figura 5 y su descripción está en la figura 6. Este diseño sensible permite al estudiante interactuar en cualquier lugar y con cualquier dispositivo con la herramienta diseñada como estrategia didáctica en el desarrollo de algunos temas del laboratorio y estudiar de forma continua y colaborativa para las entregas de sus informes. (Así se dará el debido cumplimiento al objetivo cuatro)

Figura 5. Interface del IOA Elaboración propia

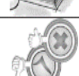
	Menú Inicio: lleva al mapa del sitio donde se describe el contenido
	Menú Videos: lleva a una escena interactiva donde se pude seleccionar cinco videos sobre medición de longitudes y medición de ángulos
	Menú Interactividad: dirige al usuario a cinco unidades interactivas que incluyen evaluaciones cortas.
	Menú Conocimientos previos: muestra documento en formato pdf con las operaciones con fracciones, operaciones con decimales, conversión de medidas
	Menú Referencias: dirige al usuario a bibliografía de la medición y a enlaces web de videos y Recurso Educativos Abiertos REA
	Menú Evaluación: presenta escenas interactivas de evaluación con sopa de letras, juego del ahorcado y preguntas de selección múltiple
cc BY NC	Menú Licencia: orienta al usuario acerca del tipo de licencia Creative Commons.

Figura 6. Descripción de la interface. (Elaboración propia)

Fase cinco en esta fase se explica el manejo del OIA y su propósito queda plasmado en un manual del usuario tanto para el docente como para el estudiante, donde se indica la manera de interactuar a través de ejercicios prácticos resueltos y propuestos.

Resultados o avances

- El OIA en el laboratorio de medición permitió incrementar el trabajo independiente de los estudiantes puesto que contaron con autoevaluaciones en línea y retroalimentación inmediata y el cálculo de conversiones de medida de manera interactiva, evaluación satisfactoria realizada por los usuarios del laboratorio.

- El trabajo de investigación pudo demostrar que los OIA son una herramienta más con la que el docente puede contar para trabajar en las aulas, esto no garantiza un mejor desempeño. Todo depende de la potencialidad y el sentido pedagógico que el docente le dé al recurso.

Reflexiones

- Se debe motivar al docente del laboratorio para que se apropie de los diferentes roles de la enseñanza y el aprendizaje, en este caso, capacitarse y atreverse a usar nuevas estrategias pedagógicas que hagan más significativo el aprendizaje de los estudiantes.
- Tanto docentes como estudiantes del laboratorio de medición están obligados a realizar diferentes acciones que permitan formar y representar la información del currículo la cual se puede desarrollar con el objeto virtual de aprendizaje diseñado.

Referencias bibliográficas

Dorfsman, M. I. (2012). La profesión docente en contextos de cambio: el docente global en la sociedad de la información The teaching profession in changing contexts: The global teacher in the. *RED- DUSC Docencia Universitaria En La Sociedad Del Conocimiento*, *60*(Número 6), 191–203. Retrieved from http://www.um.es/ead/reddusc/6

Echeverría, J. (2012). Expandir la educación al tercer entorno. *Educación Expandida*. Recuperado de http://publicaciones.zemos98.org/expandir-la-educacion-al-tercer,1436

Eduardo J: Stefanelli. (2016). *Arquivos Simulador* | Prof. Eduardo J. Stefanelli. Recuperado octubre 6, 2017, de http://www.stefanelli.eng.br/es/category/simulador-es/

Juan Guillermo Rivera Berrio. (2015). P*lantillas con Descartes-JS*. Recuperado en octubre 6, 2017, de http://proyectodescartes.org/plantillas/descripcion.htm

Nelson Darío Roldán & Francisco Luis Ángel. (2014). Nuevas formas de enseñar y aprender. In *Colombia Aprende Red de conocimiento* (p. 1). Retrieved from http://www.colombiaaprende.edu.co/html/directivos/1598/article-88892.html

Pere Marquès Graells. (2012). *Orientaciones sobre el uso didáctico del vídeo*. Recuperado octubre 5, 2017, de http://www.peremarques.net/videoori.htm

Sophia, S., & Ballesteros-ricaurte, J. A. (2017). Metodología para la construcción de objetos virtuales de aprendizaje, apoyada en realidad aumentada *Sophia*, *13*(1), 4–13.

MOODLE – ALEKS: ACTIVIDADES PARA EL ENRUTAMIENTO DE LOS PROCESOS DE ESTUDIO EN UN CURSO DE MATEMÁTICAS BÁSICAS.

John Fabio Aguilar Sánchez; Yuri Tatiana Ospina Usaquén
Universidad Militar Nueva Granada. (Colombia)
john.aguilar@unimilitar.edu.co, yuri.ospina@unimilitar.edu.co

Resumen
En el proyecto de investigación INV-DIS-2322, "Indicadores de uso eficiente de Entornos virtuales en el área de las matemáticas", financiado por la vicerrectoría de Investigaciones de la Universidad Militar Nueva Granada ha planteado la necesidad de generar espacios de aprendizaje en el contexto de las matemáticas que permitan medir con los parámetros de la medición directa con los actores de la actividad académica y otros indirectos como los informes de uso de las herramientas tecnológicas, el impacto de estos espacios en el aprendizaje. En este sentido hemos desarrollado diferentes actividades en el entorno virtual de aprendizaje Moodle y la plataforma ALEKS, con el fin de apoyar los procesos de estudio y evaluativos para un curso de primer semestre. En el presente trabajo mostraremos los elementos teóricos considerados para construir estos espacios y cómo fueron contextualizados en la versión 31 de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.

Palabras clave: Moodle, GeoGebra, OVA, TIC

Abstract
The research project INV-DIS-2322, "Indicators of efficient use of virtual environments in the field of mathematics", financed by the research pro vice-chancellor of the Military University of Nueva Granada, has raised the need to generate learning spaces in the mathematical context which allow measuring the impact of such spaces in learning, by using the parameters of the direct measurement with the actors of the academic activity and other indirect ones, as the reports on the use of technological tools. We developed different activities in the virtual learning environment Moodle and the ALEKS platform, with the aim of supporting the study and evaluation processes for a first semester course. In this work, we show the theoretical elements that we took into account for constructing the spaces and how they were contextualized in the 31st Latin American meeting of mathematics education.

Key words: Moodle, GeoGebra, (OVA) Virtual learning objects, ICTs

Introducción

El implementar recursos digitales como estrategia de acompañamiento para el fortalecimiento y apropiación de conceptos matemáticos, es un reto que enmarca dos objetivos primordiales. En primer lugar, el recurso debe tener elementos conceptuales y didácticos que reflejen su capacidad de generar apropiación sobre el o los conceptos que se desean abordar y, en segundo lugar, el uso de estos medios, deben generar una evidencia que permita dar cuenta sobre cómo su uso ha repercutido en dicha apropiación de los conceptos matemáticos que en él se tratan. En este sentido, los integrantes del proyecto de investigación "Indicadores de uso eficiente de Entornos virtuales en el área de las matemáticas" hemos planteado un estado del arte frente a cómo se deberían disponer recursos digitales para lograr este objetivo a través de la interacción de diferentes herramientas TIC que van encaminadas con el alcance de las competencias planteadas en el contenido programático de un curso de Matemáticas Básicas. Ahora bien, se han explorado diferentes espacios como el ambiente virtual de aprendizaje Moodle y complementos la plataforma ALEKS (Evaluación y Aprendizaje en Espacios del Conocimiento por sus siglas en inglés). Es importante resaltar que la presente experiencia refleja la primera fase del proyecto de investigación, donde realizamos una revisión bibliográfica con los elementos mínimos a nivel didáctico y técnico para consolidar un espacio de aprendizaje en el cual se pudieran establecer variables a estudiar con parámetros externos a ellas, como lo son las notas del curso en el cual se implementan.

Si bien, el presente escrito es producto del taller denominado "*MOODLE – ALEKS: Actividades para el enrutamiento de los procesos de estudio en un curso de matemáticas básicas*." desarrollado en la RELME 31, dada en la ciudad de Lima, Perú; es importante aclarar que las actividades con las características aquí expuestas ya habían sido implementadas durante el curso de matemáticas de primer semestre, para el primer semestre del año de 2017. Una vez se desarrolló esta actividad, se procedió a realizar un sondeo a los integrantes de la comunidad académica involucrada para conocer su percepción frente a la actividad planteada.

Marco teórico

Según Coll, Mauri y Onrubia, (2008) las TIC pueden enriquecer los procesos de aprendizaje del estudiante en una asignatura particular ya que estas se utilizan como apoyo en la adquisición de procedimientos, interpretación de resultados, en la organización de sus actividades conforme a los avances y tiempo de dedicación de los estudiantes y ayudarles a reconocer de manera autónoma sus dificultades y habilidades.

Como grupo de investigación reconocemos en la plataforma ALEKS (Aleks Corporation, 2000), un software de evaluación y aprendizaje que, mediante sofisticados algoritmos de inteligencia artificial basado en las Cadenas de Markov, cálculo de probabilidades y procesos estocásticos, genera ejercicios prácticos y de evaluación adaptados a cada estudiante; evalúa permanentemente los conocimientos y a partir de los resultados de la evaluación. ALEKS reconoce los progresos del estudiante, los temas que le causan dificultad, y lo que ya está "listo para aprender", formando una ruta individualizada de aprendizaje para cada estudiante, asignándole solamente los contenidos para los cuales está preparado.

Dentro de esta exploración surge el propósito de generar un espacio de discusión en torno a la interacción de estas herramientas y su pertinencia en el aprendizaje de las matemáticas básicas. El propósito de taller construido es presentar diferentes escenarios de interacción con las herramientas interactivas y adaptativas empleadas en la institución, particularmente ALEKS, la cual plantea la incorporación de parámetros de aprendizaje adaptativo en la construcción de rutas de aprendizaje con base en las necesidades propias de cada estudiante. Es importante destacar que este modelo de implementación de recurso digital, lo postula como una herramienta complementaria al desarrollo de las actividades docentes con el docente que lidera esta materia, lo cual, ha sido planteado en diferentes escenarios como los trabajos de Huapaya & Sandoval (2016) y Alberto & Frausin (2016).

Muestra y metodología

El diseño de estas actividades surge como plan de refuerzo a estudiantes de UMNG para las materias de primer semestre, para los requisitos mínimos en los temas impartidos para las carreras. La población objetivo en la implementación de esta actividad fue 2114 y 47 docentes. Para los resultados aquí presentados se contó con una muestra 392 estudiante que respondieron las encuestas de percepción frente a estos recursos y 13 docentes

En la construcción de un curso virtual mediante el uso de la plataforma ALEKS, se hace necesario realizar en primer lugar, una revisión de los diferentes temas de la cual ella dispone, esto teniendo en cuenta que el recurso ya tiene predefinidos lo temas, ejercicios y aplicaciones que dispone para que el estudiante pueda aprender y estos no necesariamente no coinciden con los propósitos y metas por competencias que tiene la institución para cada uno de estos cursos, planteando espacios previos de discusión sobre cómo implementar estos recursos e-learning, siguiendo parámetros de discusión como los planteados el trabajo de Abraira, C.F. & Santamaría, F. (2007). Entre los resultados de la discusión entre docentes del área, destacó la necesidad de plantear 5 tipos de curso, de acuerdo con las necesidades de los estudiantes que harían uso de estos espacios. La clasificación fue Matemáticas para ingeniería, Ciencias Administrativas y contables, Biología Aplicada, Carreras tecnológicas y administración de la seguridad y la salud ocupacional.

Un elemento importante en la construcción de estos espacios de aprendizaje fue una fase técnica en la cual se configuró la integración entre el ambiente virtual de aprendizaje Moodle y la plataforma ALEKS, la cual se encontraba alojada en una página web externa a la del campus. Este proceso es importante en la medida que cada uno de estos entornos tenían sus propios sistemas de seguridad y autenticación, los cuales en esta fase se vincularon en uno solo, lo cual, en la percepción del estudiante, hacía de las dos, una sola plataforma, como se muestra en la figura 1.

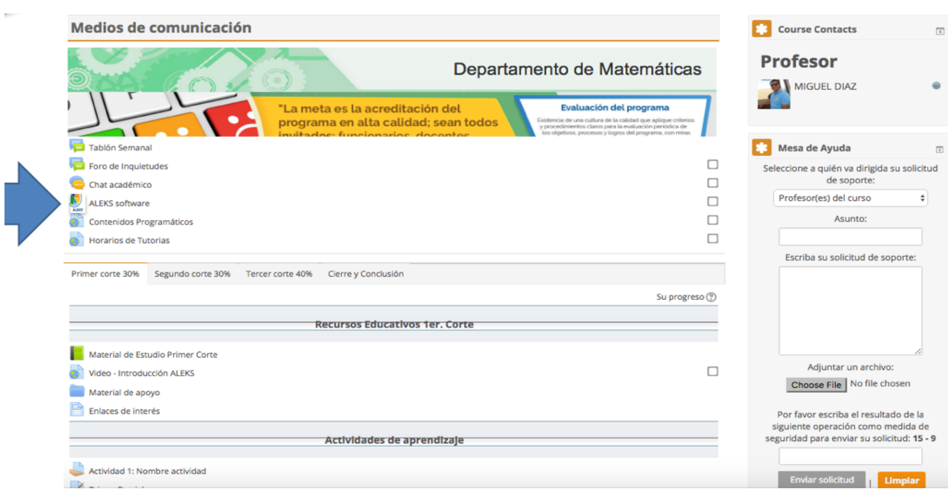


Figura 1. Ambiente Moodle en el campus virtual de la Universidad (Plataforma)

La siguiente fase de la construcción de estos recursos fue el tipo de herramientas que se usarían, ya que la plataforma ofrece los siguientes tipos de actividad

a. Actividades objetivo. En este caso, la plataforma toma los temas que previamente han sido seleccionado por el docente y segmentados en intervalos de tiempo, para que la plataforma de forma autónoma, a partir de una prueba inicial, generé una ruta de aprendizaje personalizada para el estudiante. Las actividades por objetivos permiten adicionalmente la posibilidad de plantear espacios de evaluación periódicas que verifiquen si los conceptos planteados en espacios de tiempo anteriores estén claros para el estudiante, siempre y cuando estos conceptos sean prerrequisito de un tema por ver.

b. Actividades Complementarias. Si bien, la fortaleza del uso de esta plataforma está en el establecimiento de una ruta de aprendizaje personalizada para cada estudiante, esta permite realizar otras actividades que den cuenta del acompañamiento al proceso de aprendizaje, como lo son:

c.
    i. Progreso. Esta actividad permite hacer una medición de la cantidad de temas propuestos para el curso y establecer metas de tiempo para los mismos.
    ii. Tiempo. La plataforma tiene la capacidad de medir el tiempo efectivo invertido por el estudiante en realizar sus actividades en la plataforma, dando la posibilidad de establecer metas de tiempo en ella.
    iii. Meta Temas. Esta permite medir fracciones de los temas propuestos en el curso.
    iv. Tarea. Esta actividad permite establecer un paquete de ejercicios por fuera de la estrategia planteada en los objetivos.
    v. Examen. Como su nombre lo indica, este ítem da la posibilidad de agregar evaluaciones adicionales a las propuestas en las metas por objetivos.
    vi. Verificación de conocimientos. A diferencia del examen, este espacio permite establecer evaluaciones de forma automática a partir de los conceptos que ella ha considerado como dominados por parte del estudiante.

Como resultado de las sesiones de socialización del uso de estos recursos en la comunidad docente, se llegó a la conclusión que los tipos de actividades que mejor se ajustaban a las necesidades de la población estudiantil son actividades por objetivos, progreso, tiempo y prueba de conocimientos. Esta última fue configurada para que asumiera el rol de una evaluación de finalización del curso, de tal manera que se tuviera una prueba con las mismas características que la aplicada al inicio del curso y que diera cuenta de los posibles avances en la consolidación de los conceptos abordados.

■ Resultados y Conclusiones.

Como ya mencionamos anteriormente, las actividades implementadas en el taller fueron trabajadas por los estudiantes de Matemáticas de Primer Semestre de la Universidad Militar Nueva Granada, A continuación, presentamos los resultados más relevantes acerca de la percepción en el trabajo con el software ALEKS.

Con relación al ítem “En una escala de 1 a 5, Pondere cuán efectivas han las estrategias de apoyo al estudiante para el uso de la plataforma ALEKS” se puede evidenciar cómo la comunidad académica compuesta por docentes y estudiantes dan una respuesta positiva a las estrategias y elementos didácticos sometidos en esta propuesta tecnológica como se evidencia en la figura 1, sin embargo en la figura 2, donde se representa los resultados del ítem “En una escala de 1 a 5, Pondere qué tan complejo es el uso de la plataforma ALEKS” se refleja una brecha generacional en términos de la empatía al uso de recursos tecnológicos, como lo plantea Fajardo, Villalta, & Salmerón (2015), lo cual representa un reto importante en términos de la planeación de espacios futuros en los cuales se genere un mayor acercamiento de la comunidad docente al uso de recursos digitales.

Un elemento que discutir fue el tiempo que debe ser invertido en estos espacios de aprendizaje complementario para que sean efectivos en el alcance de las metas del curso. Con relación a esto, la figura 3, refleja que para la comunidad estudiantil hay una percepción heterogénea frente al tema, sin embargo, resalta el hecho que para más del 50 % de los encuestados resulta importante invertir más de 3 horas en esta actividad, lo cual está por encima del tiempo ponderado por la comunidad docente que participó en la actividad.

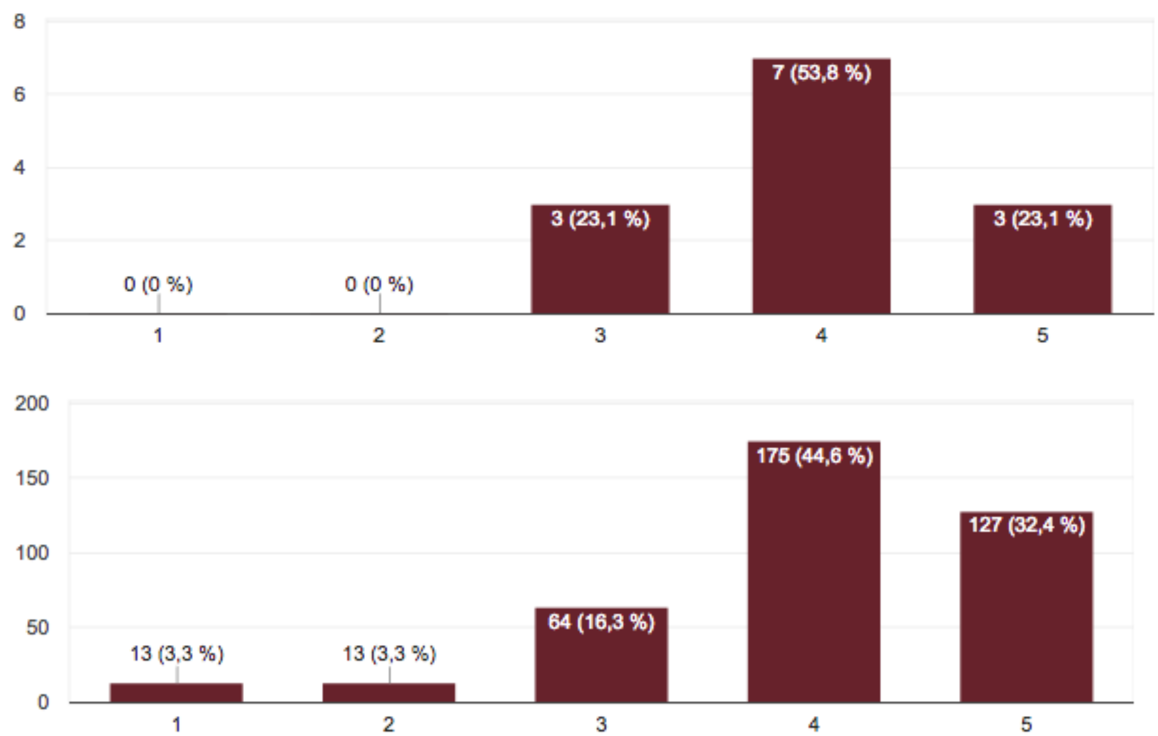


Figura 2. Resultados de encuesta (efectividad). Elaboración propia.

En la encuesta de la figura 2 se pidió responder “En una escala de 1 a 5, Pondere cuán efectivas han sido las estrategias de apoyo al estudiante para el uso de la plataforma ALEKS”.
En el panel superior se refleja el histograma de la respuesta dada por la muestra de docentes. En el panel inferior se refleja el histograma de la respuesta dada por la muestra de estudiantes.

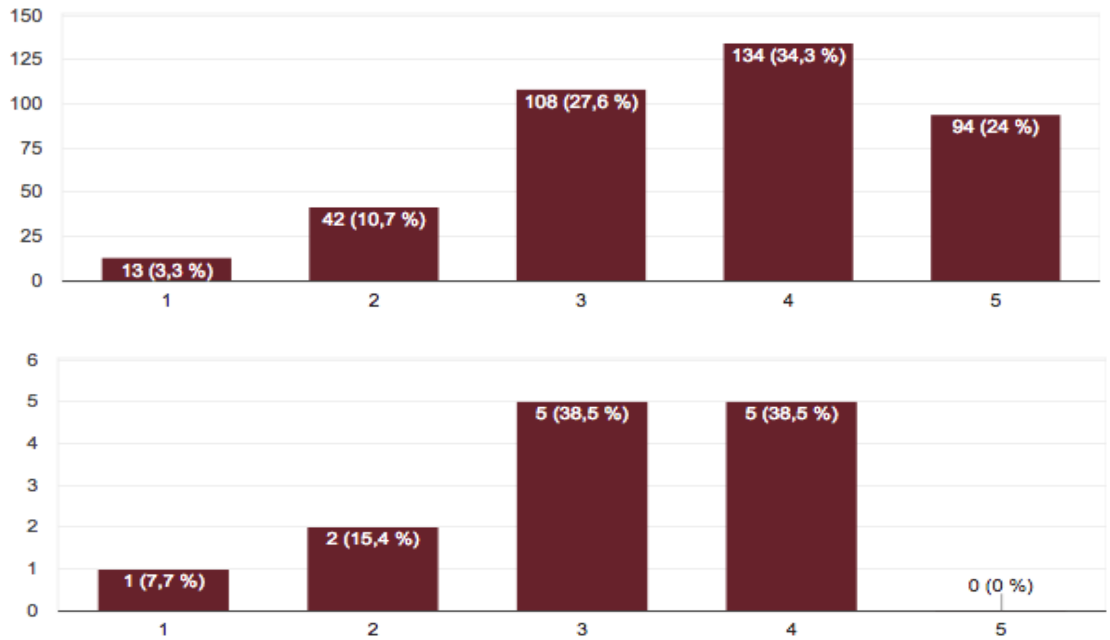


Figura 3. Resultados de encuesta (complejidad). Elaboración propia

En este caso preguntaba “En una escala de 1 a 5, Pondere qué tan complejo es el uso de la plataforma ALEKS”.

En el panel superior se refleja el histograma de la respuesta dada por una muestra de 13 docentes. En el panel inferior se refleja el histograma de la respuesta dada por una muestra de estudiantes.

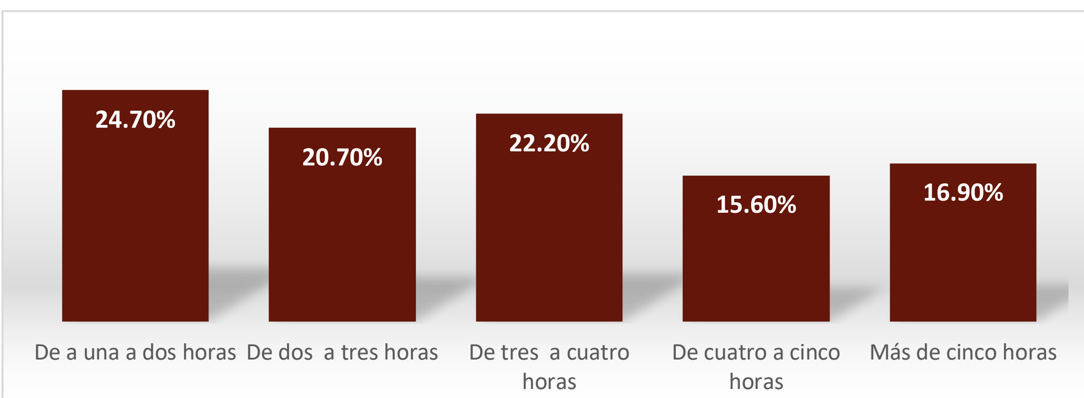


Figura 4. Resultados de encuesta (tiempo de dedicación)

Aquí se pidió responder “El tiempo de dedicación semanal para estudio en ALEKS, debería ser:”

Referencias bibliográficas

Abraira, C.F., & Santamaría, F. (2007). Creación de comunidades de aprendizaje en entornos de e-learning 2.0: Una experiencia en formación didáctico/matemática de maestros. *Comunicación y Pedagogía*, *223*, 9-16. Barcelona: Centro de Comunicación y Pedagogía.

Aleks Corporation. (2000). *Aleks for Mathematics, 6-weeks Standalon*e. McGraw-Hill. Science Engineering.

Coll, C., Mauri, T., & Onrubia, J. (2008). La utilización de las tecnologías de la información y la comunicación en la educación: Del diseño tecno-pedagógico a las prácticas de uso. En C. Coll y C. Monereo (eds.), *Psicología de la educación virtual, Enseñar y Aprender con las tecnologías de la Información y la Comunicación* (pp. 74-103). Madrid: Morata, .

Huapaya Gómez, E., & Sandoval Peña, J. C. (2017). La resolución de problemas en entornos virtuales: Propuesta didáctica en estudiantes de Matemática I, II CPEL Universidad San Ignacio de Loyola. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 30*, 1553-1563. Universidad San Ignacio de Loyola

Fajardo, I., Villalta, E., & Salmerón, L. (2015). ¿Son realmente tan buenos los nativos digitales? Relación entre las habilidades digitales y la lectura digital. *Anales de Psicología*, *32*(1), 89-97. https://dx.doi.org/10.6018/analesps.32.1.185571

Alberto, M., & Frausin, A., (2016). Experiencias pedagógicas significativas en matemática mediadas por recursos tecnológicos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 29*. 1354-1361.

MPI-UMNG. (2011). Modelo Pedagógico Institucional. *Lineamientos y orientaciones*. Bogotá. Universidad Militar Nueva Granada.

Sandoval, C. (2015). *Análisis descriptivo de una experiencia de aprendizaje mediada por el uso del software educativo Aleks en cuarto año básico en el subsector de matemática del colegio Boston College de Maipú en el año 2010*. (Tesis de maestría) Universidad de Chile, Santiago-Chile

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 5 / USO DE LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

GENESIS INSTRUMENTAL DE LA RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEA MEDIADA POR GEOGEBRA

Daysi Julissa García-Cuéllar, Mihály Martínez-Miraval, Jesús Victoria Flores Salazar
Pontificia Universidade Católica de São Paulo, Pontificia Universidad Católica del Perú, Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas-TecVEM. (Brasil, Perú)
ra00193072@pucsp.edu.br, martinez.ma@pucp.edu.pe, jvflores@pucp.edu.pe

Resumen
Esta investigación tiene como objetivo analizar la génesis instrumental de la noción de razón de cambio instantánea mediada por el GeoGebra en estudiantes de administración de los primeros ciclos de una universidad particular de Lima-Perú. Como base teórica y metodológica utilizamos aspectos del Enfoque Instrumental y aspectos de la Ingeniería Didáctica, respectivamente. Como resultado de las acciones de los estudiantes, al desarrollar las actividades, se identificaron esquemas de utilización relacionados con la razón de cambio instantánea, lo cual mostró una instrumentalización e instrumentación de dicha noción.

Palabras clave: génesis instrumental, razón de cambio instantánea, GeoGebra

Abstract
This investigation aims to analyze the instrumental genesis of the notion of instantaneous rate of change through GeoGebra in Administration students in their first semester at a private university of Lima-Peru. As theoretical and methodological basis, we used aspects from the Instrumental Approach and aspects of Didactic Engineering, respectively. Resulting from students' actions, when carrying out the activities, schedules of use related to instantaneous rate of change could be identified, which showed the instrumentalization and implementation of such notion.

Key words: instrumental genesis, instantaneous rate of change, GeoGebra

Introducción

En el área de Educación Matemática existen investigaciones que muestran la necesidad de realizar estudios sobre la razón de cambio instantánea (Orton, 1983; Dolores, 2007; Villa-Ochoa, González-Gómez y Carmona-Mesa, 2018), además de esta relevancia, otra de las razones por la que estamos interesados en investigar este contenido es que está presente en los cursos de Cálculo de muchas especialidades a nivel universitario, lo cual evidencia la pertinencia de nuestra investigación.

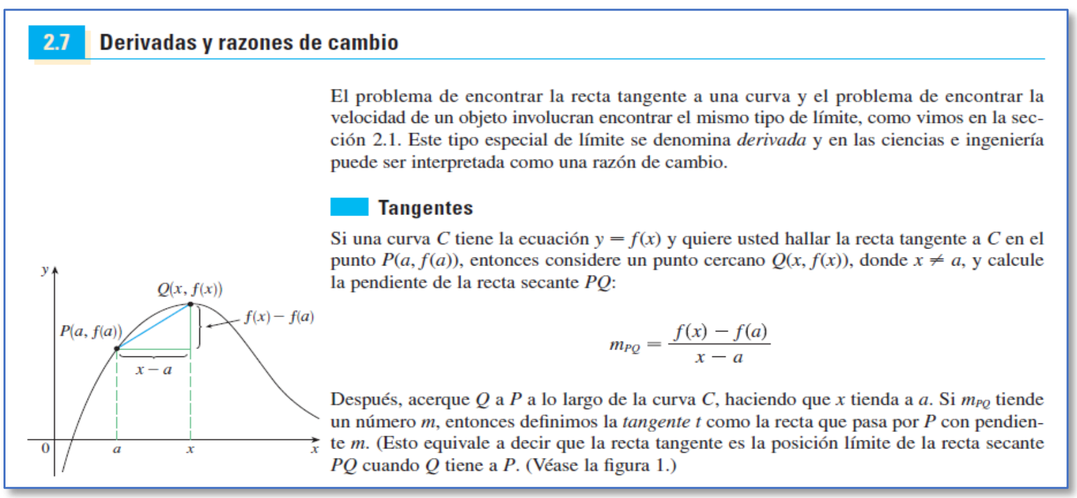
Artigue (1995) sostiene que, aunque se puede enseñar a los estudiantes a realizar de manera más o menos mecánica algunos cálculos y a resolver algunos problemas estándar, hay dificultades para que los jóvenes logren una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que conforman el centro del análisis matemático.

En ese sentido, Silvia (2013) señala que por medio de la derivada es posible cuantificar y describir la rapidez de la variación de fenómenos de la naturaleza o de la práctica, no obstante, en el aprendizaje formal, al estudiante le resulta muy complejo entender la razón de cambio. Entonces para identificar cómo esta noción está presente en los libros de texto de cálculo a nivel universitario, presentamos brevemente la revisión de tres libros de textos que se usan en dichos cursos en universidades de Lima – Perú (ver tabla 1).

Tabla 1. Libros de texto usados en la enseñanza del cálculo

Libro de texto	Autor
Cálculo de una variable (7° edición)	James Stewart
Cálculo de una variable (12° edición)	George Thomas
Cálculo 1 (9° edición)	Ron Larson

Se observó que en los tres libros se presenta la noción de derivada asociada al cálculo de la pendiente de una recta tangente a la gráfica de una función, y la razón de cambio instantánea solo se trabaja como una aplicación de la derivada, como se puede observar en la figura 1, y no se presentan tareas/actividades en las que el estudiante pueda construirla.


2.7 Derivadas y razones de cambio

El problema de encontrar la recta tangente a una curva y el problema de encontrar la velocidad de un objeto involucran encontrar el mismo tipo de límite, como vimos en la sección 2.1. Este tipo especial de límite se denomina *derivada* y en las ciencias e ingeniería puede ser interpretada como una razón de cambio.

Tangentes

Si una curva C tiene la ecuación $y = f(x)$ y quiere usted hallar la recta tangente a C en el punto $P(a, f(a))$, entonces considere un punto cercano $Q(x, f(x))$, donde $x \neq a$, y calcule la pendiente de la recta secante PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Después, acerque Q a P a lo largo de la curva C, haciendo que x tienda a a. Si m_{PQ} tiende un número m, entonces definimos la *tangente* t como la recta que pasa por P con pendiente m. (Esto equivale a decir que la recta tangente es la posición límite de la recta secante PQ cuando Q tiene a P. (Véase la figura 1.)

Figura 1. Derivadas y razón de cambio (Stewart, 2011; p. 143)

Por lo anterior, el objetivo de nuestra investigación se centra en analizar la génesis instrumental de la razón de cambio instantánea de una función mediada por el GeoGebra en estudiantes de la carrera de administración en una universidad privada de Lima – Perú.

Para analizar este fenómeno utilizamos como marco teórico aspectos del Enfoque Instrumental de Rabardel (1995) y como marco metodológico, aspectos de la Ingeniería didáctica de Artigue (1995), que presentamos a continuación.

Aspectos del Enfoque Instrumental y de la Ingeniería Didáctica

El Enfoque Instrumental aborda la dimensión tecnológica de la educación matemática, articulando los aspectos importantes de la integración tecnológica en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Salazar (2009), en su investigación, presenta las nociones claves de este Enfoque que son las siguientes:
Esquema: Es una organización invariante de la conducta del sujeto para una clase determinada de situaciones.
Artefacto: Es un objeto material o simbólico, destinado a dar sustento a la actividad del sujeto en la ejecución de un cierto tipo de tarea.
Instrumento: Es lo que un sujeto construye a partir del artefacto (figura 2); es entonces una entidad mixta que contiene a la vez un artefacto, material o no, y esquemas de utilización construidos por el sujeto durante su interacción.

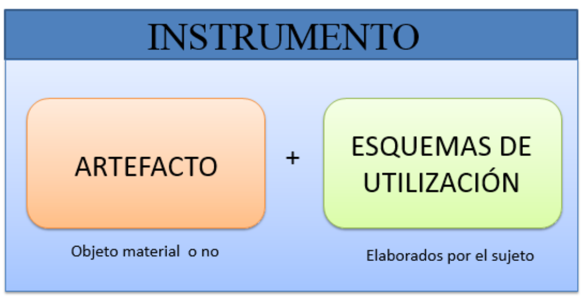


Figura 2. Componentes de un instrumento. Adaptado de García-Cuéllar (2014)

Así, de acuerdo a Rabardel (1995), el Enfoque Instrumental estudia la diferencia que existe entre el artefacto, instrumento y los procesos que desenvuelven la transformación progresiva del artefacto en instrumento, transformación que denominó como proceso Génesis Instrumental. El autor considera tres polos importantes en la Génesis instrumental, estos son: el sujeto, que puede ser un usuario, operario, trabajador o agente; el instrumento, que se refiere de la herramienta, máquinas, sistemas, utensilio, etc.; y el objeto, al cual va dirigida la acción con ayuda del instrumento, este puede ser la materia prima, objeto de la actividad o trabajo.

El investigador sostiene que el instrumento no existe en sí, sino que es el resultado de asociar el artefacto a la acción del sujeto, como medio para la misma. En nuestro caso, el artefacto simbólico es la razón de cambio instantánea. El autor señala que el artefacto pasará al estado de instrumento, cuando el sujeto le asigne los esquemas de utilización correspondientes.

En cuanto a la génesis instrumental, esta consta de dos dimensiones: La instrumentalización y la instrumentación.

Los procesos de instrumentalización están dirigidos hacia el artefacto: selección, agrupación, producción e institución de funciones, usos desviados, atribuciones de propiedades, transformaciones del artefacto, de su estructura, de su funcionamiento, etc. […] los procesos de Instrumentación están relacionados con el sujeto: con la emergencia y evolución de los esquemas sociales de utilización y de acción instrumentada: su constitución, su evolución por acomodación, coordinación y asimilación recíproca, la asimilación de artefactos nuevos a los esquemas ya constituidos, etc. (Rabardel, 1995, p. 215).

Por lo anterior, las dos dimensiones de la Génesis Instrumental dependen de su orientación:
La instrumentalización está dirigida hacia la parte artefactual del instrumento, consta del enriquecimiento de las propiedades del artefacto por parte del sujeto. Es decir, es el resultado de la atribución de una función al artefacto por parte del sujeto.

La instrumentación está dirigida hacia el sujeto. Se refiere a la construcción de esquemas de uso por parte del sujeto, relativos a la ejecución de ciertas tareas. En este proceso se lleva a cabo la asimilación de nuevos artefactos a los esquemas y la acomodación de los esquemas para dar nuevos significados a los artefactos.

En ese sentido, Trouche (2016) sostiene que estas dos dimensiones de la Génesis Instrumental no son independientes una de la otra, sino que son entrelazadas. Pero, para distinguirlos en el análisis, se puede focalizar por un lado en el estudiante (¿En qué medida la integración de un nuevo artefacto modifica la forma de su actividad?), y por otro lado, en el artefacto (¿En qué medida este aporta al vestigio de la actividad del estudiante, de su poder creativo?).

El Enfoque Instrumental se basa en la noción de esquema de Vergnaud (1996), para este último un esquema:

- Es una organización invariante de la actividad para una clase de situación dada.
- Está formado necesariamente por cuatro componentes:
    - ✓ Un objetivo, sub-objetivo y anticipaciones
    - ✓ Reglas de acción, formada de informaciones y control
    - ✓ Invariantes operatorios (reglas de acción y teoremas en acción)
    - ✓ Posibilidades de inferencias en una situación

Rabardel (1995), a partir de esta noción de esquema, define los esquemas de utilización como el conjunto estructurado de las características generalizables de la acción que permiten repetir la misma acción o aplicarlas en nuevos contextos. Estos esquemas, a la vez, pueden ser clasificados en esquemas de uso (dirigidas a tareas secundarias), esquemas de acción instrumentada (dirigidas a la tarea principal o primaria) y esquemas de acción colectiva instrumentada (cuando el colectivo comparte el mismo instrumento o trabaja con la misma clase de instrumento, buscando alcanzar una meta en común). En nuestro estudio nos centraremos en los esquemas de uso y de acción instrumentada.

En cuanto a nuestra metodología, utilizaremos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995). La noción de ingeniería didáctica surgió en la didáctica de las matemáticas a comienzos de los años ochenta. Se denominó con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero, quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Al igual que un ingeniero, la autora sostiene que el profesor concibe, realiza, observa y analiza secuencias de enseñanza para lograr el aprendizaje de un contenido matemático determinado por un grupo específico de estudiantes.

Experimento y análisis

Con base en aspectos de la Ingeniería Didáctica y del Enfoque Instrumental diseñamos e implementado *applets* en GeoGebra en base a deslizadores y algunas propiedades de arrastre propias del software. La parte experimental se desarrolló con 10 estudiantes del curso de matemática de la carrera de administración, en un laboratorio con computadoras.
Las actividades se realizaron en dos encuentros. La actividad 1 contiene 5 subactividades y la actividad 2, contiene 3 subactividades.
A continuación presentamos los análisis a priori y a posteriori de dos subactividades de cada una de las actividades propuestas.

Actividad N° 1:

Abra el archivo Actividad_1.ggb. En la vista gráfica del programa, se han dibujado la función *f* cuya regla de correspondencia es $f(x)=0{,}25x^2+2$, y una recta *L* que pasa por los puntos A y B que pertenecen a la gráfica de *f*. Asimismo, se ha diseñado el deslizador D que permite mover el punto B.

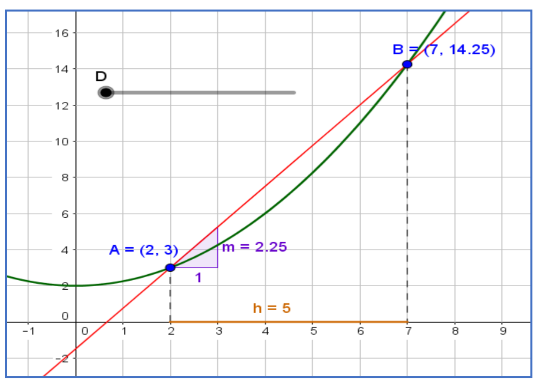


Figura 3. Imagen del archivo Actividad_1.ggb: Función *f*, recta secante y pendiente. Elaboración propia.

Manipule el deslizador D y complete la tabla.

Abscisa del punto A (x_A)	Abscisa del punto B (x_B)	*h*	*m*	Razón de cambio promedio de *f* cuando *x* aumenta de x_A a x_B
2	4,001			
2	3,001			
2	2,101			
2	2,001			

a) Según los datos de la tabla, indique a qué valor cree usted que se aproxima la razón de cambio promedio de *f* cuando *h* tiende a 0, es decir, en el punto A. Explique.
b) ¿cuál es el valor de la pendiente "m" cuando el valor de h es cero?

A priori, consideramos que los estudiantes movilizarían esquemas preexistentes como son las nociones de pendiente de recta secante, de funciones y razón de cambio promedio (RCP). Luego, al manipular el deslizador D, se esperaba que generaran esquemas de uso de la aproximación de *m* y RCP, cuando el parámetro *h* tiende a cero; asimismo, que generaran esquemas de acción instrumentada de la razón de cambio instantánea como la pendiente de recta tangente a la gráfica de una función.

De acuerdo a lo previsto, mostramos el análisis a posteriori de uno de los estudiantes que denominaremos como Sebastián. Al completar la tabla correctamente, se pudo observar que el estudiante movilizó esquemas como pendiente de recta secante, de funciones y razón de cambio promedio (RCP).

Respecto a la pregunta a, el estudiante respondió:

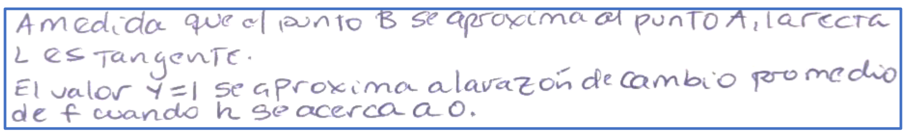

A medida que el punto B se aproxima al punto A, la recta L es Tangente.
El valor Y=1 se aproxima a la razón de cambio promedio de f cuando h se acerca a 0.

Figura 4. Respuesta del estudiante Sebastián en su ficha de trabajo. Elaboración propia.

Como se muestra en la figura 4, Sebastián al manipular el deslizador D, moviliza esquemas de uso, recta tangente, razón de cambio promedio, coordenadas de un punto. Al responder que la recta L es tangente a la curva a medida que el punto A se aproxima a B, nos da indicios de que ha generado el esquema de acción instrumentada de la razón de cambio instantánea como la pendiente de recta tangente a la gráfica de una función.

Actividad N° 2:

El dueño de una tienda calculó su utilidad *U* (en miles de soles) en cada uno de los 11 meses que estuvo la tienda operativa, y la representó mediante el siguiente modelo matemático $U(x) = 0{,}05x^{3} - 0{,}9x^{2} + 4{,}05x + 1$, donde *x* es el número de meses que transcurrieron desde su apertura. Abra el archivo Utilidad.ggb y desarrolle la siguiente actividad.

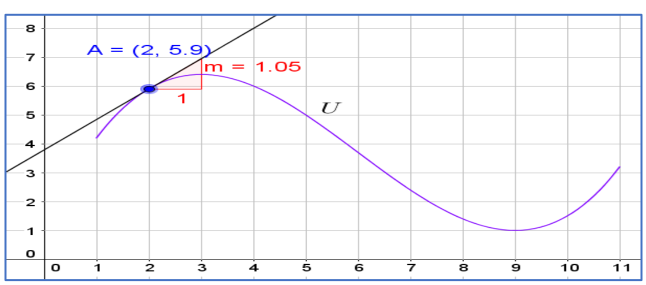
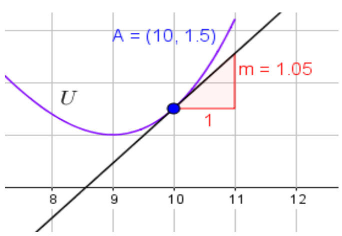


Figura 5. Imagen del archivo Utilidad.ggb: Utilidad en función del tiempo. Elaboración propia.

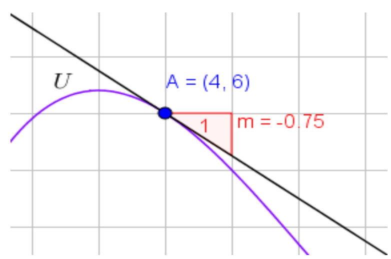
a. ¿Se puede afirmar que cuando han transcurrido diez meses de la apertura de la tienda, la utilidad aumenta a razón de 1,5 miles de soles por mes? Justifique.
b. ¿Luego de cuantos meses desde la apertura de la tienda, la utilidad disminuyó a razón de 0,75 miles de soles por mes? Justifique.

A priori, se esperaba que al realizar el arrastre del punto A, los estudiantes reconocieran lo que representa la pendiente de la recta trazada y las coordenadas de dicho punto, en el contexto de la situación, movilizando los esquemas de uso, pendiente de recta, función, coordenadas de puntos; y el esquema de acción instrumentada, razón de cambio instantánea. Se esperaba que los estudiantes indiquen en la primera pregunta que la afirmación es falsa porque luego de diez meses la utilidad aumenta a razón de 1,05 miles de soles por mes y que asocien en la segunda pregunta, el término disminuir con una razón de cambio instantánea negativa, es decir, m = -0,75.

A posteriori, en las acciones de Sebastián, se apreció que el estudiante utilizó la pendiente de una recta tangente de la función utilidad para dar respuesta a las preguntas, movilizando el esquema de acción instrumentada razón de cambio instantánea como se puede apreciar en sus respuestas en la figura 6.



No, la utilidad aumenta en 1.05 miles de soles por mes.



En el cuarto mes la utilidad disminuyó a razón de 0.75 miles soles por mes.

Figura 6. Respuestas de Sebastián en la actividad 2. Elaboración propia.

Conclusiones

La transformación del artefacto simbólico razón de cambio instantánea en instrumento puede ser constatada cuando los estudiantes resuelven las actividades propuestas sobre el artefacto en estudio. El análisis realizado sobre la forma como fueron movilizados los esquemas de utilización permite verificar cómo se da el proceso de Génesis Instrumental.

Es importante destacar que en la Génesis instrumental, el estudiante (Sebastián) maneja desde ya un repertorio de esquemas y que estos son acomodados o generalizados al nuevo artefacto para atribuirle un cambio de significado. Por ejemplo, en esta investigación, los esquemas como función, tangente y razón de cambio promedio son parte del repertorio que movilizan los estudiantes para atribuirle un significado a la razón de cambio instantánea.

El GeoGebra contribuyó en el aprendizaje de la razón de cambio instantánea por las características de sus herramientas, especialmente, el arrastre y los deslizadores.

Agradecimientos

Agradecemos al Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP) y a la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú por el apoyo en el fortalecimiento del grupo y línea Tecnologías y Visualización en Educación Matemática: TecVEM-IREM y TecVEM-MEM.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (2007). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada*. México D.F: Ediciones Díaz de Santos - Universidad Autónoma de Guerrero.

García-Cuéllar, D. J. (2014) *Simetría axial mediada por el GeoGebra: un estudio con estudiantes de primer grado de educación secundaria*. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/307466908_Simetria_axial_mediada_por_el_GeoGebra_un_estudio_con_estudiantes_de_primer_grado_de_educacion_secundaria

Larson, R. y Bruce, H. (2010). *Calculo 1*. México D.F.: Mc Graw Hill.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies : aproche cognitive des instrumentns contemporains*. Paris: Armand Colin.

Orton, A. (1983). Student's understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics* 14 (3), pp.235-250.

Salazar, J. V. F. (2009). *Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de transformações geométricas no espaço*. (Tesis doctoral). Pontificia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

Silvia, A. (2013). *Estudio de la derivada desde la variación y el cambio. Análisis histórico-epistemológico*. Recuperado de: www.fisem.org/www/union/revistas/2013/33/ARCHIVO9.pdf

Stewart, J. (2011). *Cálculo de una variable. Trascendentes Tempranas.* México, D. F.: Thomson Editores.

Thomas, G. (2010). *Cálculo de una variable.* Décimo segunda edición. México, D. F.: Pearson

Trouche, L. (2016). *Compreender o trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático*. I LADIMA, Bonito, Brasil.

Vergnaud, G. (1996). *A teoria dos campos conceptuais. En Jean Brun (org), Didáctica das matemáticas*. (pp. 155-189). Lisboa: Horizontes pedagógicos.

Villa-Ochoa, J., González-Gómez, D. y Carmona-Mesa, J. (2018). Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea en Matemáticas. *Formación Universitaria 11*(2), 5-34. DOI. 10.4067/S0718-50062018000200025

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

ECUACIONES DIFERENCIALES, UNA PROPUESTA DE APRENDIZAJE SEMIADAPTATIVA

Rubén-Darío Santiago-Acosta
Tecnológico de Monterrey. (México)
ruben.dario@itesm.mx

Resumen
Este trabajo es el resultado de aplicar un ambiente de aprendizaje semiadaptativo en un curso en línea de ecuaciones diferenciales. El objetivo es fortalecer las competencias de análisis y solución de modelos matemáticos en estudiantes de ingeniería. Se utilizó la plataforma OpenEdX como: respositorio de materiales diversos y organizador de diferentes actividades de aprendizaje, lo que permitió reducir el tiempo de estudio en el aula de algoritmos de solución de ecuaciones diferenciales y, a su vez, incrementar el tiempo dedicado a la modelación matemática. El curso consta de cinco módulos que contienen: material de apoyo, prácticas de experimentación de conceptos, entrenador de ejercicios y problemas, actividades integradora y evaluación semiadaptativa. El sistema de evaluación se construyó mediante programas que cambian aleatoriamente las preguntas con contenido matemático y que retroalimentan inmediatamente. Las prácticas de exploración fueron elaboradas en el paquete Mathematica que permite analizar simbólica y gráficamente soluciones de ejercicios y problemas. En el trabajo se muestran varios elementos usados en su construcción y se contrastan resultados de aprendizaje de 32 estudiantes que tomaron el curso recientemente.

Palabras clave: OpenEdX, prendizaje adaptativo, retos

Abstract
This report shows the results of applying a semi-adaptive learning environment in an online course of differential equations. It is intended to develop the analytical and mathematical problem solving skills of engineering students. An OpenEdX platform was used to store and organize materials and learning activities, which contribute to save time of study in the classroom of algorithmic solutions of differential equations, in turn it allows increasing the time alloted to mathematical modeling. This course is divided into five modules, which involve: material aids, concept experimentation practices, trainer of exercises and problems, integrated activities, and semi-adaptive evaluation. The evaluation system was designed as software that changes the questions with mathematical content at ramdom, and offers an immediate feedback to the students. Exploration exercises and activities were developed in the Mathematics package, which allows the symbolic and graphic analysis of the solutions to problems and exercises. In this work, we show several elements that were used for the design of this course, and compare the learning skills obtained through the results of 32 students that recently took this course.

Key words: OpenEdX, adaptive learning, challenges

Introducción

El curso de Ecuaciones Diferenciales (ED) que se ofrece en el Tecnológico de Monterrey (ITESM) es amplio ya que contiene cinco temas complejos, difíciles de cubrir a profundidad en el tiempo asignado. Diversos estudios indican que los alumnos que toman el curso no son capaces de analizar situaciones problemáticas en contexto debido en gran medida a dos factores, a saber: el precario desarrollo de sus habilidades y competencias de resolución de problemas y la promoción excesiva de métodos algorítmicos de solución de ecuaciones diferenciales (Santiago, 2002). Como consecuencia, se sacrifica la modelación matemática y el análisis de situaciones complejas para dedicar mayor espacio al estudio de los algoritmos. Se pierde así la posibilidad de utilizar las ED para describir fenómenos que ocurren en la naturaleza asociados con la física, la economía, la demografía, la ecología, entre muchas otras áreas. En un trabajo reciente, se plantea la necesidad de integrar herramientas de tecnología móvil para reducir los tiempos de algoritmia en clase y aumentar las actividades de modelación matemática (Santiago, Delgado & Quezada, 2012).

En este trabajo se propone reducir el tiempo de clase dedicado al estudio de los algoritmos de solución de ED y ampliar el tiempo dedicado a la modelación matemática mediante el uso de diversas tecnologías móviles. Los objetivos son: determinar los efectos en el desarrollo de competencias de modelación matemática en alumnos que toman un curso de ecuaciones diferenciales apoyado por tecnología móvil y retos de aprendizaje; y analizar los cambios en los procesos algorítmicos utilizados por los alumnos que utilizan un entrenador en línea de métodos de solución de ecuaciones diferenciales.

Marco teórico

Los modelos matemáticos surgen de manera natural cuando se tiene la necesidad de responder preguntas específicas en situaciones reales, cuando se requiere tomar decisiones o cuando es necesario hacer predicciones relacionadas con fenómenos naturales. Lehrer y Schauble (2000) sugieren que la introducción de la modelación matemática al aula permite que: los alumnos enfrenten situaciones problemáticas de interés y desarrollen sus capacidades de explorar y representar fenómenos mediante ecuaciones diferenciales. En general, el planteamiento de modelos, vía ecuaciones diferenciales, no es simple y su construcción requiere de práctica (Rodríguez, 2010; Rodriguez & Rivera, 2016). Otros autores señalan que la enseñanza de las ED por medio de la modelación requiere enseñar tanto los elementos teóricos como las estrategias de construcción de las ED (Trigueros, 2009). Existe acuerdo entre estas posturas y la metodología de aprendizaje basado en retos (ITESM, 2016), donde los estudiantes enfrentan desafíos reales, apoyados con módulos de aprendizaje, y vinculan las matemáticas con los fenómenos de cambio.

De acuerdo con la Teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos, Esquemas) los estudiantes deben evolucionar desde utilizar sólo procedimientos y acciones hasta lograr esquemas que les permitan resolver problemas (Dubinsky, 2002). En la práctica, la teoría APOE se usa mediante ciclos de aprendizaje ACE formados por actividades, discusiones en clase y ejercicios. Por ejemplo, Vizcaíno (2004) utilizó el ciclo en un curso de cálculo, y sugiere: organizar a los alumnos en equipos de trabajo, desarrollar todas las actividades en un laboratorio utilizando paquetes computacionales de análisis matemático, discutir en el aula lo aprendido y culminar con ejercicios individuales.

Por otra parte, diversos materiales didácticos (programas, asistentes educativos, libros electrónicos, tutoriales de apoyo) han sido construidos con el objetivo específico de provocar una mejora en el aprendizaje de la matemática. Artigue (2007) menciona que "las tecnologías informáticas trastornan los equilibrios tradicionales entre el valor epistémico y pragmático de las técnicas". Es decir, aun cuando la tecnología pretende que los estudiantes aprendan más y mejor es necesario no descuidar los problemas que el estudiante tiene con los objetos matemáticos de aprendizaje. Actualmente, existe una tendencia para construir sistemas adaptativos para el aprendizaje de la matemática que consideren las características y conocimientos de los estudiantes. Por ejemplo, GenTutor es un software que produce entrenadores semiadaptativos y ha sido usado recientemente para construir sistemas de entrenamiento algorítmico en cursos de cálculo (Santiago y Quezada, 2013).

En otro contexto, nuevas tendencias y necesidades de aprendizaje han provocado el surgimiento de los cursos masivos abiertos en línea (MOOC: Massive Open Online Course). La tecnología para elaborar estos cursos requiere de poco hardware y están al alcance de la generalidad de los docentes. Por ejemplo, la plataforma Open-EdX ha sido usada por muchas instituciones empeñadas en mejorar la calidad de aprendizaje de los estudiantes. El diseño instruccional en la elaboración de un MOOC es un elemento fundamental para el éxito o fracaso del curso. Zapata (2015) recomienda seguir una metodología de 6 fases para construirlo, a saber: 1) establecer los objetivos; 2) seleccionar y construir unidades de aprendizaje; 3) elaborar la guía docente; 4) hacer la guía didáctica para el alumno; 5) organizar los materiales considerando objetivos y evaluación; 6) elaborar la guía de comunicación entre profesores y alumnos.

En conclusión, la propuesta de este trabajo es construir un curso de Ecuaciones Diferenciales en la plataforma Open-EdX. Los objetivos de este curso son promover el desarrollo de competencias de modelación matemática y mejorar las habilidades algorítmicas de los alumnos. Además, el curso debe caracterizarse por el uso de herramientas tecnológicas de vanguardia, estar estructurado con actividades de resolución de ejercicios interactivos y problemas complejos y con un sistema de evaluación semiadaptativa.

Diseño del curso

El curso contiene cinco módulos. En el primero "Análisis de las ecuaciones diferenciales de primer orden" se revisan los conceptos básicos y se muestran ejemplos de aplicación en diversas áreas. El segundo módulo "Estudio de las ecuaciones diferenciales de segundo orden" tiene como objetivo analizar situaciones emanadas de la mecánica clásica donde, de manera natural, aparecen ecuaciones de segundo orden. El tercer módulo "Comprendiendo la Transformada de Laplace" se dedica al estudio de un paradigma diferente de solución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales. En el cuarto "El uso de métodos numéricos en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias" se construyen programas para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales de forma numérica y se analizan diferentes sistemas físicos mediante las ecuaciones de Hamilton. En el último módulo "Conceptos básicos de las ecuaciones diferenciales parciales" se discuten las ecuaciones clásicas del calor, de la cuerda y de Laplace.

Cada módulo está estructurado en la forma usual de un MOOC y contiene: presentación de entrada, material electrónico de apoyo, teoría básica, práctica de exploración, ejemplos y ejercicios interactivos, problemas y retos, para terminar con una actividad de autoevaluación. En la sección de ejemplos y ejercicios interactivos se explican detalladamente ejemplos típicos y se enlaza con el entrenador semiadaptativo de ejercicios del tema. El entrenador presenta aleatoriamente ejercicios y los estudiantes reciben retroalimentación inmediata.

En las prácticas de exploración se analizan sistemas físicos mediante el paquete Mathematica. Por ejemplo, en la figura 1 se muestra una práctica de exploración sobre un péndulo doble que requiere, para su análisis, de establecer un sistema de ecuaciones diferenciales.

En el apartado de problemas y retos se presentan situaciones complejas a los estudiantes. Por ejemplo, el reto “¡No hay clases!” trata sobre la modelación de la epidemia de la influenza acontecido en México hace varios años. A partir de los datos los alumnos construyen la ecuación diferencial que modela la situación, el reto se complementa con dilemas éticos. Finalmente, el último apartado de cada módulo se orienta a la evaluación de los estudiantes mediante ejercicios y problemas seleccionados aleatoriamente en la plataforma Open-EdX.

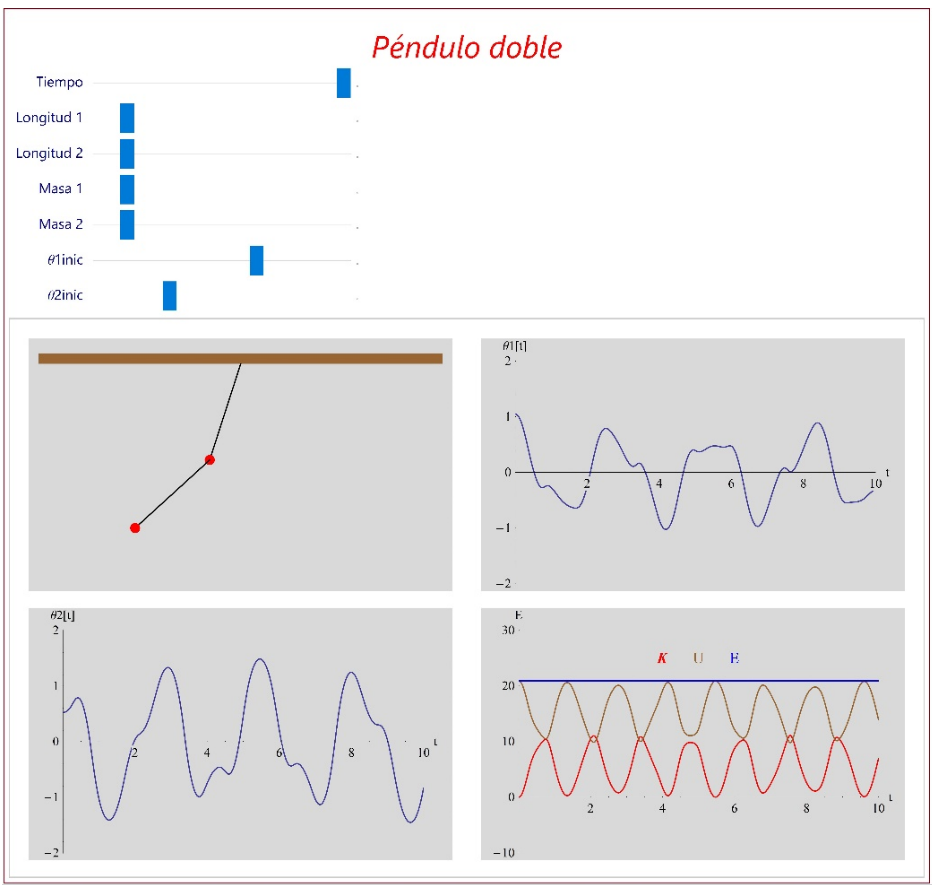


Figura 1. Práctica de sistemas de ecuaciones diferenciales. (Elaboración propia)

Investigación

Para realizar la investigación se consideró un grupo de 32 alumnos de todas las carreras de ingeniería del Tecnológico de Monterrey, Campus Estado de México. El curso se impartió mediante el ciclo de aprendizaje Actividad-Clase-Ejercicios-Problema. Primero, los alumnos revisan la teoría y hacen la actividad (A) de exploración de conceptos fuera del aula. Segundo, el profesor y los alumnos revisan la teoría en clase (C). Tercero, fuera del aula los alumnos revisan los ejemplos y hacen los ejercicios (E) interactivos previos a la evaluación en Open-EdX. En la clase siguiente, los alumnos resuelven un problema (P) o reto.

Se analizaron sus exámenes mediante una lista de cotejo que considera estrategia, procedimiento y respuesta y se contrastaron los resultados con alumnos de un grupo testigo. Se analizaron los reportes de los retos mediante rúbrica de cuatro niveles que considera: construcción del modelo matemático, uso de tecnología, uso de lenguaje matemático y análisis de la solución. Finalmente, se encuestó a los alumnos sobre su percepción del curso en línea y de las actividades.

Resultados

Para analizar los resultados de los exámenes, se agruparon las preguntas consideradas de forma secuencial. Se seleccionó una muestra de 32 alumnos que no tomaron el curso en línea y 32 alumnos que si lo tomaron. Cada pregunta tuvo un puntaje de 0, 1, 2 o 3 puntos considerando estrategia seguida (correcta o incorrecta), procedimiento (adecuado o inadecuado), respuesta (congruente y correcta o incongruente). En la figura 2 se muestran los resultados de los dos grupos por pregunta y el resultado global en el tema de Transformada de Laplace. En general, los alumnos que usan el curso en línea (M: MOOC) tienen un mejor resultado en sus procedimientos que los alumnos que no lo tomaron (T: Tradicional). Notablemente, preguntas asociadas a problemas en contexto (Aplic: Aplicaciones) son mejor planteadas por los alumnos que tomaron el curso. En las preguntas sobre la parte operativa de transformada de Laplace (TL), de anti transformada (ATL) y de solución de ecuaciones diferenciales (ED-1: Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden, ED-2: Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden) los resultados son similares.

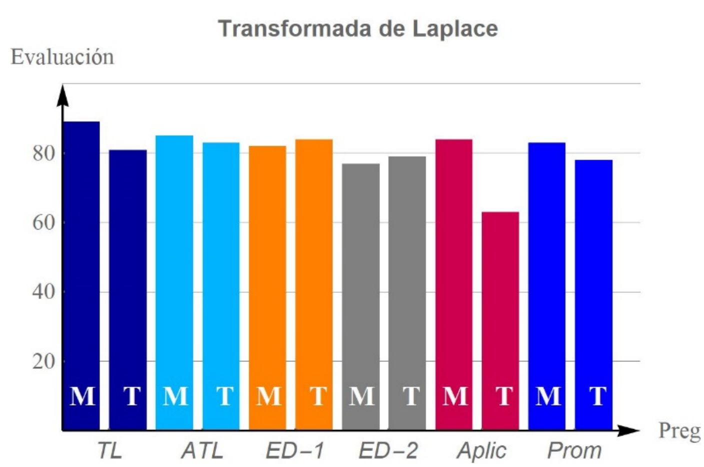


Figura 2. Resultados del examen de transformada de Laplace. (Elaboración propia)

Los retos fueron resueltos en equipos de cuatro alumnos. En la figura 3 se muestran los resultados de los reportes. En general, existe un buen planteamiento del modelo (Esol: Estrategia de solución) y el uso de tecnología (Tec: Tecnología), pero faltó un mayor análisis de la solución propuesta (Asol: Análisis de la solución).

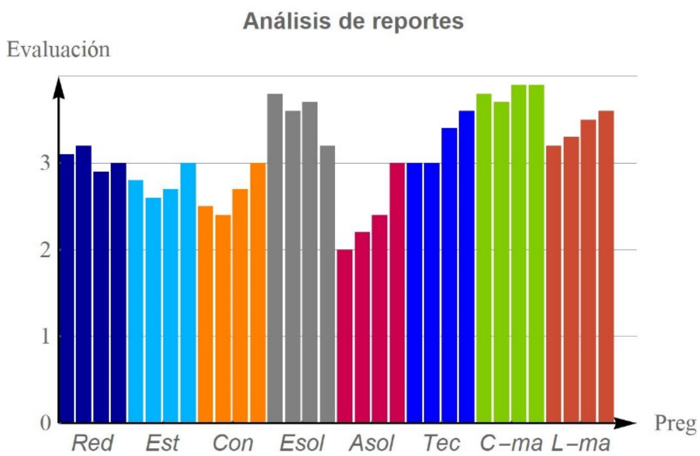


Figura 3. Resultados de los reportes de los retos. (Elaboración propia)

Los resultados de la encuesta de percepción del curso se muestran en la figura 4. Los alumnos consideran que los ejercicios de la plataforma son adecuados (Algorit: Uso de Algoritmos), pero requieren un manual para escribir sus respuestas (Guía). Además, consideran que las prácticas de exploración (Mathema: Mathematica) fueron útiles, que las actividades fueron muy complejas y no se tuvo el apoyo adecuado.

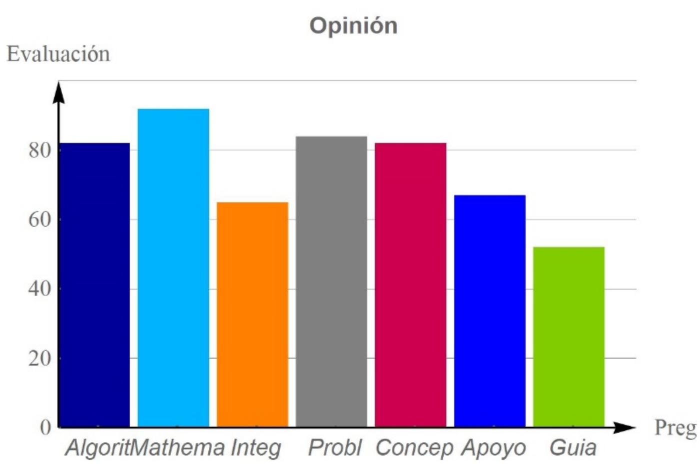


Figura 4. Resultados de la encuesta de percepción del curso. (Elaboración propia)

Discusión

Los resultados que se obtuvieron en la prueba piloto sugieren que: los estudiantes mantienen sus habilidades algorítmicas y mejoran sus competencias para resolver problemas complejos, resultado acorde con lo planteado por Trigueros (2009) ya que los estudiantes desarrollan formas creativas de resolver problemas con tecnología. Al intentar resolver retos, como “No hay Clases”, los estudiantes se involucran más en las propuestas de solución, además el uso de herramientas computacionales les permite analizar más profundamente las sutilezas de sus soluciones, lo que no se puede hacer en cursos convencionales; conclusión similar a la reportada por Rodríguez y Rivera (2016). El trabajar en el curso con una metodología basada en ciclos de aprendizaje permite que los estudiantes usen la tecnología para comprender mejor las ideas matemáticas del curso, lo cual es observable al analizar sus reportes de solución de retos, conclusión acorde con las reportadas por Vizcaíno (2004) En cuanto al análisis del curso, los estudiantes sugieren que faltan apoyos y guías rápidas. Estos apoyos tienen que ver más con las formas de navegar y de interactuar con el entrenador en línea que con los contenidos del curso. De acuerdo con Zapata (2015) se deberán incorporar las sugerencias en el apartado de apoyos para los alumnos y guía del profesor.

Conclusiones

El estudio de las ecuaciones diferenciales es fundamental para los estudiantes de ingeniería que las requieren para modelar fenómenos físicos en cursos avanzados. En este trabajo se buscó potenciar las habilidades de los estudiantes en dos competencias básicas: el uso de herramientas tecnológicas de visualización y la modelación matemática de situaciones complejas. Para ello se necesita el apoyo de un curso en línea y material construido exprofeso. Los resultados indican que los alumnos mejoraron en las dos competencias y cuentan ya con algunas herramientas matemáticas para sus cursos posteriores. Por otra parte, el estudio sugiere que los alumnos que usan un entrenador en línea con retroalimentación semiadaptativa desarrollan sus habilidades algorítmicas. Como consecuencia, es posible reducir el tiempo dedicado al estudio de dichos procesos en el aula. Finalmente, todas las actividades propuestas en el curso encajan en un modelo que permite desarrollar habilidades matemáticas y potenciar competencias tecnológicas de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Artigue M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática* (8) 13-33.

Dubinsky, E. (2002). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.) *Advanced mathematical thinking*, 95-126. Netherlanns: Springer.

ITESM (2016). El aprendizaje basado en retos. Recuperado el 14 de febrero de 2017 de https://goo.gl/dA3ux8

Lehrer, R., & Schauble, L. (2000). The development of model-based reasoning, *Journal of Applied Developmental Psychology*, 21(1), 39-48.

Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y Enseñanza de la Modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 13 (4-1), 191-210.

Rodríguez, R. & Rivera, S. (2016). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa,* 19(1), 99-124.

Santiago, R. (2002). Ecuaciones diferenciales bajo resolución de problemas con apoyo de Learning-Space y Mathematica. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 15 (2), 893-898. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Santiago, R., Delgado, D. & Quezada, M. (2012). Sistema de apoyo para el aprendizaje de las matemáticas basado en Web. Compendio de innovación educativa 2012. Proyectos apoyados por el Fondo NOVUS.

Santiago, R. & Quezada, L. (2013). GenTutor: un sistema generador de entrenadores adaptativo. Documento interno no publicado, ITESM, México.
Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación educativa*, 9(46), 75-87.
Vizcaíno, O. (2004). Evaluación del aprendizaje del cálculo desde una perspectiva constructivista. México: IPN.
Zapata, M. (2015). El diseño instruccional de los MOOC y el de los nuevos cursos abiertos personalizados. *Revista de Educación a Distancia*, (45).

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES REALES EN VARIAS VARIABLES ASISTIDO POR EL GEOGEBRA

Maritza Luna Valenzuela, Elton John Barrantes Requejo
Pontificia Universidad Católica del Perú. (Perú)
luna.m@pucp.edu.pe, ejbarran@pucp.edu.pe

Resumen
Entre estudiantes de Economía e Ingeniería es común escuchar las preguntas ¿cuál es el precio para obtener un ingreso máximo?, ¿cómo hallar la menor distancia entre dos objetos? Para dar respuesta a estas cuestiones en este taller se presentarán actividades que permiten a los participantes de nivel superior generar en el sentido de Rabardel (1995), la génesis instrumental del concepto de optimización de manera geométrica para funciones reales de dos variables, mediante la aplicación del teorema de Lagrange con el uso del software GeoGebra. A través de la socialización de resultados obtenidos se espera una actitud reflexiva valorando la formación de un instrumento.

Palabras clave: Optimización de funciones, Teorema de Lagrange, Génesis Instrumental

Abstract
It is common to hear students of Economis and Engineering ask questions like, “What is the price to obtain a maximum income?” or “How can we find the shortest distance between two objects?” To answer these questions, in this workshop, higher education students will show activities that allow them to generate, in the sense of Rabardel (1995), the instrumental genesis of the concept of geometric optimization for real functions of two variables by applying the Lagrange theorem with the use of GeoGebra software. By socializing the obtained results, a reflexive attitude is expected, valuing the formation of an instrument.

Key words: optimization of functions, Lagrange theorem, instrumental genesis

Introducción

Existen problemas de optimización en los cuales se pretende obtener los valores extremos de una función sin añadir condición alguna. Sin embargo, se pueden plantear problemas de obtención de extremos de una función, de manera que estos cumplan determinadas condiciones (o restricciones). La gran mayoría de problemas que se presentan en la realidad son de extremos con restricciones. Por ejemplo, una empresa tratará de maximizar las ganancias, pero estará condicionada por la cantidad de mano de obra necesaria, la materia prima disponible, etc.

Nosotros estamos interesados en resolver problemas de optimización con una restricción de manera geométrica, para dar solución a estos problemas utilizaremos el teorema de Lagrange con ayuda del GeoGebra. El problema consiste en determinar los valores extremos de una función z=f(x,y), llamada función objetivo, sujeto a una restricción dada por una ecuación de la forma g(x,y)=k (Larson, 2010).

En algunas situaciones necesitamos obtener los valores extremos de una función cuyo dominio está restringido a cierto subconjunto del plano (por ejemplo a lo largo de una curva). En este trabajo, se exploró un poderoso método para determinar los valores extremos de funciones restringidas: ***el método de multiplicadores de Lagrange*** (Stewart, 2008).

Marco Metodológico

Teniendo en cuenta que en la actualidad entre los enfoques en relación con la integración de las tecnologías en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática se encuentran: la Aproximación Instrumental, la Mediación Semiótica, la Orquestación Instrumental y el Enfoque Seres humanos con medios (Pérez, 2014).

La aproximación instrumental, que es resultado de la concatenación de dos teorías, la Ergonomía Cognitiva de Rabardel (2011) y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard (1999), se preocupa por los aspectos instrumentales de la actividad de uso de una herramienta tecnológica por parte del sujeto en un contexto educativo, y se produce con el fin de legitimar las prácticas educativas emergentes del uso de una herramienta tecnológica por parte de un estudiante en un contexto educativo.

En este taller tomamos en cuenta aspectos del enfoque instrumental, (Rabardel, 2002), ya que nuestro objetivo es enriquecer de manera progresiva el significado del teorema de Lagrange.

El término artefacto, utilizado por Rabardel (2011), se emplea para referirse a una cosa susceptible de uso, que ha sido elaborada para inscribirse en actividades intencionales. El cual no restringe el significado a las cosas materiales, permite incluir en la categoría artefacto a formas de otra naturaleza como los objetos simbólicos. Según Rabardel (2011) un artefacto junto con las habilidades del sujeto en su utilización, forman lo que es denominado como instrumento. De acuerdo a Rabardel (1995), denominó a la transformación progresiva del artefacto en instrumento como Génesis Instrumental. En este caso, el artefacto es el teorema de Lagrange y la génesis estará básicamente orientada a la instrumentalización de dicho teorema.

Propósitos y alcance

El taller se basó en implementar el significado del teorema de Lagrange en la práctica docente de la enseñanza de la matemática, de modo que el participante estableció un nexo entre los conceptos de optimización, propiedades y sus aplicaciones en economía e ingeniería.

Metodología

El taller estuvo orientado a docentes de nivel superior con nivel intermedio de conocimientos del GeoGebra. En el taller se planteó problemas intra y extra matemáticos y se desarrollaron en dos sesiones de 90 minutos cada una. En la primera sesión se presentaron actividades para que los participantes construyeran funciones con dos variables y exploren la optimización mediante las representaciones gráficas utilizando el GeoGebra. En este apartado, el participante inició el proceso de instrumentalización del teorema. En la segunda sesión se resolvieron problemas de aplicación en búsqueda de un ligero uso del instrumento. En cada sesión compartieron las soluciones en conversaciones con los demás participantes para identificar y analizar elementos que nos permitan dar soluciones a los problemas planteados.

Los trabajos se sustentaron en la instrumentación (Rabardel, 1999) así tenemos: a) Se compartió en parejas la solución del problema y las diversas respuestas a la pregunta "¿cómo halló el máximo si …?", efectuadas por cada pareja; b) Se observó la correcta aplicación de teorema de Lagrange a problemas de economía e ingeniería y la interpretación de los resultados; c) Se describió el proceso de solución del problema, d) Evaluar el proceso de instrumentalización.

Para resolver los problemas de valores extremos se consideró la siguiente definición.

Definición. Sea $z = f(x,y)$ una función definida en U, subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$, que contiene el punto (a,b). Entonces,

a) $f(a,b)$ es un *valor máximo local* de f si $f(a,b) \geq f(x,y)$, para todos los puntos $(x,\ y)$ en un disco abierto con centro en (a,b).
b) $f(a,\ b)$ es un *valor mínimo local* de f si $f(a,b) \leq f(x,y)$, para todos los puntos $(x,\ y)$ en un disco abierto con centro en (a,b).

El método para determinar los valores extremos de funciones restringidas es el siguiente:

El método de multiplicadores de Lagrange

El método dice que los valores extremos de una función $f(x,y)$, cuyas variables están sujetas a una restricción C: $g(x,y) = c$, se encuentran sobre la curva C en los puntos donde

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

para algún escalar λ (llamado multiplicador de Lagrange).

Para explorar geométricamente el método y saber por qué funciona establecemos los siguientes teoremas:

Teorema del gradiente ortogonal. Suponga que $z = f(x,y)$ es una función derivable en una región cuyo interior contiene una curva suave C: $c(t) = \big(x(t), y(t)\big), t \in I$.

Si P_0 es un punto de C donde f tiene un máximo o un mínimo local relativo a sus valores sobre C, entonces ∇f es ortogonal a C en P_0.

Teorema de Lagrange. Supongamos que f y g son dos funciones de dos variables cuyas primeras derivadas parciales son continuas y que f tiene un extremo en $P(x_0, y_0)$ sobre la curva de restricción $g(x, y) = k$. Si $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ entonces existe un número λ tal que
$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$.

Actividades del taller

Actividad 1. Grafique $f(x, y) = x^2 + y^2$ y sus curvas de nivel.

Para la solución siguieron el siguiente proceso:
Paso 1. **E**n la barra de entrada (en vista 3D) digitar $f(x, y) = x\text{^}2 + y\text{^}2$.
Paso 2. Generar un deslizador para k=0, 1, 2, ... , 10.
Paso 3. Graficar el plano z=k.
Paso 4. Intersecar el plano con la superficie (inicie rastro).
Paso 5. Simular la proyección de las curvas de nivel, con $x\text{^}2 + y\text{^}2$ =k (inicie rastro).
Teniendo como resultado la figura 1.

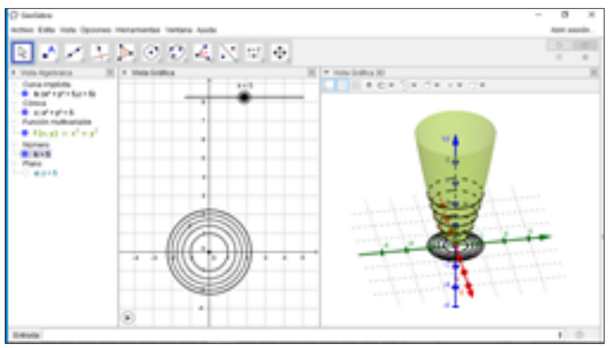


Figura 1. Superficie $f(x, y) = x^2 + y^2$ y sus curvas de nivel. (Elaboración propia)

Actividad 2. *Grafique la curva $x + y = 1$ e intersecte con la superficie $f(x, y) = x^2 + y^2$ y también con el plano z=*0. *¿podria indicar cuál el punto minimo de la curva sobre la superficie de f*?

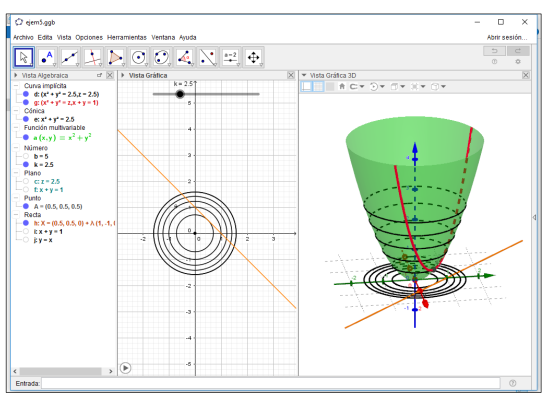


Figura 2. Curva en la superficie $f(x, y) = x^2 + y^2$ y proyección en el plano XY. (Elaboración propia)

El dinamismo del GeoGebra permite la visualización de la curva sobre la superficie del paraboloide, así inicia la exploración para buscar el punto mínimo en la curva generando la necesidad de buscar herramientas para lograr este objetivo, más aún, si los situamos en un problema de contexto como se muestra a continuación.

Actividad 3:
Determine los puntos de la curva 17x^2+12xy+8y^2=100 que están más cerca y más lejos del origen.

Solución
Encontrar el máximo o el mínimo de $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ es equivalente a hallar el máximo o el mínimo de $f(x,y)=x^2+y^2$. y el problema en traduce a lo siguiente:

$$\begin{cases} \text{Máx y Mín } z = x^2+y^2 \\ \text{Sujeto a: } 17x^2+12xy+8y^2=100 \end{cases}$$

Se siguen los pasos siguientes:

Paso 1. Graficar la función $f(x,y)=x^2+y^2$.
Paso 2. Graficar la restricción ingresando en la barra de entrada 2D la ecuación
$17x\text{^}2+12xy+8y\text{^}2=100$.
Paso 3. Graficar la función objetivo ingresando en la barra de entrada 3D la ecuación
$f(x,y)=x\text{^}2+y\text{^}2$.

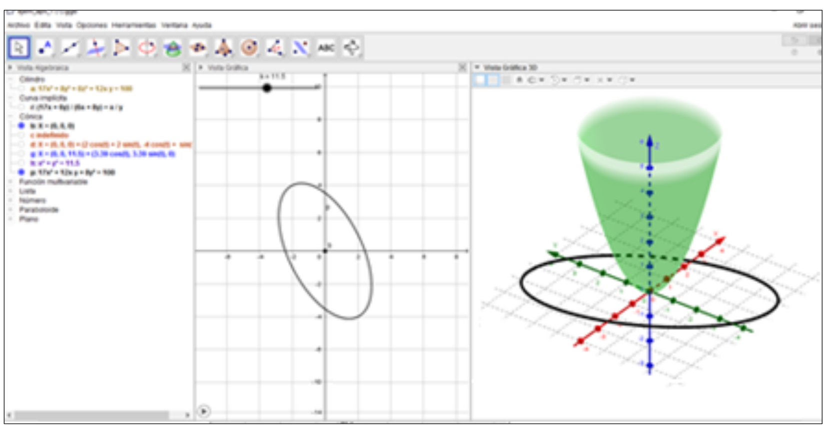


Figura 3. Superficie $f(x,y)=x^2+y^2$ y sus curvas de nivel. (Elaboración propia)

Paso 4. La gráfica de las curvas de nivel de la función $f(x,y)=x^2+y^2$ ya se trabajó en Figura1.
Paso 5. En la vista 2D del GeoGebra busque los puntos donde la curva de nivel de la función es tangente a la restricción.

El primer caso puede visualizarse en la Figura 4.

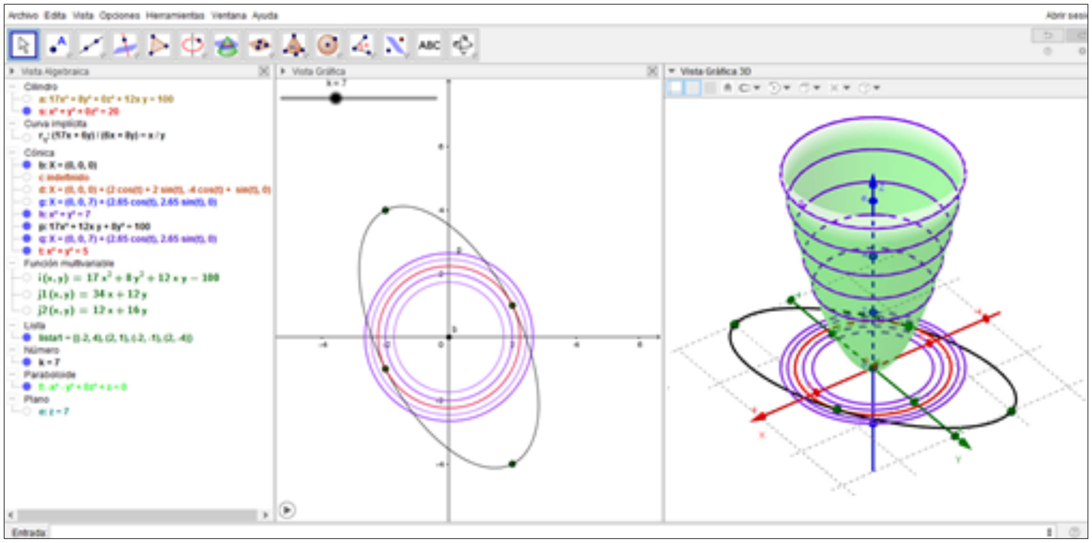


Figura 4. Curva de nivel de la función es tangente a la restricción. (Elaboración propia)

El segundo caso puede visualizarse en la Figura 5.

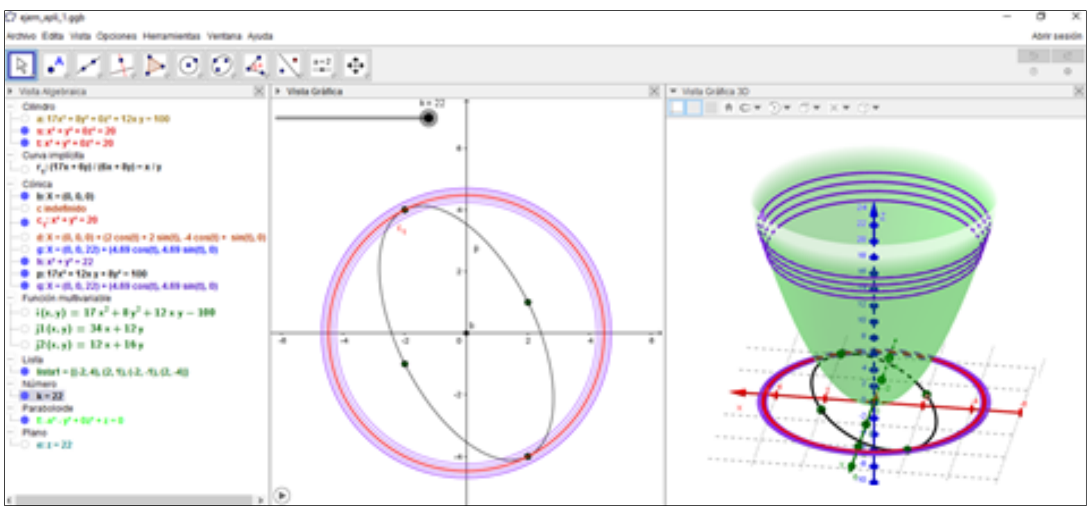


Figura 5. curva de nivel de la función. (Elaboración propia)

Paso 5. Según las gráficas mostradas en el paso 4, primer caso, notamos que las gráficas de la curva de nivel de la función con la restricción se intersecan tangencialmente en dos puntos $(-2;\ -1)$ y $(2;\ 1)$. Por el teorema de Lagrange afirmamos que existen dos puntos sobre la curva cuya distancia al origen es $\sqrt{5}$ unidades, y ésta resulta ser la menor distancia que hay entre puntos de la curva y el origen de coordenadas.

De manera similar, en el segundo caso, notamos que las gráficas de la curva de nivel de la función con la restricción se intersecan tangencialmente en dos puntos $(-2;\ 4)$ y $(2;\ -4)$. Por el teorema de Lagrange afirmamos que existen dos puntos sobre la curva cuya distancia al origen es $\sqrt{20}$ unidades, y ésta resulta ser la mayor distancia que hay entre puntos de la curva y el origen de coordenadas.

Actividad 5.

Suponga que se tiene una fábrica que produce cierto tipo de dispositivo que requiere acero como materia prima. Los costos son predominantemente mano de obra, que cuesta \$20 por hora para los trabajadores y el propio acero, que cuesta \$170 por tonelada. Considere que los ingresos están dados por:

$$I(x, y) = 200\, x^{2/3} y^{1/3},$$

donde "x" representa las horas de trabajo e "y" las toneladas de acero. Si el presupuesto de la fábrica es de \$20 000, determine el máximo ingreso posible.

Solución.

El problema se reduce a:

$$\begin{cases} Maximizar \quad I(x,y) = 200x^{\frac{2}{3}}\, y^{\frac{1}{3}} \\ Sujeto\ a \quad 20x + 170y = 20\,000 \end{cases}$$

La grafica correspondiente a la función objetivo, la restricción y curvas de nivel tanto en GeoGebra 2D como 3D se muestra en la figura siguiente:

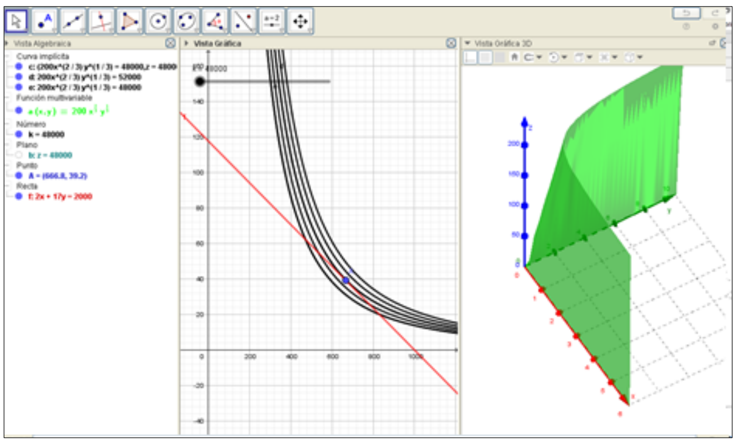


Figura 6. Curva de nivel de la función es tangente a la restricción y superficie. (Elaboración propia)

Según la gráfica, el valor máximo del ingreso se obtiene cuando $x \approx 667$ e $y \approx 40$ mientras que el ingreso máximo asciende a 52 215, 63 dólares.

Al concluir el taller se procedió a la evaluación del proceso de instrumentalización del teorema mediado por el GeoGebra donde una de las preguntas fue: ¿Cuándo utilizó el software GeoGebra que acciones se convierten progresivamente en un instrumento para resolver problemas de optimización? Algunas respuestas de los participantes se muestran en las figuras 6 y 7:

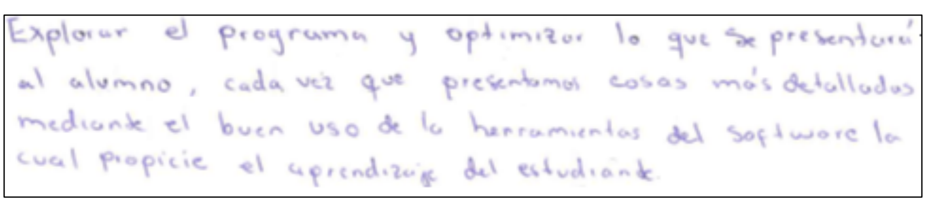

Explorar el programa y optimizar lo que se presentará al alumno, cada vez que presentamos cosas más detalladas mediante el buen uso de la herramientas del software la cual propicie el aprendizaje del estudiante.

Figura 7. Respuesta de participante. (Elaboración propia)

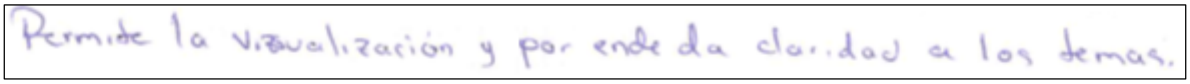


Figura 8. Otra respuesta de participante. (Elaboración propia)

Figura 9. Participante mostrando la instrumentalización del teorema de Lagrange. (Elaboración propia)

Conclusiones

- La instrumentalización del artefacto se logró en su totalidad debido a la visualización en 3 dimensiones de propiedades y resultados que hechos a mano son tediosos y complejos de representar.
- El binomio conocimiento matemático (Teorema de Lagrange) y uso de tecnología digital (GeoGebra) permitió una orquestación en la resolución del problema de aplicación, como enfatizan Borba y Villarreal (2005) al afirmar que el uso de diferentes medios cambia las matemáticas producidas.
- Mediante la aplicación de Teorema de Lagrange se logró la génesis instrumental del concepto de optimización de manera geométrica para funciones reales de dos variables

Implicaciones

Consideramos importante profundizar y aplicar el Teorema de Lagrange para resolver problemas con más variables y con más restricciones pero estar asistido por un software tal como lo muestra Kong, Bances, Medina, Gonzales, Luna y Sanchez, (2014), y pueden ayudar a mejorar la formación docente y reflexionar sobre su práctica matemática.

Referencias bibliográficas

Borba, M. y Villarreal, M. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. New York: Springer.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.

Kong, M., Bances, R., Medina, N., Gonzales, M., Luna, M. y Sanchez, R. (2014). *Optimización restringida a un* *sistema polinomial.* Departamento de Ciencias- Pontificia Universidad Católica del Perú. Serie B, Nº 31 (pp 29-33).

Larson, R., & Edwards, B. (2010). *Cálculo 2 de varias variables*. McGRAW-Hill/Interamericana Editores, novena edición.

Pérez, C. (2014). Perspectiva Educacional, *Formación de Profesores*, *53*, (2), 129-150.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains* (p. 239). Armand Colin.

Rabardel, P. (1999). Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. *Actes de la 10e Université d'Été de Didactique des Mathématiques*, pp 203-213.

Rabardel, P. (2002). *Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Univ. Paris 8. [traducción al inglés: Rabardel, P. (2002). *People and technology. A cognitive approach to contemporary instruments*. Paris: Univ. Paris 8].

Stewart, J. (2008). *Calculus: Early trascendentals*. Thomson Brooks/Cole Sixth edition.

CREACIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS UTILIZANDO GEOMETRÍA DINÁMICA

Carlos Torres Ninahuanca; Maritza Luna Valenzuela
Pontificia Universidad Católica del Perú. (Perú)
ctorresn@pucp.pe, luna.m@pucp.edu.pe

Resumen
El taller tuvo como objetivo principal el desarrollo de la competencia de análisis didáctico de profesores en servicio mediante la creación de problemas matemáticos y el uso de un programa de geometría dinámica. Para ese propósito, se aplicó una estrategia de creación de problemas por elaboración dada una situación que involucra una secuencia de actividades donde se incluye una situación, problema, reflexión didáctica, problema pre o pos (SPRP), cuya aplicación se ha mostrado en diversas investigaciones relacionadas a la enseñanza de la matemática. Mediante la socialización de experiencias, los participantes adoptaron una postura reflexiva valorando los aportes de la creación de problemas en su práctica docente.

Palabras clave: resolución de problemas, invención de problemas, enfoque ontosemiótico, geometría dinámica

Abstract
The main objective of the problem posing workshop was to develop the in-service mathematics teacher's didactic analysis competence through problem posing tasks and the use of a dynamic geometry program. For this purpose, a problem posing strategy was put into practice, involving a sequence of tasks that includes a situation, problem, didactic reflection, pre or pos problem (SRPP). This strategy has been applied in several researches related to mathematics teaching. Therefore, by socializing the experience, the participants adopted a reflexive attitude, valuing the contributions of problem posing for their teaching practice.

Key words: problem solving, problem posing, Onto-semiotic Approach, dynamic geometry

Introducción

La resolución de problemas ha sido durante estas últimas décadas el enfoque predominante en la enseñanza de la matemática, de tal forma que se han elaborado diversas teorías y metodologías de enseñanza y aprendizaje con la intención de promover una enseñanza más acorde a las necesidades de cada época del transcurrir social. De acuerdo con Silver (2013) esta ha sido identificada en el ámbito académico, como un importante campo de estudio dentro la educación matemática y dicho interés se muestra en Halmos (1980), quien considera que se debe instruir a los estudiantes en la resolución de problemas, así como también en la creación de problemas. Precisamente, esta última reflexión se ha intensificado recientemente en diversas investigaciones (Singer, Ellerton y Cai, 2015, Felmer, Pehkonen y Kilpatrick, 2016) que proponen rescatar la creación de problemas para promover el aprendizaje, el desarrollo del pensamiento matemático y el estímulo de la creatividad en profesores y estudiantes (Malaspina, 2013). De la misma forma, esta instrucción debe ser dirigida por un profesor de matemática formado en la creación y la resolución de problemas (Torres, 2016). En particular, con énfasis en la primera, ya que se ha tomado poca importancia al desarrollo de la creación de problemas, a pesar de que ésta ha sido considerada desde varias décadas como una innovación curricular y pedagógica en diversos países; por ejemplo, el caso de Singapur mostrado en Kaur, Yeap y Kapur (2009). Así mismo, tradicionalmente se ha enfatizado en la resolución y creación de problemas utilizando hoja y lápiz; sin embargo, debemos hacer uso de la tecnología para formular y resolver problemas. De ahí que, en el taller sobre creación de problemas que llevamos a cabo se propuso actividades relacionados al uso de GeoGebra para la formulación y resolución de problemas.

Propósitos y alcance

El taller se enfocó en las nociones fundamentales de construcción geométrica bajo una perspectiva de la enseñanza de la matemática. Este enfoque se sustentó en una estrategia de creación de problemas y en el análisis didáctico como herramienta para mejorar la práctica docente del profesor de matemática. Los temas matemáticos se desarrollaron siguiendo una estrategia basada en la creación de *problemas pre* o *problemas pos* en el marco de episodios de clase relacionados a la enseñanza de la matemática según la perspectiva de Malaspina (2017). También se puso énfasis en la etapa de reflexión didáctica que sugiere la estrategia para creación junto con nociones de las herramientas del enfoque ontosemiótico de la educación matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007). Lo anterior conlleva estimular la competencia de análisis didáctico mediante la creación de problemas.

Marco teórico

En el taller se utilizaron algunos planteamientos de la estrategia SPRP (Situación, Problema, Reflexión didáctica, Problema pre o pos) de creación de problemas para fortalecer la articulación entre competencias y conocimientos del profesor de matemáticas propuesta por Malaspina (2017) para la creación de problemas por elaboración dada una situación concreta (Malaspina, Mallar y Font, 2015). Para nuestros propósitos, adaptamos la estrategia SPRP siguiendo las siguientes etapas: (1) presentar a los profesores participantes una situación motivadora para crear problemas, (2) pedir a los participantes del taller, en parejas, crear y resolver un problema a partir de la situación dada (denominaremos a este problema como PG), (3) pedir que en parejas elaboren una configuración cognitiva de la solución del problema creado, (4) socializar y discutir los problemas creados y sus configuraciones asociadas, (5) solicitar a cada pareja de participantes que cree un nuevo problema relacionado con su PG. (se le denominará NPG). Puede ser – por decisión de la pareja – un Problema-pre, en el sentido de contribuir a comprender mejor y a resolver correctamente PG; o un Problema-pos, en el sentido de ser más retador que PG, que requiera mayor demanda cognitiva que PG. Cada pareja debe explicitar si creó un problema-pre o un problema-pos respecto a su PG. (6) Redactar una solución del problema creado (NPG). (7) Puesta en común del problema creado.

De acuerdo con Godino, Batanero y Font (2007), cuando una persona desarrolla prácticas matemática (de resolución o creación de problemas) y reflexiona entorno a estas, él o ella tiene que activar una red de algunos o todos los objetos matemáticos presentes en la práctica. Entre estos objetos tenemos: situación problema, lenguajes, proposiciones, definiciones, procedimientos y argumentos. Estos objetos se relacionarán formando configuraciones definidas como una red de objetos que intervienen y emergen de un sistema de prácticas (Figura 1); de las cuales en nuestro taller los participantes elaboraron configuraciones cognitivas (CC) que se relaciona con una perspectiva personal de los objetos matemáticos. Analizando estas configuraciones podemos obtener información acerca de la *anatomía de la solución de un problema.*

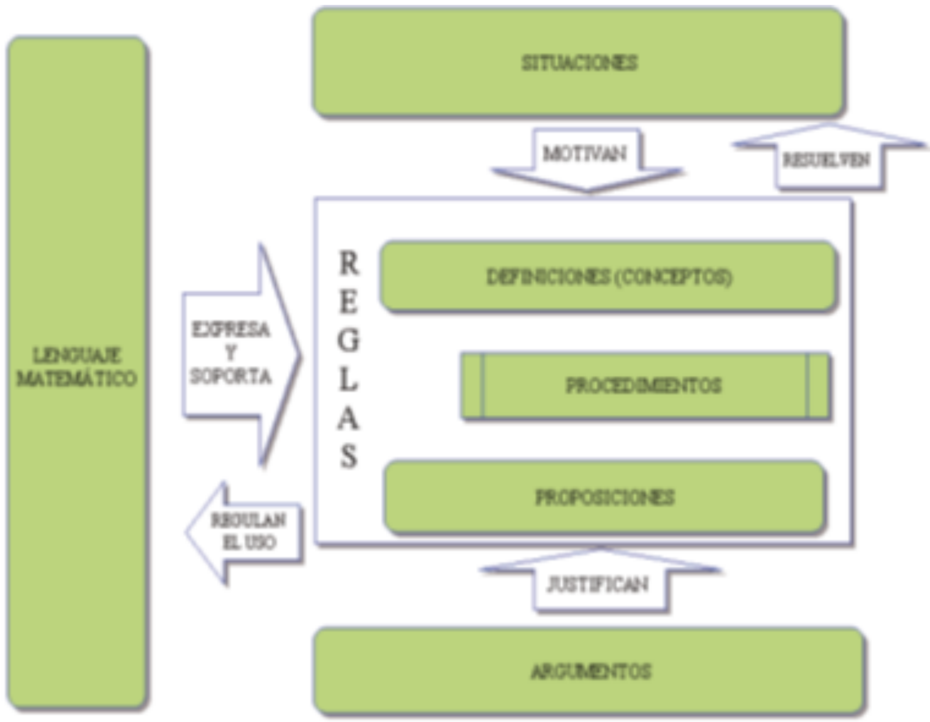


Figura 1. Configuración de objetos primarios para la Configuración Cognitiva. (Godino, Batanero y Font, 2007)

Usamos estos constructos del EOS para describir algunos objetos matemáticos que intervienen en la creación de problemas como producto de una actividad matemática. Asimismo, considerando la propuesta de Torres (2016) y Malaspina (2017) se consideran los cuatro elementos básicos de un problema matemático: información, requerimiento, contexto (intra-matemático o extra-matemático) y entorno matemático.

Metodología

El taller estuvo dirigido a profesores de matemática del nivel medio superior con conocimientos de GeoGebra a nivel intermedio. El desarrollo del taller tuvo una duración de dos sesiones (de 90 minutos cada una) y se siguió aspectos relacionados a la SRPP. En la primera sesión (Día 1) se presentó una situación motivadora para la creación de problemas (Figura 1) y entorno a esta se aplicó las etapas (1), (2) y (3) de la estrategia SRPP. Los trabajos en parejas se sustentan en las consideraciones para esta actividad formuladas por Malaspina, Mallart y Font (2015) para la creación de problemas por elaboración, así tenemos: (a) Compartir en grupos (preferentemente a lo más de 4 integrantes) la solución del problema y las diversas respuestas a la pregunta "¿Qué pasaría sí….?", efectuadas por cada integrante del grupo; (b) seleccionar en grupo las preguntas, analizar las posibles repuestas y decidir las modificaciones para configurar el problema; (c) escribir en grupo el enunciado del problema creado, con base en lo anterior y examinar su claridad; (d) resolver ordenadamente el problema creado; (e) atendiendo a la dificultad del problema creado y al nivel educativo en el que se pretenda emplear, pensar en la posibilidad o conveniencia de desagregarlo en problemas de dificultad gradual, (f) proponer el problema a otro grupo y pedirle solución y comentarios. En la segunda sesión (Día 2) se prosiguió con la aplicación de la estrategia SRPP en sus etapas (4), (5), (6) y (7). En la Figura 2, presentamos la situación motivadora que se utilizó en el taller para la creación de problemas utilizando GeoGebra.

Figura 2. Situación motivadora para la creación de problemas. Tomado de *Matemática para todos 2* (240), por A. Schmid e I. Weidig, 2002, Alemania: Klett. Derechos de autor (2002) por Instituo APOYO.

Los participantes utilizaron esta situación para crear un problema de contexto intra-matemático o extra-matemático en el marco de la geometría y siguiendo la estrategia SRPP.

Análisis de resultados

A continuación, mostramos los problemas creados por una pareja del taller.

Problema (PG):

En un campamento se instalan dos patrullas levantado sus tiendas distantes entre ellas a 15 metros. En una reunión ambas patrullas deciden que la fogata debe ubicarse a una distancia equidistante de ambas tiendas y no mayor de 10 metros. ¿Entre qué valores debe estar la distancia a la que se debe colocar la fogata a cada tienda?

En la Figura 3, se muestra la solución del problema utilizando herramientas de GeoGebra. La solución propuesta por la pareja se distingue por hacer uso de la mediatriz como lugar geométrico y considerando las condiciones del problema.

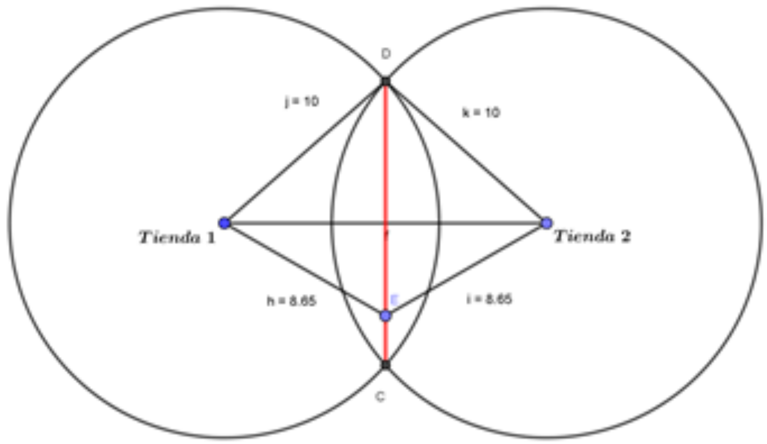


Figura 3. Esbozo de la solución utilizando GeoGebra propuesta por la pareja de participantes. (Elaboración propia)

De la Figura 3, se determina la solución del problema y la distancia de la fogata (x) a cada tienda varía según la expresión: $7.5 \leq x \leq 10$. Esta solución se obtuvo de forma simple utilizando las herramientas del GeoGebra. Ahora bien, profundizando en la CC de la solución propuesta por la pareja, destacamos que los objetos matemáticos que identifican son: punto en el plano, segmento, circunferencia, distancia entre dos puntos en el plano, punto medio de un segmento. Asimismo, respecto a los elementos de un problema, destacan que la información se relaciona con la ubicación de las tiendas y la fogata, también las condiciones relacionadas a la separación entre tiendas y la fogata; para el requerimiento se tiene las posibles distancias que cumplan la condición del problema; el contexto es extra-matemático y el problema se ubica-en forma general- en el entorno de la noción de mediatriz. Por otro lado, respecto al lenguaje se observa que utilizaron representación de puntos (D, C, E), las ecuaciones que por defecto te arroja GeoGebra sobre las circunferencias y rectas; también, las representaciones gráficas para la mediatriz, circunferencia, segmento, recta. Algunos de los conceptos asociados al problema son: plano, punto, recta, segmento, distancia entre dos puntos en el plano. El procedimiento para la obtención de la solución al problema se inicia con el esbozo de los requerimientos del problema y los pasos para la construcción de la mediatriz como lugar geométrico. Respecto a los argumentos, la pareja de participantes no llegó a proponer ningún argumento.

Nuevo problema (NPG)

Con el objetivo de colocar una mesa circular equidistante de las tres tiendas y que quepa dentro del área indicada, y esté lejos de la madriguera de serpientes, las tiendas fueron movidas como se muestra en la Figura 4. Además, para no dañarse con los cactus y aislarse de las madrigueras, cercará con alambrón [se debe cercar el área del cactus con alambrón] *y se usará repelente de serpientes, de costo S/ 25 la unidad, necesitando 2 por día. Sabiendo que el perímetro de la región donde están las serpientes es 14m, el perímetro de la región del cactus es 4m, los costos de materiales: S/ 8 cada metro de alambrón, S/ 4 cada estaca, S/ 5 cada metro de plástico para cubrir la madriguera, 4 clavos para cada estaca, cada clavo cuesta S/ 0.2.*

(a) Determinar a qué distancia de cada tienda se debe colocar el centro de la mesa.
(b) Calcular el número de días que podrán quedarse como máximo, sí disponen de S/ 600.

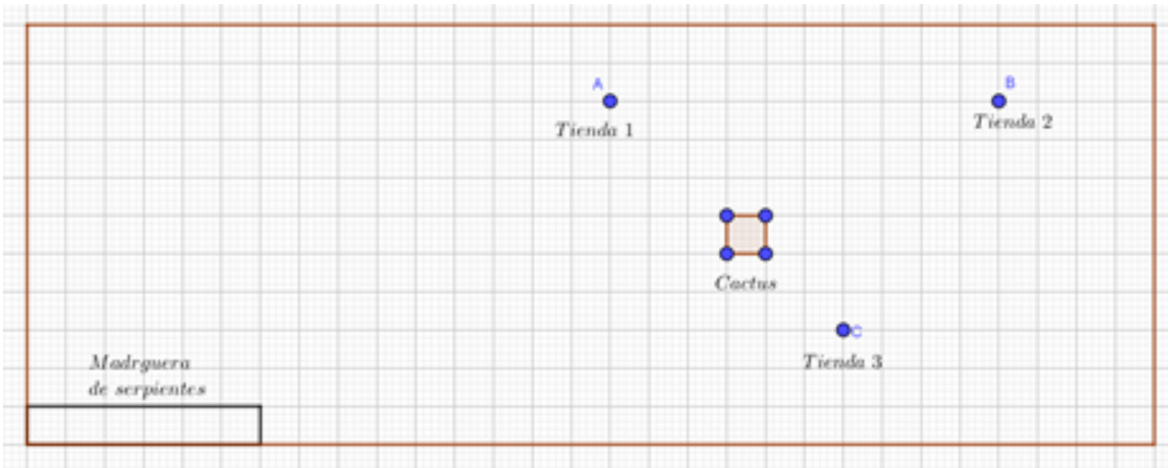


Figura 4. Distribución de las tiendas (Elaboración propia)

En la Figura 5, se muestra la solución para la parte (a) del problema utilizando herramientas de GeoGebra. La solución propuesta por la pareja se distingue por la construcción geométrica del circuncentro (ubicación de la mesa) y considerando las condiciones del problema.

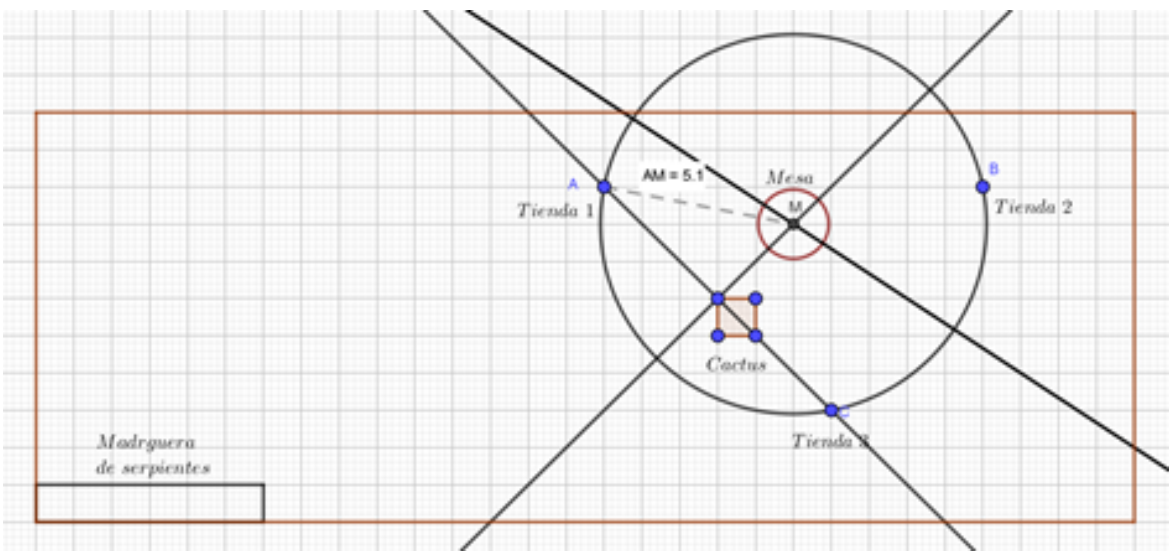
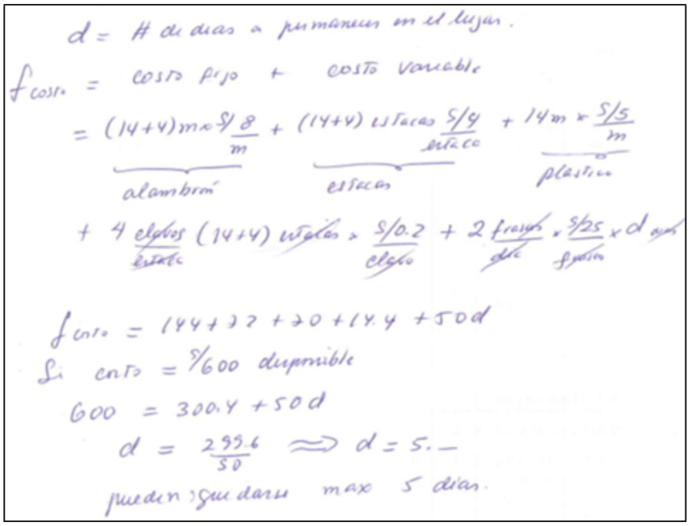


Figura 5. Ubicación de la mesa equidistante de las tres tiendas según condiciones del problema. (Elaboración propia)

Para determinar la solución a la parte (b), la pareja elaboró una propuesta en el contexto de funciones costo fijo y costo variable (ver Figura 6).



d = # de dias a permanecer en el lugar.

f_{costo} = costo fijo + costo variable

$= \underbrace{(14+4)m \times \frac{S/8}{m}}_{alambre} + \underbrace{(14+4)\ estacas\ \frac{S/4}{estaca}}_{estacas} + \underbrace{14m \times \frac{S/5}{m}}_{plastico}$

$+ 4\ \frac{clavos}{estaca}\ (14+4)\ estacas \times \frac{S/0.2}{clavo} + 2\ \frac{frascos}{dia} \times \frac{S/25}{frasco} \times d\ dias$

$f_{costo} = 144 + 72 + 20 + 14.4 + 50d$

Si costo = S/600 disponible

$600 = 300.4 + 50d$

$d = \frac{299.6}{50} \Rightarrow d = 5.–$

pueden quedarse max 5 dias.

Figura 6. Propuesta de solución de la pareja a su problema creado. (Elaboración propia)

Dado la naturaleza del taller, luego de la creación de los problemas NPG, no se exigió la elaboración de las configuaciones cognitivas asociadas a las soluciones de estos problemas.
Como parte de la estrategia SRPP, los participantes socializaron sus problemas creados y discutieron sobre las posibles potencialidades de estos problemas para la enseñanza utilizando el GeoGebra (Figura 7).

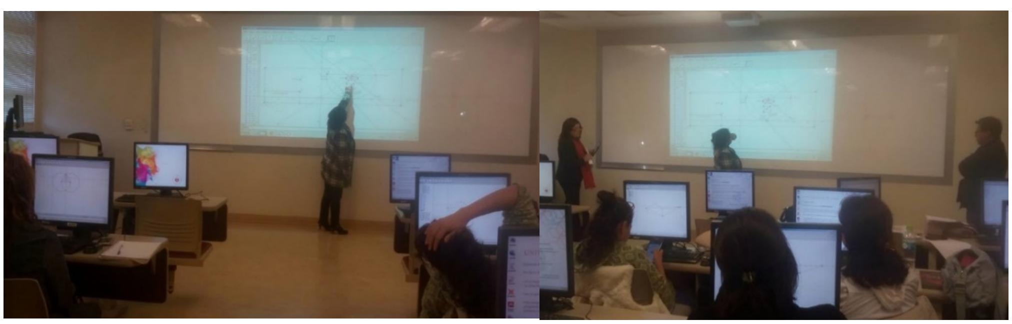


Figura 7. Socialización de problemas. (Elaboración propia)

Conclusiones

De la descripción de la CC elaborada por la pareja de participantes, se observa que competencia matemática está desarrollada, dado que utilizan conocimientos relacionados a la mediatriz y su aplicación en un contexto específico. Sin embargo, existe indicios para suponer que su competencia de análisis didáctico está en proceso de consolidarse, dado que no completaron sus CC. Esta afirmación se muestra en la mayoría de los participantes; en particular, en el reconocimiento de argumentos y proposiciones en las CC. El resultado anterior respalda lo encontrado en el trabajo de Torres (2016) y sugiere una preparación previa para el desarrollo de esta actividad.

A pesar de que las CC fueron parcialmente elaboradas, las reflexiones asociadas a este constructo fueron resaltantes, ya que los problemas (como el NPG creado por la pareja de participantes) fueron más elaborados, en el sentido que eran más ambiciosos y rescataron mejor el uso y aprovechamiento del GeoGebra como recurso didáctico, dado que se puede hacer simulaciones más elaboradas que al hacerlas utilizando lápiz y papel. A su vez, los participantes mostraron disposición a promover actividades de creación entre sus estudiantes dado que la experiencia vivenciada en el taller-como consecuencia de la elaboración de las CC y la socialización de los problemas- fue gratificante.

Implicaciones

Creemos importante profundizar y aplicar la estrategia SRPP puesto que se muestra como efectiva para la creación de problemas dada una situación o requerimiento específico. Tal como lo muestra Malaspina (2017) y Torrres (2016), crear un problema puede ayudar a mejorar la formación docente y reflexionar sobre su práctica matemática.

Referencias bibliográficas

Felmer, P., Pehkonen, E. y Kilpatrick, J. (Eds.) (2016). *Posing and Solving Mathematical Problems: Advances and New Perspectives*. New York, NY: Springer.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 39 (2), 127-135. doi: https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Halmos, P. R. (1980). The heart of mathematics. *The American Mathematical Monthly, 87*(7), 519-524.

Kaur, B., Yeap, B. H. y Kapur, M. (2009). *Mathematical Problem Solving: Yearbook.* World Scientific.

Malaspina, U. (2013). La enseñanza de las matemáticas y el estímulo a la creatividad. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 63, 41 – 49.

Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Malaspina, U., Mallart, A. y Font, V. (2015). Development of teachers' mathematical and didactic competencies by means of problem posing. En Krainer, K., & Vondrová, N. (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9),* (pp. 2861-2866). Prague, Czech Republic: ERME.

Schmid, A. &Weidig, I. (2002a). *Matemática para todos 2: secundaria* (Versión traducida y adaptada al español por el Instituo APOYO). Stuttgart, Alemania: Klett.

Silver, E. (2013). Problem-posing research in mathematics education: looking back, looking around, and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 157-162. doi: https://doi.org/10.1007/s10649-013-9477-3

Singer, F., Ellerton, N. y Cai, J. (Eds). (2015) *Mathematical Problem posing: From research to effective practice.* New York: Springer.

Torres, C. (2016). *Creación de problemas sobre funciones cuadráticas por profesores en servicio, mediante una estrategia que integra nociones del análisis didáctico*. Tesis de maestría no publicada, Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú.

REFLEXÕES DE PROFESSORES SOBRE INTEGRAÇÃO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS AO ENSINO DE POLIEDROS

Wendel de Oliveira Silva, Nielce Meneguelo Lobo da Costa
Universidade Anhanguera de São Paulo, UNIAN. (Brasil)
oceded@hotmail.com, nielce.lobo@gmail.com

Resumo
O artigo objetivou analisar as reflexões e problematizações que emergiram das discussões entre professores de Matemática, participantes de uma formação continuada de um Projeto do Programa Observatório da Educação da CAPES. O arcabouço teórico foi construído a partir dos conceitos de formação continuada, de Nóvoa, do professor reflexivo de Zeichner e dos conhecimentos profissionais para ensino com tecnologia, segundo Mishra e Koehler. A metodologia é a qualitativa do tipo *Design-Based Research*. Os dados foram coletados a partir de observações, dos protocolos das tarefas e filmagens em áudio/vídeo sendo este último analisado segundo o modelo analítico de Powell, Francisco e Maher. Os resultados evidenciaram a emergência de reflexões sobre docência com o uso da tecnologia, sobre planejamento e preparação de tarefas, além de mobilização do conhecimento pedagógico, tecnológico e matemático.

Palavras Chave: geometria espacial, GeoGebra 3D, tecnologias na educação

Abstract
This paper aims to analyze the reflections and problematizations that emerged from the discussions between teachers of Mathematics, who dparticipate in a continuous training of an Observation Program Project of Education of CAPES. The theoretical framework was constructed from the concepts of continuous training of Nóvoa, Zeichner's reflective teacher, and professional knowledge for teaching with technology, according to Mishra and Koehler. A qualitative design-based-resarch methodology was applied. Data were collected from observations, tasks, protocols and audio / video filming, being the latter analyzed according to the analytical model of Powell, Francisco and Maher. The results evidenced the emergence of reflections on teaching with the use of technology, on planning and preparation of tasks, as well as mobilizing pedagogical, technological and mathematical knowledge.

Keywords: space geometry, GeoGebra 3D, technologies in education

Introdução

As transformações científicas e tecnológicas ocorridas nos últimos anos têm exigido diversas modificações e adaptações em diferentes setores da sociedade, fazendo com que profissionais responsáveis pela formação de outros começassem a repensar suas estratégias de formação. A Educação, por sua vez, não obstante as essas mudanças, também vem sofrendo constantes mudanças gerando inúmeros desafios para os professores. As escolas vêm buscando uma reformulação no ensino com a incorporação das tecnologias e, consequentemente, obrigando os educadores a repensarem suas práticas pedagógicas no sentido de adaptar-se ao novo.

Mesmo diante de tanto investimento em tecnologia nas escolas, resultados de pesquisas apontam que ainda é deficitário a utilização de recursos tecnológicos nos educandários e alguns dos motivos são: falta de professores preparados para utilizar o computador em sala de aula; números reduzidos de computadores nos laboratórios de informática; a falta de tempo e/ou interesse por parte dos professores para frequentar os cursos de formação (Silva, 2011) e, não menos importante, o uso inadequado dos softwares educacionais.

No que tange ao ensino da Geometria, mais especificamente da Geometria Espacial, objeto matemático desse artigo, vale salientar que apesar de haver grande variedade de metodologias de ensino para diferentes formas de aprender, ainda é majoritário o ensino tradicional focado em uma aprendizagem no qual se predomina atividades repetitivas cujo objetivo é tão somente a memorização de formulários.

Os motivos supracitados e elencados como possíveis causas da subutilização dos recursos tecnológicos em sala de aula e os métodos tradicionais de ensino da Geometria que ainda perdura, serviram para nós como motivação para a elaboração e aplicação de um curso de formação de professores de Matemática no quais os professores-participantes tiveram a oportunidade de aprender o uso de um dos mais completos softwares de Geometria Dinâmica da atualidade: O GeoGebra.

Portanto, o professor diante desse novo cenário de transformação, deve estar suscetível às mudanças na Educação e a "quebra" de paradigmas intrínsecos a sua prática docente, objetivando o desenvolvimento do aprendiz e a construção de seu saber.

A partir disso, o presente artigo buscou analisar reflexões e problematizações que emergiram das discussões entre professores de Matemática participantes de uma formação continuada intitulada “GeoGebra 3D no Ensino Médio: Aplicações para o Ensino de Poliedros", as quais ocorreram na medida em que tais professores realizaram tarefas de cunho exploratório-investigativo. A pesquisa em andamento que subsidia este artigo se desenvolve em um projeto maior de formação e pesquisa ligado ao Programa Observatório da Educação da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), do Ministério da Educação do Brasil.

■ A formação docente e a Integração de Tecnologias

O alicerce teórico da pesquisa foi construído a partir dos conceitos de formação continuada, de Nóvoa (2009), do professor reflexivo de Zeichner (1993) e dos conhecimentos profissionais para ensino com tecnologia, TPACK, segundo Mishra e Koehler (2006).

O tema formação de professores é bastante discutido nas instituições de ensino e em grupos de pesquisa. Segundo Nóvoa (1995) a formação pode assumir um importante papel na configuração da profissionalidade docente estimulando o surgimento de uma cultura profissional entre os professores e de uma cultura organizacional nas escolas. Contudo, essa formação não tem valorizado uma articulação com os projetos escolares o que faz com que pareçam organizações autônomas e independentes.

Essa dissociação entre escola e formação segue caminhos opostos aos princípios do desenvolvimento profissional focados na dupla perspectiva: professor individual e coletivo docente. Não menos importante, no processo de formação docente deve estar inserido os saberes inerentes à instituição, isto é, estar ciente de que o processo de ensino e aprendizagem não ocorre meramente a partir de um indivíduo, mas sim, a partir de toda uma organização. É de suma importância para o professor ter domínio do conteúdo a ser ensinado e conhecer as melhores metodologias de ensino, entretanto, é preciso também conhecer o funcionamento das instituições de ensino bem como a realidade no qual estão inseridas.

É preciso ainda que as ações formativas oportunizem situações em que o professor se sinta instigado a questionar e refletir sobre sua prática criando assim condições para desenvolver um pensamento autônomo. O ato de refletir é fundamental para se reconstruir práticas educativas, algumas vezes, ociosas. É mediante a essas análises reflexivas de práticas e saberes de experiência que poderão emergir novas práticas educacionais.

A expressão "professor reflexivo" teve início com as pesquisas de Schön (1992). No Brasil, essa teoria foi mais difundida com os trabalhos de Nóvoa (1992) e Zeichner (1993). Este último afirma que a prática reflexiva converge para o reconhecimento de que os professores devem ser responsáveis pela reformulação dos objetivos e finalidades de seu trabalho além de assumir uma postura de liderança diante a reforma do ensino, reconhecendo que os conhecimentos sobre o ensino e aprendizagem não são prerrogativas exclusivas de centros universitários mas reconhecer que cada professor possui suas próprias teorias e são capazes de contribuir significativamente para as boas práticas docentes

Zeichner (1993) afirma que a necessidade de mudança de objetivos da formação docente pautadas ainda em treinamentos e repetições visam, tão somente, cumprir planos de aulas muitas vezes preestabelecidos pela gestão educacional. O autor sugere uma prática de ensino reflexiva em que a atenção do professor esteja tanto voltada a si, para sua própria prática docente, como para fora, isto é, para as condições sociais em que se situam essa prática.

Outro fator que contribui para o processo educativo é a utilização de tecnologias em sala de aula desde que inseridas em um contexto pedagógico. Prado e Lobo da Costa(2015) ressaltam que integrar as tecnologias na prática docente requer a construção e reconstrução de conhecimentos e, para que isso ocorra, é necessário que o professor vivencie na sua formação esse processo de apropriação pedagógica das tecnologias digitais.

Mediante as perspectivas enfatizadas aqui fica evidenciado que, no processo de apropriação da tecnologia e sua utilização no ensino, o professor necessita construir novos referenciais que demandam reelaboração, reconstrução e construção de conhecimentos. Para que o professor de Matemática integre as tecnologias digitais ao currículo é necessário que ele seja detentor não apenas de conhecimentos relativos ao conteúdo matemático e/ou tecnológicos mas também do conhecimento pedagógico, de uma forma articulada, que gere um novo tipo de conhecimento.

Pesquisas relativas a aspectos teóricos sobre a integração de tecnologias na formação e no desenvolvimento profissional de professores têm sido abordadas por vários pesquisadores. Dentre eles, destacamos os estudos de Mishra e Koehler (2006) que propõe o referencial teórico denominado de Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK) sendo este o resultado de uma mistura equilibrada dos conhecimentos do conteúdo, pedagógico e tecnológico. Conforme alude a teoria, o TPACK emerge da interseção de três conhecimentos distintos: O Pedagogical Content Knowledge (TPK) que é a capacidade de ensinar um determinado conteúdo; o Tehnological Content Knowledge (TCK), ou seja, o saber ensinar um determinado conteúdo curricular com o uso de recursos tecnológicos; e o Technological Pedagogical Knowledge (TPK) que é o saber usar os recursos tecnológicos no ensino e aprendizagem.

Um ensino eficiente com o uso de tecnologias exige o entendimento das relações entre os três conhecimentos. A apropriação da teoria TPACK possibilita ao professor a compreensão de técnicas pedagógicas que permitem que as tecnologias sejam potencialmente utilizadas para a construção do conhecimento por parte do aprendiz e não somente como um suporte ao ensino. Mediante a proposta de metodologias com atividades de ensino e aprendizagem integrados às tecnologias, pressupõe-se que o professor seja capaz de determinar os objetivos, tomar as decisões de cunho pedagógico tendo em vista a natureza da experiência, selecionar, sequenciar as atividades e escolher a melhor forma de avaliação. (Sampaio e Coutinho, 2012).

Outro aspecto relevante na formação docente é o conhecimento do conteúdo que ele irá trabalhar. Além possuir o conhecimento necessário para ensinar, o professor deve ainda estar apto a trabalhar e a produzir conhecimento de maneira que seja útil no processo de ensino e aprendizagem e formação de cidadãos conscientes da realidade e de sua função na sociedade.

Metodologia e procedimentos metodológicos

A metodologia da pesquisa é a qualitativa do tipo *Design Based Research* (DBR). O DBR é uma metodologia que objetiva aumentar consideravelmente a importância da pesquisa para a prática onde os sujeitos se envolvem em distintos papéis durante toda a investigação. Cobb et al. (2003) afirmam que o DBR é elaborado por múltiplos métodos e *design* de pesquisa, contextualizando a trajetória planejada e percorrida pelo pesquisador o que justifica as decisões tomadas com o intuito de encontrar respostas aos questionamentos.

Os procedimentos metodológicos da pesquisa foram: Fase 1: Definição do problema e revisão de literatura; Fase 2: Planejamento e Desenvolvimento da formação; Fase 3: Implementação das intervenções, análises e *redesign*; Fase 4: Reflexão sobre os resultados obtidos. Os dados foram coletados a partir de observações, dos protocolos das tarefas e filmagens em áudio e vídeo. Para a análise dos vídeos utilizamos o modelo analítico de Powell, Francisco e Maher (2004) que consiste em fases interativas não lineares que são: 1) Observar os dados do vídeo; 2) Descrever os dados do vídeo; 3) Identificar eventos críticos; 4) Transcrever; 5) Codificar; 6) Construir o enredo e 7) Compor a narrativa.

A ação formativa em análise foi constituída de 6 encontros presenciais entre maio e agosto de 2016, com 4 horas de duração cada um, tendo como público-alvo 15 professores, com foco no ensino de Poliedros abordando: Corpos Redondos e Poliedros; Poliedros Regulares e Relação de Euler; Prisma e Pirâmides; Poliedro de Arquimedes; Áreas e Volumes.

Nesse artigo, elencamos para discussão e análise um recorte do primeiro encontro que consistiu no desenvolvimento de uma atividade investigativa que versava sobre conceitos de Corpos Redondos e Poliedros.

O encontro formativo

A tarefa proposta neste encontro envolvia diversos sólidos geométricos e um arquivo no GeoGebra 3D (vide Figura 1) apresentado para que os professores explorassem e investigassem sólidos dados com base em alguns questionamentos ligados às características, funcionalidade, nomenclatura, de modo a observarem propriedades e levantarem conjecturas.

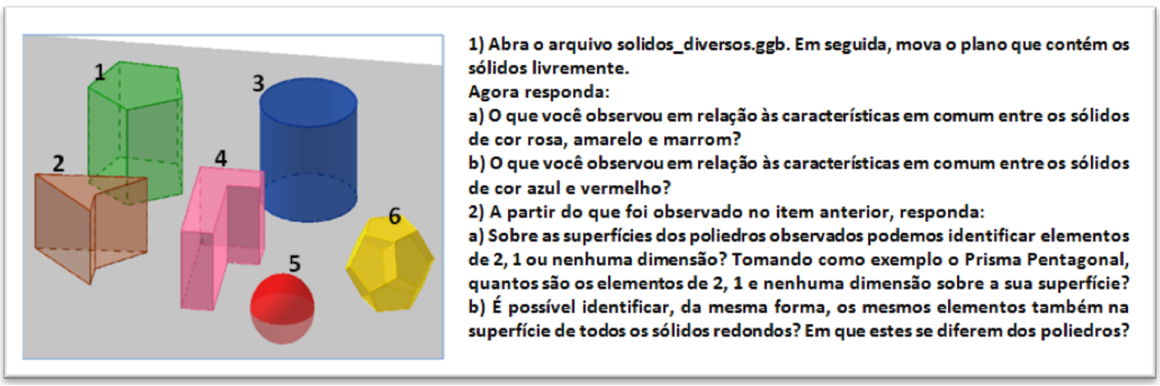


Figura 1- Arquivo solidosdiversos.ggb
Fonte: Dado da pesquisa

Vale salientar que as tarefas de cunho exploratório-investigativo oportunizam aos aprendizes a realização de debates, a expor seus raciocínios ou estratégias de resolução e a estabelecer conjecturas. Nesse sentido, o indivíduo é estimulado a participar ativamente em equipe favorecendo assim uma aprendizagem significativa, dando a oportunidade de escolher o caminho que deseja seguir, não nos limitando a impor somente o que julgamos importante.

Para a realização da tarefa, os professores-participantes se organizaram em duplas e, para cada dupla, foi utilizou um computador com o software GeoGebra 3D. Durante o processo de exploração e investigação dos sólidos, com duração de 25 minutos aproximadamente, os professores-participantes registraram suas conclusões no protocolo da atividade.

O vídeo com a gravação do encontro foi analisado com suporte ao modelo de Powell, Francisco e Maher (2004) no qual observamos, descrevemos, identificamos e analisamos os eventos críticos aqui exemplificados. Segundo os autores os vídeos possibilitam aos pesquisadores a visualização de eventos gravados a qualquer instante e de forma flexível lançando mão, por exemplo, de recursos tecnológicos como assistir o vídeo em câmera lenta ou quadro a quadro. O vídeo auxilia ainda nas interpretações sob diversas perspectivas permitindo com que os próprios participantes assistam e estabeleçam interpretações.

As análises a seguir apresentam algumas das observações dos professores-participantes, as quais evidenciam conhecimentos mobilizados por eles, relativos ao uso de tecnologias no ensino de Poliedros.

Denominamos de *P* o formador e *AA*, *H*, *AV* e *C* os professores participantes das cenas seguintes a fim de preservarmos suas identidades.

P: Quais então não são Poliedros? [fazendo referência aos sólidos contidos no arquivo do GeoGebra]
H: A esfera e o cilindro.
P: Tá! Então aí nós temos alguns que não são. Então para ser um Poliedro as faces tem que ser...
H: ...iguais!
P: Iguais não! Tem que ser polígonos. Por exemplo, a pirâmide é um Poliedro?
C e *H*: Sim.
W: As faces têm que ser planas.
P: As faces têm que ser planas. Mas quando eu falo que são polígonos automaticamente é plano?
Todos: Sim!
P: Todo polígono é plano? E como fica o quadrilátero reverso?
Nesse momento alguns professores participantes nos olharam com espanto.
C: O que é o quadrilátero reverso???

Identificamos a cena supracitada como evento crítico na medida em que, houve desestabilização frente à figura quadrilátero reverso. Na sequência o formador apresentou o polígono e foram discutidas suas características. Entendemos que houve um salto conceitual em relação à concepção prévia de que todo polígono é figura plana.
Abaixo apresentamos mais um recorte de diálogo entre dois professores-participantes e o pesquisador.

AA: Veja que legal! [rotacionando os sólidos no GeoGebra]. Se você virar os objetos de ponta cabeça, fazendo assim, oh! [posicionando os objetos em uma perspectiva planificada] eu estou tendo uma visão de como estivesse vendo de cima.
H: E daí não conseguimos dizer se é um Poliedro ou não.
P: Isso! Veja que aqui você está olhando apenas as projeções [indicando as planificações dos sólidos]. Então essa é a 2D. Então o que você observa? A base desse Poliedro aqui, por exemplo, é um quadrilátero mas é um quadrilátero côncavo [referindo-se ao Poliedro de número 2].

No recorte da discussão acima é possível observar que o professor-participante *AA* vivencia um momento de instrumentalização na medida em que explora o software GeoGebra 3D, em especial a ferramenta "girar" com o objetivo de observar os sólidos sobre várias perspectivas. Nesse momento, os professores-participantes *AA* e *H* (estando em dupla) percebem o potencial pedagógico do software no momento em que, ao rotacionar esses sólidos, constatam que, em determinada perspectiva, se tem a visão em 2D, isto é, como se os objetivos sob investigação estivessem desenhados em um papel. Na sequência o professor pesquisador instiga-os com um questionamento que os levam a refletirem sobre suas observações.

Esse diálogo entre os professores-participantes e o pesquisador evidenciou um processo de reflexão e mobilização de conhecimentos tecnológicos, pedagógicos e geométricos, isto é, o Conhecimento, Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo.

As discussões e reflexões referentes às propriedades dos sólidos contidos no arquivo, bem como o resgate de conceitos da Geometria Plana, pré-requisito fundamental para o ensino e aprendizado da Geometria Espacial, foram essenciais para a realização da tarefa e, sobretudo, para a construção e reconstrução de conceitos relativos ao ensino de Poliedros.

Conforme preconiza Zeichner (1993) o professor precisa vivenciar momentos que exigem outros tipos de rotina, diferentemente das que permeiam seu dia a dia, possibilitando-o organizar e sistematizar ideias para serem discutidas com seus colegas.

Considerações Finais

O processo de formação do professor é contínuo e acontece durante toda a sua vida não existindo início ou fim. Fazer o professor repensar sua práxi é fazer com que ele articule suas significações e saberes para que reflita sobre os mesmos podendo ressignificá-los.

Nesse sentido, a ação formativa empreendida por nós buscou analisar as reflexões e problematizações que emergiram das discussões entre os professores de matemática ao realizarem uma tarefa de cunho exploratório-investigativo com o uso do software GeoGebra 3D, o que possibilitou discussões que contribuíram para a ampliação de sentidos e significados da prática docente bem como a construção de novas competências.

Estabelecemos, no desenvolvimento da tarefa, um contexto desafiador que oportunizou aos professores-participantes compartilharem suas ideias, ouvirem os colegas, traçarem estratégias de resolução, argumentarem e defenderem seus posicionamentos mediante as observações feitas com a ajuda do software e, em alguns casos, refutarem as opiniões de outros colegas. Essas discussões e reflexões em pequenos grupos permitiram a clarificação de pensamentos intuitivos.

Os resultados aqui obtidos nos permitiram identificar o impacto positivo da ação formativa no desenvolvimento de competências tecnológicas em que os professores-participantes vivenciaram momentos de instrumentalização na medida em que o software era utilizado para exploração e investigação dos sólidos geométricos e na construção e reconstrução de conceitos geométricos.

Concluímos que o contexto de problematização, a atividade e a reflexão compartilhada foram relevantes para promover reconceituações impulsionando o conhecimento profissional, sobretudo o específico, o pedagógico do conteúdo e o TPACK.

Agradecimentos

Agradecemos ao Programa Observatório da Educação (OBEDUC), da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela concessão de bolsas e demais subsídios para o desenvolvimento desta pesquisa alojada no Projeto 19366/12 Edital 049/12.

Referências bibliográficas

Coob, P; Confrey, J; Disessa, A.; Lehrer, R.; Schauble, L. P. (2003). Design experiments in education research. *Education Researcher*, *32,* 9-13.

Mishra, P., & Koehler, M. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers college record*, *108* (6), 1017-1054.

Nóvoa, A. (2009). Para uma formação de professores construída dentro da profissão. In. *Professores: imagens do futuro presente* (pp. 25-46). Lisboa: Educa.

Powell, A. B., Francisco, J. M., Maher, C. A. (2004) Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento das ideias matemáticas e do raciocínio de estudantes. *BOLEMA*, *17,* (21),81-140.

Prado, M. E. B. B.; Lobo da Costa, N. M. (2015). A Integração das Tecnologias Digitais ao Ensino de Matemática: desafio constante no cotidiano escolar do professor. *Perspectivas da Educação Matemática*, *8*, 29-66.

Sampaio, P. A. S. R., C. P. Coutinho. (2012). Avaliação do TPACK nas atividades de ensino e aprendizagem: um contributo para o estado da arte. *Revista Educaonline*, *6*(1), 1-17.

Schön, D. A. (1992). Formar professores como profissionais reflexivos. En Nóvoa, A. (Ed). *Os professores e a sua formação* (pp.77-92), Lisboa: D. Quixote e IIE.

Silva, A. C. (2011). *Educação e tecnologia: entre o discurso e a prática*. Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação, (pp.527-554), v.19, n. 72.

Zeichner, K. (1993). *A formação reflexiva de professores: idéias e práticas*. Lisboa: Educa.

MATEMÁTICA EDUCATIVA EN LA ERA DIGITAL: VISIBILIZACIÓN Y ARTICULACIÓN DE LA COMUNIDAD GEOGEBRA LATINOAMÉRICA

Sergio Rubio-Pizzorno, Carlos León Salinas, José León Ríos, Francisco Córdoba-Gómez, Celina Abar
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav), Universidad La Gran Colombia, Universidad de Lima, Instituto Tecnológico Metropolitano, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
(México, Chile, Colombia, Perú, Brasil)
sergio.rubio@cinvestav.mx (www.zergiorubio.org), carlos.leon@ugc.edu.co, jleonr@ulima.edu.pe, franciscocordoba@itm.edu.co, abarcaap@pucsp.br

Resumen
El propósito del Grupo de discusión presentado en Relme 31 fue visibilizar los diversos aportes que realizan los miembros de la Comunidad GeoGebra Latinoamericana a lo largo de toda la región, y generar un espacio que promueva su articulación. Para llevar a cabo este propósito se presentaron varias experiencias de parte de los autores del Grupo y de los asistentes, las cuales reflejan los distintos ámbitos de la Matemática Educativa en los cuales se está desempeñando la comunidad. También se dispuso de plataformas que brinda GeoGebra en su sitio web, como espacios permanentes de articulación de la comunidad. Finalmente se presenta una reflexión respecto del trabajo realizado por el Grupo de discusión, que reflejan los diferentes momentos que vive la Comunidad GeoGebra Latinoamericana de manera simultánea, y que son base de su desarrollo y éxito.

Palabras claves: era digital, GeoGebra, comunidad GeoGebra latinoamericana.

Abstract
The purpose of the Discussion Group held at the 31st Relme was to show the diverse contributions that Latin American GeoGebra Community members carry out throughout the region; and to generate a space that could allow their connection. In order to accomplish this purpose, several experiences were presented by the authors belonging to the group and by the participants. Such experiences reflect the different areas of Mathematics Education where the community is working. The platforms that GeoGebra provide in their website, where also used, as permanent spaces for community connection. Finally, we presented a reflection about the work performed during the Discussion Group, which reflects the different moments that the Latin America GeoGebra Community lives simultaneously, that are considered the bases of its development and success.

Key words: digital era, Latin American GeoGebra community.

Introducción

La aparición de las tecnologías digitales (TD) en el panorama mundial, o tercera revolución de la humanidad como lo denomina Serres (2013), han provocado cambios sociales y, en consecuencia, educativos. Al respecto, Rubio-Pizzorno y Montiel (2017) proponen que "los efectos de este fenómeno en la educación han provocado una bifurcación entre el ámbito oficial y no oficial, en la manera de atender y de ocuparse de las necesidades educativas de las personas y las comunidades que integran" (p. 255).

Como ejemplo de tal bifurcación podemos hacer un contraste entre los programas de *inclusión* y las instancias de *integración* digital, "entendiendo la *inclusión* como poner algo (la TD) dentro de una cosa (aula de clases), [...] y la *integración* como hacer que algo (la TD) pase a formar parte de un todo (quehacer docente)" (Rubio-Pizzorno, Farfán-Cera y Montiel, 2017, p. 1070). Los primeros son fomentados por el ámbito oficial, representado por instituciones globales y los gobiernos de nuestra región (Cobo y Moravec, 2011), los cuales se centran en atender únicamente necesidades institucionales. Por su parte, las instancias de integración digital, si bien atienden a los requerimientos institucionales, su principal preocupación es dar respuesta a las necesidades educativas reales de las personas y las comunidades que integran. Debido a la invisibilización y trivialización de tales necesidades por parte de la institucionalidad, ellas son consideradas no oficiales (Rubio-Pizzorno y Montiel, 2017).

En este escenario educativo de inclusión/integración digital, emerge la comunidad GeoGebra como un esfuerzo colectivo por atender a las necesidades educativas reales de las personas. En un comienzo a través de la creación del *software*, el cual "se originó en el proyecto de tesis de Maestría de Markus Hohenwarter en la Universidad de Salzburgo en 2002" (Hohenwarter y Lavicza, 2011, p. 8). Si bien el origen del *software* GeoGebra fue parte de una instancia institucional, su objetivo principal respondía a una necesidad educativa real de profesores y estudiantes: diseñar un sistema que combinara las características de los *software* de geometría dinámica y los sistemas de computación algebraica, de manera integrada y fácil de usar en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. A la luz de esta evidencia, reconocemos que el origen del *software* GeoGebra atendía a necesidades no oficiales, lo cual guió su posterior desarrollo.

El paso siguiente corresponde a la evolución del *software* a la comunidad GeoGebra, que tuvo como agente detonador el potencial social que representa el *software* libre, puesto que según Hohenwarter (2013), el origen de la comunidad GeoGebra ocurrió sólo después que el programa pasara a ser *software* libre. En consecuencia, la comunidad tuvo un rápido crecimiento incorporando a desarrolladores y traductores alrededor de todo el mundo, así como incrementando las visitas al sitio web www.GeoGebra.org de "50.000 durante el 2014 a más de cinco millones durante el 2010, procedentes de más de 180 países" (Hohenwarter y Lavicza, 2011, p. 8).

Debido a este gran crecimiento, en el año 2008 varios miembros activos de la comunidad GeoGebra provenientes de diversos países, se reunieron en Cambridge para "fundar una red internacional de investigación y desarrollo profesional: el Instituto GeoGebra Internacional (IGI). Esta organización sin fines de lucro tiene la intención de coordinar la investigación internacional y los esfuerzos de desarrollo profesional en torno al *software* libre" (Hohenwarter y Lavicza, 2011, p. 9).

En consecuencia, desde su origen la comunidad GeoGebra ha estado preocupada de atender los fenómenos didácticos asociados a las matemáticas, aprovechando las ventajas que provee las herramientas propias de la actual era digital.

Rol de la comunidad geogebra latinoamericana (CGL)

Uno de los objetivos del IGI es establecer grupos locales que reúnan a usuarios del *software* y miembros de la comunidad en diferentes regiones del mundo. Actualmente Latinoamérica cuenta con 17 Institutos GeoGebra locales y 128 miembros registrados en el IGI (información obtenida de la página web www.GeoGebra.org/institutes). Así también, el Grupo de discusión permitió conocer y visibilizar el trabajo de colegas que realizan iniciativas aprovechando las potencialidades del *software* y las herramientas que provee la comunidad GeoGebra, aunque aún no forman parte oficial del IGI.

Dado este escenario, a lo largo de Latinoamérica se están llevado a cabo variadas experiencias educativas alrededor de la comunidad GeoGebra, es decir, que hacen uso de este *software* y que se nutren con la construcción de conocimiento y retroalimentación que se genera en colectivo, a través de la interacción que permite la plataforma en línea (GeoGebra.org), de la labor de los Institutos GeoGebra locales y las iniciativas de la comunidad. Sin embargo, a pesar de los grandes esfuerzos que realizan las personas, hay una sensación usual de sentirse sólo al realizar estas tareas de innovación e investigación.

En respuesta a esta situación y tomando en cuenta que existe una gran CGL, se configura este Grupo de discusión con la finalidad de (1) visibilizar los aportes realizados en nuestra región, y (2) explorar opciones que permitan una permanente articulación de la CGL.

Para abordar el primer objetivo, se invitó a miembros de la CGL para que formaran parte del Grupo de discusión en calidad de autores, y para compartir las iniciativas que cada uno realiza alrededor de la comunidad GeoGebra en la región. A continuación un resumen de las principales actividades que realizan estos miembros en sus respectivos países:

José León Ríos de Lima, Perú

En Perú, el Instituto de GeoGebra de la Universidad de Lima (IGUL) está trabajando en la elaboración de material y la difusión de actividades académicas. Para lo cual se ha constituido una comisión que se reúne cada semana, para atender los requerimientos de la comunidad local. Como producto de este trabajo se ha elaborado una instancia de socialización del *software*, en el cual se abordan temáticas elementales; y otra en la cual abordan temáticas propias de ciertas asignaturas con GeoGebra, apoyados en aspectos del Pensamiento y Lenguaje Variacional, para que los docentes incorporen el uso de herramientas digitales a su práctica de aula.

Celina Abar de São Paulo, Brasil

Por su parte, en Brasil, el Instituto GeoGebra de São Paulo (IGSP) mantiene varias actividades, entre las cuales destacan la publicación de la Revista del Instituto GeoGebra, de acceso gratuito y de publicación semestral, la cual tiene como objetivo proporcionar un espacio para la difusión de la investigación y el trabajo realizado utilizando GeoGebra, principalmente en Latinoamérica. También se ofrecen cursos de corta duración para los maestros y talleres de GeoGebra por video llamada a quienes estén interesados en conocer el *software*. Una de las líneas de investigación de los participantes del IGSP tiene como objetivo comprender las dificultades en la práctica docente de matemáticas. Las dificultades relacionadas con el proceso de enseñanza, se refieren a la transposición didáctica de los saberes a enseñar, donde la tecnología digital abre nuevas posibilidades (Abar, 2011). Muchos de los trabajos del grupo de investigación Tecnologias Digitais e Educação Matemática (TecDEM), se desarrollan con el uso de GeoGebra, donde algunos resultados de investigación indican cambios en las actitudes de los participantes, dando evidencia que GeoGebra es un recurso importante para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Francisco Córdoba-Gómez de Medellín, Colombia

Desde Medellín, el Instituto GeoGebra de Medellín (el primero en Colombia), tiene por objetivo difundir y promover más que el uso, la integración de GeoGebra en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos, lo cual realiza a partir de diferentes actividades de formación gratuita, tanto para estudiantes y como para profesores.

Carlos León Salinas de Bogotá, Colombia

Desde Bogotá, la Licenciatura en Matemáticas y Tecnologías de la Información de la Universidad La Gran Colombia ha organizado, desde el 2015, el club juvenil Mathema Kids (León, 2017), pensado como un escenario de educación no formal para estudiantes de secundaria (11 a 13 años). Mathema Kids está enfocado en los usos de GeoGebra en torno a la experimentación y a la toma de datos de fenómenos propios de la cotidianidad de los estudiantes, de manera tal que las temáticas a estudiar surjan de sus intereses e inquietudes, y no por la obligación de atender conceptos escolares.

Sergio Rubio-Pizzorno de Santiago, Chile (Ciudad de México, México)

Desde el sur del continente, en Chile, el Instituto GeoGebra de Santiago de Chile (IGS) ha colaborado con la comunidad GeoGebra mediante actividades de diversa índole. Desde el comienzo se han desarrollado actividades de difusión de las potencialidades del software, en términos técnicos y didácticos, orientados a la comunidad educativa en general. Lo cual se ha realizado mediante talleres, la publicación de novedades de la comunidad en el blog oficial de GeoGebra en español (community.GeoGebra.org/es) y la traducción al español de los recursos oficiales de GeoGebra (wiki.GeoGebra.org/es/Tutoriales).

Sumado a lo anterior, y desde México, uno de los integrantes del IGS está realizando un Seminario de integración digital junto a profesores de educación básica del Estado de México, en la cual se exploran, en particular, las herramientas de GeoGebra para la elaboración de diseños didácticos. Así también, se está realizando un taller para estudiantes de maestría y doctorado del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav), con el propósito de orientarlos en el uso de GeoGebra para la construcción de recursos que apoyen sus investigaciones.

Los aportes compartidos por los autores del Grupo de discusión, se tomaron como representantes de las actividades llevadas a cabo en la región, a partir de las cuales se confeccionó una tematización (ver Imagen 1) con el objetivo de visibilizar el alcance y amplitud de la CGL respecto de la comunidad de Matemática Educativa en nuestra región.

Imagen 1. Tematización de las actividades realizadas por la CGL en la región. (Elaboración propia)

Desarrollo del grupo de discusión

Con base en esta tematización, se estructura el Grupo de discusión para que cada uno de los autores pueda compartir una experiencia destacada que realice y que sea representativa de uno de los temas principales de la Matemática Educativa en la era digital:

- José Carlos (Apresto técnico): talleres, espacios de capacitación, creación de material y diseños didácticos, etc.
- Francisco (Desarrollo profesional docente): actividades de capacitación para trabajar con profesores, con el objetivo que puedan utilizar GeoGebra en clases con sus estudiantes,
- Celina (Academia - Difusión académica): ejemplos de desarrollo de la investigación en la CGL, como por ejemplo, lo que están realizando en el Instituto GeoGebra de Sao Paulo.
- Carlos (Práctica educativa no formal): uso de GeoGebra en el trabajar con l@s niñ@s de MathemaKids.
- Sergio (Funcionamiento de la comunidad): qué es la comunidad GeoGebra; cuáles son los espacios y formas de colaborar con la comunidad.

Cada una de estas presentaciones se encuentran disponibles en Rubio-Pizzorno (2017).

Luego de las presentaciones de los autores, se invitó a los asistentes a que también pudieran compartir, en la segunda sesión, sus aportes alrededor de la CGL. Agradecemos a las colegas Maritza Luna de Perú y Keila Chacón de Panamá por aceptar la invitación y presentar sus aportes sobre creación de materiales para trabajar con estudiantes universitarios y elaboración de guías didácticas, respectivamente.

Para abordar el segundo propósito del Grupo de discusión, se evaluaron distintas estrategias que sirvieran como espacios permanentes de articulación para la CGL, entre las cuales se destacan:

- Articular la CGL a través del grupo GeoGebra "Matemática Educativa en la era digital".
- Recoger aportes de la comunidad en el Libro GeoGebra del Grupo de discusión.
- Compartir material audiovisual de la comunidad.
- Traducir recursos oficiales de GeoGebra.
- Publicar en o citar a la Revista del Instituto GeoGebra de Sao Paulo.
- Difundir los eventos de la CGL.

Todas estas propuestas se plantearon como prospectivas para la CGL, de tal suerte que pudiéramos trabajar en ellas y así presentar los avances logrados en el Grupo de discusión la próxima Relme.

Discusión y conclusión

Las experiencias presentadas por los autores y asistentes, así como las discusiones generadas durante el Grupo de Relme 31, nos permiten dar cuenta de la amplia gama de ámbitos de la Matemática Educativa que la Comunidad GeoGebra Latinoamericana está abordando, los cuales se sintetizan en la tematización propuesta (ver Imagen 1). Cada uno de los temas principales -aspectos técnicos, práctica educativa, trabajo con profesores, academia y funcionamiento de la comunidad- también se presentan como diferentes momentos que vive la CGL: cuando se está comenzando en el mundo de GeoGebra nos acercamos a los aspectos técnicos para explorar el potencial de la tecnología al servicio de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas; luego de conocer su potencial, pensamos en estrategias didácticas y pedagógicas para utilizar la TD en nuestras prácticas educativas; un paso natural a continuación, es sentir la necesidad de compartir lo que sabemos con nuestros colegas y trabajar en conjunto; los momentos anteriores se puede analizar desde la investigación, para colaborar con la comunidad construyendo conocimiento especializado; finalmente abordamos la necesidad de coordinar esfuerzos con todos los integrantes de la comunidad para potenciar los resultados de nuestras iniciativas sumadas a las de toda la comunidad.

Una característica interesante de estos momentos vividos en la comunidad, es su simultaneidad, ya que su progreso depende de la participación voluntaria de todos, incluyendo a los que recién se integran a la comunidad y quienes ya desempeñan actividades de organización. Lo relevante es poder construir sobre el esfuerzo colectivo, para maximizar el conocimiento construido por la comunidad, para lo cual es fundamental visibilizar los aportes de la comunidad y establecer espacios permanentes de articulación.

Referencias bibliográficas

Abar, C. (2011) Educação Matemática na Era Digital. En N. Cotic y T. Braicovich (eds.). *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 27*, pp. 14-28. ISSN: 1815-0640

Cobo, C. y Moravec, J. (2011). *Aprendizaje invisible. Hacia una nueva ecología de la educación*. Barcelona: Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona. ISBN: 9788447535170.

Hohenwarter, M. (2013). *Dynamic Mathematics for Everyone* [Video]. En youtu.be/Yq1eBZjz16I

Hohenwarter, M., y Lavicza, Z. (2011). The Strength of the Community. En L. Bu y R. Schoen (Eds.), *Model-Centered Learning* (pp. 7–12). Rotterdam: SensePublishers. doi: 10.1007/978-94-6091-618-2_2

León, C. (2017). *Reportaje Mathema Kids medio día Canal Caracol* [Video]. En youtu.be/OEpsb4RI1N8

Rubio-Pizzorno, S. (2017). *Matemática Educativa en la Era digital* [Libro GeoGebra]. doi: 10.13140/RG.2.2.30500.17280

Rubio-Pizzorno, S.; Farfán-Cera, C. y Montiel, G. (2017). Estrategia de planeación para el trabajo con profesores, integrando tecnología digital. En D. Cobos Sanchiz; E. López-Meneses; A. H. Martín Padilla; L. Molina-García y A. Jaén Martínez (Eds.), *INNOVAGOGÍA 2016. III Congreso Internacional sobre Innovación Pedagógica y Praxis Educativa. Libro de Actas*. (pp. 1069 - 1077). AFOE Formación: España. ISBN: 978-84-608-8348-7

Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2017). Aprendizaje invisible en educación matemática. En L. A. Serna (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 30*, (pp. 254 - 262). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. ISSN: 2448-6469.

Serres, M. (2013). *Pulgarcita*. Buenos Aires, Argentina: Fondo de Cultura Económica.

Agradecimientos

Un agradecimiento para todos quienes colaboraron con el Grupo de discusión y aportaron a que fuera todo un éxito. A autor@s, asistentes, miembros de la comunidad que no pudieron asistir: ¡Muchas gracias!

Un agradecimiento especial a la Dra. Gisela Montiel por creer en este tipo de iniciativas y apoyarnos permanentemente, con sus ideas, sugerencias y tiempo. Así también, para Camilo Sáchica por su valioso análisis del Grupo de discusión y la posibilidad de que sus ideas se ven reflejadas en este escrito.

INDICADORES DE USO DE AVA Y MÁQUINA DE APRENDIZAJE EN EL ÁREA DE LAS MATEMÁTICAS

John Fabio Aguilar Sánchez
Universidad Militar Nueva Granada. (Colombia)
john.aguilar@unimilitar.edu.co

Resumen
El uso de tecnologías de la información y la comunicación (TIC) ha hecho que la utilización de recursos digitales en un entorno dirigido sea parte de las actividades académicas en la Universidad Militar Nueva Granada. En el marco del proyecto de investigación “Indicadores de uso eficiente de Entornos virtuales en el área de las matemáticas” (INV-DIS-2322), proponemos el análisis de variables asociadas al uso de recursos Web. En el presente trabajo se muestran resultados del análisis de algunas variables usadas por una muestra de 4518 individuos en el ambiente virtual de aprendizaje (AVA) Moodle y objetos virtuales de aprendizaje (OVA) como la plataforma “Assessment and Learning in Knowledge Spaces” (ALEKS).

Palabras Clave: AVA, educación superior, TIC, educación matemática, ALEKS

Abstract
The information and communication technologies (ICTs) have made possible that the use of digital resources in a specific environment become part of the academic activities at the Military University of Nueva Granada. In the framework of the research project "Indicators of efficient use of virtual environments in mathematics", we propose variables associated with the use of Web resources. In the present work, we show the outcomes of the analysis of some variables used by a sample of 4518 students in the Moodle virtual learning environment and virtual learning objects (VLO) such as the platform "Assessment and Learning in Knowledge Spaces" (ALEKS).

Introducción

El uso de TIC en el campo de la educación ha tenido como propósito la contribución en los procesos de enseñanza y aprendizaje, sin embargo, surge la necesidad de proponer apoyos que confirmen que las TIC contribuyen a la mejora de la enseñanza y el aprendizaje (Morrissey, 2008). En este sentido, nuestro grupo se ha interesado por encontrar indicadores indirectos de la eficiencia en los procesos de aprendizaje de estos recursos mediante el uso de ambientes virtuales de aprendizaje (AVA), como la plataforma Moodle, la cual da cuenta de la forma como se usan los recursos que allí se albergan, por medio del uso de registros. Por otro lado, hemos incorporado como recurso complementario al proceso de aprendizaje, el uso de una plataforma digital, con la cual se proponen rutas de aprendizaje para cada estudiante, de acuerdo a la información suministrada por una evaluación de entrada. El uso de este recurso ha permitido acceder a nueva información en torno a las dinámicas que influyen en el aprendizaje de las matemáticas en un curso de primer semestre, tales como la frecuencia de uso de la herramienta, tiempo efectivo de trabajo, temas practicados, temas aprendidos, entre otros. Esta información ha sido recolectada durante el año 2016 en los dos periodos que este año comprende (2016 I y 2016 II). La información obtenida en los recursos TIC en cuestión serán cotejados con las impresiones dadas por estudiantes y profesores en la implementación de las actividades.

Marco teórico

Para las instituciones educativas de educación superior es de alto interés la medición del impacto del uso de los AVA en los procesos de aprendizaje, autores como Mirabal, Gómez y González (2015) han realizado una descripción global del uso de un AVA, como lo es en este caso Moodle al interior de una institución educativa de educación superior. Allí, se trazaron como objetivos “Primero, identificar las competencias tecnológicas que coadyuvaron al manejo eficaz de Moodle y segundo conocer la percepción que tienen los docentes respecto a las competencias tecnológicas que se requieren para su uso” (p. 136). Para desarrollar estos objetivos, se aplicaron técnicas cuantitativas aplicadas en fuentes directas, tales como la comunicación con los docentes en la cual se describe cómo se implementan recursos digitales en el proceso de enseñanza de los estudiantes. Paralelamente al AVA usada por parte de la institución (Moodle), se ha integrado un recurso digital conocido como ALEKS (Coburn, 2014), que, mediante el uso de algoritmos de aprendizaje adaptativo, construye rutas de aprendizaje de acuerdo a las fortalezas y debilidades planteadas en la prueba de entrada, para la cual surge un especial interés en describir la metodología usada para la determinación de las diferentes rutas de aprendizaje que se asignan a los estudiantes al inicio de curso, desde lo teórico (Doignon, J. Falmagne, 1999) y lo práctico (Doignon, J. Falmagne, 2016). Finalmente consideramos importante resaltar que para el diseño de las actividades implementadas se verificó que cumpliera con elementos mínimos en una TIC en una práctica educativa, como los propuestos por Coll, Mauri & Onrubia (2008): el uso efectivo del recurso por parte de estudiantes y docentes, el diseño tecno-pedagógico a partir de las necesidades propias de la población estudiantil y sus conocimientos previos

Metodología

En la presente investigación se busca destacar las principales variables que pudieran relacionarse con el uso de tecnologías de la información y los resultados académicos propuestos en el curso de primer semestre de los estudiantes de la Universidad Militar Nueva Granada. En este sentido se postuló una metodología dividida en fases, las cuales se describen a continuación

Fase 1. Definición de variables por estudiar: En este sentido, se estructuraron las principales variables asociadas al uso de recursos tecnológicos y los resultados académicos del curso en cuestión en un grupo de 4518 estudiantes. Las variables que fueron puestas a consideración fueron:

- Variables Institucionales. Estas variables están asociadas al desarrollo de las actividades académicas propias del curso formal de primer semestre
- Ponderación cuantitativa del curso. A lo largo del curso de matemáticas se ponderan tres notas conocidas como cortes, las cuales al ser sumadas con diferentes pesos (30%, 30% y 40%

respectivamente) consolidan la nota definitiva del curso.

- Logro en las metas del curso. Se destaca una variable de aprobación o desaprobación del curso. En el caso positivo, el estudiante obtendrá una nota igual o superior a 300 puntos.
- Variables asociadas al uso de Tecnologías de la información. Estas variables son obtenidas a partir de la implementación de esta plataforma ALEKS durante el curso de matemáticas de primer semestre, como se describe a continuación

    - Duración de prueba de entrada. Lo primero a desarrollar al tener interacción con la plataforma es una prueba de entrada donde se verifica el nivel de dominio de los temas que se verán en el curso, previo al inicio de este. La duración de esta prueba se espera que sea de dos horas; sin embargo, el estudiante puede durar más tiempo desarrollando esta actividad
    - Temas dominados (expresados en porcentajes). A partir de los resultados de la prueba, la plataforma estima el porcentaje de temas que el estudiante domina en el momento de iniciar el curso. Es importante resaltar que en el curso en cuestión se están retomando temas que se espera que el estudiante ya hubiera abordado en experiencias académicas previas
    - Temas dominados. Esta variable refleja los mismos resultados del ítem anterior, sin embargo, en este caso cabe destacar que la cantidad de temas por abordar a lo largo del curso puede variar de acuerdo con el tipo de curso entre 214 y 343 temas.
    - Progreso. Al finalizar el curso, la plataforma hace una ponderación del porcentaje de los temas dominados por el estudiante.
    - Temas practicados. A lo largo del curso, el estudiante puede practicar los diferentes temas presupuestados, según el tipo de curso, sin que esto implique necesariamente su dominio
    - Temas dominados. Los temas para los cuales el estudiante ha demostrado maestría a lo largo de las diferentes evaluaciones en la plataforma, quedan registrados en este ítem
    - Tiempo. Al iniciar el curso se propone al estudiante que invierta, a lo largo de las 16 semanas que dura el curso, un total de 50 horas en la plataforma. Esta cantidad puede aumentar, si el estudiante lo considera necesario.
    - Aprendidos/hora. Esta variable representa el ritmo de aprendizaje de cada estudiante. Es obtenida a partir de la razón entre los temas aprendidos y el tiempo total invertido en la plataforma.

Fase 2. Definición de técnicas a implementar en el análisis de las variables. Teniendo en cuenta que la presente investigación busca relacionar variables cuantitativas asociadas a las metas académicas del estudiante en el curso y al uso de tecnologías de la información, en primer lugar, se implementó el índice de Hartigan con el objetivo de estimar el número óptimo de Clúster o grupos que se podrían formar tomando como punto de partida las variables cuantitativas recolectadas para el presente estudio. Es importante recalcar que la implementación del índice de Hartigan requiere la definición de la métrica con la cual se hará la clasificación mediante la técnica de K-means. En este sentido se tomó como métrica de referencia la euclídea, teniendo en cuenta que las variables en consideración se comportan de manera continua.

Fase 3. Una vez se implementa e itera 50 veces el algoritmo que permite obtener el índice de Hartigan, se llega al que el número óptimo medio de clúster para el conjunto de datos considerado es de 20 clúster. Posteriormente se procede al implementar la técnica K-means para establecer en cual de cada uno de estos clústeres quedarían asignados los estudiantes que hacen parte de la muestra y hacer su correspondiente caracterización. Los resultados de estas técnicas se resumen en la tabla 1.

Tabla 1. *Resumen de los resultados obtenidos al implementar K-means en la muestra seleccionada.*

No. Ítem	Variable \ Cluster	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	Tipo	B	A	C	C	C	D	A	B	A	D	A	B	C	B	C	A	C	B	D	D
2	APROBADO	84	0	134	186	234	141	0	265	0	33	0	298	242	366	158	0	223	183	26	99
3	REPROBADO	0	208	23	69	29	88	301	0	157	25	215	0	20	0	36	257	84	1	199	134
4	Porcentaje perdida	0%	100%	17%	37%	12%	62%	100%	0%	100%	76%	100%	0%	8%	0%	23%	100%	38%	1%	765%	135%
5	Elementos en el cluster	84	208	157	255	263	229	301	265	157	58	215	298	262	366	194	257	307	184	225	233
6	Duración evaluación inicial	127%	81%	81%	81%	90%	72%	77%	106%	58%	139%	83%	88%	86%	89%	88%	74%	84%	92%	83%	84%
7	Dominado (%) Evaluacion inicial	53%	12%	7%	14%	11%	15%	7%	33%	11%	55%	11%	17%	11%	16%	13%	9%	12%	23%	13%	8%
8	Dominados (cantidad de temas)	149	29	22	32	25	32	17	78	24	152	25	39	23	39	30	19	25	56	28	20
9	Progreso (%)	62%	24%	78%	32%	72%	30%	55%	59%	20%	64%	22%	36%	69%	78%	29%	23%	55%	40%	27%	70%
10	Practicados	8%	13%	104%	19%	82%	17%	66%	28%	11%	8%	12%	21%	79%	80%	18%	19%	57%	17%	16%	92%
11	Aprendidos	7%	11%	93%	16%	73%	15%	57%	26%	10%	7%	10%	19%	70%	73%	16%	16%	50%	16%	14%	81%
12	Tiempo dedicado ALEKS	28%	27%	222%	35%	133%	28%	107%	49%	18%	31%	26%	38%	117%	136%	36%	36%	79%	32%	29%	194%
13	Aprendidos/hora	1,2	1,8	2,8	2,0	2,6	2,1	2,8	2,2	1,7	1,2	1,6	2,2	2,7	2,7	1,9	1,7	2,8	1,9	1,9	2,4
14	Primer Corte	74%	55%	64%	65%	76%	74%	43%	89%	29%	52%	40%	65%	56%	83%	44%	18%	60%	81%	45%	58%
15	Segundo Corte	73%	49%	63%	49%	60%	58%	45%	91%	22%	64%	37%	81%	62%	85%	61%	38%	71%	83%	62%	61%
16	Tercer Corte	73%	33%	72%	70%	64%	51%	46%	88%	2%	56%	47%	77%	77%	85%	76%	28%	56%	59%	51%	55%
17	definitiva	73%	44%	67%	62%	67%	60%	45%	89%	4%	58%	42%	75%	66%	84%	62%	28%	62%	73%	52%	58%

Fuente: Elaboración propia.

Para construir esta tabla se obtuvo el valor medio de los elementos que fueron asignados en cada uno de los clústeres obtenidos mediante K-means. En los ítems 6 al 17 se muestran los resultados de este cálculo en cada una de las variables en estudio. En el Ítem 5 se hace el conteo de estudiantes que están incluidos en cada uno de los clústeres. En el ítem 2 a la 4 se refleja la mortalidad académica en cada uno de los grupos. El ítem 1 se explicará en la primera parte de la sección 3.

Análisis de Resultados

Una vez se hizo la agrupación de los estudiantes de acuerdo con el resultado del método de clasificación se evidenciaron 4 tipos o tendencias, las cuales se subclasifican en el ítem 1 de la tabla 1.

- A: Clúster donde la mortalidad académica es 100%. (Clúster 2, 7, 9 11 y 16).
- B: Clúster donde la mortalidad académica es 0% (Clúster 1, 8, 12, 14 y 18).
- C: Clúster donde la mortalidad académica es menor al 50% (Clúster 3, 4, 5, 13, 15 y 17).
- D: Clúster donde la mortalidad académica es mayor al 50% (Clúster 6, 10, 19 y 20)

En términos del desempeño académico, se observa en la figura 1 una tendencia de correlación entre cada uno de los momentos académicos del curso, siendo esto más evidente conforme avanza el curso, esto teniendo en cuenta que los índices de correlación entre la nota definitiva del curso y cada uno de los cortes es 0.74, 0.86 y 0.89, respectivamente. Por otro lado, se observa como los clústeres Tipo A, B, C y D se discriminan en 4 sectores diferentes de la cada una de estas gráficas.

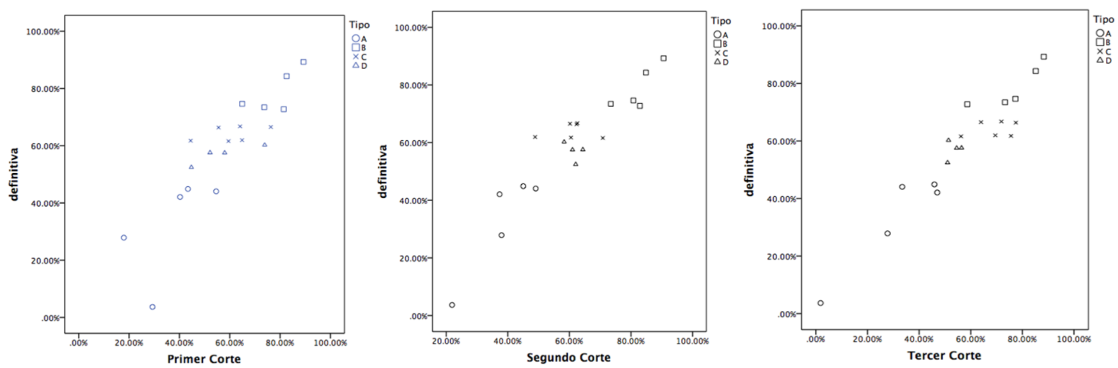


Figura 1. Gráficos de dispersión donde se comparan los resultados cuantitativos del curso (Definitiva) con tres momentos en el desarrollo del mismo (Primer, segundo y tercer corte)

En términos de la comparación de la variable "definitiva", la cual describe de forma global el desempeño en el curso con variables asociadas al uso de la plataforma ALEKS se puede observar en la figura 2 como estudiantes de clúster 14 que al comienzo tenían resultados por debajo del 20 % de los temas propuestos, tuvieron resultados por encima de 70% en el curso de matemáticas de primer semestre, tuvieron avances significativos a lo largo del curso, lo cual se vio reflejado en los progresos del curso del orden de 78%.

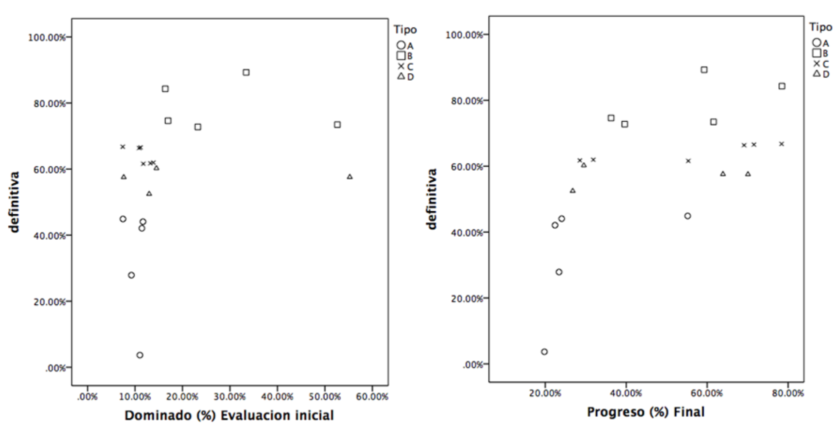


Figura 2. Panel Izquierdo: Gráfico de dispersión de calificación definitiva obtenida en curso de matemáticas versus porcentaje de temas dominados en la prueba de entrada en la plataforma ALEKS. Panel Derecho: Gráfico de dispersión de calificación definitiva obtenida en curso de matemáticas versus el progreso de temas vistos a lo largo del curso mediante el uso de la plataforma ALEKS.

En términos de la influencia en mayor o menor medida del uso de las tecnologías de la información y la comunicación, se involucró la ponderación del tiempo invertido en ella y su posible influencia en los resultados del curso. En este sentido los estudiantes en los clústeres asociados al tipo A reflejan una tendencia de uso de la plataforma por debajo del 50%, lo cual equivale a 25 horas, lo cual podría ser un factor de influencia en los resultados obtenidos en el curso. En el caso de los estudiantes contenidos en lo clúster tipo B se destacan dos comportamientos, por un lado, estudiantes que usan la plataforma un tiempo por debajo a lo propuesto, lo cual puede deberse a que antes de iniciar el curso tenían un dominio de los temas abordados en el curso (Lo cual se ve reflejado a que en su prueba de entrada obtuvieron resultados destacados frente a los de sus compañeros), lo cual se vio reflejado en no tener que invertir mucho tiempo en dominar los temas propuestos en la plataforma, por otro lado, los 366 estudiantes incluidos en el clúster 14, a pesar de reflejar bajos resultados en su prueba de entrada (del orden del 16%), dejan ver como el invertir una cantidad superior a las sugeridas por el docente (136% del tiempo sugerido que son 50 horas), reflejaron notas por encima del 80%

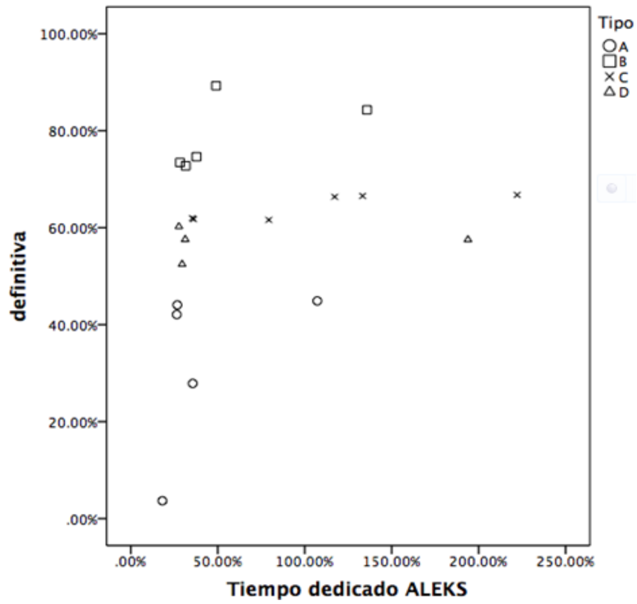


Figura 3. Gráfico de dispersión de Calificación definitiva obtenida en curso de matemáticas versus porcentaje de temas dominados en la prueba de entrada en la plataforma ALEKS.

Conclusiones

El presente trabajo muestra que para un 80% de la muestra estudiada refleja que el uso sistemático de recursos digitales apoya significativamente el proceso de aprendizaje en el área de las matemáticas, el cual se evidencia por la relación del progreso reportado por la plataforma virtual y los resultados académicos del curso, proporcionando un espacio para el docente en el cual se genere una cosmovisión de los diferentes tipos de estudiantes (como lo mostraron cada uno de los clúster obtenidos), con los cuales se desarrolla el proceso de formación, permitiendo hacer un planteamiento metodológico y pedagógico de acuerdo a las necesidades de cada uno de estos grupos.

Se notó como en algunas de las agrupaciones ponderadas se vieron ciertos comportamientos que no fueron plenamente explicados a partir de la variables en estudio, como lo muestran los estudiantes contenidos en el clúster 7, quienes a pesar de usar la plataforma en un orden de 50 horas, no pudieron alcanzar las metas del curso o los estudiantes que hacen parte del clúster 10, los cuales obtuvieron calificaciones altas frente a las de sus compañeros en la prueba de entrada, pero tampoco alcanzaron las metas del curso. En este sentido se sugiere para trabajos futuros la implementación de modelos logísticos que tengan en cuenta variables cuantitativas y cualitativas asociadas a la actividad académica.

Referencias bibliográficas

Coll, C., Mauri, T., & Onrubia, J. (2008). La utilización de las tecnologías de la información y la comunicación en la educación: Del diseño tecno-pedagógico a las prácticas de uso. *Psicología de la educación virtual*, 74-103.

Coburn, J. (2014). *Coburn College Algebra Essentials with ALEKS 360 52 Weeks Access Card*. McGraw-Hill Education.

Doignon, J. P., & Falmagne, J. C. (1999). *Building the Knowledge Structure in Practice. In Knowledge Spaces* (pp. 274-309). Springer, Berlin, Heidelberg.

Falmagne, J. C., Cosyn, E., Doignon, J. P., & Thiéry, N. (2016). The assessment of knowledge, in theory and in practice. In *Formal concept analysis* (pp. 61-79). Springer, Berlin, Heidelberg.

Mirabal Montes de Oca, Á. R., Gómez Zermeño, M. G., & González Gailbraith, L. A. (2015). Uso de la plataforma Moodle como apoyo a la docencia presencial universitaria. *Edmetic. Revista de Educación Mediática y TIC. 4*(1), 133-155.

Morrissey, J. (2008). *El uso de TIC en la enseñanza y el aprendizaje: cuestiones y desafíos*. Buenos Aires, Fondo de Naciones Unidas para la Infancia.

VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

EXPERIMENTANDO CON EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA USANDO TECNOLOGÍA

Jorge Ávila Soria
Universidad de Sonora. (México)
javilas9@gmail.com

Resumen
En este trabajo queremos mostrar los primeros resultados de una investigación, que iniciamos en el segundo semestre del año 2016. Con esta, buscamos contrastar dos formas de abordar el planteamiento y resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales de hasta 4 incógnitas. En la enseñanza tradicional, tanto el profesor como los estudiantes dedican buena parte del tiempo para revisar y practicar las diversas formas de resolver, más que plantear esos sistemas de ecuaciones. Mientras que, en un nuevo enfoque como el que proponemos, gran parte del tiempo se emplea en el modelado y la diversificación de aplicaciones de software para ayudar a responder las interrogantes planteadas.

Palabras Clave: geometría dinámica, representaciones múltiples, contextos

Abstract
In this work, we want to show the preliminary outcomes of a research, which we started in the second half of 2016, where we seek to contrast two ways of approaching how to propose and solve Systems of Linear Equation. In traditional teaching, both the teacher and the students spend much of their time reviewing and practicing the various ways of solving, rather than posing those systems of equations. Whereas, in a new approach such as the one we propose, much of the time is used in the modeling and diversification of software applications to help students answer the questions raised.

Key Words: dynamic geometry, multiple representations, contexts

Introducción

En el presente reporte de investigación queremos mostrar los primeros resultados obtenidos de la implementación que iniciamos en el segundo semestre del año 2016, con el propósito de contrastar dos formas de abordar el planteamiento y resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL) en un curso de Álgebra para Ingenieros.

Como ya dijimos, el principal propósito de esta investigación es comparar la enseñanza tradicional donde los estudiantes deben trabajar en su cuaderno un sistema de ecuaciones lineales que puede tener hasta 4 incógnitas, por alguno de los métodos de resolución requeridos, para contestar a las interrogantes planteadas en una situación problema de un contexto particular, en contraposición a un tipo de enseñanza en el que los estudiantes no ocupan preocuparse por la parte operativa del Álgebra, conocen esa parte operativa, pero deben de aprender principalmente como utilizar el software que se encargará de esa parte operativa del Álgebra, mientras los estudiantes dedican más tiempo a contestar las mismas preguntas relativas a la situación problema de estudio. En el grupo que trabaja con tecnología se utilizan las mismas situaciones problema, sin embargo, el tamaño de los SEL que se pueden trabajar sólo se limitando por las capacidades del software, lo cual queda claro en ambos grupos, aun cuando esto es solo en la teoría.

Marco teórico y metodológico

Para la presente investigación, se asume la validez de las premisas teóricas del Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y la Cognición Matemática (EOS; Font, Godino, y D´Amore, 2007), en especial, las relativas al carácter sistémico de los significados de los objetos matemáticos que parten de concebirlos de una naturaleza pragmática antropológica y, en consecuencia, de carácter contextual. Es decir, partimos de que dichos significados son, esencialmente, los sistemas de prácticas que se utilizan para analizar, interpretar y resolver un cierto tipo de situaciones problemáticas; que estos sistemas de prácticas son discursivas y operativas; y que los elementos que los constituyen son los medios utilizados en dichas prácticas, tales como el lenguaje, constituido a su vez, por las diversas formas de representación de los objetos matemáticos (como son la tabular, la gráfica, la analítica, la verbal y otras), los procedimientos, los conceptos, las propiedades, los argumentos (utilizados para justificar las propiedades y los procesos que se desarrollan) y los medios tecnológicos. En este caso, el interés está centrado en el uso de las tecnologías digitales, especialmente, en el uso de GeoGebra por la facilidad de trabajar en un ambiente de múltiples representaciones, además de su gratuidad.

Al igual que Godino (2010) y Ávila y Ávila (2015), buscamos introducir la tecnología digital como parte integral del proceso de enseñanza aprendizaje. Asimismo, queremos encontrar formas adecuadas de utilizar esas tecnologías digitales en forma científica para que los estudiantes adquieran las competencias necesarias en el uso de software matemático, mejorando así sus capacidades para afrontar y resolver problemas de ingeniería en el ambiente laboral en el que se desempeñen.

Al presentar los objetos de estudio con la ayuda de GeoGebra, buscamos que los alumnos interpreten adecuadamente –con ayuda su manipulación– las situaciones problemáticas presentadas y logren plantear y resolver los Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL) correspondientes para dar respuestas a las interrogantes que les plantea el estudio de esas situaciones.

La metodología de diseño y marco teórico están fundamentados en Aprendizaje en Colaboración, Debate científico, y Auto reflexión (ACODESA), propuesta por Hitt (2009), que a su vez se apoya en otros marcos teóricos relativos a los campos conceptuales, las representaciones semióticas y las situaciones didácticas. ACODESA favorece particularmente el uso de manipulables para promover la producción de representaciones funcionales por parte de los estudiantes, que consideramos fundamental para que estos tengan una mejor retención de las construcciones matemáticas estudiadas, ya que el curso de Álgebra para ingenierías del nivel superior busca enfrentar a los estudiantes con una diversidad de contextos que requieren las significaciones de los objetos matemáticos.

Metodología de diseño

Para esta investigación, decidimos trabajar exclusivamente con el tema Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL) de hasta 4 incógnitas, con 6 estudiantes, pues nos facilitaba su observación. Estos estudiantes que participaron de la experiencia nunca estuvieron al tanto de que eran observados, ni sabían que existían dos grupos de estudio, uno de trabajo más comúnmente tradicional y otro con un enfoque puramente orientado al uso de tecnología digital.

Buscamos seleccionar dos grupos homogéneos de estudiantes tanto para el grupo de enseñanza tradicional, como para el grupo de enseñanza con tecnología digital. Los sujetos de estudio elegidos, para esta primera observación, eran estudiantes que habían mostrado un interés por arriba del promedio de la totalidad del grupo, además de capacidades similares, durante el trabajo previo en el curso. Se seleccionaron 6 estudiantes que se podrían clasificar como aventajados.

En el grupo de enseñanza tradicional, decidimos observar el desempeño de 4 sujetos de estudio, el doble que los sujetos observados en el grupo de enseñanza con tecnología digital. Además, en ambos grupos, la mitad eran repetidores de la materia y la otra mitad eran estudiantes de nuevo ingreso. El haber elegido repetidores, no va en detrimento de las capacidades de esos estudiantes, pues el principal factor a evaluar fue su desempeño previo en el curso.

El trabajo previo al proceso de experimentación-observación fue similar en ambos grupos. Los cursos en ambos grupos se desarrollaron, en lo general, de la misma manera, se trataron los mismos temas, se usaron los mismos contextos de problematización de las situaciones, se mezclaron proporcionalmente igual, la enseñanza digital con la enseñanza tradicional y fue luego de todo este proceso que se hizo la selección de estudiantes para la investigación.

En ambos procesos de enseñanza, se buscó que los estudiantes fueran capaces de transitar entre las múltiples representaciones de los objetos de estudio en los diversos contextos utilizados, para que pudieran, ellos mismos, avanzar tanto en forma colaborativa como de forma individual en darle respuesta a las interrogantes planteadas por cada problemática.

Uso de múltiples contextos para Sistemas de Ecuaciones Lineales

Durante el tema de SEL, en el grupo de enseñanza tradicional del curso de Álgebra para ingenierías del nivel superior, tanto el profesor como los estudiantes dedicaron buena parte del tiempo revisar y practicar los diversos métodos para resolver los SEL y bastante menos tiempo se dedicó a su planteamiento. Mientras que, en el grupo que usó tecnología digital, la mayoría del tiempo se empleó en el planteamiento y la explicación de los diversos elementos y funciones en el ambiente del software de geometría dinámica, GeoGebra.

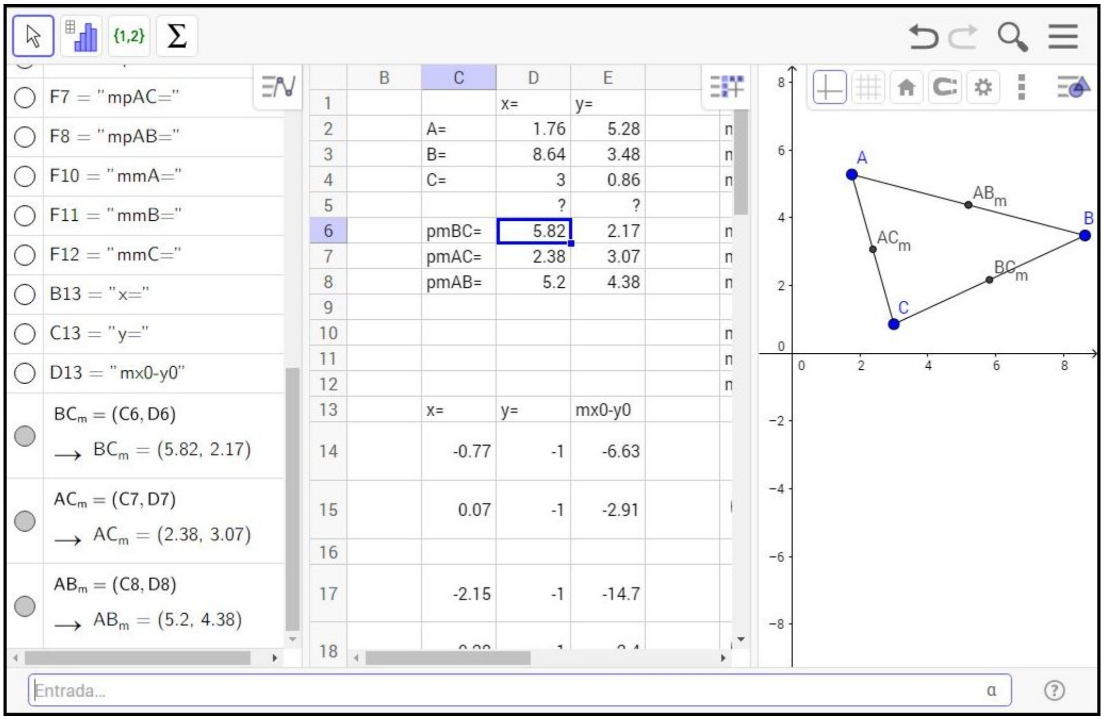


Figura 1. Los centros de un triángulo, tratado en múltiples representaciones digitales interrelacionadas. (Pantalla de GeoGebra)

La Figura 1 presenta un escenario de múltiples representaciones para el contexto de la intersección de líneas rectas y los vértices de una figura geométrica, en este caso, un triángulo. Todos los contextos son usados en ambos enfoques del curso y esta imagen en particular es usada para los SEL de 2x2, para la enseñanza digital. Desde el principio del curso, se presentó a los estudiantes las ventajas que podían tener si eran capaces de utilizar las múltiples representaciones para su ventaja en el entendimiento de las situaciones problemas estudiadas.

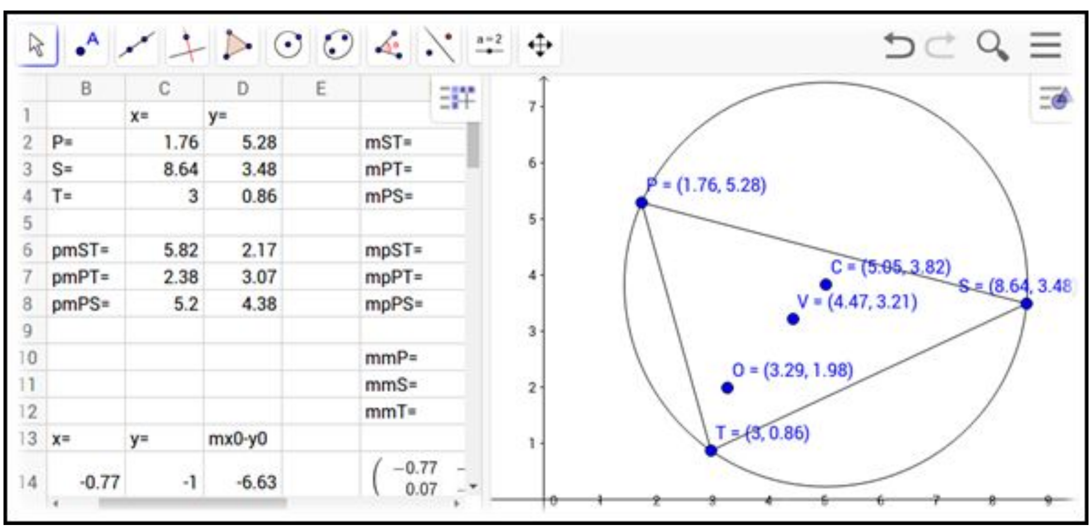


Figura 2. La obtención de los centros de un triángulo. (Pantalla de GeoGebra)

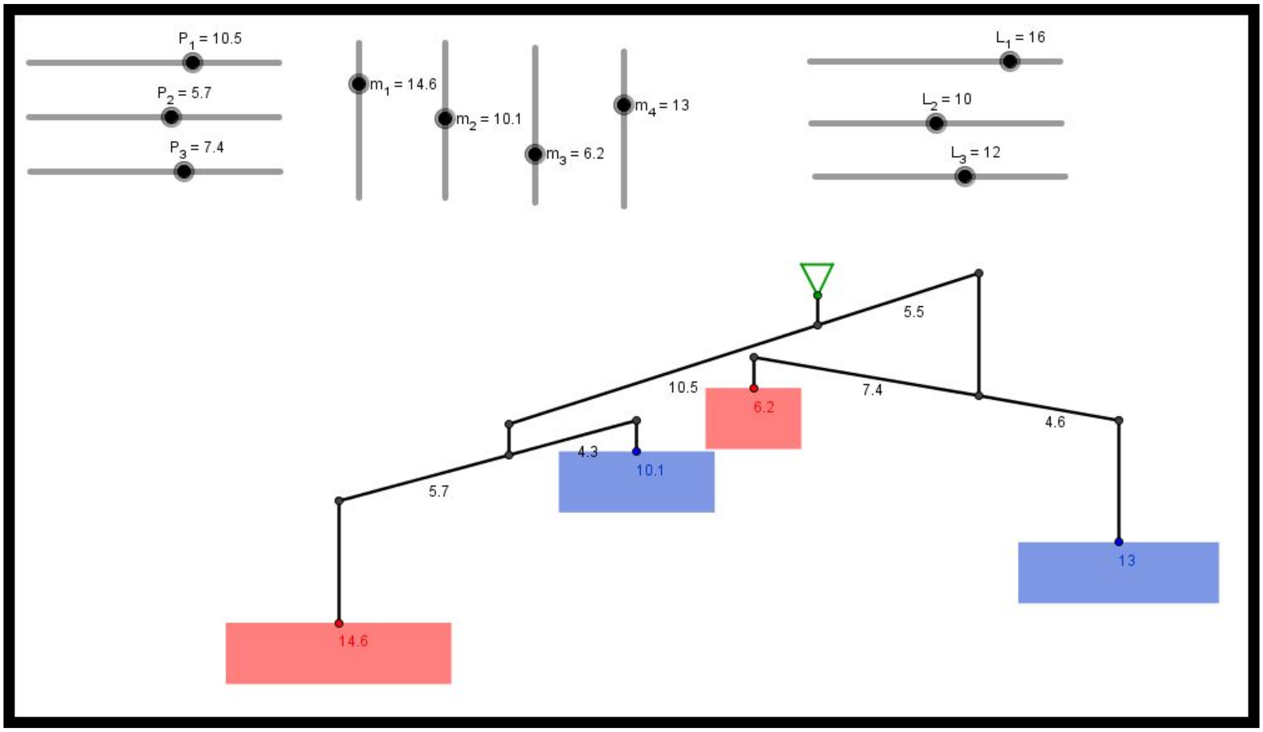


Figura 3. El estudio del balanceo de masas en sistemas de ecuaciones con más incógnitas que ecuaciones. (Pantalla de GeoGebra)

En la Figura 2, se continúa con los SEL de 2x2, donde los estudiantes observan muchas líneas rectas que se interceptan y donde los estudiantes pueden practicar múltiples veces y métodos de resolver trabajar los SEL. En particular en esta imagen solo se ven los tres segmentos que representan los lados del triángulo. mientras que las otras líneas rectas que se interceptan, que son bisectrices, medianas o perpendiculares, se encuentran ocultas. Al mismo tiempo, los estudiantes observan y aprenden que las diferentes intersecciones llevan nombres diversos, aún dentro de una misma situación problema en un mismo contexto geométrico. Estas soluciones a los SEL, pueden ser una simple intersección entre dos rectas, un vértice, el punto medio de un lado de un triángulo, el centro de una circunferencia o alguno de los centros de un triángulo y esto sin duda abona a la riqueza contextual de la utilidad de los SEL.

En la Figura 3, se usa el balance de masas en un sistema de balanzas, para explicar los SEL que cuentan con más incógnitas que ecuaciones, hasta los SEL de 3x3, pero en este contexto, los estudiantes no necesitan observar las rectas en la vista gráfica de GeoGebra, en lugar de eso, usan el Applet para balancear la balanza virtual.

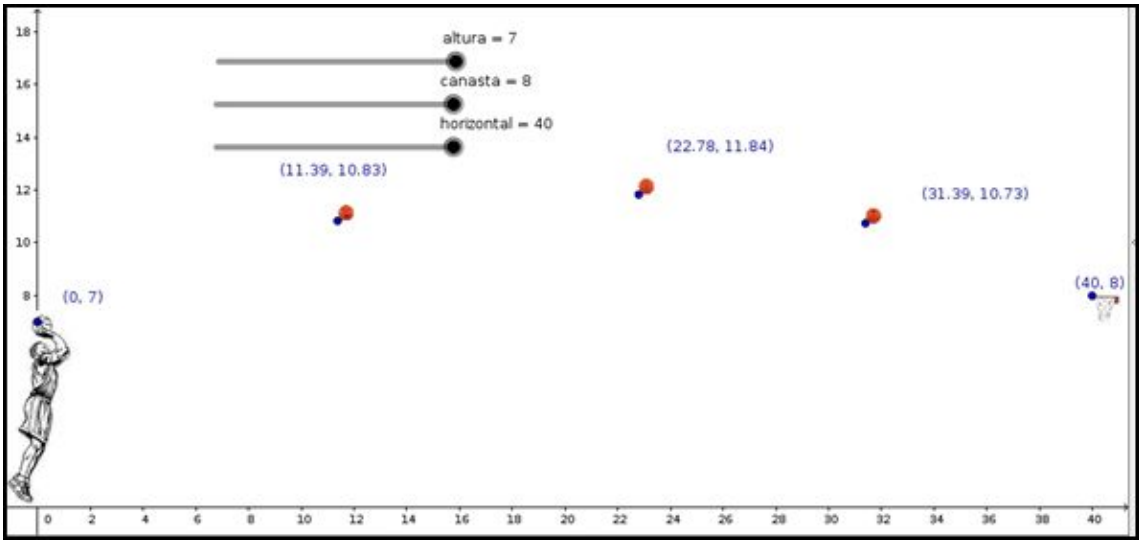


Figura 4. Lanzamiento parabólico estudiado desde las perspectivas de diversos contextos. (Pantalla de GeoGebra)

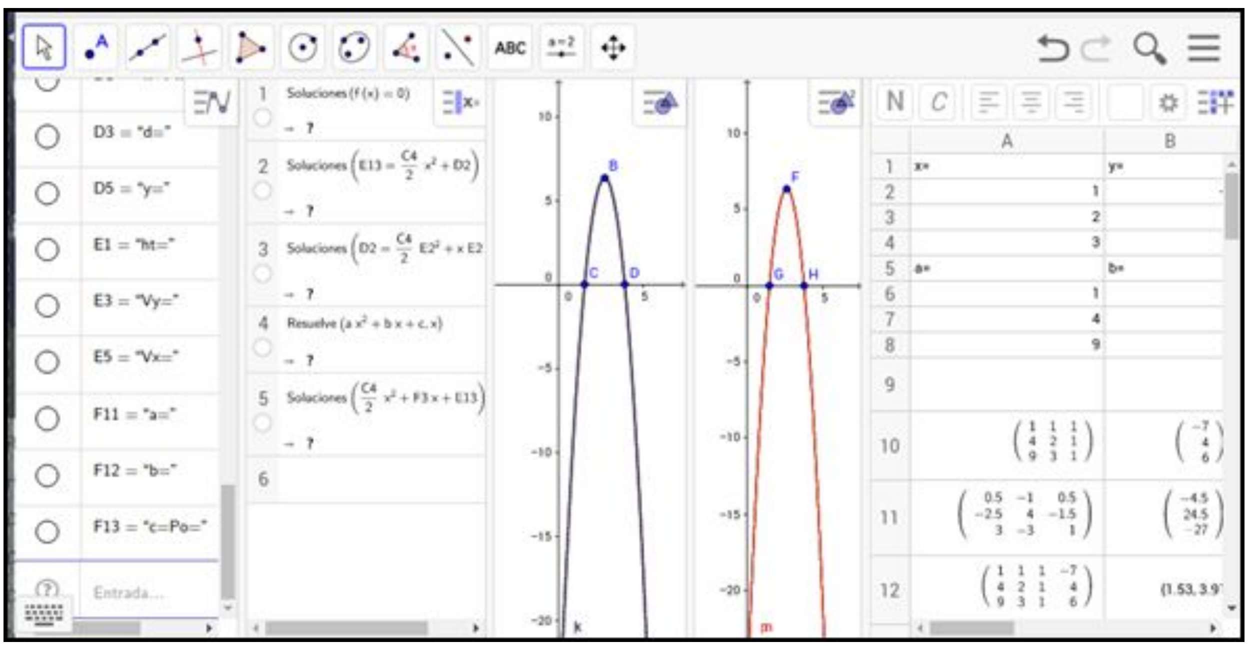


Figura 5. Lanzamiento parabólico estudiado como desplazamiento en el espacio y como tiro parabólico. (Pantalla de GeoGebra)

En las Figuras 4 y 5, se usa el contexto de los lanzamientos con trayectorias parabólicas desde dos puntos de vista. El lanzamiento visto en función de las trayectorias que dibujan en el espacio y ese mismo lanzamiento visto con relación a la altura del proyectil lanzado y el tiempo que tardan antes de que choquen con algo y reboten. La Figura 4, solo trata la parte de la trayectoria en el espacio en diversos contextos y tipos de parábolas, mientras que la Figura 5, presenta la situación de dos parábolas relacionadas con el mismo lanzamiento, donde al obtener una de ella, se puede obtener la segunda y este Applet es usado para los SEL de 3x3 y de 2x2.

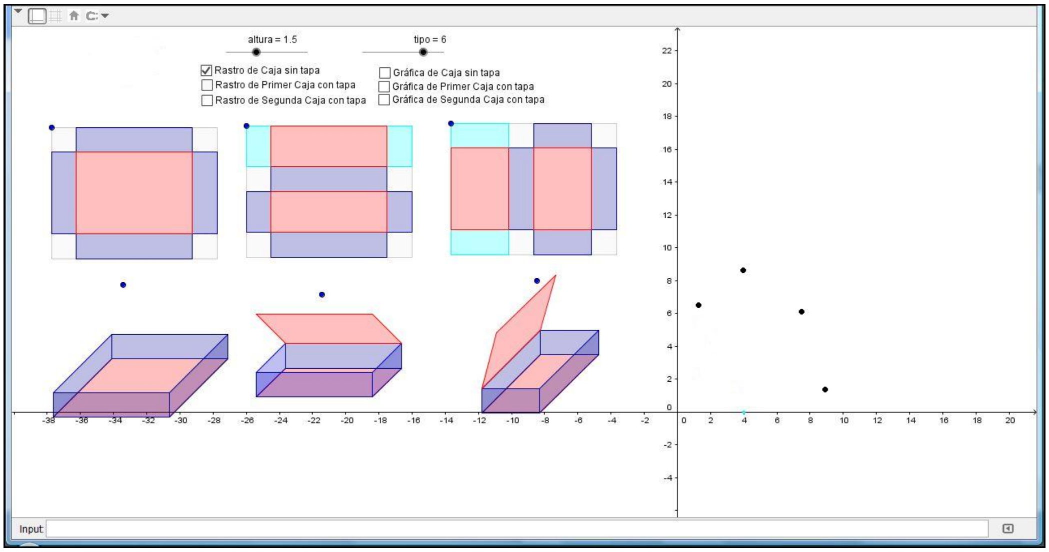


Figura 6. El estudio de los polinomios cúbicos usando el contexto del diseño de recipientes. (Pantalla de GeoGebra)

Finalmente, en la Figura 6, se usa el contexto del diseño de recipientes para estudiar los polinomios cúbicos, que por medio de la factorización deberá descifrarse y con este Applet tratamos SEL de 3x3 y de 4x4. En toda esta última parte de la investigación, los estudiantes trabajan con los SEL, sin graficar líneas y partiendo de modelos que claramente no son lineales, sin embargo, los estudiantes lograron generar los planteamientos de los SEL con poca ayuda, lo cual resulto satisfactorio.

Todos los Applets usados y las construcciones generadas para el curso con tecnología digital, fueron diseñados para que los estudiantes aprovecharan en todo lo posible el visualizar simultáneamente diversas representaciones y establecer sus relaciones, a través de la manipulación que la geometría dinámica permite efectuar.

Resultados y conclusiones

En el enfoque tradicional con lápiz y papel, tanto el profesor como los estudiantes dedican buena parte del tiempo para revisar y practicar las diversas formas de resolver, más que plantear los SEL estudiados. En el enfoque que proponemos con el uso de tecnología digital, mientras tanto, gran parte del tiempo se empleó para el planteamiento y la diversificación de aplicaciones de software para responder a los cuestionamientos hechos.

Durante todo el proceso de experimentación, se observó un desenvolvimiento parecido en ambos grupos de estudio, los cuales evidencian que, con el uso de esta diversidad de contextos, se logró un enriquecimiento de los significados de los objetos matemáticos emergentes construidos por los estudiantes en concordancia con lo establecido en el EOS; esto sucedió con algunas diferencias provocadas por el enfoque dado al curso en cada caso, diferencias que vale la pena comentar.

Los estudiantes que ejecutaban el álgebra en la computadora se mostraron más propositivos en general que los estudiantes que resolvían los SEL en sus cuadernos, de lo observado queremos concluir que lograron alcanzar un grado de competencia tal, con el uso de GeoGebra, que podían despreocuparse de la presión de estar resolviendo el SEL y de esta manera, ocupar ese tiempo en pensar adicionalmente en la situación problema.

Además, la rapidez para dar respuesta a cuestionamientos planteados adicionalmente, aumentó de manera significativa, según se observó en los estudiantes muestreados. Esto es, se observó un mejor uso matemático en situaciones similares, así como una mejor replicación en situaciones nuevas en las que los estudiantes que usaron computadora tendieron a generalizar mejor el uso de sus herramientas para el planteamiento que los estudiantes del curso tradicional. La más notable diferencia observada, entre los estudiantes de enseñanza tradicional y los de enseñanza con tecnología digital, es la tendencia a usar las diferentes representaciones disponibles para la interpretación de la situación problema. Los estudiantes del grupo de enseñanza con tecnología digital usaban las múltiples representaciones, lo cual pudo deberse a que la implementación de las situaciones siempre requería del uso de varias de las vistas de GeoGebra y esto les daba ventaja sobre los estudiantes del grupo tradicional; además, estos estudiantes también aprovechaban las posibilidades que los Applets digitales tienen para presentar cualquier cantidad de escenarios diversos.

Sabemos que son pocas las observaciones hechas hasta el momento y ciertamente que buscamos continuar con esta investigación en los subsiguientes cursos, pero al momento pensamos que esta primera observación arrojó cosas interesantes que debemos intentar medir en el futuro cercano.

Consideramos que esta investigación puede abonar a la justificación de cambio en el paradigma de lo que significa enseñar y aprender álgebra, al menos para el nivel superior y que debemos continuar ampliando la investigación para observar todos los tipos de estudiantes.

Referencias bibliográficas

Ávila, J. y Ávila, R. (2016). Desarrollo de competencias para usar diversas aplicaciones de software para la resolución de problemas en los cursos de matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 30*, pp. 1612-1620.

Ávila, J. (2016). Usando el cálculo de volúmenes de recipientes para construir significados en la factorización de expresiones cúbicas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 30*, pp. 773-781.

Ávila, J. y Ávila, R. (2015). El uso de tecnología digital para promover nuevas formas de aprendizaje. *AMIUTEM, 2,* 37-39.

Font, V.; Godino, J. y D´Amore, B. (2007). *Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática*. Recuperado de http://www.ugr.es/loc.

Godino, J. (2010). *Perspectiva de la didáctica de la matemática como disciplina tecnocientífica.* Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino

Font, V. (2007). Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *La gaceta de la RSME*, *10*(2).

Hitt, F. (2009). Resolución de situaciones problema y desarrollo de competencias matemáticas en ambientes de aprendizaje en colaboración, debate científico y auto-reflexión (ACODESA), *Primer Seminario sobre Resolución de Problemas y el Uso de la Tecnología Computacional*, pp. 9-21.

CONJETURAS GEOMÉTRICAS Y GEOGEBRA

Elizabeth Milagro Advíncula Clemente
Pontificia Universidad Católica del Perú. (Perú)
eadvincula@pucp.edu.pe

Resumen
En el presente taller resolveremos problemas que involucran la realización de construcciones geométricas, usando el GeoGebra como medio para estimular la exploración y el descubrimiento de propiedades. Nuestro objetivo es analizar el papel del GeoGebra en la elaboración y verificación de conjeturas, y en la generalización de propiedades cuando los participantes resuelven problemas geométricos. Nuestras actividades han sido diseñadas tomando en cuenta aspectos de la teoría de Van Hiele (1957) y del enfoque instrumental de Rabardel (1995). Finalmente, nos interesa promover una reflexión entre los docentes participantes acerca del uso del GeoGebra en la resolución de problemas geométricos.

Palabras clave: conjeturas, GeoGebra

Abstract
In this workshop we will solve problems that involve the development of geometric constructions using GeoGebra as a means to stimulate the exploration and discovery of properties. It is aimed at analyzing the role of GeoGebra in the elaboration and verification of speculations and in the generalization of properties while the participants solve geometric problems. Our activities have been designed taking into account the aspects of the theory of Van Hiele (1957) and the instrumental approach of Rabardel (1995). Finally, we want to encourage participating teachers to reflect on the use of GeoGebra to solve geometric problems.

Key words: conjectures, GeoGebra

Antecedentes

Este trabajo surge al observar las dificultades que presentan nuestros estudiantes cuando resuelven problemas de geometría. Generalmente, tienen dificultades para realizar construcciones geométricas así como para identificar las propiedades necesarias para cada problema. Por ello consideramos que es muy importante crear espacios donde los estudiantes tengan la posibilidad de explorar y manipular los objetos geométricos con el fin de descubrir sus propiedades, así como elaborar y validar sus conjeturas. En este sentido, coincidimos con Álvarez, Ángel, Carranza y Soler-Álvarez (2014) cuando señalan que la actividad matemática debe estar en pro de la producción y validación de conjeturas, generalidades, proposiciones, entre otros procesos que potencien el pensamiento matemático.

Consideramos que debemos promover espacios para que los estudiantes elaboren sus conjeturas y las verifiquen o validen desde la educación básica regular, pero para ello es necesario que los docentes estén conscientes de la importancia que tienen estos procesos en el desarrollo de otros procesos como la demostración matemática, y en general, en el desarrollo de habilidades matemáticas. Al respecto, Marmolejo y Moreno (2011) señalan que la demostración es un proceso que produce razonamientos matemáticos, pero al desarrollarla surge la necesidad de explicar, argumentar, conjeturar, probar y razonar de manera deductiva.

Por otro lado, consideramos que debemos incorporar el uso del *software GeoGebra* en las actividades de exploración y elaboración de conjeturas, debido al dinamismo y flexibilidad que este presenta para realizar construcciones geométricas y modificaciones inmediatas a las mismas, facilitando así la visualización, el descubrimiento de características propias de cada objeto geométrico y el reconocimiento de propiedades invariantes en los objetos geométricos involucrados (Madama y Curbelo, 2012).

Por todo lo mencionado, nuestro taller está dirigido a profesores de Matemática de educación secundaria por dos razones. La primera es que actualmente todo docente requiere desarrollar competencias tanto matemáticas como digitales para el desarrollo exitoso de su práctica docente. La segunda es que todo docente debe promover el desarrollo del pensamiento geométrico en sus estudiantes y en este sentido el *GeoGebra* es una herramienta muy útil pues permite explorar; descubrir; elaborar, refutar y verificar conjeturas; encontrar contraejemplos; comprobar propiedades y realizar generalizaciones.

Enfoque teórico

En nuestro trabajo consideramos aspectos de la teoría de Van Hiele (1957) y del enfoque instrumental de Rabardel (1995). El modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele (1957) nos parece pertinente ya que en su propuesta considera que tanto las deducciones informales como las formales son fundamentales en el desarrollo del pensamiento geométrico de una persona. Consideramos que en el nivel 3 de razonamiento geométrico de Van Hiele, deducciones informales, se encuentran la elaboración y verificación de conjeturas, ya que en este nivel se propone el descubrimiento de propiedades y la comprensión de definiciones geométricas. Asimismo, para trabajar conjeturas y validaciones con los estudiantes, creemos que primero debemos trabajar estos procesos con los profesores para que luego ellos estimulen a sus estudiantes y promuevan el desarrollo de habilidades geométricas.

Por otro lado, el enfoque de Rabardel (1995), también nos parece pertinente ya que nos permitirá analizar las acciones de los participantes e identificar los esquemas de utilización que construyen y movilizan cuando interactúan con el *GeoGebra* al resolver problemas geométricos, y elaborar y verificar conjeturas. Es decir, nos permitirá analizar la génesis instrumental que se da cuando el *GeoGebra* se transforma de artefacto a instrumento y los procesos de instrumentalización e instrumentación que forman parte de este proceso.

Metodología y diseño de actividades

Nuestro trabajo sigue una metodología cualitativa pues nos interesa profundizar en la problemática y describir detalladamente los aspectos que nos interesan. En nuestro trabajo no interesa describir como los estudiantes resuelven problemas geométricos, elaborando conjeturas relacionadas con propiedades geométricas, a partir de la exploración y manipulación de objetos geométricos, y luego verificándolas o validándolas, apoyados con el *software GeoGebra.*

Este taller se desarrollará en dos sesiones y en un laboratorio de computación. En cada sesión tendremos, en primer lugar, un trabajo individual y luego una discusión grupal para intercambiar estrategias de solución y diversos modos de validación de conjeturas.

A continuación mostramos los problemas diseñados para ser trabajados con docentes de Matemática, tanto de nivel secundario como superior.

Problema 1

En un cuadrado $ABCD$ inscriba otro cuadrado $MNPQ$ de modo que sus vértices M, N, P y Q pertenezcan a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$, respectivamente.

a) ¿Es posible construir un cuadrado $MNPQ$ con la condición dada? Justifique su respuesta.
b) Si la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, indique si la solución es única o muestre todas las soluciones posibles. Explique.

Problema 2

En un triángulo rectángulo ABC, sobre la hipotenusa $\overline{AC}$se ubica un punto P. Luego se traza$\overline{PI}$ perpendicular a $\overline{AB}$(I en $\overline{AB}$) y $\overline{PJ}$ perpendicular a $\overline{BC}$ (Jen $\overline{BC}$).

a) Determine la posición del punto P de modo que la longitud de $\overline{IJ}$ sea mínima. Justifique su respuesta.
b) ¿Para cuántas posiciones del punto P la longitud de $\overline{IJ}$no es mínima?
c) Escriba una conjetura relacionada con esta situación y verifíquela.

Problema 3

En un cuadrilátero $ABCD$, se ubican los puntos medios M, N, P y Q de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$, respectivamente.

a) ¿Qué tipo de cuadrilátero es $MNPQ$? Justifique.
b) ¿Existe alguna relación entre las áreas de las regiones $ABCD$ y $MNPQ$? Explique.
c) ¿Es posible que $MNPQ$ sea un rectángulo? Si es posible, determine qué tipo de cuadrilátero es $ABCD$. Justifique.
d) ¿Es posible que $MNPQ$ sea un rombo? Si es posible, determine qué tipo de cuadrilátero es $ABCD$. Justifique.
e) Escriba una conjetura relacionada con esta situación y verifíquela.

Problema 4

En un cuadrado $ABCD$ inscriba un triángulo equilátero de modo que uno de sus vértices coincida con uno de los vértices del cuadrado y los otros dos pertenezcan a dos lados de dicho cuadrado.

a) ¿Es posible realizar esta construcción? De ser el caso, muestre todas las soluciones posibles. Justifique su respuesta.
b) Escriba una conjetura relacionada con esta situación y verifíquela.

A continuación mostramos algunos resultados obtenidos al trabajar los dos primeros problemas en el taller realizado en la Relme 31, con docentes de educación secundaria y de educación superior.

Algunos resultados

A modo de ejemplo, mostramos algunos resultados obtenidos en el taller realizado con docentes de Matemática, durante la Relme 31. En este taller trabajamos los dos primeros problemas propuestos tanto con docentes de educación secundaria como con docentes del nivel superior.

En el primer problema, observamos que los docentes tuvieron dificultades para determinar si el problema tenía una o más soluciones. La mayoría de docentes ubicó los vértices M, N, P y Qen los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$; y concluyó que esta era la única solución, tal como podemos ver en la siguiente figura:

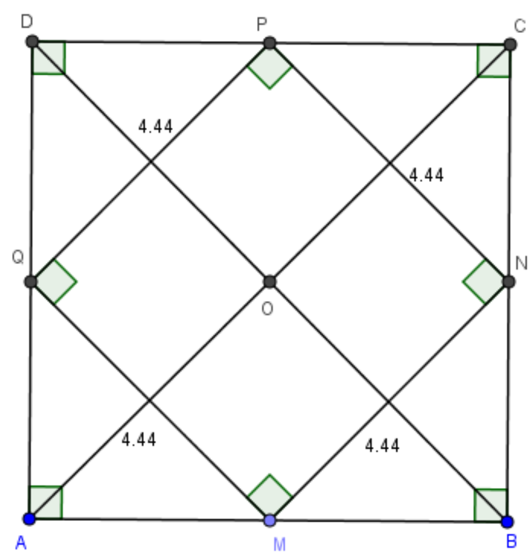


Figura 1. Respuesta de un docente al problema 1. (Elaboración propia)

Podemos afirmar que a pesar de contar con el *GeoGebra* como herramienta de apoyo, los docentes no lograron determinar más de una solución. Otra solución encontrada fue hacer coincidir los vértices de ambos cuadrados de modo que $ABCD$sea congruente $MNPQ$.

Algunos docentes sospechaban que había más soluciones, pero no lograron identificarlas. Esto último pone en evidencias que los docentes no estaban instrumentalizados con el *GeoGebra* y tampoco con el concepto de cuadrado. También, podemos comentar que los docentes no estaban familiarizados con la resolución de problemas que incluían más de una solución o con la resolución de problemas que implicaban la elaboración de una conjetura que debían validar para dar su respuesta.

En el segundo problema, observamos que los docentes tuvieron dificultades para responder al ítem a) pues no estaban instrumentalizados con el concepto de rectángulo, específicamente con las diagonales de un rectángulo, las cuales son congruentes. En este caso, observamos que algunos docentes si estaban instrumentalizados con el *GeoGebra* pues usaban adecuadamente las herramientas de arrastre y de medidas, de distancia o longitud, para comprobar sus conjeturas respecto a segmentos congruentes como eran los lados paralelos del rectángulo construido donde $\overline{IJ}$ era una de sus diagonales. A continuación mostramos la construcción geométrica de un docente.

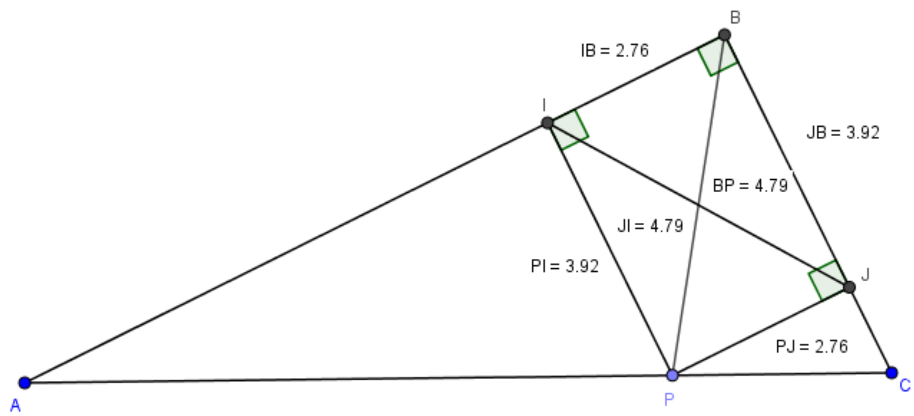


Figura 2. Construcción geométrica de un docente al problema 2. (Elaboración propia)

Consideraciones finales

A modo de conclusión, podemos mencionar que el uso del *GeoGebra* en la resolución de problemas geométricos permite la realización de construcciones geométricas dinámicas e interactivas, que pueden ser modificadas de manera casi inmediata, lo cual facilita el desarrollo del pensamiento geométrico. Asimismo, podemos afirmar que el *GeoGebra* ayuda a los participantes a explorar y descubrir propiedades geométricas, así como elaborar y verificar conjeturas, lo cual contribuye con el desarrollo de otros procesos como la demostración y la argumentación.

Por otro lado, en observaciones realizadas anteriormente con profesores de Matemática de educación secundaria encontramos que algunos presentan dificultades para apropiarse de las herramientas que ofrece el *GeoGebra,* y otros, dificultades para validar o justificar sus conjeturas. Por ello, en nuestro taller reflexionaremos sobre la enseñanza-aprendizaje de la geometría con apoyo del *GeoGebra*.

Las actividades diseñadas para ser trabajadas con apoyo del *GeoGebra* permitirán generar espacios donde los participantes puedan construir figuras, explorar y descubrir relaciones y propiedades geométricas, identificar las condiciones necesarias para resolver problemas, elaborar y validar conjeturas, justificar y argumentar sus soluciones y procedimientos utilizados.

Referencias bibliográficas

Álvarez, I., Ángel, L., Carranza, E. & Soler-Álvarez, M. (2014). Actividades matemáticas: Conjeturar y argumentar. *Números Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 85, 75-90.

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.

Gutiérrez, A. (2001). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la Geometría. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia. http://www.altascapacidades.org/uploads/6/3/7/5/6375624/ensenanza_aprendizaje_geometria.pdf Consultado 20/02/2017

Madama, M. & Curbelo, M. (2012). Visualizar, Conjeturar y demostrar utilizando el *software GeoGebra*. *Acta de la Conferencia Latinoamericana GeoGebra,* 109-116.

Marmolejo, E., & Moreno G., (2011) Argumentar-Conjeturar: Introducción a la Demostración. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa CLAME, 24, 509-516.

Rabardel, P. (1995). *Los hombres y las tecnologías*. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos. Traducido por M. Acosta. Colombia: Universidad Nacional de Santander. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas.

Vargas, G. & Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la Enseñanza de la Geometría. *Uniciencia*, 27(1), 74-94.http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=475947762005 Consultado 12/03/2017

USANDO GEOMETRÍA DINÁMICA PARA MOSTRAR DIVERSOS CONTEXTOS DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Jorge Ávila Soria
Universidad de Sonora. (México)
javilas9@gmail.com

Resumen
Con este trabajo queremos compartir con la comunidad de Matemática Educativa, algunas experiencias interesantes, adquiridas en varios foros donde hemos tenido la oportunidad de trabajar diversos tipos de Situaciones Problema relacionados con los Sistemas de Ecuaciones Lineales, donde utilizamos la Geometría Dinámica para generar Manipulables Virtuales y así ayudar a los estudiantes y profesores a visualizar las situaciones estudiadas, de tal manera que se les facilite la comprensión de éstas, así como mejorar las posibilidades de llegar a plantear, de resolver por algún método y de responder los cuestionamientos hechos para cada situación estudiada, usando Sistemas de Ecuaciones

Palabras Clave: geometría dinámica, sistemas de ecuaciones

Abstract
This report is aimed at sharing, with the Mathematics Education Community, some interesting experiences acquired in several forums where we have had the opportunity to work on different types of problem situations related to linear equation system by using Dynamic Geometry Software to generate virtual manipulatives and thus to help students and teachers to visualize the situations studied. It could make easier students' understanding of the situations, and therefore, improve the possibilities to pose, to solve by any method, and to answer the questions made for each situation studied, by using Systems of Linear Equations.

Key Words: dynamic geometry, ecuation systems

Introducción

En este trabajo presentamos varios ejemplos del uso que estamos haciendo de Applets de Geometría Dinámica con GeoGebra; para que, mayormente, los estudiantes de Ingeniería del Nivel Superior en la materia de Álgebra puedan interiorizar las situaciones problema planteadas, a través de la manipulación de los Applets diseñados con este propósito. Este mismo enfoque ha sido presentado a docentes también del Nivel Superior, con el propósito de mostrar nuevas formas de abordar el proceso de enseñanza-aprendizaje con el uso de las tecnologías digitales.

Al presentar los objetos de estudio con la ayuda de GeoGebra, buscamos que los usuarios logren interpretar adecuadamente - con ayuda de la manipulación - las situaciones problema presentadas y puedan llegar a plantear y resolver los Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL) correspondientes, para poder dar respuestas a las interrogantes que les plantea el estudio de esa situación particular.

Fundamentos teóricos

La metodología de diseño y marco teórico están fundamentados en ACODESA (Aprendizaje en Colaboración, Debate científico, y Auto reflexión), propuesta por Hitt (2009), la cual, a su vez, se soporta en marcos teóricos como los de campos conceptuales, de representaciones semióticas, y de situaciones didácticas. ACODESA favorece el uso de manipulables para promover la producción de representaciones funcionales por parte de los estudiantes, lo cual creemos es fundamental para que éstos tengan una mejor retención de las construcciones matemáticas estudiadas.

Además, asumimos la validez de las premisas teóricas del Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y la Cognición Matemática (EOS) de Juan D. Godino, de acuerdo con Font, Godino y D'Amore (2007), en especial las relativas al carácter sistémico de los significados de los objetos matemáticos que parten de concebirlos de naturaleza pragmática antropológica y, en consecuencia, de carácter contextual como Font (2007) lo propone, es decir, partimos de que dichos significados son, esencialmente, los sistemas de prácticas que se utilizan para analizar, interpretar y resolver un cierto tipo de situaciones problémicas; que estos sistemas de prácticas son discursivas y operativas y que los elementos que los constituyen son los medios utilizados en dichas prácticas, tales como el lenguaje, constituido a su vez, por las diversas formas de representación de los objetos matemáticos (como son la tabular, la gráfica, la analítica, la verbal y otras), los procedimientos, los conceptos, las propiedades, los argumentos (utilizados para justificar las propiedades y los procesos que se desarrollan) y los medios tecnológicos, (en este caso, el interés está centrado en el uso de las tecnologías digitales especialmente en el uso de GeoGebra por la facilidad de trabajar en un ambiente de múltiples de representaciones además de su gratuidad).

Al igual que Godino (2010) y Ávila y Ávila (2015), buscamos introducir la tecnología digital como parte integral del proceso de enseñanza aprendizaje y queremos encontrar formas adecuadas de utilizar esas tecnologías digitales en forma científica para que los estudiantes adquieran las competencias necesarias en el uso de software matemático como proponen Ávila y Ávila (2016) y de esa manera, mejorar las capacidades de los estudiantes para afrontar y resolver problemas en el ambiente laboral, de manera que se vuelvan competentes en el uso de diversas herramientas de hardware y software, además de lograr dentro de lo posible el autodidactismo y la inquietud por el aprendizaje continuo.

Metodología de diseño de las actividades

También apoyamos en la metodología ACODESA, para el diseño de los Applets de manipulación que usamos para representar los sistemas dinámicos de la mayoría de los contextos utilizados en el curso para los SEL.

Tanto en la fase individual, como en la fase de trabajo colaborativo dentro del proceso de implementación de las actividades, es importante que los estudiantes accedan a los manipulables cuando lo consideren necesario. Luego del primer acercamiento a la situación de estudio y como parte del trabajo en equipo, dadas unas condiciones iniciales para la situación problema, se deben discutir, las restricciones y las limitaciones, tanto del modelo dinámico, como del modelo matemático.

Para cada situación problema estudiada, siempre plateamos la necesidad de tratar de obtener soluciones manipulando la aplicación del GeoGebra, hasta que llegue el momento de buscar la generación de un modelo matemático que ayude a analizar la situación de estudio pertinente. Como últimos pasos del proceso de implementación de ACODESA, deben darse el debate grupal de ideas, donde luego del debate científico de todas las ideas y observaciones hechas en el grupo, se llegue hasta la institucionalización de los modelos matemáticos que se requieren para contexto de la situación problema en turno.

Este proceso cíclico, volverá a empezar nuevamente, sobre variantes de la misma situación problema o sobre una situación o tema diferente que requiera ser estudiado durante el curso.

Debido al enfoque de diseño de ACODESA que utilizamos, el uso de los Applets de GeoGebra es parte fundamental de lo que entra en juego durante el proceso de aprendizaje, pero adicionalmente, con GeoGebra también promovemos que el estudiante use múltiples vistas en el software al mismo tiempo y aprenda a vincularlas entre sí, para que pueda aprovechar al máximo las múltiples representaciones de los objetos matemáticos que intervienen en la situación de estudio.

Múltiples applets para los sistemas de ecuaciones lineales

Nuestro enfoque de enseñanza está basado en la resolución de situaciones problemas relacionadas con el álgebra, pero en su mayoría, tratamos que las situaciones problema que utilizamos, sean interesantes, surgidas de situaciones reales, familiares con las experiencias de los usuarios y que se estudien recurriendo a múltiples temas de álgebra.

En este caso nos referiremos exclusivamente a las aplicaciones de los SEL, sin tomar en cuenta otros elementos que puedan entrar en juego dentro del curso.

El diseño de nuestros Applets siempre busca que los usuarios vayan descubriendo por medio de su manipulación, algo que los lleve a encontrar en los modelos matemáticos una representación útil para entender la situación problema en estudio, además siempre buscamos que los Applets permitan plantear múltiples situaciones dentro del mismo contexto. Adicionalmente, buscamos favorecer el uso de la representación gráfica y así complementar la representación virtual de objetos.

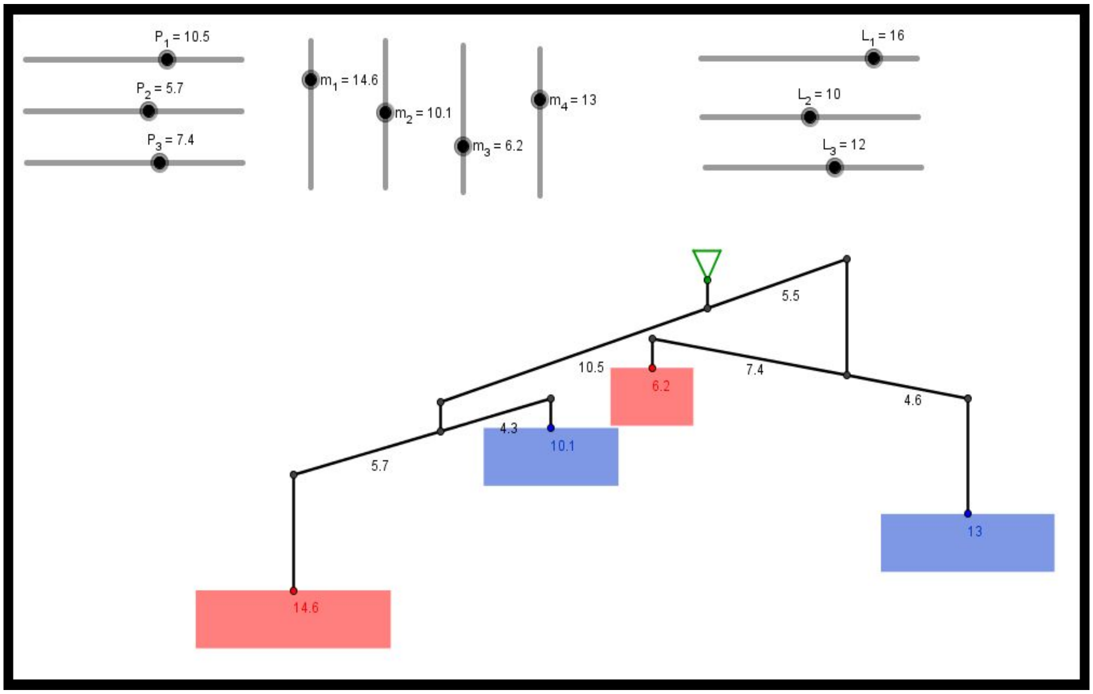


Figura 1: Balanceo de Masas para Generar SEL con Múltiples Soluciones. (Pantalla de GeoGebra)

En la Figura 1 se observa un Applet diseñado para generar problemas en el contexto del balanceo de masas, el cual ha sido usado, tanto con profesores de matemáticas del nivel superior que imparten materias que requieren matemáticas, como con estudiantes de nuevo ingreso al nivel superior, y observamos que, en ambos casos, hubo quienes tuvieron problemas para generar un modelo matemático que sirviera para balancear el modelo dinámico, aun habiendo manipulado el Applet un tiempo que consideramos suficiente.

El diseño de este Applet, en particular, está basado en el tema de los SEL que tienen más de una solución y se diseñó junto con un Applet adicional más sencillo que sirve para hacer que los usuarios recuperen el principio de la palanca de forma intuitiva. También creamos un guion de secuencia didáctica, donde buscamos llevar a los usuarios a la necesidad de obtener un modelo matemático para balancear las masas del Applet e incluso a generalizar la modelación de balanzas aún más complejas.

En el caso específico de este Applet, a los usuarios no les causa gran dificultad poner un sistema sencillo en equilibrio; sin embargo, encontrar múltiples soluciones solamente con la manipulación dinámica, sí se les dificulta. Por esta razón, el planteamiento de un Sistema de Ecuaciones ayuda a la comprensión de escenarios más complejos de este contexto.

Este Applet permite que los profesores puedan plantear una amplia diversidad de situaciones, al ir cambiando la definición de las condiciones iniciales con las que se deben de fijar los deslizadores, de manera que sean muchas las configuraciones que permitan que los alumnos mejoren su entendimiento del funcionamiento de este sistema de balanzas e incluso se pueden llegar a plantear SEL que tengan sólo una solución.

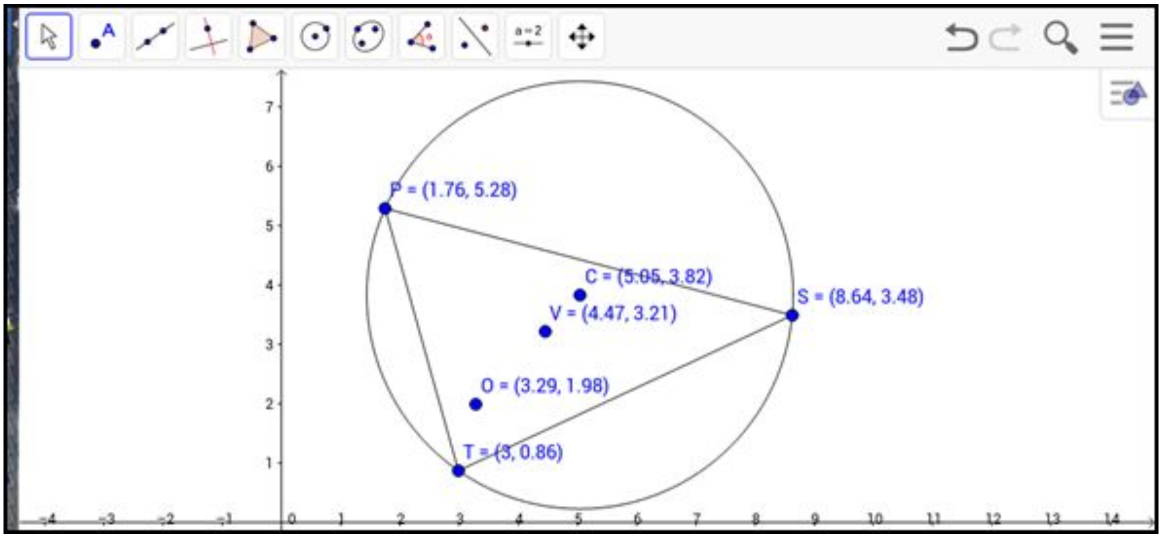


Figura 2. El estudio de los SEL de 2x2 usando contextos geométricos y particularmente triángulos.

En la Figura 2, se continúa con el estudio de los SEL, en esta ocasión se tratan los SEL de 2x2. En este contexto, los estudiantes observan muchas líneas rectas que se intersecan, dichas líneas rectas tienen la forma polinómica de $y - ax = b$. Las intersecciones observadas por los estudiantes, llevan nombres diversos, aún dentro de una misma situación problema en un mismo contexto geométrico. Claro está que la intersección se conoce al resolver el SEL y estas soluciones representan simplemente una intersección entre dos rectas, un vértice, el punto medio de un lado de un triángulo, el centro de una circunferencia o alguno de los centros de un triángulo (incentro, circuncentro, baricentro y ortocentro) y esto sin duda abona a la riqueza contextual de la utilidad de los SEL, además de proporcionar una continua y nutrida práctica del modelado y resolución de SEL de 2x2.

En las Figuras 3 y 4, se usa el contexto de los lanzamientos con trayectorias parabólicas desde dos puntos de vista, el del lanzamiento visto como la trayectoria parabólica descrita en el aire al desplazarse por ejemplo una pelota y el del comportamiento parabólico que sigue la posición en el tiempo de cualquier cosa que es lanzada en tiro parabólico. En ambos casos se usa una forma polinómica de segundo grado: $y - ax^2 - bx = c$ para el desplazamiento y para la posición en el tiempo se usará $y_0 + v_0 t = y + \frac{1}{2}gt^2$.

La Figura 3, solo trata el lanzamiento visto en función de las trayectorias que dibujan en el espacio y lo aborda desde diversos contextos y tipos de trayectorias parabólicas (por ejemplo: Lanzamiento a una canasta, lanzamiento a lo profundo de un pozo o dentro de un pozo, bajo el nivel del suelo, etc.), mientras que la Figura 4 trata la situación de dos parábolas relacionadas con el mismo lanzamiento, donde al obtener una de ellas, se puede obtener la segunda. Esto es, la trayectoria del lanzamiento visto con relación a la posición en el espacio y también con relación a la altura del proyectil lanzado durante el tiempo que se mantiene en el aire, antes de choque con algo o revote. Con estos dos Applets se estudian los SEL de 3x3 para obtener el modelo del desplazamiento y de 2x2 para obtener el modelo de la posición en el tiempo.

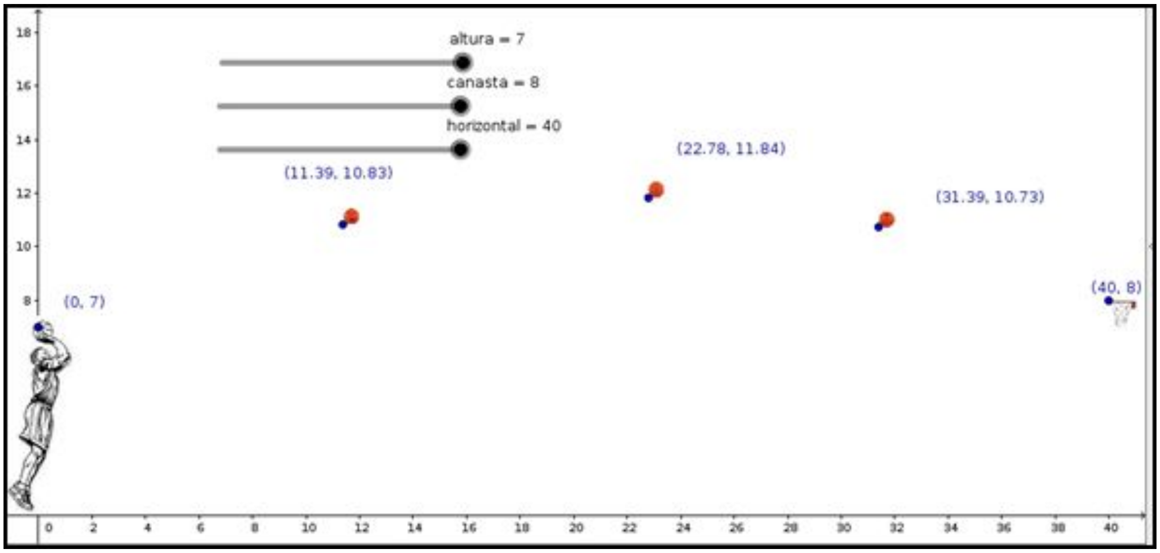


Figura 3. El estudio de los SEL de 3x3 usando múltiples contextos de lanzamientos parabólicos. (Pantalla de GeoGebra)

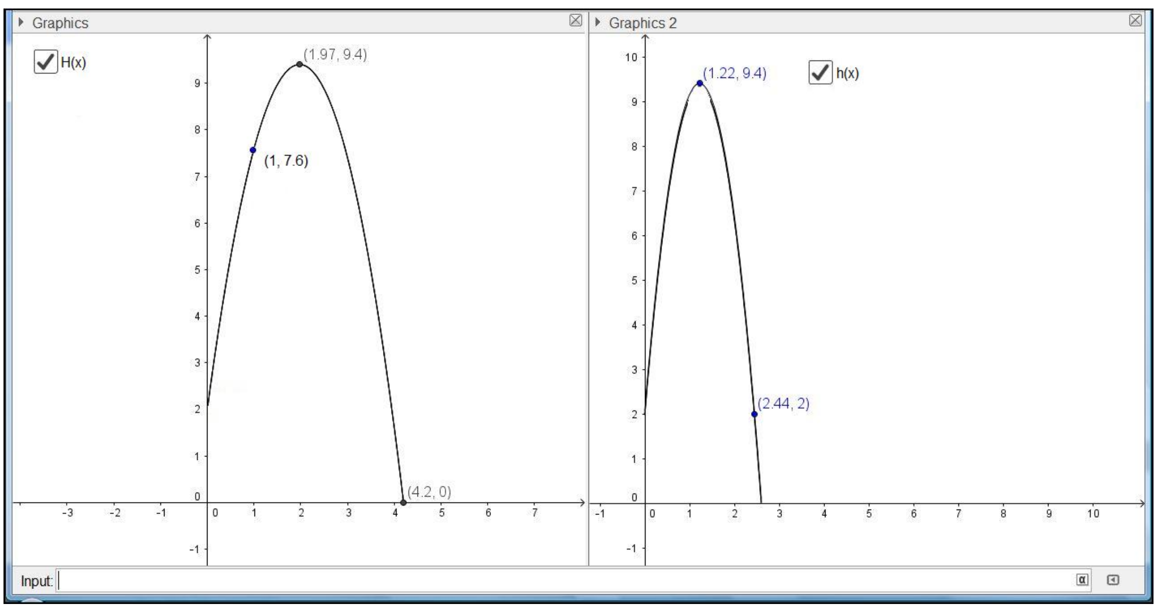


Figura 4. El estudio de los SEL de 2x2 y de 3x3 usando el contexto de las trayectorias parabólicas. (Pantalla de GeoGebra)

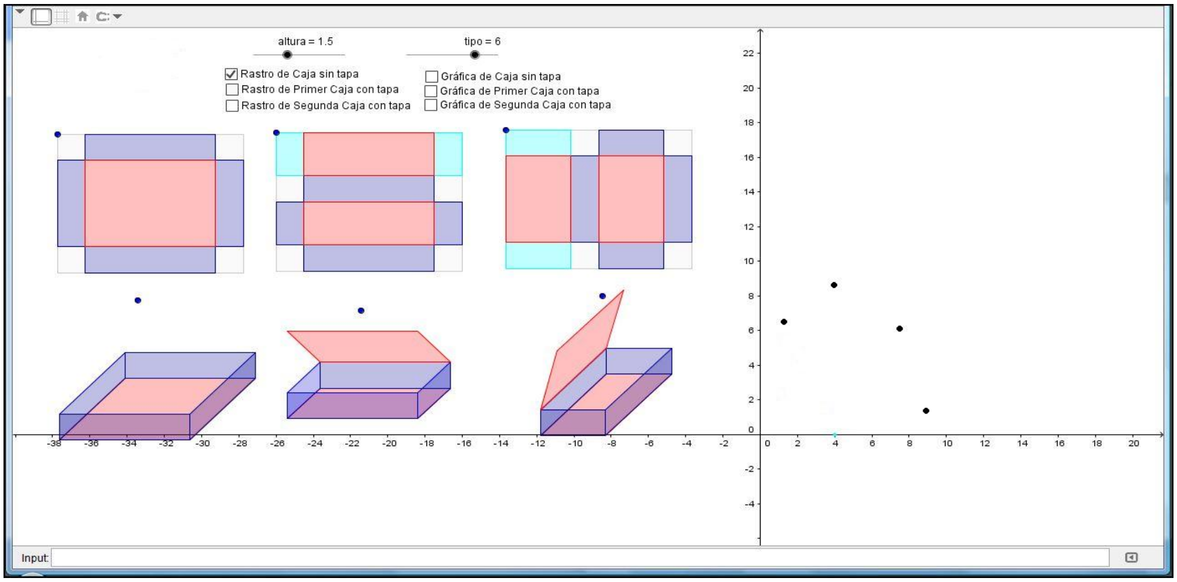


Figura 5. El estudio de los SEL de 3x3 y de 4x4 usando el contexto del diseño de recipientes. (Pantalla de GeoGebra)

Finalmente, en la Figura 5, se usa el contexto del diseño de recipientes para estudiar los polinomios cúbicos, que por medio de la factorización deberá descifrarse. Con este Applet tratamos los SEL de 3x3 y de 4x4, según el tipo de polinomio cúbico que se obtenga y la cantidad de información con que se cuente de recipientes prototipo. Cuando se cuenta con la información de tres prototipos de recipiente, se usa una forma polinómica de tercer grado: $ct + bt^2 + at^3 = V(t)$ para descifrar el tipo de material y recipientes construidos. De la misma manera, cuando se cuenta con la información de cuatro prototipos de recipiente, ahora se usa esta forma polinómica de tercer grado: $d + ct + bt^2 + at^3 = V(t)$ para descifrar el tipo de material y recipientes construidos.

En toda esta última parte del estudio de los SEL, los estudiantes se encuentran familiarizados de tal forma con el proceso de modelación que han ido trabajando desde el modelo donde se usa el polinomio de primer grado (con las líneas rectas) para los SEL de 2x2 en el contexto geométrico, y que luego de haber tenido algunas dificultades para el planteamiento de modelos semejantes a un SEL de 2x2 y de 3x3 de los lanzamientos donde se usa el polinomio de segundo grado (con las parábolas $Po + vot = P(t) - (\frac{g}{2})t^2$ y $c + bx + ax^2 = P(x)$), el salto hacia el planteamiento del modelo de los SEL de 3x3 y de 4x4 del polinomio de tercer grado (con las expresiones cúbicas) para los diseños de los recipientes ya es visualizado por un porcentaje arriba del 60% de los estudiantes del curso.

Resultados y conclusiones

No tenemos duda que estos Applets están acordes con la metodología ACODESA, ya que permiten que los estudiantes reflexionen sobre las diferentes representaciones de cada situación estudiada, así como sobre las herramientas utilizadas; además les permite conocer múltiples escenarios en un corto tiempo y gracias a esta diversidad de escenarios, también tienen la oportunidad de comprender y enriquecer sus significaciones de los objetos matemáticos intervinientes.

Entre las desventajas que puede tener un Applet diseñado con GeoGebra, especialmente para el usuario común, están las necesarias limitaciones de precisión definidas para ese Applet específicamente. Es por esto por lo que, con la retroalimentación y el trabajo colaborativo, buscamos mejorar el aprovechamiento de las experiencias vividas, así como el enriquecimiento de las significaciones personales de los estudiantes. También pensamos que es de suma importancia dejar diariamente, tareas para la reflexión individual que mantengan a los estudiantes en constante reflexionar y replanteamiento de los significados adquiridos, sobre situaciones similares o adicionales a la situación de estudio en curso y así promover que los estudiantes sigan enfocados en la situación problema de estudio.

Gracias a las desventajas que cualquier representación virtual puede tener, sin importar el software usado, creemos que trabajan en favor de que los estudiantes entiendan la necesidad real de contar con un modelo matemático que represente y venga a ayudar en el estudio de una situación problema de estudio, sea para la escuela o para algún problema real o de investigación.

También creemos que, con el uso de estos Applet y el apropiado diseño de situaciones de estudio, junto con las preguntas pertinentes que guíen el proceso de aprendizaje, se logra un cierto grado de generalización en el diseño de los SEL para situaciones con condiciones semejantes a las de los contextos utilizados, sin importar que esos otros contextos no sean cercanos a los estudiados.

A pesar de que los estudiantes logran generar los planteamientos y modelar los SEL, con poca o ninguna ayuda para esta diversidad de contextos utilizados, creemos que persiste la dificultad para la modelación de SEL, en contextos donde la familiaridad es menor, aun cuando se recuerde a los estudiantes que se debe plantear un SEL. En nuestra opinión, resulta muy satisfactorio ver a los estudiantes tener logras y mejorar su desempaño, pues de alguna manera nos dice que tan cerca están de llegar a concretar algún proceso de generalización para el planteamiento o modelación matemática de algún tipo de modelo semejante a un SEL.

Referencias bibliográficas

Ávila, J., Ávila, R. (2016). Desarrollo de competencias para usar diversas aplicaciones de software para la resolución de problemas en los cursos de matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 30*, pp. 1612-1620.

Ávila, J., Ávila, R. (2015). El uso de tecnología digital para promover nuevas formas de aprendizaje. *AMIUTEM, 2,*. 37-39.

Font, V.; Godino, J.; D´Amore, B. (2007). *Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática*. Recuperado de http://www.ugr.es/loc

Font, V. (2007). Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *La gaceta de la RSME*, 10(2).

Godino, J. (2010). *Perspectiva de la didáctica de la matemática como disciplina tecnocientífica.* Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino

Hitt, F. (2009). Resolución de situaciones problema y desarrollo de competencias matemáticas en ambientes de aprendizaje en colaboración, debate científico y auto-reflexión (ACODESA), *Primer Seminario sobre Resolución de Problemas y el Uso de la Tecnología Computacional*, pp. 9-21.

Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa - ALME

Principios:

La revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (en lo sucesivo ALME), es uno de los proyectos académicos del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa – CLAME, en el que se conjuga el respeto a la pluralidad de formaciones, tradiciones y acercamientos educativos, concebida y desarrollada con la función de difundir la Matemática Educativa en un marco en el que pueden relacionarse autores que comparten este interés común, además de nuclear investigadores y profesores de Latinoamérica, y a partir de su divulgación, promover acciones que fomenten la investigación, la actualización, el perfeccionamiento y la profesionalización para el desarrollo científico y social de la región.

La revista ALME se configura como el instrumento de la CLAME para la difusión de trabajos de carácter científico, experiencias, convocatorias e información bibliográfica, dentro del ámbito de la enseñanza/aprendizaje en matemática educativa en sus diferentes formulaciones y presentaciones.

La revista ALME es una revista científica arbitrada por pares y que se atiene a los estándares internacionales de calidad propios de las publicaciones científicas de prestigio.

Misión y objetivos:

La misión de la revista ALME es la difusión de la investigación relativa a la Matemática Educativa, persiguiendo los siguientes objetivos:

- ✓ Difundir, preferentemente en lenguas española y portuguesa, relevantes y rigurosos trabajos de carácter científico, en el ámbito de la matemática educativa.
- ✓ Ofrecer experiencias innovadoras, siempre relativas al ámbito de la matemática educativa.
- ✓ Potenciar la accesibilidad y visibilidad del conocimiento, favoreciendo el entorno de acceso abierto a la literatura científica en matemática educativa.

Política editorial:

- ✓ *Idioma de los trabajos*. Podrán presentarse trabajos en lengua española y portuguesa.
- ✓ *Trabajo original*. Los trabajos enviados a ALME para su publicación deberán constituir una colaboración original no publicada previamente en soporte alguno, ni encontrarse en proceso de publicación o valoración en cualquiera otra revista o proyecto editorial.

- ✓ *Normas de redacción y presentación*. Los trabajos deberán atenerse a las normas de redacción y presentación de carácter formal de ALME. Las colaboraciones enviadas a ALME que no se ajusten a ellas serán desestimadas.
- ✓ *Recepción de originales*. Los editores de ALME acusarán la recepción del manuscrito enviado por el autor/es. El Comité editorial revisará el artículo enviado informando al autor/es, en caso necesario, si se adecua al campo temático de la revista y al cumplimiento de las normas y requisitos formales de redacción y presentación. En el caso de que todos los aspectos sean favorables, se procederá a la revisión del artículo.
- ✓ *Proceso de revisión.* Los artículos propuestos serán evaluados en forma "ciega" por dos integrantes del comité de científico. En el proceso de evaluación se garantizará tanto el anonimato de los autores, así como de los evaluadores.
- ✓ *Información*. Los editores de ALME informarán a los autores de la decisión de aceptación, modificación o rechazo de cada uno de los artículos.
- ✓ *Política de privacidad*. Se mantendrá y preservará en todos los casos y circunstancias el anonimato de los autores y el contenido de los artículos desde la recepción del manuscrito hasta su publicación. La información obtenida en el proceso de revisión y evaluación tendrá carácter confidencial.
- ✓ *Fuentes*. Los autores citarán debidamente las fuentes de extracción de datos, figuras e información de manera explícita y tangible tanto en la bibliografía, como en las referencias. Si el incumplimiento se detectase durante el proceso de revisión o evaluación se desestimará automáticamente la publicación del artículo.
- ✓ *Responsabilidad*. ALME no se hará responsable de las ideas y opiniones expresadas en los trabajos publicados. La responsabilidad plena será de los autores de los mismos.
- ✓ *Formatos*. ALME se presentará en dos formatos, electrónico y CD, que contendrán idénticos contenidos en cada número. El formato electrónico se ofrece desde la página oficial de Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (http://clame.org.mx/actas/) y será de acceso libre y gratuito.
- ✓ *Periodicidad.* ALME tendrá una periodicidad semestral.
- ✓ *Secciones:* Las secciones de la revista ALME son las siguientes:

  1. Análisis del discurso matemático escolar
  2. Propuesta para la enseñanza de las matemáticas
  3. Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar
  4. El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional
  5. Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas

Directrices generales para los autores:

1. El trabajo correspondiente debe haber sido expuesto durante la RELME del año en curso. Es por ello que se solicita **enviar el certificado de la ponencia escaneado**, junto con el escrito.
2. Todo trabajo debe ser inédito y no estar en proceso de evaluación de ninguna otra revista u órgano editorial.
3. Todos los artículos deberán estar escritos en procesador de texto Microsoft Office Word 2007 o superior, tipo de letra Times New Roman, tamaño 12, interlineado sencillo márgenes superior: 2,5 cm; inferior: 2,5 cm; izquierdo: 3,5 cm; derecho: 2,5 cm. Para las expresiones matemáticas debe usarse el **editor de ecuaciones**.
4. Extensión: máximo 7 cuartillas en hoja tamaño carta. Las páginas deben estar **sin numerar**.
5. Las referencias (deben aparecer bajo ese título, por orden alfabético) habrán de colocarse en estilo APA, 6ª edición (American Psychological Association).
6. Las figuras, tablas e imágenes que se incluyan en el artículo deben ser claras, legibles e incluir epígrafes con fuente Times New Roman tamaño 10 que indiquen referencia de las mismas.
7. La estructura base del artículo debe dar cuenta de: Un planteamiento del problema, revisión de literatura de Matemática Educativa, indicaciones generales sobre la estructura teórica (marco teórico o conceptual o fundamentos teóricos), metodología implementada, desarrollo de algunos ejemplos, análisis de los resultados, conclusiones y referencias bibliográficas. Cabe aclarar, que si lo que se está reportando es una investigación en curso, se debe hacer explícito en el escrito para que esto sea considerado en el momento de hacer la evaluación del documento.
8. También se podrán publicar artículos que no son productos de investigaciones, como puede ser: reporte de experiencia en aula, curso corto, taller, grupo de discusión o de laboratorio. Para los casos anteriores la estructura del escrito debería de reportar mínimamente: introducción, desarrollo del tema en donde se hará mención del planteamiento de un problema, así como los fundamentos teóricos y las conclusiones. El artículo deberá mostrar evidencia de revisión de referencias bibliográficas de Matemática Educativa.
9. No se aceptarán trabajos con notas a pie de página.
10. Cada uno de los manuscritos recibidos, pasa por una evaluación doblemente ciega (se retiran los nombres y datos de filiación de los autores de los documentos) y se envía a dos árbitros de nuestra comunidad, cuyos resultados, de manera anónima, son devueltos a los autores. En caso haya controversia entre los dos árbitros, se dará la propuesta a un tercer árbitro. La decisión de los árbitros es inapelable. Las evaluaciones pueden tener tres resultados posibles: Aceptado, Aceptado condicionado a modificaciones o Rechazado.

Normas para la publicación del artículo:

- ✓ Primer renglón: Título del trabajo en mayúscula en español o portugués (**sin punto al final**).
- ✓ Segundo renglón: Nombre de los autores separados por comas si hay más de un autor
- ✓ (**Nombre y Apellido** en ese orden, **sin títulos de grado**).
- ✓ Tercer renglón: Nombre de la institución y país al que pertenecen. **(No se considera válido el uso exclusivo de siglas).**
- ✓ Cuarto renglón: Dirección electrónica de los autores, separados por coma si hay más de uno y **sin hipervínculos**.
- ✓ Quinto renglón: Resumen de no más de 10 renglones de extensión en fuente Times New Roman, tamaño 10.
- ✓ Sexto renglón: palabras clave (a lo sumo cinco). Si son frases, verificar de no extenderse de las cinco palabras.
- ✓ Séptimo renglón: Abstract en inglés, en fuente Times New Roman tamaño 10.
- ✓ Octavo renglón: key words, traducción al inglés de las palabras clave.
- ✓ Noveno primer renglón: Inicia la primera sección del documento.
- ✓ Consideración para citaciones:

  Citas dentro del texto. Las referencias a artículos o libros figurarán en el texto entre paréntesis, indicando el apellido del autor y el año, separados por una coma (Peters, 2001). En el caso de que en una misma referencia se incluyan varios libros o artículos, se citarán uno a continuación del otro por orden alfabético y separados por un punto y coma (García Aretio, 2002; Sarramona, 2001). Si en la referencia se incluyen varios trabajos de un mismo autor bastará poner el apellido y los años de los diferentes trabajos separados por comas, distinguiendo por letras (a, b, etc.) aquellos trabajos que haya publicado el mismo año (Casas Armengol, 1990, 1995, 2000a, 2000b, 2002, 2004). Si el nombre del autor forma parte del texto sólo irá entre paréntesis el año de publicación [Keegan (1992) afirmó que...].

  Citas textuales. Las citas textuales con una extensión menor de 40 palabras irán entrecomilladas y, a continuación y entre paréntesis, se indicará el apellido del autor del texto, el año y la página o páginas de la que se ha extraído dicho texto. Ejemplo: “por educación a distancia entendemos [...] contacto ocasional con otros estudiantes” (Blanco, 1986, p. 16). Si el nombre del autor forma parte del texto, sería así: Como Martínez Sanz (2001, p. 102) señalaba “...”. Las citas de 40 o más palabras deberán aparecer en un bloque de texto independiente, sin comillas y ajustado a la misma altura que la primera línea de un nuevo párrafo. Al final se indicará entre paréntesis, el autor, año y página/s.

- ✓ Consideración para referencias:

  Únicamente se incluirán aquellas que se citan en el texto y deberán ordenarse por orden alfabético en un solo listado, tanto las de formato impreso como electrónico.

El formato será el siguiente:

- *Libro:* Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del libro. Lugar de publicación: Editorial.

  Brzezinski, Z. (1970). La era tecnotrónica. Buenos Aires: Paidós.

- *Revistas:* Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del artículo. Nombre de la Revista, número o volumen (número), páginas que comprende el artículo dentro de la revista, si es que existen.

  García Aretio, L. (1999). Historia de la educación a distancia. RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia, 2 (1), 11-40.

- *Capítulo o artículo en libro*: Apellidos del autor, Iniciales. (Año). Título del artículo o capítulo. En Iniciales. Apellidos del autor/es, (Ed. o Coord., si es el caso), Título del libro. (páginas que comprende el artículo o capítulo dentro del libro). Ciudad: Editorial.

  Oettinger, A. G. (1971). Compunications in the national decision-making process. En M. Greenberger, (Ed.), Computers, communication, and the public interest (73-114). Baltimore: Johns Hopkins Press.

Referencias de formatos electrónicos:

- *Documentos electrónicos:* autor/es (fecha publicación). Título [tipo de medio]. Lugar de publicación: editor. Recuperado de: especifique URL.

  Martín, S. (2011). Educación Aumentada: Realidad o Ficción. Blog CUED. Recuperado de http://goo.gl/w46mpA.

- *Artículos en publicaciones periódicas electrónicas* (Revistas electrónicas)

  Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del artículo. *Nombre de la Revista*, número o volumen y (número), páginas que comprende el artículo dentro de la revista. DOI o en su defecto, recuperado de URL

✓ La información actualizada sobre la forma de citación puede ser consultada en la página de APA (American Psycological Association).

✓ Los esquemas, gráficos, tablas y fotografías deberán ser claros y se presentarán titulados, numerados e insertos en el cuerpo del texto.

Clame Comite Latinoamericano de Matematica Educativa